

A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Nova



VENDA
PROIBIDA

CÓDIGO: 72025-9 TIPO: L



7



**Giovanni
Castrucci
Giovanni Jr.**

391
Renam

A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Escola Municipal Maria Caprom de Oliveira
do Ensino Fundamental (1ª e 2ª séries)
R. Mercúrio Pereira de Carvalho, nº 575
CEP 57740-000 - Carreópolis MG



José Ruy Giovanni

Bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP).
Professor de Matemática em escolas de 1º e 2º graus desde 1960.

Benedito Castrucci

(Falecido em 2/1/1995)

Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).
Ex-professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica e da Universidade de São Paulo.
Ex-professor de escolas públicas e particulares de 1º e 2º graus.

José Ruy Giovanni Jr.

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
Professor de Matemática em escolas de 1º e 2º graus desde de 1985.

**NOVAS
SEÇÕES**
■ Explorando
■ Jornais e
revistas

IMPORTANTE
REVISADO DE ACORDO COM
AS OBSERVAÇÕES DA
AVALIAÇÃO DE
LIVROS DIDÁTICOS
DO MEC-SEF/FNDE



Todos os direitos de edição reservados à

EDITORA FTD S.A.

Matriz: Rua Rui Barbosa, 156 (Bela Vista) São Paulo - SP
CEP 01326-010 - Tel. (0-XX-11) 3253-5011- Fax (0-XX-11) 3284-8500 r. 298
Caixa Postal 65149 - CEP da Caixa Postal 01390-970
Internet: <http://www.ftd.com.br>
E-mail: exatas@ftd.com.br

Editora: Júnia La Scala

Editores assistentes: Arnaldo Rodrigues
Dario Martins de Oliveira
Fabiano A. L. Wolff
Maria Ângela Pontual

Preparação: Célia Sigismondi

Revisão: Fausto Alves Barreira Filho
Solange Martins

Iconografia

Coordenação: Sônia Oddi
Pesquisa: Elizete Moura Santos
Assistente: Maria Rosa Alexandre

Edição de arte e projeto gráfico: Maria Paula Santo Siqueira

Capa: Arte Nova E. G. sobre cromo de
Waldemar Niclevicz/Sagamatha Prod. Ltda.
(A conquista de Waldemar Niclevicz,
primeiro brasileiro a escalar o Everest.)

Ilustrações: Abê, Alberto De Stefano,
Alexandre Argozino Neto, Fê,
Marcos Aurélio Neves Gomes

Desenhos gráficos: Eunice Toyota

Editoração eletrônica/diagramação: EXATA editoração eletrônica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Giovanni, José Ruy, 1937 -
A conquista da matemática - Nova / José Ruy Giovanni,
Benedito Castrucci, José Ruy Giovanni Jr. — São Paulo :
FTD, 1998. — (Coleção a conquista da matemática)

Edição não-consumível. ISBN 85-322-4108-5
Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries.
Suplementado pelo livro do professor.

1. Matemática (Ensino fundamental)
I. Castrucci, Benedito, 1909- II. Giovanni Júnior,
José Ruy, 1963- III. Título. IV. Série.

98-3263

CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: Ensino fundamental 372.7



APRESENTAÇÃO

Os números reais

1. Raiz quadrada exata de um número natural
2. Raiz quadrada aproximada de um número natural
3. Os números racionais e sua representação decimal
4. Os números irracionais
5. Os números reais

A Matemática é geralmente considerada uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra de um gabinete fechado, onde não entram ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores do homem.

Porém, isso só em parte é verdadeiro.

(Bento de Jesus Caraça, matemático português, 1901-1948)

A

Matemática está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem até o uso em complexos computadores.

Pode parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata no mundo em que vivemos; isso pode gerar em você um certo desapontamento. Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. Veja na Economia, por exemplo, o cálculo de juros e porcentagem; na Engenharia os cálculos trigonométricos.

Para entender a Matemática e suas aplicações são necessários dedicação e estudo. Por esse motivo, ao escrever esta coleção, procuramos apresentar a você as linhas mestras desse processo em linguagem simples, sem fugir ao rigor que a Matemática exige.

Os autores

Equações de 1º grau com uma incógnita

19. Equação de 1º grau com uma incógnita
20. Equações racionais de 1º grau com uma incógnita
21. Equações irracionais de 1º grau na incógnita x

1

Os números reais

- | | |
|---|----|
| 1. Raiz quadrada exata de um número racional | 10 |
| 2. Raiz quadrada aproximada de um número racional | 15 |
| 3. Os números racionais e sua representação decimal | 17 |
| 4. Os números irracionais | 18 |
| 5. Os números reais | 22 |

2

Introdução ao cálculo algébrico

- | | |
|--|----|
| 6. O uso de letras para representar números | 28 |
| 7. Expressões algébricas ou literais | 29 |
| 8. Valor numérico de uma expressão algébrica | 32 |
| 9. Uma consideração importante | 35 |

3

Estudo dos polinômios

- | | |
|-------------------------------------|----|
| 10. Monômio ou termo algébrico | 40 |
| 11. Polinômios | 53 |
| 12. Os produtos notáveis | 72 |
| 13. Fatorando polinômios | 81 |
| 14. Cálculo do m.m.c. de polinômios | 93 |

4

Estudo das frações algébricas

- | | |
|---|-----|
| 15. Fração algébrica | 100 |
| 16. Simplificação das frações algébricas | 102 |
| 17. Adição e subtração de frações algébricas | 104 |
| 18. Multiplicação e divisão de frações algébricas | 108 |

5

Equações de 1º grau com uma incógnita

- | | |
|--|-----|
| 19. Equação de 1º grau com uma incógnita | 116 |
| 20. Equação fracionária de 1º grau com uma incógnita | 120 |
| 21. Equações literais de 1º grau na incógnita x | 124 |

Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas

- | | |
|---|-----|
| 22. Equação de 1º grau com duas incógnitas _____ | 130 |
| 23. Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas _____ | 131 |
| 24. Resolução de um sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas _____ | 134 |

Geometria

- | | |
|----------------------|-----|
| 25. Introdução _____ | 152 |
| 26. A reta _____ | 154 |
| 27. Ângulos _____ | 159 |

Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal

- | | |
|--|-----|
| 28. Retas paralelas e reta transversal _____ | 172 |
| 29. Ângulos correspondentes _____ | 175 |
| 30. Ângulos alternos _____ | 176 |
| 31. Ângulos colaterais _____ | 178 |

Polígonos

- | | |
|--|-----|
| 32. O polígono e seus elementos _____ | 186 |
| 33. Perímetro de um polígono _____ | 190 |
| 34. Diagonais de um polígono _____ | 192 |
| 35. Ângulos de um polígono convexo _____ | 195 |
| 36. Ângulos de um polígono regular _____ | 203 |

Estudando os triângulos

- | | |
|--|-----|
| 37. Elementos de um triângulo _____ | 212 |
| 38. Condição de existência de um triângulo _____ | 212 |

39. Os ângulos no triângulo _____	215
40. Classificação dos triângulos _____	218
41. Altura, mediana e bissetriz de um triângulo _____	222
42. Congruência de triângulos _____	229
43. Propriedades do triângulo isósceles _____	234
44. Uma propriedade importante do triângulo equilátero _____	236

11

Estudando os quadriláteros

45. O quadrilátero e seus elementos _____	242
46. Os paralelogramos _____	244
47. Os trapézios _____	249

12

Estudando a circunferência e o círculo

48. Circunferência _____	258
49. O círculo _____	261
50. Uma reta e uma circunferência: posições relativas _____	262
51. Posições relativas de duas circunferências _____	265
52. Arco de circunferência e ângulo central _____	268
53. Ângulo inscrito _____	270
54. Ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência _____	276

B ibliografia _____	281
----------------------------	-----

R espostas dos exercícios _____	282
--	-----

1

Os números reais

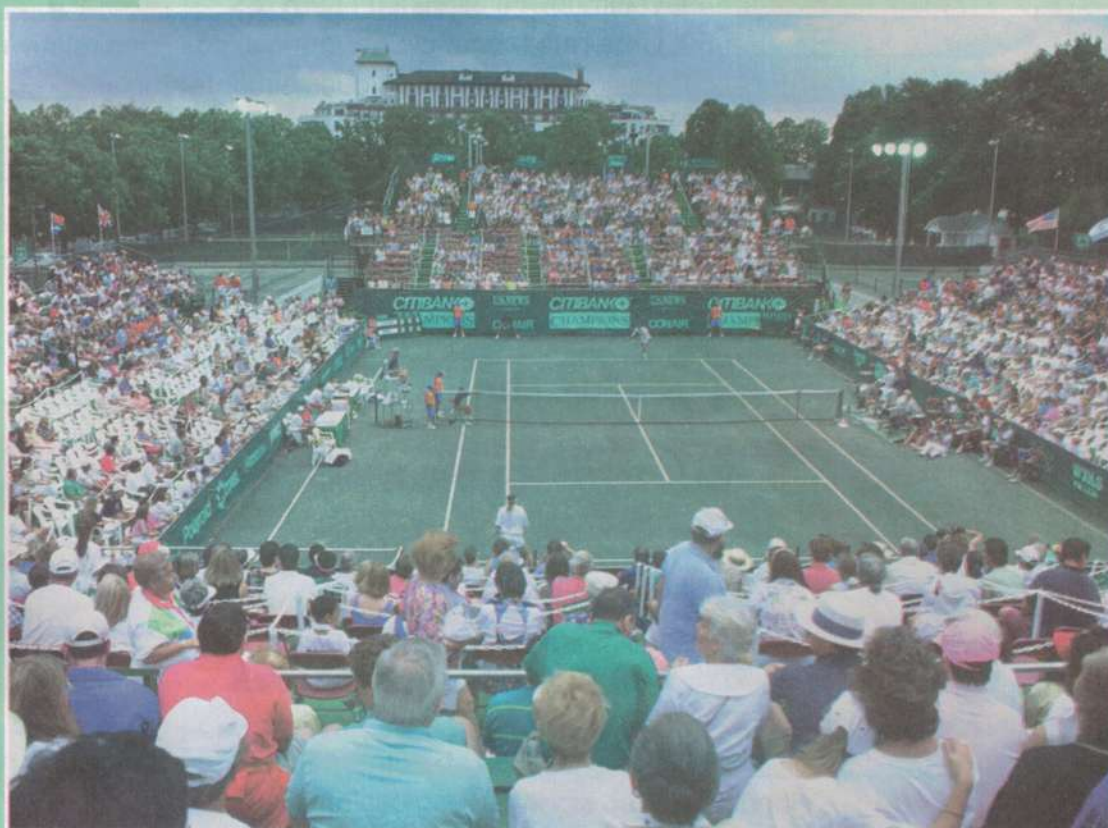
Nas séries anteriores, você estudou os conjuntos numéricos:

\mathbb{N} = conjunto dos números naturais

\mathbb{Z} = conjunto dos números inteiros

\mathbb{Q} = conjunto dos números racionais

Desse modo, você foi percebendo a importância dos números na vida diária. Vejamos algumas das suas aplicações.



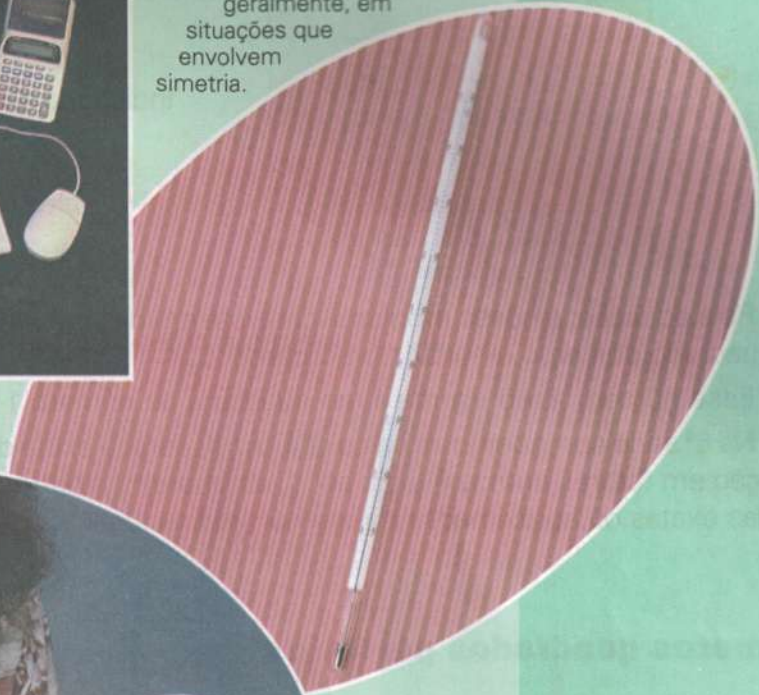
Os números naturais são usados principalmente nos processos de contagem.

M
nais
neces
deter
A
deu e
nam



A forma decimal dos números racionais passou a ser muito usada a partir do aparecimento das calculadoras e dos computadores. A forma de porcentagem é bastante usada em Economia e Estatística.

Os números inteiros são usados, geralmente, em situações que envolvem simetria.



Os números racionais aparecem, geralmente, em situações que exigem registro de medidas.

Nesta Unidade, você vai aprender novos números: os irracionais e os reais. O aparecimento desses números está ligado à necessidade de obter números que representam soluções de determinadas equações.

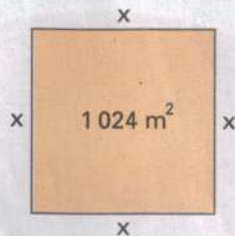
A importância dos números é tão grande na sociedade que deu ensejo a uma célebre frase de Platão: "Os números governam o mundo".



RAIZ QUADRADA EXATA DE UM NÚMERO RACIONAL

Consideremos a seguinte situação:

Um terreno quadrado tem $1\,024\text{ m}^2$ de área. Quanto mede cada lado do terreno?



Indicando a medida do lado pela letra x , temos:

$$x^2 = 1\,024$$

Pela equação, o nosso problema consiste em determinar um número racional x que elevado ao quadrado dê como resultado o número $1\,024$.

Esse número x representa a raiz quadrada do número $1\,024$.

Na 6ª série aprendemos a calcular a raiz quadrada exata de um número racional pela decomposição em fatores primos. Nesta série, estudaremos outros métodos para obter as raízes quadradas exatas ou aproximadas de um número racional.

Números quadrados perfeitos

Os números que são quadrados de outros números são denominados números *quadrados perfeitos*.

Exemplos:

- 36 é um número quadrado perfeito, pois $36 = 6^2$.
- 100 é um número quadrado perfeito, pois $100 = 10^2$.

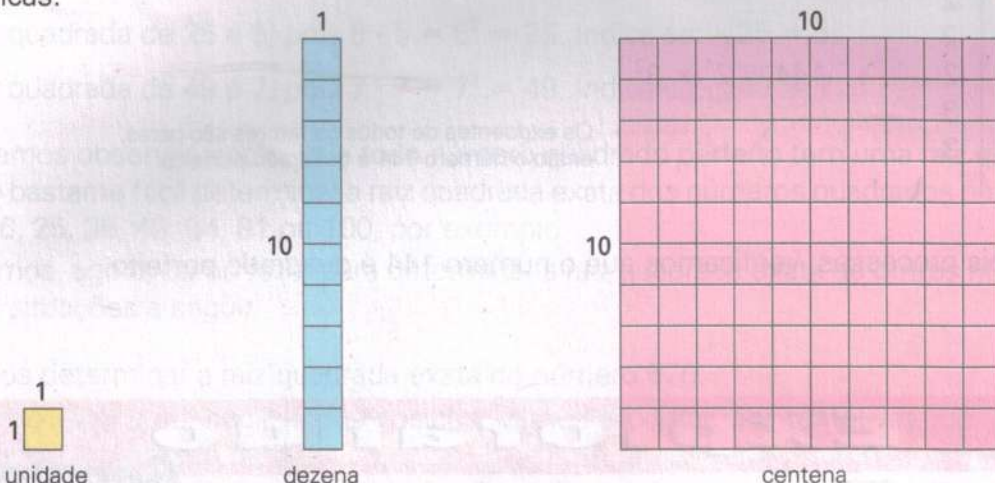
A seguir, você tem uma tabela de números que são quadrados perfeitos. Esta tabela será muito útil no cálculo da raiz quadrada.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
n²	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900	6 400	8 100	10 000

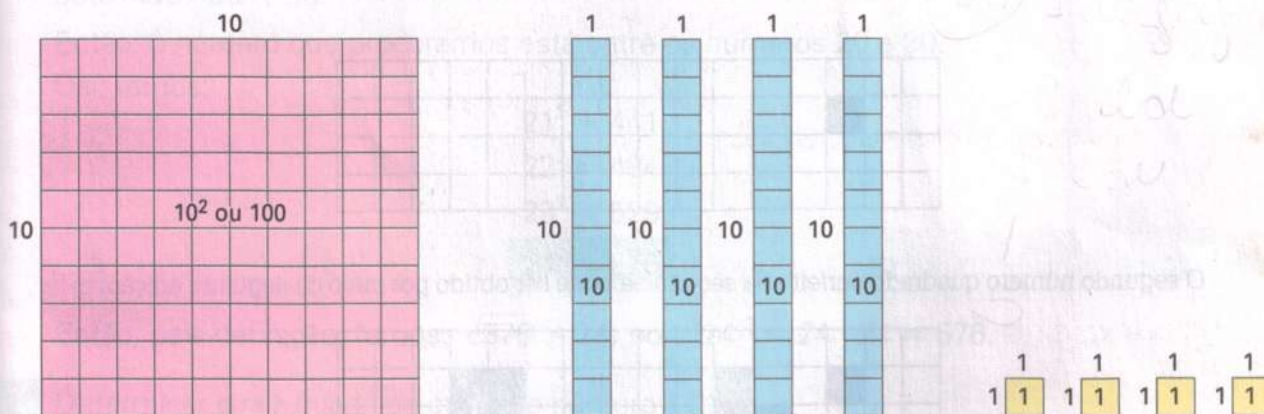
Como podemos reconhecer se um número é quadrado perfeito?

Consideremos, por exemplo, o número 144.

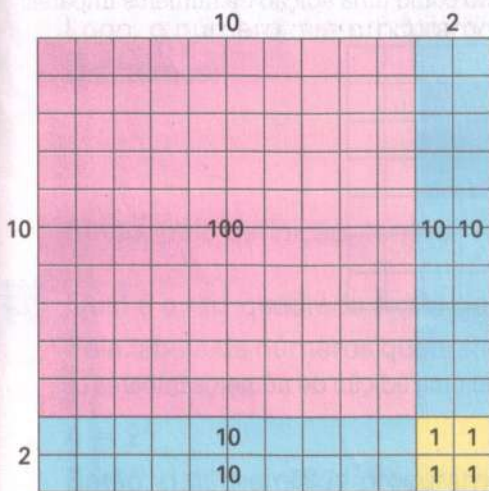
Experimentalmente, verificamos se 144 é quadrado perfeito usando as seguintes figuras geométricas:



Então, o número 144 deve ser formado pelas figuras:



Juntas, essas figuras vão formar um outro quadrado.



Como não sobrou nenhuma figura, podemos dizer que 144 é um número quadrado perfeito.

O quadrado da figura ao lado tem 144 unidades de área e a medida do seu lado é de 12 unidades de comprimento, como você pode observar.

Outra maneira de verificar se o número 144 é quadrado perfeito é por meio da fatoração completa do número:

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

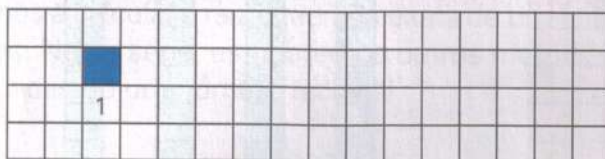
$144 = 2^4 \times 3^2$

Os expoentes de todos os fatores são pares, então o número 144 é quadrado perfeito.

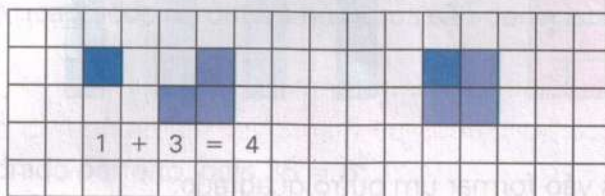
Pelos dois processos, verificamos que o número 144 é quadrado perfeito.

Explorando Geometria

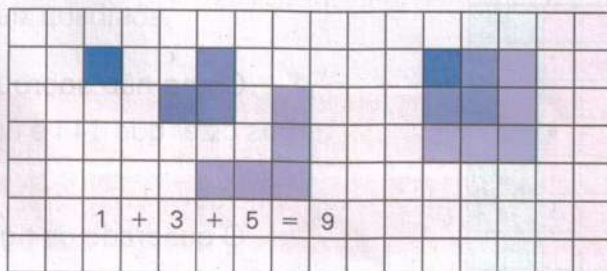
Veja como representamos o primeiro número da seqüência de quadrados perfeitos na malha quadriculada:



O segundo número quadrado perfeito da seqüência pode ser obtido por meio da seguinte adição:



E assim por diante, cada número quadrado perfeito pode ser escrito como uma adição de números ímpares:



■ Represente em uma malha quadriculada e escreva na forma de uma adição de números ímpares os seguintes números quadrados perfeitos:

a) 16

b) 25

c) 36

Raiz quadrada exata de um número racional

Se um número representa um produto de dois fatores iguais não-negativos, então cada fator é a *raiz quadrada* desse número. Por exemplo:

1. A raiz quadrada de 25 é 5, pois $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$. Indica-se: $\sqrt{25} = 5$.
2. A raiz quadrada de 49 é 7, pois $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$. Indica-se: $\sqrt{49} = 7$.

Podemos observar, então, que todo número quadrado perfeito tem uma raiz quadrada exata, sendo bastante fácil determinar a raiz quadrada exata dos números quadrados perfeitos como 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 ou 100, por exemplo.

Vejamos, agora, como fazer para determinar a raiz quadrada exata de outros números, conforme as situações a seguir.

1ª Vamos determinar a raiz quadrada exata do número 576.

Usando alguns conhecimentos básicos, vamos procurar, por tentativas, um número que elevado ao quadrado dê 576.

Pela tabela de números quadrados perfeitos, verificamos que o número 576 está entre 400 e 900.

$$400 = 20 \cdot 20 = 20^2$$

$$900 = 30 \cdot 30 = 30^2$$

Então, o número que procuramos está entre os números 20 e 30.

Daí, temos:

$$21^2 = 441$$

$$22^2 = 484$$

$$23^2 = 529$$

$$24^2 = 576$$

Então, pela definição, temos: $\sqrt{576} = 24$, pois $(24)^2 = 24 \cdot 24 = 576$.

2ª Determinar a raiz quadrada exata do número 1 024.

Pela tabela de números quadrados perfeitos, verificamos que o número 1 024 está entre 900 e 1 600.

$$900 = 30^2$$

$$1\ 600 = 40^2$$

Logo, o número que procuramos está entre os números 30 e 40.

Daí, temos:

$$31^2 = 961$$

$$32^2 = 1\ 024$$

Então, pela definição, temos: $\sqrt{1\ 024} = 32$, pois $(32)^2 = 32 \cdot 32 = 1\ 024$.

3ª Qual é a raiz quadrada exata de 1,96?

Pela tabela de números quadrados perfeitos, verificamos que o número 1,96 está entre 1 e 4.

$$1 = 1^2$$

$$4 = 2^2$$

Então, o número que procuramos está entre os números 1 e 2.

Daí, temos:

$$1,1^2 = 1,21$$

$$1,2^2 = 1,44$$

$$1,3^2 = 1,69$$

$$1,4^2 = 1,96$$

Então, pela definição, temos: $\sqrt{1,96} = 1,4$.

4ª Qual é a raiz quadrada exata do número 42,25?

Pela tabela de números quadrados perfeitos, verificamos que o número 42,25 está entre 36 e 49.

$$36 = 6^2$$

$$49 = 7^2$$

Logo, o número que procuramos está entre os números 6 e 7.

Daí, temos:

$$6,1^2 = 37,21$$

$$6,2^2 = 38,44$$

$$6,3^2 = 39,69$$

$$6,4^2 = 40,96$$

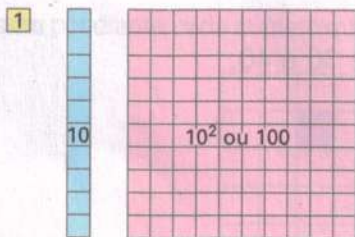
$$6,5^2 = 42,25$$

Então, pela definição: $\sqrt{42,25} = 6,5$.

FIXAÇÃO

1 Usando as figuras geométricas seguintes e uma folha de papel quadriculado, verifique se os números a seguir são quadrados perfeitos:

- a) 121 b) 169 c) 186 d) 441



2 Aplicando a fatoração completa do número, verifique se cada um dos seguintes números é quadrado perfeito:

- a) 625 d) 1 156
b) 784 e) 2 000
c) 1 200

3 Os seguintes números são quadrados perfeitos. Determine a raiz quadrada exata de cada um deles (não se esqueça de consultar a tabela de números quadrados perfeitos).

- a) 484 d) 1 296 g) 4 096
b) 625 e) 1 849 h) 5 625
c) 729 f) 3 025

4 Determine a raiz quadrada exata de cada um dos seguintes números:

- a) 2,25 d) 7,84 g) 37,21
b) 3,61 e) 10,89 h) 51,84
c) 4,41 f) 27,04

5 A medida do lado de um quadrado representa a raiz quadrada da área desse quadrado. Nessas condições, quanto mede o lado do quadrado cuja área é:

- a) $9,61 \text{ m}^2$? b) $72,25 \text{ m}^2$?



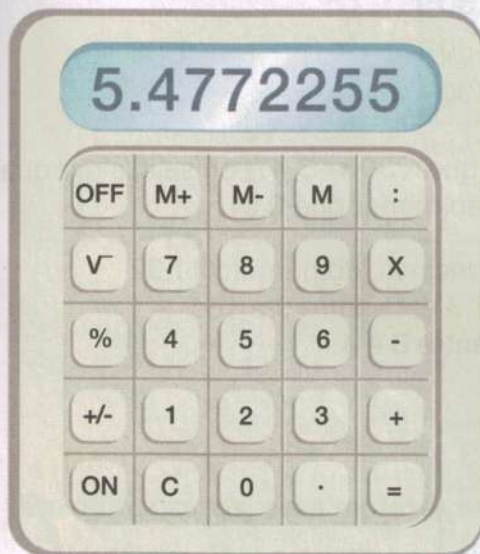
RAIZ QUADRADA APROXIMADA DE UM NÚMERO RACIONAL

Consideremos as seguintes situações:

1ª Qual é a raiz quadrada do número 30?

Consultando a tabela de números quadrados perfeitos, notamos que o número 30 não é quadrado perfeito. Portanto, a raiz quadrada de 30 não é exata.

Para obter um número que representa uma aproximação da raiz quadrada de 30, podemos recorrer a uma calculadora que tenha a função raiz quadrada.



Podemos, então, determinar a raiz quadrada de 30 com a aproximação que quisermos:

- ✓ aproximação até décimos = 5,4 (erro menor que 0,1)
- ✓ aproximação até centésimos = 5,47 (erro menor que 0,01)
- ✓ aproximação até milésimos = 5,477 (erro menor que 0,001)

E assim por diante.

Porém, como nem sempre dispomos de uma calculadora, podemos determinar o número que expressa a raiz quadrada com aproximação de uma ou mais casas decimais, fazendo uma estimativa desse valor.

Vejamos, então, como estimar a raiz quadrada de 30, com os conhecimentos que já temos sobre os números quadrados perfeitos.

- ✓ 30 é um número que está entre os quadrados perfeitos 25 e 36.
- ✓ Como $25 = 5^2$ e $36 = 6^2$, o número procurado está compreendido entre 5 e 6.

Vamos descobrir que número é esse, fazendo tentativas.

$$(5,1)^2 = 5,1 \cdot 5,1 = 26,01 < 30$$

$$(5,2)^2 = 5,2 \cdot 5,2 = 27,04 < 30$$

$$(5,3)^2 = 5,3 \cdot 5,3 = 28,09 < 30$$

$$(5,4)^2 = 5,4 \cdot 5,4 = 29,16 < 30$$

$$(5,5)^2 = 5,5 \cdot 5,5 = 30,25 > 30$$

Observando os cálculos, verificamos que:

- ✓ $\sqrt{30}$ é maior que 5,4 e é menor que 5,5.
- ✓ Os valores 5,4 e 5,5 são os números que representam $\sqrt{30}$ com aproximação menor que 0,1.

Para não termos dois valores, convencionamos que o número procurado corresponde ao menor valor e escrevemos: $\sqrt{30} \cong 5,4$. Assim, a raiz quadrada de 30 é aproximadamente igual a 5,4, se a aproximação for de uma casa decimal (menor que 0,1).

Caso haja a necessidade de uma aproximação de duas casas decimais (aproximação menor que 0,01), elaboramos a tabela:

$$(5,41)^2 = 29,2681 < 30$$

$$(5,42)^2 = 29,3764 < 30$$

$$(5,43)^2 = 29,4849 < 30$$

$$(5,44)^2 = 29,5936 < 30$$

$$(5,45)^2 = 29,7025 < 30$$

$$(5,46)^2 = 29,8116 < 30$$

$$(5,47)^2 = 29,9209 < 30$$

$$(5,48)^2 = 30,0304 > 30$$

Pela convenção já estabelecida, podemos escrever que $\sqrt{30} \cong 5,47$, ou seja, a raiz quadrada de 30 é aproximadamente 5,47, com aproximação menor que 0,01.

2ª Qual é a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número 11,3?

Consultando a tabela, verificamos que o número 11,3 está entre 9 e 16.

Como $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$, o número procurado está entre 3 e 4.

Vamos, então, organizar a tabela:

$$3,1^2 = 9,61 < 11,3$$

$$3,2^2 = 10,24 < 11,3$$

$$3,3^2 = 10,89 < 11,3$$

$$3,4^2 = 11,56 > 11,3$$

De acordo com a tabela, e considerando sempre o menor valor, podemos dizer que a raiz quadrada de 11,3 é aproximadamente igual a 3,3, ou seja, $\sqrt{11,3} \cong 3,3$ (aproximação menor que 0,1).

FIXAÇÃO

1 Obtenha um valor inteiro e aproximado para:

a) $\sqrt{150}$

c) $\sqrt{350}$

e) 20

g) 320

b) $\sqrt{200}$

d) $\sqrt{500}$

f) 40

h) 450

2 Calcule a raiz quadrada, com valor aproximado até a 1ª casa decimal, de cada um dos seguintes números:

a) 2

c) 90

a) 3,6

d) 18,5

b) 10

d) 130

b) 7,2

e) 54,6

c) 10,7

f) 69,27

3 Calcule a raiz quadrada, com valor aproximado até a 1ª casa decimal, dos números:



OS NÚMEROS RACIONAIS E SUA REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Em Matemática, muitas vezes, é útil representar números racionais na sua forma decimal. Para isso, basta dividir o numerador pelo denominador.

Em alguns casos, essa representação decimal é finita. Observe:

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad | \quad 5 \\ 30 \quad | \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline 0,6 \end{array}$$

$$\frac{9}{20} = 0,45$$

$$\begin{array}{r} 9 \quad | \quad 20 \\ 90 \quad | \\ 100 \quad | \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \hline 0,45 \end{array}$$

$$-\frac{15}{2} = -7,5$$

$$\begin{array}{r} 15 \quad | \quad 2 \\ 10 \quad | \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 7,5 \end{array}$$

$$\frac{17}{8} = 2,125$$

$$\begin{array}{r} 17 \quad | \quad 8 \\ 10 \quad | \\ 20 \quad | \\ 40 \quad | \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 2,125 \end{array}$$

Em outros casos, essa representação decimal é infinita. Observe:

$$\frac{4}{3} = 1,3333\dots$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad | \quad 3 \\ 10 \quad | \\ 10 \quad | \\ 10 \quad | \\ 10 \quad | \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 1,3333\dots \end{array}$$

$$-\frac{7}{11} = -0,636363\dots$$

$$\begin{array}{r} 70 \quad | \quad 11 \\ 40 \quad | \\ 70 \quad | \\ 40 \quad | \\ 70 \quad | \\ 40 \quad | \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ \hline 0,636363\dots \end{array}$$

Nos dois últimos exemplos, a divisão não termina nunca. O quociente é um número periódico ou uma *dízima periódica*. No 1º exemplo, o algarismo 3 e, no 2º exemplo, os algarismos 6 e 3 continuarão se repetindo indefinidamente. Dizemos que:

- ✓ Na *dízima periódica* 1,3333..., o algarismo 3, que se repete, é chamado *período* e a sua representação abreviada é $1,\overline{3}$.
- ✓ Na *dízima periódica* 0,636363..., o grupo 63, que se repete, é o período e a representação abreviada do número é $0,\overline{63}$.

FIXAÇÃO

1 Os números racionais dados a seguir são chamados frações decimais. Escreva cada um deles na sua forma decimal:

a) $\frac{7}{10}$
 b) $\frac{31}{10}$
 c) $\frac{6}{100}$
 d) $\frac{11}{100}$

e) $\frac{162}{100}$
 f) $\frac{9}{1\ 000}$
 g) $\frac{29}{1\ 000}$
 h) $\frac{385}{1\ 000}$

i) $\frac{82}{10}$
 j) $\frac{163}{10}$
 l) $\frac{427}{100}$
 m) $\frac{1\ 104}{1\ 000}$

2 Qual é a representação decimal de cada um dos seguintes números racionais?

a) $\frac{1}{2}$
 b) $\frac{7}{3}$
 c) $\frac{9}{5}$
 d) $\frac{37}{20}$

e) $\frac{35}{11}$
 f) $\frac{11}{9}$
 g) $\frac{11}{8}$
 h) $\frac{33}{25}$

i) $\frac{3}{20}$
 j) $\frac{13}{90}$
 l) $\frac{33}{4}$
 m) $\frac{25}{6}$

4

OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Consideremos a seguinte situação:

Qual deve ser o valor do número x , não-negativo, para que se tenha $x^2 = 3$?

Pela definição de raiz quadrada, x representa a raiz quadrada do número 3, ou seja, $x = \sqrt{3}$.

Vamos, então, determinar o valor de x , lembrando que:

- ✓ o número 3 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$
- ✓ $\sqrt{3}$ está entre 1 e 2

Daí, elaboramos a tabela:

$1,1^2 = 1,21$	$1,3^2 = 1,69$	$1,5^2 = 2,25$	$1,7^2 = 2,89$
$1,2^2 = 1,44$	$1,4^2 = 1,96$	$1,6^2 = 2,56$	$1,8^2 = 3,24$

Vemos, então, que $\sqrt{3}$ está entre 1,7 e 1,8. Portanto, vamos continuar o cálculo:

$1,71^2 = 2,9241$	$1,73^2 = 2,9929$
$1,72^2 = 2,9584$	$1,74^2 = 3,0276$

Vemos, então, que $\sqrt{3}$ está entre 1,73 e 1,74. Prosseguindo no cálculo, temos:

$1,731^2 = 2,996361$	$1,732^2 = 2,999824$	$1,733^2 = 3,003289$
----------------------	----------------------	----------------------

Pelos novos cálculos, vemos que $\sqrt{3}$ está entre 1,732 e 1,733. Se prosseguíssemos no cálculo, encontraríamos: $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$, ou seja, a representação decimal do número $\sqrt{3}$ é infinita sem ser periódica.

Existem outros números que apresentam esta característica, ou seja, a sua representação decimal é infinita e não-periódica. Exemplos:

1. 1,7070070007...
2. $\sqrt{10} = 3,1622776\dots$

Números que apresentam essa característica são chamados *números irracionais*.

Número racional é todo número cuja representação decimal é sempre finita ou infinita e periódica.

Veja:

$$\frac{7}{10} = 0,7$$

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{78}{25} = 3,12$$

$$\frac{1}{6} = 0,1666\dots$$

$$\frac{22}{7} = 3,142857142857\dots$$

$$\frac{37}{11} = 3,363636\dots$$

Número irracional é todo número cuja representação decimal é sempre infinita sem ser periódica.

Veja:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

$$2,411011001100011\dots$$

$$3,141592\dots$$

Observações:

- ◆ Um número irracional nunca pode ser escrito na forma de fração.
- ◆◆ Nem todo número que representa a raiz quadrada de outro número é um número irracional, ou seja:

- ✓ As raízes quadradas de números quadrados perfeitos são números racionais:

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{196} = 14$$

$$\sqrt{900} = 30$$

- ✓ Entre dois números quadrados perfeitos existem números racionais cujas raízes são números racionais.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,666\dots$$

$$\sqrt{1,44} = 1,2$$

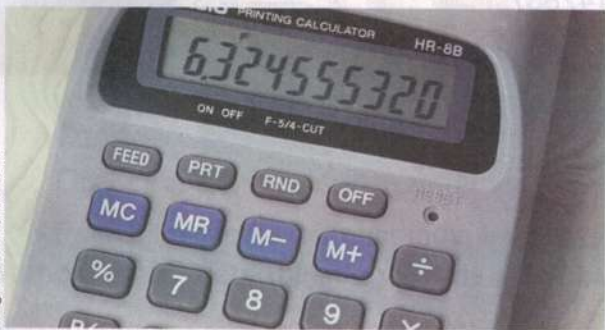
$$\sqrt{40,96} = 6,4$$

FIXAÇÃO

1 Sabemos que a representação decimal de um número pode ser finita, infinita e periódica ou infinita e não-periódica. Nessas condições, identifique a representação decimal de cada um dos seguintes números:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $\frac{5}{3}$ | e) 0,202002000... |
| b) $\sqrt{7}$ | f) 2,161616... |
| c) $\frac{13}{5}$ | g) $\sqrt{16}$ |
| d) $\frac{9}{2}$ | h) 5,131131113... |

2 Usando uma calculadora, Beto calculou $\sqrt{40}$. Veja o resultado que ele obteve: 6,324555320... A representação decimal de $\sqrt{40}$ é infinita e periódica ou infinita e não-periódica?



Sérgio Dotta Jr./The Next

3 Identifique como número racional ou como número irracional.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) 6,25 | f) 5,02 |
| b) $\sqrt{36}$ | g) $\frac{5}{7}$ |
| c) 2,010010001... | h) 6,161661666... |
| d) $\sqrt{30}$ | i) 10 |
| e) 2,434343... | j) 0,0025 |

4 Usando uma calculadora, você quer determinar $\sqrt{39,69}$. No visor da máquina vai aparecer um número racional ou irracional?

5 Qual é a forma decimal, com aproximação até a 2ª casa decimal, do número irracional $\sqrt{5}$?

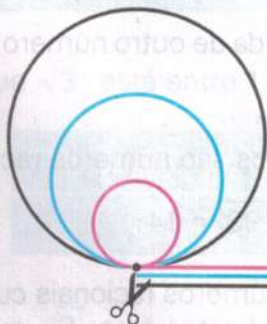
6 Dentre os números -6 ; $-2,171171117\dots$; $-1,5$; $-\frac{2}{3}$; 0 ; $\sqrt{2}$; $\frac{21}{5}$, identifique:

- os racionais
- os irracionais

Um número irracional importante: o número π (pi)

Imagine que cada uma das três circunferências da figura foi cortada no ponto indicado pela tesoura e que a linha do traçado de cada uma delas foi esticada.

A medida de cada segmento obtido representa o *comprimento* de cada uma das respectivas circunferências.



Podemos estabelecer uma relação entre a medida do diâmetro e o comprimento da circunferência; essa relação pode ser obtida dividindo-se o comprimento da circunferência pela medida do seu diâmetro.

Veja as seguintes situações:

- 1ª** Se tomarmos uma ficha telefônica, vamos encontrar 69 mm, aproximadamente, para o comprimento da circunferência e 22 mm, aproximadamente, para a medida do diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{69 \text{ mm}}{22 \text{ mm}} = 3,1363\dots$$



- 2ª** Se tomarmos uma lata de refrigerante, vamos encontrar 220 mm, aproximadamente, para o comprimento da circunferência e 70 mm, aproximadamente, para a medida do diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{220 \text{ mm}}{70 \text{ mm}} = 3,1428\dots$$

Nas duas situações, ao dividir o comprimento da circunferência pela medida do seu diâmetro (na mesma unidade), encontramos sempre um número maior que 3 (aproximadamente 3,14).

Pode-se verificar que esse fato se repete para qualquer circunferência, ou seja, dividindo-se a medida do comprimento de uma circunferência pela medida do seu diâmetro, obtém-se sempre o mesmo valor.

Esse valor constante representa um número muito importante em Matemática: o número pi, representado pela letra grega π .

Então:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi \text{ e } \pi \cong 3,14159265\dots$$

Por ser um número irracional, nas aplicações utilizamos uma aproximação do valor de π , em geral 3,14. Em muitas calculadoras há uma tecla que fornece o valor de π , com um número maior de casas decimais.

Observe os seguintes exemplos:

1. Uma circunferência tem 10 cm de raio. Qual é o comprimento aproximado dessa circunferência? (Use para π o valor 3,14.)

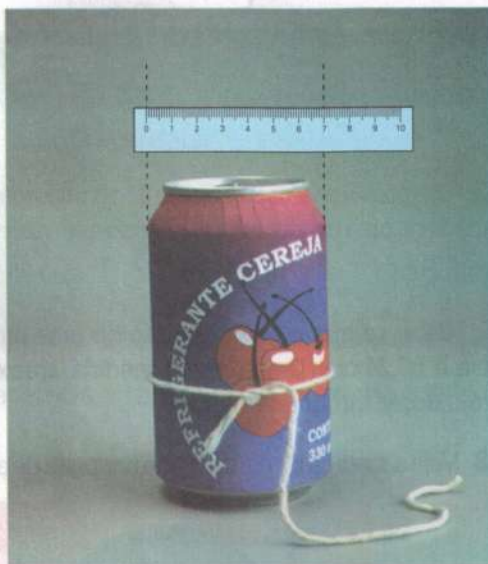
Se representarmos por **C** o comprimento da circunferência e por **r** a medida do raio, podemos escrever uma fórmula matemática:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = \pi \cdot 2r \Rightarrow C = 2\pi r$$

Pelos dados do problema, temos: $C = 2\pi r \Rightarrow C \cong 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow C \cong 62,8 \text{ cm}$

Então, o comprimento aproximado da circunferência é 62,8 cm.



Fotos: Nelson Toledo

2. Medindo o comprimento de uma circunferência, encontramos 18,84 cm. Qual é a medida aproximada do raio da circunferência?

$$C = 2\pi r \Rightarrow 18,84 \cong 2 \cdot 3,14 \cdot r \Rightarrow 18,84 \cong 6,28r$$

Resolvendo a equação, cuja incógnita é r , temos:

$$6,28r \cong 18,84 \Rightarrow r \cong \frac{18,84}{6,28} \Rightarrow r \cong 3 \text{ cm}$$

Então, a medida aproximada do raio dessa circunferência é 3 cm.

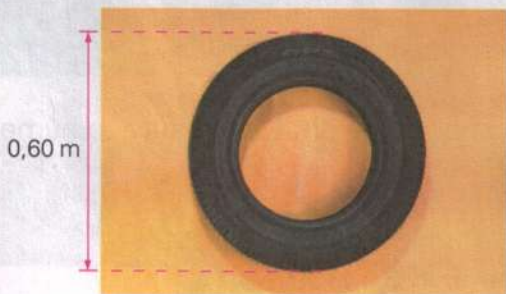
FIXAÇÃO

- 1 Use para π o valor 3,14 e calcule o comprimento aproximado de uma circunferência quando a medida do raio é:

a) 9 cm b) 1,5 cm c) 0,25 m

- 2 Sabe-se que o comprimento de uma circunferência é 50,24 cm. Determine a medida aproximada do raio dessa circunferência.

- 3 Veja a medida do diâmetro de um pneu de automóvel:



Sérgio Dotta Jr/The Next

- a) Qual será, aproximadamente, o comprimento da circunferência dessa roda?

- b) Se essa roda der 5 000 voltas completas, de quantos metros será a distância percorrida pelo automóvel?

- 4 Uma circunferência com 20 cm de raio foi dividida em quatro arcos de mesmo comprimento. Qual é o comprimento aproximado de cada arco?

- 5 Um quebra-luz circular tem 12 cm de diâmetro e necessita de uma fita que envolva a sua base. Que comprimento de fita será necessário?

- 6 Medindo o contorno de uma peça circular com uma fita métrica graduada, Juca encontrou 94,2 cm de comprimento. Qual é a medida aproximada do diâmetro dessa peça circular?



OS NÚMEROS REAIS

A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é um conjunto numérico denominado *conjunto dos números reais*, o qual é representado por \mathbb{R} . Então:

\mathbb{R} = conjunto dos números reais

Assim:

$$2 \in \mathbb{R}$$

$$1,25 \in \mathbb{R}$$

$$2,030030003... \in \mathbb{R}$$

$$-5 \in \mathbb{R}$$

$$-0,48 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

$$1,666... \in \mathbb{R}$$

$$-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

$$-2,1333... \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

Como podemos notar, os conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} e o conjunto dos números irracionais são *subconjuntos* de \mathbb{R} .

Além desses, outros subconjuntos de \mathbb{R} são muito utilizados:

\mathbb{R}^* = conjunto dos números reais não-nulos (números reais $\neq 0$)

\mathbb{R}_+ = conjunto dos números reais não-negativos (números reais ≥ 0)

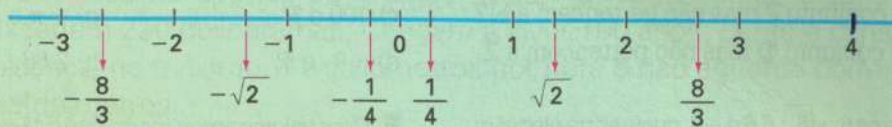
\mathbb{R}_- = conjunto dos números reais não-positivos (números reais ≤ 0)

\mathbb{R}_+^* = conjunto dos números reais positivos (números reais > 0)

\mathbb{R}_-^* = conjunto dos números reais negativos (números reais < 0)

Numa reta podem ser representados todos os números racionais e todos os números irracionais, ou seja, podem ser representados todos os números reais.

Essa reta é denominada *reta real*.



Quando estudarmos os triângulos retângulos aprenderemos a representar com mais precisão os números irracionais como $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$.

As operações com números reais

Nos conjuntos numéricos já estudados (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e irracionais), vimos que há certas limitações em relação às operações nesses conjuntos numéricos. Assim:

- ✓ no conjunto \mathbb{N} , nem sempre é possível subtrair, dividir ou extrair a raiz quadrada exata.
- ✓ no conjunto \mathbb{Z} , nem sempre é possível dividir ou extrair a raiz quadrada exata.
- ✓ no conjunto \mathbb{Q} , além da impossibilidade da divisão por zero, nem sempre é possível extrair a raiz quadrada exata.

Porém, no conjunto \mathbb{R} dos números reais, efetuamos qualquer adição, subtração, multiplicação e divisão com números reais (exceto a divisão por zero), bem como extraímos a raiz quadrada de qualquer número positivo.

Vale lembrar que há uma restrição: a raiz quadrada de um número negativo não representa um número real, pois não existe nenhum número real que elevado ao quadrado dê como resultado um número real negativo. Então, por exemplo, $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

Vejam alguns exemplos de operações com números reais.

1. Calcule, com aproximação até a 1ª casa decimal, o produto $6 \cdot \sqrt{7}$.

$$\sqrt{7} \cong 2,6 \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{7} \cong 6 \cdot 2,6 \cong 15,6$$

O valor procurado é 15,6, aproximadamente.

2. Calcule $\sqrt{3^4}$.

$$\sqrt{3^4} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$$

Logo, o valor procurado é 9.

3. Com valores aproximados até a 2ª casa decimal, determine $\sqrt{11} + \sqrt{5}$.

$$\sqrt{11} \cong 3,31 \text{ e } \sqrt{5} \cong 2,23$$

$$\sqrt{11} + \sqrt{5} \cong 3,31 + 2,23 \cong 5,54$$

Então, o valor procurado é 5,54.

FIXAÇÃO

1 São dados os números -4 ; $-2,3$; $-\frac{1}{4}$; 0 ; $0,666\dots$; 1 e $\sqrt{8}$. Quais deles:

- pertencem ao conjunto \mathbb{N} ?
- pertencem ao conjunto \mathbb{Z} ?
- pertencem ao conjunto \mathbb{Z} mas não pertencem a \mathbb{N} ?
- pertencem ao conjunto \mathbb{Q} mas não pertencem a \mathbb{Z} .

2 Dados os números 6 ; $\sqrt{6}$; $6,6$ e -6 , quais entre eles são:

- números reais e naturais?
- números reais e inteiros?
- números reais e racionais?
- números reais e irracionais?

3 Dados os números reais $\sqrt{5}$ e $\frac{22}{9}$, qual deles é o maior?

4 Usando os símbolos \in ou \notin , estabeleça a relação entre:

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| a) $100 \in \mathbb{R}^*$ | e) $-\sqrt{9} \in \mathbb{R}$ |
| b) $100 \in \mathbb{R}_+$ | f) $\sqrt{-9} \in \mathbb{R}$ |
| c) $100 \in \mathbb{R}_-$ | g) $-\pi \in \mathbb{R}_-$ |
| d) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$ | h) $2,66\dots \in \mathbb{R}_+$ |

5 Com valores aproximados até a 1ª casa decimal, calcule:

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| a) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ | e) $-\sqrt{10} - \sqrt{2}$ |
| b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$ | f) $\sqrt{10} : \sqrt{5}$ |
| c) $\sqrt{5} - (-\sqrt{3})$ | g) $-1 + \sqrt{7}$ |
| d) $8 \cdot \sqrt{3}$ | h) $5 - \sqrt{5}$ |

6 Qual é o valor da expressão $\sqrt{-1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}$?

RETOMANDO o que aprendeu

1 Sabe-se que o número 3 136 é um número natural quadrado perfeito. Se o número x expressa a raiz quadrada exata desse número, qual é o valor de x ?

2 Sendo dados os números $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{36}$, $-\sqrt{9}$, $\sqrt{-1}$ e $\sqrt{0}$, um deles não representa número real. Qual é esse número?

3 A medida oficial do diâmetro de uma cesta de basquete é 39 cm. Qual é o comprimento do aro dessa cesta?

4 Os números x e y representam, respectivamente, as raízes quadradas exatas dos números 51,84 e 40,96. Qual é o valor de $x - y$?

5 Sabe-se que a área de um terreno quadrado é 1 764 m². Qual é o perímetro desse terreno?

6 Em um parque de diversões, um carrossel tem 5 m de raio. Quem estiver sentado em um brinquedo desse carrossel, quantos metros percorre quando o carrossel dá uma volta completa?



Juca Martins/Plusar

7 São dados os números a , b , c tais que $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ e $c = \sqrt{5}$. Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, da expressão $a + b - c$?

JORNAIS & REVISTAS

"Os últimos dragões" foi o título de uma reportagem da revista *Superinteressante* de janeiro de 1993, falando a respeito dos maiores lagartos do mundo, que habitam algumas ilhas da Indonésia.

Pela reportagem, ficávamos sabendo que: ao sair do ovo esse dragão tem cerca de 30 centímetros e massa de apenas 90 gramas. Mas, na idade adulta, alguns ultrapassam 3,30 metros e excedem 230 quilogramas. Chegam a viver 100 anos. Lento e cansado por natureza, correndo alcança, no máximo, 11 quilômetros por hora e não agüenta correr mais do que algumas dezenas de metros.

Com dentes afiadíssimos e um competente tubo digestivo, o lagarto devora um cabrito inteiro em questão de minutos



Certa vez os cientistas observaram um dragão de 50 quilogramas devorar um porco inteiro de 31 quilogramas em apenas 17 minutos. Outros podiam ingerir 2,3 quilogramas de carne por minuto.

1. Desde o nascimento até a idade adulta, até quantos centímetros chega a crescer um dragão? Até quantos quilogramas chega a ganhar?
2. Supondo que os dragões atinjam a maturidade por volta dos 30 anos e que eles cresçam os mesmos centímetros todos os anos, quanto eles crescem a cada ano?
3. Segundo as mesmas suposições do item *b*, quanto eles engordam a cada ano?

Introdução ao cálculo algébrico

Na Antigüidade, a falta de símbolos para indicar números desconhecidos levou o homem a recorrer às palavras. Isso, porém, tornava o cálculo longo, cansativo e complicado.



Euclides
aprox. 300 a.C.

culo
go d
ção

E
letras
car qu
veu,
(1486
(1501-
tor de
intitul
1572.

Fo
temát
(1540-
sistem
númer
bolos e
Por es
como

O
gresso
sar do

Os filósofos gregos Aristóteles (384-322 a.C.) e Euclides (século III a.C.) foram os que deram os primeiros passos no emprego de letras e símbolos para indicar números e expressar a solução de um problema.



Aristóteles
384-322 a.C.

Entretanto, muito tempo iria passar até as letras serem amplamente usadas para indicar quantidades desconhecidas. Isso se deveu, principalmente, ao alemão Stifel (1486-1567) e aos italianos Cardano (1501-1576) e Bombelli, este último autor de uma obra de notável interesse, intitulada *L'Algebra*, publicada em 1572.

Foi, porém, um advogado e matemático francês, François Viète (1540-1603), quem introduziu o uso sistemático das letras, para indicar números desconhecidos, e os símbolos das operações, usados até hoje. Por esse motivo, Viète é conhecido como o pai do moderno cálculo literal.

O cálculo literal trouxe enormes progressos para a Matemática e, com o passar do tempo, assumiu a forma atual.



François Viète
1540-1603

6

O USO DE LETRAS PARA REPRESENTAR NÚMEROS

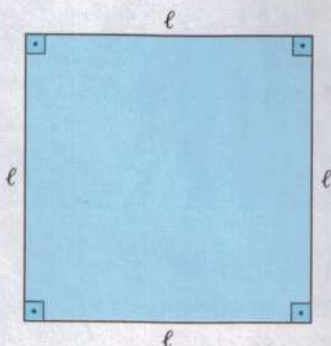
A partir do século XVI, os matemáticos iniciaram a prática de representar números desconhecidos por meio de letras, com o objetivo de indicar as operações matemáticas de uma forma mais simples e sintética.

Assim, se a e b representam dois números reais quaisquer, indicamos:

- ✓ por $a + b$ ou $b + a$, a soma desses dois números.
- ✓ por $a - b$, a diferença desses dois números.
- ✓ por ab ou ba , o produto desses dois números.
- ✓ por $a : b$ ou por $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, a divisão de a por b .

Por outro lado, se ℓ representa a medida do lado de um quadrado, temos que:

- ✓ $4 \cdot \ell$ ou 4ℓ indica o perímetro desse quadrado.
- ✓ ℓ^2 a área desse quadrado.



FIXAÇÃO

1 Indique:

- a) o quadrado do número real x
- b) o cubo do número real y
- c) a raiz quadrada do número real a
- d) a quinta potência do número real b
- e) a soma dos números reais b e c
- f) o produto dos números reais a e x
- g) o dobro do número real y
- h) a sexta parte do número real m

2 Usando duas letras quaisquer, escreva:

- a) o dobro de um número real adicionado ao dobro de outro número real.
- b) o produto da soma pela diferença de dois números reais quaisquer.
- c) a soma dos quadrados de dois números reais quaisquer.
- d) a soma do quadrado com o triplo de um número qualquer.

7

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS OU LITERAIS

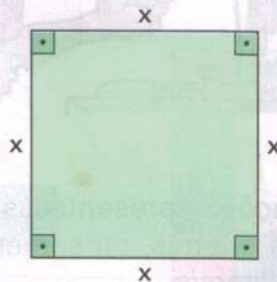
Sabemos que podemos usar as letras (a, b, c, ..., m, n, ..., x, y, z) do nosso alfabeto para representar números reais: são os chamados *números literais*.

Consideremos, então, as seguintes situações:

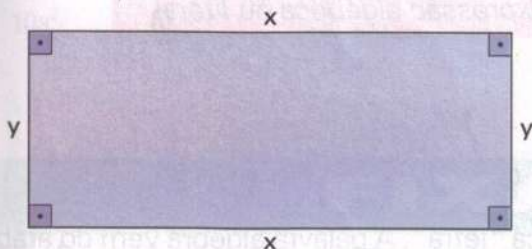
1ª Qual é a expressão que representa a área do quadrado seguinte?

- ✓ A medida do lado do quadrado é representada pelo número real x .
- ✓ A área do quadrado é igual ao quadrado da medida do lado. Então, a expressão pedida é:

$$x \cdot x \text{ ou } x^2.$$



2ª Qual é a expressão que representa o perímetro do retângulo seguinte?

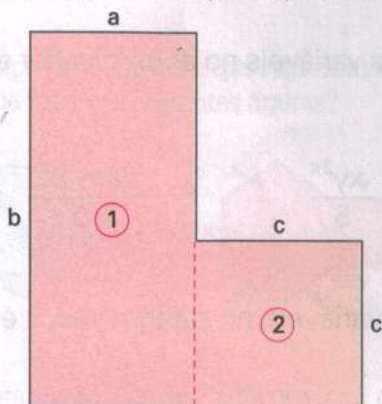


- ✓ A base do retângulo é expressa pelo número real x .
- ✓ A largura, pelo número real y .

O perímetro do retângulo é igual a duas vezes o comprimento mais duas vezes a largura. Então, a expressão pedida é:

$$2 \cdot (x) + 2 \cdot (y) \text{ ou } 2x + 2y$$

3ª Qual é a expressão que representa a área total da figura seguinte?



- ✓ A área total da figura é igual à soma das áreas das figuras ① e ②.
- ✓ Como a figura ① é um retângulo, a sua área é expressa por ab .
- ✓ Como a figura ② é um quadrado, a sua área é expressa por c^2 .

Então, a área da figura é expressa por $ab + c^2$.

- 4ª Jurema tinha x reais. Foi a uma lanchonete e tomou 2 sorvetes. Cada sorvete custou y reais. Qual a expressão que representa a quantia que restou para Jurema depois de pagar os sorvetes?



- ✓ Como cada sorvete custou y reais, Jurema gastou $2y$ reais.
- ✓ Então, a expressão pedida é $x - 2y$.

Nas situações apresentadas, escrevemos expressões matemáticas nas quais aparecem números e letras, ou somente letras. Essas expressões matemáticas são chamadas *algébricas* ou *literais*.

Uma expressão matemática que apresenta números e letras, ou somente letras, é denominada *expressão algébrica* ou *literal*.

Assim, são expressões algébricas ou literais:

x^2

$2x + 2y$

$ab + c^2$

$m - 2n$

A palavra literal vem do latim *littera*, que significa "letra". A palavra álgebra vem do árabe *al-jabr*, e representa uma regra para transformar uma igualdade em outra equivalente.

Como pode ser uma expressão algébrica

Numa expressão algébrica, as letras, que normalmente representam números reais, são chamadas *variáveis*.

Quando a expressão algébrica não contém variável ou variáveis no denominador é chamada expressão algébrica *inteira*. Exemplos:

1. $2x + 3y$

2. $\frac{1}{2}x$

3. $\sqrt{a + b}$

4. $\frac{xy^2}{5}$

5. $\frac{3a - 2c}{10}$

Quando a expressão algébrica contém variável ou variáveis no denominador é chamada expressão algébrica *fracionária*. Exemplos:

1. $\frac{2a}{b}$

2. $\frac{1}{x}$

3. $\frac{bc}{5a}$

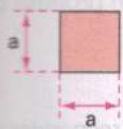
4. $\frac{2a}{x - y}$

5. $\frac{1}{a^2 + 2x}$

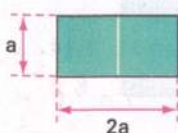
Explorando

Álgebra

Veja o monômio que representa a área de cada figura abaixo:

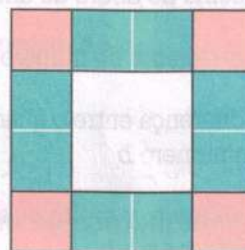
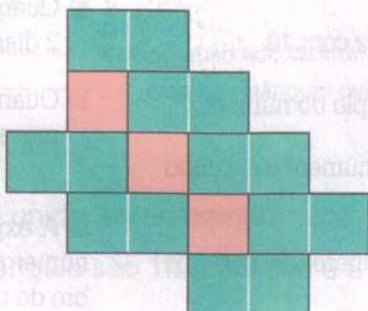
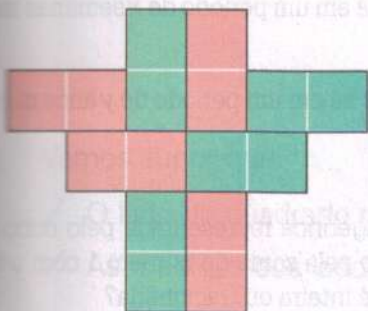


$$\text{Área} = a \cdot a = a^2$$



$$\text{Área} = a \cdot 2a = 2a^2$$

1. Represente através de um monômio as áreas das seguintes figuras:



2. Em uma malha quadriculada formada por quadradinhos de lado a , pinte as figuras com áreas representadas por:

a) $10a^2$

b) $13a^2$

c) $20a^2$

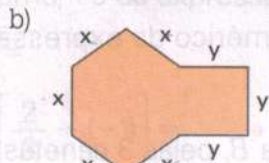
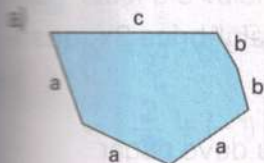
d) $16a^2$

FIXAÇÃO

1. Uma escola tem x alunos. Escreva a expressão algébrica que representa:

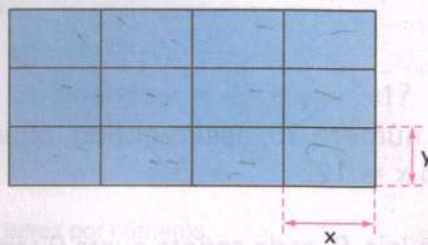
- a) o triplo do número dos alunos
- b) o número de alunos que a escola teria se entrassem mais 52 alunos

2. Qual é a expressão algébrica que representa o perímetro de cada uma das seguintes figuras?



- a) a compra de 2 canetas e 5 lapiseiras
- b) a diferença entre o preço de uma caneta e o preço de duas lapiseiras

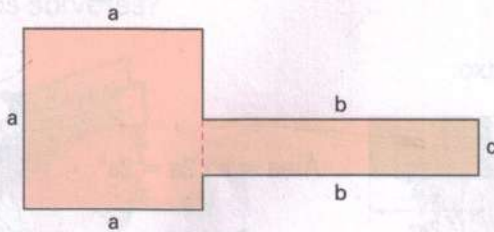
4. Qual é a expressão algébrica que você pode escrever para representar a área da figura abaixo?



3. Uma caneta custa x reais e uma lapiseira custa y reais. Qual é a expressão algébrica que você pode escrever para representar:

5. Marília tinha x reais. Foi a uma livraria e comprou 3 livros. Cada livro custou y reais. Qual a expressão algébrica que você pode escrever para representar a quantia que restou para Marília depois de pagar os livros?

6 Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo.



7 Escreva a expressão algébrica que representa:

- a soma do dobro de um número x com 10
- o quociente do número x pelo triplo do número y
- a diferença entre o quadrado do número a e o cubo do número b
- o número x multiplicado pela diferença entre os números a e b

e) o dobro do número p aumentado do quadrado do número m

f) a diferença entre o cubo do número a e o cubo do número b

g) o triplo do número b diminuído do produto do número a pelo número c

8 Use uma expressão algébrica para responder a cada uma das seguintes perguntas:

- Quantos dias há em um período de x semanas mais 2 dias?
- Quantos meses há em um período de y anos mais 5 meses?

9 A expressão algébrica representada pelo cubo do número a dividido pela soma do número 1 com o dobro do número b é inteira ou fracionária?

8

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Vamos analisar duas situações:

1ª Uma caneta esferográfica custa x reais. Se eu comprar 3 canetas desse tipo, a expressão algébrica que representa a quantia que devo pagar pelas canetas é $3x$.

Na loja A, cada caneta custa 12 reais. Logo, pelas 3 canetas eu devo pagar

$$3x = 3 \cdot (12) = 36 \text{ reais.}$$

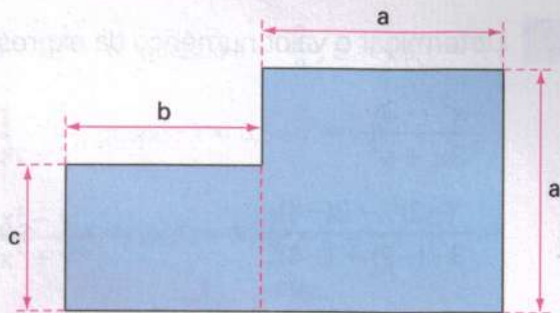
O número 36, assim obtido, chama-se valor numérico da expressão algébrica $3x$, quando $x = 12$.

Na loja B, cada caneta custa 9 reais. Logo, na loja B, pelas 3 canetas eu devo pagar

$$3x = 3 \cdot (9) = 27 \text{ reais.}$$

O número 27, assim obtido, chama-se valor numérico da expressão algébrica $3x$, quando $x = 9$.

- 2ª Um terreno tem a forma da figura ao lado, na qual estão assinaladas as medidas dos lados desse terreno:



A área desse terreno é dada pela expressão algébrica:

$$bc + a^2$$

\swarrow área do retângulo cujos lados medem b e c
 \searrow área do quadrado de lado a

Vamos supor que:

- ✓ O lado do quadrado mede 20 unidades de comprimento.
- ✓ As medidas dos lados do retângulo são 10 unidades e 8 unidades de comprimento.

Nessas condições, a área desse terreno será:

$$a^2 + bc = 20^2 + 10 \cdot 8 = 400 + 80 = 480 \text{ unidades de área}$$

O número 480, assim obtido, chama-se valor numérico da expressão algébrica $bc + a^2$, quando $a = 20$, $b = 10$ e $c = 8$.

Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuamos os cálculos indicados, obtemos o *valor numérico* da expressão algébrica dada.

Veja outras situações:

- 1ª Dada a expressão algébrica $mn - m^2$, determinar o seu valor numérico quando $m = 1,1$ e $n = 0,8$.

$$mn - m^2 =$$

$$= (1,1)(0,8) - (1,1)^2 = \longrightarrow \text{Substituímos as letras por números.}$$

$$= (0,88) - (1,21) = 0,88 - 1,21 =$$

$$= -0,33 \longrightarrow \text{Valor numérico procurado.}$$

- 2ª Qual é o valor numérico da expressão $(x + y) \cdot (x - y)$, quando $x = \frac{2}{3}$ e $y = -1$?

$$(x + y) \cdot (x - y) =$$

$$= \left[\frac{2}{3} + (-1) \right] \cdot \left[\frac{2}{3} - (-1) \right] = \longrightarrow \text{Substituímos as letras por números.}$$

$$= \left[\frac{2}{3} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2}{3} + 1 \right] = \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{3} \right] \cdot \left[\frac{2}{3} + \frac{3}{3} \right] = \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \left(+\frac{5}{3} \right) =$$

$$= -\frac{5}{9} \longrightarrow \text{Valor numérico procurado.}$$

- 3ª** Determinar o valor numérico da expressão algébrica $\frac{x^2 - 3y}{3x + y^2}$, quando $x = -2$ e $y = -4$.

$$\frac{x^2 - 3y}{3x + y^2} =$$

$$= \frac{(-2)^2 - 3(-4)}{3 \cdot (-2) + (-4)^2} = \longrightarrow \text{Substituímos as letras por números.}$$

$$= \frac{(+4) - (-12)}{(-6) + (+16)} = \frac{+4 + 12}{-6 + 16} =$$

$$= +\frac{16}{10} = +\frac{8}{5} \longrightarrow \text{Valor numérico procurado.}$$

FIXAÇÃO

- 1** Qual é o valor numérico da expressão $4x^2 - xy$ quando:

- a) $x = 2$ e $y = 6$?
b) $x = 0,4$ e $y = 1,2$?

- 2** Dada a expressão algébrica $5x^2 - 18x - 8$, determine o seu valor numérico quando:

- a) $x = 4$ b) $x = -\frac{3}{5}$

- 3** Qual é o valor da expressão algébrica $\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x$, quando $x = 4$?

- 4** Sendo $p = \frac{a+b+c}{2}$ determine p e o valor numérico da expressão algébrica

$$p(p-a)(p-b)(p-c),$$

quando $a = 5$, $b = 13$ e $c = 10$.

- 5** A expressão algébrica $\sqrt{b^2 - 4ac}$ representa número real quando $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$?

- 6** Quando $a = b = -2$, determine o valor numérico da expressão algébrica $(-a-b)(a+b) + ab^3 - \frac{a^2}{b}$.

- 7** Verifique se vale a igualdade $2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 = 0$, sendo $x = -2$.

- 8** Dada a seguinte expressão algébrica

$$-x^2 + 3x - 5xy + \frac{1}{3}xy^2,$$

determine o seu valor numérico para $x = -1$ e $y = 3$.

- 9** Dados $a = 5$, $b = -9$ e $c = -2$, qual o valor de

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ?$$

- 10** Para $a = 0,5$ e $b = -2,5$, calcule o valor numérico da expressão algébrica $\frac{a-3}{b+2}$.

- 11** Uma empresa resolveu divulgar na televisão um de seus produtos. Constatou que houve um aumento nas vendas a partir de então. Seu departamento de *marketing* verificou que o número de produtos vendidos no mês podia ser representado pela expressão algébrica $\frac{3}{2}x + 40$, onde x representa o número de anúncios na televisão durante o mês.

Nessas condições, quantas unidades desse produto foram vendidas:

- a) em novembro quando foram feitas 30 aparições na televisão?
b) em dezembro, quando foram feitas 50 aparições na televisão?

12 Determine o valor numérico de cada uma das seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{a^2 - 2a}{\sqrt{a}}$, quando $a = 4$.

b) $m^2 - 2mn + n^2$, quando $m = -1$ e $n = \frac{1}{4}$

c) $\sqrt{\frac{a^2 + ax}{m}}$, quando $a = 8$, $x = 10$ e $m = 9$

d) $3x^2 - y^2 - 10(x + y) \cdot (x - y)$, quando $x = -2$ e $y = 2$

e) $(a - b)^2 - c^2$, quando $a = \frac{2}{3}$, $b = 1$ e $c = -1$

f) $\frac{1 - x^2}{xy + 1}$, quando $x = 0,5$ e $y = -8$

g) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$, quando $x = \frac{1}{2}$ e $y = -2$

h) $\frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}}$, quando $x = 10$ e $y = 5$



UMA CONSIDERAÇÃO IMPORTANTE

Existem expressões algébricas fracionárias que não representam número real para determinados valores atribuídos às letras (variáveis). Isto acontece quando esses valores anulam o denominador da expressão, pois, como sabemos, não existe uma divisão por zero. Assim:

- ◆ A expressão $\frac{a}{x}$ não representa número real quando $x = 0$.
- ◆◆ A expressão $\frac{a + 2}{a - 1}$ não representa número real quando $a = 1$.

De modo prático, podemos determinar o valor para o qual a expressão não representa número real, igualando o seu denominador a zero e resolvendo a equação obtida.

Vamos ver duas situações:

1ª A expressão algébrica $\frac{x - 3}{2x - 1}$ não representa número real para qual valor de x ?

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Logo, o valor procurado é $\frac{1}{2}$.

2ª Qual deve ser o valor de x em função de y , para que a expressão algébrica $\frac{x + y}{x - y}$ não represente um número real?

Igualando o denominador da expressão a zero, temos:

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Logo, o valor procurado é $x = y$.

FIXAÇÃO

1 Determine os valores das variáveis para os quais as expressões algébricas a seguir não representam números reais.

a) $\frac{x-5}{x-4}$

c) $\frac{2x}{2+5x}$

b) $\frac{a+b}{1-3a}$

d) $\frac{a-b}{2-2b}$

2 Determine o valor de x em função de y , para que cada uma das expressões algébricas seguintes não represente um número real:

a) $\frac{x}{x+y}$

c) $\frac{x-y}{2x+y}$

b) $\frac{x+2y}{x-2y}$

RETOMANDO o que aprendeu

1 Se $A = \frac{xy}{x-y}$, com $x = 0,4$ e $y = 0,5$, qual é o valor de A ?

2 Sabendo que $\frac{a}{2} = \frac{5}{c}$ e que $\frac{4}{b} = \frac{d}{5}$, qual é o valor numérico da expressão $\frac{ac-2bd}{2ac+bd}$?

(Sugestão: use a propriedade fundamental das proporções.)

3 Sabe-se que $a^x = 10$. Qual é, então, o valor numérico da expressão $4 \cdot a^x + 2 \cdot a^{2x}$?

4 Sendo A o valor numérico da expressão $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$, quando $x = \frac{1}{2}$, e sendo B o valor numérico da mesma expressão quando $x = -\frac{2}{3}$, qual é o valor de $A - B$?

5 Um grupo de estudantes de meteorologia pesquisou as variações de temperatura em uma certa cidade. Após longa coleta de dados, o grupo concluiu que a temperatura podia ser calculada pela expressão $-\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10$, na qual t representa a hora do dia.

Responda:

- Qual a temperatura na cidade às 12 horas?
- Qual a temperatura na cidade às 18 horas?
- Nesse período de tempo, a temperatura na cidade aumentou ou diminuiu? De quantos graus centígrados?

6 Onze jogadores disputaram um torneio de damas. Cada participante jogou com os demais duas partidas, uma em cada turno do torneio. No final, dois jogadores ficaram empatados em primeiro lugar e houve um jogo extra para determinar o campeão. Sabendo que o número de partidas disputadas durante o torneio é dado pela expressão $n(n-2)$, onde n representa o número de participantes, quantas partidas foram disputadas até se conhecer o campeão?



Marinês Maravalhas Gomes

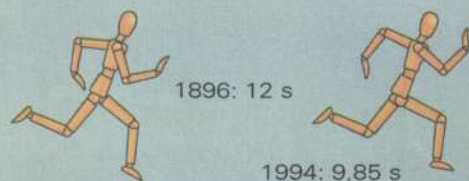
1. Pro
2. Su
2 0
dis

JORNAIS & REVISTAS

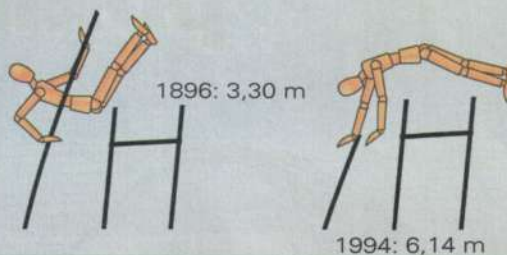
Os dados publicados na revista *Superinteressante* de julho de 1996 nos mostram o quanto os recordes avançaram nos últimos 100 anos.

Ontem e hoje

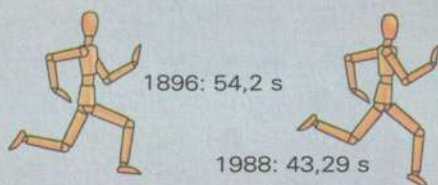
100 metros rasos



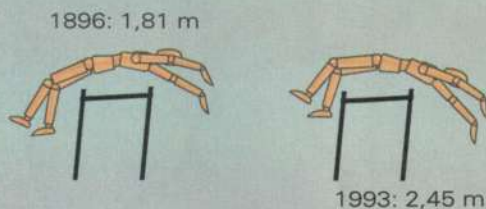
Salto com vara



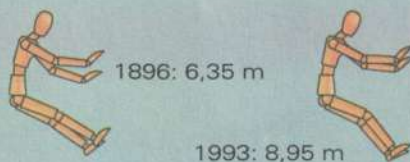
400 metros rasos



Salto em altura



Salto em distância



Lançamento de disco



1. Proporcionalmente, qual deles foi o que mais avançou?
2. Suponha que esses avanços continuem ocorrendo na mesma proporção. Por volta do ano 2094, quais seriam, aproximadamente, os novos recordes para: 100 metros rasos, salto em distância e lançamento de disco?

3

Estudo dos polinômios



Conforme foi visto na abertura da unidade anterior, os matemáticos, já na Antigüidade, sentiram necessidade de usar outros símbolos para representar números e relações. Entre eles, Euclides, e até o filósofo grego Aristóteles.

Ao longo do tempo, a história da Matemática passou a destacar outros e notáveis nomes de matemáticos fazendo uso de letras em seus cálculos, tais como: Fibonacci, Cardano, Bombelli, Stifel e Viète.

Girolamo Cardano
1501-1576

V
pons
letras
cas,
serv
gébr
men
que p
pass
dos a
cas s

A
pode
esse
essa

Viète, convém lembrar, foi o responsável pelo uso sistemático de letras nas relações matemáticas, fato que propiciou o desenvolvimento do Cálculo Algébrico, o qual, entre inúmeras aplicações, permitiu que problemas complexos passassem a ser reduzidos a relações matemáticas simples.



François Viète

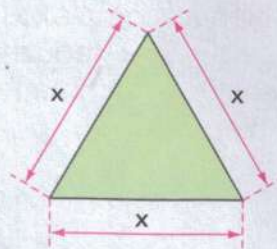
A quantidade de unidades vendidas de determinado produto pode, por exemplo, estar relacionada ao número de vezes que esse produto aparece anunciado na tela da TV. Para representar essa relação, usa-se uma expressão algébrica.



Consideremos as seguintes situações:

- 1ª** A figura ao lado é um triângulo equilátero. Seu lado mede x unidades de comprimento.

A expressão algébrica que representa o perímetro deste triângulo é $3x$.



- 2ª** Um bombom custa y reais. Vou comprar meia dúzia desses bombons.

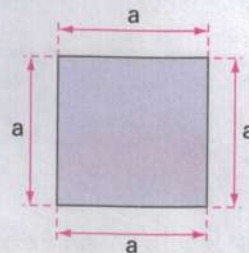
A expressão algébrica que representa a quantia que vou pagar é $6y$.



Keystone

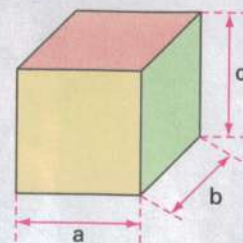
- 3ª** A figura ao lado é um quadrado. A medida do lado desse quadrado é a unidades de comprimento, conforme indica a figura.

A expressão algébrica que representa a área deste quadrado é a^2 .



- 4ª** A figura ao lado é um bloco retangular. As dimensões desse bloco retangular são: comprimento = a , largura = b e altura = c .

A expressão algébrica que representa o volume desse bloco retangular é abc .



Essas situações mostram expressões algébricas representadas por uma multiplicação de números e variáveis ou por uma multiplicação de variáveis.

Expressões algébricas desse tipo são denominadas monômios ou termos algébricos.

Podemos, então, definir:

Denomina-se *monômio* ou *termo algébrico* toda expressão algébrica inteira representada apenas por um número ou apenas por uma variável ou por uma multiplicação de números e variáveis.

Assim, $3x$, $6y$, a^2 e abc são monômios.

Geralmente, um monômio é formado por duas partes:

- ✓ Um número chamado *coeficiente numérico do monômio*.
- ✓ Uma variável ou uma multiplicação de variáveis (inclusive seus expoentes), chamada *parte literal*.

Observe os monômios:

$$3x$$

coeficiente numérico
parte literal

$$-10a^3b$$

coeficiente numérico
parte literal

$$-\frac{5}{8}y^2$$

coeficiente numérico
parte literal

$$2,7x^2y^3$$

coeficiente numérico
parte literal

Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, convencionou-se que:

$$\left. \begin{array}{l} 1x = x \\ 1a^4x^3 = a^4x^3 \\ 1mn^2 = mn^2 \end{array} \right\} \text{ e } 1 \text{ é o coeficiente numérico desses monômios}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1x = -x \\ -1a^4x^3 = -a^4x^3 \\ -1mn^2 = -mn^2 \end{array} \right\} \text{ e } -1 \text{ é o coeficiente numérico desses monômios}$$

Quando o coeficiente de um monômio é 0, o monômio representa sempre o número real zero e é chamado *monômio nulo*.

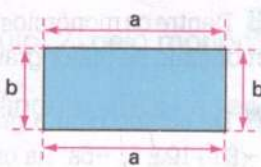
$$0x = 0 \qquad 0a^4x^3 = 0 \qquad 0mn^2 = 0$$

Não se esqueça de que todo número real é considerado um monômio.

FIXAÇÃO

1 Um doce custa x reais. Zuleide comprou 5 desses doces. Qual é o monômio que representa a quantia que Zuleide pagou pelos doces?

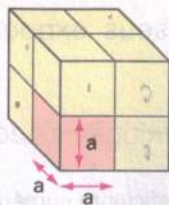
2 A área de um retângulo é dada multiplicando-se o comprimento pela largura. Qual é o monômio que representa a área do retângulo ao lado?



3 O preço de um litro de gasolina, em novembro de 1997, era de R\$ 0,844. Se você colocasse n litros de gasolina no tanque de seu carro, qual é o monômio que representa a quantia que você teria de pagar?

4 Uma empresa tem y funcionários em cada filial. Se essa empresa tiver n filiais, qual o monômio que representa o número de funcionários dessa empresa?

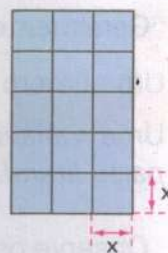
5 O volume de um cubo é dado pelo cubo da medida de sua aresta. Qual é o monômio que representa o volume do cubo da figura?



6 Entre as expressões algébricas seguintes, identifique as que são monômios:

- | | | |
|-------------|----------------------|-------------------|
| a) x^2y | d) $-2,1bx^2$ | g) $\frac{x}{y}$ |
| b) -10 | e) $3a - 2b$ | h) y^3 |
| c) $x + 2y$ | f) $\frac{5}{8}xy^2$ | i) $\frac{1}{xy}$ |

7 Qual é o monômio que representa a área da figura ao lado?



8 Dados os monômios seguintes, identifique o coeficiente numérico e a parte literal de cada um deles:

- | | |
|-------------------------|--------------------|
| a) $7a^3$ | e) $\frac{m^4}{5}$ |
| b) $-xy^5$ | f) $a^3x^5y^2$ |
| c) $-\frac{2}{3}m^2n^4$ | g) $6,2x^3y^3$ |
| d) $-0,06bc^3$ | h) $-20a^4bc^3$ |

Grau de um monômio

O grau de um monômio com coeficiente não-nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis. Exemplos:

- O monômio $6x^2y^5$ é do 7º grau. $(2 + 5 = 7)$
- O monômio $-\frac{1}{3}ab$ é do 2º grau. $(1 + 1 = 2)$
- O monômio $5,1y^6$ é do 6º grau.
- O monômio 10 é de grau zero.

O grau de um monômio também pode ser dado em relação a uma de suas variáveis. Nesse caso, o grau do monômio corresponde ao expoente da variável considerada. Exemplos:

- O monômio $3x^2y^5$ é do 2º grau em relação à variável x .
- O monômio $-\frac{1}{2}a^3b$ é do 1º grau em relação à variável b .

FIXAÇÃO

1 Entre os monômios $5a^3b$, $-2xy^4$, $\frac{1}{2}xy^2$, $-6m^2n^2$, quais são os que apresentam grau 4?

2 Qual é o grau do monômio $10a^3x^3y$?

3 Qual é o grau do monômio $m^5x^3y^4$ em relação à variável x ?

4 Qual deve ser o valor do expoente n para que o monômio $10x^2y^n z^2$ seja do 13º grau?

5 Dentre os monômios $2x^3$, $-7x$, x^6 , $9x^4$, $12x^2$, qual é o monômio de maior grau?

6 De acordo com o grau, escreva os monômios $7a^2$, $-8a^4$, $10a$, 5 , $-6a^3$ na ordem decrescente.

Monômios semelhantes

Observe:

- ✓ Os monômios $10x^2y$ e $-\frac{2}{3}x^2y$ possuem a mesma parte literal: x^2y .
- ✓ Os monômios $-4a^2b^2$ e $7a^2b^2$ possuem a mesma parte literal: a^2b^2 .
- ✓ Os monômios $2,5x^3$, $\frac{1}{2}x^3$ e $-4x^3$ possuem a mesma parte literal: x^3 .

Dois ou mais monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados *monômios semelhantes*.

Assim, são monômios ou termos semelhantes:

- ✓ $10x^2y$ e $-\frac{2}{3}x^2y$
- ✓ $-4a^2b^2$ e $7a^2b^2$
- ✓ $2,5x^3$, $\frac{1}{2}x^3$ e $-4x^3$

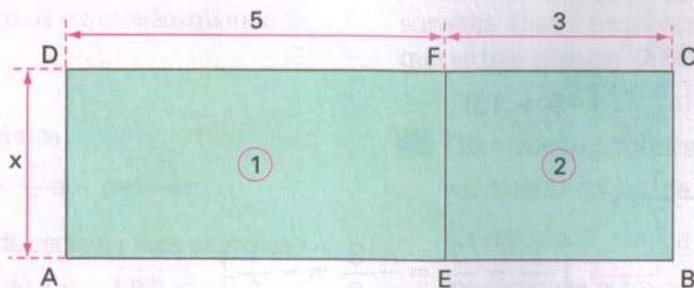
Não são semelhantes, por exemplo, os monômios:

- ✓ $6x^2y$ e $-4xy^2$
- ✓ $2x^3$, $-\frac{1}{2}x^2$ e $-\frac{5}{4}x$

Adição algébrica de monômios

Consideremos as seguintes situações:

- 1ª Qual é o monômio que representa a área do retângulo ABCD da figura seguinte?



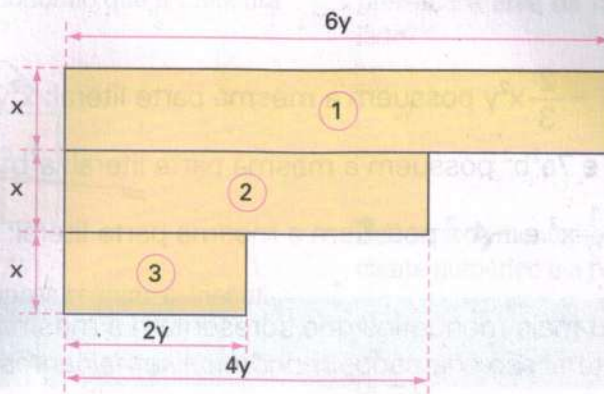
A área de um retângulo é obtida multiplicando-se o comprimento pela largura. Assim, para resolver o problema, podemos representar:

- ✓ a área do retângulo ① pelo monômio $5x$
- ✓ a área do retângulo ② pelo monômio $3x$

Então, a área do retângulo ABCD é representada por:

$$5x + 3x = (5 + 3)x = 8x$$

2ª Qual é a área da figura seguinte, cujas medidas estão indicadas na figura?



- ✓ A área da figura ① é dada por $x \cdot 6y$ ou $6xy$.
- ✓ A área da figura ② é dada por $x \cdot 4y$ ou $4xy$.
- ✓ A área da figura ③ é dada por $x \cdot 2y$ ou $2xy$.

Então, a área da figura toda é dada por:

$$6xy + 4xy + 2xy = (6 + 4 + 2)xy = 12xy$$

Vimos, nas situações apresentadas, que podemos justificar os resultados dos problemas usando a propriedade distributiva da multiplicação.

Porém, a busca do resultado se torna mais simples se fizermos da seguinte maneira:

Numa expressão algébrica, se todos os monômios ou termos são semelhantes, podemos tornar mais simples a expressão somando algebricamente os coeficientes numéricos e mantendo a parte literal.

Veja os exemplos:

1. $5ax - 7ax = -2ax$

$$\hookrightarrow (5 - 7)$$

2. $-9a^2b^2 + 13a^2b^2 = 4a^2b^2$

$$\hookrightarrow (-9 + 13)$$

3. $\frac{2}{3}ay^2 - \frac{7}{6}ay^2 = -\frac{1}{2}ay^2$

$$\hookrightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \right)$$

4. $3xy - xy = 2xy$

$$\hookrightarrow (3 - 1)$$

5. $5,7a^2 + 1,9a^2 - 6,2a^2 = 1,4a^2$

$$\hookrightarrow (5,7 + 1,9 - 6,2)$$

6. $9mn - 15mn + 6mn = 0mn = 0$

$$\hookrightarrow (9 - 15 + 6)$$

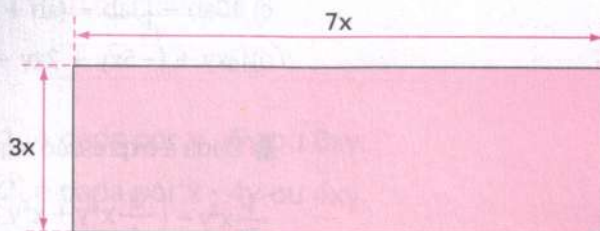
Multiplicação de monômios

Inicialmente, vamos recordar a seguinte propriedade das potências:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ com } a \neq 0$$

Consideremos as seguintes situações:

1ª Qual é o monômio que representa a área da figura seguinte?

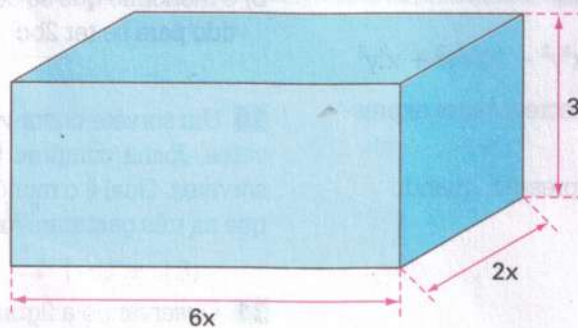


A figura dada é um retângulo cuja área pode ser obtida multiplicando-se o comprimento pela largura. Assim, temos:

$$(7x) \cdot (3x) = 7 \cdot x \cdot 3 \cdot x = \underbrace{7 \cdot 3}_{21} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^2} = 21x^2$$

Logo, o monômio que representa a área é $21x^2$.

2ª Qual é o monômio que representa o volume da figura seguinte?



A figura é um paralelepípedo retângulo e seu volume pode ser obtido multiplicando-se as três dimensões: comprimento, largura e altura. Então, o volume será:

$$(6x) \cdot (2x) \cdot (3y) = 6 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y = \underbrace{6 \cdot 2 \cdot 3}_{36} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^2} \cdot y = 36x^2y$$

Logo, o monômio pedido é $36x^2y$.

As duas situações representam uma multiplicação de monômios. Daí, podemos escrever:

Para multiplicar dois ou mais monômios, devemos multiplicar os coeficientes numéricos entre si e multiplicar as partes literais entre si.

Exemplos:

$$1. (-8x^3) \cdot (+4x) = (-8) \cdot x^3 \cdot (+4) \cdot x = \underbrace{(-8) \cdot (+4)}_{-32} \cdot \underbrace{x^3 \cdot x}_{x^{3+1}} = -32x^4$$

$$2. (5a^4x^3) \cdot (2ax^4) = \underbrace{(5) \cdot (2)}_{10} \cdot \underbrace{(a^4 \cdot a)}_{a^{4+1}} \cdot \underbrace{(x^3 \cdot x^4)}_{x^{3+4}} = 10a^5x^7$$

$$3. \left(-\frac{5}{7}m^2\right) \cdot \left(\frac{14}{25}am\right) = \underbrace{\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{14}{25}\right)}_{-\frac{2}{5}} \cdot \underbrace{(m^2 \cdot m)}_{m^{2+1}} \cdot a = -\frac{2}{5}am^3$$

$$4. (-1,4xy^2) \cdot (-0,3x^2y) = \underbrace{(-1,4) \cdot (-0,3)}_{0,42} \cdot \underbrace{(x \cdot x^2)}_{x^{1+2}} \cdot \underbrace{(y^2 \cdot y)}_{y^{2+1}} = 0,42x^3y^3$$

$$5. (-2ab) \cdot (7ac) \cdot (10bc) = \underbrace{(-2) \cdot (7) \cdot (10)}_{-140} \cdot \underbrace{(a \cdot a)}_{a^{1+1}} \cdot \underbrace{(b \cdot b)}_{b^{1+1}} \cdot \underbrace{(c \cdot c)}_{c^{1+1}} = -140a^2b^2c^2$$

FIXAÇÃO

1 Calcule os seguintes produtos:

a) $b^5 \cdot b^3$

b) $5x^8 \cdot x$

c) $(-7y) \cdot (-2y)$

d) $(-2a) \cdot \left(+\frac{1}{3}a^2\right)$

e) $\left(+\frac{3}{2}xy\right) \cdot (+4xy)$

f) $(-2ay^2) \cdot (2,6a)$

g) $(-9a^4m) \cdot (-3am^2)$

h) $(1,5x) \cdot (-0,5xy^3)$

i) $\left(-\frac{mn}{2}\right) \cdot \left(+\frac{m}{7}\right)$

j) $\left(+\frac{9}{4}am^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}a^4\right)$

2 Calcule:

a) $(-5a^4bc^3) \cdot (-b^2c) \cdot (+4a^2c)$

b) $\left(\frac{1}{10}ax\right) \cdot (+10xy) \cdot (-3xy)$

c) $(4,5y^2) \cdot (-0,3y) \cdot (-y^4)$

d) $(0,1xy) \cdot (100xy^2) \cdot (0,01x^3)$

e) $(-xy) \cdot (-15x^2y)$

f) $(5\ell^3) \cdot \left(-\frac{2}{5}\ell\right)$

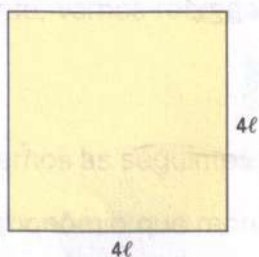
g) $(2x^4) \cdot (-3x^2) \cdot (+7x)$

h) $(-12mnp) \cdot \left(-\frac{2}{3}m^2n\right) \cdot (5np)$

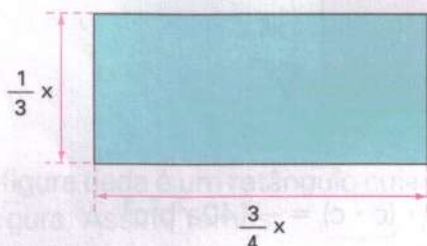
i) $(-x^2z) \cdot (-xy^2z) \cdot (xyz)$

j) $\left(+\frac{2}{5}am^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}an\right) \cdot (+7mn)$

3 Determine o monômio que representa a área do quadrado da figura seguinte.



4 Escreva o monômio que representa a área do retângulo da figura:



5 Dados os monômios $-2a^2x$ e $-16ax$, determine:

- o produto desses monômios
- o valor numérico do produto, quando $a = x = -\frac{1}{2}$

6 Efetue a multiplicação

$$(2ax) \cdot \left(-\frac{5}{4}ax^2\right) \cdot (a^2x)$$

e determine o valor numérico do produto para $a = -2$ e $x = -1$.

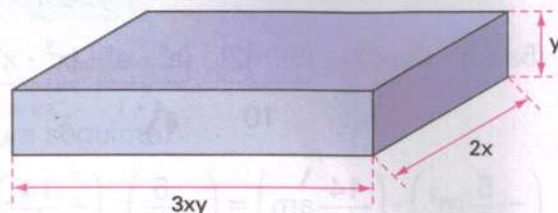
7 Com que monômio devemos multiplicar $5ab$ para ter $20a^2b^2$?

8 Determine o monômio expresso pela multiplicação $(-a) \cdot (-m) \cdot (-m^3) \cdot (-a)$ e dê o valor numérico desse monômio quando $a = \frac{1}{4}$ e $m = -2$.

9 Qual é o monômio que multiplicado por $-\frac{4}{3}ab^2$ dá $+a^3b^3$?

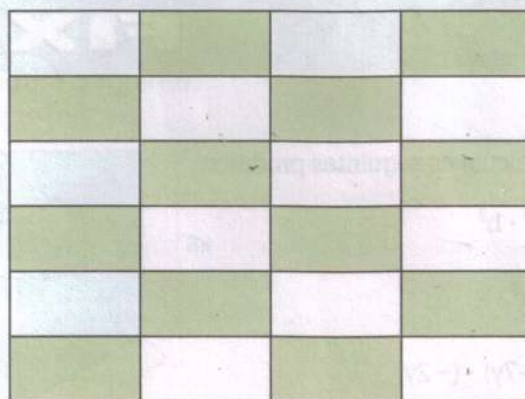
10 A seqüência $5ab, 10a^3b^2, 20a^5b^3, \dots$ tem seis termos. Qual é o último termo dessa seqüência?

11 O volume do paralelepípedo retângulo é dado pelo produto de suas dimensões. Nessas condições, determine o volume do paralelepípedo retângulo abaixo.

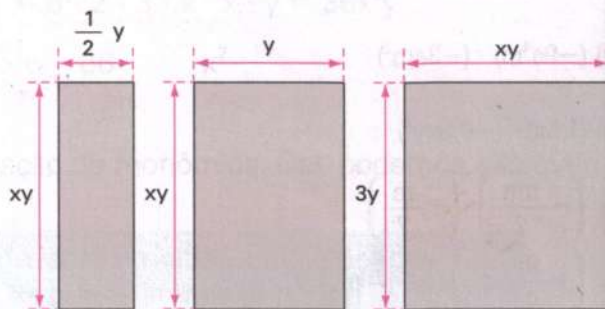


12 Cada ladrilho retangular da figura seguinte tem x unidades de comprimento por $\frac{1}{2}x$ unidades de largura. Nessas condições, escreva o monômio que representa:

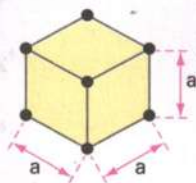
- a área de cada ladrilho
- a área ocupada pelos ladrilhos coloridos
- a área ocupada pelos ladrilhos brancos
- a área total da figura



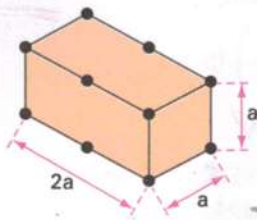
13 Escreva o monômio que representa a área da figura formada pela composição das figuras seguintes:



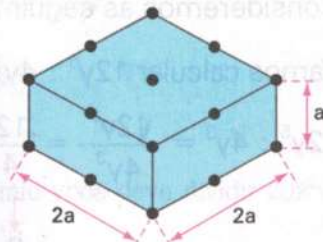
Veja o monômio que representa o volume de cada sólido abaixo:



$$\text{volume} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

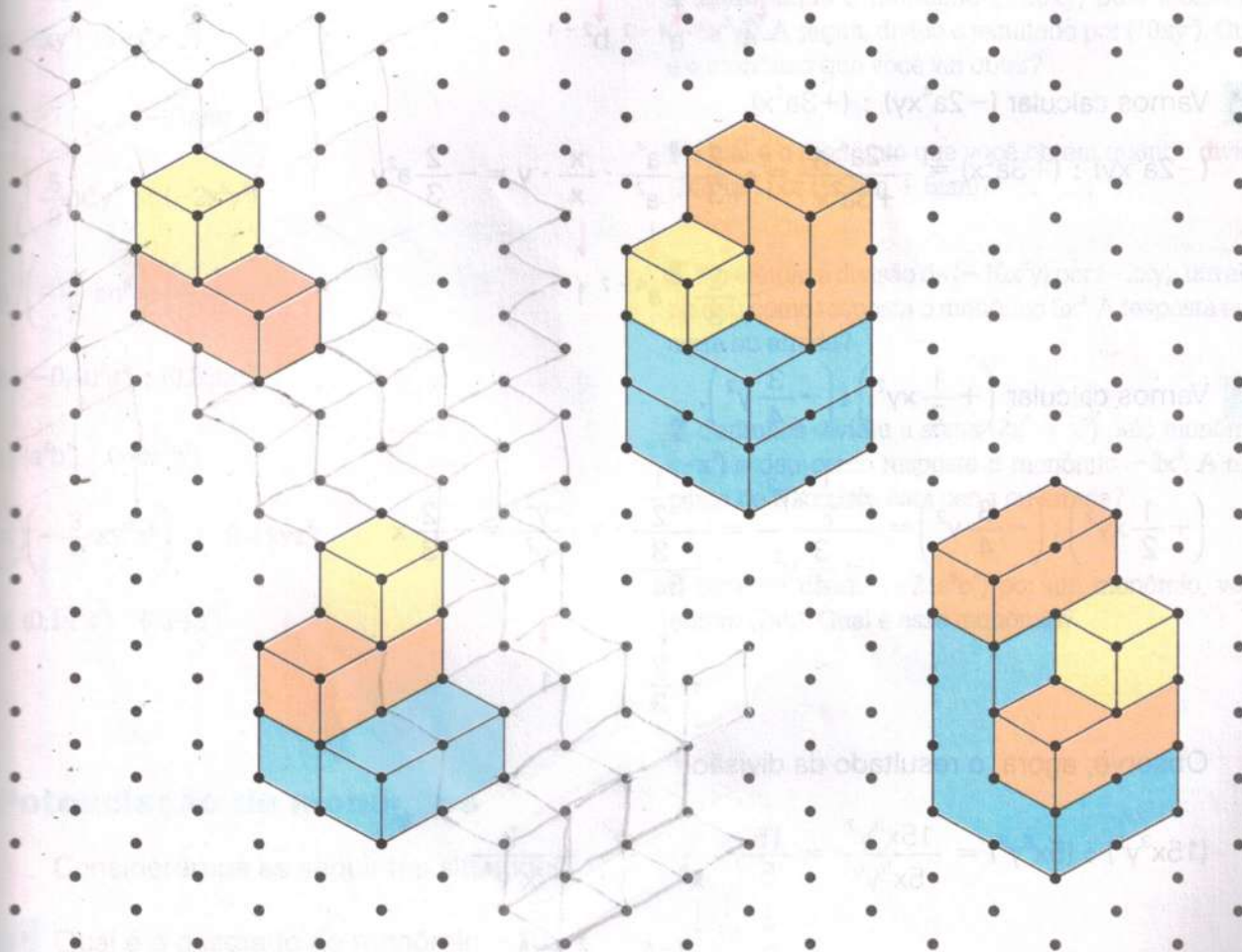


$$\text{volume} = 2a \cdot a \cdot a = 2a^3$$



$$\text{volume} = 2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3$$

1. Represente por meio de um monômio o volume dos seguintes sólidos:



2. Em uma malha pontilhada como a de cima, pinte um sólido com volume representado por:

a) $4a^3$

b) $9a^3$

c) $17a^3$

d) $20a^3$

Divisão de monômios

Inicialmente, vamos recordar a seguinte propriedade das potências:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ com } a \neq 0$$

Consideremos as seguintes situações:

1ª Vamos calcular $12y^5 : 4y^3$.

$$12y^5 : 4y^3 = \frac{12y^5}{4y^3} = \frac{12}{4} \cdot \frac{y^5}{y^3} = 3y^2$$

\downarrow \downarrow
3 y^{5-3}

2ª Vamos calcular $(20a^4b^2) : (-5ab)$.

$$(20a^4b^2) : (-5ab) = \frac{20a^4b^2}{-5ab} = \frac{20}{-5} \cdot \frac{a^4}{a} \cdot \frac{b^2}{b} = -4a^3b$$

\downarrow \downarrow \downarrow
-4 a^{4-1} b^{2-1}

3ª Vamos calcular $(-2a^4xy) : (+3a^2x)$.

$$(-2a^4xy) : (+3a^2x) = \frac{-2a^4xy}{+3a^2x} = \frac{-2}{+3} \cdot \frac{a^4}{a^2} \cdot \frac{x}{x} \cdot y = -\frac{2}{3}a^2y$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $-\frac{2}{3}$ a^{4-2} 1

4ª Vamos calcular $(+\frac{1}{2}xy^2) : (-\frac{3}{4}y^2)$.

$$(+\frac{1}{2}xy^2) : (-\frac{3}{4}y^2) = \frac{+\frac{1}{2}xy^2}{-\frac{3}{4}y^2} = \frac{+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} \cdot x \cdot \frac{y^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x$$

\downarrow \downarrow
 $-\frac{2}{3}$ 1

Observe, agora, o resultado da divisão:

$$(15x^3y^2) : (5x^5y^5) = \frac{15x^3y^2}{5x^5y^5} = \frac{15}{5} \cdot \frac{x^3}{x^5} \cdot \frac{y^2}{y^5} = \frac{3}{x^2y^3}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
3 x^{3-5} y^{2-5}

O resultado dessa divisão é uma *fração algébrica*, cujo estudo faremos mais tarde. Portanto, nem sempre a divisão de um monômio por outro monômio vai resultar em um monômio.

Neste capítulo, estudaremos apenas a divisão de monômios que tenha como resultado uma expressão algébrica inteira.

FIXAÇÃO

1 Vamos calcular:

a) $a^7 : a^2$

b) $x^5 : x^4$

c) $t^4 : t^4$

d) $(-32x^4) : (-8x)$

e) $(+9y^6) : (-3y^3)$

f) $\left(\frac{2}{7}a^4x^3\right) : \left(\frac{4}{7}ax^2\right)$

g) $(2xy^4) : (-0,5y^2)$

h) $(-7am) : (-21am)$

i) $\left(\frac{5}{9}x^6y^6\right) : (-2x^5y^2)$

j) $\left(-\frac{1}{2}an^6\right) : \left(-\frac{1}{8}an^5\right)$

k) $(-0,4b^2c^4) : (0,25bc^4)$

l) $(a^4b^4) : (-4a^2b^2)$

m) $\left(-\frac{3}{5}xy^2z^2\right) : (-0,4xyz^2)$

n) $(0,1a^6x^2) : (0,01a^5)$

p) $\left(-\frac{5}{3}bx^7\right) : \left(-\frac{5}{3}bx^5\right)$

q) $\left(\frac{1}{4}mx^2\right) : (2x)$

2 Por qual monômio você deve dividir $20x^2y^3$ para obter $5xy^2$?

3 Divida $30a^7x^3$ por $6a^4x^2$. Ao resultado, adicione $(-6a^3x)$. Qual é o monômio que você vai obter?

4 Multiplique o monômio $(-20xy)$ pelo monômio $(-5x^2y^3)$. A seguir, divida o resultado por $(10xy^2)$. Qual é o monômio que você vai obter?

5 Qual é o monômio que você obtém quando divide $(20a^4m^2)$ por $(-9am + 5am)$?

6 Ao efetuar a divisão de $(-10x^3y)$ por $(-2xy)$, um aluno deu como resposta o monômio $5x^3$. A resposta está certa ou errada?

7 Carlinhos dividiu a soma $(2x^6 + x^6)$ pelo monômio $(-x^3)$ e deu como resposta o monômio $-3x^3$. A resposta de Carlinhos está certa ou errada?

8 Se você dividir $(-21a^4b^4)$ por um monômio, você obtém $(7ab)$. Qual é esse monômio?

Potenciação de monômios

Consideremos as seguintes situações:

1ª Qual é o quadrado do monômio $-10a^3$?

Aplicando a definição de potência, temos:

$$(-10a^3)^2 = (-10a^3) \cdot (-10a^3) = \underbrace{(-10) \cdot (-10)}_{+100} \cdot \underbrace{a^3 \cdot a^3}_{a^{3+3}} = 100a^6$$

2ª Qual é a 5ª potência do monômio $2x^2$?

Aplicando a definição de potência, temos:

$$(2x^2)^5 = (2x^2) \cdot (2x^2) \cdot (2x^2) \cdot (2x^2) \cdot (2x^2) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{32} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2}_{x^{2+2+2+2+2}} = 32x^{10}$$

Porém, podemos fazer esses cálculos de maneira mais simples, usando as propriedades das potências:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ e } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Observe, nos exemplos, como o cálculo se torna mais simples:

- $(-10a^3)^2 = (-10)^2 \cdot (a^3)^2 = 100a^6$
- $(2x^2)^5 = (2)^5 \cdot (x^2)^5 = 32x^{10}$
- $\left(-\frac{3}{7} \cdot b^5c^4\right)^2 = \left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot (b^5)^2 \cdot (c^4)^2 = +\frac{9}{49}b^{10}c^8$

FIXAÇÃO

1 Vamos calcular:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(a^5)^2$ | g) $(0,5ab^2)^2$ |
| b) $(-2x^4)^2$ | h) $(-am^5x^3)^4$ |
| c) $(-5y^3)^3$ | i) $\left(\frac{2}{3}x^3y^2\right)^2$ |
| d) $(-10a^2b)^2$ | j) $(a^2c^3)^7$ |
| e) $(-3x^2y)^4$ | l) $\left(-\frac{x^2y^2}{5}\right)^2$ |
| f) $\left(-\frac{1}{5}m^2n\right)^2$ | m) $(0,1p^5)^2$ |

2 Determine:

- o quadrado de $-1,5b^2c^3$
- o cubo de $0,4a^5b^3$

3 Calcule o quadrado do monômio $(-2xy)$. A seguir, divida pelo monômio $8xy^2$. Que monômio você vai obter?

4 Se você dividir o cubo da soma $(-7y + 10y + 2y)$ pela soma $(-10y^2 - 15y^2)$, que monômio você vai encontrar?

5 Calcule:

- o quadrado do monômio $-10x^3$
- o quociente do resultado obtido no item a pelo monômio $5x^4$

6 Calcule:

- o quadrado do monômio $-4x^2y^3$
- o monômio que representa a expressão $-x^2y^2 + 9x^2y^2$

7 Efetue a divisão de $\left(-\frac{1}{2}a^2c^5\right)^4$ por $\left(-\frac{1}{4}a^4c^9\right)^2$.

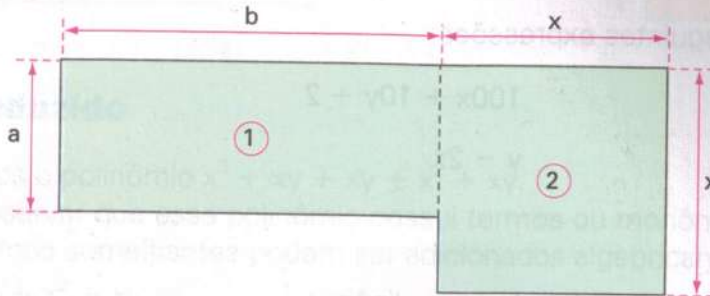
A seguir, adicione o monômio c^2 ao resultado. Que monômio você vai obter?



POLINÔMIOS

Consideremos as seguintes situações:

1ª Qual é a expressão algébrica que representa a área da figura seguinte?



Você pode notar que a área da figura é dada pela soma das áreas das figuras ① e ②.

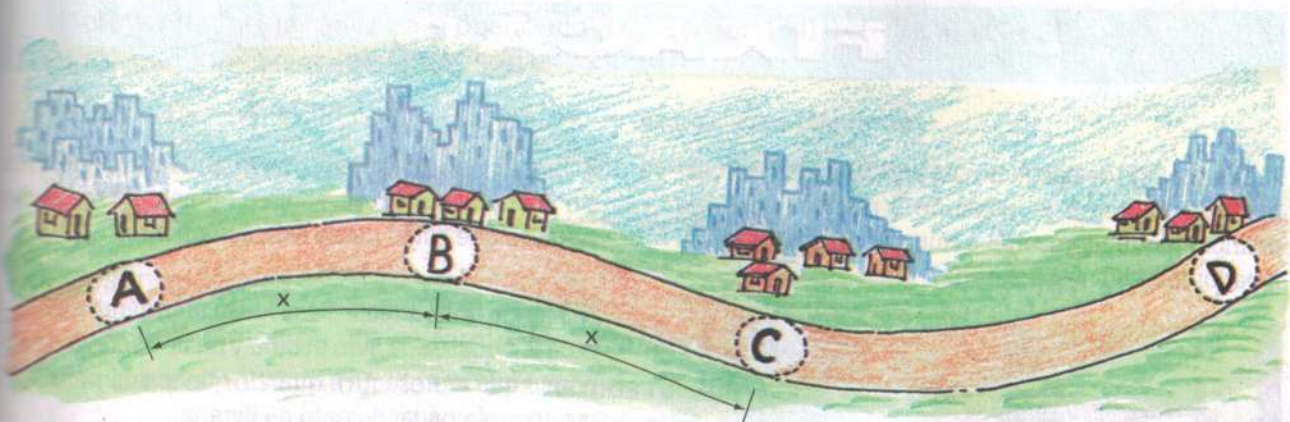
- ✓ A área da figura ①, que é um retângulo, é expressa pelo monômio ab .
- ✓ A área da figura ②, que é um quadrado, é expressa pelo monômio x^2 .

Então, a área da figura é dada pela soma:

$$ab + x^2$$

→ Essa expressão algébrica indica uma adição de monômios.

2ª O desenho seguinte representa o esboço de uma rodovia que passa pelas cidades A, B, C e D. Pelo desenho, a distância de A até B é igual à distância de B até C e ambas podem ser representadas por x . Sabendo-se que a distância de A até D é de y quilômetros, qual é a expressão algébrica que representa a distância de C até D?



Observando o esboço, verificamos que a distância de C até D é dada pela diferença entre as distâncias de A até D e de A até C:

$$y - 2x$$

→ Essa expressão algébrica indica uma subtração de monômios.

Quando iniciamos o nosso estudo do cálculo algébrico, consideramos apenas expressões algébricas chamadas monômios.

As situações que acabamos de apresentar nos mostram expressões algébricas que indicam uma adição ou uma subtração de monômios, ou seja, indicam uma *adição algébrica de monômios*.

Qualquer adição algébrica de monômios denomina-se *polinômio*.

São polinômios as seguintes expressões:

$$ab + x^2$$

$$100x + 10y + 2$$

$$3x + 2y$$

$$y - 2x$$

Observações:

- ◆ Qualquer monômio é considerado um polinômio.
- ◆◆ Os monômios que formam um polinômio são denominados *termos* do polinômio.

Assim:

- ✓ O monômio $2xy$ é um polinômio de um só termo.
- ✓ $y - 2x$ é um polinômio de dois termos: y e $-2x$.
- ✓ $ab + x^2$ também é um polinômio de dois termos: ab e x^2 .
- ✓ $100x + 10y + 2$ é um polinômio de três termos: $100x$, $10y$ e 2 .

FIXAÇÃO

1 Em um jogo de basquete, um jogador marcou x cestas de 2 pontos e y cestas de 3 pontos. Qual é o polinômio que representa o número de pontos que o jogador marcou nessa partida?



Keystone

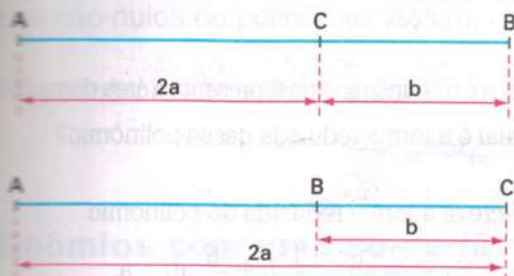
2 Em um estacionamento, há x carros e y motos. Qual é o polinômio que representa o número de rodas dos veículos que estão nesse estacionamento?

3 Márcia tinha x reais. Passou em uma livraria e comprou 2 livros. Cada livro custou y reais. Escreva o polinômio que representa a quantia que restou para Márcia após ela pagar a conta na livraria.

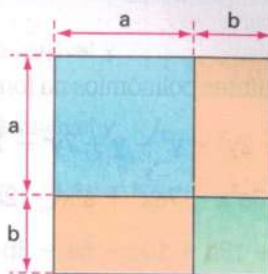
4 Escreva o polinômio que representa um número formado por:

- a) x dezenas + y unidades
- b) y dezenas + x unidades

5 Qual é o polinômio que expressa a medida do segmento AB em cada uma das figuras.



6 Escreva o polinômio que representa a área da figura abaixo.



Polinômio reduzido

Consideremos o polinômio $x^2 + xy + xy + x^2 + xy$.

Podemos observar que esse polinômio possui termos ou monômios semelhantes. Sabendo que esses termos semelhantes podem ser adicionados algebricamente, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + xy + x^2 + xy &= \\ = \underbrace{x^2 + x^2} + \underbrace{xy + xy + xy} &\rightarrow \text{pela propriedade comutativa} \\ 2x^2 + 3xy &\rightarrow \text{soma algébrica de monômios semelhantes} \end{aligned}$$

Dizemos que:

$2x^2 + 3xy$ é a forma reduzida do polinômio $x^2 + xy + xy + x^2 + xy$.

Veja os exemplos:

1. Escrever na forma reduzida o polinômio $3a - 5ab + 8b - 2a + 3ab + b$.

$$\begin{aligned} 3a - 5ab + 8b - 2a + 3ab + b &= \\ = \underbrace{3a - 2a} - \underbrace{5ab + 3ab} + \underbrace{8b + b} &\rightarrow \text{pela propriedade comutativa} \\ = a - 2ab + 9b &\rightarrow \text{forma reduzida} \end{aligned}$$

2. Escrever na forma reduzida o polinômio $3x^2 - (-9x + 4) + (-7x + x^2 - 3)$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - (-9x + 4) + (-7x + x^2 - 3) &= \\ = 3x^2 + 9x - 4 - 7x + x^2 - 3 &\rightarrow \text{eliminando os parênteses} \\ = \underbrace{3x^2 + x^2} + \underbrace{9x - 7x} - \underbrace{4 - 3} &\rightarrow \text{pela propriedade comutativa} \\ = 4x^2 + 2x - 7 &\rightarrow \text{forma reduzida} \end{aligned}$$

Observações:

◆ Os polinômios de um só termo são chamados *monômios*.

◆◆ Um polinômio reduzido de dois termos recebe o nome de *binômio*.

$$3x + 2y$$

$$4a - b$$

$$xy + 5y^2$$

◆◆ Um polinômio reduzido de três termos é chamado *trinômio*.

$$x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - 7x + 10$$

$$a + 2b - bc$$

◆◆ Um polinômio reduzido com mais de três termos não tem nome particular.

FIXAÇÃO

1 Escreva os seguintes polinômios na forma reduzida:

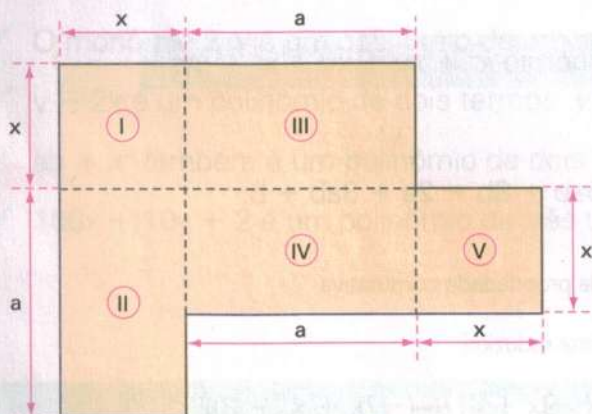
- $5y + 4y^3 - 1 + 2y^2 - y^3 - y + 7y^2 - 1$
- $a^2x - 5a^2x^2 + 3a^2x - 7ax^2 + a^2x^2 - 2a^2x + 5ax^2$
- $7a + 5b - 9c + 13b + 10c - 5a - 8b + c$
- $6x - 5y + 3xy + 2xy - 5x + 9y + 4x - xy - y$
- $8x^2 - 6x + 1 + 7x - 6x^2 - 3 - 3x - x^2 - 5$

2 Dado o polinômio

$$x^2 - ax + 3x^2 - a^2 + 4ax - 2x^2 - a^2, \text{ pede-se:}$$

- a forma reduzida desse polinômio
- identificar como binômio ou trinômio
- o valor numérico para $x = 3$ e $a = -3$

3 Observando a figura seguinte, responda:



- Qual é o polinômio que representa a área dessa figura?
- Qual é a forma reduzida desse polinômio?

4 Escreva a forma reduzida do polinômio

$$\frac{1}{2}a + 2b - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{4}b + \frac{5}{6}ab + a.$$

5 Qual é a forma reduzida de cada um dos seguintes polinômios?

- $7a^2 - (5a^2 - 9a + 2) + (-2a + a^2 - 1)$
- $8ab - (a + 7b - 5) + (-5ab + 2 - b) - (-4a - 2ab + 6b)$
- $5a + 3b - [5a - (a - 4b) - b]$
- $2x^2 - [2xy + x^2 - (3xy + y^2) + 2y^2] - xy$
- $3m + [-5m + n - (-2m + 3n)] + 4m$
- $2x^2 + [-5xy + 2y^2 - (x^2 + 2xy - y^2)] - (4xy - 2y^2)$

6 Entre os polinômios $2ax, x^3 - x^2 + x - 1, y^2 - 2y + 1, a^2 - b^2, x + 2a, a^2 + b^2 - 2ab - 2bc, x^2y^2 + 4xy + 4$, identifique os que são:

- binômios
- trinômios

7 Determine:

- a forma reduzida do polinômio $-3r^2 + 5rs - (-9r^2 - rs + 6s^2) - 14s^2 + (6r^2 + 5rs + 8s^2)$
- o valor numérico quando $r = 0,5$ e $s = 0,2$

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio reduzido, não-nulo, é dado pelo seu termo de maior grau.

Assim:

✓ O polinômio $a^3x - 2a^4x^3 + 9ax^2$ é do 7º grau.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4^\circ & 7^\circ & 3^\circ \end{array}$$

✓ O polinômio $x^3 + 6x^2y^2 - 2xy$ é do 4º grau.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3^\circ & 4^\circ & 2^\circ \end{array}$$

O grau de um polinômio reduzido pode ser estabelecido, também, em relação a uma determinada variável. Nesse caso, o grau é dado pelo maior expoente com que a variável figura nos termos não-nulos do polinômio. Assim:

O polinômio $x^3y + 3x^2y^4$ é do $\begin{cases} 3^\circ \text{ grau em relação à variável } x \\ 4^\circ \text{ grau em relação à variável } y \end{cases}$

Polinômios com uma só variável real

Consideremos os polinômios reduzidos:

$$x^2 + 7x - 10 \quad \text{e} \quad x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

Esses polinômios, que são muito importantes para estudos futuros, são denominados *polinômios na variável real* x .

É costume, em Matemática, escrever esses polinômios ordenados segundo as potências decrescentes da variável x . Veja os exemplos:

1. $6x^2 - 5x - 1$
2. $x^3 - x - 7$
3. $5x^4 - 7x^3 - x^2 + 2x - 10$

Quando um polinômio está assim ordenado e nele não aparecem uma ou mais potências da variável x , dizemos que o polinômio é *incompleto*. Neste caso, os coeficientes numéricos dos termos que não aparecem no polinômio são zeros. Veja os exemplos:

1. $x^3 - 7x - 1$ é incompleto e pode ser escrito assim: $x^3 + 0x^2 - 7x + 1$ (forma geral).
2. $x^4 - 9$ é incompleto e pode ser escrito assim: $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 9$ (forma geral).

FIXAÇÃO

1 Qual é o grau do polinômio $5a^3 - 2a^2x^4 + x^5$?

2 Qual é o grau do polinômio $ax^2 - bx^3 + 2abx$ em relação à variável x ?

3 Dado o polinômio $2x + x^3 - 9x^2 - 2$, escreva-o na forma ordenada, segundo as potências decrescentes da variável x .

4 O polinômio $x^3 - 1$ é completo ou incompleto? Se for incompleto, escreva-o na forma geral.

5 É dado o polinômio:

$$3 - 5x^2 + 7x^4 - x + 5x^5 + 2x^3$$

- a) Escreva-o na forma ordenada.
- b) Determine o grau desse polinômio.

6 Qual é a forma geral do polinômio $x^5 + 1$?

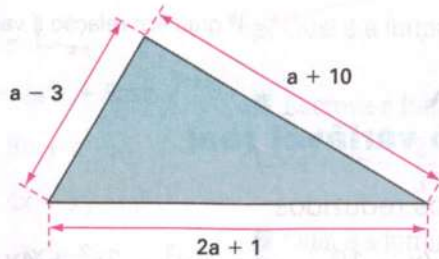
7 Considere o polinômio $x^4 - 10x^2 + 9$ e responda:

- a) De que grau é esse polinômio?
- b) O polinômio é completo ou incompleto?
- c) Se for incompleto, escreva a forma geral do polinômio.

Adição algébrica de polinômios

Consideremos as seguintes situações:

- 1ª Qual é o polinômio que representa o perímetro da figura seguinte?



Como o perímetro representa a soma das medidas dos lados, temos:

$$(2a + 1) + (a + 10) + (a - 3) = \text{---} \rightarrow \text{adição de polinômios}$$

$$2a + 1 + a + 10 + a - 3 =$$

$$2a + a + a + 1 + 10 - 3 =$$

$$4a + 8$$

Logo, o polinômio que representa o perímetro da figura é $4a + 8$.

- 2ª Um mesmo aparelho eletrodoméstico é vendido em duas lojas diferentes nas seguintes condições:



Como podemos observar, os preços são diferentes. Nessas condições, qual a diferença entre os preços das duas lojas?

Na loja 1, o preço é representado pelo polinômio $2x + 5y$.

Na loja 2, o preço é expresso pelo polinômio $x + 3y$.

A diferença entre os preços das duas lojas pode ser assim escrita:

$$(2x + 5y) - (x + 3y) = \text{---} \rightarrow \text{subtração de polinômios}$$

$$2x + 5y - x - 3y = 2x - x + 5y - 3y = x + 2y$$

Logo, a diferença entre os preços é expressa pelo polinômio $x + 2y$.

Observe, agora, os exemplos:

1. Calcular $(5a + 7ab - 4b) + (-2a + 3ab + 3b)$.

$$\begin{aligned} (5a + 7ab - 4b) + (-2a + 3ab + 3b) &= \\ &= 5a + 7ab - 4b - 2a + 3ab + 3b = \\ &= 5a - 2a + 7ab + 3ab - 4b + 3b = \\ &= 3a + 10ab - b \end{aligned}$$

2. Calcular $(2x + 5y - 6xy) - (-x + 2xy + 7y)$.

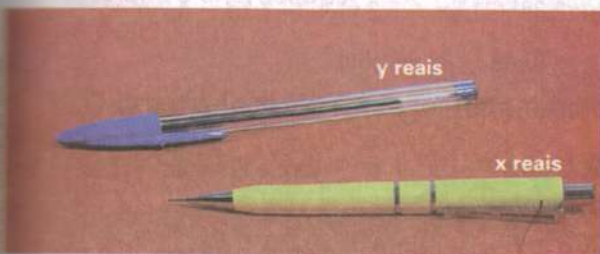
$$\begin{aligned} (2x + 5y - 6xy) - (-x + 2xy + 7y) &= \\ &= 2x + 5y - 6xy + x - 2xy - 7y = \\ &= 2x + x + 5y - 7y - 6xy - 2xy = \\ &= 3x - 2y - 8xy \end{aligned}$$

3. Dados $P_1 = x^3 + 4x^2 - 3x + 7$, $P_2 = 3x^3 + 6x - 5$ e $P_3 = x^2 + 2x + 3$, determinar $P_1 + P_2 - P_3$.

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 - P_3 &= (x^3 + 4x^2 - 3x + 7) + (3x^3 + 6x - 5) - (x^2 + 2x + 3) = \\ &= x^3 + 4x^2 - 3x + 7 + 3x^3 + 6x - 5 - x^2 - 2x - 3 = \\ &= x^3 + 3x^3 + 4x^2 - x^2 - 3x + 6x - 2x + 7 - 5 - 3 = \\ &= 4x^3 + 3x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

FIXAÇÃO

1. Veja o preço de custo de cada produto:

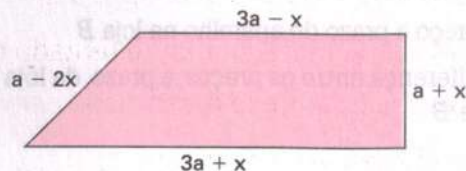


Waldir comprou 2 lapiseiras e 5 canetas, enquanto Roberto comprou 3 lapiseiras e 2 canetas. Nessas condições, responda:

- a) Qual o polinômio que representa a quantia que Waldir gastou?
 b) Qual o polinômio que representa a quantia que Roberto gastou?

- c) Qual o polinômio que representa a quantia que os dois gastaram juntos?
 d) Qual é o valor numérico desse polinômio, quando $x = +4$ e $y = 5$?

2. Observe a figura abaixo na qual estão indicadas as medidas dos seus lados.

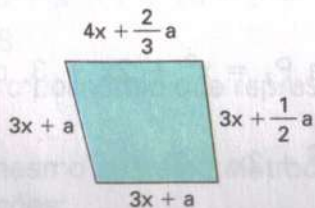


- a) Qual é o polinômio escrito na forma reduzida, que representa o perímetro da figura?
 b) Quando $a = 10$ e $x = 3$, qual o valor numérico do polinômio que você obtém?

3 Em uma partida de basquete, Rui fez x arremessos à cesta e acertou 60% desses arremessos menos 1. Paulinho também fez x arremessos e acertou 40% mais 2. Nessas condições, e recordando que $60\% = 0,6$ e $40\% = 0,4$, escreva o polinômio que representa:

- a quantidade de arremessos que Rui acertou
- a quantidade de arremessos que Paulinho acertou
- a quantidade de arremessos que os dois acertaram juntos
- a diferença entre os arremessos que Rui acertou e os arremessos que Paulinho acertou

4 Observe a figura abaixo na qual estão indicadas as medidas dos seus lados.



- Qual é o polinômio que representa o perímetro dessa figura?
- Sabendo-se que $x = 1$ e $a = 6$, qual é o valor numérico do polinômio que você escreveu?

5 Duas lojas vendem o mesmo aparelho por um mesmo preço x reais quando o pagamento é à vista. Para comprar a prazo, esse aparelho tem preços diferentes:

Loja A: entrada de 60% do preço x mais duas prestações de y reais.

Loja B: entrada de 40% do preço x mais três prestações de y reais.

Nessas condições, escreva o polinômio que representa

- o preço a prazo do aparelho na loja A
- o preço a prazo do aparelho na loja B
- a diferença entre os preços, a prazo, da loja A e da loja B

6 Sendo $A = 3x^2 - ax + 2a^2$ e $B = 4x^2 + 2ax - a^2$, calcule:

- $A + B$
- $A - B$

7 Vamos calcular:

- $(15a - 7b + 4c) + (-8b + 3c - 9a)$
- $(2y^2 - 3ay + 4a^2) - (ay - 5y^2 - a^2)$
- $(3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - 6b^3) + (7a^2b - 5a^3 + b^3 - 6ab^2)$
- $(x^2 - 3xy + y^2 - x^2y^2) - (-x^2 - 5x^2y^2 - y^2 - 3xy)$
- $\left(a^2 - \frac{3}{4}b^2 + c^2\right) - \left(\frac{2}{3}a^2 - b^2 - \frac{3}{4}c^2\right)$
- $\left(\frac{5}{3}ax + \frac{3}{4}xy + ay\right) + \left(\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}ay\right)$

8 Calcule:

- $(7a^2 - 3ab + 2b^2) - (3a^2 - 5ab - c^2 - 3b^2) + (-6ab + c^2)$
- $(9x^3 - 8x + 10) + (-3x^2 + 6x - 2) - (7x^3 - 5x^2 + 4x + 5)$
- $(ab + a^2b^2 - 7a - b) - (4a^2b^2 - 7a + 3b - ab) + (4b + 5a^2b^2)$
- $(7y^3 - 2y^2 + 3y - 5) + (y^3 - 4y + 9) - (5y^3 + 4y^2 - y + 1)$
- $(2ax - 3ay + 5 - 2xy) - (-ax + ay - 2 + 3xy) + (-5 + xy)$
- $\left(5x^2 - \frac{7}{15}xy + \frac{1}{3}y^2\right) - \left(-\frac{3}{7}x^2 - \frac{7}{15}xy - \frac{1}{3}y^2\right) + \left(-\frac{3}{7}x^2 + \frac{1}{3}y^2\right)$
- $(2,3a - 1,5x + 5,2y) + (-1,1a - 4,7y) - (0,4a - 2x + 1,6y)$

9 Dados $P = x^2 + a^2 - 2ax$ e $Q = 2x^2 + 5ax + 3a^2$, determine:

- $P + Q$ e seu valor numérico para $a = 10$ e $x = -4$.
- $P - Q$ e seu valor numérico para $a = -\frac{1}{2}$ e

$$x = \frac{1}{4}.$$

10 Determine o polinômio que adicionado ao polinômio $6x - 13xy + 2y - x^2y^2$ dá como resultado $7x + 2xy + 3y - 2x^2y^2$.

11 Consideremos o polinômio $8x^3 - 5x^2 - 9x + 4$.

Nessas condições:

- a) escreva o oposto desse polinômio.
- b) qual o resultado da soma dos dois polinômios?
- c) subtraindo-se do polinômio dado o seu oposto, que polinômio você vai obter?

12 Determine a soma do polinômio $5am + 2an - 7mp$ com o polinômio $2am - 9an + 5mp$. Do resultado

obtido, subtraia $am - an - mp$. Que polinômio você obtém?

13 São dados os polinômios

$$P_1 = a + b + c, P_2 = a - b + c \text{ e } P_3 = a + b - c.$$

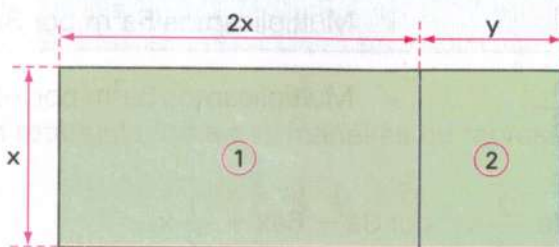
Nessas condições, determine:

- a) $P_1 + P_2 + P_3$
- b) $P_1 + P_2 - P_3$
- c) $P_1 - P_2 + P_3$
- d) $P_1 - P_2 - P_3$

Multiplicação de polinômios

Multiplicando um monômio por polinômio

De que maneira podemos representar a área da figura?



a) Como a figura é um retângulo, uma das maneiras de representar a área é:

$$x \cdot (2x + y)$$

medida do comprimento
medida da largura

Note que a expressão $x \cdot (2x + y)$ representa, algebricamente, a multiplicação de um *monômio* por um *polinômio*.

b) Outra maneira de representar a área da figura é somar as áreas das figuras que a compõem, ou seja:

$$\underbrace{x \cdot 2x}_{\text{área da figura 1}} + \underbrace{x \cdot y}_{\text{área da figura 2}} = 2x^2 + xy$$

Então:

$$x \cdot (2x + y) = x \cdot 2x + x \cdot y = 2x^2 + xy$$

monômio polinômio

Você nota que usamos a propriedade distributiva da multiplicação.

$$x \cdot (2x + y) = 2x^2 + xy$$



$$\begin{array}{r} 2x + y \\ \times \quad x \\ \hline 2x^2 + xy \end{array}$$

Podemos dizer que:

A multiplicação de um monômio por um polinômio é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

Veja os exemplos:

1. Calcular $5a^2m \cdot (3a - 2am)$.

$$5a^2m \cdot (3a - 2am) = 5a^2m \cdot 3a - 5a^2m \cdot 2am = 15a^3m - 10a^3m^2$$



Também podemos fazer:

$$\begin{array}{r} 3a - 2am \\ \times \quad 5a^2m \\ \hline 15a^3m - 10a^3m^2 \end{array}$$

Em ambos os casos:

✓ Multiplicamos $5a^2m$ por $3a$, o que dá $15a^3m$.

✓ Multiplicamos $5a^2m$ por $-2am$ o que dá $-10a^3m^2$.

2. Vamos calcular o produto de $\frac{2}{3}ax^2$ por $3a - 6ax + \frac{1}{2}x$.

De acordo com o que vimos, temos:

$$\frac{2}{3}ax^2 (3a - 6ax + \frac{1}{2}x) = \frac{2}{3}ax^2 \cdot 3a - \frac{2}{3}ax^2 \cdot 6ax + \frac{2}{3}ax^2 \cdot \frac{1}{2}x =$$

$$= 2a^2x^2 - 4a^2x^3 + \frac{1}{3}ax^3$$

Também podemos fazer:

$$\begin{array}{r} 3a - 6ax + \frac{1}{2}x \\ \times \quad \frac{2}{3}ax^2 \\ \hline 2a^2x^2 - 4a^2x^3 + \frac{1}{3}ax^3 \end{array}$$

Em ambos os casos:

✓ Multiplicamos $\frac{2}{3}ax^2$ por $3a$, o que dá $2a^2x^2$.

✓ Multiplicamos $\frac{2}{3}ax^2$ por $-6ax$, o que dá $-4a^2x^3$.

✓ Multiplicamos $\frac{2}{3}ax^2$ por $\frac{1}{2}x$, o que dá $\frac{1}{3}ax^3$.

3. Qual é a forma mais simples de se escrever o polinômio expresso por $3(x - 2) + x^2 - x \cdot (2 - x)$?

$$= 3(x - 2) + x^2 - x \cdot (2 - x) =$$

$$= 3x - 6 + x^2 - 2x + x^2 =$$

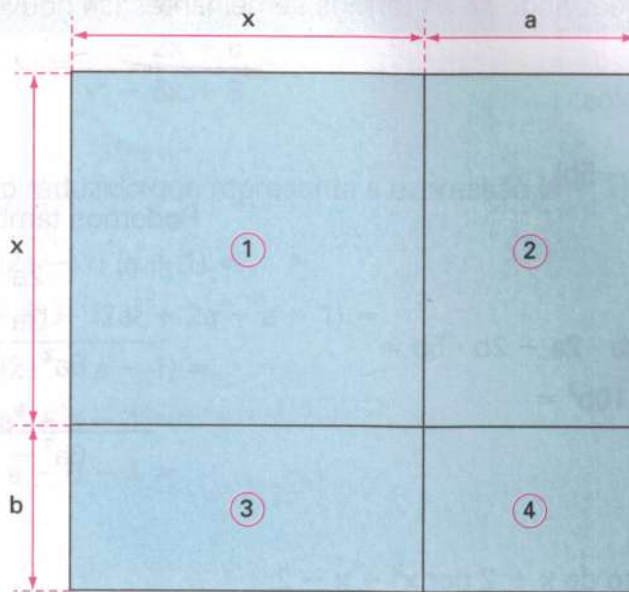
$$= x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6 =$$

$$= 2x^2 + x - 6$$

Multiplicando um polinômio por outro polinômio

Consideremos a seguinte situação:

De que maneira podemos representar a área da figura seguinte?



Como a figura é um retângulo, uma das maneiras de representar a área é:

$$(x + a) \cdot (x + b)$$

↙ medida da largura
↘ medida do comprimento

Note que, algebricamente, a expressão $(x + a)(x + b)$ representa a multiplicação de um polinômio por outro polinômio.

Outra maneira de representar a área da figura é somar as áreas que a compõem, ou seja:

$$\underbrace{x \cdot x}_{\text{figura 1}} + \underbrace{x \cdot a}_{\text{figura 2}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{figura 3}} + \underbrace{b \cdot a}_{\text{figura 4}} = x^2 + ax + bx + ab.$$

área da figura 1 área da figura 2 área da figura 3 área da figura 4

Então:

$$(x + a) \cdot (x + b) = x \cdot x + x \cdot a + b \cdot x + b \cdot a = x^2 + ax + bx + ab$$

↙ polinômio
↘ polinômio

Também podemos escrever assim:

$$\begin{array}{r} \\ \times \\ \hline x^2 + bx + ax + ab \end{array}$$

- ✓ Multiplicamos x por x , o que dá x^2 .
- ✓ Multiplicamos x por b , o que dá bx .
- ✓ Multiplicamos a por x , o que dá ax .
- ✓ Multiplicamos a por b , o que dá ab .

Então, podemos dizer:

A multiplicação de um polinômio por outro polinômio é feita multiplicando-se cada termo (ou monômio) de um deles pelos termos (ou monômios) do outro e reduzindo-se os termos semelhantes (se houver).

Vejam os outros exemplos:

1. Calcular $(3a + 2b) \cdot (2a - 5b)$.

Temos:

$$\begin{aligned}(3a + 2b)(2a - 5b) &= \\ &= 3a \cdot 2a - 3a \cdot 5b + 2b \cdot 2a - 2b \cdot 5b = \\ &= 6a^2 - 15ab + 4ab - 10b^2 = \\ &= 6a^2 - 11ab - 10b^2\end{aligned}$$

Podemos também fazer assim:

$$\begin{array}{r} 2a - 5b \\ \times \quad 3a + 2b \\ \hline 6a^2 - 15ab \\ \quad + 4ab - 10b^2 \\ \hline 6a^2 - 11ab - 10b^2\end{array}$$

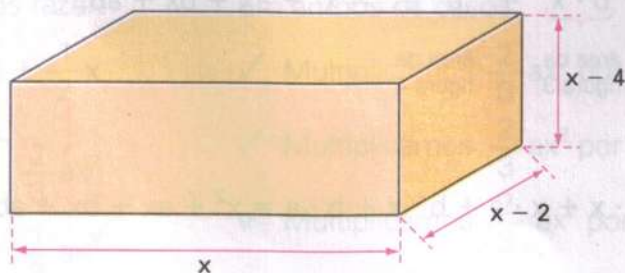
2. Vamos calcular o produto de $x + 2$ por $x^2 - x - 2$.

$$\begin{aligned}(x + 2) \cdot (x^2 - x - 2) &= \\ &= x \cdot x^2 - x \cdot x - x \cdot 2 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot 2 = \\ &= x^3 - x^2 - 2x + 2x^2 - 2x - 4 = \\ &= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 2x - 4 = \\ &= x^3 + x^2 - 4x - 4\end{aligned}$$

Também podemos fazer assim:

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ \times \quad x + 2 \\ \hline x^3 - x^2 - 2x \\ \quad + 2x^2 - 2x - 4 \\ \hline x^3 + x^2 - 4x - 4\end{array}$$

3. O volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto de suas dimensões. Nessas condições, calcular o polinômio que representa o volume do paralelepípedo seguinte:



O volume desse paralelepípedo, para x maior do que 4, será dado por $x \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$.

Assim, temos:

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) = x \cdot (x^2 - 4x - 2x + 8) = x \cdot (x^2 - 6x + 8) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Também podemos fazer assim:

$$\begin{array}{r} x - 4 \\ \times \quad x - 2 \\ \hline x^2 - 4x \\ \quad - 2x + 8 \\ \hline x^2 - 6x + 8 \end{array}$$

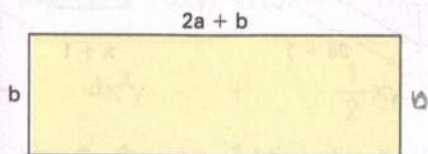
$$\begin{array}{r} x^2 - 6x + 8 \\ \times \quad x \\ \hline x^3 - 6x^2 + 8x \end{array}$$

4. Qual é o polinômio reduzido que representa a expressão $(a + 2)(a - 3) + (2a - 1)(a + 1)$?

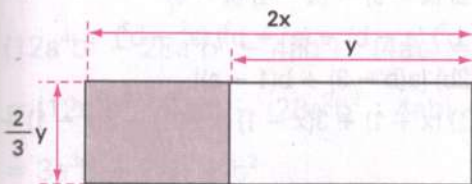
$$\begin{aligned} (a + 2)(a - 3) + (2a - 1)(a + 1) &= \\ &= (a^2 - 3a + 2a - 6) + (2a^2 + 2a - a - 1) = \\ &= (a^2 - a - 6) + (2a^2 + a - 1) = \\ &= a^2 - a - 6 + 2a^2 + a - 1 = \\ &= a^2 + 2a^2 - a + a - 6 - 1 = \\ &= 3a^2 - 7 \end{aligned}$$

FIXAÇÃO

1. Escreva o polinômio que indica a área da figura abaixo, cujas medidas estão nela indicadas.



2. Escreva o polinômio que indica a área da região colorida da figura abaixo, cujas medidas estão nela indicadas.



4. Vamos calcular:

- $5x \cdot (2x^2 - 1)$
- $-4ab \cdot (a^2 - 2ab - b^2)$
- $7ax \cdot (abx - 2bx)$
- $\frac{1}{2}am \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}m - 4am\right)$
- $\frac{1}{5}y^3 \cdot (10y + 25y^2 - 40)$
- $x^2y^2 \cdot (xy - x^2 - y^2)$
- $4b^2c \cdot \left(\frac{1}{4}bc - \frac{2}{5}c\right)$
- $-6x \cdot \left(-x + y - \frac{1}{2}xy + 5\right)$

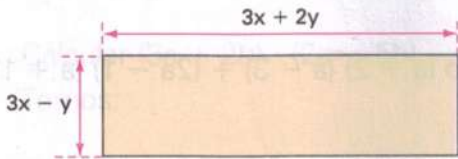
5. Qual é o polinômio reduzido expresso por $a \cdot (a^2 - ab + b^2) + b \cdot (a^2 - ab + b^2)$?

6. Escreva a forma reduzida dos polinômios:

- $2bx(1 - a) + 2x(a - b - c) - 2x(a - c)$
- $3a(2a - b) - [a(6a - 3b) - b(3a - 5b)]$

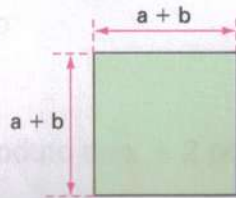
7 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são $3x$, y e $(x + y)$ unidades de comprimento. Qual é o volume desse paralelepípedo retângulo? (Lembre-se de que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto das medidas das três dimensões.)

8 Determine o polinômio que representa a área da figura abaixo, cujas medidas estão nela indicadas.

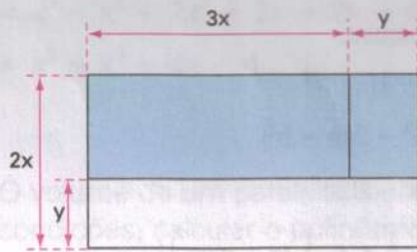


9 Qual é o valor numérico do polinômio obtido no exercício anterior, quando $x = 10$ e $y = 5$?

10 Escreva o polinômio que representa a área do quadrado ao lado e dê o valor numérico desse polinômio quando $a = 4$ e $b = 2$.



11 Determine o polinômio que representa a área da região colorida na figura abaixo e, a seguir, calcule o valor numérico desse polinômio quando $x = 2$ e $y = 1$.



12 Vamos calcular:

- $(x + 7) \cdot (x + 5)$
- $(y - 6) \cdot (y + 5)$
- $(2a + b) \cdot (a - 2b)$
- $(a - x) \cdot (2x - a)$
- $(ab + 2x) \cdot (ab - x)$
- $(1 + 5xy) \cdot (10 - 2xy)$
- $(-3mx + y) \cdot (mx - 2y)$
- $(5a + 1,5x) \cdot (0,2a + 4x)$

13 Se você multiplicar $2a + \frac{1}{2}b$ por $2a - \frac{1}{2}b$, que polinômio você vai obter?

14 Vamos calcular:

- $(2x + 1)(-6x^2 - 5x + 3)$
- $(a^2 - 1)(2a^2 - 2a + 1)$
- $(a + x)(a^2 - ax + x^2)$
- $(9a^2 + 6ab + 4b^2)(3a - 2b)$
- $(m - n)(m - n - mn)$
- $(a^3 + a^2 - a - 1)(a^2 + a)$
- $(2x^2 - 3x + 2)(x - 3)$
- $(4a^2 - 3ay + 2y^2)(2a - y)$

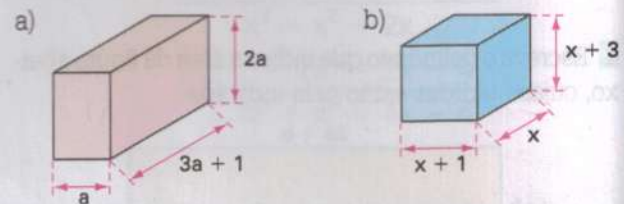
15 Qual é o polinômio que você obtém quando multiplica $2x^2 - 5x + 3$ por $x^2 + 2x - 1$?

16 Qual é o valor numérico do polinômio obtido no exercício anterior quando $x = 2$?

17 Usando a definição de potência, calcule:

- $(x + 6)^2$
- $(a - 2b)^2$
- $(1 + 3xy)^2$
- $(x + y)^3$

18 Você sabe que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto das medidas de suas três dimensões. Determine o polinômio que representa o volume de cada uma das figuras:



19 Dados $A = (a + x)(a^2 - ax + x^2)$ e $B = (a - x)(a^2 + ax + x^2)$, determine $A - B$.

20 Determine a forma mais simples de escrever cada um dos seguintes polinômios:

- $(x - 2)(x - 3) - (x - 4)(x - 5)$
- $(a^3 - b^3)(a + b) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
- $(a - 2b)[a(b - 3) + b(1 - a)]$
- $(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1)(x - 1) + 3(x - 1) + 1$

21 Escreva o polinômio expresso por $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - y^2)$ e determine seu valor numérico para $x = 2$ e $y = -1$.

22 Dados $A = xy - 1$, $B = x - y$ e $C = xy(x - y)$, escreva o polinômio expresso por $A \cdot B - C$ e dê o seu valor numérico quando $x = -5$ e $y = -2$.

Divisão de polinômios

Dividindo um polinômio por um monômio

Consideremos os seguintes exemplos:

1. Dividir $9x^5 + 21x^4 - 12x^3$ por $3x^3$.

$$= (9x^5 + 21x^4 - 12x^3) : (3x^3) =$$

$$= (9x^5 + 21x^4 - 12x^3) \cdot \frac{1}{3x^3} =$$

$$= \frac{9x^5}{3x^3} + \frac{21x^4}{3x^3} - \frac{12x^3}{3x^3} =$$

$$= \underbrace{(9x^5 : 3x^3)} + \underbrace{(21x^4 : 3x^3)} - \underbrace{(12x^3 : 3x^3)} =$$

$$= 3x^2 + 7x - 4$$

2. Vamos calcular $(40x^3y^2 - 5x^2y^3) : (-10xy)$.

$$= (40x^3y^2 - 5x^2y^3) : (-10xy) =$$

$$= (40x^3y^2 - 5x^2y^3) \cdot \left(-\frac{1}{10xy}\right) =$$

$$= -\frac{40x^3y^2}{10xy} + \frac{5x^2y^3}{10xy} =$$

$$= -\underbrace{(40x^3y^2 : 10xy)} + \underbrace{(5x^2y^3 : 10xy)} =$$

$$= -4x^2y + \frac{1}{2}xy^2 \quad \text{ou} \quad -4x^2y + \frac{1}{2}xy^2$$

Podemos dizer:

Efetamos a divisão de um polinômio por um monômio, não-nulo, fazendo a divisão de cada termo do polinômio pelo monômio.

3. $(12a^4b^2 - 28a^2b^2 + 4ab^3) : (4ab) =$

$$= (12a^4b^2 : 4ab) - (28a^2b^2 : 4ab) + (4ab^3 : 4ab) =$$

$$= 3a^3b - 7ab + b^2$$

4. $(7x^3y^2 - x^2y^2) : (-3x^2y) =$

$$= - (7x^3y^2 : 3x^2y) + (x^2y^2 : 3x^2y) =$$

$$= -\frac{7}{3}xy + \frac{1}{3}y$$

$$\text{Veja: } 7 : 3 = 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$1 : 3 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \left(\frac{2}{3}y^4 - \frac{1}{6}y^3\right) : \left(\frac{2}{3}y^2\right) = \\
 & = \left(\frac{2}{3}y^4 : \frac{2}{3}y^2\right) - \left(\frac{1}{6}y^3 : \frac{2}{3}y^2\right) = \\
 & = y^2 - \frac{1}{4}y
 \end{aligned}$$

$$\text{Veja: } \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

Divisão de um polinômio por outro polinômio

Observe a seguinte divisão, que você já aprendeu:

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 5 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad 6 : 5 = 1$$

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 5 \\
 -5 & 1 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad 5 \cdot 1 = 5$$

Subtraindo (ou trocando o sinal): -5
 $6 - 5 = 1$

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 5 \\
 -5 & 1 \\
 \hline
 13 &
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad 13 : 5 = 2$$

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 5 \\
 -5 & 12 \\
 \hline
 13 & \\
 -10 & \\
 \hline
 3 &
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad 5 \cdot 2 = 10$$

Subtraindo (ou trocando o sinal): -10
 $13 - 10 = 3$

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 5 \\
 -5 & 12 \\
 13 & \\
 -10 & \\
 \hline
 37 &
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad 37 : 5 = 7$$

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 5 \\
 -5 & 127 \\
 13 & \\
 -10 & \\
 \hline
 37 & \\
 -35 & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad 5 \cdot 7 = 35$$

Subtraindo (ou trocando o sinal): -35
 $37 - 35 = 2$

Você nota que $5 \cdot 127 + 2 = 637$.

A divisão de polinômios na variável x se assemelha ao processo que vimos na divisão dada e que você já conhece. Observe os exemplos:

Vamos dividir $5x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ por $x - 1$.

Acompanhe a resolução:

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & x - 1 \longrightarrow 5x^3 : x = 5x^2 \\
 \hline
 & 5x^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & x - 1 \longrightarrow (x - 1) \cdot 5x^2 = 5x^3 - 5x^2 \\
 -5x^3 + 5x^2 & 5x^2 \\
 \hline
 +2x^2 + 2x - 3 &
 \end{array}$$

Subtraindo (ou trocando o sinal):
 $-5x^3 + 5x^2$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & x - 1 \longrightarrow 2x^2 : x = 2x \\
 -5x^3 + 5x^2 & 5x^2 + 2x \\
 \hline
 +2x^2 + 2x - 3 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & x - 1 \longrightarrow (x - 1) \cdot 2x = 2x^2 - 2x \\
 -5x^3 + 5x^2 & 5x^2 + 2x \\
 \hline
 +2x^2 + 2x - 3 & \\
 -2x^2 + 2x & \\
 \hline
 +4x - 3 &
 \end{array}$$

Subtraindo (ou trocando o sinal):
 $-2x^2 + 2x$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & x - 1 \longrightarrow 4x : x = 4 \\
 -5x^3 + 5x^2 & 5x^2 + 2x + 4 \\
 \hline
 +2x^2 + 2x - 3 & \\
 -2x^2 + 2x & \\
 \hline
 4x - 3 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & x - 1 \longrightarrow (x - 1) \cdot 4 = 4x - 4 \\
 -5x^3 + 5x^2 & 5x^2 + 2x + 4 \\
 \hline
 +2x^2 + 2x - 3 & \\
 -2x^2 + 2x & \\
 \hline
 4x - 3 & \\
 -4x + 4 & \\
 \hline
 +1 &
 \end{array}$$

Subtraindo (ou trocando o sinal):
 $-4x + 4$

resto

Observe que:

$$\underbrace{(x - 1)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(5x^2 + 2x + 4)}_{\text{quociente}} + \underbrace{1}_{\text{resto}} = \underbrace{5x^3 - 3x^2 + 2x - 3}_{\text{dividendo}}$$

2. Dividir $6x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 4x + 3$ por $3x^2 - x + 1$.

$6x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 4x + 3$	$3x^2 - x + 1$
$-6x^4 + 2x^3 - 2x^2$	$2x^2 - x + 3$
$-3x^3 + 10x^2 - 4x + 3$	$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{quociente}}$
$+3x^3 - x^2 + x$	
$+9x^2 - 3x + 3$	
$-9x^2 + 3x - 3$	
0	

$$6x^4 : 3x^2 = 2x^2$$

$$(3x^2 - x + 1) \cdot 2x^2 = 6x^4 - 2x^3 + 2x^2$$

$$\text{Subtraindo: } -6x^4 + 2x^3 - 2x^2$$

$$-3x^3 : 3x^2 = -x$$

$$(3x^2 - x + 1)(-x) = -3x^3 + x^2 - x$$

$$\text{Subtraindo: } +3x^3 - x^2 + x$$

$$9x^2 : 3x^2 = 3$$

$$(3x^2 - x + 1) \cdot 3 = 9x^2 - 3x + 3$$

$$\text{Subtraindo: } -9x^2 + 3x - 3$$

A divisão é exata, pois o resto é igual a 0 e o quociente é o polinômio $2x^2 - x + 3$.

3. Dividir $5x^3 + x^2 - 3$ por $x^2 - 1$.

Você nota que o dividendo e o divisor são polinômios incompletos. Nesse caso, ao colocá-los na chave, é conveniente escrevê-los na forma geral.

$5x^3 + x^2 + 0x - 3$	$x^2 + 0x - 1$
$-5x^3 - 0x^2 + 5x$	$5x + 1$
$x^2 + 5x - 3$	$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{quociente}}$
$-x^2 - 0x + 1$	
$5x - 2$	
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{resto}}$	

$$5x^3 : x^2 = 5x$$

$$(x^2 + 0x - 1) \cdot 5x = 5x^3 + 0x^2 - 5x$$

$$\text{Subtraindo: } -5x^3 - 0x^2 + 5x$$

$$x^2 : x^2 = 1$$

$$(x^2 + 0x - 1) \cdot 1 = x^2 + 0x - 1$$

$$\text{Subtraindo: } -x^2 - 0x + 1$$

A divisão não é exata; o quociente é $5x + 1$ e o resto é $5x - 2$.

FIXAÇÃO

1 Vamos calcular:

a) $(-28x^4 + 8x^3) : (4x^2)$

b) $(a^5 - ab^3) : (ab)$

c) $(5a^3x^3 - 20a^3x^2) : (5a^2x)$

d) $(30y^5 - 48y^5 - 18y^2) : (6y^2)$

e) $(x^4y^4 + x^4y^6 - x^5y^5) : (x^4y^4)$

f) $(2a^5b^3 - 3a^3b^2) : (2a^2b^2)$

g) $(6x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 9x^2) : (3x^2)$

h) $\left(\frac{1}{6}a^4b^4 - \frac{5}{8}a^3b^3\right) : \left(-\frac{1}{2}a^2b^2\right)$

2 Determine o quociente de $60a^4x^2 - 40a^2x^4 + 90a^4x^4$

a) $11ax$

b) $10a^2x^2$

c) $-10a^2x$

3 O produto de um monômio por um polinômio dá $12a^3x^3 + 15a^3x^2$. Se o monômio é $3ax$, qual é o polinômio?

4 Multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura, temos a área de um retângulo. Se essa área é $40x^2 + 70x$ e a medida da largura é $10x$, qual é a medida do comprimento desse retângulo?

5 Determine a soma dos polinômios

$xy^2 + 4x^2y^2 - x^2y$ e $-3x^2y^2 + 2x^2y - xy^2 - xy$. A seguir, divida o resultado por xy . Qual é o polinômio que você vai obter?

6 Se você dividir $2a^5 - 8a^4 - 20a^3$ por $2a^2$ e do resultado subtrair o polinômio $a^3 + 4a^2 - 10a$, que polinômio você vai obter?

7 Divida o polinômio $6x^2 + 13x - 5$ por $3x - 1$ e determine o valor numérico do quociente quando

$x = -\frac{1}{2}$.

8 Qual é o quociente de $12x^2 + 5x - 2$ por $3x + 2$?

9 A área de um retângulo é expressa pelo polinômio $12x^2 - x - 1$ e a medida do comprimento desse retângulo é expressa pelo polinômio $4x + 1$. Se você dividir a área pela medida do comprimento, você obtém a medida da largura do retângulo. Qual é o polinômio que expressa a largura desse retângulo?

10 Dividindo o polinômio $2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 16x - 3$ por $2x^2 + x - 3$, você obtém um polinômio P . Determine P e seu valor numérico quando $x = 5$.

11 Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de:

a) $x^3 - 3x^2 - x + 6$ por $x - 2$

b) $2x^2 + 7x - 15$ por $x + 5$

c) $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ por $x^2 + x - 2$

d) $x^3 - 1$ por $x - 1$

e) $6x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ por $3x^3 - 2x - 1$

12 Determine a soma dos polinômios $x^5 - x^3 + 5x^2$, $-2x^4 + 2x^2 - 10x$ e $6x^3 - 6x + 30$. A seguir, divida essa soma por $x^2 - 2x + 6$ e determine o valor numérico do resultado para $x = -2$.

13 Sabe-se que o polinômio $9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$ é divisível por $x - 3$. Determine esse quociente e seu valor numérico quando $x = -\frac{1}{3}$.

14 Determine o polinômio que dividido por $2x + 3$ tem quociente $x - 1$ e resto 6.

15 O polinômio $3x^3 - 2x^2 - 41x + 60$ tem três fatores. Dois deles são os polinômios $x - 3$ e $x + 4$.

a) Qual é o terceiro fator?

b) Qual o valor numérico do polinômio dado quando $x = 10$?

16 Dividindo-se um polinômio P por $x^2 - 1$, vamos obter quociente $x + 2$ e resto $x - 3$. Qual é o quociente do polinômio P por $x - 2$?

No cálculo algébrico, alguns produtos aparecem com muita freqüência. Veja:

- ✓ $(x + y) \cdot (x - y)$ \longrightarrow produto da soma pela diferença de dois termos
- ✓ $(x + y) \cdot (x + y)$ ou $(x + y)^2$ \longrightarrow quadrado da soma de dois termos
- ✓ $(x - y) \cdot (x - y)$ ou $(x - y)^2$ \longrightarrow quadrado da diferença de dois termos

Pela importância que representam no cálculo algébrico, esses produtos são chamados *produtos notáveis*.

Veja, a seguir, uma experiência que podemos fazer trabalhando com esses produtos quando consideramos, por exemplo, a expressão $(10 + 3)^2$, cujo valor podemos facilmente determinar.

$$(10 + 3)^2 = (13)^2 = 13 \cdot 13 = 169$$

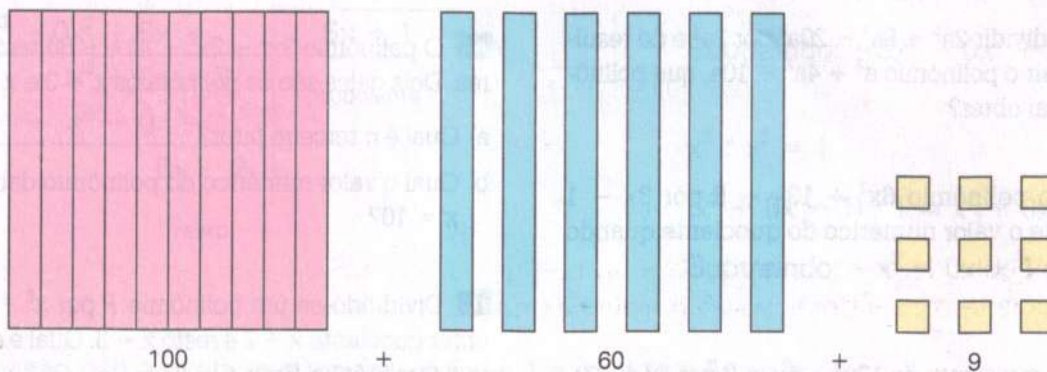
Consideremos as seguintes figuras:



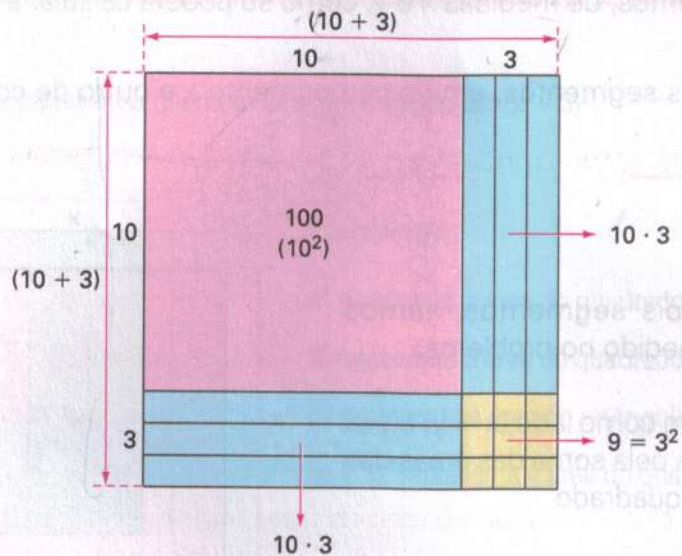
Tomando essas figuras, vamos representar o número 169, lembrando que

$$169 = 100 + 60 + 9 = 1 \text{ centena} + 6 \text{ dezenas} + 9 \text{ unidades.}$$

Assim, teremos:



Reunindo essas figuras, podemos obter um quadrado da seguinte maneira:



Observando que cada lado desse quadrado mede $(10 + 3)$ unidades, podemos escrever:

$$(10 + 3)^2 = 10^2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 3^2$$

área do quadrado soma das áreas das figuras que estão no interior do quadrado

anda:

$$(10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \cdot (10 \cdot 3) + 3^2$$

quadrado do 1º termo quadrado do 2º termo
 2º termo 1º termo duas vezes o produto dos termos

A expressão $(10 + 3)^2$ significa "o quadrado da soma de dois termos, no qual o primeiro é 10 e o segundo é 3".

Note, também, que: $(10 + 3)^2 \neq 10^2 + 3^2$.

$$13^2 = 169 \quad 100 + 9 = 109$$

Quadrado da soma de dois termos

Vamos considerar a expressão $(x + y)(x + y)$ ou $(x + y)^2$, que representa o quadrado da soma de dois termos e desenvolvê-la algebricamente:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Geometricamente, podemos encontrar a mesma igualdade.

Dados dois segmentos, de medidas x e y , como se poderá calcular a área do quadrado cujo lado mede $(x + y)$?

Consideremos dois segmentos, um de comprimento x e outro de comprimento y :



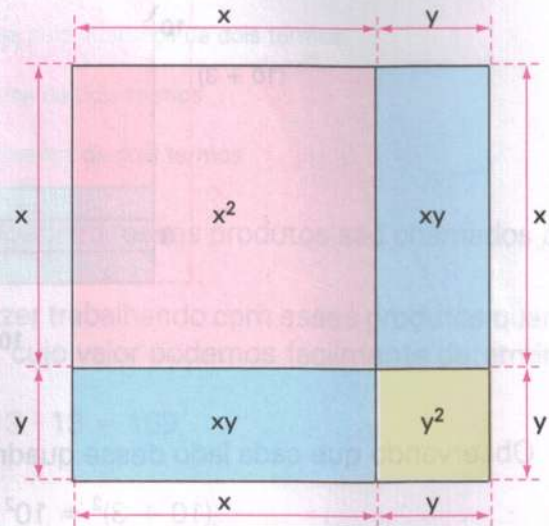
Usando esses dois segmentos, vamos construir o quadrado pedido no problema:

Esse quadrado tem como lado $(x + y)$ e sua área pode ser expressa pela soma das áreas das figuras que formam o quadrado:

$$(x + y)^2 \text{ ou } x^2 + 2xy + y^2$$

Portanto:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$



Tanto algebricamente como geometricamente fica demonstrado que:

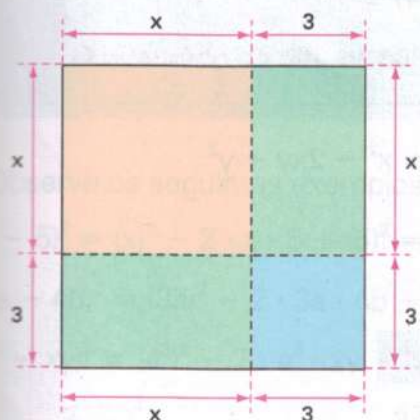
$$\underbrace{(x + y)^2}_{\text{quadrado da soma de 2 termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2xy}_{\text{duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Observe os seguintes exemplos de aplicação da regra que acabamos de apresentar:

- $(x + 2)^2 = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + (2)^2 = x^2 + 4x + 4$
- $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
- $(a^3 + 5b)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5b + (5b)^2 = a^6 + 10a^3b + 25b^2$
- $\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = (y)^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

Veja como podemos representar geometricamente a expressão $(x + 3)^2$.



Observe que:

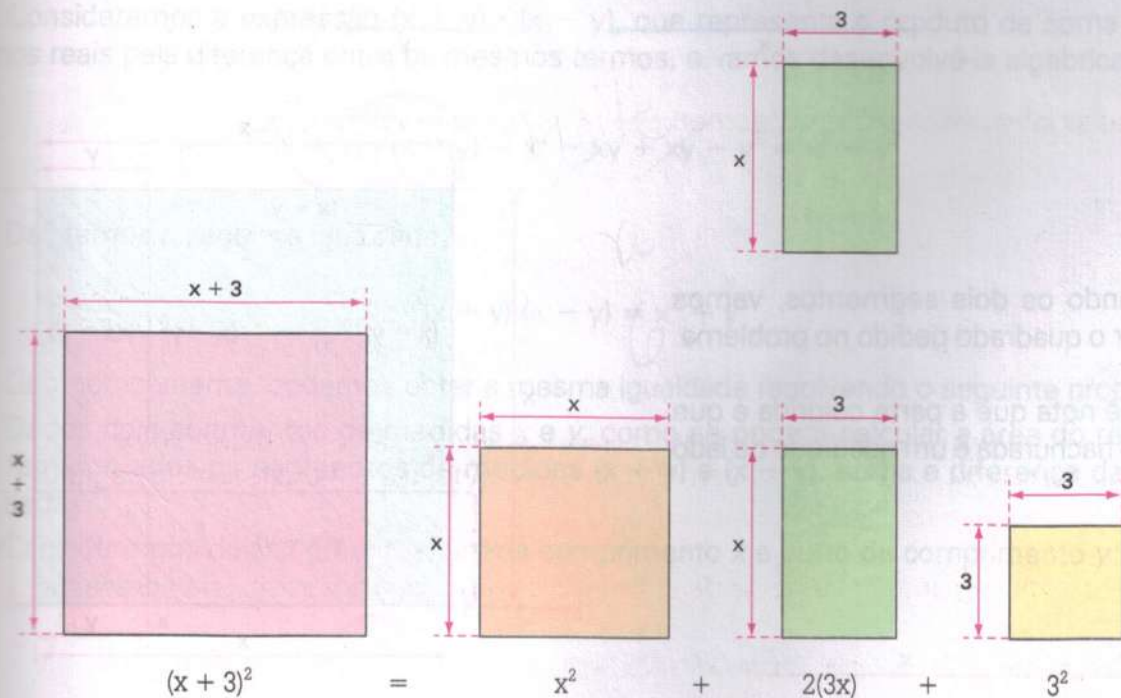
x^2 representa a área do quadrado de lado x

3^2 representa a área do quadrado de lado 3

$3x$ representa a área do retângulo de lados 3 e x

$(x + 3)^2$ representa a área do quadrado de lado $(x + 3)$

De acordo com a figura, a área do quadrado de lado $(x + 3)$ é igual à soma das áreas dos dois quadrados e dois retângulos que a compõem:



Represente geometricamente:

1 $(x + 2)^2$

2 $(x + 3)(x + 2)$

Quadrado da diferença de dois termos

Vamos considerar a expressão $(x - y)(x - y)$ ou $(x - y)^2$, que representa o quadrado da diferença de dois termos, e vamos desenvolvê-la algebricamente.

Inicialmente, de acordo com a definição de potência, temos:

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y)$$

Efetuada a multiplicação de polinômios indicada, temos:

$$(x - y) \cdot (x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

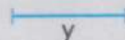
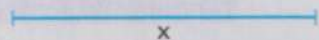
Daí, temos a seguinte igualdade:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Geometricamente, podemos encontrar a mesma igualdade resolvendo o seguinte problema:

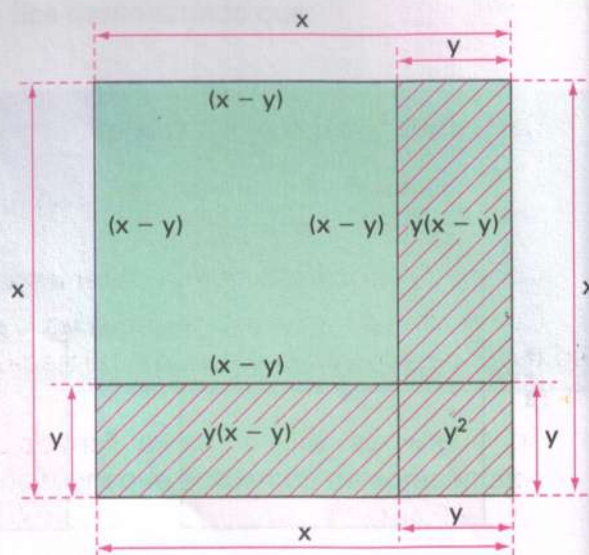
Dados dois segmentos, de medidas x e y , com $x > y$, como se poderá calcular a área do quadrado cujo lado mede $(x - y)$?

Consideremos dois segmentos, um de comprimento x e outro de comprimento y :



Usando os dois segmentos, vamos construir o quadrado pedido no problema.

Você nota que a parte colorida e que não está hachurada é um quadrado de lado $(x - y)$.



O quadrado de lado $(x - y)$ tem sua área expressa por $(x - y)^2$ ou

$$x^2 - y(x - y) - y(x - y) - y^2 = x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Portanto:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Tanto algebricamente como geometricamente, fica demonstrado que:

$$\underbrace{(x - y)^2}_{\text{quadrado da diferença de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} - \underbrace{2xy}_{\text{duas vezes o produto do 1º pelo 2º termo}} + \underbrace{y^2}_{\text{quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Observe os seguintes exemplos de aplicação da regra que acabamos de aprender:

$$1. (x - 5)^2 = (x)^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + (5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$2. (3a - 4b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$$

$$3. (a^3 - xy)^2 = (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot xy + (xy)^2 = a^6 - 2a^3xy + x^2y^2$$

$$4. \left(m - \frac{3}{5}n^2\right)^2 = (m)^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{3}{5}n^2 + \left(\frac{3}{5}n^2\right)^2 = m^2 - \frac{6}{5}mn^2 + \frac{9}{25}n^4$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

Consideremos a expressão $(x + y) \cdot (x - y)$, que representa o produto da soma de dois termos reais pela diferença entre os mesmos termos, e vamos desenvolvê-la algebricamente:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Daí, temos a seguinte igualdade:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

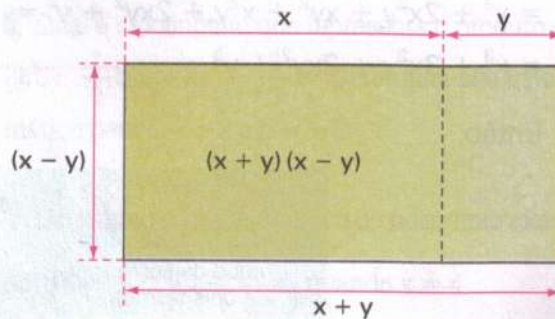
Geometricamente, podemos obter a mesma igualdade resolvendo o seguinte problema:

Dados dois segmentos de medidas x e y , como se poderá calcular a área do retângulo que tem por lados os segmentos de medidas $(x + y)$ e $(x - y)$, soma e diferença das medidas dadas?

Consideremos dois segmentos, um de comprimento x e outro de comprimento y :



Usando os dois segmentos, construímos a figura ao lado, que é um retângulo cujos lados medem $(x + y)$ e $(x - y)$.

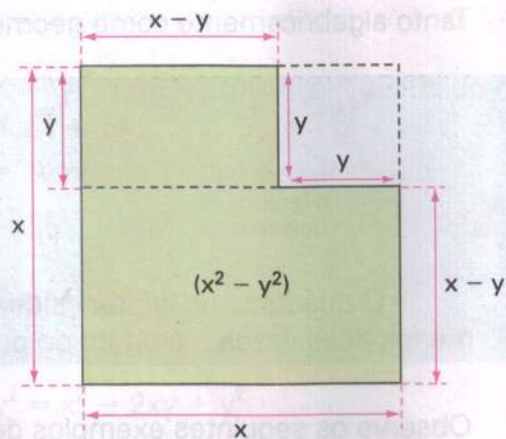


Recortando no tracejado, podemos formar uma nova figura:

A área da primeira figura é dada por $(x + y)(x - y)$ e a área desta nova figura é dada por $x^2 - y^2$.

Como as áreas de ambas as figuras são iguais, podemos escrever a igualdade:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$



Tanto algebricamente como geometricamente, fica demonstrado que:

$$\underbrace{(x + y)}_{\text{soma dos termos}} \cdot \underbrace{(x - y)}_{\text{diferença dos termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} - \underbrace{y^2}_{\text{quadrado do 2º termo}}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Observe os seguintes exemplos, onde aplicamos a regra que acabamos de aprender:

- $(2a + c)(2a - c) = (2a)^2 - (c)^2 = 4a^2 - c^2$
- $(x^2 + 7y)(x^2 - 7y) = (x^2)^2 - (7y)^2 = x^4 - 49y^2$
- $(4 - xy^2)(4 + xy^2) = (4)^2 - (xy^2)^2 = 16 - x^2y^4$
- $\left(m^3 - \frac{2}{3}\right)\left(m^3 + \frac{2}{3}\right) = (m^3)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = m^6 - \frac{4}{9}$

Cubo da soma de dois termos

Vamos considerar o produto notável $(x + y)^3$. Para desenvolvê-lo, usaremos as regras já aprendidas. Observe:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y) \cdot (x + y)^2 = && \longrightarrow \text{propriedade das potências de mesma base} \\ &= (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) = && \longrightarrow \text{pela regra do quadrado da soma} \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = && \longrightarrow \text{pela multiplicação de polinômios} \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 && \longrightarrow \text{polinômio reduzido} \end{aligned}$$

Então:

$$\underbrace{(x + y)^3}_{\text{cubo da soma de dois termos}} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Cubo da diferença de dois termos

Consideremos o produto notável $(x - y)^3$. Observe:

$$\begin{aligned}(x - y)^3 &= (x - y) \cdot (x - y)^2 = \\ &= (x - y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\end{aligned}$$

Então:

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

cubo da diferença
de dois termos

FIXAÇÃO

1 O valor de cada uma das expressões pode ser calculado de duas maneiras: resolvendo em primeiro lugar as operações entre os parênteses ou usando a regra dos produtos notáveis. Faça isso em cada uma das seguintes expressões:

a) $(10 + 5)^2$ c) $(10 + 5) \cdot (10 - 5)$
b) $(10 - 5)^2$ d) $(10 + 5)^3$

2 Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule:

a) $(7a + 1)(7a - 1)$
b) $(2 + 9x)^2$
c) $(6x - y)^2$
d) $\left(3x + \frac{2}{3}a\right)^2$
e) $(a^4 + m^4)(a^4 - m^4)$
f) $(a^3 + 6y^2)^2$
g) $(m^2 + 2n^3)^2$
h) $\left(bc + \frac{1}{3}a\right)\left(bc - \frac{1}{3}a\right)$
i) $(3ab + 1)^2$

j) $(5 - b^3c^3)^2$
l) $(m^2n + p^3)(m^2n - p^3)$
m) $\left(4xy + \frac{1}{4}\right)^2$
n) $(a^3 - 2a)^2$
o) $(10a - bc)(10a + bc)$

3 Existe algum polinômio que elevado ao quadrado dá $x^2 - 2xy + y^2$? Em caso afirmativo, qual é esse polinômio?

4 Escreva o polinômio que elevado ao quadrado dá:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $y^2 - y + \frac{1}{4}$

5 Qual é o polinômio que representa o produto de $2a^2 + \frac{1}{3}b$ por $2a^2 - \frac{1}{3}b$? Determine seu valor numérico para $a = -2$ e $b = -9$.

6 Determine o valor numérico do polinômio expresso por $\left(1 + \frac{1}{4}x\right)\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$ quando $x = 4$.

7 Escreva o polinômio reduzido expresso por $(2a + 3)^2 + (a - 5)^2$.

8 O professor pediu à classe para desenvolver a expressão $(2x - y^3)^2$. Um dos alunos deu a seguinte resposta: $2x^2 - 4xy^3 + y^6$. A resposta desse aluno está correta? Justifique.

9 Qual a forma mais simples de escrever o polinômio $(a - b)^2 + (a + b)(a - b) - (a + b)^2$?

10 Dado o polinômio $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2(x^2 - 1)$, qual é sua forma reduzida?

11 Observe as igualdades. Quais delas são verdadeiras? Se houver igualdades falsas, corrija-as.

a) $(b - 2c)^2 = b^2 - 4bc + 4c^2$

b) $(3y - a)(3y + a) = 3y^2 - a^2$

c) $(2c + a)^2 = 2c^2 + 4ac + a^2$

d) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = x^6 - y^6$

12 Qual é o número que você deve adicionar ao binômio $x^2 + 2x$ para torná-lo um trinômio quadrado perfeito?

13 Simplifique a expressão $(2a + b)^2 - 6ab - (a - b)^2$.

14 Quando elevamos a expressão $(2a + 1)$ ao quadrado e do resultado subtraímos $4a$, qual é o polinômio que vamos obter?

15 Simplifique a expressão

$$(2a + 1)^2 - (4a - 1)(4a + 1) + 12 \cdot \left(a^2 + \frac{1}{2}a \right)$$

16 Se você dividir um polinômio P por $3xy + 7$ e encontrar como resultado o polinômio $3xy + 7$, com resto 0, qual é o polinômio P ?

17 Determine o quadrado da expressão $(x^2 + 2a)$ e, a seguir, adicione o polinômio $x^4 - a^2 - 3ax^2$ ao resultado. Que polinômio você vai obter?

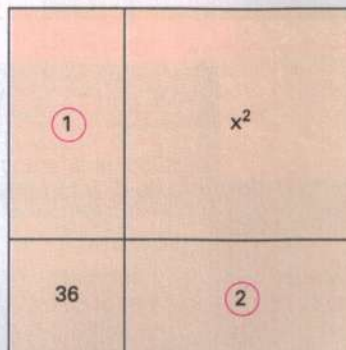
18 Dado o polinômio $x^2 + 8x$, qual é o termo que devemos adicionar a esse polinômio para obter $(x + 4)^2$?

19 Para obter $(a - 2b)^2$, qual é o termo que você deve adicionar ao polinômio $a^2 - 2ab + 4b^2$?

20 Sabendo que $x^2 + y^2 = 153$ e que $xy = 36$, calcule o valor de $(x + y)^2$.

21 Qual o valor numérico da expressão $(a - 2b)^2$, sabendo-se que $a^2 + 4b^2 = 30$ e $ab = 5$?

22 Observando a figura seguinte, notamos que a área de um quadrado é x^2 e a área do outro quadrado é 36. Nessas condições, responda:



a) Qual é a área do retângulo ①?

b) Qual é a área do retângulo ②?

c) Qual é a área total da figura?

23 O produto de dois polinômios é $b^2 - c^2$. Um dos polinômios é $b - c$. Qual é o outro polinômio?

24 Simplifique a expressão

$$(b^3 - a)(b^3 + a) + (b^2 - a)(b^2 + a) + (b - a)(b + a)$$

e calcule seu valor numérico quando $b = -1$ e $a = -1$.

25 Calcule:

a) $(a + b)^3$

b) $(1 - 2a)^3$

c) $(2x + y)^3$

d) $(4y - 1)^3$

26 Simplifique a expressão $(x + 2y)^3 - (5x + 7y)xy$ e determine seu valor numérico para $x = -1$ e $y = -1$.

27 Qual a forma mais simples de se escrever a expressão $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) + 4ab(a - b)$?

28 Qual é o polinômio que devemos adicionar a $(a - 2)^3$ para obter $(a + 3)^3$?

13

FATORANDO POLINÔMIOS

Consideremos o número 90. Utilizando a multiplicação, podemos escrever esse número de várias maneiras:

$$90 = \begin{cases} 2 \cdot 45 \\ 3 \cdot 30 \\ 5 \cdot 18 \\ 6 \cdot 15 \\ 9 \cdot 10 \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{cases}$$

Quando escrevemos o número 90 na forma $2 \cdot 45$ ou $3 \cdot 30$ ou $5 \cdot 18$ ou $6 \cdot 15$ ou $9 \cdot 10$, transformamos esse número numa multiplicação de dois fatores.

Quando escrevemos o número 90 na forma $2 \cdot 3^2 \cdot 5$, transformamos esse número numa multiplicação em que todos os fatores são números primos.

Em qualquer um dos casos, fizemos a *fatoração* do número 90. Como a palavra *fatoração* está associada a uma multiplicação, podemos dizer que:

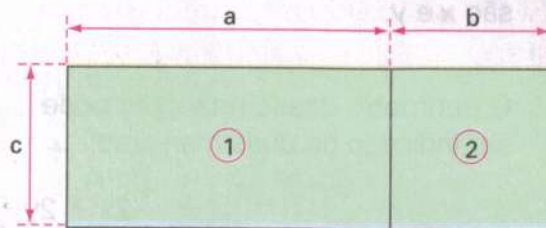
Fatorar um número significa escrevê-lo como uma *multiplicação de dois ou mais fatores*.

Tomando como base esses conhecimentos, vamos considerar a figura ao lado:

Há duas maneiras de representarmos a área dessa figura:

1ª) Área da figura ① + área da figura ②, ou seja, $ac + bc$.

2ª) Fazemos $c \cdot (a + b)$, pois a figura é um retângulo.



Daí podemos escrever:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{c \cdot (a + b)}_{\text{multiplicação de polinômios}}$$

Quando escrevemos o polinômio $ac + bc$ na forma $c \cdot (a + b)$, estamos transformando o polinômio inicial numa multiplicação de polinômios, ou seja, estamos efetuando a *fatoração* do polinômio inicial. Daí:

Fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio como uma *multiplicação de dois ou mais polinômios*.

Para fatorar um polinômio, devemos conhecer algumas técnicas que se baseiam em multiplicações já conhecidas e estudadas.

Estudaremos apenas os casos simples de fatoração de polinômios, de larga aplicação no cálculo algébrico.

FIXAÇÃO

1 Usando uma multiplicação de dois fatores, escreva de três maneiras diferentes cada um dos números:

- a) 30
- b) 60
- c) 48
- d) 120

2 Usando a decomposição em fatores primos, faça a fatoração completa de cada um dos seguintes números:

- a) 180
- b) 420
- c) 200
- d) 648

3 Escreva o polinômio $ax + ay$ na forma de uma multiplicação.

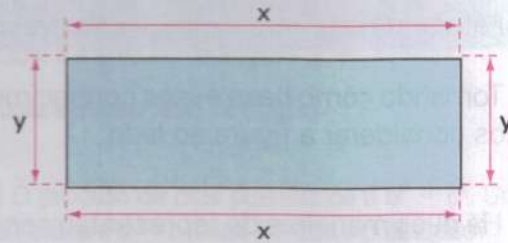
4 Efetuando a multiplicação $(a + b)(a - b)$, você encontra o polinômio $a^2 - b^2$. Nessas condições, escreva na forma de multiplicação cada um dos polinômios:

- a) $x^2 - y^2$
- b) $b^2 - c^2$

Fatoração pela colocação de um fator comum em evidência

Consideremos as seguintes situações:

1ª Vamos calcular o perímetro do retângulo ao lado, cujas dimensões são x e y .



O perímetro desse retângulo pode ser indicado de duas maneiras:

$$2x + 2y \quad \text{ou} \quad 2 \cdot (x + y)$$

Então, podemos escrever:

$$\underbrace{2x + 2y}_{\text{polinômio}} = \underbrace{2 \cdot (x + y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

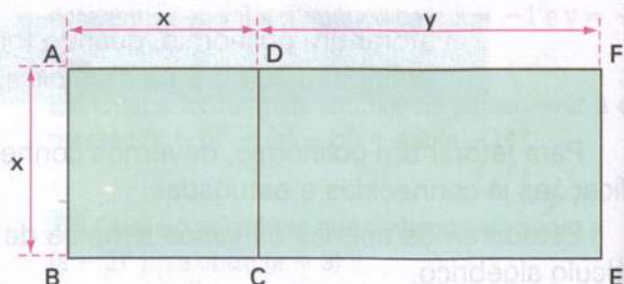
polinômio

forma fatorada do polinômio

Na forma fatorada, notamos que:

- ✓ 2 é um fator comum a todos os termos do polinômio e foi colocado em evidência.
- ✓ o outro fator $x + y$ é o mesmo que $(2x : 2) + (2y : 2)$ ou $\frac{2x}{2} + \frac{2y}{2}$.

2ª A figura ao lado nos mostra um quadrado ABCD, um retângulo CEFD e um retângulo ABEF.



De acordo com a figura, podemos escrever:

área do quadrado ABCD + área do retângulo CEFD = área do retângulo ABEF

$$x^2 + xy = x(x + y)$$

seja:

$$\underbrace{x^2 + xy}_{\text{polinômio}} = \underbrace{x \cdot (x + y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

polinômio

forma fatorada do polinômio

Na forma fatorada, notamos que:

x é um fator que aparece em todos os termos do polinômio e foi colocado, como fator comum, em evidência.

o outro fator $x + y$ é o mesmo que $(x^2 : x) + (xy : x)$ ou $\frac{x^2}{x} + \frac{xy}{x}$.

Podemos dizer que:

Quando todos os termos de um polinômio têm um fator comum, podemos colocá-lo em evidência. A forma fatorada é o produto do fator comum pelo polinômio que se obtém dividindo-se cada termo do polinômio dado pelo fator comum.

Vejamos alguns exemplos:

Vamos fatorar $6ax + 8ay$.

O fator comum é $2a$. Daí temos:

$$6ax + 8ay = 2a \cdot (3x) + 4y$$

$$(6ax : 2a) \quad (8ay : 2a)$$

Logo, a forma fatorada do polinômio dado é $2a(3x + 4y)$.

Vamos fatorar $a^4 - a^3 + a^2$.

O fator comum é a^2 . Daí temos:

$$a^4 - a^3 + a^2 = a^2 \cdot (a^2) - a + 1$$

$$(a^4 : a^2) \quad (a^3 : a^2) \quad (a^2 : a^2)$$

Logo, a forma fatorada do polinômio dado é $a^2(a^2 - a + 1)$.

Vamos fatorar $8a^4b^5 - 20a^3b^2 - 16a^2b^4$.

O fator comum é $4a^2b^2$. Daí temos:

$$8a^4b^5 - 20a^3b^2 - 16a^2b^4 = 4a^2b^2 \cdot (2a^2b^3 - 5a - 4b^2)$$

$$(8a^4b^5 : 4a^2b^2) \quad (20a^3b^2 : 4a^2b^2) \quad (16a^2b^4 : 4a^2b^2)$$

Logo, a forma fatorada do polinômio dado é $4a^2b^2(2a^2b^3 - 5a - 4b^2)$.

4. Vamos fatorar $a \cdot (a - b) + x \cdot (a - b)$.

O fator comum é $(a - b)$. Daí temos:

$$a \cdot (a - b) + x \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (a + x)$$

$$[x \cdot (a - b)] : (a - b)$$

$$[a \cdot (a - b)] : (a - b)$$

Logo, a forma fatorada do polinômio dado é $(a - b)(a + x)$.

FIXAÇÃO

1 Colocando o fator comum em evidência, fatore os seguintes polinômios:

a) $10a + 10b$

b) $4a - 3ax$

c) $a^2 + 5ab$

d) $xy + y^2 - y$

e) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b$

f) $35c + 7c^2$

g) $24x^5 - 8x^4 - 56x^3$

h) $pa^2 + pab + pb^2$

i) $35x^3y^2 - 14x^2y^3$

j) $y + y^3 + y^5 + y^7$

l) $xy - x^3y^3$

m) $120ax^3 - 100ax^2 + 60ax$

n) $a(m + 1) - b(m + 1)$

o) $x \cdot (n + h) + y \cdot (n + h)$

p) $b^2m^2 + 4b^2mn$

q) $\frac{2}{3}a^5 + \frac{8}{3}a^3$

r) $\frac{a}{2} + \frac{a^3}{2} + \frac{a^5}{2}$

s) $x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) - z \cdot (a + b)$

t) $\frac{5}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

u) $\frac{ab}{8} + \frac{a^2b}{4} - \frac{ab^2}{2}$

2 Dado o polinômio $2mx^2 - 2my^2$, determine:

a) a forma fatorada do polinômio

b) o seu valor numérico para $m = 10$ e $x^2 - y^2 = 16$

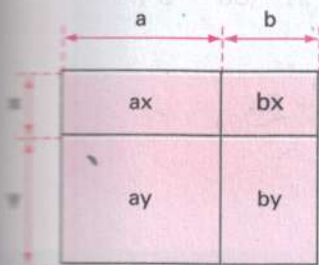
3 Sabe-se que $2x - y = 20$ e que $a + b + c = 12$. Nessas condições, fatore o polinômio $a(2x - y) + b(2x - y) + c(2x - y)$ e dê o seu valor numérico.

4 Fatore o polinômio $xy^3 + 7xy^2 - 3xy$ e dê o seu valor numérico sabendo que $xy = 6$ e $y^2 + 7y = 20$.

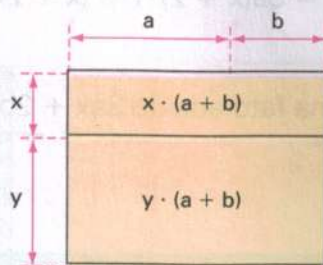
5 Sabe-se que x e y são as medidas dos lados de um retângulo de área 32 e perímetro 24. Fatore a expressão $3x^2y + 3xy^2$ e determine o seu valor numérico.

Fatoração por agrupamento

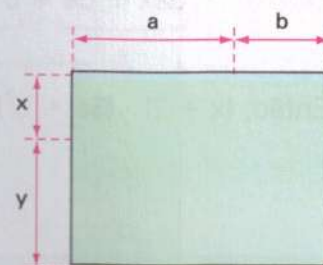
Observe as três figuras seguintes:



A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio $ax + bx + ay + by$.



A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio $x(a + b) + y(a + b)$.



A área dessa figura pode ser dada pelo produto $(a + b)(x + y)$.

Como as três figuras têm a mesma área, podemos escrever:

$$\underbrace{ax + bx + ay + by}_{\text{polinômio}} = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) = \underbrace{(a + b)(x + y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

Vejamos como podemos fazer algebricamente para escrever o polinômio $ax + bx + ay + by$ na forma fatorada:

$$\underbrace{ax + bx} + \underbrace{ay + by} \longrightarrow \text{Agrupamos os termos que possuem fator comum.}$$

$$x(a + b) + y(a + b) \longrightarrow \text{Em cada grupo colocamos os fatores comuns em evidência.}$$

$$(a + b)(x + y) \longrightarrow \text{Colocamos, novamente, em evidência o fator comum.}$$

Vejamos outros exemplos:

1. Vamos fatorar o polinômio $mx - nx + 2m - 2n$.

$$\underbrace{mx - nx} + \underbrace{2m - 2n} = x(m - n) + 2(m - n) = (m - n) \cdot (x + 2)$$

Então, $(m - n) \cdot (x + 2)$ é a forma fatorada de $mx - nx + 2m - 2n$.

2. Vamos fatorar $a^3 + a^2 + a + 1$.

$$\underbrace{a^3 + a^2} + \underbrace{a + 1} = a^2 \cdot (a + 1) + 1 \cdot (a + 1) = (a + 1) \cdot (a^2 + 1)$$

Então, $(a + 1)(a^2 + 1)$ é a forma fatorada de $a^3 + a^2 + a + 1$.

3. Vamos fatorar $2ax + bx - 10a - 5b$.

$$\underbrace{2ax + bx} - \underbrace{10a - 5b} = x(2a + b) - 5(2a + b) = (2a + b) \cdot (x - 5)$$

Então, $(2a + b) \cdot (x - 5)$ é a forma fatorada de $2ax + bx - 10a - 5b$.

4. Vamos fatorar $3ax + 2b^2 + b^2x + 6a$.

Inicialmente, vamos agrupar convenientemente os termos, usando a propriedade comutativa.

$$\underbrace{3ax + 6a} + \underbrace{b^2x + 2b^2} = 3a(x + 2) + b^2(x + 2) = (x + 2) \cdot (3a + b^2)$$

Então, $(x + 2) \cdot (3a + b^2)$ é a forma fatorada de $3ax + 2b^2 + b^2x + 6a$.

FIXAÇÃO

1 Fatore os seguintes polinômios:

- a) $a^2 + ab + ax + bx$
- b) $ax - x + ab - b$
- c) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$
- d) $bx^2 - 2by + 5x^2 - 10y$
- e) $cx + x + c + 1$
- f) $2b^2 + 2 - b^2k - k$
- g) $5y^3 - 4y^2 + 10y - 8$
- h) $x - 1 + \frac{ax}{2} - \frac{a}{2}$
- i) $15 + 5y + 2ay + 6a$
- j) $a^{12} + a^8 - a^4 - 1$
- l) $2an + n - 2am - m$
- m) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + xy + y$

2 Fatore os seguintes polinômios:

- a) $ax - bx + cx + ay - by + cy$
- b) $am + bm + m - an - bn - n$
- c) $a(x + y) + b(x + y) + x(a + b) + y(a + b)$

3 Dado o polinômio $x^2 - xz + 2xy - 2yz$, determine:

- a) a forma fatorada do polinômio
- b) o valor numérico da expressão obtida, sabendo que $x - z = 5$ e $x + 2y = 27$

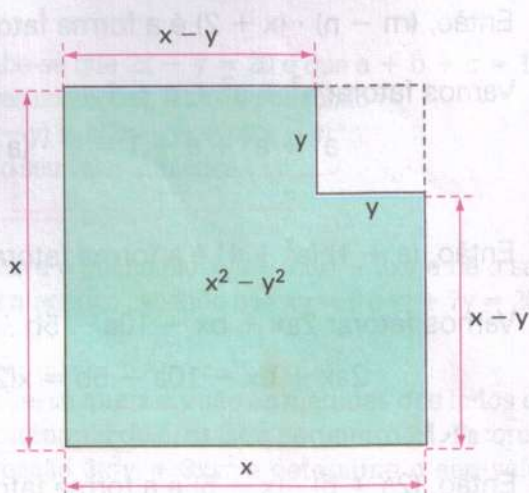
4 Determine o valor numérico do polinômio $ac - bc + ad - bd$, sabendo que $c + d = 2,5$ e $a - b = -1,1$.

5 As medidas dos lados de um retângulo são expressas por a e b e esse retângulo tem 18 unidades de perímetro. Um segundo retângulo tem 26 unidades de perímetro e as medidas dos seus lados são expressas por b e c . Nessas condições, calcule o valor numérico da expressão $ab + b^2 + ac + bc$.

Fatoração da diferença de dois quadrados

Consideremos a figura ao lado:

A área da figura colorida ao lado pode ser indicada pelo polinômio $x^2 - y^2$, que expressa uma *diferença de dois quadrados*.



Recortando a figura pelo tracejado e formando uma nova figura quando juntamos as duas partes:

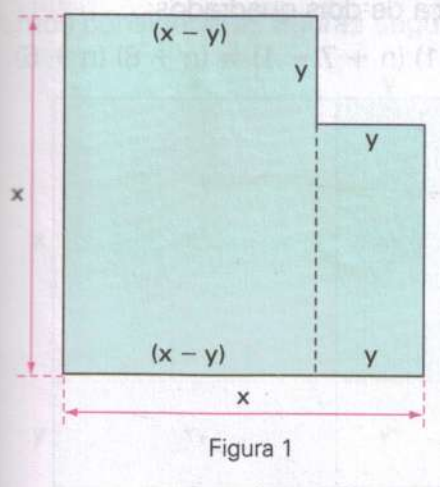


Figura 1

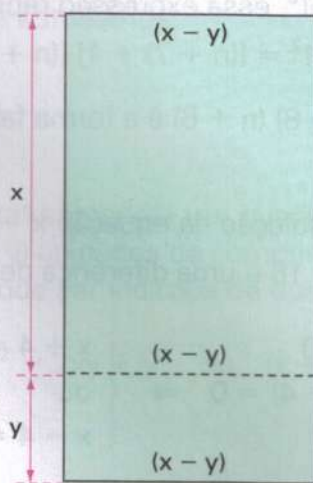


Figura 2

Notando que a área da figura 1, expressa por $x^2 - y^2$, e a área da figura 2, expressa por $(x + y)(x - y)$, são iguais, podemos escrever:

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

polinômio
forma fatorada do polinômio

Na forma fatorada, você observa que:

$$x = \sqrt{x^2} \rightarrow \text{raiz quadrada do 1º termo do polinômio}$$

$$y = \sqrt{y^2} \rightarrow \text{raiz quadrada do 2º termo do polinômio}$$

Então:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ \sqrt{x^2} & \sqrt{y^2} & \sqrt{x^2} & \sqrt{y^2} \end{matrix}$$

Vejamos outros exemplos:

1. Vamos fatorar $x^2 - 36$.

$$\text{Como } 36 = 6^2, \text{ temos: } x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$$

Então, $(x + 6)(x - 6)$ é a forma fatorada de $x^2 - 36$.

2. Vamos fatorar $\frac{1}{9} - x^2y^2$.

$$\text{Como } \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2, \text{ temos:}$$

$$\frac{1}{9} - x^2y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2y^2 = \left(\frac{1}{3} + xy\right)\left(\frac{1}{3} - xy\right)$$

Então, $\left(\frac{1}{3} + xy\right)\left(\frac{1}{3} - xy\right)$ é a forma fatorada do polinômio $\frac{1}{9} - x^2y^2$.

3. Vamos fatorar $(n + 7)^2 - 1$.
 Como $1 = 1^2$, essa expressão representa uma diferença de dois quadrados:
 $(n + 7)^2 - 1^2 = [(n + 7) + 1][(n + 7) - 1] = (n + 7 + 1)(n + 7 - 1) = (n + 8)(n + 6)$
 Então, $(n + 8)(n + 6)$ é a forma fatorada de $(n + 7)^2 - 1$.

4. Escreva a solução da equação $x^2 - 16 = 0$.
 Como $x^2 - 16$ é uma diferença de quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 = 0 \\ (x + 4)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \therefore x = -4 \\ \text{ou} \\ x - 4 = 0 \therefore x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $S = \{-4, 4\}$.

FIXAÇÃO

1 Fatore os seguintes polinômios:

a) $x^2 - 81$

b) $100 - a^2$

c) $b^2 - \frac{4}{25}$

d) $1 - m^2n^2$

e) $16x^2 - 9y^2$

f) $\frac{1}{9} - 4y^2$

g) $49h^2 - 81p^2$

h) $\frac{1}{100} - x^2y^2$

i) $b^2 - \frac{c^2}{16}$

j) $\frac{1}{25} - \frac{a^2}{4}$

l) $x^4 - y^4$

m) $a^2b^4 - x^2$

n) $a^6 - b^6$

o) $x^{10} - 100$

p) $y^8 - 9$

q) $r^2 - 81s^4$

2 Fatore as seguintes expressões que representam diferenças de dois quadrados:

a) $(x - 5)^2 - 16$

d) $(m + 5)^2 - 25$

b) $(y + 1)^2 - 9$

e) $(3x - 1)^2 - x^2$

c) $(a + b)^2 - c^2$

f) $(x^3 + 2)^2 - x^6$

3 Aplicando a fatoração, determine as raízes de cada uma das equações:

a) $x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - \frac{1}{9} = 0$

b) $x^2 - 1 = 0$

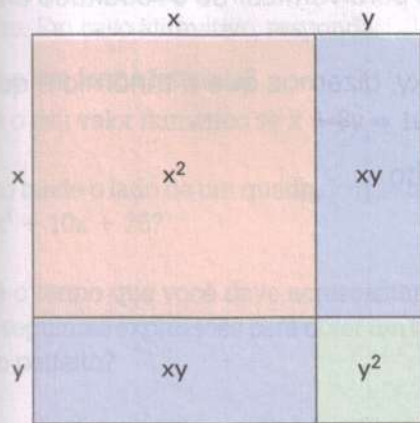
d) $x^2 - 81 = 0$

4 Dado o polinômio $a^2b^2 - x^2$, determine a sua forma fatorada e o seu valor numérico, dados $ab + x = 7$ e $ab - x = 3$.

5 Sabe-se que $3x - y = -12$ e $3x + y = -6$. Nessas condições, qual é o valor numérico da expressão $9x^2 - y^2$?

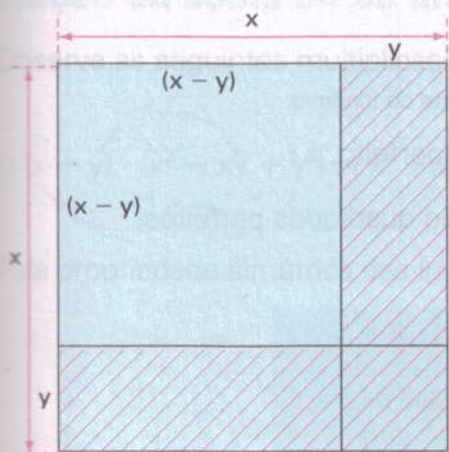
Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Vamos considerar as figuras seguintes, que já vimos e estudamos:



A figura representa um quadrado cujo lado mede $(x + y)$ unidades de comprimento. A área da figura pode ser indicada de duas maneiras:

$$x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{ou} \quad (x + y)^2$$



A figura colorida e não hachurada representa um quadrado cujo lado mede $(x - y)$, cuja área pode ser indicada de duas maneiras:

$$x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{ou} \quad (x - y)^2$$

Então, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} = (x + y)(x + y) = \underbrace{(x + y)^2}_{\text{forma fatorada do polinômio}} \quad \underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} = (x - y)(x - y) = \underbrace{(x - y)^2}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

Os polinômios $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ são chamados *trinômios quadrados perfeitos*. Trinômios porque possuem três termos; quadrados perfeitos porque o primeiro representa o quadrado de $(x + y)$, enquanto o segundo representa o quadrado de $(x - y)$.

Nem todos os trinômios são quadrados perfeitos. É importante reconhecer se um trinômio é ou não quadrado perfeito.

Consideremos as seguintes situações.

☛ Verificar se o trinômio $x^2 + 8xy + 16y^2$ é quadrado perfeito.

Inicialmente, verificamos se dois termos do trinômio são quadrados. Neste caso, x^2 e $16y^2$ são quadrados.

A seguir, determinamos a raiz quadrada de cada termo quadrado:

$$\sqrt{x^2} = x \text{ e } \sqrt{16y^2} = 4y.$$

Finalmente, multiplicamos por 2 o produto das raízes para verificar se o resultado é igual ao termo restante: $2 \cdot x \cdot 4y = 8xy$.

Como, neste caso, o termo restante é justamente $8xy$, dizemos que o trinômio é quadrado perfeito.

2ª Verificar se o trinômio $x^2 - 6x + 9$ é quadrado perfeito.

x^2 e 9 são termos quadrados.

$$\sqrt{x^2} = x \text{ e } \sqrt{9} = 3$$

$$2 \cdot x \cdot 3 = 6x \quad \longrightarrow \text{ É o termo restante do trinômio.}$$

Logo, $x^2 - 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

3ª Verificar se o trinômio $16x^2 - 24x + 25$ é quadrado perfeito.

$16x^2$ e 25 são termos quadrados.

$$\sqrt{16x^2} = 4x \text{ e } \sqrt{25} = 5$$

$$2 \cdot 4x \cdot 5 = 40x \quad \longrightarrow \text{ Não corresponde ao termo restante do trinômio.}$$

Logo, $16x^2 - 24x + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito.

Vejamos exemplos de como fatorar trinômios que são quadrados perfeitos.

1. Vamos fatorar $x^2 + 8xy + 16y^2$.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2} = x \\ \sqrt{16y^2} = 4y \end{array} \right\} \longrightarrow x^2 + 8xy + 16y^2 = (x + 4y)^2$$

2. Vamos fatorar $a^6 - 10a^3b + 25b^2$.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a^6} = a^3 \\ \sqrt{25b^2} = 5b \end{array} \right\} \longrightarrow a^6 - 10a^3b + 25b^2 = (a^3 - 5b)^2$$

FIXAÇÃO

1 Verifique se cada um dos seguintes trinômios representa um trinômio quadrado perfeito:

a) $x^2 + 6xy + 9y^2$

b) $16a^2 - 24ax + 9x^2$

c) $y^2 + 8y + 25$

d) $4x^2 - 4x + 1$

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

h) $y^2 + 14y + 49$

b) $y^2 + 10y + 25$

i) $a^6 + 12a^3 + 36$

c) $81n^2 - 18n + 1$

j) $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{3}m + \frac{1}{9}$

d) $4a^2 + 16ax + 16x^2$

l) $4p^2 - 28p + 49$

e) $121x^2y^2 + 44xy + 4$

m) $16x^4 + 8x^2y + y^2$

f) $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

n) $x^2 - 2bcx + b^2c^2$

g) $100p^2 - 20np + n^2$

o) $m^{10} + 4m^5n^3 + 4n^6$

2 Os seguintes trinômios são quadrados perfeitos. Fatore cada um deles:

Qual é a forma fatorada do trinômio $ax^2 - 6abx + a^2b^2$?

Verifique se o trinômio $x^2 + 16xy + 64y^2$ é quadrado perfeito. Em caso afirmativo, responda:

Qual é a sua forma fatorada?

Qual é o seu valor numérico se $x + 8y = 10$?

Quanto mede o lado de um quadrado que tem uma área de $x^2 + 10x + 25$?

Qual é o termo que você deve acrescentar a cada uma das seguintes expressões para obter um trinômio quadrado perfeito?

a) $x^2 + 2x$

b) $x^2 + 36$

c) $4a^2 + 2a + 1$

d) $a^2x^2 - abx + b^2$

e) $y^2 - 6y$

f) $x^2 + 3x + 4$

7 Sabendo que $2a - 3 = -7$, determine o valor numérico do trinômio $4a^2 - 12a + 9$.

8 Sabendo que $x + y = -9$ e $x - y = 13$, determine o valor numérico da expressão $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$.

Fatoração da soma ou da diferença de dois cubos

Observe as seguintes multiplicações:

a) $(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3$

Pela propriedade simétrica das igualdades, podemos escrever:

$$\underbrace{x^3 + y^3}_{\text{polinômio}} = (x + y) \cdot \underbrace{(x^2 - xy + y^2)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

b) $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$

Pela propriedade simétrica das igualdades, podemos escrever:

$$\underbrace{x^3 - y^3}_{\text{polinômio}} = (x - y) \cdot \underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

FIXAÇÃO

Escreva a forma fatorada das seguintes expressões:

a) $a^3 + b^3$

b) $m^3 - n^3$

c) $x^3 - 8$ (Lembre-se: $8 = 2^3$)

d) $a^3 + 1$ (Lembre-se: $1 = 1^3$)

Fatorando mais de uma vez

Vamos fatorar o polinômio $x^4 - 16$.

Como ele representa uma diferença de quadrados, podemos fazer:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4)$$

Notamos, porém, que a fatoração não está completa, pois o fator $(x^2 - 4)$ também é uma diferença de quadrados e, portanto, pode ser fatorado. Sendo assim, podemos escrever:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$$

Como você pode notar, existem polinômios cuja fatoração completa exige a aplicação de mais de uma técnica. Vejamos estes exemplos:

1. Vamos fatorar $x^3 - 4x^2 + 4x$.

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x - 2)^2$$

fator comum em evidência trinômio quadrado perfeito

2. Vamos fatorar $a^4b + ab^4$.

$$a^4b + ab^4 = ab \cdot (a^3 + b^3) = ab \cdot (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

fator comum em evidência soma de dois cubos

FIXAÇÃO

1 Fatore de forma completa os polinômios:

a) $a^4 - b^4$

g) $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$

b) $3x^2 - 6x + 3$

h) $a^4 - ax^3$

c) $m^2x - x$

i) $1 - \frac{1}{16}p^4$

d) $5a^2 + 30ab + 45b^2$

j) $y^3 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{9}y$

e) $x^3y - xy^3$

l) $x^3y - y$

f) $m^8 - n^8$

m) $ax^2 - a + bx^2 - b$

2 Sabendo que $x - y = 6$, determine o valor numérico do polinômio $5x^2 - 10xy + 5y^2$.

3 Qual é a fatoração completa da expressão $ab^2 - ac^2 + b^3 - bc^2$?

4 Fatore de forma completa o polinômio $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ e determine o seu valor numérico, sabendo que $xy = 10$ e $x + y = -5$.

5 Fatore de forma completa o polinômio $ax^3 - ax + bx^3 - bx$.

14

CÁLCULO DO M.M.C. DE POLINÔMIOS

Uma das aplicações imediatas da fatoração é a determinação do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de dois ou mais polinômios.

Vamos, inicialmente, recordar o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de números naturais, já estudado na 5ª série. Vejamos os exemplos:

1. Determinar o m.m.c. dos números 80 e 120.

Em primeiro lugar, vamos fazer a fatoração completa de cada um desses números:

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Vamos escrever os números na forma fatorada:

$$80 = 2^4 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Pelo que já vimos, o m.m.c. desses números é o produto de todos os fatores desses números (os fatores comuns devem aparecer uma só vez), elevados ao maior expoente. Então:

$$\text{m.m.c.}(80, 120) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15 = 240$$

2. Vamos determinar o m.m.c. dos números 42, 70 e 220.

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{array} \right\}$$

$$\text{m.m.c.}(42, 70, 220) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4\,620$$

Quando vamos calcular o m.m.c. de dois ou mais polinômios, procedemos da mesma maneira. Veja os exemplos seguintes:

1. Determinar o m.m.c. dos monômios $20a^3b$ e $30a^2b^4x$.

Fatorando os coeficientes, temos:

$$20a^3b = 2^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b$$

$$30a^2b^4x = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot x$$

$$\text{m.m.c.} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot x = 60a^3b^4x$$

4. Vamos determinar o m.m.c. dos monômios $16x^4y^2$, $24x^3y^3$ e $32x^2y^5$.
Fatorando os coeficientes, temos:

$$\left. \begin{aligned} 16x^4y^2 &= 2^4 \cdot x^4 \cdot y^2 \\ 24x^3y^3 &= 2^3 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^3 \\ 32x^2y^5 &= 2^5 \cdot x^2 \cdot y^5 \end{aligned} \right\} \text{m.m.c.} = 2^5 \cdot 3 \cdot x^4 \cdot y^5 = 96x^4y^5$$

5. Vamos determinar o m.m.c. dos polinômios $8x^2$ e $6x^2 - 6x$.
Fatorando cada polinômio, temos:

$$\left. \begin{aligned} 8x^2 &= 2^3 \cdot x^2 \\ 6x^2 - 6x &= 6x \cdot (x - 1) = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x - 1) \end{aligned} \right\} \text{m.m.c.} = 2^3 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (x - 1) = 24x^2 \cdot (x - 1)$$

6. Vamos determinar o m.m.c. dos polinômios $a^3 + a^2$ e $a^3 + 2a^2 + a$.
Fatorando cada polinômio, temos:

$$\left. \begin{aligned} a^3 + a^2 &= a^2 \cdot (a + 1) \\ a^3 + 2a^2 + a &= a \cdot (a^2 + 2a + 1) = a(a + 1)^2 \end{aligned} \right\} \text{m.m.c.} = a^2 \cdot (a + 1)^2$$

7. Vamos determinar o m.m.c. dos polinômios $x^2 - 4$, $2x + 4$ e $x^2 - 2x$.
Fatorando os polinômios, temos:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 4 &= (x + 2) \cdot (x - 2) \\ 2x + 4 &= 2 \cdot (x + 2) \\ x^2 - 2x &= x \cdot (x - 2) \end{aligned} \right\} \text{m.m.c.} = 2x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \text{ ou } 2x \cdot (x^2 - 4)$$

FIXAÇÃO

- 1 Determine o m.m.c. dos números:

- a) 54 e 72 c) 42, 63 e 105
b) 200, 100 e 80 d) 18, 24, 36 e 72

- 2 Sabendo que $x = 5 \cdot 7^2$ e $y = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$, determine o m.m.c. (x, y) .

- 3 Se $x = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$ e $y = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, determine o m.m.c. (x, y) .

- 4 Sabe-se que $a = 2^5 \cdot 5^3$ e $b = 2^7 \cdot 5^2$. Nessas condições, calcule o m.m.c. (a, b) .

- 5 Determine o m.m.c. dos monômios:

- a) xy^5 e x^4y^5 g) $9x^3, 6ax^2$
b) a^5x^2 e a^2y h) $4a, 6a^2b, 9b^3$
c) xy^3, x^2y^2, x^4y i) $18a^2b^3, 24ab^4$
d) $3x^6$ e $5x^4$ j) $12b^2c, 16bc^5, 20b^3c$
e) ab^3, a^4c^2, bc k) $15m^3x, 10mx^3, 20m^2x^2$
f) x^3y^3, x^4y^2, x^2y^5 l) $14a^2p^6, 21a^4p^3, 42a^5p^5$

Determine o m.m.c. dos polinômios:

a) $x^2 + 2x - 10$

b) $x^2 + x^3 + x^2y$

c) $x^2 - a^2 + x^2 - a^2$

d) $5x + 5x + y^2 + 10y + 25$

e) $x^2 - x + ax - a$

f) $2a - 2b, 3a + 3b + a^2 - b^2$

g) $x^2 - 7x, x^2 - 49 + 2x + 14$

h) $2x^2 + 2x^2y + 6x + 6xy$

i) $x^2 - 6x + 9, (x - 3)^3 + x^4 - 3x^3$

j) $5a + 10, 2a + 4 + 3a + 6$

l) $a^2 - 25, a^2 - 10a + 25 + a^2 + 10a + 25$

m) $x^2 - 2x + 1, (x - 1)^3 + 2x - 2$

7 Dados os polinômios $a^6 - a^5 + a - 1$ e $a^{10} + 2a^5 + 1$, determine o seu m.m.c.

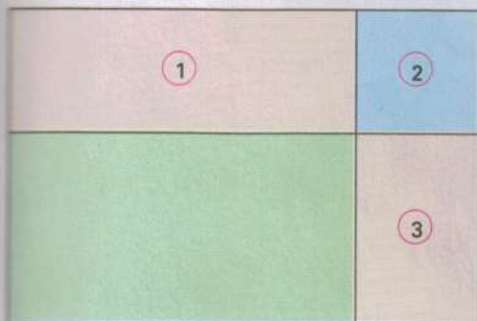
8 Determine o m.m.c. dos polinômios $6x^2 - 4xy - 9px + 6py$ e $4x^2 - 12px + 9p^2$.

RETOMANDO o que aprendeu

1) Uma lanchonete vende *cheese burger* a x reais cada um. Sabendo que $\frac{1}{5}$ desse preço corresponde ao custo da carne, do pão e dos demais ingredientes, $\frac{1}{2}$ desse preço corresponde a outras despesas e o restante é lucro, qual é o monômio que representa o lucro da venda de 50 *cheese burgers*?

2) Considere a seqüência $\frac{xy}{5}, \frac{x^2y}{2}, x^3y, \dots, 16x^7y$. Quais são os monômios que completam essa seqüência?

3) Na figura abaixo, a área do retângulo ① é ab , a área do quadrado ② é b^2 e a área do retângulo ③ é ab . Qual é a área do retângulo verde?



4) Dois números a e b são tais que $a = 2x + 3$ e $b = 2x - 1$. Sabendo que $a^2 - b^2 = 40$, determine o valor de x .

5) Um professor propôs a seus alunos que descobrissem o valor da expressão $ac + ad + bc + bd$, em que a, b, c, d são as idades de seus filhos na ordem crescente. O professor disse ainda que a soma das idades dos dois mais velhos é 59 anos e a soma das idades dos dois mais novos é 34 anos. Com esses dados, procure calcular o valor numérico da expressão proposta pelo professor.

6) Se você dividir um polinômio P por $8x^2 + 1$, você obtém quociente $3x - 1$ e resto $4x - 2$. Qual é o resto da divisão do polinômio P por $x - 1$?

7) Qual é a forma fatorada da expressão $(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y)$?

8) A área de um retângulo é expressa pelo polinômio $x^2 - 9$, onde $x > 3$. Fatorando-o temos as medidas de seus lados. Se o perímetro desse retângulo é 32 cm, qual é a área do retângulo?

9) Considere o polinômio $A = (a - 1)^2 \cdot (a^2 - 1)$. Calcule o quociente e o resto da divisão do polinômio A por $a^2 - 3a - 1$.

10) Numa adição de polinômios, encontrou-se o resultado $3x^3 - 4x + 6$, mas verificou-se que a parcela $5x^3 - 8x^2 - 9$ havia sido incluída indevidamente. Qual deve ser o resultado correto da adição?

JORNAIS & REVISTAS

A revista *Superinteressante* de janeiro de 1995 publicou uma reportagem com o título *Veneza vai virar mar?*

O texto afirma que a cidade de Veneza, na Itália, instalada no interior de uma laguna de 55 km de extensão por 13 km de largura, está morrendo. Desde 1900, a cidade afundou 23 centímetros em relação ao nível médio do mar.

Para resolver a questão, desde o século XVI duas teorias se confrontam. A primeira defende o fechamento das três entradas da laguna, por onde a maré passa: elas seriam trancadas. A outra teoria prega a preservação máxima da laguna, atribuindo o aumento do impacto das marés aos detritos industriais e urbanos que se acumulam no fundo da laguna.

Corel Stock Photo



Ao longo das décadas, as marés foram ficando mais altas e freqüentes. Veja no gráfico ao lado.

As marés ficaram mais altas por causa dos detritos que atulham a laguna. Mas o subsolo também tem descido. Na laguna, cuja profundidade média não ultrapassa 2 metros, escavaram-se canais para a navegação de grande calado, com 5 quilômetros de extensão e 15 metros de profundidade. Por eles, passaram a entrar enormes volumes de água. Em 1973 foi feito um aterramento para a construção do aeroporto Marco Polo.



- Qual a área da laguna onde Veneza está instalada?
- Considerando que Veneza afundou 23 centímetros em 95 anos (de 1900 a 1995), e prosseguindo nesse ritmo, quantos centímetros a cidade terá afundado, de 1900 até o ano 2030?
- Considerando a maré que bateu o recorde de altura em 1966, quanto ela é mais alta (ou mais baixa) que você?
- O gráfico abaixo nos mostra os números da decadência da cidade de Veneza.

Números da decadência



- Calcule de quantos por cento foi, aproximadamente, a queda do número de barbearias, de padarias e de empregos em Veneza, de 1976 a 1995.

4

Estudo das frações algébricas



Historicamente, as frações surgiram quando o homem sentiu necessidade de medir.

Os babilônios usavam as frações para fazer o registro de suas transações comerciais, representando com essas frações valores monetários próprios.

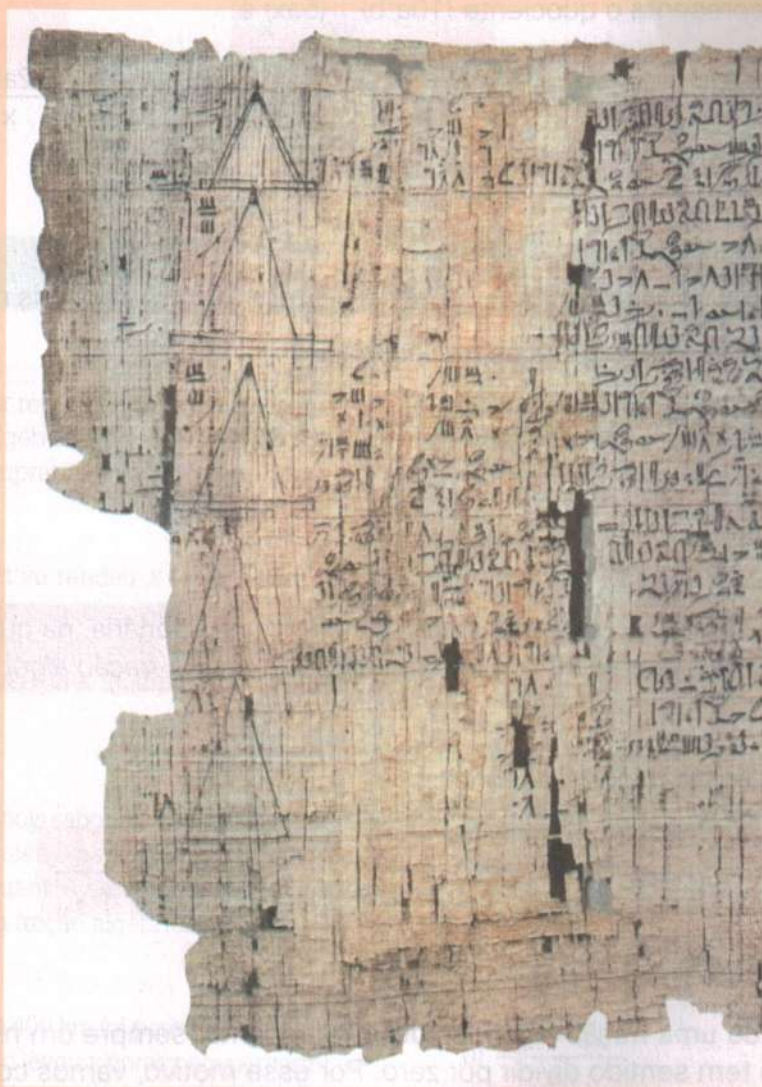
Placa de argila babilônica do século VI a.C.

ant
exe
qua
rep
à at
tica
ção
unio

Pap
(
M
fraçõ
C
repre

Os hindus, por outro lado, em meados do segundo milênio antes de Cristo, usavam frações de numerador 1, como, por exemplo, metade ou um meio $\left(\frac{1}{2}\right)$, que chamavam *ardha*, e a quarta parte ou um quarto $\left(\frac{1}{4}\right)$, que chamavam *pada*. Os hindus representavam essas frações de uma maneira muito semelhante à atual.

O papiro de *Rhind*, uma das mais antigas obras de Matemática de que se tem notícia, registra algumas regras sobre operações com frações, nas quais os egípcios usavam as frações das unidades para representar outras frações.



Papiro de Rhind
(c. 1650 a.C.)

Na Roma Antiga, aprendia-se a trabalhar inicialmente com frações de denominador 12.

Com o correr do tempo, muitas notações foram usadas para representar as frações, até chegar à representação atual.

15

FRAÇÃO ALGÉBRICA

Consideremos as seguintes situações:

- 1ª** Você já aprendeu que a velocidade média de um carro é obtida dividindo-se a distância percorrida pelo tempo gasto. Nessas condições, se um carro percorreu 200 km em x horas, qual a expressão que representa a velocidade média desse carro?

A expressão que representa a velocidade média desse carro é $200 : x$ ou $\frac{200}{x}$.

- 2ª** A expressão que representa o quociente $(10a^2b) : (5ax)$ é:

$$(10a^2b) : (5ax) = \frac{10a^2b}{5ax} = \frac{10}{5} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot b \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{x} = \frac{2ab}{x}$$

\downarrow \downarrow
 2 a

Como você pode notar, as expressões $\frac{200}{x}$ e $\frac{2ab}{x}$ apresentam variáveis no denominador e, portanto, são expressões algébricas fracionárias.

Dizemos que $\frac{200}{x}$ e $\frac{2ab}{x}$ são exemplos de frações algébricas.

Daí vem:

Um quociente de dois polinômios, indicado na forma fracionária, na qual uma ou mais variáveis aparecem no denominador, chama-se *fração algébrica*.

Veja outros exemplos de frações algébricas:

$$\frac{x - y}{ab}$$

$$\frac{a}{a + b}$$

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{x - y}{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$\frac{2ax}{by}$$

Observações:

- ◆ O denominador de uma fração algébrica deve representar sempre um número real diferente de zero, pois não tem sentido dividir por zero. Por esse motivo, vamos convencionar que as frações algébricas apresentadas neste livro têm o denominador diferente de zero.

Assim:

- ✓ Na fração $\frac{2}{x}$, devemos ter $x \neq 0$.

Na fração $\frac{x-2}{x-7}$, devemos ter $x-7 \neq 0$, ou seja, $x \neq 7$.

Na fração $\frac{ab}{a^2-4}$, devemos ter $a^2-4 \neq 0$, ou seja, $(a+2)(a-2) \neq 0$ ou $a \neq -2$ e $a \neq 2$.

Quando o numerador e o denominador são polinômios não-nulos e iguais, a fração é igual a 1.

$$\frac{3xy}{3xy} = 1$$

$$\frac{a+2b}{a+2b} = 1$$

$$\frac{x^2-3y}{x^2-3y} = 1$$

Quando o numerador for divisível pelo denominador, a fração algébrica é igual a um polinômio.

$$\frac{12ax}{3x} = 4a$$

$$\frac{x^2-xy}{x} = x-y$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2} = x-3$$

FIXAÇÃO

1 Um livro custa x reais, sendo x um divisor de 50. Escreva a fração algébrica que indica até quantos livros você pode comprar se tiver 50 reais.

2 Um "bolo" esportivo rendeu x reais. Dessa renda, foram gastos y reais para despesas gerais. Sabendo-se que n pessoas ganharam esse "bolo", qual a fração algébrica que representa a quantia que cada ganhador vai receber?/

3 Em um estojo há dois sabonetes e um perfume. Cada sabonete custa x reais e o perfume custa y reais. Se eu tiver c reais, até quantos desses estojos eu poderei comprar? Escreva a fração algébrica.

4 Uma distância de 400 km foi percorrida por dois automóveis. O primeiro levou x horas para percorrer essa distância, enquanto o segundo levou 1 hora a mais que o primeiro. Nessas condições, escreva a fração algébrica que indica:

a) a velocidade média do primeiro automóvel.

b) a velocidade média do segundo automóvel.

5 Nas seguintes frações algébricas, qual o valor que a variável deve ter para que não ocorra uma divisão impossível?

a) $\frac{7}{x}$

d) $\frac{a-2b}{a+4}$

b) $\frac{x-y}{5x}$

e) $\frac{2x+1}{2x-1}$

c) $\frac{x-2}{x-7}$

f) $\frac{x-y}{5-y}$

6 Nas frações algébricas seguintes, o numerador é divisível pelo denominador. Nessas condições, indique qual o polinômio que pode representar a fração:

a) $\frac{15x^2y}{3y}$

c) $\frac{x^2-9}{x+3}$

b) $\frac{2x^3-6x^2}{2x}$

d) $\frac{a^2-8a+15}{a-3}$

7 Quando multiplicamos os dois termos da fração

$\frac{a-x}{-x}$ pelo número -1 , qual a nova fração (equivalente)

que obtemos?

16

SIMPLIFICAÇÃO DAS FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Já aprendemos na 5ª série a simplificar frações numéricas. Vamos recordar essa simplificação observando os exemplos seguintes:

1. Vamos simplificar a fração $\frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{3 \cdot 7 \cdot 11}$.

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{11}}{\cancel{3} \cdot 7 \cdot \cancel{11}} = \frac{2}{7}$$

Cancelando fatores iguais.

2. Vamos simplificar a expressão fracionária $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7}$.

$$\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2^{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot 5^{\cancel{2}}}{2^{\cancel{2} \cdot 2} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 7}$$

Aplicando a divisão de potências de mesma base.

3. Vamos simplificar a fração numérica $\frac{30}{140}$.

Fatorando o numerador e o denominador, temos:

$$\frac{30}{140} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{2^2 \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{1 \cdot \cancel{3} \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 7} = \frac{3}{14}$$

Para simplificar frações algébricas, vamos usar o mesmo procedimento. Vejamos outros exemplos:

4. Vamos simplificar a fração algébrica $\frac{2abc}{5abx}$.

$$\frac{2abc}{5abx} = \frac{2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot c}{5 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot x} = \frac{2c}{5x}$$

5. Vamos simplificar a fração algébrica $\frac{2x^5y^2}{4x^3y^5}$.

$$\frac{2x^5y^2}{4x^3y^5} = \frac{\cancel{2} \cdot x^{\cancel{2}} \cdot y^2}{\cancel{4} \cdot x^{\cancel{3}} \cdot y^{\cancel{3}}} = \frac{1 \cdot x^2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot y^3} = \frac{x^2}{2y^3}$$

5. Vamos simplificar a fração algébrica $\frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2}$.

Fatorando, inicialmente, o numerador e o denominador, temos:

$$\frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} = \frac{a \cdot \cancel{(a + b)}}{\cancel{(a + b)} \cdot (a - b)} = \frac{a}{a - b}$$

fatorando os termos da fração aplicando a técnica do cancelamento

Cuidado!

Na fração $\frac{a}{a - b}$ **não** podemos cancelar da seguinte forma: $\frac{\cancel{a}}{\cancel{a} - b}$, pois o termo a , no denominador, **não** é um fator.

6. Vamos simplificar a fração algébrica $\frac{1 - x^2}{x^2 + 2x + 1}$.

Fatorando, inicialmente, o numerador e o denominador, temos:

$$\frac{1 - x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{\cancel{(1 + x)}(1 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{1 - x}{x + 1}$$

fatorando os termos da fração aplicando a técnica do cancelamento

7. Vamos simplificar a fração algébrica $\frac{x - 2y}{2y - x}$.

Considerando que $x - 2y$ é o oposto de $2y - x$, temos:

$$x - 2y = -(2y - x).$$

Assim, passamos a ter a fração:

$$\frac{x - 2y}{2y - x} = \frac{-(2y - x)}{2y - x} = \frac{-1}{1} = -1$$

FIXAÇÃO

1. Simplifique as seguintes frações numéricas:

a) $\frac{5 \cdot 11}{11 \cdot 17}$
 b) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

c) $\frac{2^5 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^7}$
 d) $\frac{2^5 \cdot 5^7 \cdot 11^3}{2^4 \cdot 5^9 \cdot 11^3}$

e) $\frac{2m^{10}n^7}{5m^5n^7}$
 f) $\frac{x^2y^2}{6x^3y}$

g) $\frac{8}{4a - 4x}$
 h) $\frac{2h^3}{h^3 - h^2}$

2. Fatorando o numerador e o denominador, simplifique as frações numéricas:

a) $\frac{70}{220}$ b) $\frac{80}{200}$ c) $\frac{135}{180}$ d) $\frac{98}{140}$

3. Simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{5ab}{20bc}$ b) $\frac{12m^2x}{10mx^2}$
 c) $\frac{x^4y}{x^2}$ d) $\frac{2a^3b^2c}{a^4b^4}$

4. Simplifique as seguintes frações algébricas:

a) $\frac{ac - c}{c^2 - c}$
 b) $\frac{3x + 3y}{3 - 3a}$
 c) $\frac{a^2 - b^2}{a^3 - a^2b}$
 d) $\frac{m^2 - 25}{7m - 35}$

e) $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$
 f) $\frac{a^3 + 2a^2}{a^2 + 4a + 4}$
 g) $\frac{x^2 + 5ax}{3x + 15a}$
 h) $\frac{x^2y^2 - 1}{2xy + 2}$

5 Efetue as operações indicadas no numerador e no denominador de cada uma das frações algébricas e, a seguir, simplifique a fração:

a) $\frac{x^2 + (y + x)(y - x) + xy}{2y + 2x}$

b) $\frac{(a^2 - 1) + (a + 1)}{(a^2 - 1) - (a - 1)}$

c) $\frac{ax - ay}{x(x - y) - y(x - y)}$

d) $\frac{(x - y)^2 - y^2}{x(x - 4) - 4(y^2 - x)}$

6 Se você simplificar a fração $\frac{(a + b)^2 - c^2}{(b + c)^2 - a^2}$, que fração vai obter?



ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Vamos recordar a adição e a subtração de frações numéricas, que já estudamos na 5ª série, por meio dos exemplos:

1. Vamos calcular $\frac{7}{10} + \frac{11}{15}$.

$$\begin{aligned} \frac{7}{10} + \frac{11}{15} &= \\ &= \frac{21}{30} + \frac{22}{30} = \\ &= \frac{21 + 22}{30} = \\ &= \frac{43}{30} \end{aligned}$$

2. Vamos calcular $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$.

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} - \frac{5}{6} &= \\ &= \frac{16}{18} - \frac{15}{18} = \\ &= \frac{16 - 15}{18} = \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

m.m.c. (10, 15) = 30.

$$\frac{7}{10} = \frac{21}{30} \quad \begin{array}{l} \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{11}{15} = \frac{22}{30} \quad \begin{array}{l} \times 2 \\ \hline \end{array}$$

Cálculos auxiliares

m.m.c. (9, 6) = 18

$$\frac{8}{9} = \frac{16}{18} \quad \begin{array}{l} \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{15}{18} \quad \begin{array}{l} \times 3 \\ \hline \end{array}$$

Para adicionar ou subtrair frações algébricas, podemos usar o mesmo método aplicado para frações numéricas, ou seja:

- ✓ Escrevemos frações equivalentes às frações dadas e que tenham o mesmo denominador.
- ✓ Esse denominador comum deve ser o m.m.c. dos denominadores das frações.
- ✓ Adicionamos ou subtraímos os novos numeradores, mantendo o denominador comum.
- ✓ Simplificamos o resultado obtido, quando for possível.

Observe os exemplos:

Vamos calcular $\frac{5}{2a} + \frac{3}{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{2a} + \frac{3}{x} &= \\ &= \frac{5x}{2ax} + \frac{6a}{2ax} = \\ &= \frac{5x + 6a}{2ax} \end{aligned}$$

Vamos calcular $\frac{2x}{y} + \frac{1}{3xy} - \frac{y}{4x}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{y} + \frac{1}{3xy} - \frac{y}{4x} &= \\ &= \frac{24x^2}{12xy} + \frac{4}{12xy} - \frac{3y^2}{12xy} = \\ &= \frac{24x^2 + 4 - 3y^2}{12xy} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

m.m.c. $(2a, x) = 2ax$

$$\frac{5}{2a} = \frac{5x}{2ax}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{6a}{2ax}$$

Cálculos auxiliares

m.m.c. $(y, 3xy, 4x) = 12xy$

$$\frac{2x}{y} = \frac{24x^2}{12xy}$$

$$\frac{1}{3xy} = \frac{4}{12xy}$$

$$\frac{y}{4x} = \frac{3y^2}{12xy}$$

3. Vamos calcular $\frac{2a+1}{a^2-a} - \frac{5}{a^2}$.

$$\frac{2a+1}{a^2-a} - \frac{5}{a^2} =$$

$$= \frac{2a+1}{a(a-1)} - \frac{5}{a^2} =$$

$$= \frac{a(2a+1)}{a^2(a-1)} - \frac{5(a-1)}{a^2(a-1)} =$$

$$= \frac{a(2a+1) - 5(a-1)}{a^2(a-1)} =$$

$$= \frac{2a^2 + a - 5a + 5}{a^2(a-1)} =$$

$$= \frac{2a^2 - 4a + 5}{a^2 \cdot (a-1)}$$

4. Vamos calcular $\frac{a}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{b-a}{a^2-b^2}$.

$$\frac{a}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{b-a}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{b-a}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{1(a-b)}{(a+b)(a-b)} +$$

$$+ \frac{1(b-a)}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a(a+b) + 1(a-b) + 1(b-a)}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a^2 + ab + \cancel{a} - \cancel{b} + \cancel{b} - \cancel{a}}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a^2 + ab}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a}{a-b}$$

Cálculos auxiliares

Denominadores:

$$a^2 - a = a(a-1)$$

$$a^2$$

$$\text{m.m.c.} = a^2 \cdot (a-1)$$

$$\frac{2a+1}{a(a-1)} = \frac{a(2a+1)}{a^2(a-1)}$$

$$\times a$$

$$\frac{5}{a^2} = \frac{5(a-1)}{a^2(a-1)}$$

$$\times (a-1)$$

Cálculos auxiliares

Denominadores:

$$a-b$$

$$a+b$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\text{m.m.c.} = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$\times (a+b)$$

$$\frac{1}{(a+b)} = \frac{1(a-b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$\times (a-b)$$

$$\frac{b-a}{(a+b)(a-b)} = \frac{1(b-a)}{(a+b)(a-b)}$$

$$\times 1$$

5 Vamos calcular $\frac{2}{2x - x^2} - \frac{x}{4 - 2x}$.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2x - x^2} - \frac{x}{4 - 2x} = \\ & = \frac{2}{x(2 - x)} - \frac{x}{2(2 - x)} = \\ & = \frac{2 \cdot 2}{2x(2 - x)} - \frac{x \cdot x}{2x(2 - x)} = \\ & = \frac{4 - x^2}{2x(2 - x)} = \\ & = \frac{(2 + x)(2 - x)}{2x(2 - x)} = \\ & = \frac{2 + x}{2x} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

Denominadores:

$$2x - x^2 = x(2 - x)$$

$$4 - 2x = 2 \cdot (2 - x)$$

$$\text{m.m.c.} = 2x(2 - x)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x(2 - x)} = \frac{4}{2x(2 - x)} \\ & \frac{x}{2(2 - x)} = \frac{x^2}{2x(2 - x)} \end{aligned}$$

FIXAÇÃO

1 Calcule:

$$a) \frac{3a}{2b} + \frac{5a}{3b}$$

$$e) \frac{3}{x} - 2x + \frac{1}{y}$$

$$f) \frac{3a - 4}{a^2 - 16} - \frac{1}{a - 4}$$

$$b) \frac{7b}{3x} + \frac{2a}{4x^2}$$

$$f) \frac{x + a}{x} - \frac{a - x}{a}$$

$$g) \frac{4x^2}{1 - x^2} - \frac{1 - x}{1 + x} + \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$c) \frac{x}{2y} - \frac{y}{2x}$$

$$g) \frac{x + 2}{3x} + \frac{x - 1}{x^2}$$

$$h) \frac{a}{a - b} - \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

$$d) \frac{1}{2m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2}$$

$$h) \frac{a + b}{2a} + \frac{a - b}{2b}$$

3 Efetue $\frac{3x}{x - a} + \frac{x^2 - 3ax}{x^2 - a^2}$ e determine o valor numérico para $x = 4$ e $a = 2$.

2 Calcule:

$$a) \frac{2c}{x + 1} + \frac{c}{x - 1}$$

$$b) \frac{2x}{x^2 - 9} - \frac{7}{x + 3}$$

$$c) -\frac{x - 4}{x^2 + 1}$$

$$d) 2 - \frac{2}{y - 2}$$

$$e) \frac{x - y}{x + y} + \frac{2x}{x - y}$$

4 Calcule $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab}$ e determine o valor numérico da soma para $a = 2$ e $b = 4$.

5 Efetue as operações indicadas e dê o resultado na forma mais simples possível:

$$a) \frac{x + y}{y} - \frac{y}{x + y} - \frac{2x}{x + y}$$

$$b) \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

6 Qual é a fração algébrica que adicionada à fração

$$\frac{2a}{a+b} \text{ dá como resultado a fração } \frac{2 \cdot a^2}{a^2 - b^2} ?$$

7 Escreva a forma mais simples da expressão

$$\frac{m^2 - n^2}{n} + n \text{ e determine o seu valor numérico para } m = -5 \text{ e } n = 100.$$

8 Escreva na forma mais simples possível a expressão

$$\frac{2x^2 - 3xy + y^2}{x - y} - 2(x - y).$$

9 Qual é a forma mais simples da expressão

$$\frac{a}{b} + \frac{(a+b)^2}{ab} - 2?$$

10 Escreva a expressão

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

na forma mais simples.

11 Se de uma fração A subtraímos a fração $\frac{a-x}{a+1}$,

vamos obter $\frac{2a(x+1)}{a^2-1}$. Nessas condições, qual é a fração A ?

12 Determine a diferença $\frac{2+a}{2-a} - \frac{2-a}{2+a}$ e calcule

seu valor numérico para $a = 6$.

18

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Inicialmente, vamos recordar a multiplicação e a divisão de frações numéricas por meio dos seguintes exemplos:

1. Vamos calcular $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$$

2. Vamos calcular $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2}$.

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

aplicamos a técnica do cancelamento

Então:

Para multiplicar frações numéricas, multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores entre si. Sempre que possível, simplificamos o resultado.

1 Vamos calcular: $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$.

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

2 Vamos calcular: $\frac{7}{10} : \frac{3}{5}$.

$$\frac{7}{10} : \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{7}{6}$$

Então:

Para dividir uma fração numérica por outra, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda.

Para multiplicar ou dividir frações algébricas, procedemos da mesma maneira. Observe os exemplos:

1 Vamos calcular $\frac{5a}{3b^2} \cdot \frac{4b^3}{5a^2}$.

$$\frac{5a}{3b^2} \cdot \frac{4b^3}{5a^2} = \frac{5 \cdot a \cdot 4 \cdot b^3}{3 \cdot b^2 \cdot 5 \cdot a^2} = \frac{4b}{3a}$$

2 Vamos calcular $\frac{2y^2}{x} : \frac{5y^6}{2a}$.

$$\frac{2y^2}{x} : \frac{5y^6}{2a} = \frac{2y^2}{x} \cdot \frac{2a}{5y^6} = \frac{2 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot a}{x \cdot 5 \cdot y^6} = \frac{4a}{5xy^4}$$

3 Vamos calcular $\frac{a+b}{2a} \cdot \frac{4ab}{a^2-b^2}$.

$$\frac{a+b}{2a} \cdot \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{2a} \cdot \frac{4ab}{(a+b) \cdot (a-b)} =$$

fatorando

$$= \frac{4 \cdot a \cdot b \cdot (a+b)}{2 \cdot a \cdot (a+b) \cdot (a-b)} = \frac{2b}{a-b}$$

4 Vamos calcular $\frac{a+2ab}{x^2-9} : \frac{2b+1}{x^2+3x}$.

$$\frac{a+2ab}{x^2-9} : \frac{2b+1}{x^2+3x} = \frac{a \cdot (1+2b)}{(x+3) \cdot (x-3)} : \frac{2b+1}{x \cdot (x+3)} =$$

$$= \frac{a \cdot (1+2b)}{(x+3) \cdot (x-3)} \cdot \frac{x \cdot (x+3)}{2b+1} = \frac{a \cdot x \cdot (1+2b) \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x-3) \cdot (2b+1)} = \frac{ax}{x-3}$$

5. Usando a multiplicação, vamos calcular $\left(\frac{5a^2}{7b^3}\right)^2$.

$$\left(\frac{5a^2}{7b^3}\right)^2 = \frac{5a^2}{7b^3} \cdot \frac{5a^2}{7b^3} = \frac{25a^4}{49b^6}$$

6. Calcular $\left(\frac{x+y}{2a}\right)^2$.

$$\left(\frac{x+y}{2a}\right)^2 = \frac{x+y}{2a} \cdot \frac{x+y}{2a} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4a^2}$$

Observe, agora, mais alguns exemplos de como simplificar expressões algébricas que envolvem operações com frações algébricas.

7. Simplificar a expressão $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}\right)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}\right) &= \left(\frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab}\right) : \left(\frac{a^2}{ab} + \frac{2ab}{ab} + \frac{b^2}{ab}\right) \\ &= \frac{a^2 - b^2}{ab} : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{ab} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b} \end{aligned}$$

8. Simplificar a expressão $\frac{1}{2 - \frac{a-2}{1+a}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 - \frac{a-2}{1+a}} &= \frac{1}{\frac{2 \cdot (1+a)}{1+a} - \frac{1(a-2)}{1+a}} = \frac{1}{\frac{2 \cdot (1+a) - 1(a-2)}{1+a}} \\ &= \frac{1}{\frac{2 + 2a - a + 2}{1+a}} = \frac{1}{\frac{a+4}{1+a}} = 1 \cdot \frac{1+a}{a+4} = \frac{a+1}{a+4} \end{aligned}$$

FIXAÇÃO

1 Calcule:

a) $\frac{2a}{7x} \cdot \frac{3b}{xy}$

c) $\frac{ax^2}{bc} \cdot \frac{xy^2}{b^2c^2}$

e) $\frac{a^3b^2}{xy^3} \cdot \frac{x^2y}{a^2b^2}$

b) $\frac{x^4}{3y} \cdot \frac{2x^3}{5y^2}$

d) $\frac{9m^3}{x^4} \cdot \frac{x^2}{10m}$

f) $\frac{a^3b^3}{c^3} \cdot \frac{c^7}{a^3b^5}$

6 Efetue as divisões:

$$\frac{3x}{5a} : \frac{b}{2x}$$

$$\frac{5a}{7c} : \frac{10}{c}$$

$$\frac{3a}{8b} : \frac{a^5}{4b}$$

$$d) \frac{21xy}{8ab} : \frac{7y^3}{2ab^2}$$

$$e) \frac{8x^2y^3}{ab^6} : \frac{4xy^3}{ab^8}$$

$$f) \frac{6a^2}{5bc} : \frac{2}{abc}$$

7 Se você multiplicar $\frac{a^3m}{x^2}$ por $\frac{x^2y}{a^4}$, qual a expressão que vai obter?

8 Qual a fração algébrica que você vai obter dividindo $\frac{3m^3}{2ax^2}$ por $\frac{4bm^2}{3x^2}$?

9 Se você multiplicar $\frac{xy}{a^2c}$ por $\frac{a}{2x}$ e dividir o resultado por $4y$, qual a fração que vai obter?

10 Faça as multiplicações:

$$\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-2}{2x}$$

$$\frac{a}{a+2b} \cdot \frac{5ab}{a-2b}$$

$$\frac{a}{a-4} \cdot \frac{a^2-16}{ax}$$

$$\frac{a^2-1}{x^2-y^2} \cdot \frac{2x+2y}{2a-2}$$

$$\frac{15a}{x^2-4} \cdot \frac{xy+2y}{5a}$$

$$\frac{x^3}{x^2-xy} \cdot \frac{7x-7y}{y}$$

$$\frac{x^3}{a^2-a} \cdot \frac{2a^2-2a}{x^5+x^3}$$

$$\frac{ax+x}{m^2-n^2} \cdot \frac{3m+3n}{a+1}$$

$$\frac{x^2+6x+9}{a^2b-ab^2} \cdot \frac{a-b}{10x+30}$$

$$\frac{x^2-2xy}{3x} \cdot \frac{ax-2ay}{x^2-4xy+4y^2}$$

7 Se você multiplicar a fração $\frac{x^2+xy+ax+ay}{ab-4b}$ pela fração $\frac{2a-8}{a^2-x^2}$, qual a fração que você vai obter e qual o seu valor numérico para $x=1$, $y=-3$, $a=5$ e $b=-2$?

8 Se você multiplicar $\frac{(2a-4b)+(2a+7b)}{2xy}$ por $\frac{5x^2y}{8a-(4a-3b)}$, qual é a expressão que vai obter?

9 Efetue as divisões:

$$a) \frac{x}{a+1} : \frac{x^4}{a^2-1}$$

$$b) \frac{x+y}{7x-7y} : \frac{x^2+xy}{7x}$$

$$c) \frac{a^2-1}{x^2-y^2} : \frac{a^2-2a+1}{3x+3y}$$

$$d) \frac{m^2-36}{x^2y^2} : \frac{2m+12}{xy^2}$$

$$e) \frac{3a^4}{x^7+x^6} : \frac{9a^2}{2x+2}$$

$$f) \frac{x^2+x+1}{x^2+1} : \frac{x^3+x^2+x}{x^4-1}$$

$$g) \frac{ax+bx}{10y} : \frac{a^2-b^2}{20xy}$$

$$h) \frac{a^2-2ab+b^2}{b^2-c^2} : \frac{ab^2-b^3}{b^3+b^2c}$$

10 Se você dividir a fração $\frac{x^2-x}{ax+bx+a+b}$ pela fração $\frac{x^2-1}{a+b}$, qual a fração algébrica que vai obter?

11 Use a multiplicação e calcule:

$$a) \left(\frac{a^3}{b}\right)^3$$

$$b) \left(\frac{2a}{x^2y}\right)^2$$

$$c) \left(\frac{x-y}{4x}\right)^2$$

$$d) \left(\frac{x-1}{x}\right)^3$$

12 Usando a divisão, simplifique as expressões:

a) $\frac{\frac{xy^2}{a^3}}{\frac{x^2}{a^4}}$

c) $\frac{\frac{a^2 - b^2}{xy}}{\frac{2a + 2b}{2y}}$

b) $\frac{\frac{x^2 + xy}{y}}{\frac{xy + y^2}{x}}$

13 Efetue a multiplicação $\frac{a+3}{a} \cdot \frac{a-3}{a} \cdot \frac{2a^5}{a^2-9}$ e calcule seu valor numérico para $a = -5$.

14 Simplifique a expressão

$$\left(\frac{a^2 + a}{x^2 + x} \cdot \frac{x^2 - 1}{a^2 - 1} \right) : \left(\frac{x^2 - x}{a^2 - a} \right)$$

15 Escreva na forma mais simples possível cada uma das expressões.

a) $\left(1 - \frac{1}{y} \right) : \left(1 - \frac{1}{y^2} \right)$

b) $\left(\frac{x-y}{x+y} - 1 \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} + 1 \right)$

c) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} + 1 \right)$

RETOMANDO o que aprendeu

1 Uma distância de 500 km, entre as cidades A e B, foi percorrida por dois automóveis. O primeiro levou x horas para percorrer essa distância, enquanto o segundo levou 2 horas a mais que o primeiro para percorrer os 500 km. Qual é a fração algébrica que expressa a velocidade média do segundo automóvel?

(velocidade média = $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$)

2 Sejam a e b dois números reais não-nulos. Sabendo que $b - a = 5ab$, qual é o valor da diferença $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$?

3 Efetue as operações indicadas no numerador e no denominador e, a seguir, simplifique a fração

$$\frac{(a-b)^2 + (a+b)^2 - 2a^2}{(a+b)^2 - (a-b)(a+b)}$$

4 Se x e y são dois números reais diferentes de 0, qual é o resultado da multiplicação $x^2y \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} \right)$?

5 Simplifique a expressão $\frac{a-a^2}{a^2-1} : \left(\frac{a}{a+1} - a \right)$.

6 Um terreno quadrado tem x metros de lado. Esse terreno foi dividido em y lotes, todos de mesma área. Maurício comprou 3 desses lotes. Nessas condições, responda:

- Qual é o monômio que representa a área do terreno?
- Qual é a fração algébrica que indica a área de cada lote?
- Qual é a fração algébrica que indica a área que Maurício comprou?

7 Sabe-se que $x + y = 8$ e $xy = 4$. Qual é o valor numérico da expressão $\frac{2}{x^2y} + \frac{2}{xy^2}$?

8 Escreva na forma mais simples a expressão

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$$

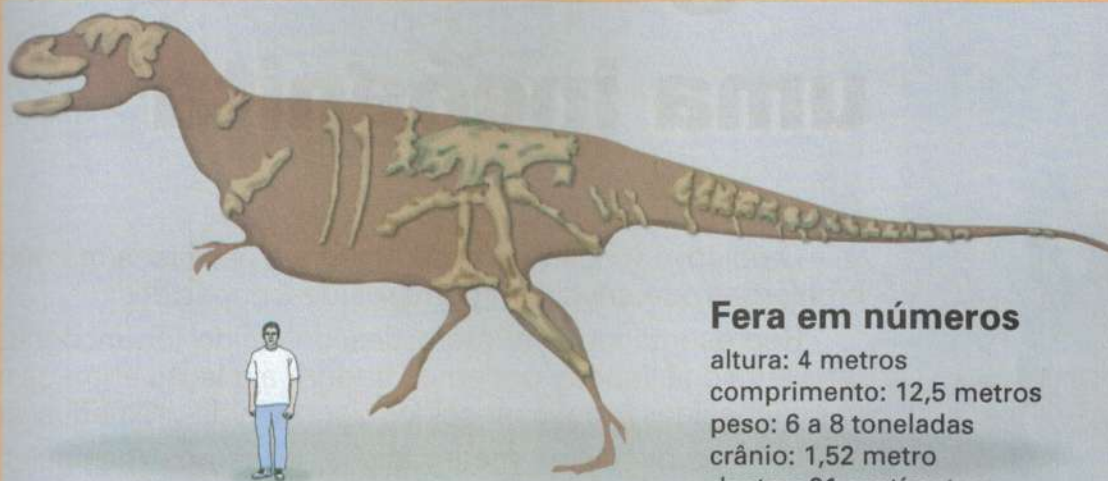
9 Sabendo que $x - y = 10$, qual é o valor numérico da expressão $\frac{x^2y^3}{y^2 + xy} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right)$?

10 Sabe-se que $A = \frac{-x}{1-x} + 1$ e $B = -1 - \frac{x}{x-1}$. Se você simplificar a fração $\frac{A}{B}$, qual o valor que você vai obter?

JORNAIS & REVISTAS

O gigantossauro, descoberto em meados de 1995 na Patagônia, no sul da Argentina, é considerado o maior carnívoro a ter pisado na face da Terra. Ele é um tipo de dinossauro que esteve há 100 milhões de anos na Patagônia. Ele é muito semelhante ao tiranossauro, que viveu 30 milhões de anos mais tarde em regiões do hemisfério norte.

Com mais de 12 metros de comprimento e 7 toneladas de músculos e ossos, tinha 1 metro de altura e 2 toneladas de "peso" a mais que o tiranossauro. Veja, no esquema, dados sobre o gigantossauro.



Fera em números

altura: 4 metros
comprimento: 12,5 metros
peso: 6 a 8 toneladas
crânio: 1,52 metro
dentes: 21 centímetros

Classificação

Os ossos mostram que, como o tiranossauro, ele era um terópode, um dos dez grandes grupos em que se dividiam os dinossauros. Entre os terópodes pertencia ao subgrupo dos tetanúrios.

Giganotossaurus carolinii

Em latim, *gigan* significa gigante e *saurus*, réptil. *Noto*, em grego, significa do sul. O segundo nome, *carolinii*, é uma homenagem ao mecânico *Rubén Carolini*, o descobridor.

Superinteressante, fev./1996.

1. Qual era o comprimento e o "peso" de um tiranossauro?
2. Qual a razão entre o comprimento de um dente e a altura do gigantossauro?
3. O fêmur do gigantossauro tinha 1,43 metro de comprimento. Qual a razão entre o comprimento do fêmur desse réptil e o seu comprimento total?
4. O fêmur do gigantossauro era, em média, 5 centímetros mais longo que o do tiranossauro. Aproximadamente, quantas vezes o fêmur do gigantossauro era maior que o do tiranossauro?

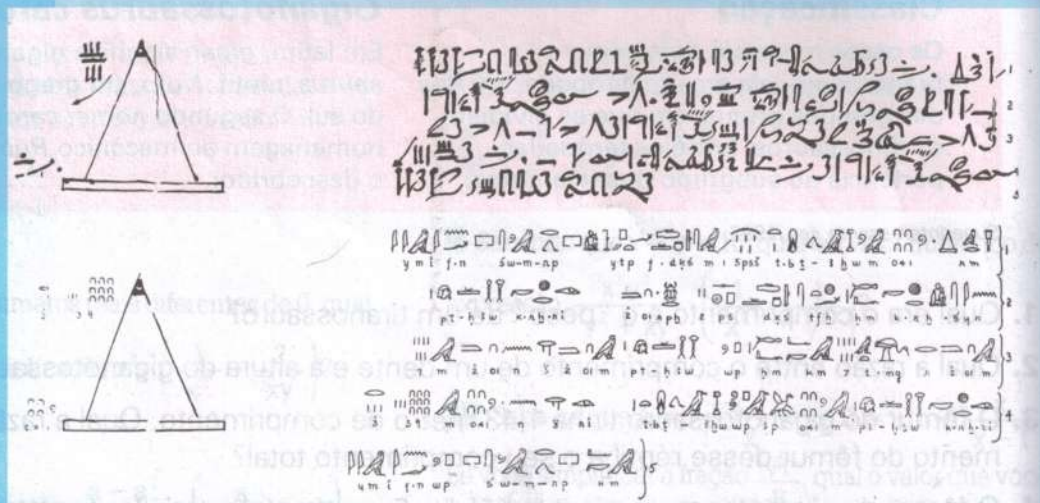
5

Equações de 1º grau com uma incógnita

O objetivo fundamental da Álgebra é permitir a resolução de problemas que envolvem números desconhecidos.

Representando o número desconhecido (ou incógnita) por uma letra do alfabeto, podemos traduzir a relação entre os números conhecidos e desconhecidos por meio de uma equação.

Usando princípios matemáticos, podemos manipular essa equação até torná-la o mais simples possível, permitindo, assim, estabelecer o valor do número desconhecido.



Transcrição hieroglífica e sua tradução em caracteres demóticos de um antigo problema geométrico egípcio.



EQUAÇÃO DE 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Consideremos a seguinte situação:

Um carro, desenvolvendo uma certa velocidade média, percorreu x km em 5 horas. Se tivesse aumentado em 20 km/h sua velocidade média, teria percorrido a mesma distância em uma hora a menos, ou seja, em 4 horas. Qual foi a distância x percorrida?

Considerando que velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$, podemos montar a seguinte

equação para o problema:

$$\frac{x}{5} + 20 = \frac{x}{4}$$

→ Velocidade que supostamente o veículo teria desenvolvido no percurso.
→ Aumento da velocidade.
→ Velocidade com a qual o carro fez o percurso.



Juca Martins/Pulsar

Nessa equação, observamos que:

- ✓ O primeiro membro é $\frac{x}{5} + 20$, que é também uma expressão algébrica inteira.
- ✓ O segundo membro é $\frac{x}{4}$, que é também uma expressão algébrica inteira.

Equações desse tipo são chamadas *equações inteiras de 1º grau na incógnita x* . Aplicando os princípios de equivalência das equações, chegamos à forma reduzida $ax = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o que simplifica a resolução.

Veja outras equações desse tipo:

1. $x + 1 = 7$, que pode ser reduzida à forma $x = 6$.
2. $3x + 10 = 5x$, que pode ser reduzida à forma $2x = 10$.
3. $2 \cdot (3x - 1) + 5x = 0$, que pode ser reduzida à forma $11x = 2$.

Como resolver uma equação de 1º grau com uma incógnita

Vamos rever a resolução de algumas equações de 1º grau com uma incógnita:

1. No conjunto \mathbb{R} , vamos resolver a equação $8x - 2 = 5x$.

$$8x - 2 = 5x$$

$$8x = 5x + 2 \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio aditivo (adicionamos 2 aos dois membros).}$$

$$8x - 5x = 2 \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio aditivo (adicionamos } -5x \text{ aos dois membros).}$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio multiplicativo (multiplicamos os dois membros por } \frac{1}{3} \text{).}$$

Então, $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ é o conjunto solução da equação.

2. No conjunto \mathbb{R} , vamos resolver a equação $5 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 6) = 40$.

$$5(x + 2) - 3(x + 6) = 40$$

$$5x + 10 - 3x - 18 = 40 \quad \longrightarrow \quad \text{Eliminamos os parênteses.}$$

$$2x - 8 = 40$$

$$2x = 40 + 8 \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio aditivo (adicionamos 8 aos dois membros).}$$

$$2x = 48$$

$$x = \frac{48}{2} \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio multiplicativo (multiplicamos os dois membros por } \frac{1}{2} \text{).}$$

$$x = 24$$

Então, $S = \{24\}$.

3. No conjunto \mathbb{R} , vamos resolver a equação $\frac{y-3}{4} + \frac{y+1}{6} = \frac{y-1}{12}$.

$$\frac{y-3}{4} + \frac{y+1}{6} = \frac{y-1}{12}$$

$$\frac{3(y-3) + 2(y+1)}{12} = \frac{1(y-1)}{12} \quad \longrightarrow \quad \text{Reduzimos todos os termos ao mesmo denominador.}$$

$$3(y-3) + 2(y+1) = 1(y-1) \quad \longrightarrow \quad \text{Pelo princípio multiplicativo, eliminamos o denominador (todos os termos foram multiplicados por 12).}$$

$$3y - 9 + 2y + 2 = y - 1$$

$$5y - 7 = y - 1$$

$$5y = y - 1 + 7 \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio aditivo.}$$

$$5y = y + 6$$

$$5y - y = 6 \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio aditivo.}$$

$$4y = 6$$

$$y = \frac{6}{4} \quad \longrightarrow \quad \text{Usando o princípio multiplicativo.}$$

$$y = \frac{3}{2} \quad \longrightarrow \quad \text{Simplificando a fração.}$$

Então, $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

4. No estacionamento de um edifício há carros e motos, num total de 13 veículos e 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?
Vamos indicar por x o número de carros.
O número de motos será indicado por $13 - x$.
A equação correspondente ao problema será:

$$4x + 2(13 - x) = 46$$

$4x$ → número de rodas dos carros
 $2(13 - x)$ → número de rodas das motos
 46 → número total de rodas

$$4x + 2(13 - x) = 46$$

$$4x + 26 - 2x = 46$$

$$2x + 26 = 46$$

$$2x = 46 - 26$$

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2}$$

$$x = 10 \rightarrow \text{número de carros}$$

$$13 - x = 13 - 10 = 3$$

→ número de motos

Nesse estacionamento há 10 carros e 3 motos.

FIXAÇÃO

1 No conjunto \mathbb{R} , vamos resolver as seguintes equações de 1º grau com uma incógnita:

a) $11x - 13 = 20$

b) $17x + 50 = 7x$

c) $9x - 8 = 5x + 20$

d) $12x + 21 = 10x + 16$

e) $5(x + 2) - 2(3x - 1) = 13$

f) $t - [-t - (t - 1)] = 2 - t$

g) $3(x + 1) - 2(x - 1) = -(x + 5)$

h) $\frac{2y}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3y}{20}$

i) $-\frac{1}{3}x + 2 = 1 - \frac{x}{2}$

j) $\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{3} = \frac{7}{2}$

l) $\frac{2x-1}{10} - 2 = \frac{1}{5} - \frac{1+x}{4}$

2 Em um retângulo, o comprimento mede $(x + 5)$ unidades, enquanto a largura mede 7 unidades. Sabendo-se que a área desse retângulo tem 105 unidades de superfície, quanto mede o comprimento desse retângulo?

3 Karina fez duas provas de Matemática. Na primeira prova, ela tirou nota x e na segunda prova ela obteve 3 pontos a mais que na primeira. O professor calculou a média bimestral da seguinte forma:

$$\frac{(1^{\text{a}} \text{ nota}) + 2 \cdot (2^{\text{a}} \text{ nota})}{3}$$

Se a média de Karina foi 8, que nota ela tirou em cada prova?

4 Uma indústria produziu x unidades de certo aparelho. Vendeu 50% da produção para a loja A, 30% para a loja B e os 1 000 aparelhos restantes para a loja C. Quantos aparelhos essa indústria produziu?

5 Qual deve ser o número real a para que a expressão

$$\frac{a+2}{4} - \frac{a-1}{5}$$

seja igual a 1?

1 Em uma partida de basquete, Cristina acertou x arremessos de 3 pontos e $(x - 3)$ arremessos de 2 pontos. Se nessa partida Cristina marcou 24 pontos, quantos arremessos de três pontos ela acertou?

2 Em uma partida de voleibol não pode haver empate. Por esse motivo, o regulamento de um torneio marca dois pontos por vitória e um ponto por derrota. Disputando um torneio, uma equipe jogou 7 partidas e somou 12 pontos. Quantas partidas a equipe venceu e quantas partidas ela perdeu nesse torneio?

3 Rafael e Pedro trabalharam juntos e receberam 90 reais pelo trabalho. Como Rafael trabalhou mais que Pedro, este recebeu uma quantia que corresponde a 40% da quantia que Rafael recebeu. Qual a quantia que cada um recebeu?

4 Para comprar um skate, Roberto precisa de 4 reais a mais do que tem. Mas, se ele tivesse o dobro da quantia que tem, compraria o skate e ainda ficaria com 7 reais. Nessas condições, responda:



Marinez Maravilhas Gomes

a) Qual a quantia que Roberto tem?

b) Qual é o preço do skate?

10 Um carro, desenvolvendo uma certa velocidade média, percorreu x km em 5 horas. Se tivesse aumentado em 20 km/h sua velocidade média, teria percorrido a mesma distância em uma hora a menos, ou seja, em 4 horas. Qual foi a distância x percorrida?

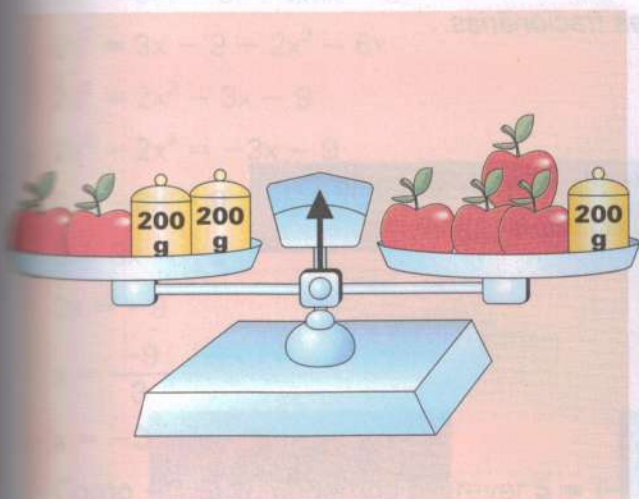
11 O IBGE contratou certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento de uma região. Se cada um deles visitasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como cada recenseador visitou 102 residências, todas as residências da região foram visitadas. Nessas condições, responda:

a) Qual o número de recenseadores que o IBGE contratou?

b) Quantas residências tem a região?

Explorando Medidas

1 Observando a figura seguinte e supondo que todas as maçãs que estão na balança tenham o mesmo "peso", quantos gramas tem cada maçã?



2. Consideremos o quadro abaixo:

Produção e vendas, em setembro, de três montadoras de automóveis		
Montadora	Unidades produzidas	Porcentagem vendida da produção
A	3 000	80%
B	5 000	60%
C	2 000	$x\%$

Sabendo que nesse mês as três montadoras venderam 7 000 dos 10 000 carros produzidos, qual é o valor de x ?



EQUAÇÃO FRACIONÁRIA DE 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

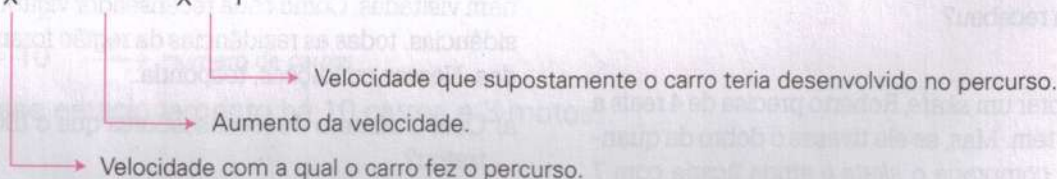
Consideremos a seguinte situação:

Um automóvel, desenvolvendo uma certa velocidade, percorreu 240 km em x horas. Se tivesse aumentado em 20 km/h a sua velocidade média, teria demorado uma hora a menos, ou seja, $(x - 1)$ horas. Qual foi o número x de horas que o automóvel gastou para percorrer os 240 km?

Considerando que a velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}}$, temos a seguinte equação

para o problema:

$$\frac{240}{x} + 20 = \frac{240}{x - 1}$$



Nessa equação, observamos que:

- ✓ O primeiro membro, $\frac{240}{x} + 20$, é uma expressão algébrica fracionária, pois o termo $\frac{240}{x}$ contém a variável no denominador.
- ✓ O segundo membro, $\frac{240}{x - 1}$, é também uma expressão algébrica fracionária, pois a variável aparece no denominador.

Equações desse tipo são chamadas *equações fracionárias*.

Assim:

Uma equação se diz fracionária quando tem pelo menos uma incógnita no denominador.

Observe outras equações fracionárias:

$$\frac{7}{x} - 3 = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3x}{x - 2} = 2$$

$$\frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x - 2} - 1$$

Como resolver uma equação fracionária

A resolução de uma equação fracionária é feita de maneira semelhante à resolução que já vimos de uma equação. Apenas devemos excluir do conjunto universo da equação fracionária os valores da incógnita que anulam o denominador de cada um dos termos da equação. Se isso ocorrer, teremos uma divisão por zero, o que você já sabe ser impossível. Portanto, você deve tomar muito cuidado ao resolver uma equação fracionária.

Geralmente, o conjunto universo da equação é o conjunto \mathbb{R} dos números reais. Uma vez dada a solução da equação, devem-se verificar as restrições feitas a certos valores reais.

Vamos resolver algumas equações fracionárias. Vejamos os exemplos:

2. Resolver a equação $\frac{23}{4} + \frac{1}{x} = \frac{35}{6}$, com $x \neq 0$, ou seja, $U = \mathbb{R}^*$ ou $U = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\frac{23}{4} + \frac{1}{x} = \frac{35}{6}$$

$$\frac{69x + 12}{12x} = \frac{70x}{12x}$$

→ Reduzindo ao mesmo denominador.

$$69x + 12 = 70x \quad \rightarrow \text{Pelo princípio multiplicativo.}$$

$$69x = 70x - 12 \quad \rightarrow \text{Pelo princípio aditivo.}$$

$$69x - 70x = -12 \quad \rightarrow \text{Pelo princípio aditivo.}$$

$$-x = -12$$

$$x = 12 \quad \rightarrow \text{Pelo princípio multiplicativo.}$$

Como $12 \in U$, concluímos que $S = \{12\}$.

2. Resolver a equação $\frac{2x}{x-3} = \frac{3}{x} + 2$, com $x \neq 3$ e $x \neq 0$, ou seja, $U = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

$$\frac{2x}{x-3} = \frac{3}{x} + 2 \quad \rightarrow \text{m.m.c.} = x(x-3)$$

$$\frac{2x^2}{x(x-3)} = \frac{3(x-3) + 2x(x-3)}{x(x-3)}$$

$$2x^2 = 3(x-3) + 2x(x-3)$$

$$2x^2 = 3x - 9 + 2x^2 - 6x$$

$$2x^2 = 2x^2 - 3x - 9$$

$$2x^2 - 2x^2 = -3x - 9$$

$$0 = -3x - 9$$

$$0 + 3x = -9$$

$$3x = -9$$

$$x = \frac{-9}{3}$$

$$x = -3$$

Como $-3 \in U$, podemos escrever $S = \{-3\}$.

3. Resolver a equação $\frac{y}{y-2} + \frac{3}{y+2} = \frac{y^2+1}{y^2-4}$, com $y \neq 2$ e $y \neq -2$, ou seja,

$$U = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

$$\frac{y}{y-2} + \frac{3}{y+2} = \frac{y^2+1}{(y+2)(y-2)} \rightarrow \text{m.m.c.} = (y+2)(y-2)$$

$$\frac{y(y+2) + 3(y-2)}{(y+2)(y-2)} = \frac{y^2+1}{(y+2)(y-2)}$$

$$y(y+2) + 3(y-2) = y^2 + 1$$

$$y^2 + 2y + 3y - 6 = y^2 + 1$$

$$y^2 + 5y - 6 = y^2 + 1$$

$$\cancel{y^2} + 5y - 6 - \cancel{y^2} = 1$$

$$5y - 6 = 1$$

$$5y = 1 + 6$$

$$5y = 7$$

$$y = \frac{7}{5}$$

$$\text{Como } y = \frac{7}{5} \in U, \text{ podemos dizer que } S = \left\{ \frac{7}{5} \right\}.$$

4. Resolver a equação $\frac{1+t}{1-t} = \frac{3+t^2}{1-t^2}$, com $t \neq 1$ e $t \neq -1$, ou seja, $U = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{3+t^2}{(1+t)(1-t)} \rightarrow \text{m.m.c.} = (1+t)(1-t)$$

$$\frac{(1+t)(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{3+t^2}{(1+t)(1-t)}$$

$$(1+t)(1+t) = 3+t^2$$

$$1 + 2t + t^2 = 3 + t^2$$

$$1 + 2t + \cancel{t^2} - \cancel{t^2} = 3$$

$$1 + 2t = 3$$

$$2t = 3 - 1$$

$$2t = 2$$

$$t = \frac{2}{2}$$

$$t = 1$$

Como $1 \notin U$, para essa equação devemos ter $S = \emptyset$.

FIXAÇÃO

1 Resolva as seguintes equações fracionárias:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{x} = \frac{11}{12} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{1-3x}{2x} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{1}{6x} + \frac{3}{2x} = \frac{x-1}{4x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{3}{5} \quad (x \neq -3)$$

$$\frac{2}{2x-1} = \frac{5}{x+1} \quad \left(x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1\right)$$

$$1 + \frac{3}{2-x} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 2)$$

2 Qual é o valor real de x que torna verdadeira a igualdade

$$\frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{1-x}?$$

3 Determine o conjunto solução das seguintes equações fracionárias:

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{-3}{x+3} \quad (x \neq 3, x \neq -3)$$

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 2, x \neq -2)$$

$$\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 4, x \neq -2, x \neq 0)$$

$$\frac{1}{y+5} + \frac{2}{y-5} = \frac{7}{y^2-25} \quad (y \neq -5, y \neq 5)$$

$$\frac{5x-2}{9-x^2} + \frac{3}{x+3} - \frac{1}{3-x} = 0 \quad (x \neq -3, x \neq 3)$$

$$\frac{3}{y^2-1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \quad (y \neq -1, y \neq 1, y \neq 0)$$

$$\frac{4}{t+2} + \frac{4}{t-2} = \frac{2t}{t^2-4} \quad (t \neq -2, t \neq 2)$$

$$\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{1-x^2} = 0 \quad (x \neq -1, x \neq 1)$$

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5-x^2}{x^2-1} \quad (x \neq 1, x \neq -1)$$

4 Determine o valor real de y para que as expressões

$$\frac{3y}{y-4} \text{ e } 3 + \frac{2}{y} \text{ sejam iguais, sabendo que } y \neq 0 \text{ e } y \neq 4.$$

5 No conjunto \mathbb{R} , qual é a solução da equação

$$\frac{1}{x-1} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \text{ com } x \neq 1, x \neq 2 \text{ e } x \neq 3?$$

6 Sabendo que $\frac{5x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 0$, determine o valor real de x que torna verdadeira essa igualdade.

7 Qual é o conjunto solução da equação

$$\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{4}{x-2}, \text{ no conjunto } \mathbb{R}, \text{ com } x \neq 1, x \neq 2 \text{ e } x \neq 3?$$

8 Determine o valor real de a , de modo que seja verdadeira a igualdade $\frac{4}{a} = \frac{3}{a} + \frac{2}{a-1}$, com $a \neq 1$, $a \neq 0$.

9 A 7ª série A tem x alunos. Nessa série foram distribuídos 320 livros de forma que todos receberam a mesma quantidade. A 7ª série B tem $(x-2)$ alunos e, nessa série, foram distribuídos 300 livros e todos os alunos receberam a mesma quantidade. Nessas condições, faça o que se pede:

- Escreva a fração que representa o número de livros que cada aluno da 7ª série A recebeu.
- Escreva a fração que representa o número de livros que cada aluno da 7ª série B recebeu.
- Quantos alunos há em cada série, se cada aluno das duas séries recebeu a mesma quantidade de livros?

10 Um carro, desenvolvendo certa velocidade, percorre 240 km em t horas. Mantendo a mesma velocidade média, vai percorrer 400 km em $(t+2)$ horas. Qual é o número t de horas?

Observe as seguintes equações, todas de 1º grau na incógnita x:

$$3ax = 9$$

$$2a - ax = bx$$

$$px - 1 = p^2$$

Nessas equações, você nota que aparecem outras letras além da incógnita x. Essas letras figuram na equação como constantes que representam números reais.

Equações desse tipo são denominadas *equações literais do 1º grau na incógnita x*.

Como resolver uma equação literal de 1º grau na incógnita x

A resolução de uma equação literal de 1º grau na incógnita x é feita da mesma maneira que fizemos até agora com as outras equações.

Veja os exemplos:

1. Sendo x a incógnita, resolver a equação $8x + 7a = 2x + 25a$.

$$8x + 7a = 2x + 25a$$

$$8x = 2x + 25a - 7a$$

$$8x = 2x + 18a$$

$$8x - 2x = 18a$$

$$6x = 18a$$

$$x = \frac{18a}{6}$$

$$x = 3a$$

$$\text{Então, } S = \{3a\}.$$

2. Sendo x a incógnita, vamos resolver a equação $3(mx + n) - 2mx = 5n$.

$$3(mx + n) - 2mx = 5n$$

$$3mx + 3n - 2mx = 5n$$

$$mx + 3n = 5n$$

$$mx = 5n - 3n$$

$$mx = 2n$$

$$x = \frac{2n}{m}$$

Nesse caso, x é número real quando $m \neq 0$.

$$\text{Logo, } S = \left\{ \frac{2n}{m} \right\}, \text{ com } m \neq 0.$$

3 Sendo x a incógnita, vamos resolver a equação $a - \frac{x}{b} = \frac{x}{a} - b$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$a - \frac{x}{b} = \frac{x}{a} - b$$

$$\frac{a^2b - ax}{ab} = \frac{bx - ab^2}{ab}$$

$$a^2b - ax = bx - ab^2$$

$$-ax = bx - ab^2 - a^2b$$

$$-ax - bx = -ab^2 - a^2b$$

$$ax + bx = ab^2 + a^2b$$

$$x \cdot (a + b) = ab(b + a) \quad \longrightarrow \quad \text{Colocando } x \text{ em evidência no } 1^\circ \text{ membro e } ab \text{ em evidência no } 2^\circ \text{ membro.}$$

$$x = \frac{ab(b+a)}{(b+a)}$$

Nesse caso, x é um número real quando $b + a \neq 0$

$$x = ab$$

Então, $S = \{ab\}$.

FIXAÇÃO

1 Sendo x a incógnita, resolva as seguintes equações literais no conjunto \mathbb{R} (supondo que os resultados representam números reais):

a) $5x - 3a = 12a$

b) $8x + p = 4x + 2p$

c) $\frac{a+x}{2} + a = \frac{4a-x}{3}$

d) $\frac{x+b}{5} + \frac{b-x}{3} + \frac{x}{10} = 0$

e) $5bx + 2a = bx + 3a$

f) $3(ax + b) = 2(ax - b)$

g) $(x+b)(x-b) = x \cdot (x-b^3)$

h) $(a-b)x + (a+b)x = 2a$

i) $\frac{x}{a} = c + \frac{x}{2a}$ ($a \neq 0$)

j) $am + \frac{x}{m} - \frac{ax}{b} = b$ ($m \neq 0$, $b \neq 0$)

2 Qual é o conjunto solução da equação $6hx + 14 = 18 + 2hx$, sendo x a incógnita?

3 Qual deve ser o número real x para que a soma

$$\frac{b+x}{5} + \frac{b-x}{3} \text{ dê } -\frac{x}{10}?$$

4 Sabendo que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e x é a incógnita, resolva

no conjunto \mathbb{R} a equação $\frac{x-a}{b} = 2 - \frac{x-b}{a}$.

5 Na igualdade $\frac{x}{a-b} - \frac{5a}{a+b} = \frac{2bx}{a^2-b^2}$, sa-

bendo que $a \neq -b$ e $a \neq b$, qual deve ser o valor do número real x ?

6 As expressões $(m-n)x + (m+n)x$ e $10m$ são iguais. Nessas condições, qual é o valor do número real x ?

7 Resolva a equação

$$(x - 2a)(x - 3a) + 2x^2 = 3(x^2 - 9a^2) + 13a^2,$$

sendo x a incógnita e $U = \mathbb{R}$.

8 Qual deve ser o número real x para que se tenha

$$\frac{2x}{b} - \frac{x^2 + ab}{bx} = \frac{a}{x} - \frac{a - x}{b},$$

sabendo que $b \neq 0$ e $x \neq 0$?

9 Sendo $x \neq b$ e $x \neq -b$ dê o conjunto solução da equação

$$\frac{a}{b - x} - \frac{2a}{b + x} = \frac{5ab}{b^2 - x^2}$$

no conjunto \mathbb{R} .

10 Vamos resolver a equação $\frac{x - 1}{1 + a} + \frac{x + 1}{3 + a} = 2$,

sendo x a incógnita e $a \neq -1$, $a \neq -3$.

RETOMANDO o que aprendeu

1 Determine o número real, representado pela letra x , para que seja verdadeira a igualdade

$$7x - [5x + 3 - (2x + 1) - 10] = -(-x + 3)$$

2 São dadas as equações:

$$\frac{3x}{x - 4} = 3 + \frac{2}{x} \quad (x \neq 0, x \neq 4)$$

$$\frac{5}{y^2 - 9} = \frac{-3}{y + 3} \quad (y \neq -3, y \neq 3)$$

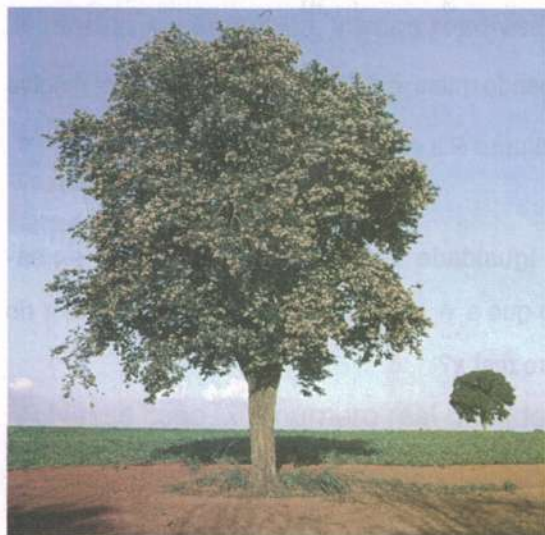
Qual é o valor de $x : y$?

3 A altura de uma árvore, em metros, é dada por

$$h = 10 - \frac{100}{10 + t},$$

sendo t a idade da árvore em anos.

Se a árvore da foto tem 6 metros de altura, quantos anos ela tem?



Haroldo Palo, Jr/Kino

4 Na equação literal $\frac{x}{a - b} - \frac{5a}{a + b} = \frac{2bx}{a^2 - b^2}$

sabe-se que $a \neq -b$ e $a \neq b$. Qual é o valor real da incógnita x ?

5 Qual deve ser o número real x para que se tenha

$$2x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) = 2x - 3 \cdot \left(x - \frac{x + 3}{2} \right)?$$

6 O aluguel de uma moto numa agência A é de 280 reais, acrescido de 3 reais por quilômetro rodado. Numa agência B , o aluguel da mesma moto é de 400 reais, acrescido de 1 real por quilômetro rodado. Qual deve ser o número de quilômetros rodados para que o gasto seja o mesmo em qualquer agência?

7 Num grupo de jovens, 25% têm estatura superior a 1,70 m; 45% têm uma estatura entre 1,65 m e 1,70 m e 12 desses jovens têm estatura inferior a 1,65 m. Quantos desses jovens têm uma altura que varia entre 1,65 m e 1,70 m?

8 Segundo uma pesquisa realizada num grupo de pessoas, foi constatado que ao longo de x meses o número de pessoas que contrairá certa doença é dada

pela expressão matemática $\frac{13\,000}{\frac{10}{x} + 2}$. Após quantos

meses o número de pessoas infectadas por essa doença será de 4 000?

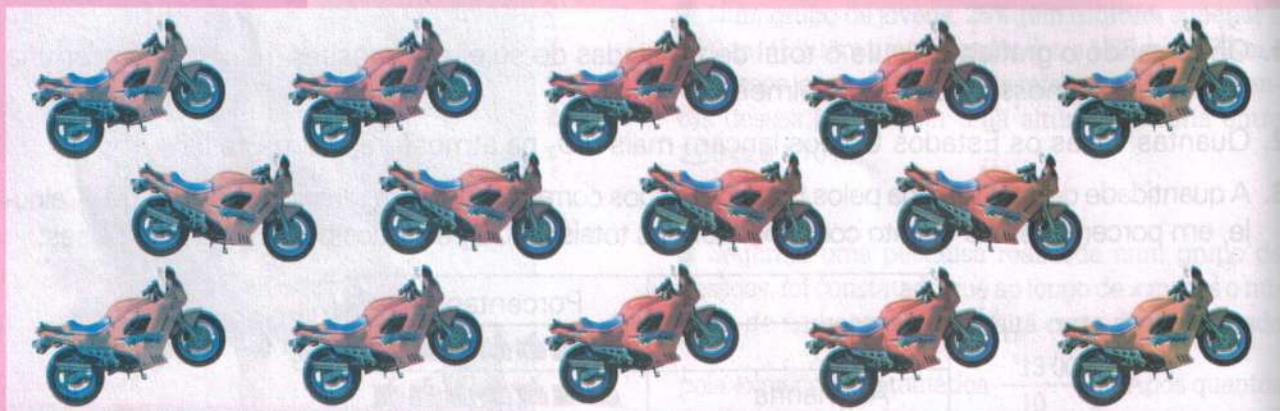
Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas

Em um estacionamento há 14 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número total de rodas é 48. Nessas condições, vamos descobrir quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Observe como podemos resolver esse problema.

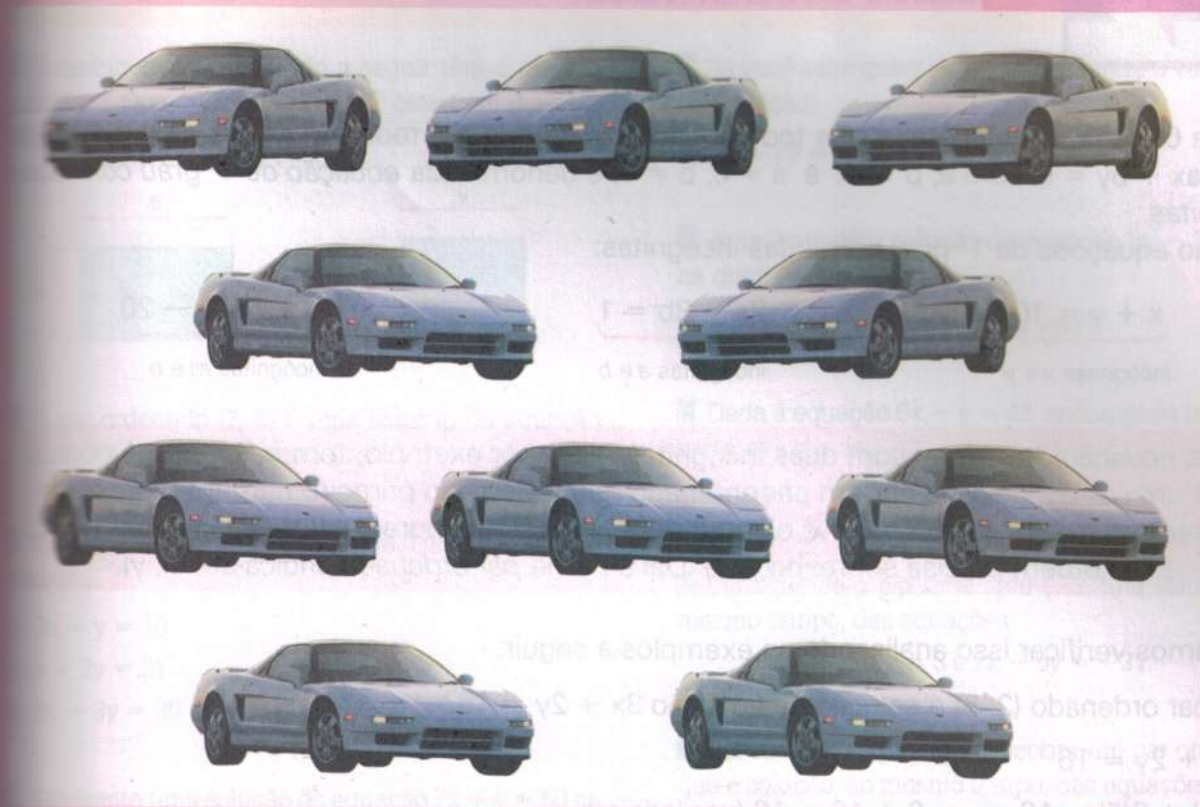
Temos 14 veículos.

Vamos supor que cada veículo tivesse duas rodas. Então teríamos:



Nesse caso, teríamos 28 rodas apenas, mas o problema nos diz que temos 48 rodas.

Como há veículos com quatro rodas, vamos prosseguir substituindo motos por carros até completarmos 48 rodas:



número de veículos de quatro rodas



número de veículos de duas rodas

Portanto, nesse estacionamento temos 10 carros e 4 motos.

Esse processo de resolução é longo e cansativo, exigindo uma capacidade de interpretação muito grande.

O desenvolvimento da Álgebra, com suas equações e sistemas de equações, nos permite, hoje, resolver problemas como esse de forma simples e rápida. É o que veremos nesta Unidade.



EQUAÇÃO DE 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Na 6ª série, já estudamos que toda equação que pode ser reduzida a uma equivalente da forma $ax + by = c$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0, b \neq 0$, é denominada *equação de 1º grau com duas incógnitas*.

São equações de 1º grau com duas incógnitas:

$$\underbrace{x + y = 10}$$

incógnitas x e y

$$\underbrace{2a - 3b = 1}$$

incógnitas a e b

$$\underbrace{7m + 5n = -20}$$

incógnitas m e n

Toda equação de 1º grau com duas incógnitas, x e y por exemplo, tem *infinitas soluções*, cada uma delas indicada por um par ordenado de números: o primeiro número representa sempre o valor da incógnita x ; o segundo representa sempre o valor da incógnita y .

Essa ordem precisa ser respeitada. Daí o nome *par ordenado*. Indica-se: (x, y) .

Vamos verificar isso analisando os exemplos a seguir:

1. O par ordenado $(2, 5)$ é solução da equação $3x + 2y = 16$?

$$3x + 2y = 16$$

$$3(2) + 2(5) = 16 \longrightarrow 6 + 10 = 16 \text{ (verdadeira)}$$

Logo, $(2, 5)$ é uma solução da equação $3x + 2y = 16$.

2. O par ordenado $(4, 2)$ é solução da equação $3x + 2y = 16$?

$$3x + 2y = 16$$

$$3(4) + 2(2) = 16 \longrightarrow 12 + 4 = 16 \text{ (verdadeira)}$$

Logo, o par $(4, 2)$ é uma solução da equação $3x + 2y = 16$.

3. O par ordenado $(5, 2)$ é solução da equação $3x + 2y = 16$?

$$3x + 2y = 16$$

$$3(5) + 2(2) = 16 \longrightarrow 15 + 4 = 16 \text{ (falsa)}$$

Logo, o par ordenado $(5, 2)$ não é solução da equação $3x + 2y = 16$.

4. Determinar uma solução da equação $3x + 2y = 16$ na qual $y = -1$.

$$3x + 2y = 16$$

$$3x + 2(-1) = 16$$

$$3x - 2 = 16$$

$$3x = 16 + 2$$

$$3x = 18$$

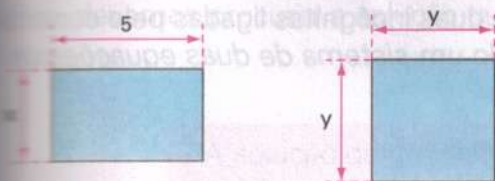
$$x = \frac{18}{3}$$

$$x = 6$$

Logo, uma das soluções dessa equação é o par $(6, -1)$.

FIXAÇÃO

1 Um retângulo e o quadrado a seguir têm o mesmo perímetro. Qual é a equação do 1º grau com duas incógnitas que indica esse fato?



2 O par ordenado (7, 6) é uma solução da equação que você escreveu no exercício 1?

3 Verifique se o par ordenado (3, 9) é uma solução da equação:

a) $3x + y = 18$

b) $x + 2y = 21$

c) $2x + 3y = 30$

4 Apresente uma solução da equação $7x + y = 50$ quando $y = 1$.

5 Se você sabe que $y = 2x - 5$, encontre o valor de x na equação:

a) $3x + 2y = 4$

b) $x - 4y = -1$

6 Apresente uma solução da equação $5x - 3y = 31$ na qual:

a) y vale 3

b) x vale 5

7 Dada a equação $6x - y = 42$, encontre as soluções nas quais temos:

a) $x = 8$

b) $y = 0$

8 Verifique se o par ordenado $(-3, 5)$ é solução, ao mesmo tempo, das equações

$4x + 3y = 3$ e $2x - 5y = -31$.

9 Por tentativas, procure descobrir um par ordenado que é solução, ao mesmo tempo, das equações

$x + y = 5$ e $x - y = 3$.



SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Vamos considerar, novamente, o problema dado no início desta Unidade.

Em um estacionamento, há 14 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número total de rodas é 48. Nessas condições, vamos descobrir quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Na abertura desta Unidade, fizemos a resolução desse problema usando um processo heurístico, mas inviável no sentido prático.

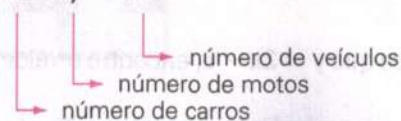
Vamos, agora, usar nossos conhecimentos sobre cálculo algébrico para resolvê-lo de modo mais simples. Inicialmente, vamos indicar por:

x → o número de carros que há no estacionamento

y → o número de motos que há no estacionamento

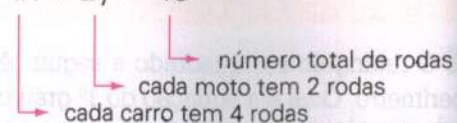
A seguir, pelos dados do problema, podemos montar duas equações:

$$x + y = 14$$



e

$$4x + 2y = 48$$



Quando escrevemos duas equações de 1º grau com duas incógnitas ligadas pelo conectivo e, como fizemos no problema dado, estamos escrevendo um *sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas* (no caso, x e y).

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

Solução de um sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas

❖ Consideremos, por exemplo, a equação $x + y = 14$.

O par ordenado (6, 8) é uma solução da equação, pois:

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ (6) + (8) &= 14 \end{aligned}$$

O par ordenado (10, 4) é uma solução da equação, pois:

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ (10) + (4) &= 14 \end{aligned}$$

O par ordenado (9, 5) é uma solução da equação, pois:

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ (9) + (5) &= 14 \end{aligned}$$

❖ Consideremos, agora, a equação $4x + 2y = 48$.

O par ordenado (11, 2) é uma solução da equação, pois:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 48 \\ 4(11) + 2(2) &= 48 \\ 44 + 4 &= 48 \end{aligned}$$

O par ordenado (9, 6) é uma solução da equação, pois:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 48 \\ 4(9) + 2(6) &= 48 \\ 36 + 12 &= 48 \end{aligned}$$

O par ordenado (10, 4) é uma solução da equação, pois:

$$4x + 2y = 48$$

$$4(10) + 2(4) = 48$$

$$40 + 8 = 48$$

Quando duas equações formam um sistema, embora cada equação apresente infinitas soluções, devemos procurar a solução que verifica as duas equações ao mesmo tempo.

Assim:

A solução de um sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas, x e y , é um par ordenado (x, y) que é solução tanto da primeira equação como da segunda.

Veja os exemplos:

Verificar se o par ordenado (6, 8) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$

$$x + y = 14$$

$$(6) + (8) = 14$$

$$4x + 2y = 48$$

$$4(6) + 2(8) = 48$$

$$24 + 16 \neq 48$$

Logo, o par (6, 8) não é solução do sistema.

Verificar se o par ordenado (9, 6) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$

$$x + y = 14$$

$$(9) + (6) \neq 14$$

$$4x + 2y = 48$$

$$4(9) + 2(6) = 48$$

$$36 + 12 = 48$$

Logo, o par (9, 6) não é solução do sistema.

Verificar se o par ordenado (10, 4) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$

$$x + y = 14$$

$$(10) + (4) = 14$$

$$4x + 2y = 48$$

$$4(10) + 2(4) = 48$$

$$40 + 8 = 48$$

Logo, o par (10, 4) é a solução do sistema.

FIXAÇÃO

1 Usando as incógnitas x e y estabeleça um sistema de duas equações de 1º grau associado a cada uma das seguintes situações:

a) O preço de uma caneta é o dobro do preço de uma lapiseira e as duas juntas custam 30 reais.

b) A soma das idades de duas pessoas é 25 anos, e a diferença entre essas idades é 13 anos.

c) Uma tábua tem 150 cm de comprimento e deve ser cortada em dois pedaços de forma que o comprimento de uma parte seja igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da outra.

d) A soma de dois números é 50, e o maior deles é igual ao dobro do menor, menos 1.

e) Um terreno tem $1\,300\text{ m}^2$ de área, e a parte construída deve ser igual a $\frac{5}{4}$ da parte destinada ao jardim.

f) Duas pessoas ganharam, juntas, 50 reais por um trabalho. Uma delas ganhou 70% do que ganhou a outra.

g) Milena tem 8 notas, umas de 5 reais e outras de 10 reais, num total de 55 reais.

h) Em um terreiro há galinhas e coelhos, num total de 23 animais e 82 pés.

2 Verifique se o par ordenado $(10, 7)$ é a solução do

$$\text{sistema} \begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 2x + 3y = 41 \end{cases}$$

3 Verifique se o par ordenado $(-3, 5)$ é a solução do

$$\text{sistema} \begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x - 5y = -31 \end{cases}$$

4 Indique entre os pares ordenados $(1, 2)$ e $(2, 1)$ qual

deles é a solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

5 Pense um pouco e dê o par ordenado que é a solu-

ção do sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

6 Verifique se o par ordenado $(-2, 2)$ é solução do

$$\text{sistema} \begin{cases} \frac{x}{2} + 4y = 7 \\ x - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$



RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Existem métodos algébricos que nos permitem calcular o par ordenado (x, y) , o qual é a solução de um sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas.

Neste capítulo, estudaremos dois desses métodos: o da *substituição* e o da *adição*.

Método da substituição

Vamos considerar, mais uma vez, o problema dado na abertura desta Unidade:

Em um estacionamento há 14 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número total de rodas é 48. Nessas condições, quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Inicialmente, vamos indicar por:

x → o número de carros

y → o número de motos

De acordo com os dados do problema, podemos formar o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

Da 1ª equação, vamos determinar o valor de x :

$$x + y = 14$$

$$x = 14 - y$$

Vamos substituir, na outra equação, x por $14 - y$:

$$4x + 2y = 48$$

$$4(14 - y) + 2y = 48 \quad \rightarrow \text{equação do 1º grau na incógnita } y$$

$$56 - 4y + 2y = 48$$

$$56 - 2y = 48$$

$$-2y = 48 - 56$$

$$-2y = -8$$

$$2y = 8$$

$$y = \frac{8}{2} \Rightarrow y = 4 \quad \rightarrow \text{número de motos}$$

Vamos substituir y por 4 na equação $x = 14 - y$ e teremos:

$$x = 14 - 4$$

$$x = 10 \quad \rightarrow \text{número de carros}$$

Então, a solução do sistema é o par ordenado (10, 4).

Logo, no estacionamento, há 10 carros e 4 motos.

Vejam agora outros exemplos.

1. Determinar a solução (x, y) do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 20 \end{cases}$

$$2x + 3y = 7$$

$$2x = 7 - 3y$$

$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$

$$3x - 5y = 20$$

$$3\left(\frac{7 - 3y}{2}\right) - 5y = 20$$

$$\frac{21 - 9y}{2} - 5y = 20$$

$$\frac{21 - 9y - 10y}{2} = \frac{40}{2}$$

$$21 - 19y = 40$$

$$-19y = 40 - 21$$

$$-19y = 19$$

$$19y = -19$$

$$y = -\frac{19}{19}$$

$$y = -1$$

$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$

$$x = \frac{7 - 3(-1)}{2}$$

$$x = \frac{7 + 3}{2}$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Logo, o par $(5, -1)$ é a solução do sistema, ou seja, $S = \{(5, -1)\}$.

2. Vamos resolver o sistema $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{3} \\ x - 3(y + 2) = -4 \end{cases}$

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{3}$$

$$\frac{3x - 6}{6} = \frac{2y}{6}$$

$$3x - 6 = 2y$$

$$3x = 2y + 6$$

$$3x - 2y = 6$$

$$x - 3(y + 2) = -4$$

$$x - 3y - 6 = -4$$

$$x - 3y = -4 + 6$$

$$x - 3y = 2$$

- Vamos resolver o sistema equivalente $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

Nesse sistema, torna-se mais simples iniciar pela segunda equação.

$$\begin{array}{l|l|l}
 x - 3y = 2 & 3x - 2y = 6 & x = 2 + 3y \\
 x = 2 + 3y & 3(2 + 3y) - 2y = 6 & x = 2 + 3(0) \\
 & 6 + 9y - 2y = 6 & x = 2 + 0 \\
 & 6 + 7y = 6 & x = 2 \\
 & 7y = 6 - 6 & \\
 & 7y = 0 & \\
 & y = \frac{0}{7} & \\
 & y = 0 &
 \end{array}$$

Logo, a solução do sistema é o par $(2, 0)$, ou seja, $S = \{(2, 0)\}$.

Método da adição

Veremos agora como resolver um sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas usando o método algébrico da adição. Veja os exemplos:

1. Determinar a solução (x, y) do sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$$

Observando que as duas equações apresentam termos opostos ($3y$ na primeira e $-3y$ na segunda), vamos adicionar as duas equações membro a membro. Este fato nos permite obter uma única equação, e sem a incógnita y :

$$\begin{array}{r}
 5x + 3y = 21 \\
 2x - 3y = 14 \\
 \hline
 7x + 0 = 35 \\
 7x = 35 \\
 x = \frac{35}{7} \\
 x = 5
 \end{array}$$

Substituindo x por 5 em uma das equações do sistema, temos:

$$\begin{array}{r}
 5x + 3y = 21 \\
 5(5) + 3y = 21 \\
 25 + 3y = 21 \\
 3y = 21 - 25 \\
 3y = -4 \\
 y = -\frac{4}{3}
 \end{array}$$

Logo, a solução do sistema é o par $(5, -\frac{4}{3})$, ou seja, $S = \left\{ \left(5, -\frac{4}{3} \right) \right\}$.

2. Resolver o sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

Observando as equações do sistema, vemos que é inútil adicionar membro a membro as duas equações, pois, não havendo termos opostos, nenhuma das incógnitas vai desaparecer. Vamos, então, usar um recurso que é uma aplicação do princípio multiplicativo:

- ✓ Multiplicamos todos os termos da 1ª equação por 2.
- ✓ Multiplicamos todos os termos da 2ª equação por 3.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 & \cdot (2) \\ 4x - 2y = 6 & \cdot (3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 4 \\ 12x - 6y = 18 \end{cases}$$

Agora, temos dois termos opostos: $+6y$ e $-6y$. Por esse motivo, vale a pena adicionar membro a membro as equações:

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = 4 \\ 12x - 6y = 18 \\ \hline 22x + 0 = 22 \\ 22x = 22 \\ x = \frac{22}{22} \\ x = 1 \end{array}$$

Finalmente, vamos substituir x por 1 em qualquer uma das equações do sistema. Assim, teremos:

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 2 \\ 5(1) + 3y = 2 \\ 5 + 3y = 2 \\ 3y = 2 - 5 \\ 3y = -3 \\ y = \frac{-3}{3} \\ y = -1 \end{array}$$

Logo, a solução do sistema é o par $(1, -1)$, ou seja, $S = \{(1, -1)\}$.

3. Resolver o sistema $\begin{cases} \frac{x}{5} = 2 - \frac{y}{3} \\ 5x + y = 2(17 - y) \end{cases}$

Inicialmente, vamos escrever as duas equações na forma $ax + by = c$:

$$\frac{x}{5} = 2 - \frac{y}{3}$$

$$\frac{3x}{15} = \frac{30 - 5y}{15}$$

$$3x = 30 - 5y$$

$$3x + 5y = 30$$

$$5x + y = 2(17 - y)$$

$$5x + y = 34 - 2y$$

$$5x + y + 2y = 34$$

$$5x + 3y = 34$$

O nosso problema consiste em resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 30 \\ 5x + 3y = 34 \end{cases}$

Observando as equações do sistema, notamos que é inútil adicionar membro a membro as duas equações, pois, não havendo termos opostos, nenhuma das incógnitas vai desaparecer.

Vamos, então, fazer da seguinte maneira para eliminar a incógnita y :

✓ Multiplicamos todos os termos da 1ª equação por (-3) .

✓ Multiplicamos todos os termos da 2ª equação por 5.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 30 \cdot (-3) \\ 5x + 3y = 34 \cdot (5) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -9x - 15y = -90 \\ 25x + 15y = 170 \end{cases}$$

Tendo dois termos opostos, $-15y$ e $15y$, vamos adicionar membro a membro as duas equações:

$$-9x - 15y = -90$$

$$25x + 15y = 170$$

$$16x + 0 = 80$$

$$16x = 80$$

$$x = \frac{80}{16}$$

$$x = 5$$

Finalmente, vamos substituir x por 5 em uma das equações do sistema:

$$5x + 3y = 34$$

$$5(5) + 3y = 34$$

$$25 + 3y = 34$$

$$3y = 34 - 25$$

$$3y = 9$$

$$y = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

Logo, a solução do sistema é o par $(5, 3)$, ou seja, $S = \{(5, 3)\}$.

FIXAÇÃO

1 Utilizando o método da substituição, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações nas incógnitas x e y :

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 18 \\ x + y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 3y = -26 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 5y = -24 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{5} = 10 + \frac{y}{2} \\ x - y = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - 5y = 2(x - y) + 1 \\ 3y - 3(x - 3y) + x = -2 - 3y \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{3} \\ \frac{x}{2} = y + 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = 2(y + 2) \\ \frac{x - y}{10} = \frac{x}{2} + 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = y \\ 3(x - y) + 2x = 10 - y \end{cases}$

2 Utilizando o método da adição, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações nas incógnitas x e y .

a) $\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - 3y = 20 \\ 4x + 3y = 40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 6y = 23 \\ 5x + 6y = 21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x + 5y = 11 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3(x - 2) = 2(y - 3) \\ 18(y - 2) + y = 3(2x + 3) \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x - y}{5} = \frac{x - y}{2} \\ \frac{3x}{2} = y - 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2(x + 1) - 3(y + 2) = x \\ \frac{x}{4} - \frac{y - 1}{2} = -2 \end{cases}$

3 Utilizando o método mais conveniente, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 3x - 20 = y - 4 \\ \frac{x + 1}{3} = \frac{y + 2}{2} + \frac{x}{6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{5x - 2}{2} + \frac{y - 3}{5} = 2x \\ \frac{7(y - 1)}{2} + \frac{x - 5}{3} = 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x - y}{6} + \frac{x + y}{8} = 5 \\ \frac{x + y}{4} - \frac{x - y}{5} = 10 \end{cases}$

4 O par ordenado (x, y) é a solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x + 5}{5} = y - \frac{y}{2} \\ \frac{5}{2}x + 3(y - 10) = 5(x - 10) \end{cases}$$

Nessas condições, determine o valor de:

- a) xy b) $x^2 + y^2$ c) $\frac{x}{y}$

Carlos e sua irmã Andréa foram com seu cachorro Balu a uma farmácia. Lá, encontraram uma balança com defeito e que só indicava corretamente "pesos" superiores a 60 kg.

Assim, eles se "pesaram" dois a dois e obtiveram as seguintes medidas:

- Carlos e Balu "pesaram" juntos 87 kg.
- Carlos e Andréa "pesaram" juntos 123 kg.
- Andréa e Balu "pesaram" juntos 66 kg.

Quantos quilogramas tem cada um?



Sistemas de equações fracionárias

Um sistema é chamado de sistema de equações fracionárias quando pelo menos uma das equações do sistema apresenta uma das incógnitas no denominador. Observe os exemplos:

Vamos determinar o par (x, y) que é solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{3x}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} = \frac{5}{y-1} \end{cases}$$

Nesse sistema, devemos ter $y \neq 0$, $y \neq 1$ e $x \neq 0$. Vamos então reduzir as equações à sua forma mais simples:

$$\frac{3x}{y} = 1$$

$$\frac{3x}{y} = \frac{y}{y}$$

$$3x = y \text{ ou } y = 3x$$

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{y-1}$$

$$\frac{2(y-1)}{x(y-1)} = \frac{5x}{x(y-1)}$$

$$2(y-1) = 5x$$

$$2y - 2 = 5x$$

$$2y = 5x + 2$$

$$-5x + 2y = 2$$

Devemos agora resolver o sistema $\begin{cases} y = 3x \\ -5x + 2y = 2 \end{cases}$

Nesse caso, é mais simples aplicar o método algébrico da substituição:

$$\begin{array}{l|l|l}
 y = 3x & -5x + 2y = 2 & y = 3x \\
 & -5x + 2(3x) = 2 & y = 3(2) \\
 & -5x + 6x = 2 & y = 6 \\
 & x = 2 &
 \end{array}$$

Logo, a solução do sistema é o par (2, 6), ou seja, $S = \{(2, 6)\}$.

2. Sabe-se que $xy = 24$ e que

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{6}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$$

Nessas condições, determine o par (x, y) que é a solução do sistema.

Vamos reduzir as equações à forma mais simples:

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{y} = 3$$

$$\frac{8y + 6x}{xy} = \frac{3xy}{xy}$$

$$8y + 6x = 3xy$$

Como $xy = 24$, temos:

$$8y + 6x = 3(24)$$

$$8y + 6x = 72$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$$

$$\frac{2y + 3x}{xy} = \frac{1xy}{xy}$$

$$2y + 3x = xy$$

Como $xy = 24$, temos:

$$2y + 3x = 24$$

O nosso problema consiste em resolver o sistema equivalente $\begin{cases} 8y + 6x = 72 \\ 2y + 3x = 24 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8y + 6x = 72 \\ 2y + 3x = 24 \cdot (-2) \end{cases}$$

$$8y + 6x = 72$$

$$-4y - 6x = -48$$

$$4y + 0 = 24$$

$$4y = 24$$

$$y = \frac{24}{4}$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} 8y + 6x = 72 \\ -4y - 6x = -48 \end{cases}$$

$$2y + 3x = 24$$

$$2(6) + 3x = 24$$

$$12 + 3x = 24$$

$$3x = 24 - 12$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Logo, a solução do sistema é o par (4, 6), ou seja, $S = \{(4, 6)\}$.

Fazendo $\frac{1}{x} = m$ e $\frac{1}{y} = n$, resolver o sistema $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{10} \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -1 \end{cases}$

Observe que:

$$\frac{5}{x} = 5 \cdot \frac{1}{x} = 5m \quad \text{e} \quad \frac{4}{y} = 4 \cdot \frac{1}{y} = 4n$$

Daí, teremos o sistema: $\begin{cases} m + n = \frac{7}{10} \\ 5m - 4n = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 10m + 10n = 7 \\ 5m - 4n = -1 \end{cases}$

Vamos resolver pelo método algébrico da adição:

$$\begin{cases} 10m + 10n = 7 \cdot (4) \\ 5m - 4n = -1 \cdot (10) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40m + 40n = 28 \\ 50m - 40n = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 40m + 40n = 28 \\ 50m - 40n = -10 \\ \hline 90m + 0 = 18 \\ 90m = 18 \\ m = \frac{18}{90} \\ m = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10m + 10n = 7 \\ \cancel{10} \left(\frac{1}{5} \right) + 10n = 7 \\ 2 + 10n = 7 \\ 10n = 7 - 2 \\ 10n = 5 \\ n = \frac{5}{10} \\ n = \frac{1}{2} \end{array}$$

Conhecidos os valores de m e de n , vamos determinar x e y :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{x} = m \\ \downarrow \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \\ x = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{y} = n \\ \downarrow \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{array}$$

Logo, a solução do sistema é $S = \{(5, 2)\}$.

FIXAÇÃO

1 Utilizando o método mais conveniente, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações:

a)
$$\begin{cases} \frac{2x+1}{y+3} = 1 \\ \frac{y}{x+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{x}{2y} = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x = 2 + 3y \\ \frac{1}{y-1} = \frac{1}{x-3} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{2x+y}{x+y} = \frac{2}{3} \\ \frac{x-y}{3x+7} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2 Dois números reais x e y são tais que $\frac{x+4}{y+3} = 1$ e $\frac{2y}{x+2} = 4$. Nessas condições, sendo $x \neq -2$ e $y \neq -3$, determine o valor de:

a) $y - x$

b) $x : y$

c) $(x + y)(x - y)$

Resolvendo problemas

Vamos, agora, resolver alguns problemas utilizando um sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas.

1. Em um terreno de $1\ 050\text{ m}^2$ vai ser construída uma casa. Ficou estabelecido que a parte reservada ao jardim vai ter 40% da área ocupada pela construção. Qual a área ocupada pela construção e qual a área ocupada pelo jardim, sabendo que eles ocuparão a área total?

Vamos indicar por:

$x \rightarrow$ a área ocupada pela construção

$y \rightarrow$ a área ocupada pelo jardim

Lembrando que $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1\ 050 \\ y = \frac{2}{5}x \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema usando o método da substituição:

$$y = \frac{2}{5}x$$

$$x + y = 1\ 050$$

$$x + \frac{2}{5}x = 1\ 050$$

$$\frac{5x + 2x}{5} = \frac{5\ 250}{5}$$

$$5x + 2x = 5\ 250$$

$$7x = 5\ 250$$

$$x = \frac{5\ 250}{7} \Rightarrow x = 750$$

$$y = \frac{2}{5}x$$

$$y = \frac{2}{5}(750)$$

$$y = 300$$

A área ocupada pela construção deve ser de 750 m^2 e a área ocupada pelo jardim, de 300 m^2 .

2. Como você sabe, uma partida de voleibol não pode terminar empatada. Em qualquer torneio de voleibol, o regulamento manda marcar 2 pontos por vitória e 1 ponto por derrota. Disputando um torneio, uma equipe realizou 9 partidas e acumulou 15 pontos. Quantas partidas a equipe venceu e quantas partidas ela perdeu nesse torneio?

Vamos indicar por:

- x \longrightarrow o número de partidas que a equipe venceu
 y \longrightarrow o número de partidas que a equipe perdeu



Corel Stock Photo

Podemos, então, formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + y = 9 & \cdot (-1) \\ 2x + y = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x - y = -9 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$$

$$-x - y = -9$$

$$2x + y = 15$$

$$\hline x + 0 = 6$$

$$x = 6$$

$$x + y = 9$$

$$6 + y = 9$$

$$y = 9 - 6$$

$$y = 3$$

No torneio, a equipe venceu 6 jogos e perdeu 3 jogos.

FIXAÇÃO

1 A soma de dois números é 169 e a diferença entre eles é 31. Quais são os dois números?

2 A diferença entre dois números é 15. Sabe-se que o menor dos números é igual a $\frac{9}{10}$ do maior. Calcule os dois números.

3 A soma de dois números é 110. O maior deles é igual ao triplo do menor mais 18 unidades. Quais são os dois números?

4 A soma de dois números é 90. O dobro do maior é igual ao triplo do menor. Determine os dois números.

5 Uma fração é equivalente a $\frac{7}{4}$. Se adicionarmos 2 ao denominador dessa fração, ela se torna equivalente a $\frac{3}{2}$. Qual é a fração pedida?

6 Quando adicionamos 2 aos dois termos de uma fração, ela se torna equivalente a $\frac{5}{6}$ e, quando subtraímos 2 dos dois termos da mesma fração, ela se torna equivalente a $\frac{1}{2}$. Qual é a fração considerada?

7 Um terreno é retangular e tem 128 m de perímetro. O comprimento tem 20 m a mais que a largura. Determine as dimensões desse terreno e a sua área.

8 A 7ª série A tem 47 alunos. No dia da eleição para representante dessa série no centro cívico da escola, faltaram 5 alunos e 2 alunos se apresentaram como candidatos. Feita a votação e apurados os votos, verificou-se que o vencedor teve 8 votos a mais que o perdedor. Quantos votos teve o candidato vencedor?

9 Duas pessoas têm, juntas, 70 anos. Subtraindo 10 anos da idade da mais velha e acrescentando os mesmos 10 anos à idade da mais jovem, as idades ficam iguais. Qual é a idade de cada pessoa?

10 Pelo regulamento de um torneio de basquete, cada partida que a equipe ganha vale 2 pontos e cada partida que perde, vale 1 ponto. A equipe de basquete do nosso colégio, disputando um torneio, jogou 10 vezes e já acumulou 16 pontos. Quantos jogos a equipe do nosso colégio já venceu?

11 Uma tábua tinha 235 cm de comprimento e foi dividida em 3 partes. A primeira tem 85 cm de comprimento, e a segunda, o dobro do comprimento da terceira parte. Quais são os comprimentos dessas duas últimas partes?

12 Em um terreiro, há galinhas e carneiros, num total de 21 animais e 50 pés. Quantos animais de cada espécie há nesse terreiro?

13 Dois lotes de terreno têm a mesma área. Sabe-se que $\frac{3}{4}$ da área de um deles supera, em 140 m^2 , $\frac{2}{5}$ da área do outro. Qual a área de cada lote?

14 Um campeonato de Fórmula 1 termina com o campeão levando 7 pontos de vantagem sobre o vice-campeão. Os dois juntos, campeão e vice, somaram no final da temporada 173 pontos. Nessas condições, quantos pontos somou o campeão da temporada? E o vice-campeão?



Corel Stock Photo

15 Numa eleição em que havia dois candidatos, votaram 12 300 pessoas. Sabendo-se que 830 votos foram anulados ou em branco e que o vencedor ganhou por uma diferença de 1 450 votos, quantos votos obteve cada candidato?

16 Para embalar 1 650 livros, uma editora utilizou 27 caixas, umas com capacidade para 50 livros e outras para 70 livros. Quantas caixas de cada tipo a editora utilizou?

17 Um colégio tem 30 professores. O número de professores que ensinam Matemática representa a quarta parte do número de professores que ensinam outras matérias. Quantos professores ensinam Matemática nesse colégio?

Um marceneiro é contratado para colocar prateleiras em uma parede de um depósito que tem 6 m de altura. O dono do depósito quer que sejam colocadas 23 prateleiras com alguns vãos de 20 cm e outros de 30 cm. Nessas condições, quantos vãos de 20 cm e quantos vãos de 30 cm o marceneiro irá deixar? (Observação: 23 prateleiras correspondem a 24 vãos.)



Stock Photos

19 Uma certa mercadoria é vendida nas lojas A e B. O preço dessa mercadoria é 18 reais mais alto na loja A. Se a loja A oferecer um desconto de 20%, o preço nas duas lojas será o mesmo. Qual é o preço inicial da mercadoria em cada uma das lojas? (Lembre-se: 20% de desconto corresponde a 80% do preço inicial.)

20 Um colégio comprou todos os ingressos de uma peça de teatro para distribuir a seus alunos da 7ª série. O diretor pensou em dar 3 ingressos para cada aluno, mas percebeu que faltariam 10 ingressos. Então, ele resolveu dar 2 ingressos para cada aluno e sobraram 125 ingressos para ele distribuir aos alunos das outras séries. Quantos alunos esse colégio tem na 7ª série e quantos ingressos o colégio comprou para distribuir aos seus alunos?

RETOMANDO o que aprendeu

1 Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ x - \frac{y-1}{2} = 2 \end{cases}$$

2 O par de números reais (x, y) é solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- a) $x = 3y$ b) $x = -3y$ c) $3x = -y$

3 Numa caixa, o número de bolas vermelhas é o triplo do número de bolas pretas. Se tirarmos 2 bolas pretas e 26 bolas vermelhas, o número de bolas de cada cor ficará igual. Quantas bolas de cada cor há nessa caixa?

4 São dadas as equações: $\frac{1}{y-1} = \frac{1}{x-3}$ e $2x - 1 = 3y$. Sendo $x \neq 3$ e $y \neq 1$, calcule o valor da expressão $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

5 Um frasco, cheio de remédio, tem 420 g. Juca tomou a metade do remédio e verificou que o frasco passou a ter 235 g. Quantos g tem o frasco vazio?

6 Se (x, y) é a solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = \frac{2}{3} \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ determine o valor de } x^2 + y^2.$$

7 Sabe-se que $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 4y = 10 \\ 6z = 18 \end{cases}$

Qual é o valor do número real x ?

8 Seis pessoas vão a um restaurante e pedem 6 pratos do dia. Na hora da sobremesa, apenas uma entre as seis pessoas não quis sobremesa. Sabendo que a diferença entre o preço do prato do dia e o preço da sobremesa é de 5 reais e que o grupo gastou, ao todo, 107 reais, qual é o preço do prato do dia?



Marinez Maravilhas Gomes

9 Sabe-se que $a + b = 1\,200$, $a + c = 1\,500$ e $b + c = 1\,100$. Qual é o valor de $a + b + c$?

10 A bilheteria de um cinema apurou 620 reais vendendo ingressos para 100 pessoas durante uma sessão. O preço de cada ingresso é de 8 reais e estudante paga a metade desse preço. Quantos estudantes compraram ingressos nessa sessão?

JORNAIS & REVISTAS

Para construir a usina de Itaipu foram usados 12,5 milhões de metros cúbicos de concreto (ou 210 estádios do Maracanã) e aço suficiente para construir 350 torres Eiffel.

Em 18 anos de trabalho, foram removidos 63,8 milhões de metros cúbicos de rocha e terra (oito vezes mais que no Eurotúnel).

Torre Eiffel



Corel Stock Photo

Eurotúnel



Camera Press/Keystone



Ricardo Azouvy/Pulsar

Maracanã

Itaipu



Daniel Nascimento de Castro/Folha Imagem

1. Aproximadamente, quanto de concreto foi usado na construção do Maracanã?
2. Em média, quantos metros cúbicos de rocha e terra foram removidos, por ano, na construção de Itaipu?
3. Quantos metros cúbicos de rocha e terra foram removidos para a construção do Eurotúnel?

Segundo pesquisa da ONU (Organização das Nações Unidas), um automóvel circula em média 160 000 km, consome 12 mil litros de gasolina, 200 de óleo e descarrega no ar 36 toneladas de carbono, na forma de gases e partículas. A pesquisa estima que 500 milhões de carros circulem hoje no mundo, produzindo ao ano 10 trilhões de metros cúbicos de fumaça. E que esses números aumentarão 50% até o ano 2010, dobrando em 2030.

(Globo Ciência – janeiro/97)



Stock Photos

4. Em média, quantos quilômetros por litro de gasolina um automóvel percorre?
5. Quantos metros cúbicos de fumaça os automóveis deverão produzir em 2010?

7

Geometria

No Egito Antigo os conhecimentos de Geometria eram muito utilizados pelos agrimensores, para medir terrenos, e pelos construtores, para fazer edificações. Um ótimo exemplo disso são as pirâmides, famosas pela beleza e pelo engenho na construção.



Por isso, os egípcios ganharam fama, e os gregos iam constantemente ao Egito para adquirir mais e mais conhecimentos no campo da Geometria.

Por volta de 600 a.C., os filósofos gregos começaram a sistematizar os conhecimentos matemáticos que foram adquirindo.



Parthenon, templo da Grécia Antiga.

Esse trabalho de organização lógica dos conhecimentos foi feito principalmente pelo matemático grego Euclides, por volta de 300 a.C., e reunido numa obra de 13 volumes, chamada *Os Elementos*, dos quais 9 volumes foram dedicados à Geometria.

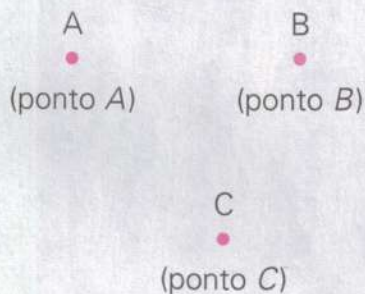
A Geometria que aprendemos hoje é praticamente a mesma escrita por Euclides, tamanha a importância de sua obra.



Euclides visto numa pintura de Justo de Gand (Roma, Palácio Barberini).

Em Geometria, são conceitos intuitivos: o *ponto*, a *reta* e o *plano*.

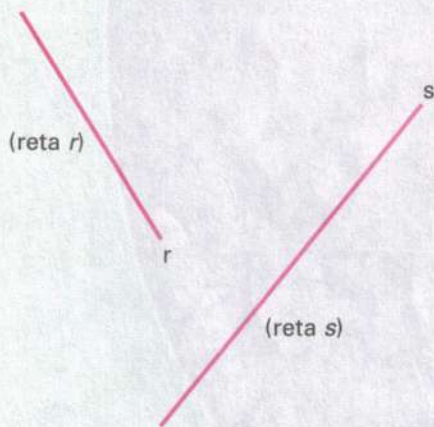
O ponto não possui dimensões. Para representá-lo basta fazer uma marca no papel. A sua indicação é feita, geralmente, por letras maiúsculas do nosso alfabeto.



Cada marca de cidade no mapa nos dá a idéia de ponto.

Em Geometria, a reta é imaginada sem espessura, não tem começo nem fim e é ilimitada nos dois sentidos.

Como é impossível representar uma reta no papel, geralmente representamos uma parte da reta. A sua indicação pode ser feita por letras minúsculas do nosso alfabeto.



Maurício Simonetti/Pulsar

As linhas divisórias de uma quadra de tênis nos dão a idéia de reta.

Em Geometria, o plano é imaginado sem fronteiras e, como no caso da reta, é impossível representá-lo no papel. Por esse motivo, representamos parte do plano e fazemos a sua indicação usando letras do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), γ (gama), ...



(plano α)



Sérgio Dória Jr/ The Next

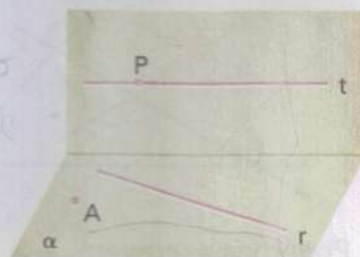
O tampo de uma mesa, por exemplo, nos dá a idéia de plano.

O ponto, a reta e o plano são modelos criados por nossa imaginação e usados para compreender melhor certos aspectos do mundo.

Devemos, ainda, lembrar que, em Geometria, a reta e o plano são imaginados como um conjunto infinito de pontos, estando sujeitos às notações (\in , \notin , \subset , $\not\subset$) quando relacionamos os três elementos.

Observe, então, a figura seguinte, na qual temos:

- $A \in \alpha \rightarrow A$ é um ponto do plano α
- $A \notin r \rightarrow A$ não é um ponto da reta r
- $P \notin \alpha \rightarrow P$ não é um ponto do plano α
- $P \in t \rightarrow P$ é um ponto da reta t
- $r \subset \alpha \rightarrow$ todo o ponto da reta r é ponto do plano α
- $t \not\subset \alpha \rightarrow$ nem todo ponto da reta t é ponto do plano α

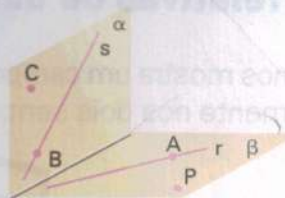


FIXAÇÃO

1 Usando as palavras *ponto*, *reta* ou *plano*, escreva a ideia que você tem quando vê:

- a) uma estrela no céu
- b) um barbante bem esticado
- c) um campo de futebol
- d) uma porta de geladeira
- e) a marca de giz na lousa
- f) o encontro de duas paredes
- g) a superfície de um lago
- h) um furo de compasso na folha de papel
- i) esta folha do livro de Matemática
- j) um fio bem esticado entre dois postes
- k) uma pequena mancha no chão
- l) a lousa da sala de aula

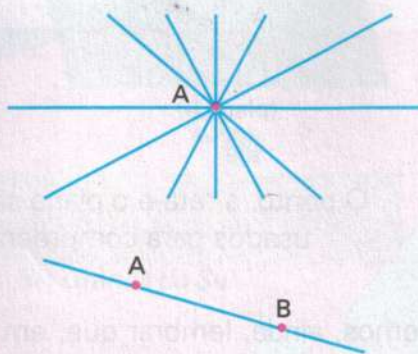
2 Observando a figura seguinte, use os símbolos \in , \notin , \subset ou $\not\subset$ para relacionar:



- a) $A \in r$
- b) $A \in \beta$
- c) $P \in r$
- d) $P \in \beta$
- e) $r \in \alpha$
- f) $P \in \alpha$
- g) $s \in \alpha$
- h) $s \in \beta$
- i) $B \in s$
- j) $B \in \alpha$
- l) $B \in \beta$
- m) $C \in \beta$

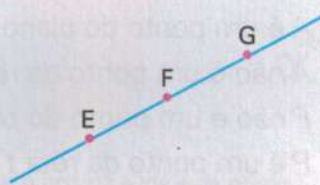
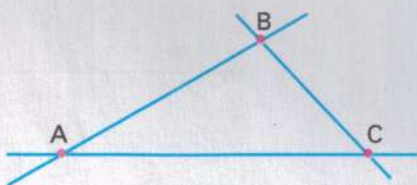
Para estudar a reta, vamos considerar sempre retas traçadas em um plano. Neste caso, o plano será a folha do livro ou do caderno.

Se desenharmos um ponto na folha de papel e traçarmos retas que passam por esse ponto, podemos traçar tantas retas quantas quisermos.



Se desenharmos dois pontos distintos na folha de papel, podemos traçar uma única reta que passa por esses pontos.

Observe as figuras nas quais estão destacados três pontos distintos:

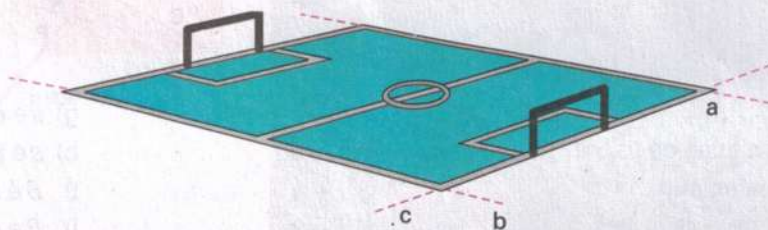


Podemos escrever:

Por um ponto do plano passam infinitas retas.
 Por dois pontos distintos de um plano passa uma única reta.
 Dados três ou mais pontos distintos de um plano, só podemos traçar uma reta que passe por todos ao mesmo tempo se esses pontos estiverem alinhados.

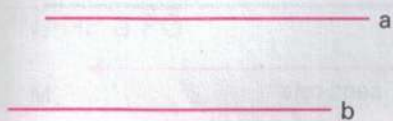
Posições relativas de duas retas em um plano

A figura nos mostra um campo de futebol. Cada linha lateral e cada linha de fundo, prolongada indefinidamente nos dois sentidos, nos sugere a idéia de reta.

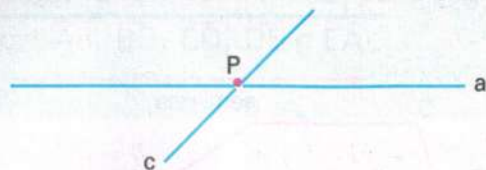


As linhas laterais do campo, prolongadas, no caso as retas a e b , não se cruzam. A linha lateral e a linha de fundo, prolongadas, no caso as retas a e c ou as retas b e c , cruzam-se em um ponto.

Esse modelo nos mostra que, quando traçamos duas retas em um plano, podem ocorrer as seguintes possibilidades:



- ✓ As retas a e b não se cruzam, ou seja, não possuem pontos em comum.
- ✓ Dizemos, então, que a e b são *retas paralelas* e indicamos $a // b$.



- ✓ As retas a e c se cruzam em um único ponto (ponto P), ou seja, possuem apenas um ponto em comum.
- ✓ Dizemos, então, que a e c são *retas concorrentes*.

Observações:

- ♦ Se você traçar as retas a e b no seu caderno, como mostra a figura 1, podemos classificá-las como paralelas ou concorrentes?

Lembrando que tanto o plano como as retas são ilimitados, podemos imaginar a extensão do plano no caderno e o prolongamento das retas como na figura 2.

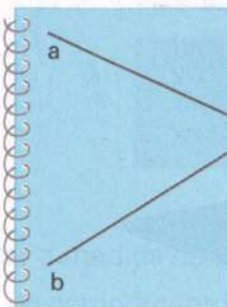


figura 1

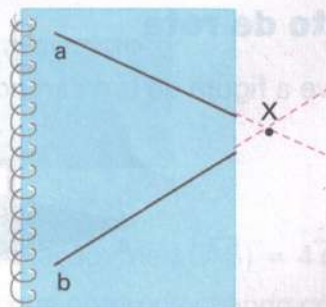
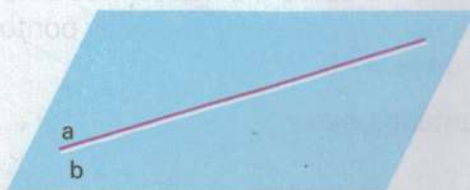


figura 2

Verificamos, assim, que as retas a e b se cruzam no ponto X , sendo, portanto, retas concorrentes.

- ♦♦ Devemos também observar que as retas a e b podem coincidir, ou seja, podem estar ocupando o mesmo lugar no plano. Neste caso, dizemos que a e b são *retas coincidentes*. Indicamos $a = b$.



Semi-reta

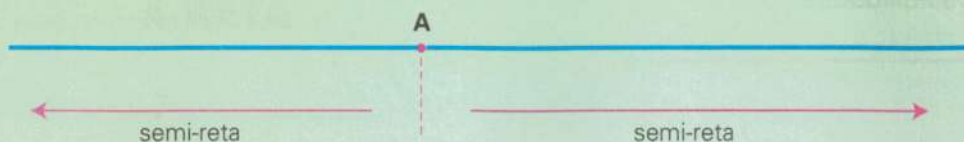
A reta é imaginada como um conjunto infinito de pontos, não possuindo origem nem fim.

Consideremos, agora, a reta r e nela tomemos um ponto A qualquer.

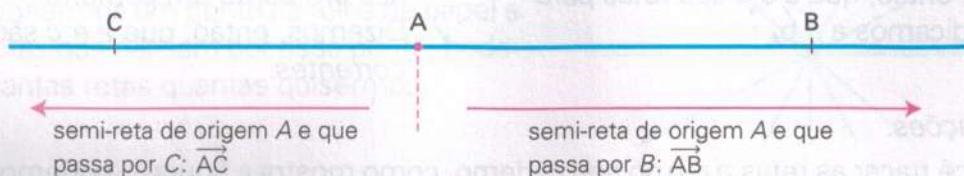


Esse ponto A divide a reta em duas partes, cada uma delas com origem no ponto A .

Cada uma dessas partes chama-se *semi-reta* de origem A .



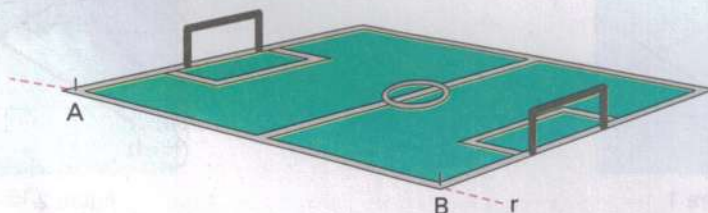
Para indicarmos uma semi-reta, convém considerar um ponto em cada uma das partes em que o ponto A divide a reta r ; o ponto A indica a origem e o ponto considerado indica qual das semi-retas está sendo considerada.



Dessa forma, teremos condições de identificar a semi-reta que está sendo considerada. Notamos que uma semi-reta tem origem, mas não tem fim.

Segmento de reta

Observe a figura de um campo de futebol:



Considerando os pontos A e B extremidades da linha lateral em evidência no desenho e todos os pontos da linha que estão entre A e B , a figura geométrica obtida representa uma parte da reta r e é chamada *segmento de reta* AB .

Esse modelo nos leva a escrever:

Se considerarmos uma reta r e sobre ela marcarmos dois pontos, A e B , distintos, o conjunto de pontos formados por A , por B e por todos os pontos da reta que estão entre A e B denomina-se *segmento de reta* AB .

- ✓ Os pontos A e B são chamados *extremidades* do segmento.
- ✓ Os demais pontos do segmento são chamados *pontos internos* do segmento.
- ✓ A reta r é chamada *reta suporte* do segmento.

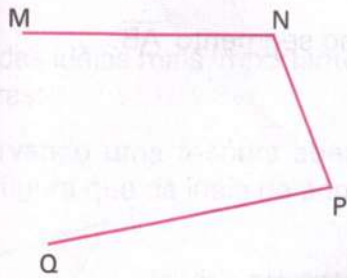


Para nomear o segmento indicamos as letras das extremidades com um traço em cima, ou seja:

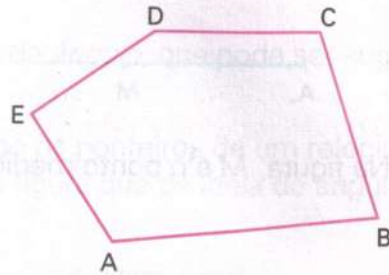
\overline{AB} : segmento de reta cujas extremidades são os pontos A e B .

Observe:

✓ A figura seguinte é formada por 3 segmentos: \overline{MN} , \overline{NP} e \overline{PQ} .

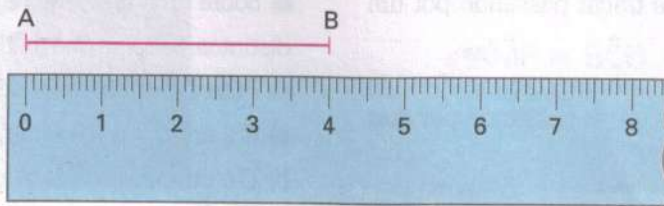


✓ A figura seguinte é formada por 5 segmentos: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} .



Como um segmento é limitado, ele pode ser medido em seu comprimento se usarmos uma unidade padrão.

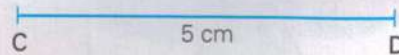
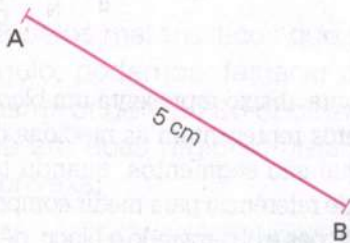
Na figura seguinte, fixamos como unidade padrão o centímetro. Dizemos que a medida do segmento \overline{AB} é 4 cm.



Para indicar a medida de um segmento \overline{AB} , usamos a notação: $\text{med}(\overline{AB}) = 4 \text{ cm}$.

A medida do comprimento de um segmento é o número que obtemos quando comparamos o segmento considerado com outro segmento tomado como unidade padrão, isto é, o número de vezes que o segmento tomado como unidade cabe exatamente no segmento considerado.

Observe, agora, os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} das figuras seguintes:



Os dois segmentos têm a mesma medida, ou seja, $\text{med}(\overline{AB}) = 5 \text{ cm}$ e $\text{med}(\overline{CD}) = 5 \text{ cm}$.

Quando dois segmentos têm a mesma medida, tomada na mesma unidade padrão, dizemos que são segmentos congruentes. Indicamos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

→ é congruente a

Ponto médio de um segmento

Um ponto M , interno a um segmento \overline{AB} , é denominado *ponto médio* do segmento \overline{AB} se M divide \overline{AB} em dois segmentos congruentes.



M é interno ao segmento \overline{AB} .
 $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Na figura, M é o ponto médio do segmento \overline{AB} .

FIXAÇÃO

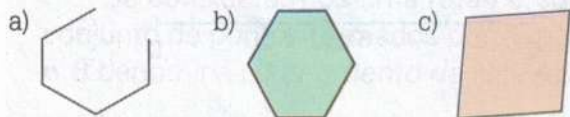
1 Quantas retas você pode traçar passando por um ponto de um plano?

2 Quantas retas você pode traçar passando por dois pontos distintos de um plano?

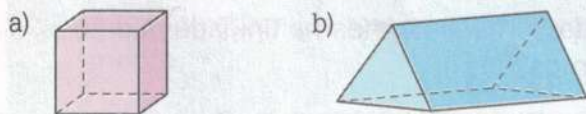
3 Se a intersecção de duas retas de um mesmo plano não é vazia, como podem ser essas duas retas?

4 São dados três pontos A , B e C , não alinhados, de um plano. Quantas semi-retas com origem em cada um desses pontos e passando por um dos outros pontos podem ser traçadas? (Faça a figura para dar a resposta.)

5 Quantos segmentos de reta estão destacados em cada uma das figuras?



6 Cada segmento que você vê destacado nos sólidos abaixo chama-se aresta. Quantas arestas temos em cada um deles?



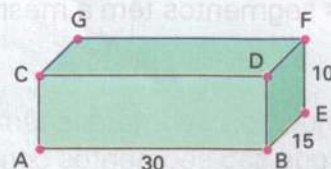
7 Sobre uma reta r , marque quatro pontos distintos A , B , C , D . Quantos segmentos você obteve?

8 Sobre uma reta r , são marcados os pontos A , B e C , distintos. Sabe-se que $\text{med}(\overline{AB}) = 11 \text{ cm}$ e $\text{med}(\overline{BC}) = 7 \text{ cm}$. Determine a medida do segmento \overline{AC} quando:
 a) C é um ponto da reta r , externo ao segmento \overline{AB}
 b) C é um ponto da reta r , interno ao segmento \overline{AB}

9 Observando a figura abaixo, temos que M é o ponto médio do segmento \overline{AB} e N é o ponto médio do segmento \overline{BC} . Se $\text{med}(\overline{AB}) = x$ e $\text{med}(\overline{BC}) = y$, qual é a expressão algébrica que representa $\text{med}(\overline{MN})$?



10 A figura abaixo representa um bloco retangular e os números representam as medidas das arestas do bloco, que são segmentos, quando tomamos uma medida de referência para medir comprimentos. Nessas condições e observando o bloco, dê um segmento que seja congruente com:



- a) o segmento \overline{AB}
- b) o segmento \overline{BE}
- c) o segmento \overline{EF}

Uma das idéias mais importantes em Geometria é a idéia de *ângulo*, que pode ser sugerida pelas figuras:

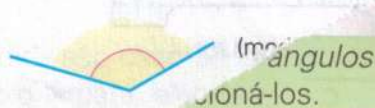
Observando uma tesoura aberta, notamos uma figura que dá idéia de ângulo.



Sérgio Dotta Jr/The Next



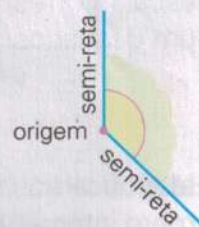
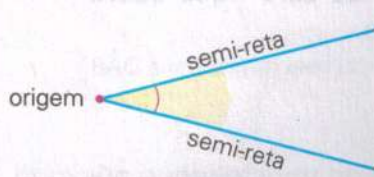
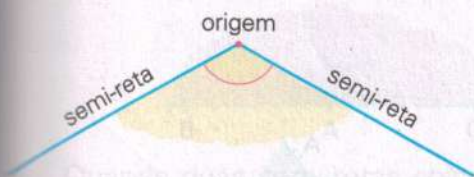
Olhando os ponteiros de um relógio, notamos uma figura que dá idéia de ângulo.



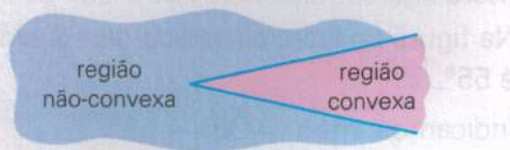
usamos o símbolo \cong quando comparamos ângulos

$$\begin{aligned} \hat{A}MP &\cong \hat{B}CD \\ \hat{M} &\cong \hat{C} \end{aligned}$$

Engenheiros, topógrafos, desenhistas, carpinteiros, operadores de vôo, por exemplo, fazem uso constante de ângulos em suas atividades profissionais.

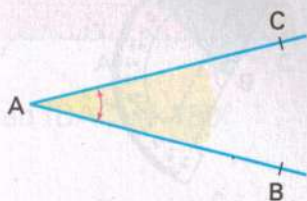


Nos modelos matemáticos que sugerem a idéia de ângulo, podemos destacar duas semi-retas de mesma origem e não-opostas, que dividem o plano em duas regiões: uma convexa e outra não-convexa.



Denomina-se ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não-opostas que têm a mesma origem.

No ângulo da figura, podemos destacar os seguintes elementos:

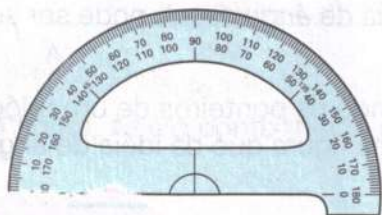


- ✓ O ponto A, origem das semi-retas, chama-se *vértice* do ângulo.
- ✓ As semi-retas \vec{AB} e \vec{AC} são os *lados* do ângulo.
- ✓ A identificação do ângulo é feita por $\hat{B}AC$ ou simplesmente por \hat{A} .

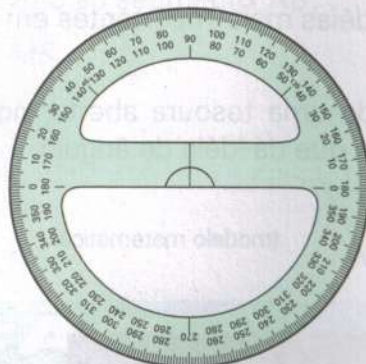
Medida de um ângulo

A unidade de medida usada para medir ângulos é o grau. O aparelho que utilizamos para efetuar essa medida chama-se *transferidor*.

O transferidor já vem graduado com divisões de 1 em 1 grau:



de 180°



transferidor de 360°

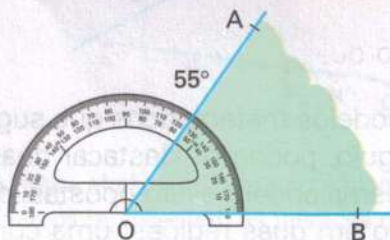
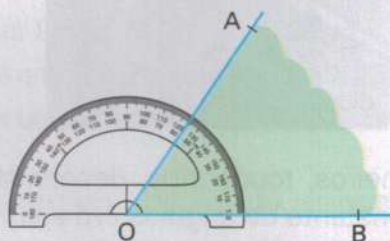
1 Quantas retas você pode traçar passando por um ponto de um plano?

2 Quantas retas você pode traçar passando por dois pontos distintos de um plano?

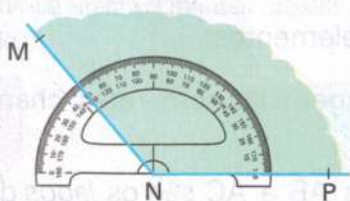
1. Colocamos o transferidor de modo que seu centro coincida com o vértice do ângulo e a escala correspondente ao zero fique sobre um dos lados do ângulo.

2. Identificamos na escala do transferidor o número interceptado pelo outro lado do ângulo. Na figura ao lado, a medida do ângulo $\hat{A}OB$ é 55°.

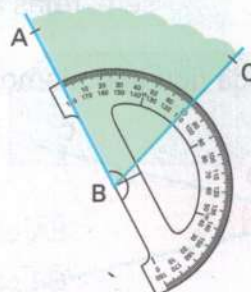
Indicamos: $\text{med}(\hat{A}OB) = 55^\circ$.



Veja mais dois exemplos:

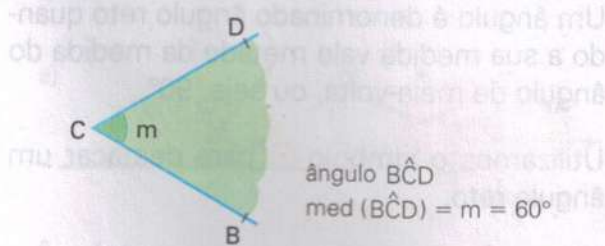


$\text{med}(\hat{MNP}) = 130^\circ$



$\text{med}(\hat{ABC}) = 70^\circ$

Em geral, podemos indicar a medida de um ângulo por uma letra minúscula do nosso alfabeto: a, b, c, \dots, x, y, z .



Observando os dois ângulos \widehat{AMP} e \widehat{BCD} acima, você pode notar que suas medidas são iguais.

Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados *ângulos congruentes*. Utilizamos o símbolo \cong para relacioná-los.

No exemplo:

- ✓ usamos o símbolo $=$ quando comparamos medidas

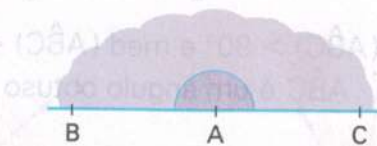
$$\begin{aligned} \text{med}(\widehat{AMP}) &= \text{med}(\widehat{BCD}) \\ a &= m \end{aligned}$$

- usamos o símbolo \cong quando comparamos ângulos

$$\begin{aligned} \widehat{AMP} &\cong \widehat{BCD} \\ \widehat{M} &\cong \widehat{C} \end{aligned}$$

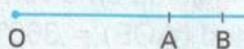
Ângulos especiais

Quando duas semi-retas são opostas, dizemos que formam um *ângulo raso* ou de *meia-volta*.

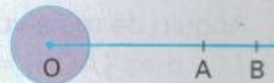


\widehat{BAC} é um ângulo raso ou de meia-volta.

Quando duas semi-retas coincidem, obtemos dois ângulos: o *ângulo nulo* e o *ângulo de uma volta*.



ângulo nulo



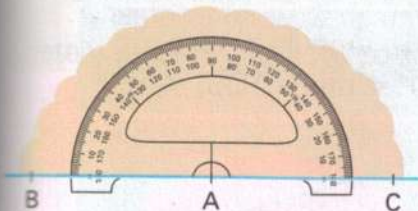
ângulo de uma volta

Usando um transferidor, podemos determinar as medidas, em graus, dos ângulos.

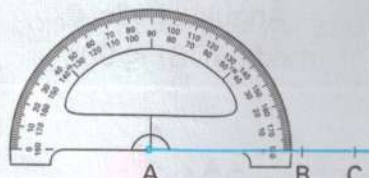
ângulo de meia-volta

ângulo nulo

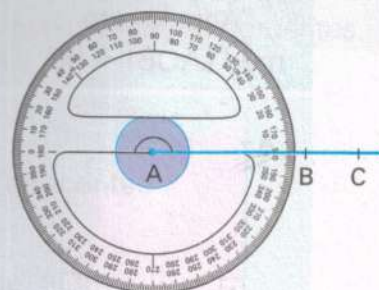
ângulo de uma volta



$$\text{med}(\widehat{BAC}) = 180^\circ$$



$$\text{med}(\widehat{BAC}) = 0^\circ$$



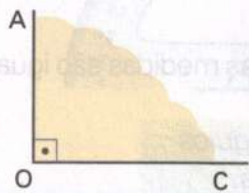
$$\text{med}(\widehat{BAC}) = 360^\circ$$

Um ângulo pode ser:

✓ **reto**

Um ângulo é denominado ângulo reto quando a sua medida vale metade da medida do ângulo de meia-volta, ou seja, 90° .

Utilizamos o símbolo \square para destacar um ângulo reto.



$\hat{A}OC$ é um ângulo reto
med ($\hat{A}OC$) = 90°

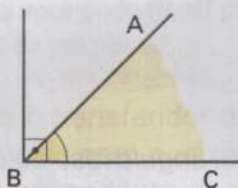


Carlos Goldgrub/Reflexo

Observe na sua sala de aula alguns dos ângulos retos que você pode identificar.

✓ **agudo**

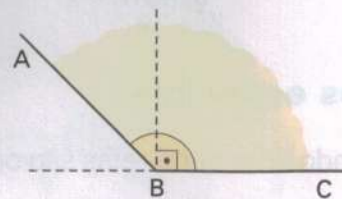
Denominamos ângulo agudo todo ângulo cuja medida é menor que a medida de um ângulo reto.



med ($\hat{A}BC$) < 90°
 $\hat{A}BC$ é um ângulo agudo

✓ **obtuso**

Denominamos ângulo obtuso todo ângulo cuja medida é maior que a medida de um ângulo reto e menor que a medida de um ângulo de meia-volta.



med ($\hat{A}BC$) > 90° e med ($\hat{A}BC$) < 180°
 $\hat{A}BC$ é um ângulo obtuso

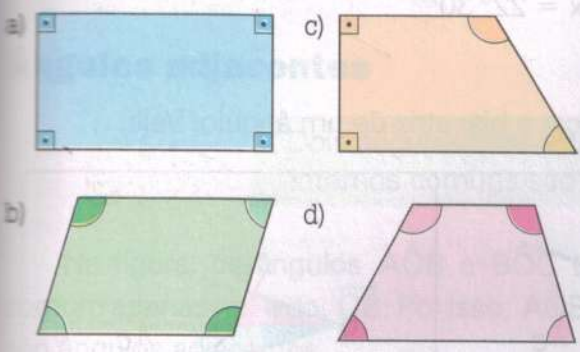
Veja, no quadro abaixo, os tipos de ângulos estudados:

<p>Ângulo nulo med ($\hat{A}OB$) = 0°</p>	<p>Ângulo de meia-volta ou raso med ($\hat{A}OB$) = 180°</p>	<p>Ângulo de uma volta med ($\hat{A}OB$) = 360°</p>
<p>Ângulo reto med ($\hat{A}OB$) = 90°</p>	<p>Ângulo agudo med ($\hat{A}OB$) < 90°</p>	<p>Ângulo obtuso $90^\circ <$ med ($\hat{A}OB$) < 180°</p>

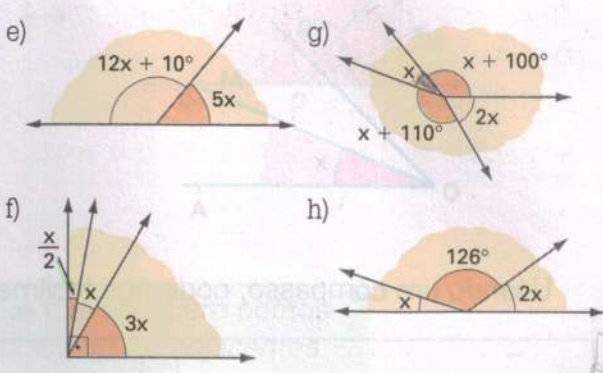
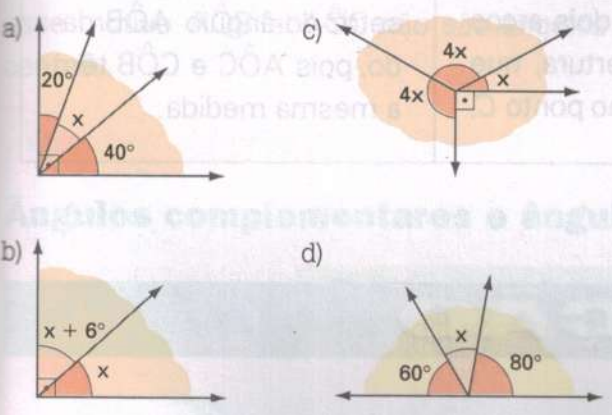
FIXAÇÃO

1 Você tem um esquadro? Que tipos de ângulos você encontra no seu esquadro?

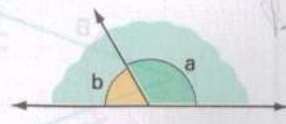
2 Que tipos de ângulos você encontra em cada figura?



3 Vamos calcular, em graus, a medida x indicada nas figuras:

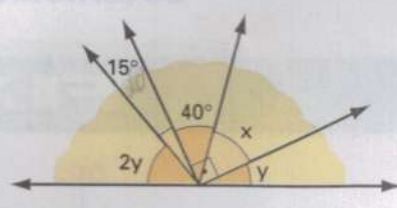


4 Na figura, sabemos que $a = 17x - 16$ e $b = 7x + 4$. Determine, em graus, as medidas a e b .



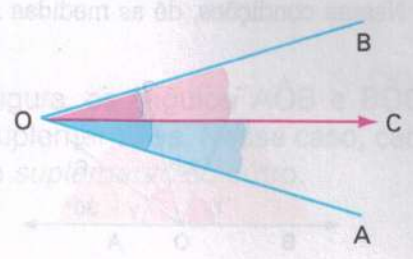
5 A partir de um ponto O , traçam-se quatro semi-retas que formam, em torno do ponto O , quatro ângulos sem pontos internos comuns. As medidas desses ângulos são expressas por $(2x + 20)^\circ$, $(x + 40)^\circ$, $(2x - 50)^\circ$ e $(3x - 90)^\circ$. Determine as medidas desses quatro ângulos.

6 Determine, em graus, as medidas x e y indicadas na figura abaixo.



Bissetriz de um ângulo

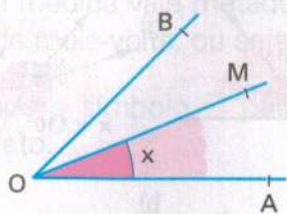
Chama-se *bissetriz* de um ângulo a semi-reta com origem no vértice do ângulo e que determina, com os lados do ângulo, dois ângulos, sem pontos internos comuns, congruentes.



\widehat{AOC} e \widehat{COB} são adjacentes
 $\widehat{AOC} \cong \widehat{COB}$
 \overrightarrow{OC} é a bissetriz de \widehat{AOB}

Observe, agora:

Na figura seguinte, \overrightarrow{OM} é a bissetriz do ângulo $\hat{A}OB$. Se esse ângulo mede 45° , qual é a medida x indicada na figura?



$$x = \frac{45^\circ}{2}$$

$$x = 22^\circ 30'$$

Usando um compasso, podemos facilmente traçar a bissetriz de um ângulo. Veja:

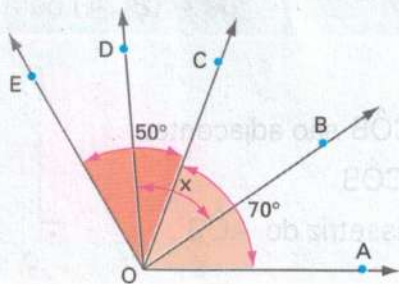
<p>Com centro no vértice O, traçamos um arco com raio qualquer e determinamos os pontos A e B.</p>	<p>Com centro nos pontos A e B, traçamos dois arcos de mesma abertura, que se encontram no ponto C.</p>	<p>A semi-reta \overrightarrow{OC} é a bissetriz do ângulo $\hat{A}OB$ dado, pois $\hat{A}OC$ e $\hat{C}OB$ têm a mesma medida.</p>
---	--	---

FIXAÇÃO

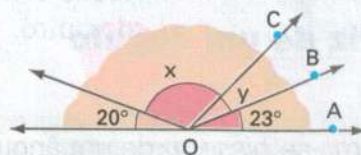
1 Usando um transferidor, construa os ângulos abaixo. A seguir, com o compasso, trace a bissetriz destes ângulos:

- a) 75° b) 68° c) 130° d) 155°

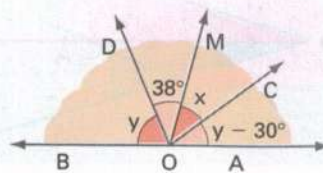
2 Na figura abaixo, \overrightarrow{OB} é bissetriz do ângulo $\hat{A}OC$ e \overrightarrow{OD} é bissetriz do ângulo $\hat{C}OE$. Determine a medida x indicada.



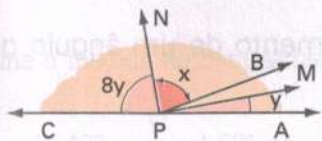
3 Sabendo-se que \overrightarrow{OB} é a bissetriz do ângulo $\hat{A}OC$, quais as medidas x e y indicadas na figura?



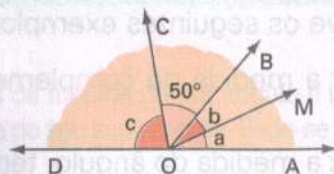
4 Na figura seguinte, \overrightarrow{OM} é a bissetriz do ângulo $\hat{C}OD$. Nessas condições, dê as medidas x e y indicadas.



5 Sabendo que \overrightarrow{PM} é bissetriz do ângulo $\hat{A}PB$ e \overrightarrow{PN} é a bissetriz do ângulo $\hat{B}PC$, determine a medida x indicada na figura.



6 Sabendo que \overrightarrow{OM} é bissetriz do ângulo $\hat{A}OB$, escreva uma expressão algébrica que indique a medida c .

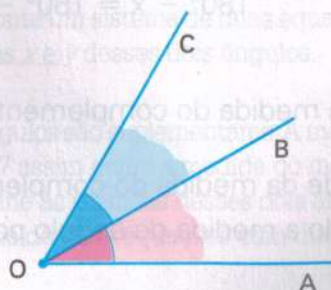


Ângulos adjacentes

Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns são chamados *ângulos adjacentes*.

Na figura, os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ têm em comum apenas um lado: \overrightarrow{OB} . Por isso, $\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são ângulos adjacentes.

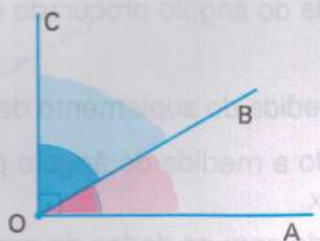
Observe que os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{A}OC$ têm um lado comum: \overrightarrow{OA} , logo são ângulos consecutivos. No entanto, eles têm pontos internos comuns, por esse motivo $\hat{A}OB$ e $\hat{A}OC$ não são ângulos adjacentes.



Ângulos complementares e ângulos suplementares

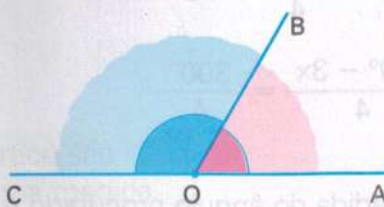
Dois ângulos adjacentes são *complementares* quando a soma de suas medidas é igual a 90° .

Na figura, os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são adjacentes complementares. Nesse caso, cada ângulo é chamado *complemento* do outro.



Dois ângulos adjacentes são *suplementares* quando a soma de suas medidas é igual a 180° .

Na figura, os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são adjacentes suplementares. Nesse caso, cada ângulo é chamado *suplemento* do outro.



Vejam como devemos proceder para calcular as medidas do complemento e do suplemento de um ângulo.

Observe os seguintes exemplos:

1. Calcular a medida do complemento e a medida do suplemento de um ângulo que mede $57^\circ 30'$.

Seja x a medida do ângulo, temos $x = 57^\circ 30'$.

A medida do complemento desse ângulo será:

$$90^\circ - x = 90^\circ - 57^\circ 30' = 89^\circ 60' - 57^\circ 30' = 32^\circ 30'$$

A medida do suplemento desse ângulo será:

$$180^\circ - x = 180^\circ - 57^\circ 30' = 179^\circ 60' - 57^\circ 30' = 122^\circ 30'$$

Então, a medida do complemento é $32^\circ 30'$ e a do suplemento é $122^\circ 30'$.

2. A metade da medida do complemento de um ângulo é 35° . Qual é a medida desse ângulo? Indicando a medida do ângulo por x , a medida do complemento do ângulo será indicada por $90^\circ - x$.

De acordo com os dados do problema, temos a seguinte equação:

$$\frac{1}{2}(90^\circ - x) = 35^\circ$$

$$\frac{90^\circ}{2} - \frac{x}{2} = 35^\circ$$

$$\frac{90^\circ - x}{2} = \frac{70^\circ}{2}$$

$$90^\circ - x = 70^\circ$$

$$-x = 70^\circ - 90^\circ$$

$$-x = -20^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

A medida do ângulo procurado é 20° .

3. $\frac{3}{4}$ da medida do suplemento de um ângulo vale 75° . Qual é a medida desse ângulo?

Indicando a medida do ângulo por x , a medida do suplemento do ângulo será indicada por $180^\circ - x$.

De acordo com os dados do problema, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{3}{4}(180^\circ - x) = 75^\circ$$

$$\frac{540^\circ}{4} - \frac{3}{4}x = 75^\circ$$

$$\frac{540^\circ - 3x}{4} = \frac{300^\circ}{4}$$

$$540^\circ - 3x = 300^\circ$$

$$-3x = -240^\circ$$

$$3x = 240^\circ$$

$$x = \frac{240^\circ}{3}$$

$$x = 80^\circ$$

A medida do ângulo procurado é 80° .

FIXAÇÃO

1 Determine a medida do complemento de um ângulo de:

- a) 35° b) 42° c) $22^\circ 30'$ d) $69^\circ 40'$

2 Determine a medida do suplemento de um ângulo de:

- a) 75° b) $82^\circ 30'$ c) 135° d) $129^\circ 50'$

3 A medida de um ângulo é igual à medida do seu complemento aumentada de 70° . Qual é a medida desse ângulo?

4 A medida de um ângulo é igual à terça parte da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

5 Sabendo que a medida de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do seu complemento, determine a medida desse ângulo.

6 O triplo da medida de um ângulo é igual ao dobro da medida do seu suplemento. Pede-se a medida desse ângulo.

7 A medida do suplemento de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do complemento desse mesmo ângulo. Quanto mede esse ângulo?

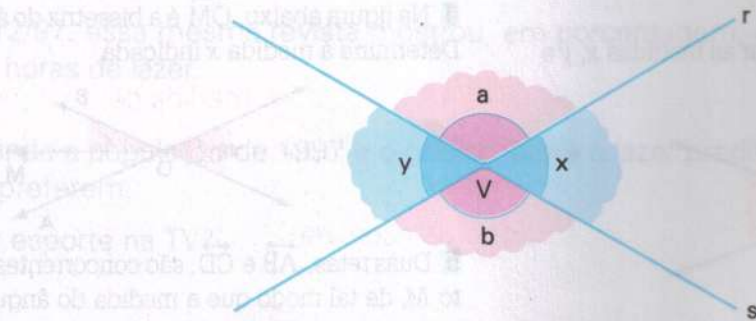
8 Dois ângulos são complementares e suas medidas são x e y . Sabe-se, também, que o dobro da medida do menor ângulo é igual à medida do maior, aumentada de 30° . Monte um sistema de duas equações e calcule as medidas x e y desses dois ângulos.

9 Dois ângulos são suplementares. A medida do maior está para 7 assim como a medida do menor está para 5. Determine as medidas desses dois ângulos usando um sistema de duas equações com duas incógnitas.

Ângulos opostos pelo vértice

Consideremos duas retas r e s que se interceptam em um ponto V , conforme a figura abaixo. Nela aparecem destacados 4 ângulos de medidas a , x , b e y .

Os ângulos de medidas x e y são chamados *opostos pelo vértice* (o.p.v.). Também são opostos pelo vértice os ângulos de medidas a e b .

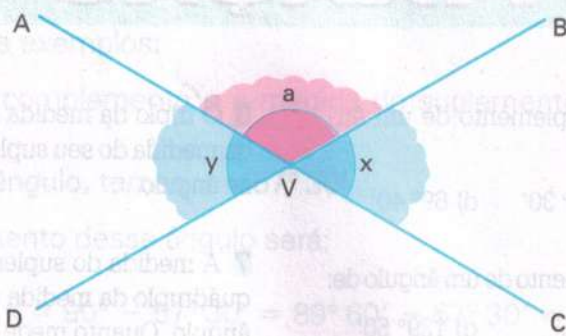


Você nota que os lados do ângulo de medida a são formados pelos prolongamentos dos lados do ângulo de medida b .

Se você usar um transferidor, verá que:

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Faremos uma demonstração dessa afirmação. Veja:



Pela figura, você observa que:

$$x + a = 180^\circ$$

$$y + a = 180^\circ$$

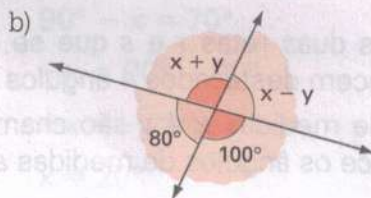
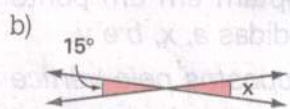
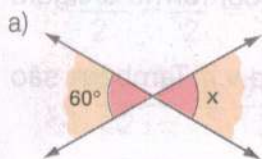
Daí, temos: $x + a = y + a$.

Cancelando a nos dois membros, obtemos: $x = y$.

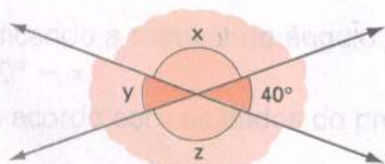
Demonstramos, assim, que dois ângulos opostos pelo vértice sempre têm a mesma medida.

FIXAÇÃO

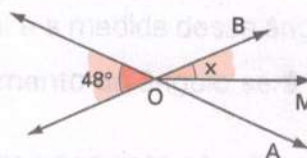
1 Observando cada figura, dê a medida x indicada:



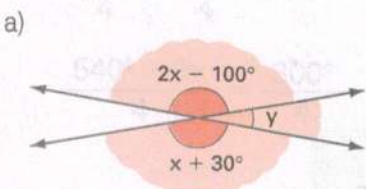
2 Na figura abaixo, vamos calcular as medidas x , y e z indicadas:



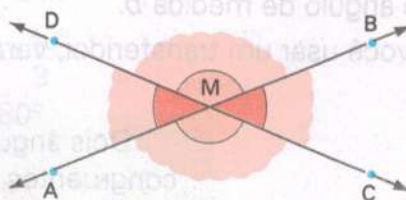
4 Na figura abaixo, \vec{OM} é a bissetriz do ângulo $\hat{A}OB$. Determine a medida x indicada.



3 Vamos determinar as medidas x e y indicadas em cada figura:



5 Duas retas, \vec{AB} e \vec{CD} , são concorrentes em um ponto M , de tal modo que a medida do ângulo \hat{AMD} representa a terça parte da medida do ângulo \hat{AMC} . Determine as medidas dos quatro ângulos consecutivos formados com vértice no ponto M , indicados na figura.



JORNAIS & REVISTAS

Em 8/9/97, a revista *Veja* publicou um gráfico mostrando a população dos 4 países mais populosos do mundo e a previsão para 2050.

Planeta superlotado

A Índia deve passar a China como país mais populoso do mundo dentro de cinquenta anos. Confira as maiores populações hoje e as previstas para 2050

1997



2050



O lazer predileto dos chineses



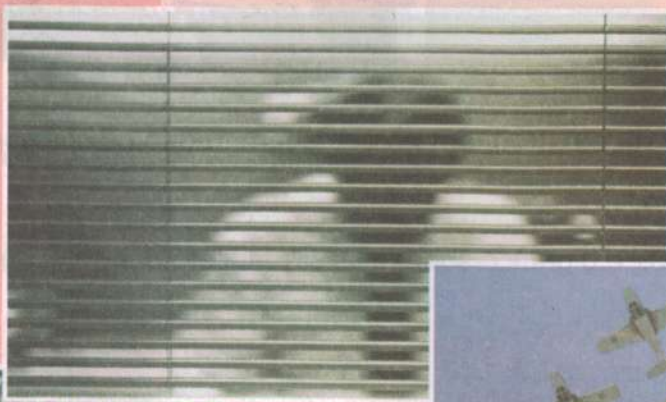
Fonte: Gallup

Em 10/12/97, essa mesma revista mostrou, em porcentagem, o que os chineses gostam de fazer nas horas de lazer.

1. Considerando a população de 1997 e o gráfico sobre o lazer predileto dos chineses, quantos chineses preferem:
 - a) assistir esporte na TV?
 - b) ler?
 - c) viajar?
2. Você observa que as estimativas feitas para o ano 2050 projetam uma população para a Índia maior que a da China. Considerando esse período de 53 anos (1997 a 2050), responda:
 - a) Quanto a população da China vai crescer nesse período?
 - b) E a população da Índia, quanto vai crescer?
 - c) Quantas vezes a população da Índia vai crescer a mais que a da China?

8

Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal



Observe ao seu redor quantas coisas nos dão a idéia de retas paralelas.





Em 300 a.C., aproximadamente, o grande matemático grego Euclides organizou a Matemática conhecida até então e escreveu em 13 volumes uma obra chamada *Os Elementos*. Nessa obra, que influenciou todo o pensamento matemático posterior, Euclides dá ênfase ao estudo da Geometria, baseado em *postulados e teoremas*.

Um postulado é uma proposição que é aceita como verdadeira, não podendo ser demonstrada.

Um teorema é uma proposição que deve ser demonstrada a partir dos postulados e de outros teoremas.

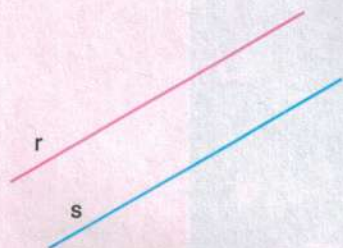
A Geometria que hoje aprendemos é chamada de *Geometria Euclidiana*, em homenagem ao grande matemático que lançou suas bases.

Vamos conhecer, então, um dos postulados enunciados por Euclides, o *postulado das paralelas*, muito importante na análise dos ângulos formados por duas paralelas e uma transversal, que estudaremos nesta Unidade.



Retas paralelas

Duas retas coplanares (estão no mesmo plano) que não possuem ponto comum são denominadas *retas paralelas*.



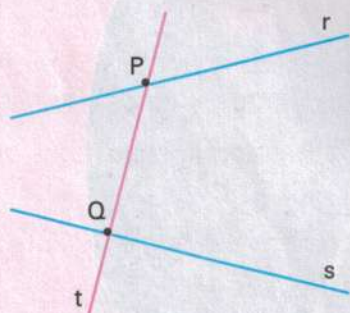
As retas r e s não têm pontos comuns ($r \cap s \neq \emptyset$). Dizemos que as retas r e s são paralelas. Para representar o paralelismo, utilizamos o símbolo $//$.

$$\left. \begin{array}{l} r \text{ e } s \text{ coplanares} \\ r \cap s = \emptyset \end{array} \right\} \Leftrightarrow r // s$$

paralela a

Reta transversal

Dadas duas retas r e s num mesmo plano, traçamos uma reta t , tal que t intercepta as retas r e s .

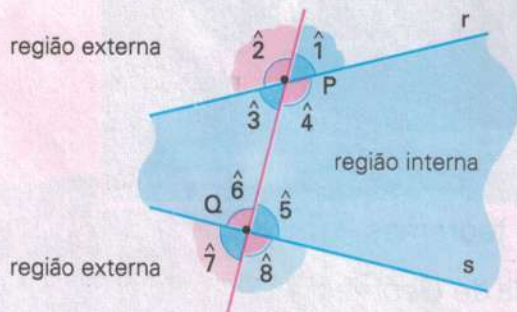


$$\begin{aligned} t \cap r &= \{P\} \\ t \cap s &= \{Q\} \end{aligned}$$

A essa reta t , concorrente com r em P e concorrente com s em Q , damos o nome de *reta transversal a r e s* .

Observe que a reta transversal t forma com as retas r e s oito ângulos: quatro com vértices em P e quatro com vértices em Q .

Para facilitar a visualização, vamos indicar esses oito ângulos numerando-os:

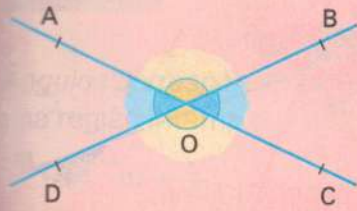


- ✓ ângulos com vértices em P : $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$
- ✓ ângulos com vértices em Q : $\hat{5}$, $\hat{6}$, $\hat{7}$, $\hat{8}$

Estabelecendo relações

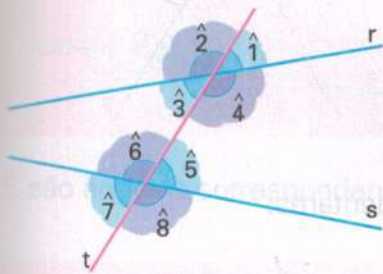
Podemos estabelecer algumas relações importantes entre esses oito ângulos determinados por duas retas de um mesmo plano com uma transversal. Dentre essas relações, algumas já são conhecidas.

Ângulos opostos pelo vértice



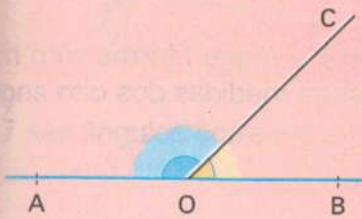
Recordando:

- ❖ Dois ângulos são opostos pelo vértice (o.p.v.) quando os lados de um são formados pelos prolongamentos dos lados do outro ângulo.
- ❖ Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
- ❖ $\hat{A}OB$ e $\hat{D}OC$ são o.p.v. $\Rightarrow \hat{A}OB \cong \hat{D}OC$
- ❖ $\hat{A}OD$ e $\hat{B}OC$ são o.p.v. $\Rightarrow \hat{A}OD \cong \hat{B}OC$



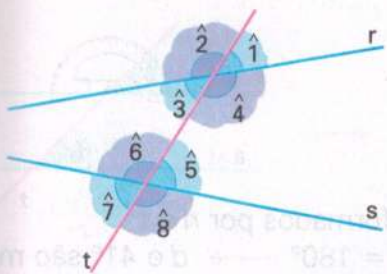
- ✓ $\hat{1}$ e $\hat{3}$ são o.p.v. $\Rightarrow \hat{1} \cong \hat{3} \Rightarrow \text{med}(\hat{1}) = \text{med}(\hat{3})$
- ✓ $\hat{2}$ e $\hat{4}$ são o.p.v. $\Rightarrow \hat{2} \cong \hat{4} \Rightarrow \text{med}(\hat{2}) = \text{med}(\hat{4})$
- ✓ $\hat{5}$ e $\hat{7}$ são o.p.v. $\Rightarrow \hat{5} \cong \hat{7} \Rightarrow \text{med}(\hat{5}) = \text{med}(\hat{7})$
- ✓ $\hat{6}$ e $\hat{8}$ são o.p.v. $\Rightarrow \hat{6} \cong \hat{8} \Rightarrow \text{med}(\hat{6}) = \text{med}(\hat{8})$

Ângulos adjacentes suplementares



Recordando:

- ❖ Dois ângulos são adjacentes quando possuem um lado comum e não possuem pontos internos comuns.
- ❖ Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° .
- ❖ $\hat{A}OC$ e $\hat{C}OB$ são ângulos adjacentes suplementares.
 $\text{med}(\hat{A}OC) + \text{med}(\hat{C}OB) = 180^\circ$



- ✓ $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{1}) + \text{med}(\hat{2}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{2}$ e $\hat{3}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{2}) + \text{med}(\hat{3}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{3}$ e $\hat{4}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{3}) + \text{med}(\hat{4}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{4}$ e $\hat{1}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{4}) + \text{med}(\hat{1}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{5}$ e $\hat{6}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{5}) + \text{med}(\hat{6}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{6}$ e $\hat{7}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{6}) + \text{med}(\hat{7}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{7}$ e $\hat{8}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{7}) + \text{med}(\hat{8}) = 180^\circ$
- ✓ $\hat{8}$ e $\hat{5}$ são ângulos adjacentes suplementares
 $\text{med}(\hat{8}) + \text{med}(\hat{5}) = 180^\circ$

Essas relações podem ser utilizadas para a resolução de problemas, tais como:

1. Na figura ao lado, vamos determinar os valores de x , y e z .

- ✓ y e 50° são medidas de ângulos adjacentes suplementares:

$$y + 50^\circ = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 50^\circ \Rightarrow y = 130^\circ$$

- ✓ y e $2x + 15^\circ$ são medidas de ângulos o.p.v.:

$$2x + 15^\circ = y$$

$$2x + 15^\circ = 130^\circ$$

$$2x = 130^\circ - 15^\circ$$

$$2x = 115^\circ$$

$$x = \frac{115^\circ}{2} \Rightarrow x = 57^\circ 30'$$

- ✓ $\frac{z}{2} + 10^\circ$ e 38° são medidas de ângulos adjacentes suplementares:

$$\frac{z}{2} + 10^\circ + 38^\circ = 180^\circ$$

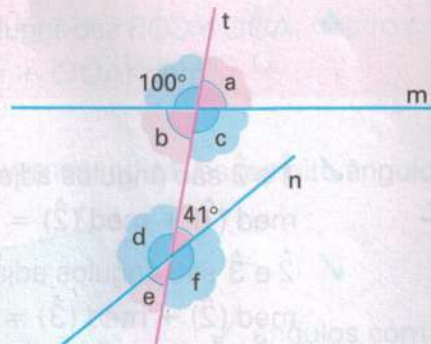
$$\frac{z + 20^\circ + 76^\circ}{2} = \frac{360^\circ}{2}$$

$$z + 96^\circ = 360^\circ$$

$$z = 360^\circ - 96^\circ \Rightarrow z = 264^\circ$$

2. Sabendo que duas retas m e n são cortadas por uma transversal t , e que t forma com m um ângulo de 100° e com n um ângulo de 41° , vamos determinar as medidas dos oito ângulos formados pelas retas m , n e t .

Representação gráfica:



- ✓ ângulos formados por m e t :

$a + 100^\circ = 180^\circ \rightarrow a$ e 100° são medidas de ângulos adjacentes suplementares.

$$a = 80^\circ$$

$b = a \rightarrow$ medidas de ângulos o.p.v.

$$b = 80^\circ$$

$c = 100^\circ \rightarrow$ medidas de ângulos o.p.v.

- ✓ ângulos formados por n e t :

$d + 41^\circ = 180^\circ \rightarrow d$ e 41° são medidas de ângulos adjacentes suplementares.

$$d = 139^\circ$$

$e = 41^\circ \rightarrow$ medidas de ângulos o.p.v.

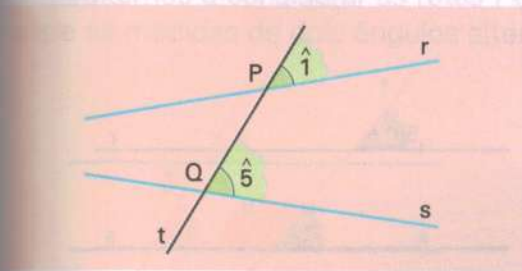
$f = d \rightarrow$ medidas de ângulos o.p.v.

$$f = 139^\circ$$

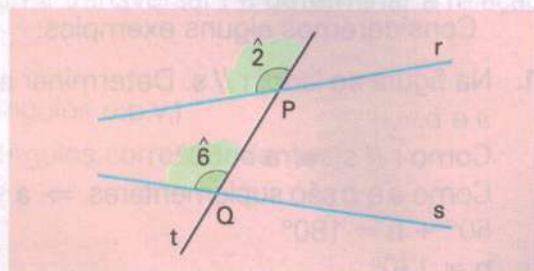
Vamos agora estabelecer outras relações entre os ângulos quando as retas cortadas pela transversal forem paralelas entre si.

ÂNGULOS CORRESPONDENTES

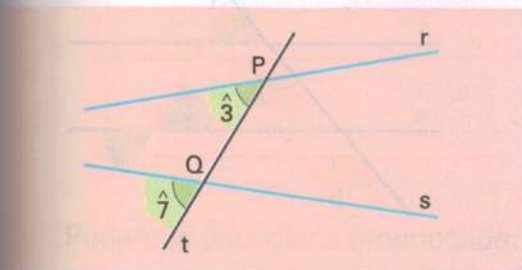
Ângulos correspondentes são pares de ângulos situados em um mesmo lado da transversal e um na região interna e o outro na região externa às retas r e s .



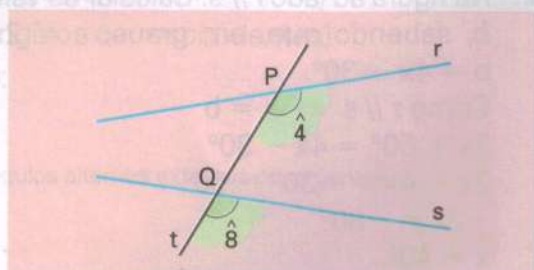
$\hat{1}$ e $\hat{5}$ são ângulos correspondentes.



$\hat{2}$ e $\hat{6}$ são ângulos correspondentes.

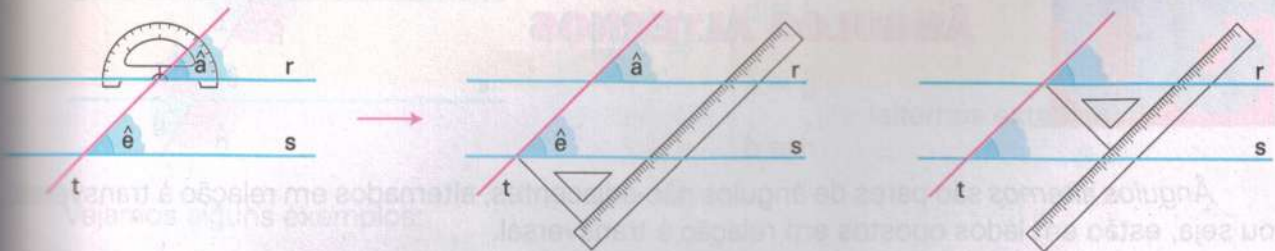


$\hat{3}$ e $\hat{7}$ são ângulos correspondentes.



$\hat{4}$ e $\hat{8}$ são ângulos correspondentes.

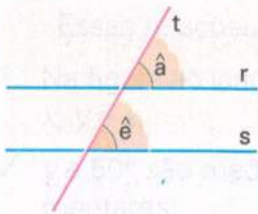
Podemos verificar experimentalmente que, se dois ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas r e s serão paralelas. Para isso, vamos tomar os ângulos correspondentes \hat{a} e \hat{e} :



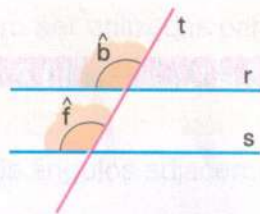
$$\hat{a} \cong \hat{e} \rightarrow r \parallel s$$

Podemos então enunciar a propriedade:

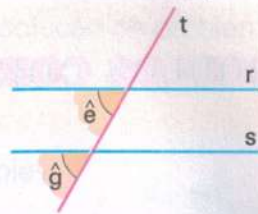
Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos correspondentes congruentes.



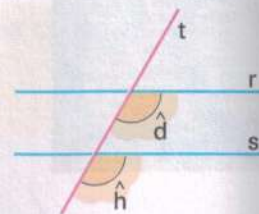
\hat{a} e \hat{e} correspondentes
 $r \parallel s \Leftrightarrow \hat{a} \cong \hat{e}$



\hat{b} e \hat{f} correspondentes
 $r \parallel s \Leftrightarrow \hat{b} \cong \hat{f}$



\hat{e} e \hat{g} correspondentes
 $r \parallel s \Leftrightarrow \hat{e} \cong \hat{g}$



\hat{d} e \hat{h} correspondentes
 $r \parallel s \Leftrightarrow \hat{d} \cong \hat{h}$

Consideremos alguns exemplos:

1. Na figura ao lado, $r \parallel s$. Determinar as medidas a e b .

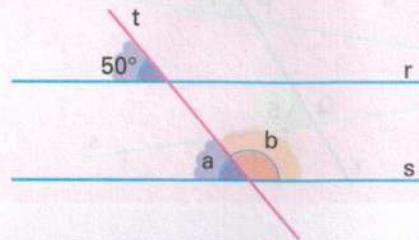
Como $r \parallel s \Rightarrow a = 50^\circ$

Como a e b são suplementares $\Rightarrow a + b = 180^\circ$

$$50^\circ + b = 180^\circ$$

$$b = 130^\circ$$

Então, $a = 50^\circ$ e $b = 130^\circ$.



2. Na figura ao lado $r \parallel s$. Calcular os valores de a e b , sabendo que, em graus, $a = 2x + 50^\circ$ e $b = 4x - 30^\circ$.

Como $r \parallel s \Rightarrow a = b$

$$2x + 50^\circ = 4x - 30^\circ$$

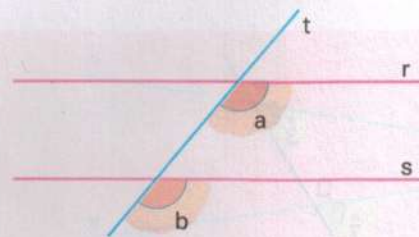
$$2x - 4x = -30^\circ - 50^\circ$$

$$-2x = -80^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

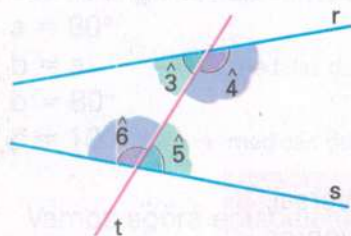
Como $a = 2x + 50^\circ \Rightarrow a = 2(40^\circ) + 50^\circ = 80^\circ + 50^\circ = 130^\circ$

Então, $a = 130^\circ$ e $b = 130^\circ$.



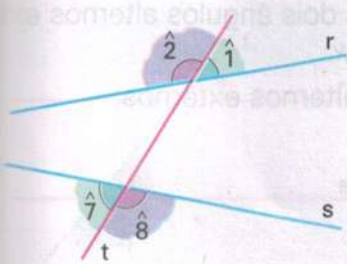
ÂNGULOS ALTERNOS

Ângulos alternos são pares de ângulos não-adjacentes, alternados em relação à transversal, ou seja, estão em lados opostos em relação à transversal.



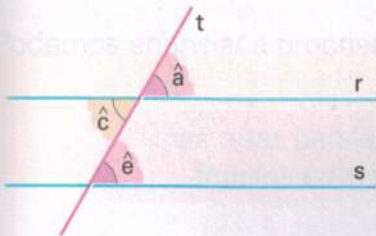
✓ $\hat{3}$ e $\hat{5}$ estão em lados opostos em relação à transversal t na região determinada entre as retas r e s (região interna).
 $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são ângulos alternos internos.

✓ $\hat{4}$ e $\hat{6}$ estão em lados opostos em relação à transversal t e na região determinada entre as retas r e s .
 $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos alternos internos.



- ✓ $\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão em lados opostos em relação à transversal t e na região externa às retas r e s .
 $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos alternos externos.
- ✓ $\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão em lados opostos em relação à transversal t e na região externa às retas r e s .
 $\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos alternos externos.

Voltemos a considerar as retas r e s , paralelas, e uma transversal t e determinar a relação entre as medidas de dois ângulos alternos.

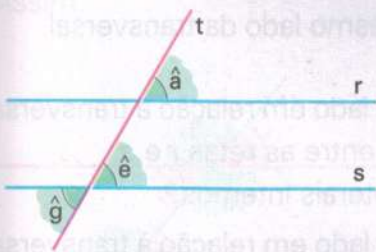


- ① $\hat{c} \cong \hat{a}$ (ângulos o.p.v.)
- ② $\hat{a} \cong \hat{e}$ (ângulos correspondentes)

De ① e ②:

$$\hat{c} \cong \hat{e}$$

→ ângulos alternos internos congruentes



- ③ $\hat{g} \cong \hat{e}$ (ângulos o.p.v.)
- ④ $\hat{e} \cong \hat{a}$ (ângulos correspondentes)

De ③ e ④:

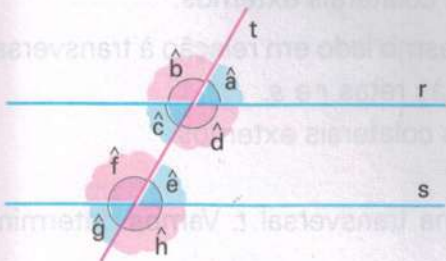
$$\hat{g} \cong \hat{a}$$

→ ângulos alternos externos congruentes

Podemos enunciar a propriedade:

Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam **ângulos alternos (internos ou externos) congruentes**.

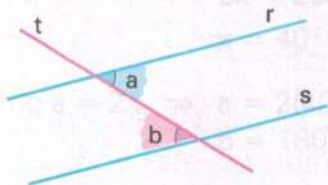
Assim:



$$r // s \Rightarrow \begin{cases} \hat{c} \cong \hat{e} \\ \hat{d} \cong \hat{f} \\ \hat{a} \cong \hat{g} \\ \hat{b} \cong \hat{h} \end{cases} \begin{array}{l} \text{(alternos internos)} \\ \text{(alternos externos)} \end{array}$$

Vejam alguns exemplos:

1. Na figura abaixo, $a = 3x - 50^\circ$ e $b = x + 14^\circ$. Qual a medida, em graus, de a e b sendo $r // s$?



Como $r // s \Rightarrow a = b$ (alternos internos)

$$3x - 50^\circ = x + 14^\circ$$

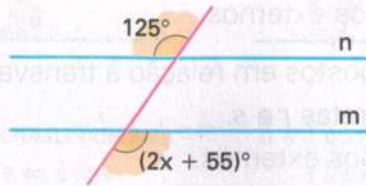
$$3x - x = 14^\circ + 50^\circ$$

$$2x = 64^\circ \Rightarrow x = 32^\circ$$

$$a = 3 \cdot (32^\circ) - 50^\circ = 96^\circ - 50^\circ = 46^\circ$$

$$\text{Então, } a = 46^\circ \text{ e } b = 46^\circ.$$

2. Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam dois ângulos alternos externos cujas medidas são 125° e $2x + 55^\circ$. Determinar o valor de x .



Como 125° e $2x + 55^\circ$ são alternos externos:

$$2x + 55^\circ = 125^\circ$$

$$2x = 125^\circ - 55^\circ$$

$$2x = 70^\circ$$

$$x = 35^\circ$$

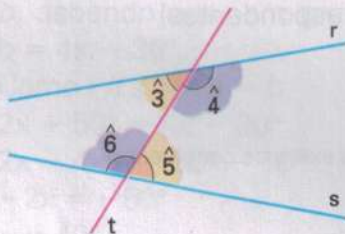
$$m \parallel n$$

Então, $x = 35^\circ$.



ÂNGULOS COLATERAIS

Ângulos colaterais são pares de ângulos localizados do mesmo lado da transversal.

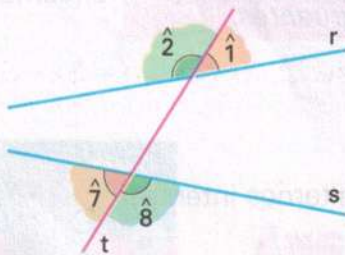


- ✓ $\hat{3}$ e $\hat{6}$ estão no mesmo lado em relação à transversal t e na região determinada entre as retas r e s .

$\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos colaterais internos.

- ✓ $\hat{4}$ e $\hat{5}$ estão no mesmo lado em relação à transversal t e na região determinada entre as retas r e s .

$\hat{4}$ e $\hat{5}$ são ângulos colaterais internos.



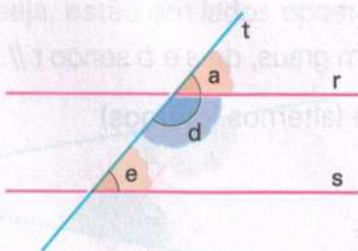
- ✓ $\hat{1}$ e $\hat{8}$ estão no mesmo lado em relação à transversal t e na região externa às retas r e s .

$\hat{1}$ e $\hat{8}$ são ângulos colaterais externos.

- ✓ $\hat{2}$ e $\hat{7}$ estão no mesmo lado em relação à transversal t e na região externa às retas r e s .

$\hat{2}$ e $\hat{7}$ são ângulos colaterais externos.

Voltemos a considerar as retas r e s , paralelas, e uma transversal t . Vamos determinar a relação entre as medidas de dois ângulos colaterais.



Considerando $a = \text{med}(\hat{a})$, $d = \text{med}(\hat{d})$, $e = \text{med}(\hat{e})$:

- ① $d + a = 180^\circ$ (\hat{d} e \hat{a} são ângulos adjacentes suplementares)

- ② $a = e$ (\hat{a} e \hat{e} são ângulos correspondentes)

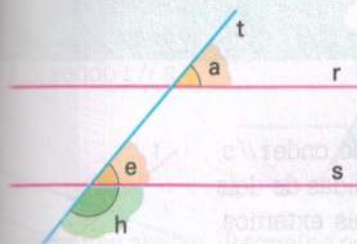
De ① e ②:

$$d + a = 180^\circ$$

$$\downarrow$$

$$d + e = 180^\circ$$

\hat{d} e \hat{e} são ângulos colaterais internos



Considerando $a = \text{med}(\hat{a})$, $e = \text{med}(\hat{e})$, $h = \text{med}(\hat{h})$:

① $h + e = 180^\circ$ (\hat{h} e \hat{e} são ângulos adjacentes suplementares)

② $e = a$ (\hat{e} e \hat{a} são ângulos correspondentes)

De ① e ②:

$$h + e = 180^\circ$$

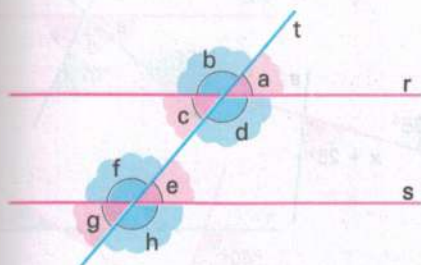
$$h + a = 180^\circ$$

\hat{h} e \hat{a} são ângulos colaterais externos

Podemos enunciar a propriedade:

Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam *ângulos colaterais (internos ou externos) suplementares*.

Assim:



$r // s \Rightarrow$

$$c + f = 180^\circ$$

$$d + e = 180^\circ$$

colaterais internos

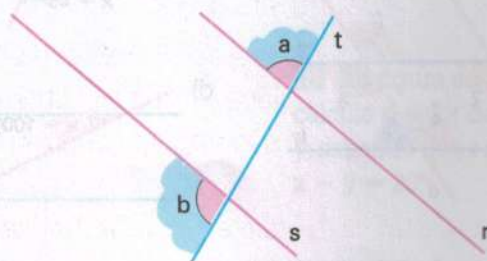
$$a + h = 180^\circ$$

$$b + g = 180^\circ$$

colaterais externos

Vamos ver um exemplo:

Na figura a seguir, $r // s$. Calcular, em graus, as medidas a e b , sendo $a = 2x$ e $b = 3x - 20^\circ$.



Como $r // s \Rightarrow a + b = 180^\circ$ (colaterais externos)

$$2x + 3x - 20^\circ = 180^\circ$$

$$5x = 180^\circ + 20^\circ$$

$$5x = 200^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

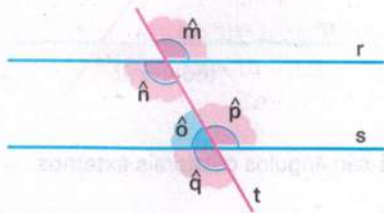
Como $a = 2x \Rightarrow a = 2(40^\circ) = 80^\circ$

$$b = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

Então, $a = 80^\circ$ e $b = 100^\circ$.

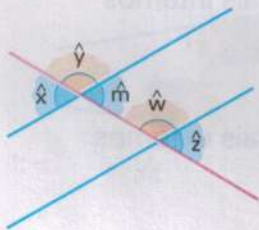
FIXAÇÃO

1 Na figura abaixo, identifique um par de ângulos.



- a) o.p.v.
- b) adjacentes suplementares
- c) correspondentes
- d) alternos internos
- e) alternos externos
- f) colaterais internos

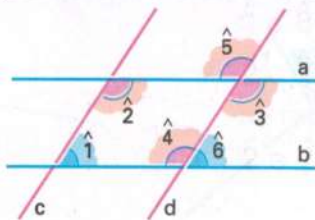
2 Na figura abaixo, qual o nome dos seguintes pares de ângulos?



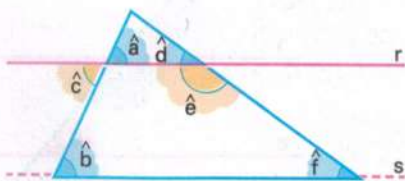
- a) \hat{m} e \hat{z}
- b) \hat{m} e \hat{w}
- c) \hat{y} e \hat{z}
- d) \hat{x} e \hat{z}
- e) \hat{x} e \hat{y}
- f) \hat{x} e \hat{m}

3 Na figura abaixo, $a \parallel b$ e $c \parallel d$. Nessas condições, destaque os pares de ângulos:

- a) correspondentes
- b) alternos internos
- c) colaterais internos
- d) opostos pelo vértice
- e) adjacentes suplementares

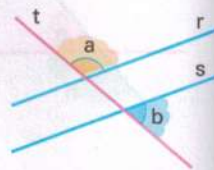


4 Na figura abaixo, $r \parallel s$. Dê o nome dos pares de ângulos:



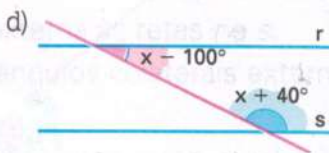
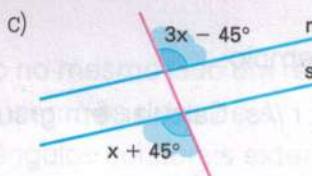
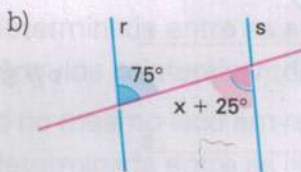
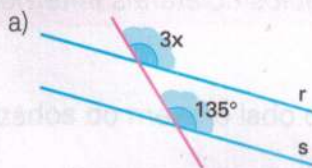
- a) \hat{a} e \hat{c}
- b) \hat{d} e \hat{e}
- c) \hat{a} e \hat{b}
- d) \hat{d} e \hat{f}
- e) \hat{b} e \hat{c}
- f) \hat{e} e \hat{f}

5 Na figura ao lado, onde $r \parallel s$, a e b são as medidas de dois ângulos colaterais externos. Nessas condições, responda:

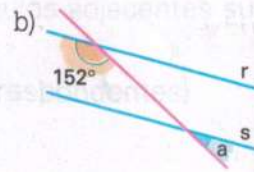
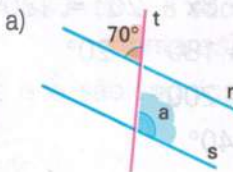


- a) Qual a relação entre a e b ?
- b) Qual o valor de b se $a = 115^\circ$?
- c) Qual a posição entre as retas r e t para que tenhamos $a = b$?

6 Nas figuras abaixo, determine o valor de x sabendo que $r \parallel s$.

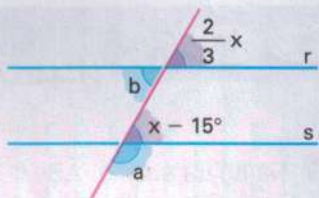


7 Nas figuras abaixo, determine o valor de a , sendo $r \parallel s$.

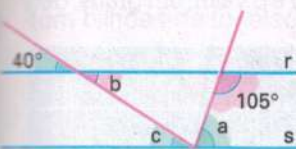
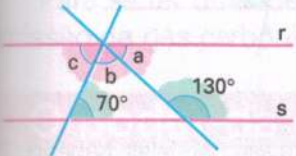
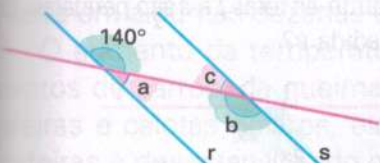
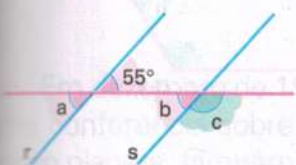


8 Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos correspondentes representados, em graus, por $5x + 20^\circ$ e $2x + 50^\circ$. Determine o valor de x .

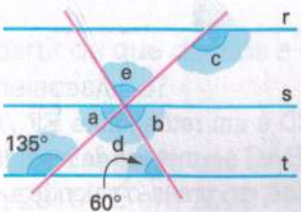
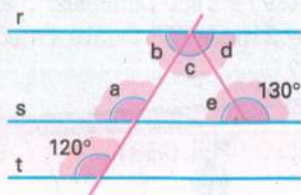
10 Na figura ao lado, determine os valores de a e b , sendo $r \parallel s$.



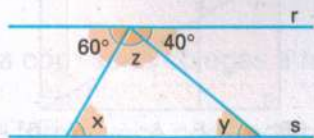
11 Nas figuras abaixo, determine os valores de a , b e c , sendo $r \parallel s$.



12 Nas figuras abaixo $r \parallel s \parallel t$. Determine as medidas desconhecidas indicadas.



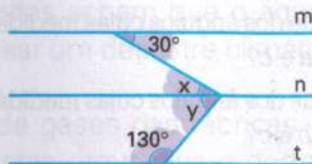
12 Na figura abaixo, $r \parallel s$. Calcule o valor de $x + y + z$.



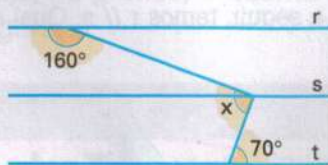
13 Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos expressos em graus por $3x - 50^\circ$ e $2x - 10^\circ$. Determine as medidas desses ângulos.

14 Um dos ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal mede 55° . Determine as medidas dos oito ângulos formados entre essas paralelas e a transversal.

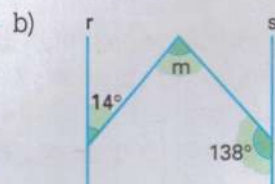
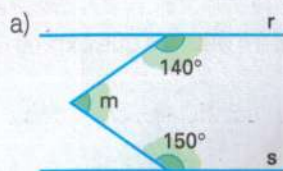
15 Sabendo que $m \parallel n \parallel t$, determine a medida de $x + y$ na figura abaixo.



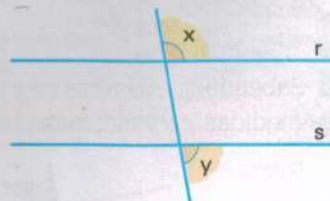
16 Na figura abaixo, $r \parallel s \parallel t$. Nessas condições, determine a medida de x .



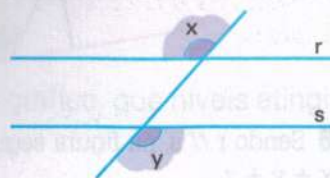
17 Nas figuras abaixo, $r \parallel s$. Determine a medida de m .



18 Na figura ao lado, calcule o valor de x e y , sabendo que $r \parallel s$ e $x - y = 20^\circ$.



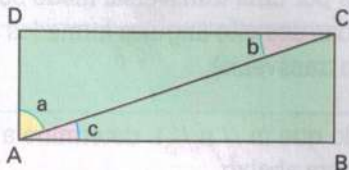
19 Na figura ao lado, a soma das medidas dos ângulos agudos é 192° . Sendo $r \parallel s$, calcule as medidas de x e y .



20 Duas retas paralelas, r e s , cortadas por uma transversal t , formam ângulos alternos internos expressos, em graus, por $2m + 30^\circ$ e $3m - 20^\circ$. Calcule m , de modo que as retas r e s sejam paralelas.

RETOMANDO o que aprendeu

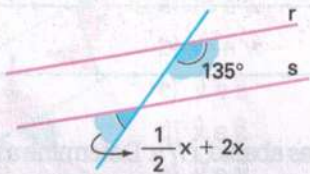
1 A figura abaixo é um retângulo no qual foi traçado o segmento \overline{AC} . Nessas condições, responda:



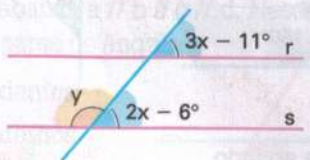
- Qual o nome dos ângulos cujas medidas estão indicadas por a e c ?
- Qual o nome dos ângulos cujas medidas estão indicadas por b e c ?

2 No exercício 1, se $a = 58^\circ$, quais as medidas de b e c ?

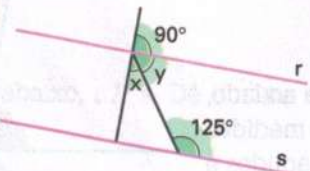
3 Na figura a seguir, temos $r \parallel s$. Qual é o valor da medida x ?



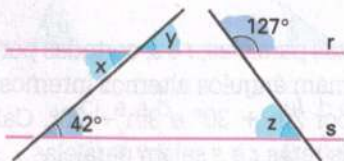
4 Na figura, temos $r \parallel s$. Qual é o número que expressa, em graus, a medida y ?



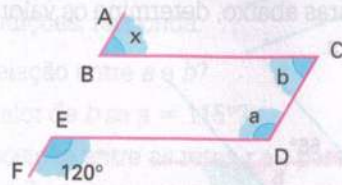
5 Sabendo que as retas r e s são paralelas, determine as medidas x e y indicadas na figura:



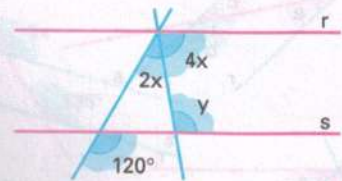
6 Sendo $r \parallel s$, na figura seguinte, calcule o valor de $x + y + z$.



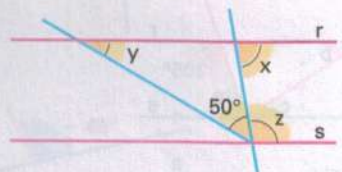
7 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$. Nessas condições, calcule os valores de x , a e b .



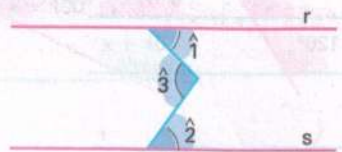
8 Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. Qual é, em graus, a medida y ?



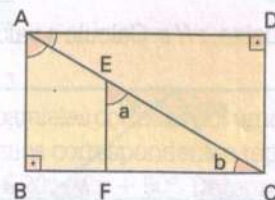
9 As retas r e s da figura são paralelas. Sabendo que $x + 2y + 2z = 340^\circ$, qual é o valor, em graus, de y ?



10 Na figura, as retas r e s são paralelas. O ângulo $\hat{1}$ mede 45° e o ângulo $\hat{2}$ mede 55° . Qual é a medida, em graus, do ângulo $\hat{3}$?



11 Na figura, $ABCD$ é um retângulo e $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$. A medida do ângulo \hat{DAC} é a metade da medida do ângulo \hat{BAC} . Determine, em graus, o valor de $a - b$.



JORNAIS & REVISTAS

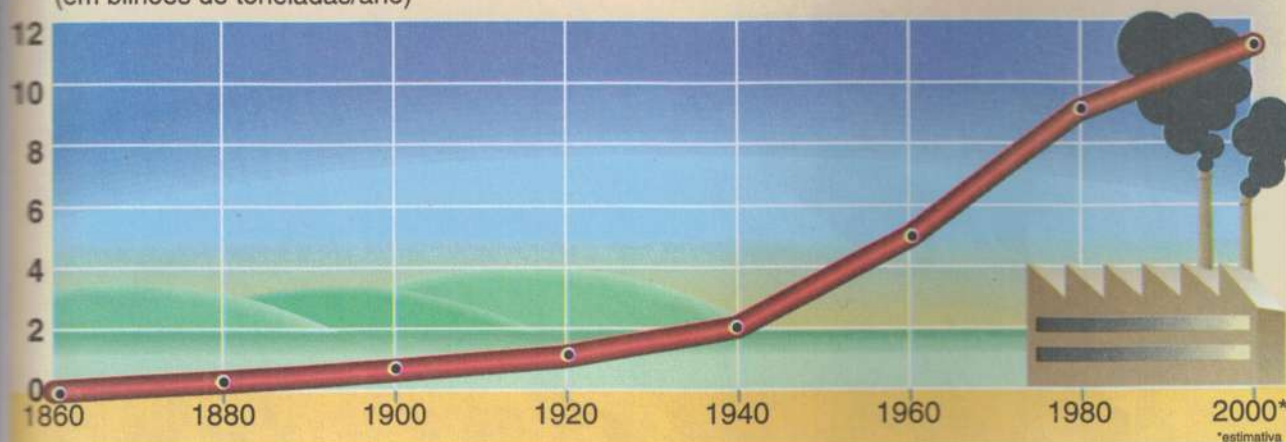
Em dezembro de 1997, representantes de 170 países reuniram-se em Kioto, no Japão, para uma conferência sobre poluição ambiental. Alguns ecologistas acham que o aquecimento do nosso planeta, também chamado de efeito estufa, pode causar um desastre climático e destruir a Terra em algumas dezenas de anos.

O aumento da temperatura causado pelas emissões de gases das fábricas, dos escapamentos de carros, da queima de carvão mineral e de florestas provocaria o derretimento das geleiras e calotas polares, elevaria o nível dos oceanos, provocando inundações nas regiões costeiras e desestabilizando o clima global.

Para se ter uma idéia de como é séria essa ameaça, veja, no gráfico, o quanto aumentou a emissão de gás carbônico na atmosfera, desde 1860 até agora.

O poder da chaminé

Quanto aumentou a emissão de gás carbônico na atmosfera desde a Revolução Industrial (em bilhões de toneladas/ano)



Fonte: Revista *Veja* 10/12/97

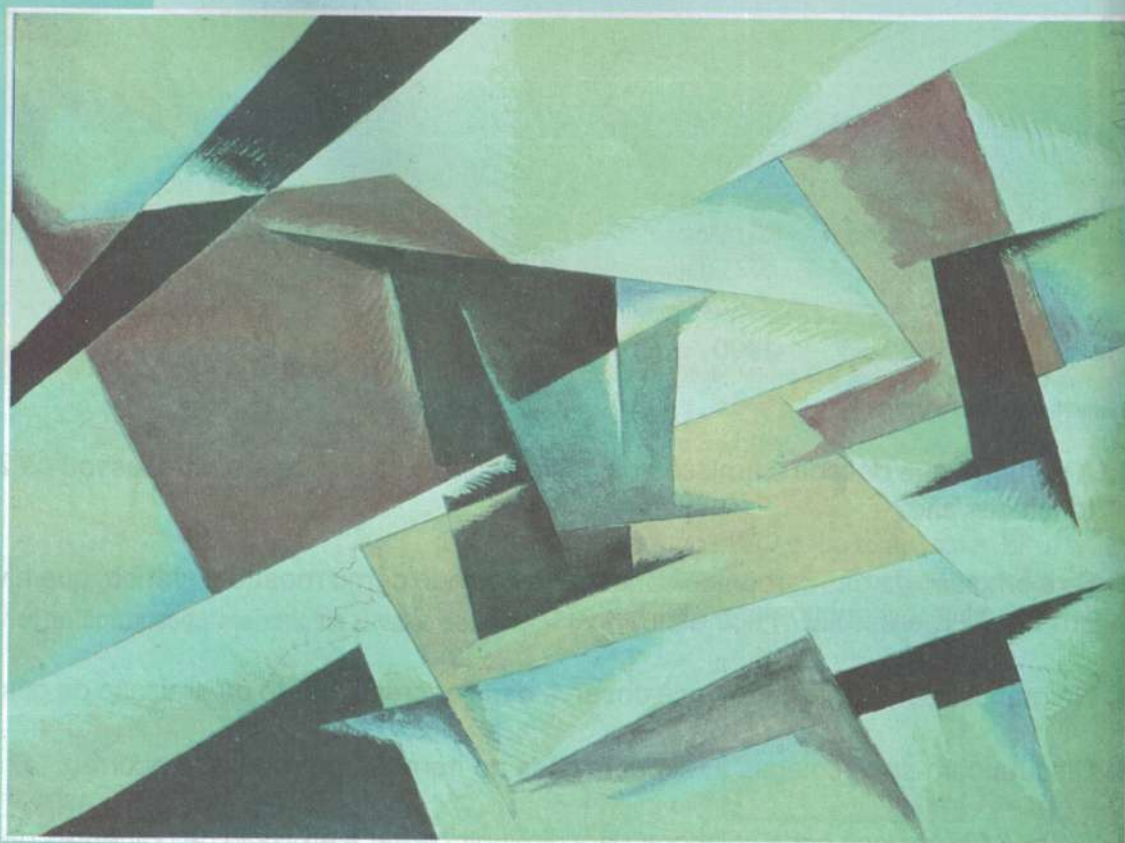
1. A partir de que década a emissão de gás carbônico na atmosfera ultrapassou os 2 bilhões de toneladas/ano?
2. Se a emissão de gás carbônico continuar evoluindo como mostra o gráfico, que níveis atingirá em 2010? E em 2020? Faça estimativas.
3. No gráfico, em que período você observa o maior crescimento da emissão de gás carbônico?
4. Discuta com seus colegas a resposta dada no item 3 e por que isso ocorreu.
5. De que forma você pode colaborar para diminuir/conter a emissão de poluentes na atmosfera?

9

Polígonos

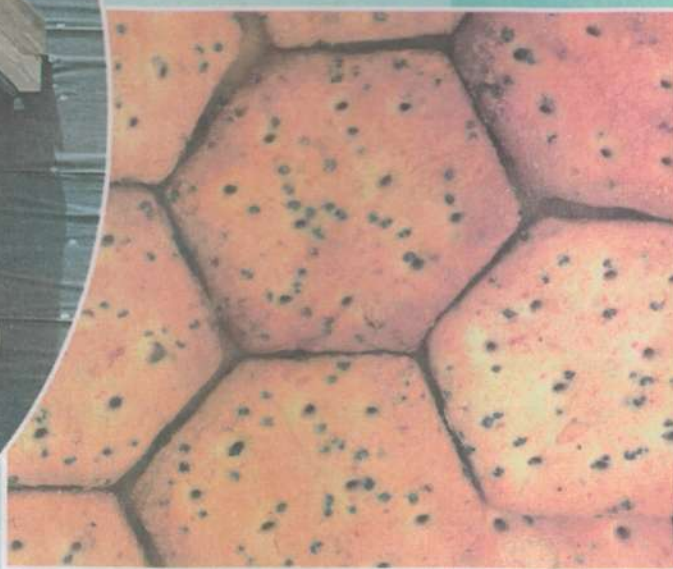
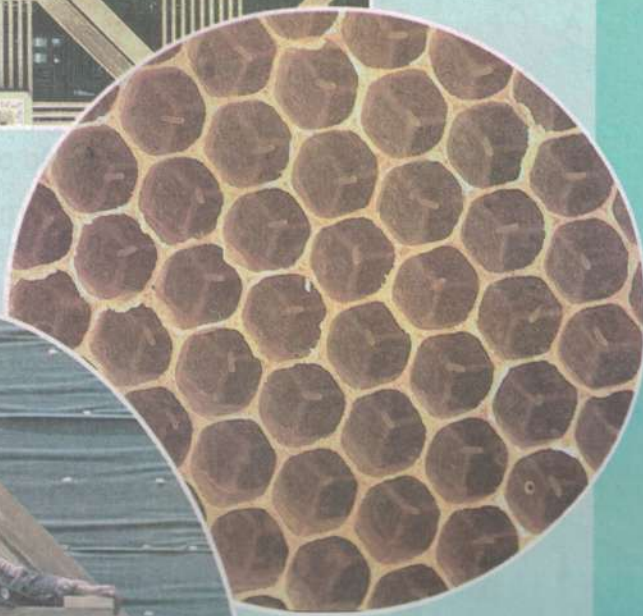
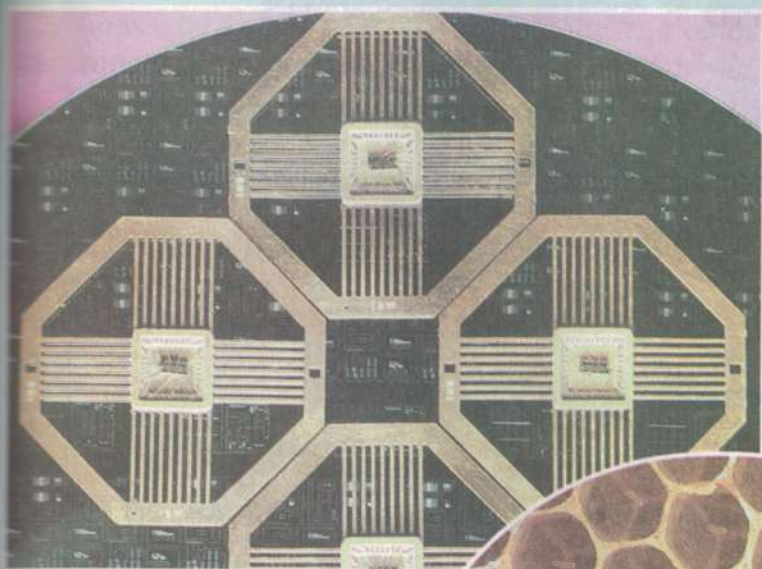
A palavra *polígono* é formada por dois elementos de origem grega: *poli*, que significa muitos, e *gono* (ou *gonio*), que significa ângulos. Polígono é, então, uma figura de vários ângulos. Veremos mais adiante que, em um polígono, o número de ângulos é igual ao número de lados. Dizemos, também, que o polígono é uma figura de vários lados.

É possível observar polígonos em muitas obras de arte.



Liubov Popova – *Room Construction*. Russian State Museum, St. Petersburg

Muitos objetos que nos cercam também lembram polígonos:

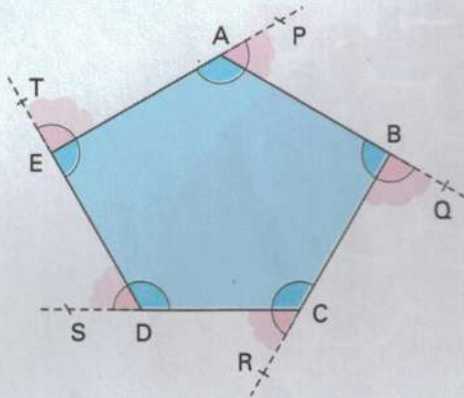


Os polígonos podem ser *convexos* e *não-convexos*, de acordo com a sua região interna.

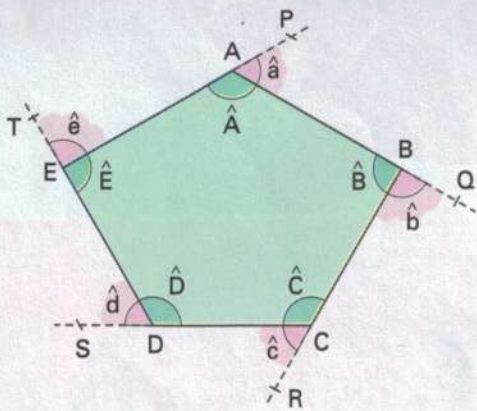
Polígono é a reunião de uma linha fechada simples, formada apenas por segmentos de reta, com a sua região interna.

Elementos de um polígono

No polígono da figura podemos destacar:



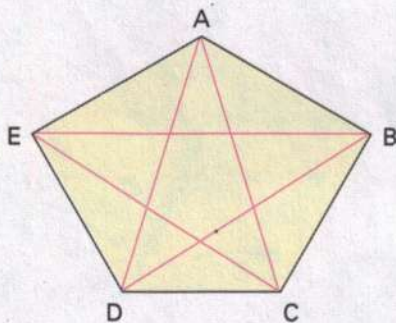
- ❖ Lados: são os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} .
- ❖ Vértices: são os pontos A , B , C , D e E .
- ❖ Ângulos internos: são os ângulos formados por dois lados consecutivos: \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e \hat{E} .



Para representar os ângulos internos, podemos utilizar as letras que representam os vértices: \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , \hat{E} .

- ❖ Ângulos externos: são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento de um lado consecutivo: \hat{PAB} , \hat{QBC} , \hat{RCD} , \hat{SDE} e \hat{TEA} .

Podemos também representar os ângulos externos utilizando as letras minúsculas correspondentes aos vértices desses ângulos \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} , \hat{e} .



- ❖ Diagonais: são segmentos que unem um vértice a outro vértice não-consecutivo a ele: \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} , \overline{CE} .

Observe que, em todo polígono, o número de vértices, de lados, de ângulos internos e de ângulos externos é sempre o mesmo.

Nomenclatura

Apesar de a palavra "polígono" dar a idéia de vários ângulos (*poli* = muito e *gono* = ângulo), geralmente os polígonos são nomeados a partir do número de lados.

Os polígonos, por sua utilização mais freqüente, têm nomes especiais, como vemos na tabela:

Nº de lados do polígono	Nome do polígono	
3	triângulo	tri = três
4	quadrilátero	quadri = quatro
5	pentágono	penta = cinco
6	hexágono	hexa = seis
7	heptágono	hepta = sete
8	octógono	octo = oito
9	eneágono	enea = nove
10	decágono	deca = dez
11	undecágono	undeca = onze
12	dodecágono	dodeca = doze
15	pentadecágono	pentadeca = quinze
20	icoságono	icosa = vinte

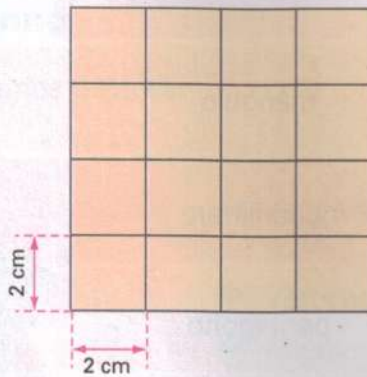
Os demais polígonos não recebem nomes particulares, como o polígono de 13 lados, o de 18 lados, o de 25 lados etc.

Explorando Geometria

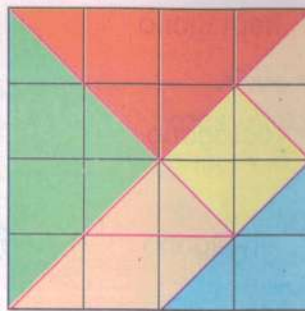
O Tangram é um quebra-cabeça formado por 7 peças. De origem milenar, este quebra-cabeça foi trazido para o Ocidente por volta da metade do século XIX.

Veja como podemos construir um Tangram:

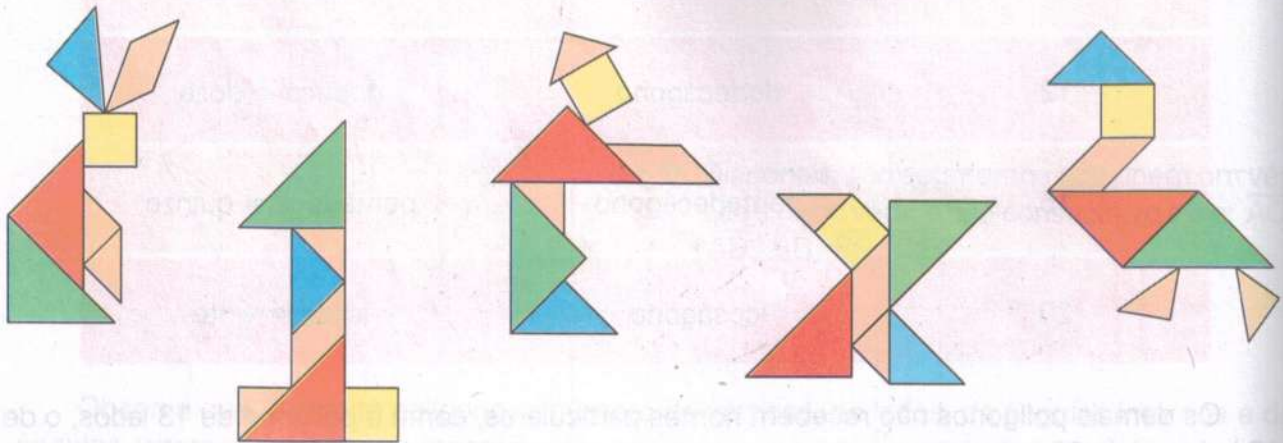
Desenhe um quadriculado 4×4 com quadradinhos de 2 cm de lado.















Trace as linhas indicadas no desenho abaixo, pinte e recorte as sete peças.



Colocando as 7 peças do Tangram lado a lado, sem sobreposição, é possível compor mais de mil figuras que lembram animais, objetos, pessoas, letras, números, figuras geométricas etc. Veja alguns exemplos:



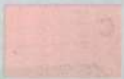

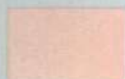
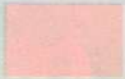

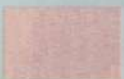
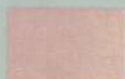

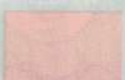
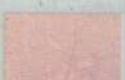

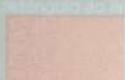
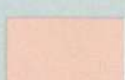
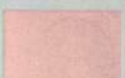
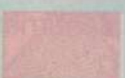
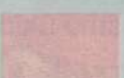
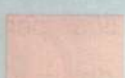
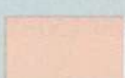


Veja, no quadro, como podemos utilizar o quebra-cabeça para compor triângulos e quadriláteros, usando apenas 1 peça do Tangram, usando apenas 2 peças e usando apenas 3 peças.

QUADRILÁTEROS					
Nº de peças do Tangram	Triângulos	Quadrados	Retângulos	Paralelogramos	Trapézios
1			o quadrado ao lado		não é possível
2			o quadrado ao lado		
3					

Lembre-se de que todo quadrado também é um retângulo.

- Construa um quadro como este, indicando os triângulos e quadriláteros que são possíveis compor com apenas 4 peças, com 5 peças, com 6 peças e com 7 peças do Tangram.

QUADRILÁTEROS					
Nº de peças do Tangram	Triângulos	Quadrados	Retângulos	Paralelogramos	Trapézios
4					
5					
6					
7					

Lembre-se de que todo retângulo também é um paralelogramo.

- Usando as 7 peças do Tangram, componha 1 pentágono e 1 hexágono.

Já ouvimos ou lemos em placas a expressão "perímetro urbano", que indica o contorno do setor urbano de uma cidade.

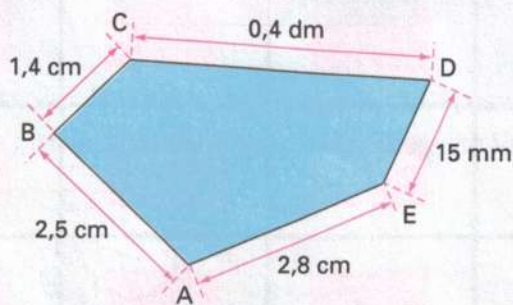
A figura a seguir nos mostra o perímetro urbano de uma determinada cidade, ou seja, o seu contorno.



Nos polígonos, o *perímetro* indica a medida do seu contorno, ou seja, a soma das medidas de seus lados.

Vamos ver um exemplo.

Calcular o perímetro do polígono abaixo:



Como não podemos adicionar medidas usando unidades diferentes, vamos, inicialmente, passar todas as medidas para a mesma unidade, o centímetro:

$$0,4 \text{ dm} = (0,4 \cdot 10) \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

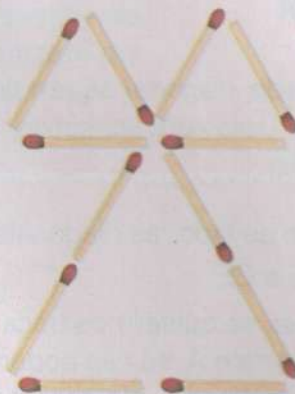
$$15 \text{ mm} = (15 : 10) \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2,5 \text{ cm} + 2,8 \text{ cm} + 1,5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 1,4 \text{ cm} = 12,2 \text{ cm}$$


Então, o perímetro do polígono ABCDE é 12,2 cm.

A figura representa 3 triângulos eqüiláteros.


Reproduza-a usando palitos de fósforo.

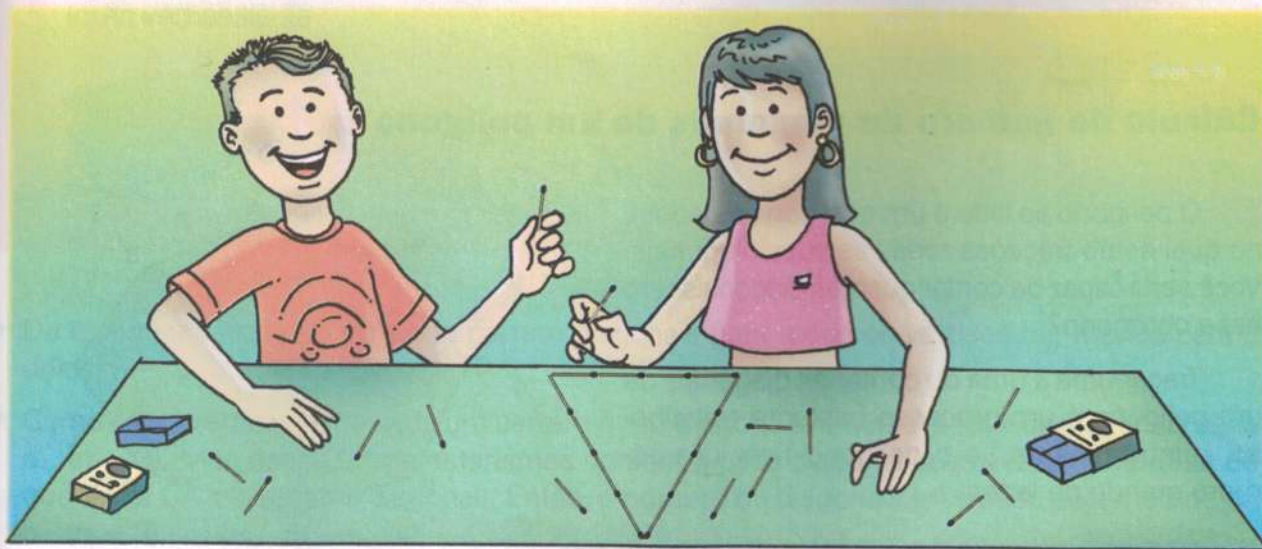


1. Deslocando apenas 4 palitos, forme um hexágono regular (polígono de 6 lados de mesma medida e 6 ângulos de mesma medida) representando também suas diagonais.

2. Tomando um  como unidade de medida de comprimento, escreva a razão entre o perímetro da figura dada e o perímetro do hexágono obtido.



3. Tomando um  como unidade de área, escreva a razão entre a área da figura dada e a área do hexágono obtido.





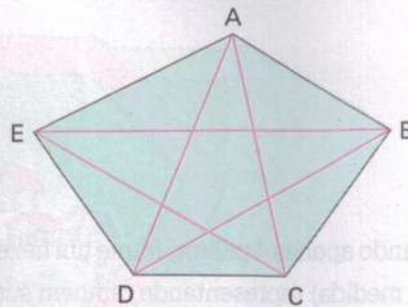
DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Chamamos de *diagonal* de um polígono o segmento que une dois vértices não-consecutivos do polígono. Dois vértices consecutivos de um polígono determinam um lado do polígono e não uma diagonal.

No polígono ao lado, as diagonais são:

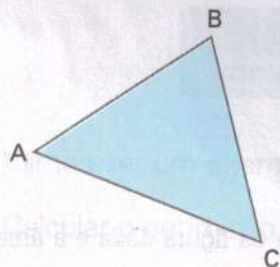
\overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} e \overline{CE} .

Observe que, se quisermos traçar as diagonais a partir do vértice A , só não podemos ligá-lo a 3 vértices do polígono: ele mesmo (A) e os vértices consecutivos (B e E), pois neste caso teremos os lados do polígono. A diagonal \overline{DA} , por exemplo, é a mesma de \overline{AD} , que é o segmento com extremidades em A e D .

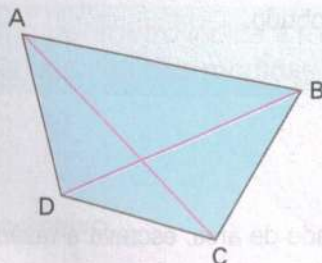


Em geral, o número de diagonais não coincide com o número de lados do polígono. A única exceção é o pentágono, que, como acabamos de ver, possui 5 lados e 5 diagonais.

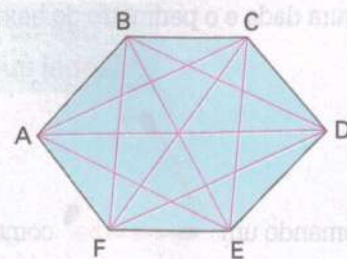
Veja os exemplos:



triângulo: 3 lados
nenhuma diagonal



quadrilátero: 4 lados
2 diagonais: \overline{AC} e \overline{BD}

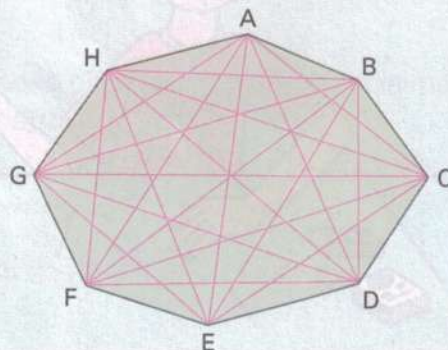


hexágono: 6 lados
9 diagonais: \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{AE} , \overline{BD} ,
 \overline{BE} , \overline{BF} , \overline{CE} , \overline{CF} e \overline{DF}

Cálculo do número de diagonais de um polígono

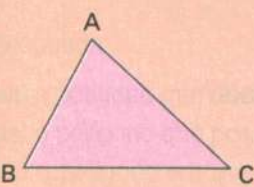
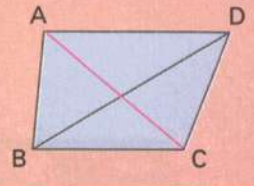
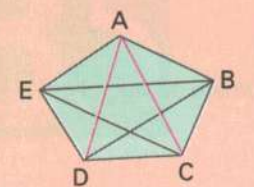
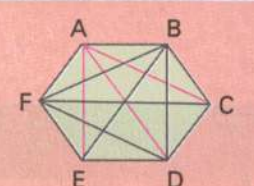
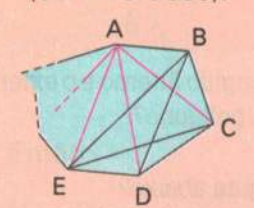
O polígono ao lado é um octógono (8 lados), no qual estão traçadas todas as suas diagonais. Você seria capaz de contar quantas diagonais tem esse octógono?

Traçar uma a uma ou contar as diagonais de um polígono é um processo bastante trabalhoso, principalmente se o polígono tiver um número grande de lados.



Vamos então ver como determinar o número de diagonais de um polígono sem traçá-las.

Observe:

Polígono	Nº de lados (ou vértices) (n)	Nº de diagonais que partem do vértice A = (n - 3)	Nº total de diagonais
	3	3 - 3	0
	4	4 - 3	2
	5	5 - 3	5
	6	6 - 3	9
Generalizando para um polígono de n lados (ou n vértices). 	n	n - 3	$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

- ❖ De qualquer vértice do polígono partem diagonais para todos os vértices (n), menos para 3 deles: n - 3.
- ❖ Como são n vértices, e de cada um partem n - 3 diagonais, o número total de diagonais seria n · (n - 3). Mas dessa forma estaríamos contando cada diagonal duas vezes (lembre-se de que \overline{AC} e \overline{CA} é a mesma diagonal). Então, o número de diagonais (d) é dado pela metade de n · (n - 3).

Assim, num polígono de n lados (ou n vértices), o número de diagonais d é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Vejamos algumas situações:

1ª Quantas diagonais possui o decágono?

decágono: 10 lados $\rightarrow n = 10$

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

O decágono possui 35 diagonais.

2ª Qual o polígono cujo número de lados é igual ao número de diagonais?

n° de lados: n

$$n^\circ \text{ de diagonais: } d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Pelo dado do problema: $d = n$

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = n$$

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{2n}{2} \quad \rightarrow \text{reduzindo ao mesmo denominador}$$

$$\frac{\overset{n \cdot (n - 3) = 2n}{\cancel{n}} \cdot (n - 3)}{\cancel{n}} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}} \quad \rightarrow \text{dividindo os dois membros por } n$$

(Lembre-se de que $n \neq 0$, pois n é o número de lados.)

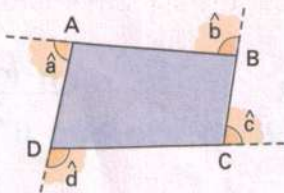
$$n - 3 = 2$$

$$n = 2 + 3 \Rightarrow n = 5$$

Logo, o polígono procurado é o pentágono.

FIXAÇÃO

1 Observe a figura seguinte e responda:



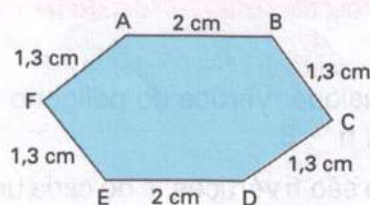
- Quais são os vértices do polígono?
- Quais são os lados do polígono?
- Qual o nome do polígono?
- Quais são os ângulos internos do polígono?
- Quais são os ângulos externos do polígono?
- Qual o valor de $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{a})$?

2 Quantos ângulos internos e externos possui um pentadecágono?

3 Num polígono, um ângulo interno mede 70° . Qual a medida do ângulo externo no mesmo vértice desse ângulo interno?

4 Qual a relação entre o ângulo interno e o externo de um mesmo vértice de um polígono?

5 Qual o perímetro da figura abaixo?



6 Um triângulo tem os lados medindo 12,5 cm, 85 mm e 0,09 m. Qual é o seu perímetro?

7 Um terreno retangular tem dois lados medindo 25 m cada um e dois lados medindo 15,5 m cada um. Qual o perímetro desse terreno?

8 Que é diagonal de um polígono?

9 O número de diagonais de um polígono é sempre igual ao seu número de lados? Dê um exemplo que justifique sua resposta.

10 Responda:

- a) Qual o polígono que não possui diagonais?
- b) Qual o polígono que possui 2 diagonais?
- c) Qual o polígono em que o número de diagonais é igual ao número de lados?

11 Calcule o número de diagonais de um polígono de:

- a) 8 lados
- b) 15 lados
- c) 20 lados
- d) 28 lados

12 Quantas diagonais possui o hexágono?

13 Quantas diagonais possui o dodecágono?

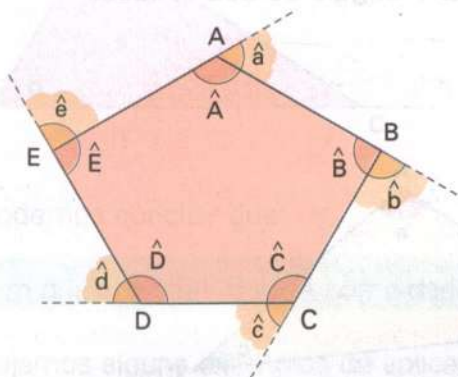
14 Qual o polígono em que o número de diagonais é igual ao triplo do número de lados?

15 Num polígono, o número de diagonais é o quádruplo do número de lados. Qual é esse polígono?

35

ÂNGULOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Relação entre os ângulos interno e externo de um polígono



Em um mesmo vértice, os ângulos interno e externo do polígono são sempre adjacentes suplementares.

Então:

No vértice A $\rightarrow \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{a}) = 180^\circ$

No vértice B $\rightarrow \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{b}) = 180^\circ$

No vértice C $\rightarrow \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{c}) = 180^\circ$

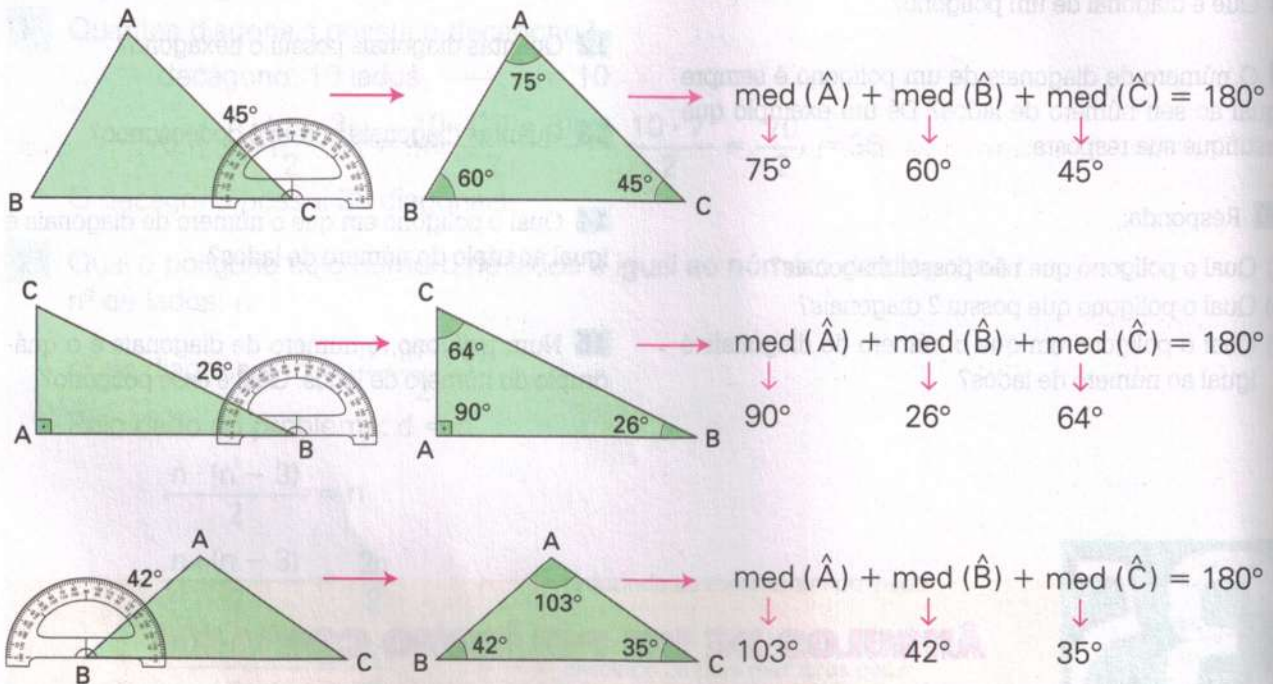
No vértice D $\rightarrow \text{med}(\hat{D}) + \text{med}(\hat{d}) = 180^\circ$

No vértice E $\rightarrow \text{med}(\hat{E}) + \text{med}(\hat{e}) = 180^\circ$

Vamos ver agora outras relações entre os ângulos de um polígono convexo.

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Utilizando um transferidor, vamos medir os ângulos internos de alguns triângulos e calcular a soma dessas medidas:



Constatamos assim que, qualquer que seja a forma do triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos é sempre 180° .

Vamos verificar que essa relação vale para qualquer triângulo de dois modos:

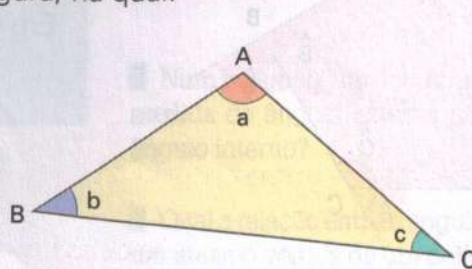
1º modo: Experimentalmente

Consideremos o triângulo ABC da figura, na qual:

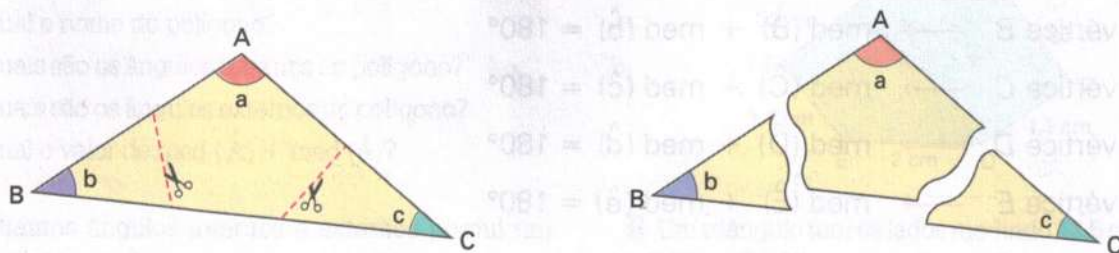
$$a = \text{med}(\hat{A})$$

$$b = \text{med}(\hat{B})$$

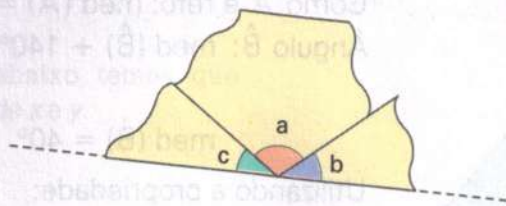
$$c = \text{med}(\hat{C})$$



Vamos recortar o triângulo, dividindo-o em três partes, como mostra a figura seguinte:



Agora, vamos juntar os três vértices num único ponto:



Pela figura, podemos verificar que, juntos, os três ângulos internos do triângulo formam um ângulo raso ou de meia-volta.

Então, $a + b + c = 180^\circ$.

Repita essa experiência com outros triângulos e verifique o resultado obtido.

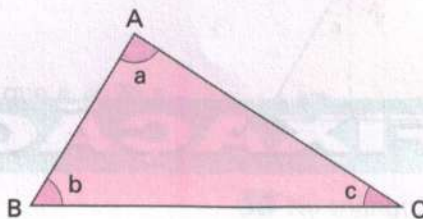
2º modo: Utilizando retas paralelas cortadas por transversais

Consideremos o triângulo ABC da figura abaixo, onde:

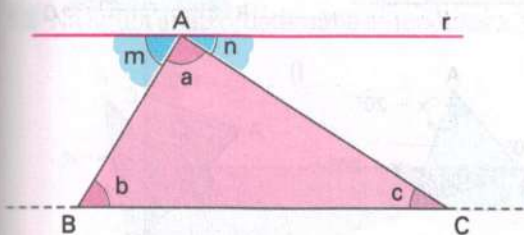
$$a = \text{med}(\hat{A})$$

$$b = \text{med}(\hat{B})$$

$$c = \text{med}(\hat{C})$$



Vamos traçar uma reta r , paralela ao lado \overline{BC} , passando por A . Essa paralela irá formar com os lados \overline{AB} e \overline{AC} dois ângulos cujas medidas indicaremos por m e n , respectivamente.



Como $r \parallel \overline{BC}$, temos $\left\{ \begin{array}{l} m = b \text{ (alternos internos)} \\ n = c \text{ (alternos internos)} \end{array} \right.$

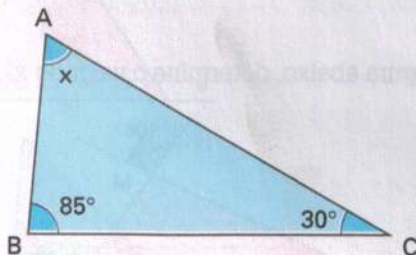
$$\begin{aligned} \text{Como } m + a + n &= 180^\circ \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ b + a + c &= 180^\circ \end{aligned}$$

Podemos concluir que:

Em qualquer triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos é igual a 180° .

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessa propriedade.

1. Na figura abaixo, determinar a medida de x .



$$x + 85^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

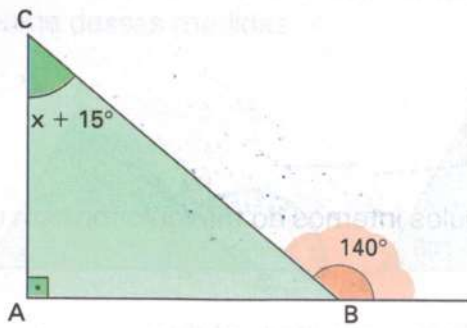
$$x + 115^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 115^\circ$$

$$x = 65^\circ$$

Então, $x = 65^\circ$.

2. Determinar as medidas dos três ângulos internos do triângulo abaixo:



Como \hat{A} é reto: med (\hat{A}) = 90°

Ângulo \hat{B} : med (\hat{B}) + $140^\circ = 180^\circ$ (adjacentes suplementares)

$$\text{med } (\hat{B}) = 40^\circ$$

Utilizando a propriedade:

$$90^\circ + 40^\circ + x + 15^\circ = 180^\circ$$

$$x + 145^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 145^\circ$$

$$x = 35^\circ$$

Ângulo \hat{C} : med (\hat{C}) = $x + 15^\circ = 35^\circ + 15^\circ = 50^\circ$

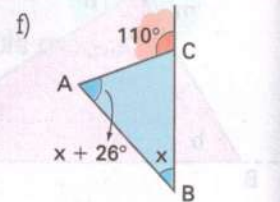
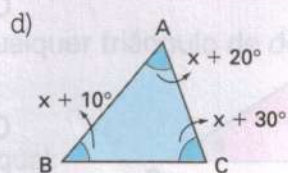
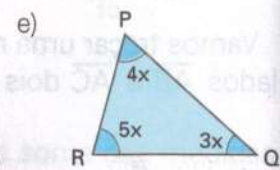
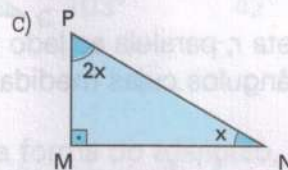
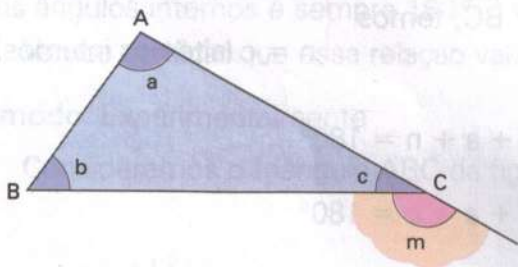
Assim, med (\hat{A}) = 90° , med (\hat{B}) = 40° e med (\hat{C}) = 50° .

FIXAÇÃO

- 1 Na figura abaixo, qual a relação que podemos estabelecer entre:

a) m e c ?

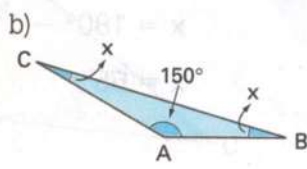
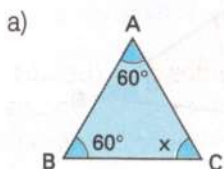
b) a , b e c ?



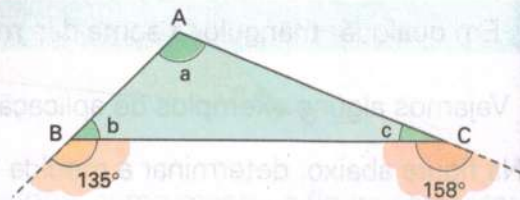
- 2 É possível construir um triângulo com dois ângulos retos? Justifique sua resposta.

- 3 Num triângulo, um dos ângulos é reto. Como serão os outros dois ângulos: agudos ou obtusos?

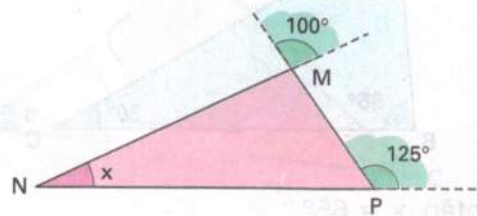
- 4 Nos triângulos das figuras abaixo, determine o valor de x .



- 5 No triângulo ABC abaixo, determine as medidas de a , b e c .

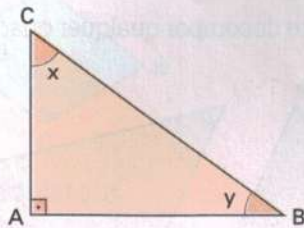


- 6 Na figura abaixo, determine o valor de x .



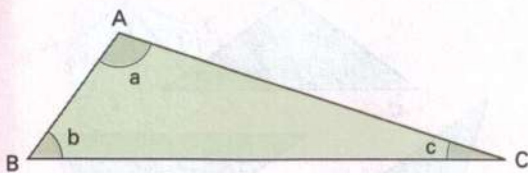
7 Dois ângulos de um triângulo medem 81° e 28° . Qual a medida do terceiro ângulo?

8 No triângulo da figura abaixo temos que $x - y = 18^\circ$. Calcule os valores de x e y .

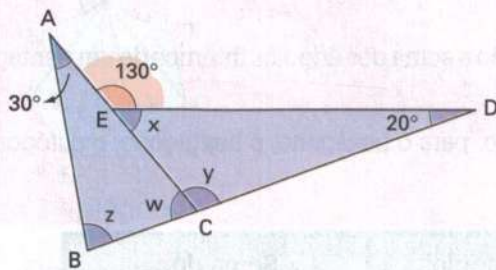


9 As medidas dos ângulos internos de um triângulo são expressas por $x + 36^\circ$, $2x - 15^\circ$ e $3x - 39^\circ$. Quanto medem os ângulos desse triângulo?

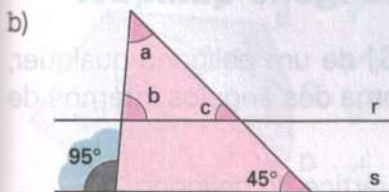
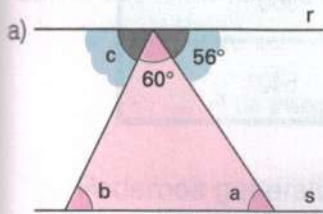
10 No triângulo ABC abaixo, temos que $a = 2b$ e $b = 3c$. Quanto valem a , b e c ?



11 Na figura abaixo, determine as medidas x , y , w e z .



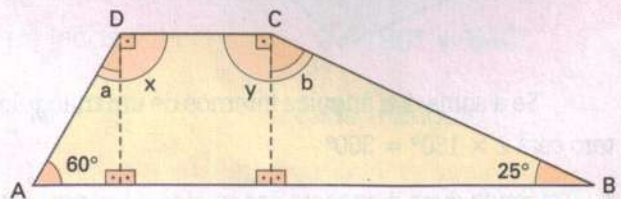
12 Nas figuras abaixo, $r \parallel s$. Determine as medidas a , b e c .



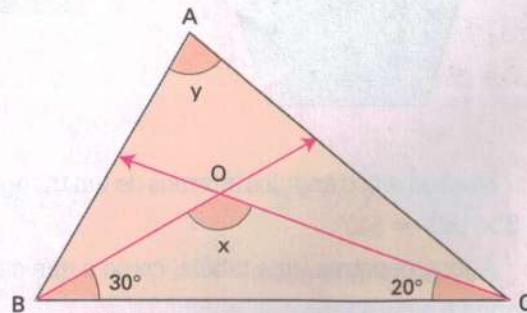
13 Na figura abaixo \vec{BD} é bissetriz de \hat{B} . Determine x e y .



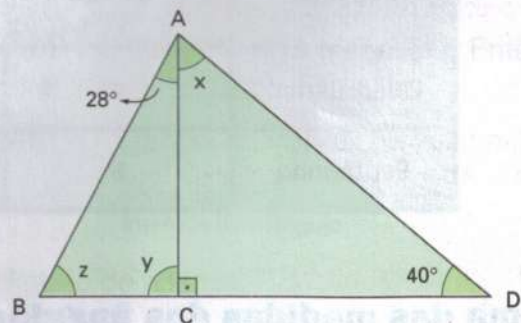
14 Na figura abaixo, calcule as medidas indicadas:



15 No triângulo da figura abaixo \vec{BO} é a bissetriz de \hat{B} e \vec{CO} é bissetriz de \hat{C} . Determine as medidas x e y .



16 Na figura abaixo determine as medidas x , y e z .

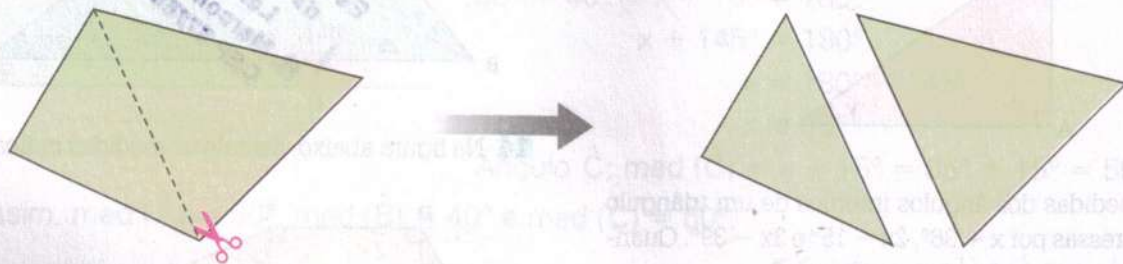


17 Um triângulo possui dois ângulos congruentes, e o terceiro ângulo supera cada um dos ângulos congruentes em 30° . Quais as medidas dos três ângulos?

Explorando **Medidas**

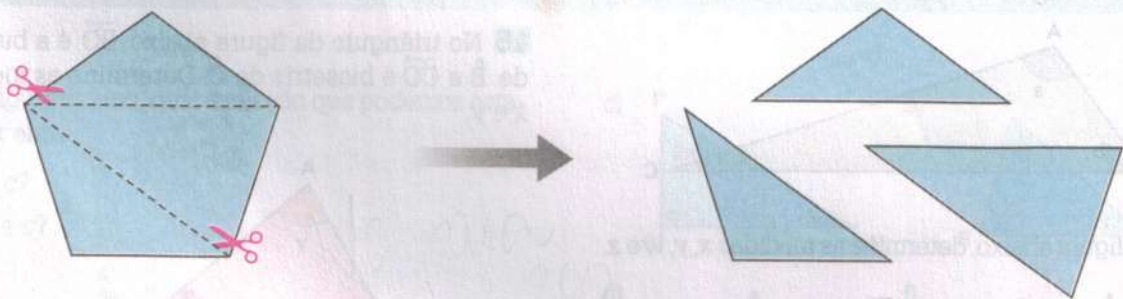
Veja como podemos decompor um polígono no menor número de triângulos possíveis:

- Traçando um segmento de reta (uma das diagonais), podemos facilmente decompor qualquer quadrilátero em 2 triângulos.



Se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a soma dos ângulos internos de um quadrilátero será $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

- Traçando duas diagonais de um mesmo vértice, dividimos um pentágono em 3 triângulos.



Se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a soma dos ângulos internos de um pentágono será $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

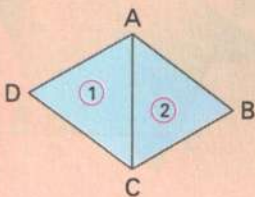
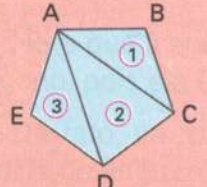
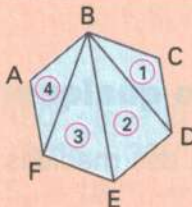
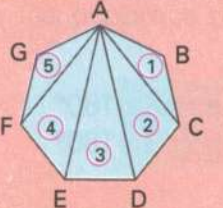
Agora, construa uma tabela, como a que sugerimos abaixo, para o hexágono, o heptágono, o octógono, o eneágono e o decágono.

Polígono	Nº de lados	Nº de triângulos obtidos na decomposição	Soma dos ângulos internos do polígono
Quadrilátero	4	2	360°
Pentágono	5	3	540°

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer

Para determinar a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) de um polígono qualquer, podemos decompor os polígonos em triângulos, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo já é conhecida e igual a 180° .

Faremos isso traçando as diagonais que partem de um único vértice do polígono.

Polígono	Nº de lados	Nº de triângulos formados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)
 quadrilátero	4	n° de lados $2 = (4 - 2)$	$2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ cada triângulo
 pentágono	5	n° de lados $3 = (5 - 2)$	$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ cada triângulo
 hexágono	6	n° de lados $4 = (6 - 2)$	$4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ cada triângulo
 heptágono	7	n° de lados $5 = (7 - 2)$	$5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$ cada triângulo

Desse modo, verificamos que é possível traçar um número de triângulos que coincide sempre com o número de lados do polígono menos 2.

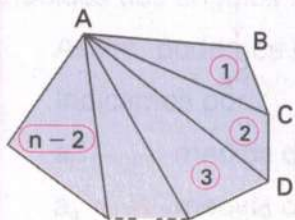
Para um decágono, por exemplo, podemos traçar 8 (ou seja, $10 - 2$) triângulos. Então, a soma das medidas dos ângulos internos do decágono é:

$$8 \cdot 180^\circ = 1\,440^\circ$$

nº de triângulos traçados

soma das medidas dos ângulos internos do triângulo

Podemos generalizar esse resultado para um polígono de n lados.



- ✓ nº de lados: n
- ✓ nº de triângulos: $n - 2$ (2 a menos que o número de lados do polígono)
- ✓ soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo: 180°
- ✓ soma das medidas dos ângulos internos do polígono: $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Então, $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$, em que S_i é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados.

Vejam algumas situações:

1ª Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um decágono?

decágono \rightarrow 10 lados $\rightarrow n = 10$

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1\,440^\circ$$

A soma das medidas dos ângulos internos é $1\,440^\circ$.

2ª Qual é o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a 900° ?

Neste caso, temos $S_i = 900^\circ$

$$\text{Caso } S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ \rightarrow (n - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

$$180^\circ n - 360^\circ = 900^\circ$$

$$180^\circ n = 900^\circ + 360^\circ$$

$$180^\circ n = 1\,260^\circ$$

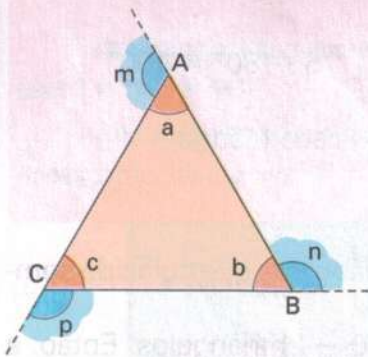
$$n = \frac{1\,260^\circ}{180^\circ} = 7$$

O polígono é o heptágono (7 lados).

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer

Assim como fizemos para os ângulos internos, vamos calcular a soma das medidas dos ângulos externos (S_e) de um polígono qualquer.

Triângulo



Sabemos que:

$$a + m = 180^\circ$$

$$b + n = 180^\circ$$

$$c + p = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + m + b + n + c + p = 3 \cdot 180^\circ$$

$$\underbrace{a + b + c}_{S_i} + \underbrace{m + n + p}_{S_e} = 3 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 180^\circ$$

$$S_e$$

Daí:

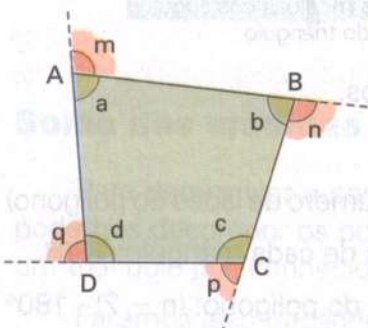
$$180^\circ + S_e = 540^\circ$$

$$S_e = 540^\circ - 180^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

\rightarrow soma das medidas dos ângulos externos do triângulo

Quadrilátero



Sabemos que:

$$a + m = 180^\circ$$

$$b + n = 180^\circ$$

$$c + p = 180^\circ$$

$$d + q = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + b + c + d + m + n + p + q = 4 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 360^\circ$$

$$S_e$$

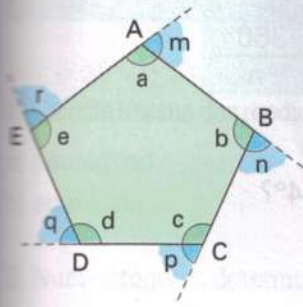
$$360^\circ + S_e = 720^\circ$$

$$S_e = 720^\circ - 360^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

\rightarrow soma das medidas dos ângulos externos do quadrilátero

Pentágono



Sabemos que:

$$a + m = 180^\circ$$

$$b + n = 180^\circ$$

$$c + p = 180^\circ$$

$$d + q = 180^\circ$$

$$e + r = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + b + c + d + e + m + n + p + q + r = 5 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 540^\circ$$

$$S_e$$

$$540^\circ + S_e = 900^\circ$$

$$S_e = 900^\circ - 540^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

→ soma das medidas dos ângulos externos do pentágono

Note que a soma das medidas dos ângulos externos não depende do número de lados do polígono, pois ela é sempre igual a 360° .

De fato, se tomarmos um polígono de n lados, temos que, em cada vértice, a soma da medida do ângulo interno com a do externo é igual a 180° .

Considerando S_e a soma das medidas dos ângulos externos do polígono, temos:

$$S_i + S_e = n \cdot 180^\circ$$

$$180^\circ \cdot (n - 2) + S_e = 180^\circ n$$

$$180^\circ n - 360^\circ + S_e = 180^\circ n$$

$$S_e = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

Daí podemos enunciar a propriedade:

A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono independente do número de seus lados e é sempre igual a 360° .



ÂNGULOS DE UM POLÍGONO REGULAR

Sabemos que, num *polígono regular*, todos os lados são congruentes entre si e todos os ângulos são congruentes entre si. Sabemos ainda que, em cada vértice do polígono, a soma das medidas dos ângulos interno e externo é 180° .

Assim, podemos concluir que os ângulos externos também são congruentes entre si.

Indicamos por:

a_i → medida de cada ângulo interno de um polígono regular

a_e → medida de cada ângulo externo de um polígono regular

Para um polígono de n lados, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

e

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

Vejam algumas situações:

1ª Qual é o polígono regular cuja medida do ângulo interno é igual a 144° ?

Como o polígono é regular: $a_i = 144^\circ$

$$\text{Mas } a_i = \frac{S_i}{n} \Rightarrow \frac{S_i}{n} = 144^\circ$$

↓
número de lados do polígono

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 144^\circ$$

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{144^\circ n}{n}$$

$$180^\circ n - 360^\circ = 144^\circ n$$

$$180^\circ n - 144^\circ n = 360^\circ$$

$$36^\circ n = 360^\circ$$

$$n = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$$

Portanto, o polígono é o decágono (10 lados).

Neste caso, poderíamos também ter utilizado o fato de que $a_i + a_e = 180^\circ$. Veja:

$$a_i = 144^\circ \rightarrow a_e = 180^\circ - a_i = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

$$\text{como } a_e = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \frac{360^\circ}{n} = 36^\circ$$

ou

$$\frac{360^\circ}{36^\circ} = n \rightarrow n = 10 \text{ lados}$$

2ª Qual a medida do ângulo interno e do ângulo externo de um hexágono regular?

hexágono regular: 6 lados

Cálculo da soma das medidas dos ângulos internos:

$$S_i = (6 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Como o hexágono é regular:

$$a_i = \frac{S_i}{6} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$

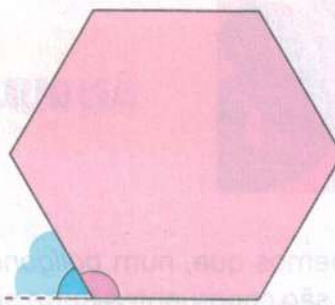
$$a_e = \frac{S_e}{6} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

O ângulo interno mede 120° e o externo 60° .

Neste caso, como sabemos que $a_i + a_e = 180^\circ$, podemos calcular um dos dois ângulos da seguinte maneira:

$$a_e = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\text{Então, } a_i = 180^\circ - a_e = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



FIXAÇÃO

1 Calcule a soma das medidas dos ângulos internos do:

- a) pentágono c) icoságono
 b) eneágono d) polígono de 25 lados

2 Num octógono, determine:

- a) a soma das medidas dos ângulos internos
 b) a soma das medidas dos ângulos externos
 c) a medida de cada ângulo interno, se o octógono for regular
 d) a medida de cada ângulo externo, se o octógono for regular

3 O triângulo que é regular recebe o nome de triângulo equilátero. Nessas condições, qual a medida de cada ângulo interno e de cada ângulo externo de um triângulo equilátero?

4 Dado um hexágono regular, responda:

- a) Qual a soma das medidas dos ângulos internos?
 b) Qual a soma das medidas dos ângulos externos?
 c) Qual a medida de cada ângulo interno?
 d) Qual a medida de cada ângulo externo?

5 Determine o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a $1\ 620^\circ$.

6 Qual é o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é:

- a) $1\ 440^\circ$ c) $2\ 160^\circ$
 b) $1\ 800^\circ$ d) $2\ 340^\circ$

7 Qual é o polígono cuja soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360° ?

8 Num polígono, $S_i + S_e = 1\ 080^\circ$. Qual é esse polígono?

9 Qual é a medida de cada ângulo interno e externo de um pentadecágono regular?

10 Determine o polígono regular cuja medida do ângulo interno é:

- a) igual à medida do ângulo externo
 b) 150°

11 Num polígono regular, a medida de cada ângulo externo é igual a 20° . Nessas condições, responda:

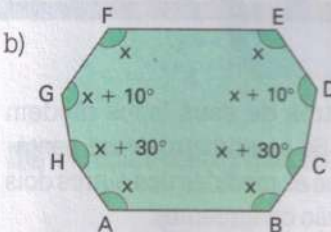
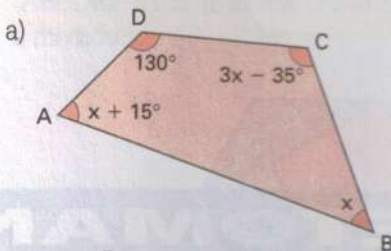
- a) Qual é esse polígono?
 b) Qual é a medida de cada ângulo interno desse polígono?

12 Qual é o polígono regular cuja soma das medidas dos ângulos internos é o quádruplo da soma das medidas dos ângulos externos?

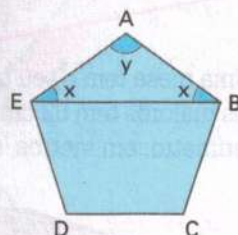
13 Em um hexágono, a soma de cinco de seus ângulos internos é igual a 640° . Qual é a medida do sexto ângulo do hexágono?

14 Em um pentágono, a soma das medidas de quatro de seus ângulos internos com as medidas de seus ângulos externos é igual a 805° . Qual é a medida do quinto ângulo interno do pentágono?

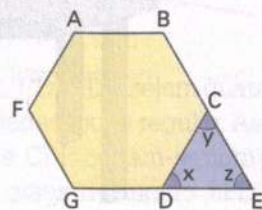
15 Nas figuras abaixo, determine o valor de x .



16 Determine a medida de x e y no pentágono regular ao lado.



17 A figura ao lado representa um hexágono regular onde foram prolongados os lados \overline{GD} e \overline{BC} . Determine as medidas de x , y e z .

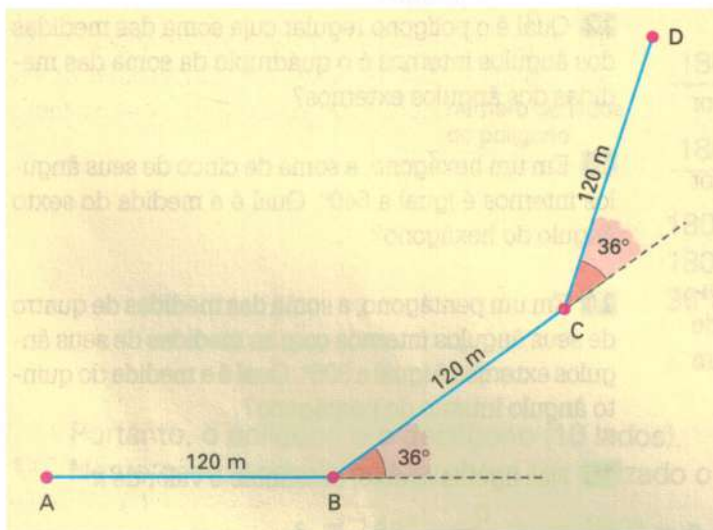


Explorando Medidas

A figura seguinte descreve, em esboço, de que maneira uma pessoa se desloca.

Partindo do ponto A, ela avança 120 m e gira 36° para a esquerda. A seguir avança outros 120 m e gira 36° para a esquerda.

Repete esse movimento até que retorna ao ponto A, fechando a trajetória.

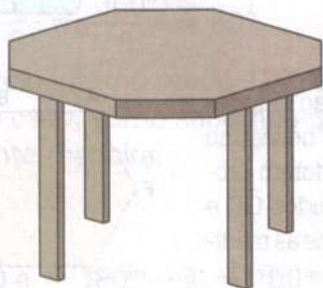


1. Qual é o polígono regular que essa trajetória limita?
2. Quantos quilômetros essa pessoa caminhou na trajetória toda?
3. Se, em média, essa pessoa dá 11 passos a cada 8 m, quantos passos ela deu em toda a trajetória?

RETOMANDO o que aprendeu

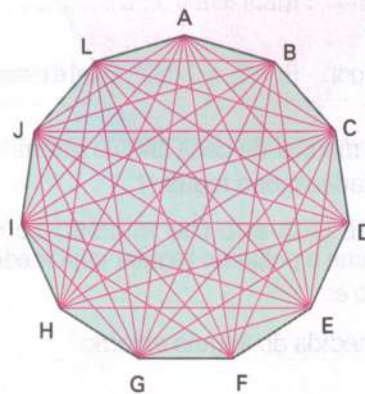
1 Em um pentágono, três de seus lados medem 3,9 cm; 5,3 cm e 5,0 cm. Se o perímetro desse pentágono é 22,6 cm, determine as medidas dos outros dois lados, sabendo que eles são congruentes.

2 Uma mesa tem o seu tampo na forma octogonal; os lados maiores tem 62 cm e os menores, 40 cm. Qual é o perímetro, em metros, do tampo dessa mesa?



3 Um hexágono regular tem o mesmo perímetro de um decágono regular. O lado do decágono mede 8,7 cm. Quanto mede o lado do hexágono?

4 Quantas diagonais possui o polígono abaixo?

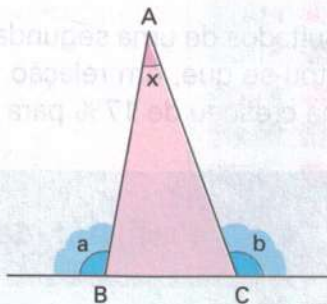


5 Um hexágono regular tem o mesmo perímetro de um decágono regular. O lado do decágono mede 8,7 cm. Quanto mede o lado do hexágono?

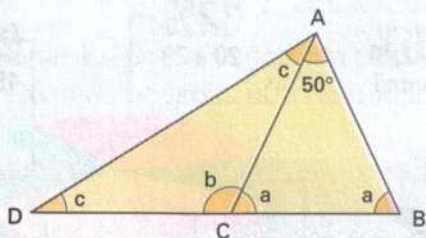
6 Em um triângulo, as medidas dos ângulos internos são expressas, em graus, por x , $3x$ e $6x$. Determine:

- as medidas dos três ângulos internos do triângulo
- as medidas dos três ângulos externos do triângulo

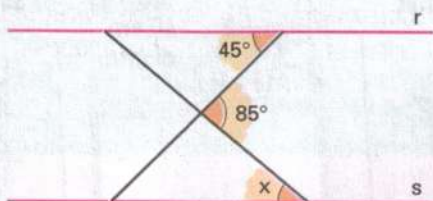
7 Na figura abaixo, $a = 100^\circ$ e $b = 110^\circ$. Qual a medida de x ?



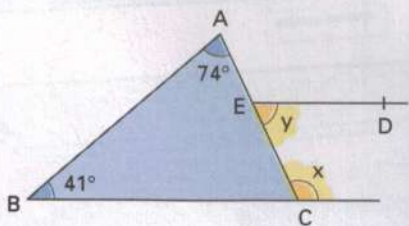
8 Na figura abaixo, determine as medidas a , b e c .



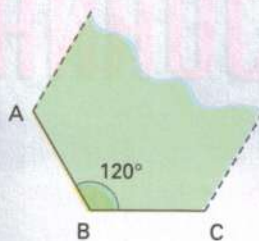
9 Qual é o valor da medida x indicada na figura seguinte, sabendo que as retas r e s são paralelas?



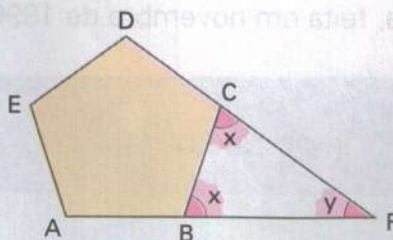
10 Quais os valores de x e y na figura abaixo, sabendo-se que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$.



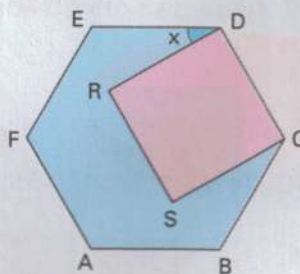
11 A figura seguinte representa parte de um polígono regular que não acabou de ser desenhado. Qual é esse polígono regular?



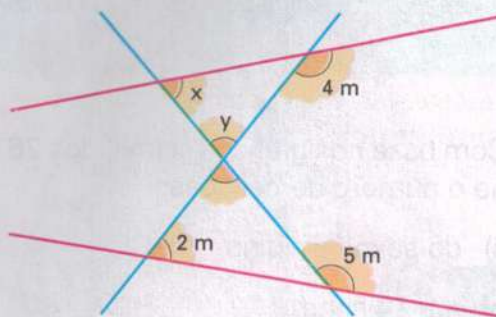
12 Na figura seguinte, $ABCDE$ é um pentágono regular. Os lados \overline{AB} e \overline{DC} foram prolongados até se encontrarem no ponto F . Determine, em graus, as medidas x e y indicadas.



13 Na figura seguinte, temos um hexágono regular ($ABCDEF$) e um quadrado $CDRS$. Determine, em graus, a medida x .



14 Na figura abaixo, qual é o valor de x em relação a m ?

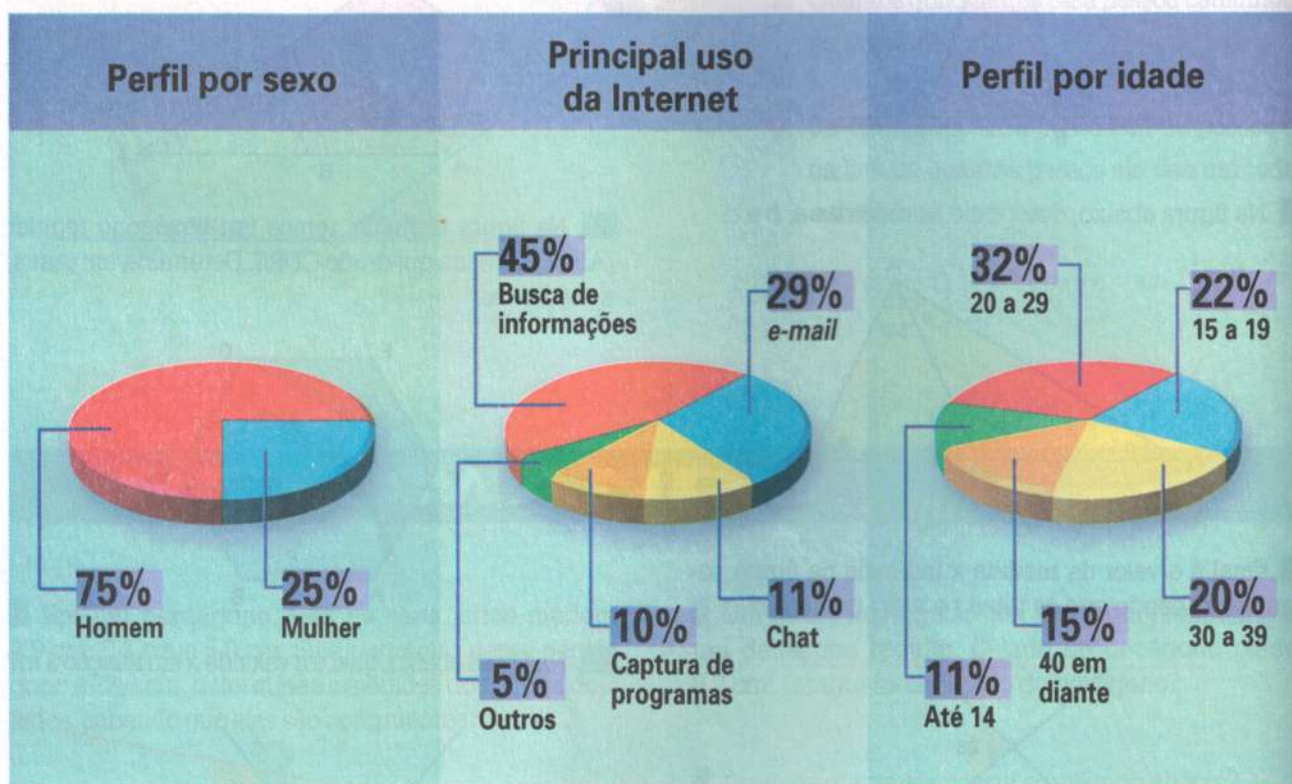


15 Suponha que \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} sejam quatro lados consecutivos de um dodecágono regular. As bissetrizes dos ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{C}DE$ cortam-se num ponto P . Qual é a medida, em graus, do ângulo $\hat{B}PD$?

JORNAIS & REVISTAS

Perfil do internauta brasileiro

Em sua edição de 29/10/97, a revista *Veja* publicou os resultados de uma segunda pesquisa sobre o perfil do brasileiro que navega pela Internet. Constatou-se que, em relação à primeira pesquisa, feita em novembro de 1996, a participação feminina cresceu de 17% para 25%.



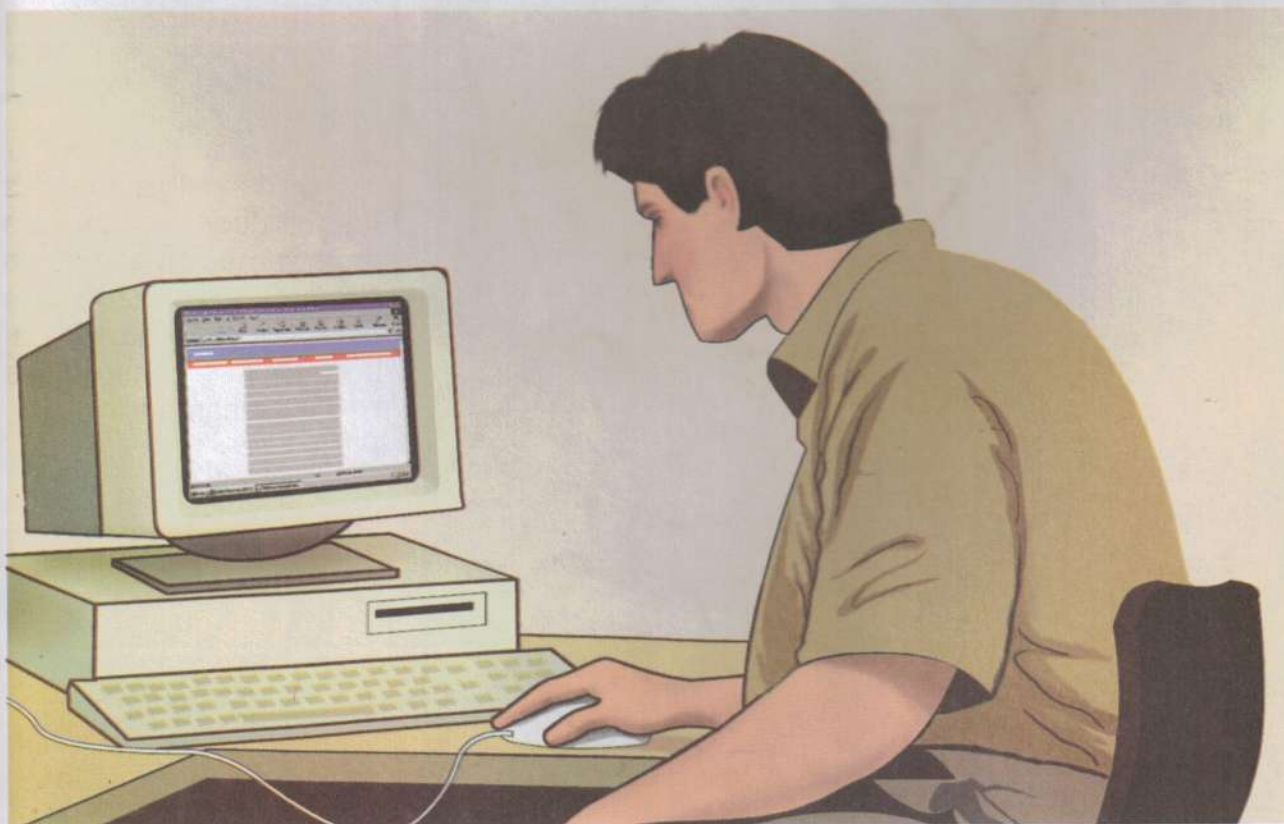
- Com base nos gráficos acima, dos 26 000 internautas que responderam à pesquisa, determine o número de pessoas:
 - do sexo feminino
 - até 14 anos
 - entre 20 e 29 anos
 - que trafegam pela Internet na busca de informações
 - que utilizam o *e-mail*

Os números da pesquisa indicam que o público que frequenta a rede é altamente qualificado: 74% têm de 15 a 39 anos, 87% ganham dez ou mais salários mínimos e 38% passaram pela universidade.

2. Observe o gráfico do poder aquisitivo:



- Qual é a porcentagem da população brasileira que ganha até dez salários mínimos?
- Quantas pessoas que responderam à pesquisa têm renda de até dez salários mínimos?



4º Bimestre

10

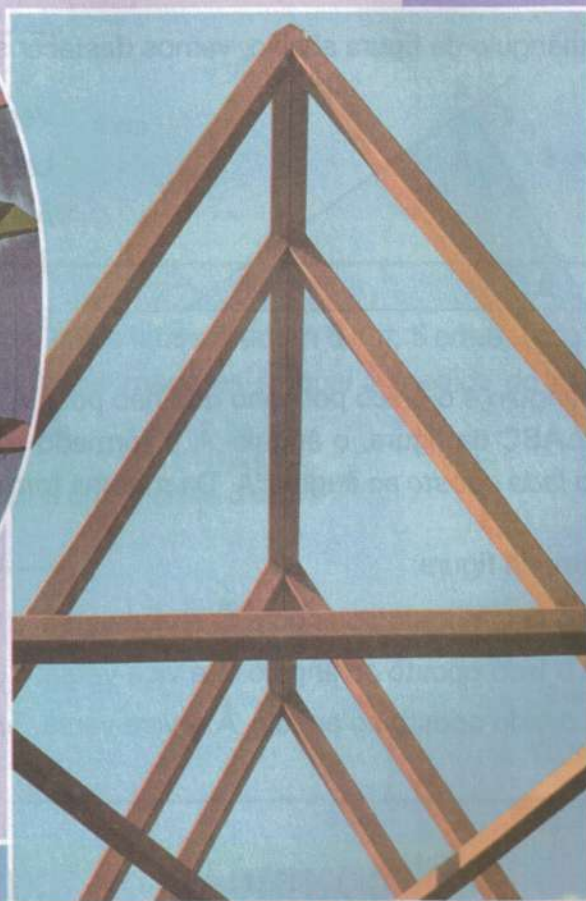
Estudando os triângulos



O triângulo é uma das figuras geométricas mais importantes no estudo da Geometria. Se não fosse esse polígono de três lados, muitas construções não existiriam.

Por isso mesmo os triângulos merecem um estudo à parte.

o maior lado

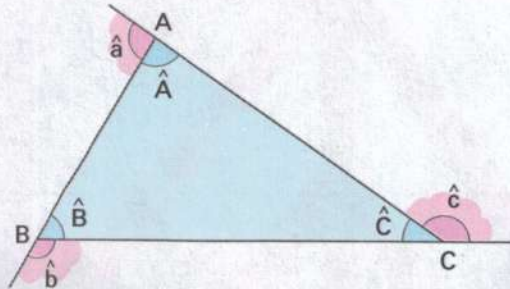


O triângulo tem uma estrutura rígida e é o único polígono rígido (não-deformável). Por esse motivo, o triângulo é um elemento importante na técnica de construções que necessitam de estabilidade.

37

ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO

No triângulo da figura abaixo, vamos destacar seus principais elementos:



Vértices \rightarrow pontos A , B e C

Lados \rightarrow segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC}

Ângulos internos \rightarrow ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C}

Ângulos externos \rightarrow ângulos \hat{a} , \hat{b} e \hat{c}

Representação: $\triangle ABC$

O triângulo é o único polígono que não possui diagonais.

No $\triangle ABC$ da figura, o ângulo \hat{A} é formado pelos lados \overline{AB} e \overline{AC} . O terceiro lado, \overline{BC} , é chamado *lado oposto* ao ângulo \hat{A} . Da mesma forma, o ângulo \hat{B} é chamado *ângulo oposto* ao lado \overline{AC} .

Assim, na figura:

- ✓ \overline{AB} é o lado oposto ao ângulo \hat{C} e vice-versa.
- ✓ \overline{AC} é o lado oposto ao ângulo \hat{B} e vice-versa.
- ✓ \overline{BC} é o lado oposto ao ângulo \hat{A} e vice-versa.

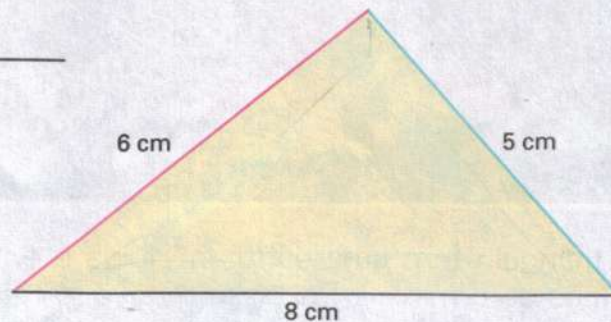
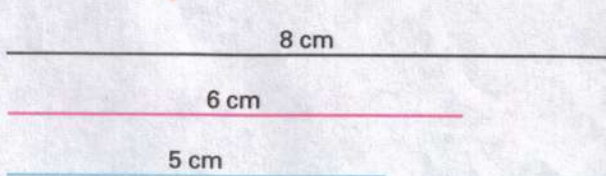
38

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

Dadas as medidas de três segmentos, será que sempre é possível construir um triângulo?

Com a ajuda de uma régua e um compasso, vamos construir triângulos, conhecendo as medidas de três segmentos que serão os lados do triângulo. Vejamos os exemplos:

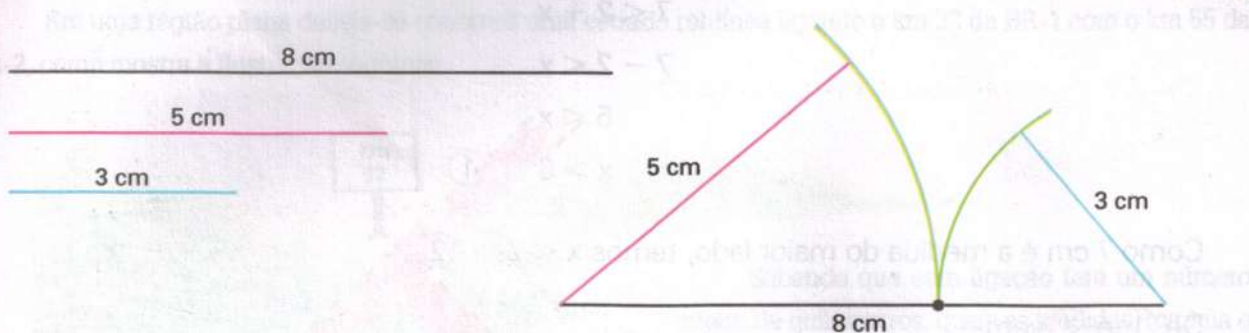
1. Construir um triângulo cujos lados medem 8 cm, 6 cm e 5 cm.



Portanto, é possível construir um triângulo cujos lados medem 8 cm, 6 cm e 5 cm.

Note que a soma das medidas dos dois lados menores é *maior* que a medida do maior lado ($6\text{ cm} + 5\text{ cm} > 8\text{ cm}$).

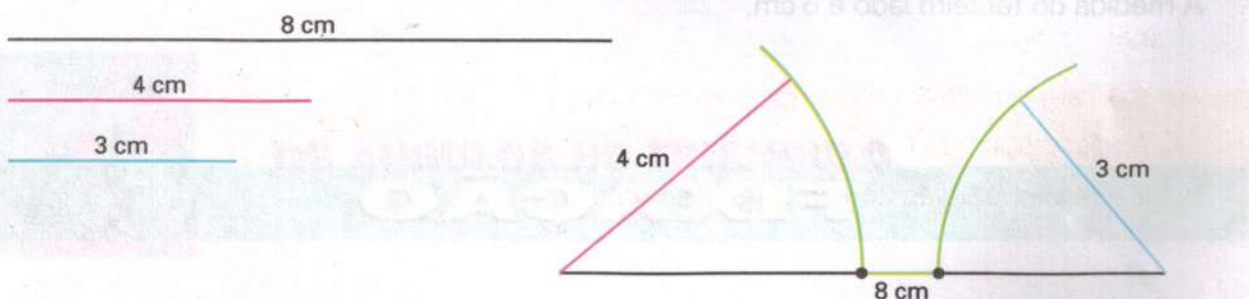
2. Construir um triângulo cujos lados medem 8 cm, 5 cm e 3 cm.



Logo, não é possível construir um triângulo cujos lados medem 8 cm, 5 cm e 3 cm.

Note que a soma das medidas dos dois lados menores é *igual* à medida do maior lado ($5\text{ cm} + 3\text{ cm} = 8\text{ cm}$).

3. Construir um triângulo cujos lados medem 8 cm, 4 cm e 3 cm.



Logo, não é possível construir um triângulo cujos lados medem 8 cm, 4 cm e 3 cm.

Note que a soma das medidas dos dois lados menores é *menor* que a medida do maior lado ($4\text{ cm} + 3\text{ cm} < 8\text{ cm}$).

Observe que, para construir um triângulo, é necessário que a soma das medidas dos lados menores seja maior que a medida do lado maior.

Sendo assim, podemos escrever a propriedade:

Em qualquer triângulo, a medida de um lado deve ser sempre *menor* que a soma das medidas dos outros dois lados.

Vejamos mais alguns exemplos:

4. É possível haver um triângulo com os lados medindo 13 cm, 6,9 cm e 7,2 cm?

Podemos verificar que:

$$13\text{ cm} < 6,9\text{ cm} + 7,2\text{ cm}$$

medida do lado maior

soma das medidas dos outros lados

Sim, é possível haver um triângulo com os lados medindo 13 cm, 6,9 cm e 7,2 cm.

5. Num triângulo, as medidas dos três lados são números inteiros. O maior dos lados mede 7 cm e um dos outros dois lados mede 2 cm. Qual a medida do terceiro lado desse triângulo? Chamando a medida do terceiro lado de x e aplicando a propriedade, temos:

$$7 < 2 + x$$

$$7 - 2 < x$$

$$5 < x$$

$$x > 5 \quad \textcircled{1}$$

Como 7 cm é a medida do maior lado, temos $x < 7$ $\textcircled{2}$

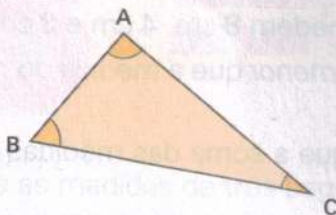
De $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ vem:

$$\left. \begin{array}{l} x > 5 \\ e \\ x < 7 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

A medida do terceiro lado é 6 cm.

FIXAÇÃO

- 1 No $\triangle ABC$ da figura abaixo, indique:



- o lado oposto ao ângulo \hat{A}
- o lado oposto ao ângulo \hat{C}
- o ângulo oposto ao lado \overline{AC}

- 2 Verifique se existem triângulos cujos lados tenham as medidas seguintes:

- 4 cm, 6 cm e 9 cm
- 10 cm, 8 cm e 8 cm
- 5 cm, 5 cm e 3 cm
- 7 cm, 5 cm e 2 cm
- 15 cm, 8 cm e 6 cm
- 3,5 cm; 4,2 cm e 7,5 cm

- 3 Um aluno pretende construir um triângulo usando três varetas de madeira. Sabendo-se que as varetas medem 1,20 m, 70 cm e 48 cm, respectivamente, será possível a esse aluno construir o triângulo?

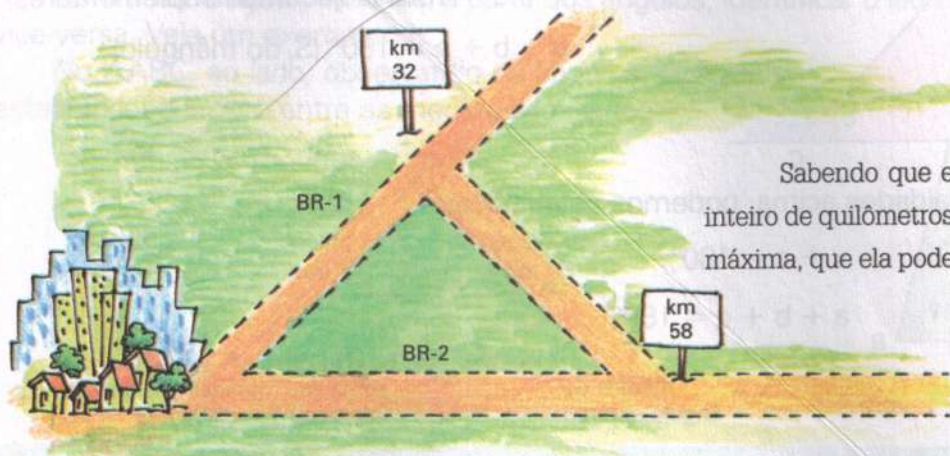
- 4 Num triângulo, o maior lado mede 10 cm e um dos outros dois lados mede 3 cm. Quais as possíveis medidas inteiras do terceiro lado do triângulo?

- 5 O maior lado de um triângulo mede 11 cm. Um dos outros dois lados mede 8 cm. Qual a medida inteira mínima que o terceiro lado deve ter?

- 6 Dois lados de um triângulo medem 7 cm e 4 cm. Qual a medida inteira máxima e mínima que o terceiro lado pode ter?

- 7 Determine a medida do maior lado de um triângulo, sabendo que ela é expressa por um número inteiro de centímetros e que os outros dois lados medem 3 cm e 9 cm.

Em uma região plana deseja-se construir uma estrada retilínea ligando o km 32 da BR-1 com o km 55 da BR-2, como mostra a ilustração seguinte:



Sabendo que essa ligação terá um número inteiro de quilômetros, quais as medidas, mínima e máxima, que ela poderá ter?



OS ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

Sabemos que em todo triângulo:

$$S_i = 180^\circ$$

$$e \quad S_e = 360^\circ$$

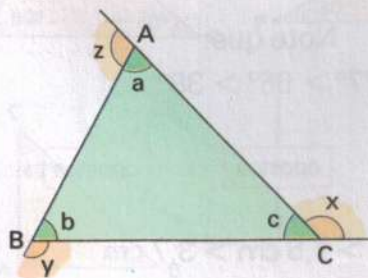
soma das medidas dos
ângulos internos

soma das medidas dos
ângulos externos

Vamos estudar agora três casos de relações: duas entre ângulos e uma entre lados e ângulos de um triângulo.

1º caso: Relação entre as medidas de um ângulo interno e o externo adjacente a ele

Em qualquer triângulo, o ângulo interno e o externo num mesmo vértice são *adjacentes suplementares*.



$$a + z = 180^\circ$$

$$b + y = 180^\circ$$

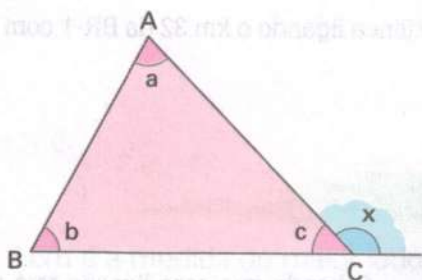
$$c + x = 180^\circ$$

medida do ângulo interno

medida do ângulo externo

2º caso: Relação entre as medidas de um ângulo externo e dos dois ângulos internos não-adjacentes

Olhando a figura abaixo, podemos estabelecer as seguintes relações:



$$x + c = 180^\circ \text{ (adjacentes suplementares)}$$

$$a + b + c = 180^\circ \text{ (S}_1 \text{ do triângulo)}$$

A partir das duas igualdades acima, podemos estabelecer:

$$x + c = 180^\circ$$

$$a + b + c = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = a + b$$

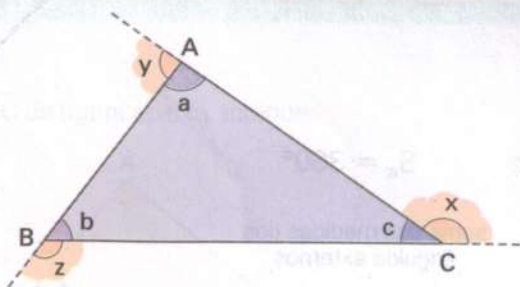
medida do ângulo externo

soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes

De um modo geral, podemos enunciar:

Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele.

Então:



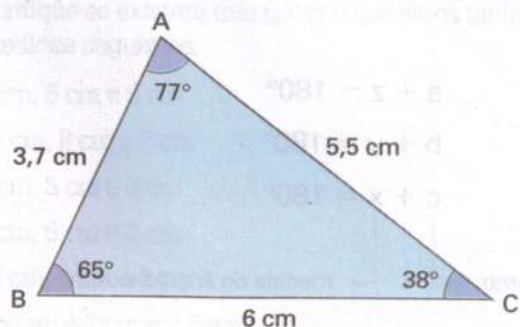
$$x = a + b$$

$$y = b + c$$

$$z = a + c$$

3º caso: Relação de desigualdade entre lados e ângulos de um triângulo

Observe o triângulo abaixo, no qual estão assinaladas as medidas dos seus ângulos e as medidas (aproximadas) de seus lados.



Note que:

$$77^\circ > 65^\circ > 38^\circ$$

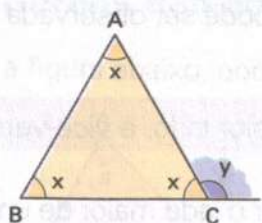
opostos

opostos

opostos

$$6 \text{ cm} > 5,5 \text{ cm} > 3,7 \text{ cm}$$

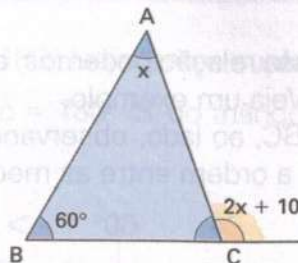
6 Na figura abaixo, determine as medidas x e y .



7 Num $\triangle ABC$, o ângulo externo no vértice A mede 116° . Sabendo que $\text{med}(\hat{B}) = x$ e $\text{med}(\hat{C}) = x - 20^\circ$, determine as medidas dos três ângulos internos do $\triangle ABC$.

8 Num $\triangle MNP$, o ângulo interno \hat{M} mede 72° . Sabe-se que a medida do ângulo externo no vértice P mede 117° . Qual a medida do ângulo interno \hat{N} ?

9 No triângulo abaixo, determine o valor de x .



40

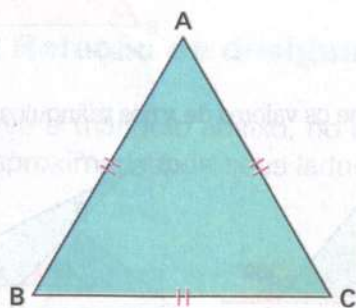
CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

Podemos classificar os triângulos em relação a seus *lados* ou a seus *ângulos*.

Quanto aos lados

Em relação às medidas dos lados, podemos classificar os triângulos em:

❖ **Equilátero:** quando os três lados são congruentes.

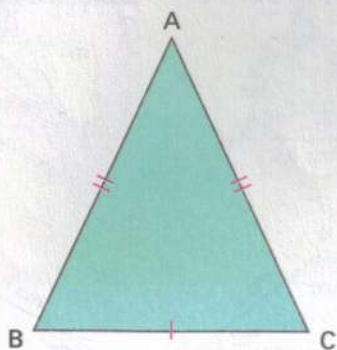


$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$$



Marinez Maravalhas Gomes

- ❖ **Isósceles:** quando apenas dois lados são congruentes.

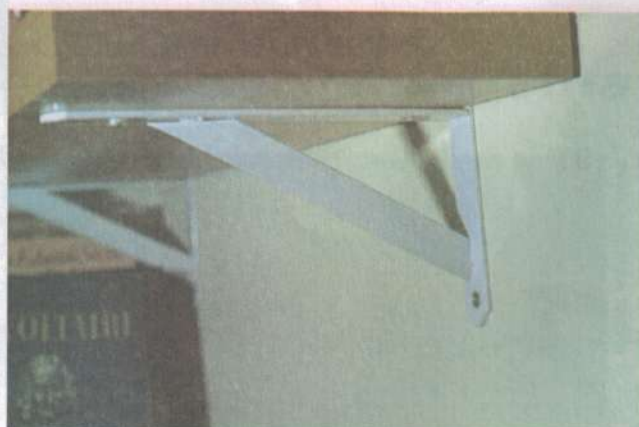
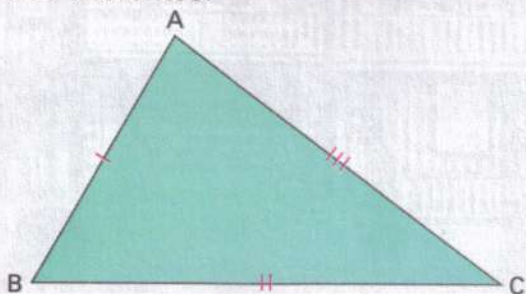


$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$



Sérgio Dotta Jr/The Next

- ❖ **Escaleno:** quando os três lados têm medidas diferentes.



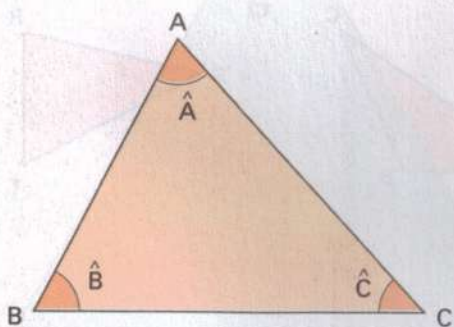
Nelson Toledo

$$\text{med}(\overline{AB}) \neq \text{med}(\overline{AC}) \neq \text{med}(\overline{BC}) \neq \text{med}(\overline{AB})$$

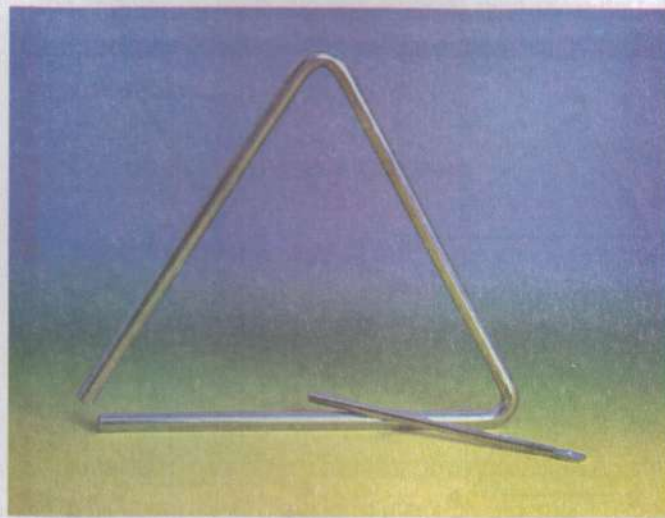
Quanto aos ângulos

Em relação às medidas dos ângulos, podemos classificar os triângulos em:

- ❖ **Acutângulo:** quando os três ângulos são agudos.

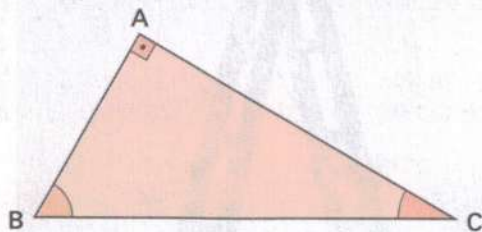


$$\text{med}(\hat{A}) < 90^\circ, \text{med}(\hat{B}) < 90^\circ \text{ e} \\ \text{med}(\hat{C}) < 90^\circ$$

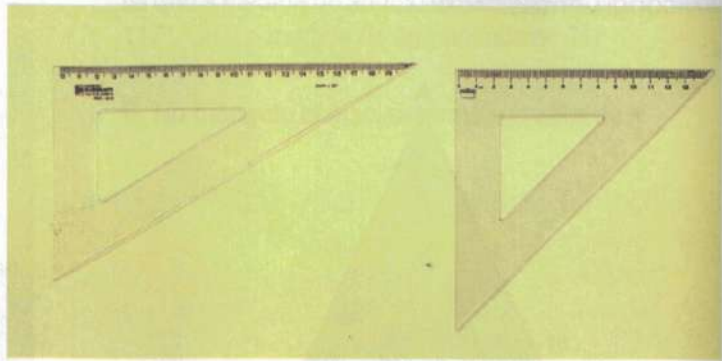


Marinez Maravalhas Gomes

❖ **Retângulo:** quando um dos ângulos é reto.

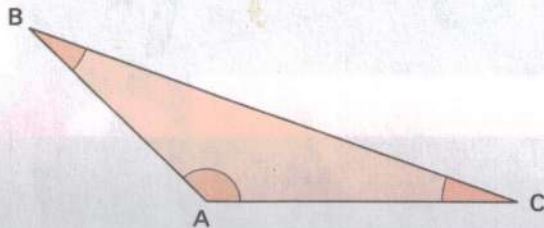


$$\text{med } (\hat{A}) = 90^\circ, \text{ med } (\hat{B}) < 90^\circ \text{ e} \\ \text{med } (\hat{C}) < 90^\circ$$



Marinez Maravalhas Gomes

❖ **Obtusângulo:** quando um dos ângulos é obtuso.



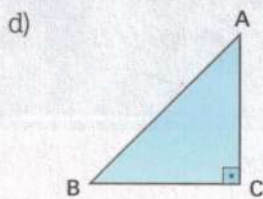
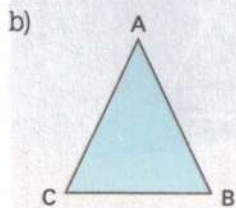
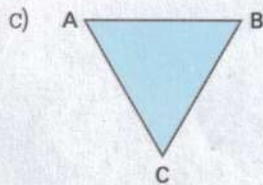
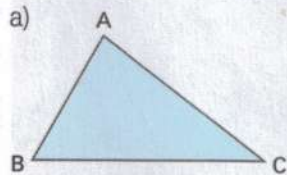
$$90^\circ < \text{med } (\hat{A}) < 180^\circ, \text{ med } (\hat{B}) < 90^\circ \\ \text{e med } (\hat{C}) < 90^\circ$$



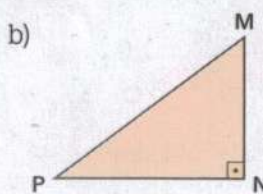
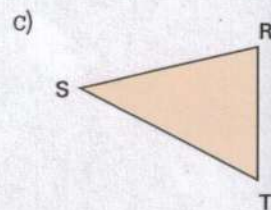
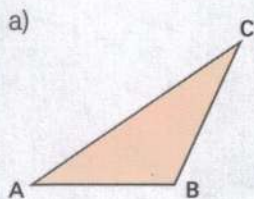
Gert Wagner/Bilderberg/Stock Photos

FIXAÇÃO

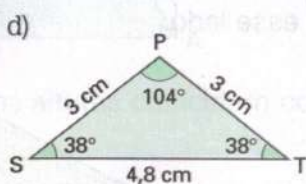
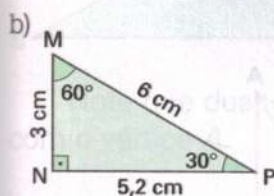
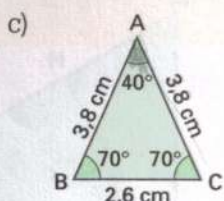
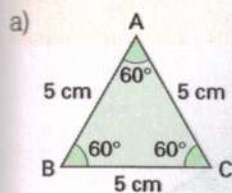
1 Utilizando uma régua, meça os lados dos triângulos e classifique-os em equilátero, isósceles ou escaleno.



2 Observe os triângulos abaixo e classifique-os em acutângulo, retângulo ou obtusângulo.



3 Observe os triângulos seguintes e classifique-os quanto aos lados e quanto aos ângulos.

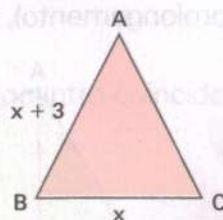


4 O perímetro de um triângulo equilátero é 18 cm. Quais as medidas dos lados desse triângulo?

5 Num triângulo isósceles, dois lados medem 5 cm e 7 cm, respectivamente. Nessas condições, responda:

- Quais as possíveis medidas do terceiro lado?
- Qual o perímetro do triângulo em cada caso do item a)?

6 O $\triangle ABC$ ao lado é isósceles, sendo $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Sabendo que o seu perímetro é 15,6 cm, determine o valor de x .

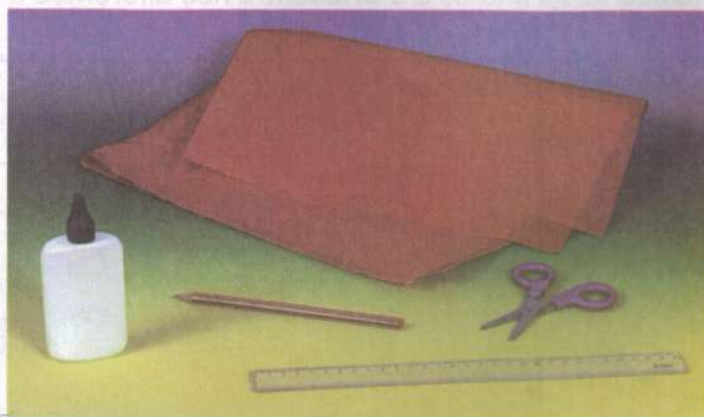


Explorando Geometria

Você vai precisar de:

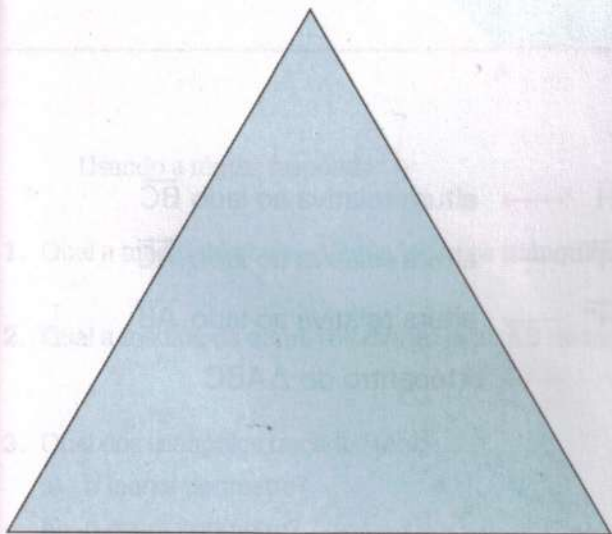
- lápis
- papel de seda
- régua
- tesoura
- cola

Não pode usar transferidor.



Marinez Marevalhas Gomes

Reproduza duas vezes esse triângulo:



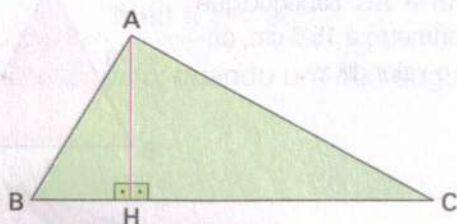
Para cada item a seguir, dê a medida dos lados e dos ângulos do triângulo que se pede para colar no caderno, classificando-o, a seguir, quanto aos lados e quanto aos ângulos.

- Cole no caderno um dos triângulos.
- Dobre o outro triângulo de modo que um dos vértices recaia sobre outro vértice. Corte-o na dobra e cole uma das partes no caderno.
- Pegue a outra parte do triângulo obtida no item 2. Faça uma dobra para obter a bissetriz do menor ângulo, corte-a na dobra e cole o triângulo maior no caderno.

ALTURA, MEDIANA E BISSETRIZ DE UM TRIÂNGULO

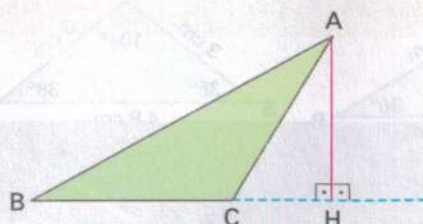
Altura

Altura de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto (ou ao seu prolongamento), formando um ângulo de 90° com esse lado.



$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$

\overline{AH} é a altura relativa ao lado \overline{BC}

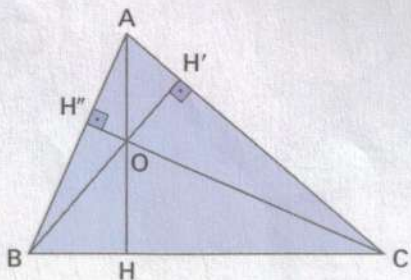


$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$

\overline{AH} é a altura relativa ao lado \overline{BC}

Todo triângulo possui três alturas, que se encontram em um único ponto denominado *ortocentro*. Observe as alturas e o ortocentro nos diferentes triângulos:

Num triângulo acutângulo



\overline{AH} \rightarrow altura relativa ao lado \overline{BC}

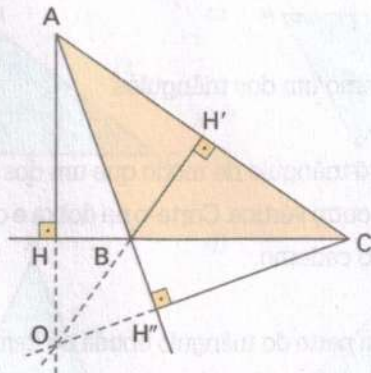
$\overline{BH'}$ \rightarrow altura relativa ao lado \overline{AC}

$\overline{CH''}$ \rightarrow altura relativa ao lado \overline{AB}

O \rightarrow ortocentro: ponto de encontro das alturas do $\triangle ABC$

Note que o ortocentro pertence ao triângulo e não coincide com qualquer um de seus vértices.

Num triângulo obtusângulo



\overline{AH} \rightarrow altura relativa ao lado \overline{BC}

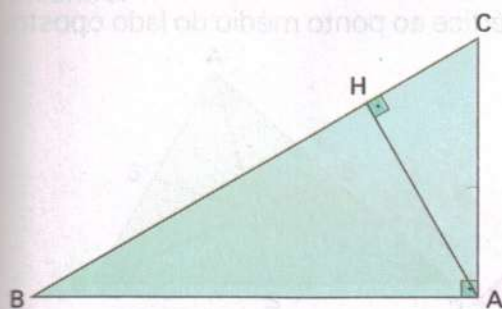
$\overline{BH'}$ \rightarrow altura relativa ao lado \overline{AC}

$\overline{CH''}$ \rightarrow altura relativa ao lado \overline{AB}

O \rightarrow ortocentro do $\triangle ABC$

Note que o ortocentro não pertence ao triângulo.

Num triângulo retângulo

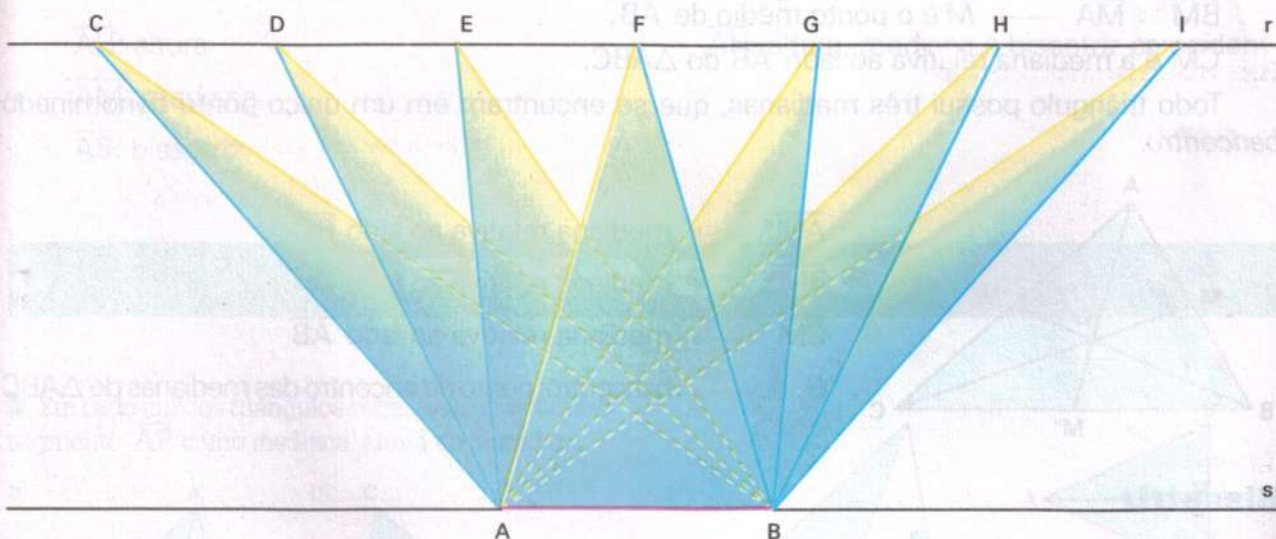


- \overline{AH} → altura relativa ao lado \overline{BC}
- \overline{CA} → altura relativa ao lado \overline{AB}
- \overline{BA} → altura relativa ao lado \overline{AC}
- A → ortocentro do $\triangle ABC$

Note que duas das alturas coincidem com os lados \overline{AC} e \overline{BC} e que o ortocentro coincide com o vértice A .

Explorando Medidas

A partir de duas retas paralelas, r e s , destacamos um segmento \overline{AB} em uma das retas e traçamos vários triângulos com base \overline{AB} e um vértice na outra reta paralela. Veja:

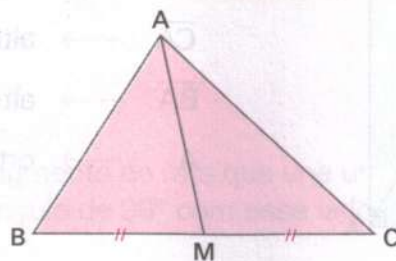


Usando a régua, responda:

1. Qual a medida da base \overline{AB} em todos os triângulos?
2. Qual a medida da altura relativa ao lado \overline{AB} de todos os triângulos traçados? O que você observou?
3. Qual dos triângulos traçados tem:
 - a) o menor perímetro?
 - b) o maior perímetro?

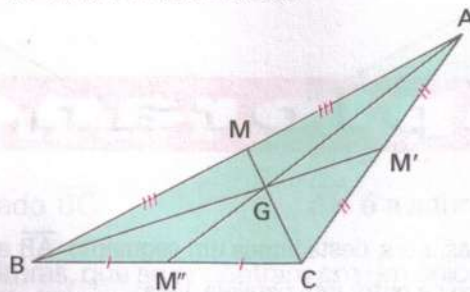
Mediana

Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



$\overline{BM} \cong \overline{MC} \rightarrow M$ é o ponto médio de \overline{BC} .

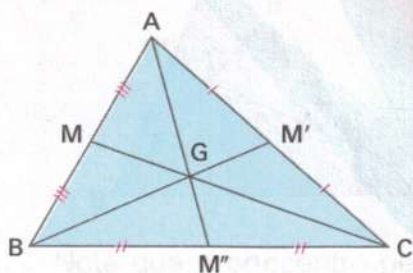
\overline{AM} é a mediana relativa ao lado \overline{BC} do $\triangle ABC$.



$\overline{BM} \cong \overline{MA} \rightarrow M$ é o ponto médio de \overline{AB} .

\overline{CM} é a mediana relativa ao lado \overline{AB} do $\triangle ABC$.

Todo triângulo possui três medianas, que se encontram em um único ponto denominado *baricentro*.



$\overline{AM''}$ \rightarrow mediana relativa ao lado \overline{BC}

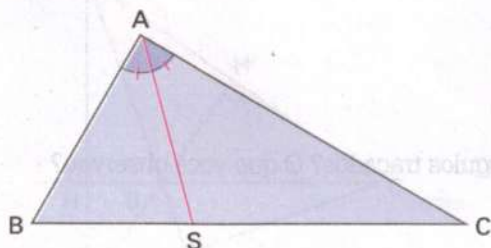
$\overline{BM'}$ \rightarrow mediana relativa ao lado \overline{AC}

\overline{CM} \rightarrow mediana relativa ao lado \overline{AB}

G \rightarrow baricentro: ponto de encontro das medianas do $\triangle ABC$

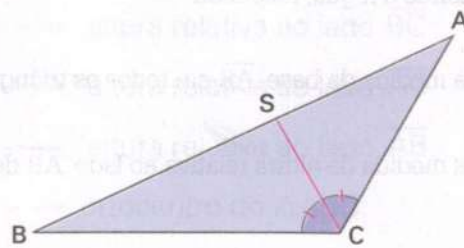
Bissetriz

Bissetriz de um triângulo é o segmento que une um vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos de mesma medida.



$\widehat{BAS} \cong \widehat{CAS}$

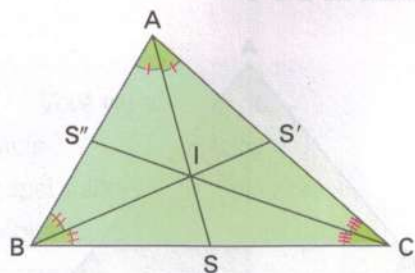
\overline{AS} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{A}



$\widehat{BCS} \cong \widehat{ACS}$

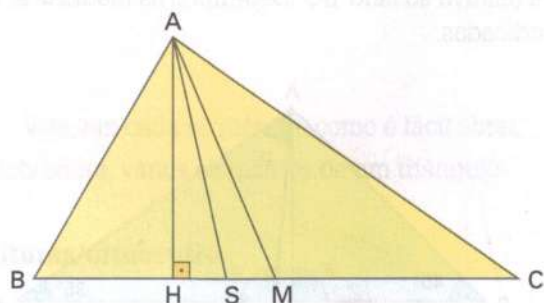
\overline{CS} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{C}

Todo triângulo possui três bissetrizes, que se encontram em um único ponto denominado *incentro*.

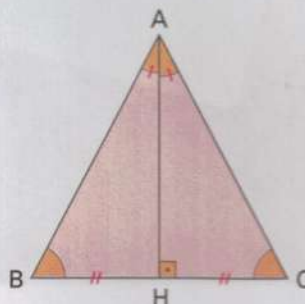


- \overline{AS} → bissetriz relativa ao ângulo \hat{A}
- $\overline{BS'}$ → bissetriz relativa ao ângulo \hat{B}
- $\overline{CS''}$ → bissetriz relativa ao ângulo \hat{C}
- I → incentro: ponto de encontro das bissetrizes do $\triangle ABC$

Em geral, a altura, as medianas e as bissetrizes de um triângulo não coincidem. Porém, em alguns triângulos especiais, pode haver coincidência entre esses três elementos.



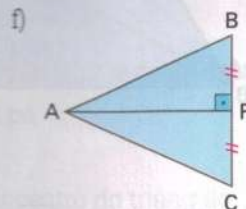
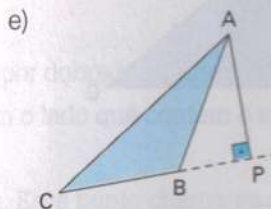
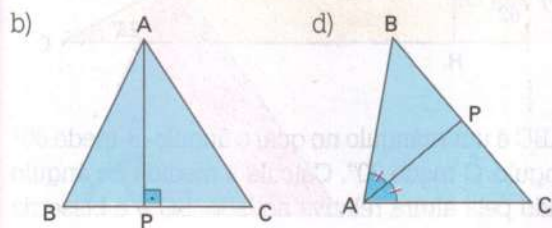
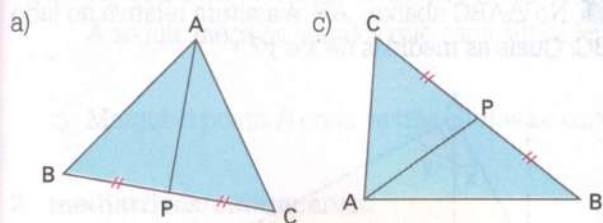
- \overline{AH} : altura
- \overline{AM} : mediana
- \overline{AS} : bissetriz



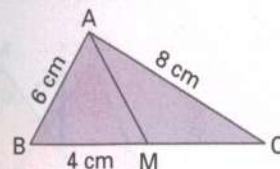
\overline{AH} : altura, mediana e bissetriz coincidem

FIXAÇÃO

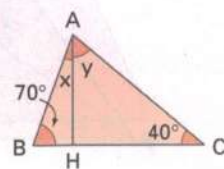
1 Em cada um dos triângulos seguintes, classifique o segmento \overline{AP} como mediana, altura ou bissetriz.



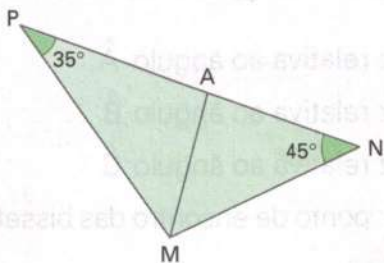
2 Na figura ao lado, sendo \overline{AM} a mediana do $\triangle ABC$, calcule o seu perímetro.



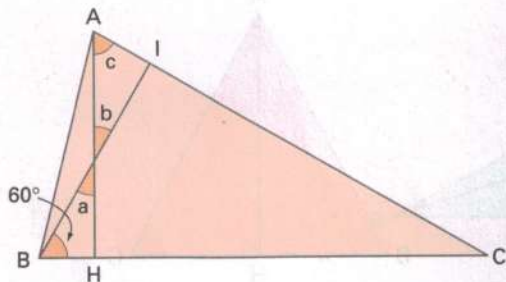
3 Sendo \overline{AH} a altura do $\triangle ABC$ ao lado, determine as medidas de x e y .



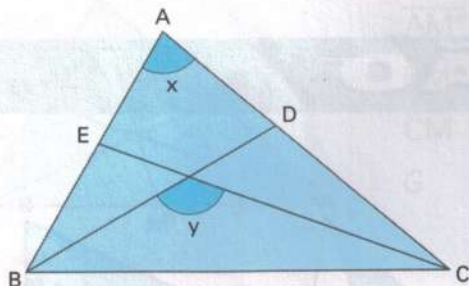
4 No $\triangle MNP$ abaixo, \overline{MA} é a bissetriz de \hat{M} . Nessas condições, qual a medida de \widehat{PMA} ?



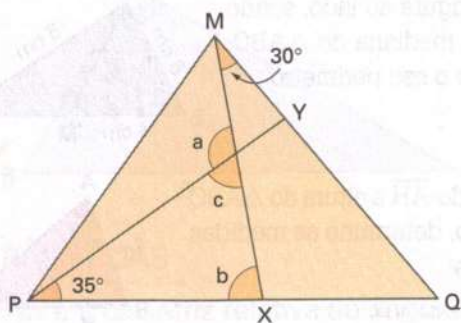
5 Na figura abaixo, \overline{AH} é altura e \overline{BI} é outra altura. Determine as medidas a , b e c indicadas.



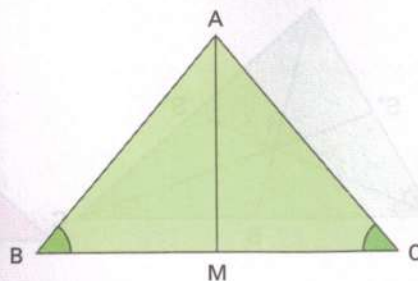
6 No $\triangle ABC$, $\widehat{B} = 60^\circ$ e $\widehat{C} = 40^\circ$. Sabendo que \overline{BD} e \overline{CE} são as bissetrizes de \hat{B} e \hat{C} , respectivamente, determine as medidas x e y .



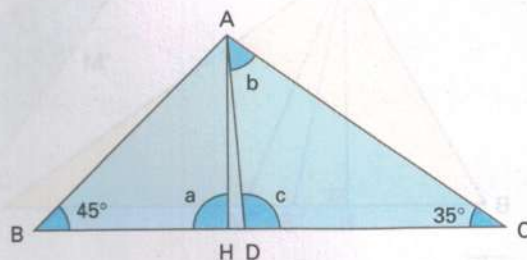
7 No $\triangle MPQ$ abaixo, \overline{MX} e \overline{PY} são bissetrizes. Calcule as medidas a , b e c .



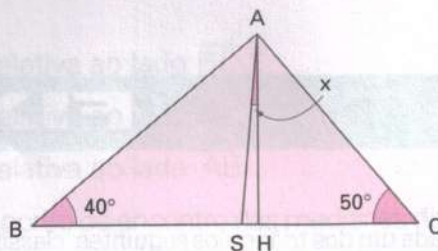
8 No $\triangle ABC$ abaixo, o ângulo \hat{A} mede 80° . Sabendo que \overline{AM} é, ao mesmo tempo, altura e bissetriz, determine as medidas de \hat{B} e \hat{C} .



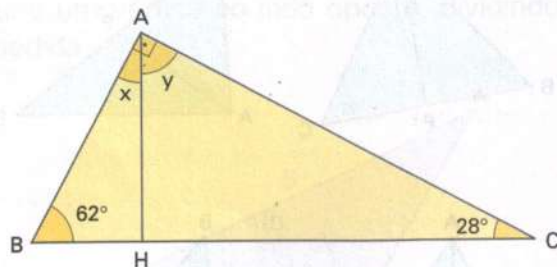
9 Na figura abaixo, \overline{AD} é bissetriz de \hat{A} e \overline{AH} é altura relativa ao lado \overline{BC} . Determine as medidas a , b e c indicadas.



10 Na figura abaixo, \overline{AH} é altura e \overline{AS} é bissetriz. Nessas condições, determine o valor de x .



11 No $\triangle ABC$ abaixo, \overline{AH} é a altura relativa ao lado \overline{BC} . Quais as medidas de x e y ?

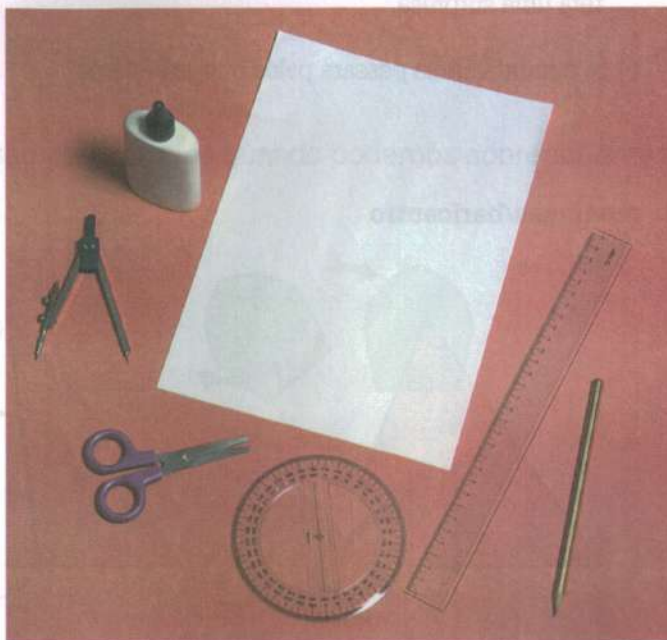


12 ABC é um triângulo no qual o ângulo \hat{B} mede 60° e o ângulo \hat{C} mede 20° . Calcule a medida do ângulo formado pela altura relativa ao lado \overline{BC} e a bissetriz do ângulo \hat{A} .

Explorando Geometria

Você vai precisar de:

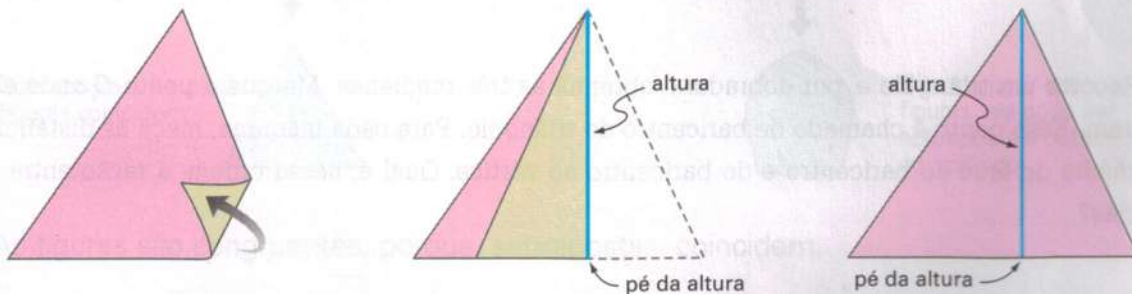
- lápis
- papel sulfite
- régua
- tesoura
- cola
- compasso
- transferidor



Marinez Maravalhas Gomes

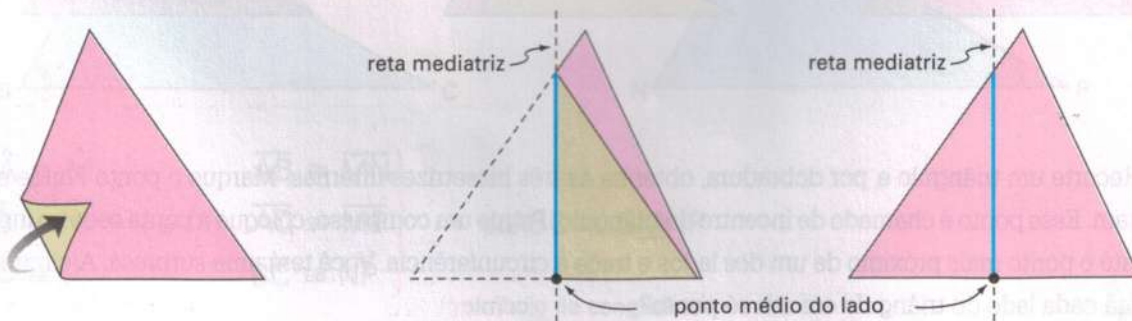
Veja, em cada seqüência, como é fácil obter, por dobradura, vários elementos de um triângulo:

1. alturas/ortocentro



- Meça com um transferidor um ângulo formado por uma altura e pelo lado que contém o ponto chamado de pé da altura relativa a esse lado.
- Agora é com você: recorte um triângulo como esse e, por dobradura, obtenha as três alturas desse triângulo. A seguir, meça os ângulos que cada altura forma com o lado que contém o seu pé.
- Marque o ponto H onde as três alturas se encontram. Esse ponto chama-se ortocentro do triângulo.

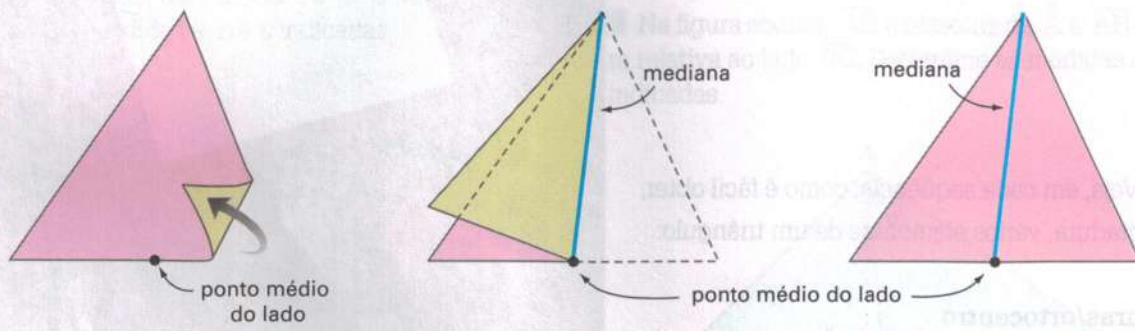
2. mediatrizes/circuncentro



a) Recorte um triângulo e, por dobradura, obtenha as suas três mediatrizes. Marque o ponto C onde elas se encontram. Esse ponto é chamado de circuncentro do triângulo. Cole o triângulo no caderno. Pegue um compasso, coloque a ponta seca no circuncentro, abra-o até um dos vértices e trace a circunferência. Você terá uma surpresa.

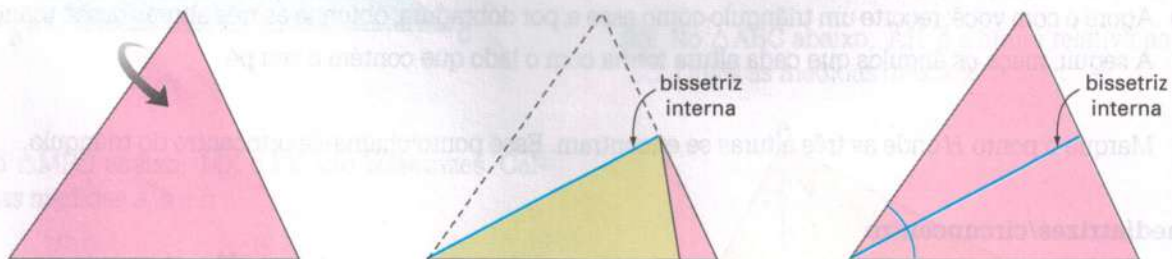
b) A circunferência passará pelos outros vértices?

3. medianas/baricentro



Recorte um triângulo e, por dobradura, obtenha as três medianas. Marque o ponto G onde elas se encontram. Esse ponto é chamado de baricentro do triângulo. Para cada mediana, meça as distâncias do ponto médio do lado ao baricentro e do baricentro ao vértice. Qual é, nessa ordem, a razão entre essas distâncias?

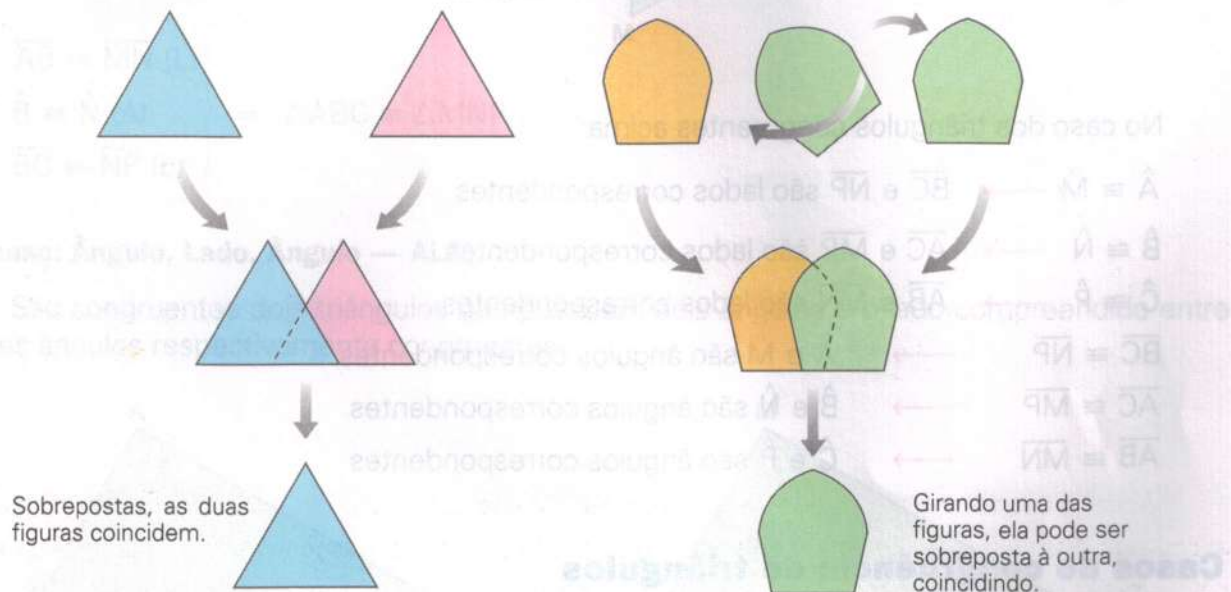
4. bissetrizes internas/incentro



Recorte um triângulo e, por dobradura, obtenha as três bissetrizes internas. Marque o ponto I onde elas se encontram. Esse ponto é chamado de incentro do triângulo. Pegue um compasso, coloque a ponta seca no incentro, abra-o até o ponto mais próximo de um dos lados e trace a circunferência. Você terá uma surpresa. A circunferência tocará cada lado do triângulo em um só ponto?

Figuras congruentes

Dizemos que duas figuras geométricas são *congruentes* quando podemos sobrepor uma à outra, fazendo com que elas coincidam.

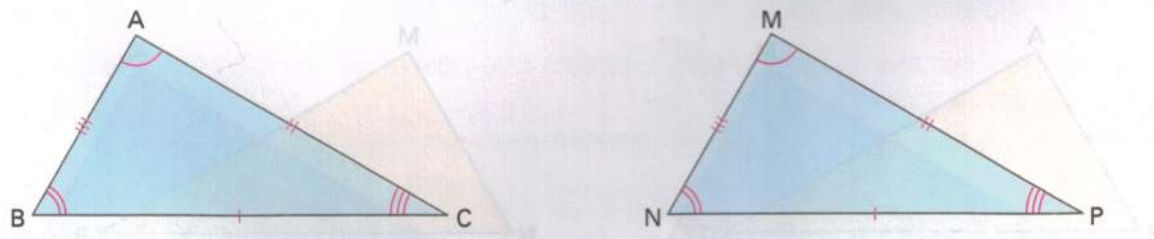


As figuras são congruentes, porque, sobrepostas, coincidem.

Triângulos congruentes

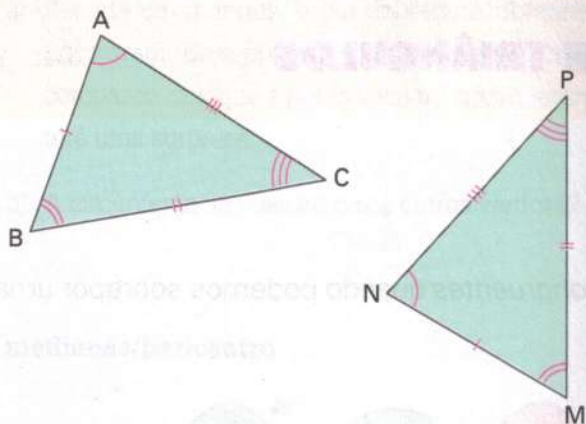
Dois triângulos são *congruentes* quando eles têm os lados respectivamente congruentes e os ângulos respectivamente congruentes.

Observe os triângulos ABC e MNP:



$$\begin{array}{l}
 \hat{A} \cong \hat{M} \\
 \hat{B} \cong \hat{N} \\
 \hat{C} \cong \hat{P}
 \end{array}
 \quad e \quad
 \left. \begin{array}{l}
 \overline{AB} \cong \overline{MN} \\
 \overline{AC} \cong \overline{MP} \\
 \overline{BC} \cong \overline{NP}
 \end{array} \right\}
 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNP$$

↓
símbolo de congruência



Nos triângulos congruentes, utilizamos as seguintes denominações:

Lados correspondentes: são os lados opostos aos ângulos congruentes nos dois triângulos.

Ângulos correspondentes: são os ângulos opostos aos lados congruentes nos dois triângulos.

No caso dos triângulos congruentes acima:

$\hat{A} \cong \hat{M} \rightarrow \overline{BC}$ e \overline{NP} são lados correspondentes

$\hat{B} \cong \hat{N} \rightarrow \overline{AC}$ e \overline{MP} são lados correspondentes

$\hat{C} \cong \hat{P} \rightarrow \overline{AB}$ e \overline{MN} são lados correspondentes

$\overline{BC} \cong \overline{NP} \rightarrow \hat{A}$ e \hat{M} são ângulos correspondentes

$\overline{AC} \cong \overline{MP} \rightarrow \hat{B}$ e \hat{N} são ângulos correspondentes

$\overline{AB} \cong \overline{MN} \rightarrow \hat{C}$ e \hat{P} são ângulos correspondentes

Casos de congruência de triângulos

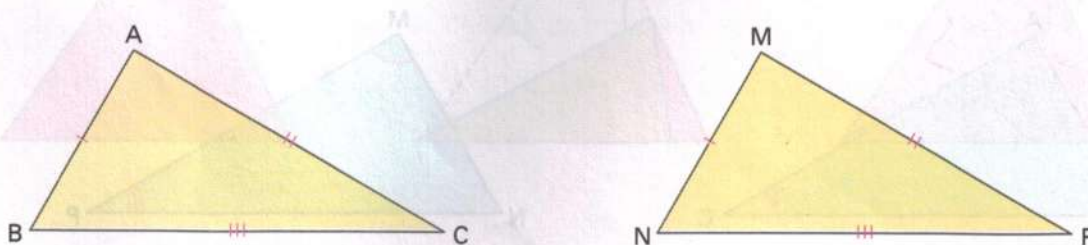
Já vimos que, para saber se dois triângulos são congruentes, devemos verificar se os seus lados são respectivamente congruentes e se os seus ângulos são respectivamente congruentes.

No entanto, existem condições que, uma vez satisfeitas, garantem a congruência de dois triângulos sem a necessidade de verificar a congruência entre os seis elementos (3 ângulos e 3 lados).

Essas condições são chamadas *casos de congruência de triângulos*. Vejamos quais são esses casos:

1º caso: Lado, Lado, Lado — LLL

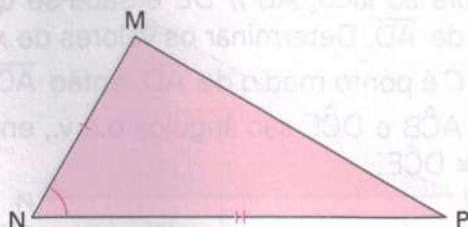
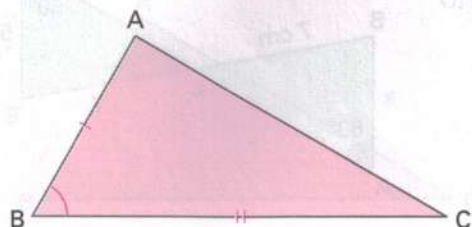
Dois triângulos que possuem os três lados respectivamente congruentes são congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{MN} \text{ (L)} \\ \overline{AC} \cong \overline{MP} \text{ (L)} \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} \text{ (L)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

2º caso: Lado, Ângulo, Lado — LAL

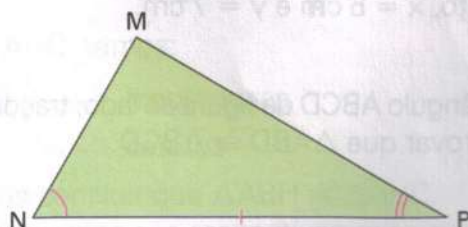
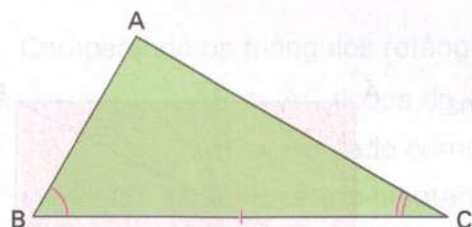
São congruentes dois triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido por esses lados respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{MN} \text{ (L)} \\ \hat{B} \cong \hat{N} \text{ (A)} \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} \text{ (L)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

3º caso: Ângulo, Lado, Ângulo — ALA

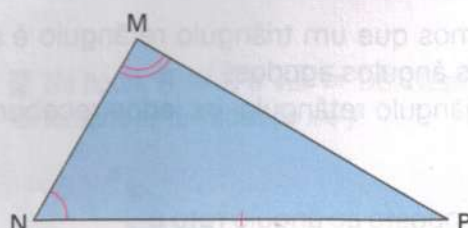
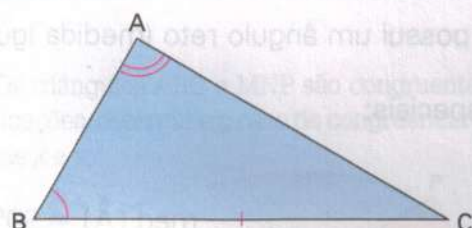
São congruentes dois triângulos que possuem dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{N} \text{ (A)} \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} \text{ (L)} \\ \hat{C} \cong \hat{P} \text{ (A)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

4º caso: Lado, Ângulo Adjacente, Ângulo Oposto — LAA_o

São congruentes dois triângulos que possuem um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} \cong \overline{NP} \text{ (L)} \\ \hat{B} \cong \hat{N} \text{ (A)} \\ \hat{A} \cong \hat{M} \text{ (A}_o\text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

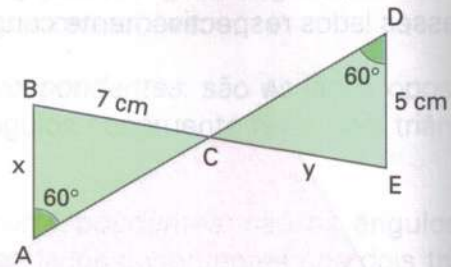
Podemos utilizar os casos de congruência para determinar elementos desconhecidos nos triângulos e demonstrar diversas propriedades importantes da Geometria.

Vejam alguns exemplos.

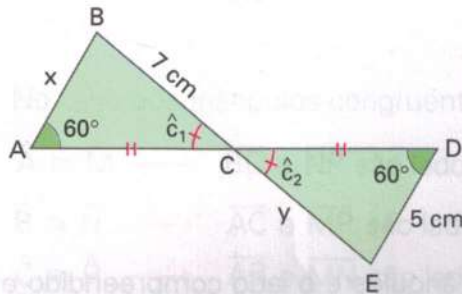
1. Na figura ao lado, $AB \parallel DE$ e sabe-se que C é ponto médio de \overline{AD} . Determinar os valores de x e y .

Como C é ponto médio de \overline{AD} , então $\overline{AC} \cong \overline{CD}$.

Como $\hat{A}CB$ e $\hat{D}CE$ são ângulos o.p.v., então $\hat{A}CB \cong \hat{D}CE$.



Vamos então comparar os triângulos ABC e CDE:



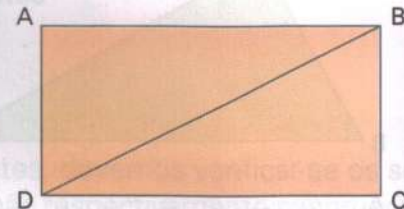
$$\hat{A} \cong \hat{D} \text{ (dado)} \quad (A)$$

$$\overline{AC} \cong \overline{CD} \text{ (C é ponto médio)} \quad (L)$$

$$c_1 \cong c_2 \text{ (o.p.v.)} \quad (A)$$

Pelo caso ALA, temos que $\triangle ABC \cong \triangle CDE$. Logo, os lados correspondentes são congruentes. Portanto, $x = 5 \text{ cm}$ e $y = 7 \text{ cm}$.

2. No retângulo ABCD da figura ao lado, traçou-se a diagonal \overline{BD} . Provar que $\triangle ABD \cong \triangle BCD$.



Comparando os triângulos ABD e BCD, temos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ (lados opostos do retângulo)} \quad (L)$$

$$\overline{AD} \cong \overline{BC} \text{ (lados opostos do retângulo)} \quad (L)$$

$$\overline{BD} \cong \overline{BD} \text{ (lado comum)} \quad (L)$$

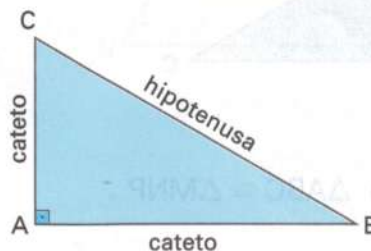
Pelo caso LLL, resulta $\triangle ABD \cong \triangle BCD$.

Um caso especial de congruência para os triângulos retângulos

Já vimos que um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto (medida igual a 90°) e dois ângulos agudos.

No triângulo retângulo, os lados recebem nomes especiais:

- ✓ O lado oposto ao ângulo reto é chamado *hipotenusa*.
- ✓ Os lados que formam o ângulo reto são chamados *catetos*.



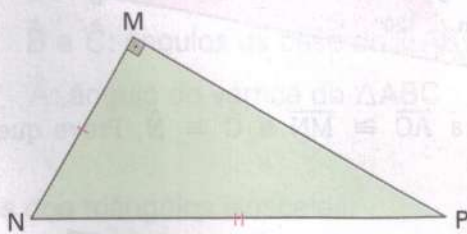
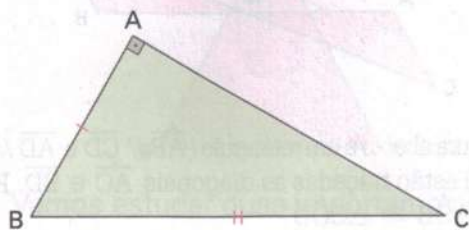
$$\text{med}(\hat{A}) = 90^\circ$$

$$\text{med}(\hat{B}) < 90^\circ$$

$$\text{med}(\hat{C}) < 90^\circ$$

Caso de congruência de triângulos retângulos: cateto-hipotenusa

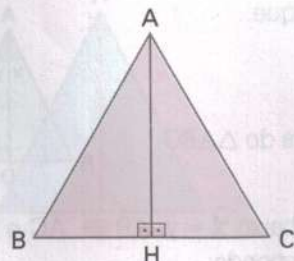
São congruentes dois triângulos retângulos que possuem a hipotenusa e um dos catetos respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{M} \quad \rightarrow \text{ângulos retos} \\ \overline{AB} \cong \overline{MN} \quad \rightarrow \text{catetos} \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} \quad \rightarrow \text{hipotenusas} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

Vejam os um exemplo:

O $\triangle ABC$ ao lado é equilátero. Mostrar que a altura \overline{AH} coincide com a mediana relativa ao lado \overline{BC} .

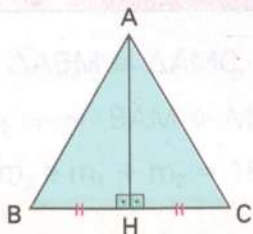


Comparando os triângulos retângulos ABH e AHC, temos:

$$\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{AC} \text{ (lados do } \triangle \text{ equilátero)} \quad \rightarrow \text{hipotenusas} \\ \overline{AH} \cong \overline{AH} \text{ (lado comum)} \quad \rightarrow \text{catetos} \end{array}$$

Pelo caso especial cateto-hipotenusa podemos concluir que $\triangle ABH \cong \triangle AHC$.

Como os triângulos são congruentes, seus elementos são respectivamente congruentes.



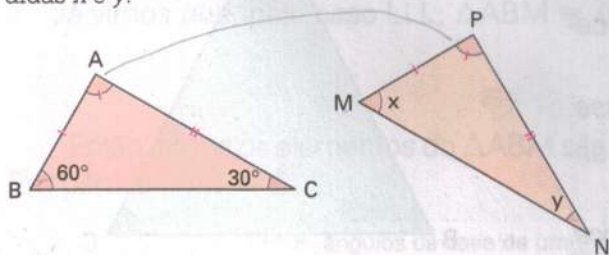
Em particular:

$$\overline{BH} \cong \overline{HC} \quad \rightarrow \quad H \text{ é ponto médio de } \overline{BC}.$$

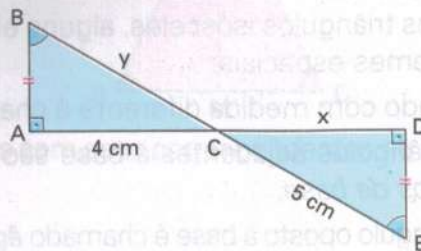
Então, \overline{AH} é a mediana relativa ao lado \overline{BC} .

FIXAÇÃO

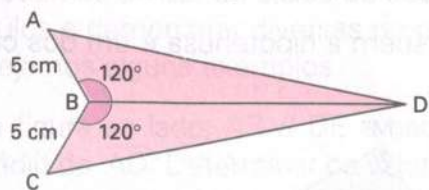
1 Os triângulos ABC e MNP são congruentes. Pelas indicações, determine o caso de congruência e as medidas x e y .



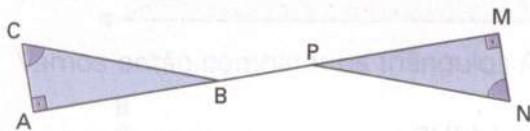
2 Na figura $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Nessas condições, determine as medidas de x e y .



3 Na figura abaixo, prove que $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

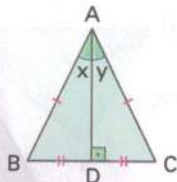


4 Na figura $\overline{AC} \cong \overline{MN}$ e $\hat{C} \cong \hat{N}$. Prove que $\overline{AB} \cong \overline{PM}$.



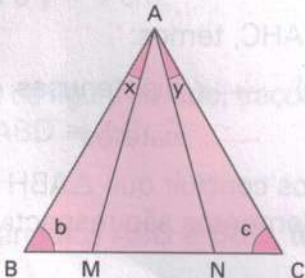
5 No $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{BD} \cong \overline{DC}$. Nessas condições, mostre que:

- $x = y$
- $\hat{B} \cong \hat{C}$
- \overline{BD} é altura do $\triangle ABC$

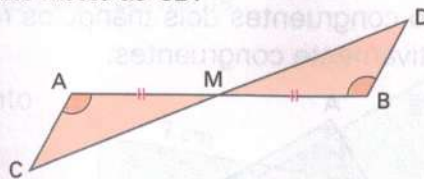


6 Na figura abaixo, $x = y$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $b = c$. Nessas condições, responda:

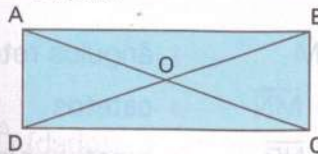
- Que caso de congruência garante que $\triangle ABM \cong \triangle ACN$?
- O lado \overline{BM} é congruente a qual lado do $\triangle ACN$?
- O lado \overline{AN} é congruente a qual lado do $\triangle ABM$?



7 Na figura abaixo, $\hat{A} \cong \hat{B}$ e $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Prove que M é ponto médio de \overline{CD} .

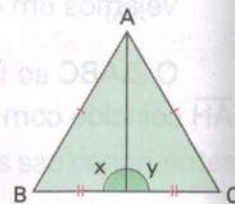


8 A figura abaixo é um retângulo ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) no qual estão traçadas as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} . Prove que $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

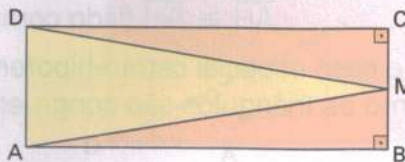


9 De acordo com as indicações feitas na figura responda:

- Qual o caso de congruência que permite afirmar que $x = y$?
- Qual a medida, em graus, de x e y ?



10 A figura é um retângulo no qual M é o ponto médio de lado \overline{BC} . Prove que o triângulo AMD é isósceles.



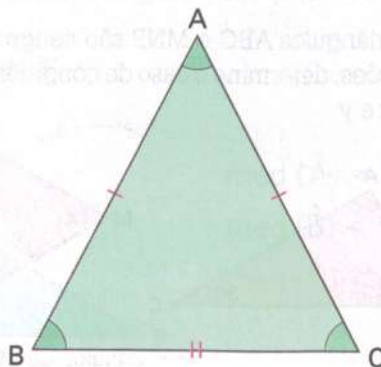
43

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

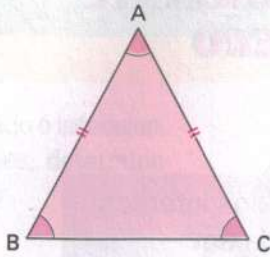
Você já sabe que um triângulo isósceles possui dois lados com a mesma medida e um lado com medida diferente.

Nos triângulos isósceles, alguns elementos recebem nomes especiais:

- ✓ O lado com medida diferente é chamado de *base*.
- ✓ Os ângulos adjacentes à base são chamados *ângulos da base*.
- ✓ O ângulo oposto à base é chamado *ângulo do vértice*.



Assim, no $\triangle ABC$ isósceles temos:



\overline{BC} : base do $\triangle ABC$

\hat{B} e \hat{C} : ângulos da base do $\triangle ABC$

\hat{A} : ângulo do vértice do $\triangle ABC$

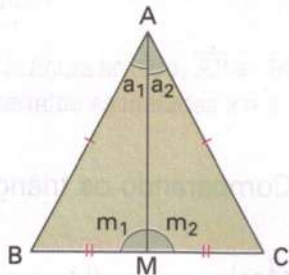
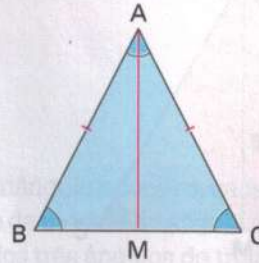
Vamos estudar duas importantes propriedades dos triângulos isósceles:

1ª propriedade

Em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base, a altura relativa à base e a bissetriz do ângulo do vértice coincidem.

Seja o $\triangle ABC$ isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, e a mediana \overline{AM} relativa à base \overline{BC} .

Queremos mostrar que \overline{AM} é também a altura relativa à base \overline{BC} e bissetriz do ângulo \hat{A} .



Comparando os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$, temos:

✓ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (lados congruentes do \triangle isósceles) (L)

✓ $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (M é ponto médio de \overline{BC}) (L)

✓ $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum) (L)

Pelo caso LLL, temos $\triangle ABM \cong \triangle AMC$.

Como $\triangle ABM \cong \triangle AMC$, temos:

$a_1 = a_2 \rightarrow \hat{BAM} \cong \hat{MAC} \rightarrow \overline{AM}$ é bissetriz de \hat{A} .

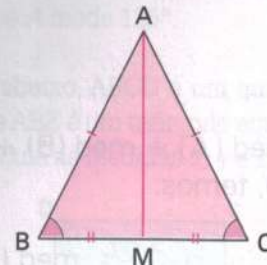
$m_1 = m_2$ e $m_1 + m_2 = 180^\circ \rightarrow m_1 = m_2 = 90^\circ \rightarrow \overline{AM}$ é altura relativa a \overline{BC} .

2ª propriedade

Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Para demonstrar essa propriedade, vamos utilizar a mesma estratégia da 1ª propriedade.

- ✓ Seja o $\triangle ABC$ isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
- ✓ Traçamos a mediana \overline{AM} .
- ✓ Já vimos que, pelo caso LLL, $\triangle ABM \cong \triangle AMC$.



Então, todos os elementos do $\triangle ABM$ são congruentes com seus correspondentes no $\triangle AMC$. Em particular: $\hat{B} \cong \hat{C}$.

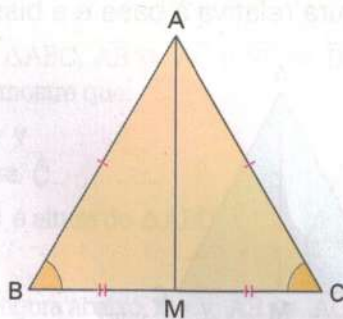
→ ângulos da base de um triângulo isósceles

UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Em todo triângulo equilátero os três ângulos internos são congruentes, medindo 60° cada um.

Vamos demonstrar essa propriedade:

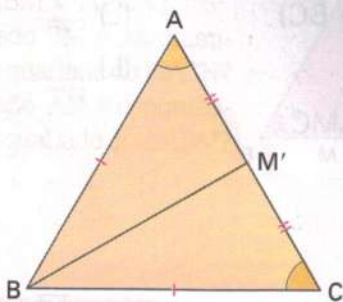
Seja um $\triangle ABC$ equilátero ($\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$) e a mediana \overline{AM} relativa à base \overline{BC} .



Comparando os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle AMC$, temos:

- ✓ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (lados do \triangle equilátero) (L)
- ✓ $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (M é ponto médio de \overline{BC}) (L)
- ✓ $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum) (L)

Pelo caso LLL, temos: $\triangle ABM \cong \triangle AMC \Rightarrow \hat{B} \cong \hat{C}$ ①



Traçamos a mediana $\overline{BM'}$. Comparando os triângulos $\triangle BAM'$ e $\triangle BCM'$, temos:

- ✓ $\overline{BA} \cong \overline{BC}$ (lados do \triangle equilátero) (L)
- ✓ $\overline{AM'} \cong \overline{M'C}$ (M' é ponto médio de \overline{AC}) (L)
- ✓ $\overline{BM'} \cong \overline{BM'}$ ($\overline{BM'}$ é lado comum) (L)

Pelo caso LLL, temos: $\triangle BAM' \cong \triangle BCM' \Rightarrow \hat{A} \cong \hat{C}$ ②

Por ① e ②, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{C} \\ \hat{C} \cong \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$$

Como $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180^\circ$ (soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo), temos:

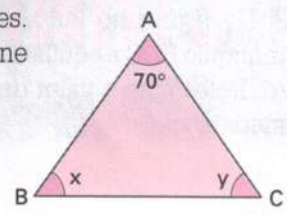
$$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = \frac{180^\circ}{3}$$

ou

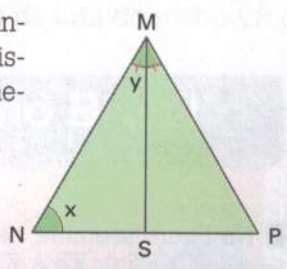
$$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 60^\circ$$

FIXAÇÃO

1 O $\triangle ABC$ ao lado é isósceles. Nessas condições, determine as medidas x e y .

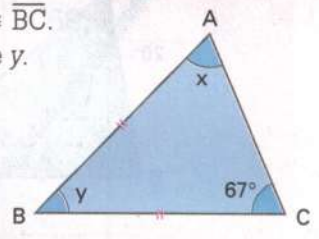


2 O $\triangle MNP$ ao lado é um triângulo equilátero e \overline{MS} é a bissetriz de \hat{M} . Determine as medidas x e y .



3 Em um triângulo isósceles, um dos ângulos da base mede 25° . Quais as medidas dos três ângulos do triângulo?

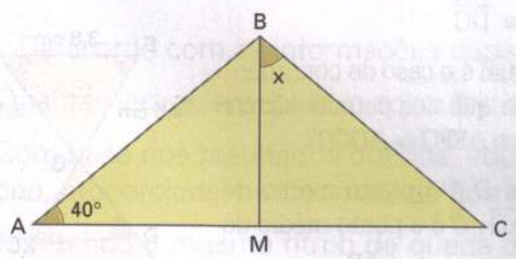
4 Na figura ao lado, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Determine as medidas x e y .



5 Num triângulo isósceles, o ângulo do vértice mede 54° . Quais as medidas dos outros dois ângulos desse triângulo?

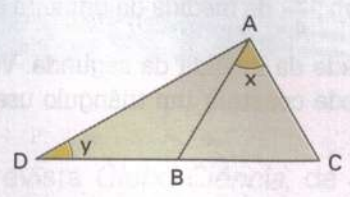
6 Num triângulo isósceles, um dos ângulos mede 144° . Calcule as medidas dos outros dois ângulos do triângulo.

7 No triângulo isósceles ABC abaixo, \overline{BM} é a mediana relativa à base \overline{AC} . Qual é o valor da medida x indicada?

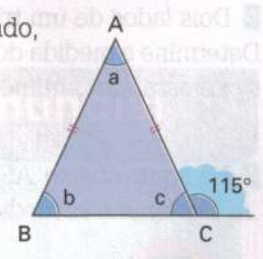


8 Quanto mede cada ângulo agudo de um triângulo retângulo isósceles?

9 Na figura abaixo, o $\triangle ABC$ é equilátero e $\overline{AB} \cong \overline{BD}$. Calcule as medidas x e y indicadas.

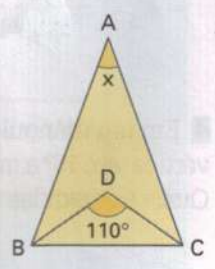


10 No $\triangle ABC$ isósceles ao lado, determine as medidas a , b e c .

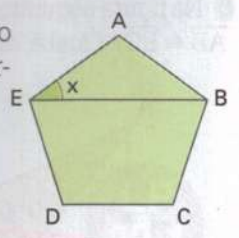


11 Num triângulo isósceles, cada ângulo da base mede o dobro da medida do ângulo do vértice. Calcule as medidas dos três ângulos do triângulo.

12 Na figura ao lado, o triângulo ABC é isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$). Sabendo que \overline{BD} e \overline{CD} são as bissetrizes de \hat{B} e \hat{C} , respectivamente, determine a medida x indicada.

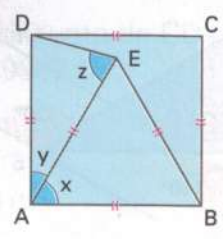


13 O pentágono da figura ao lado é regular. Nessas condições, determine o valor de x .



14 Calcule as medidas dos ângulos de um triângulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$), sabendo que o ângulo externo no vértice A mede 125° .

15 Na figura abaixo, ABCD é um quadrado (4 lados congruentes) e ABE é um triângulo equilátero. Nessas condições, calcule as medidas x , y e z .

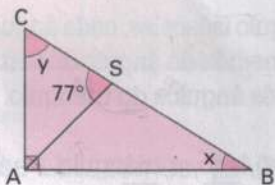


RETOMANDO o que aprendeu

1 Pedrinho tem três varetas: a primeira com 18 cm, a segunda com $\frac{3}{4}$ da medida da primeira e a terceira com a metade da medida da segunda. Verifique se Pedrinho pode construir um triângulo usando essas três varetas.

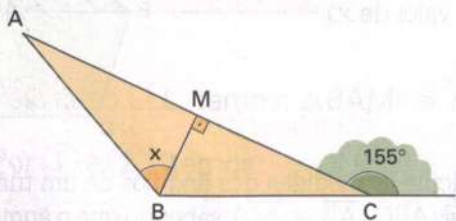
2 Dois lados de um triângulo medem 3 cm e 11 cm. Determine a medida do terceiro lado sabendo que ela é expressa, em centímetros, por um número inteiro par.

3 Na figura abaixo \overline{AS} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{A} . Determine as medidas x e y indicadas.

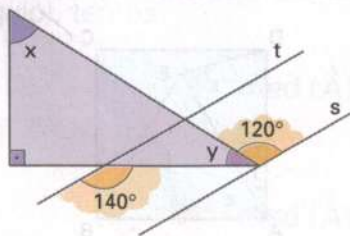


4 Em um triângulo isósceles, a medida do ângulo do vértice tem 15° a mais que a medida do ângulo da base. Quais as medidas dos três ângulos desse triângulo?

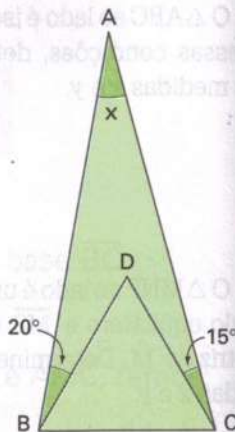
5 Na figura seguinte, o triângulo ABC é isósceles (com $\overline{AB} \cong \overline{BC}$). Qual é, em graus, o valor da medida x ?



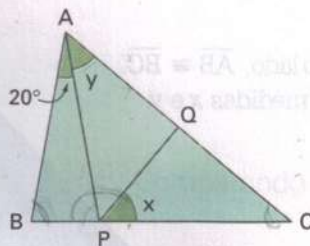
6 Na figura seguinte, as retas t e s são paralelas. Qual é o valor, em graus, da expressão $x - y$?



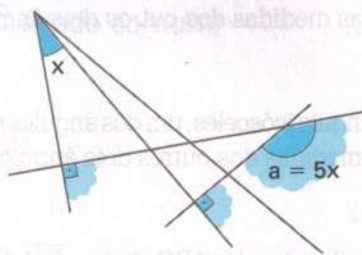
7 Na figura ao lado, o triângulo BDC é equilátero. Determine o valor da medida x .



8 Na figura seguinte, os triângulos ABP e APC são isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{AP}$ e $\overline{AP} \cong \overline{PC}$). Sabendo que \overline{PQ} é a bissetriz do ângulo \hat{A} , determine as medidas x e y indicadas.



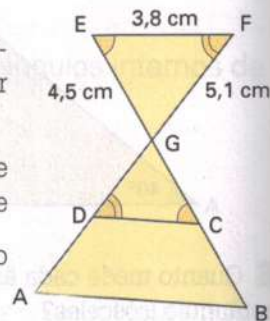
9 Qual é, em graus, o valor da medida a , na figura abaixo?



10 Na figura abaixo, temos que $\overline{EF} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{EF} \cong \overline{DC}$.

a) Qual é o caso de congruência que nos permite afirmar que $\triangle EFG \cong \triangle DCG$?

b) Se D é o ponto médio de \overline{AG} , C é o ponto médio de \overline{BG} e $DC = \frac{AB}{2}$, qual é o perímetro do $\triangle ABG$?

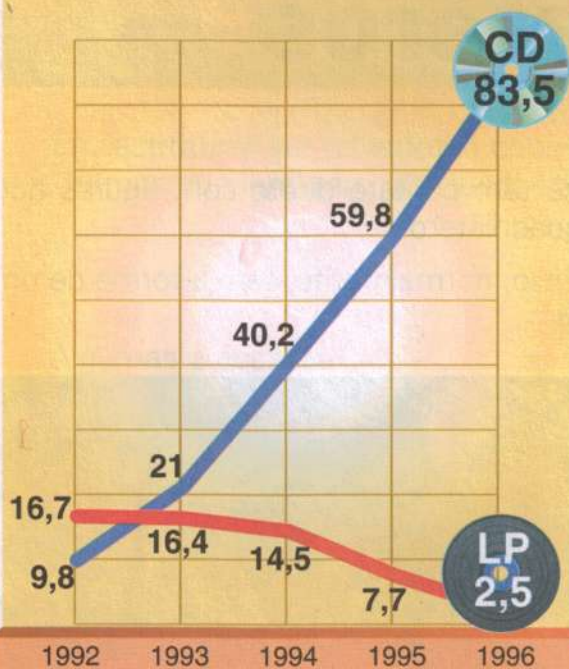


JORNAIS & REVISTAS

Saudades do vinil foi o título de uma reportagem da revista *Globo Ciência*, de março de 1997, falando a respeito da luta do velho LP contra o CD.

Consumo no Brasil

em milhões



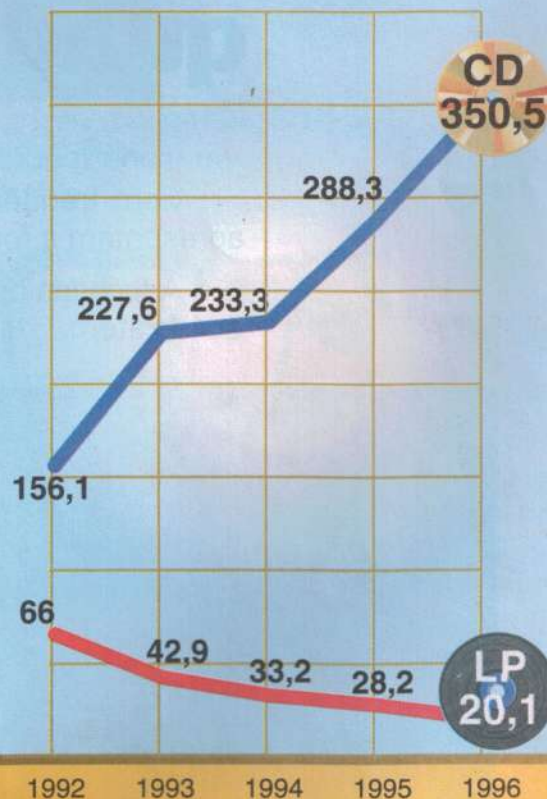
Expectativa para 1997

110 000 000 de unidades de CD

700 000 discos de vinil

Consumo mundial

em milhões



De acordo com as informações dadas pelos gráficos acima, responda:

1. Quantas vezes, em 1995, o consumo mundial de CDs foi maior que o do Brasil? E em 1996?
2. Com base nos resultados obtidos, você pode afirmar que o consumo de CDs no Brasil cresceu, proporcionalmente, mais do que no mundo, de 1995 a 1996?
3. Mantendo o mesmo ritmo de queda do consumo de LPs verificado entre 1995 e 1996, em quanto pode ser estimado o consumo do vinil em 1997, no Brasil?

Use a calculadora.

11

Estudando os quadriláteros

Com freqüência, você tem contato direto com figuras que apresentam a forma de quadrilátero:

A fachada de um edifício, normalmente, tem a forma de um quadrilátero.

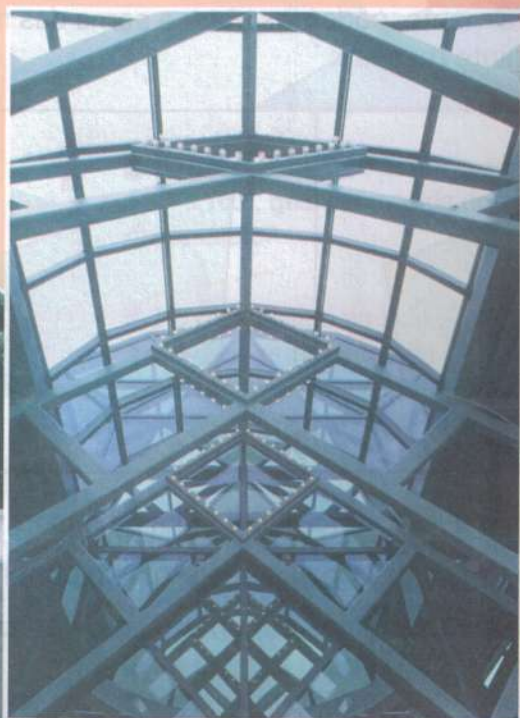


Uma quadra de futebol de salão tem a forma de um quadrilátero. O tampo de uma mesa tem, normalmente, a forma de um quadrilátero.



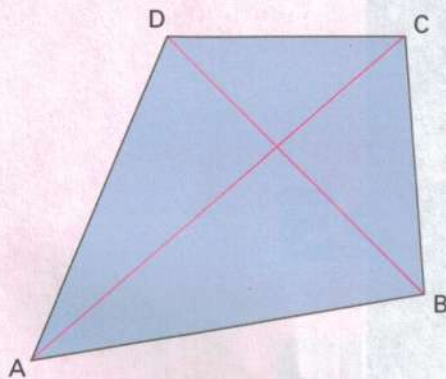
Em estruturas de telhados e coberturas também encontramos formas que lembram um quadrilátero.

Algumas placas de trânsito têm a forma de um quadrilátero.



Nesta Unidade, estudaremos os quadriláteros em geral e as relações que existem entre seus elementos.

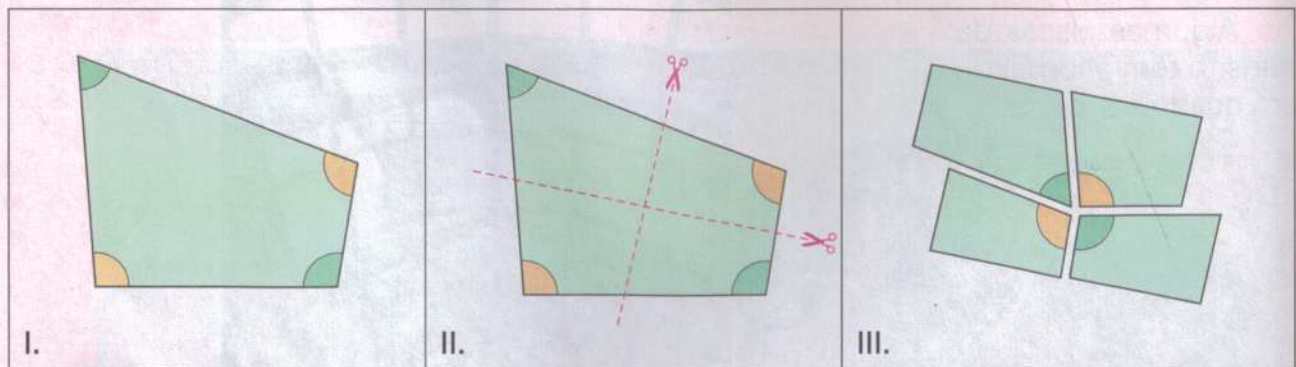
Você já sabe que todo polígono de quatro lados é chamado *quadrilátero*. No quadrilátero ABCD abaixo, vamos destacar:



- ✓ Os pontos A , B , C e D são *vértices* do quadrilátero. Os pares A e C são vértices opostos, assim como os pares B e D .
- ✓ Os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} são os *lados* do quadrilátero. Os pares \overline{AB} e \overline{CD} são lados opostos, assim como os pares \overline{AD} e \overline{BC} .
- ✓ Os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} são as *diagonais* do quadrilátero.

Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

Experimentalmente, podemos obter a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero da seguinte maneira:



- I. Desenhemos o quadrilátero numa folha de papel.
- II. Recortamos os ângulos do quadrilátero pelo pontilhado.
- III. Juntando os quatro ângulos em um mesmo vértice, verificamos que a soma das medidas dos ângulos é 360° .

De uma maneira mais prática, podemos determinar a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) de um polígono usando a fórmula geral $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$, em que n representa o número de lados do polígono. Essa fórmula é válida para todos os polígonos convexos.

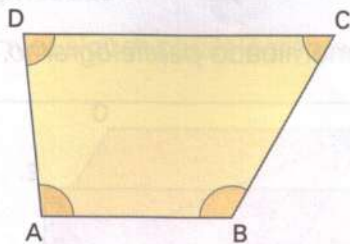
Veja o exemplo.

Dado $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$ e sendo $n = 4$ (número de lados do quadrilátero), temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ \longrightarrow S_i = (4 - 2) \cdot 180^\circ \longrightarrow S_i = 2 \cdot 180^\circ \longrightarrow S_i = 360^\circ$$

Daí, podemos escrever:

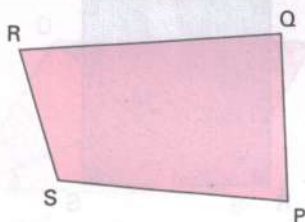
A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° .



$$\text{med } (\hat{A}) + \text{med } (\hat{B}) + \text{med } (\hat{C}) + \text{med } (\hat{D}) = 360^\circ$$

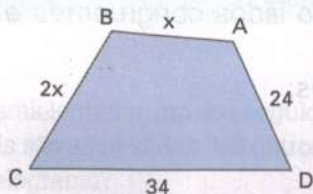
FIXAÇÃO

1 Observe o quadrilátero seguinte e responda:



- Qual é o ângulo oposto ao ângulo \hat{R} ?
- Qual é o lado oposto ao lado \overline{QR} ?
- Quais são as diagonais desse quadrilátero?

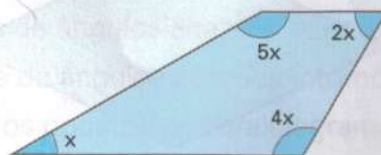
2 O perímetro do quadrilátero abaixo é 103 cm. Nessas condições, determine a medida x indicada e as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{BC} .



3 Em um quadrilátero, as medidas dos lados são expressas, em centímetros, por $3x + 1$, $2x + 7$, $4x - 3$ e $3x - 2$. Se o perímetro desse quadrilátero é 51 cm, quais as medidas dos lados?

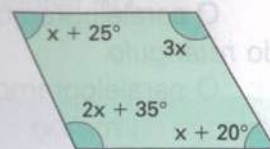
4 Três ângulos de um quadrilátero medem 73° , 102° e 98° . Calcule a medida do quarto ângulo desse quadrilátero.

5 Determine a medida x indicada e as medidas dos ângulos do quadrilátero abaixo.



6 Se três dos ângulos de um quadrilátero medem 73° , 112° e 100° , qual é a medida do quarto ângulo desse quadrilátero?

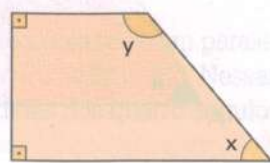
7 No quadrilátero ao lado, quais são as medidas de seus ângulos internos?



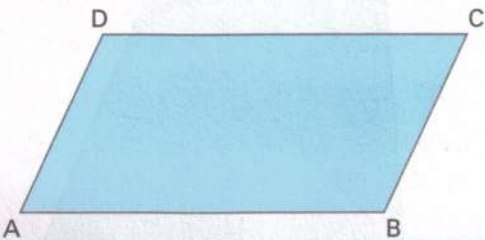
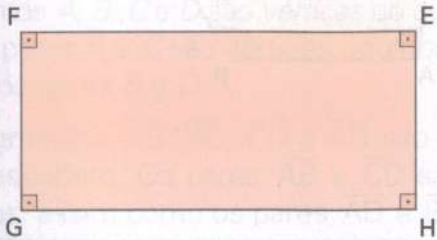
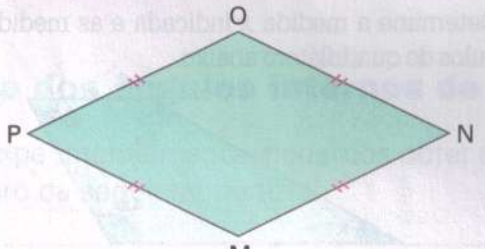
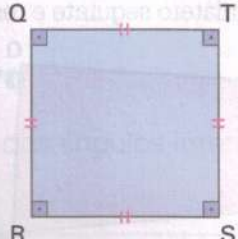
8 Se as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero são expressas por $3x - 24^\circ$, $x + 6^\circ$, $x + 12^\circ$ e $x - 12^\circ$, quais são as medidas desses ângulos?

9 As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero são indicadas por a , b , c e d . Sabendo que $b = c = 3a$ e $d = 2a$, determine as medidas a , b , c e d .

10 No quadrilátero ao lado, temos que $y - x = 80^\circ$. Nessas condições, dê as medidas dos quatro ângulos do quadrilátero.



Todo quadrilátero que tem os lados opostos paralelos é denominado *paralelogramo*.

<p>1</p>  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	<p>2</p>  $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$
<p>3</p>  $\overline{MN} \parallel \overline{OP}$ $\overline{PM} \parallel \overline{NO}$	<p>4</p>  $\overline{RS} \parallel \overline{TO}$ $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$

O paralelogramo EFGH, da figura [2], que apresenta os quatro ângulos retos, é denominado *retângulo*.

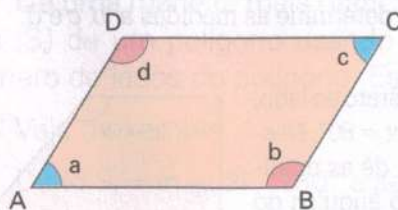
O paralelogramo MNOP, da figura [3], que tem os quatro lados congruentes, é chamado *losango* ou *rombo*.

O paralelogramo RSTQ, da figura [4], que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos, é chamado *quadrado*.

Os paralelogramos apresentam as seguintes propriedades:

1ª propriedade

Em um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.



Como a e d são medidas de ângulos colaterais internos, temos:

$$a + d = 180^\circ \longrightarrow a = 180^\circ - d \quad (1)$$

Como c e d são medidas de ângulos colaterais internos, temos:

$$c + d = 180^\circ \longrightarrow c = 180^\circ - d \quad (2)$$

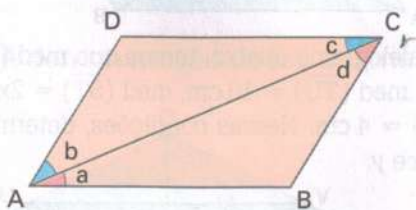
Comparando ① e ②, temos:

$$a = c \rightarrow \hat{A} \cong \hat{C}$$

Usando o mesmo caminho, mostramos que $B \cong D$.

2ª propriedade

Em qualquer paralelogramo, os lados opostos são congruentes.



Traçando a diagonal \overline{AC} , temos:

$a = c$ (medida de ângulos alternos internos)

$b = d$ (medidas de ângulos alternos internos)

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum)

Então, pelo caso ALA, temos que $\triangle ABC \cong \triangle ACD$.

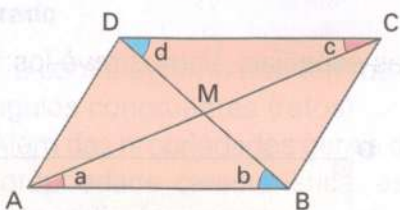
Como consequência, temos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{AD}$$

3ª propriedade

Em qualquer paralelogramo, as diagonais cortam-se ao meio.



Traçando as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , temos:

$a = c$ (medidas de ângulos alternos internos)

$b = d$ (medidas de ângulos alternos internos)

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (lados opostos do paralelogramo)

Então, pelo caso ALA, temos que $\triangle AMB \cong \triangle CMD$.

Como consequência, temos:

$$\overline{AM} \cong \overline{CM}$$

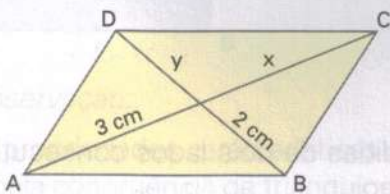
$$\overline{BM} \cong \overline{DM}$$

Portanto, o ponto M é ponto médio tanto da diagonal \overline{AC} como da diagonal \overline{BD} .

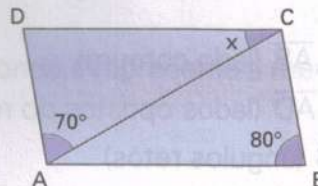
FIXAÇÃO

1 Em um paralelogramo, um dos ângulos agudos mede 75° . Quais são as medidas dos outros três ângulos desse paralelogramo?

2 No paralelogramo abaixo, dê as medidas x e y indicadas.

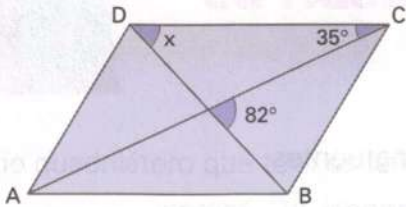


3 Determine a medida x indicada no paralelogramo abaixo.

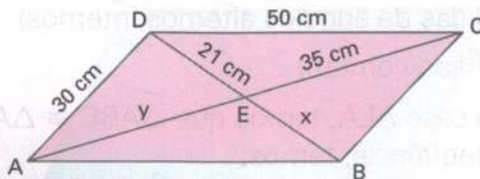


4 As medidas de dois ângulos opostos de um paralelogramo são expressas por $4x + 1^\circ$ e $6x - 21^\circ$. Nessas condições, determine as medidas dos quatro ângulos do paralelogramo.

5 Determine a medida x indicada no paralelogramo abaixo.

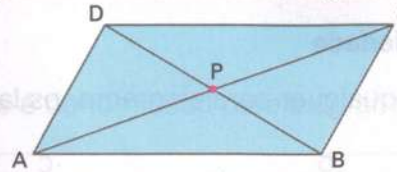


6 Observe o paralelogramo abaixo e determine:

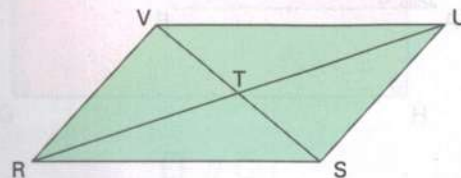


- a) as medidas x e y indicadas
 b) o perímetro dos triângulos: $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ e $\triangle ABC$

7 Considerando o paralelogramo abaixo, temos que $\text{med}(\overline{AP}) = x$, $\text{med}(\overline{PC}) = 2y$, $\text{med}(\overline{BP}) = 4$ cm e $\text{med}(\overline{PD}) = x - y$. Nessas condições, determine as medidas x e y , bem como as medidas das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} .



8 No paralelogramo abaixo, temos que $\text{med}(\overline{RT}) = x + 2y$, $\text{med}(\overline{TU}) = 10$ cm, $\text{med}(\overline{ST}) = 2x - y$ e $\text{med}(\overline{TV}) = 4$ cm. Nessas condições, determine as medidas x e y .



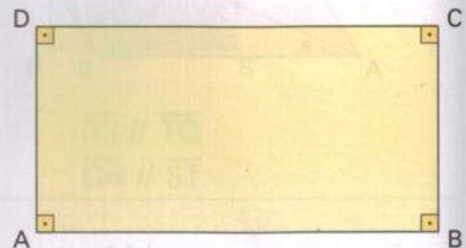
Retângulo, losango e quadrado

Você já sabe que alguns paralelogramos recebem nomes especiais. Vamos revê-los:

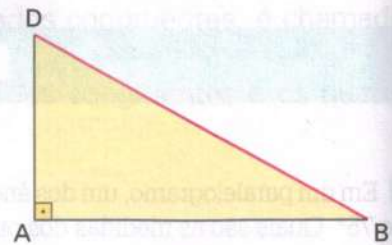
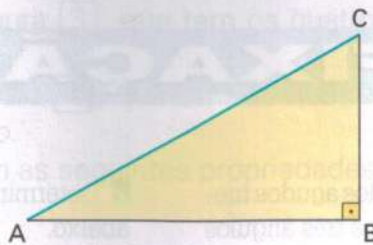
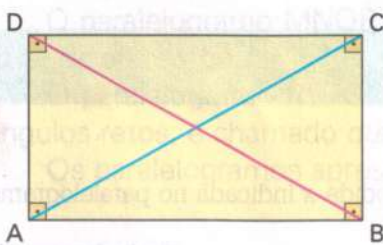
Retângulo

É o paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (retos).

Além das propriedades gerais dos paralelogramos, o retângulo apresenta uma propriedade característica: *as suas diagonais são congruentes*.



Decompondo o retângulo nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, temos:



$$\overline{AB} \cong \overline{AB} \text{ (lado comum)}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{AD} \text{ (lados opostos do retângulo)}$$

$$\hat{A} \cong \hat{B} \text{ (ângulos retos)}$$

Pelo caso LAL, temos: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

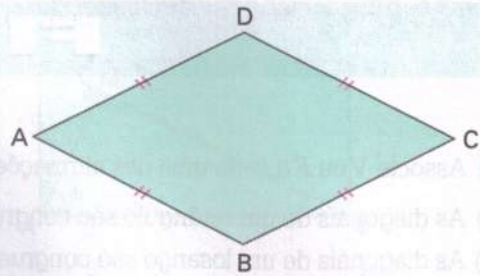
Como consequência: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

A área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de dois lados consecutivos, ou seja, medida da base multiplicada pela medida da altura.

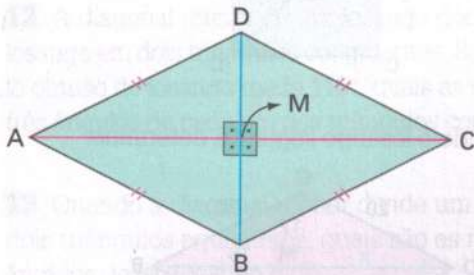
Losango ou rombo

É o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

Além das propriedades gerais dos paralelogramos, o losango apresenta uma propriedade característica: *as suas diagonais são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos do losango.*



(A demonstração dessa propriedade fica como uma atividade para você fazer.)



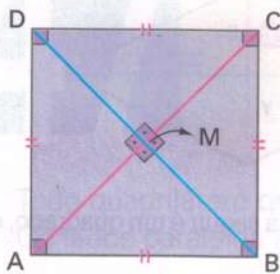
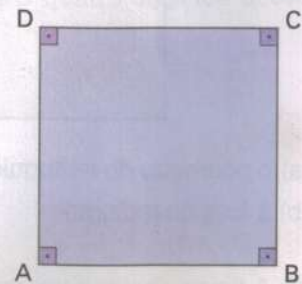
$$\begin{aligned} \overline{AC} &\perp \overline{BD} \\ \overline{AC} &\text{ é bissetriz de } \hat{A} \text{ e de } \hat{C} \\ \overline{BD} &\text{ é bissetriz de } \hat{B} \text{ e de } \hat{D} \end{aligned}$$

A área de um losango é dada pela metade do produto das medidas de suas diagonais.

Quadrado

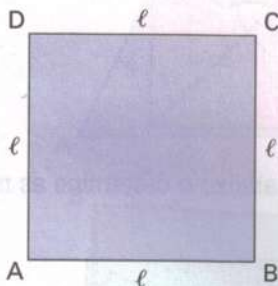
É o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes (retos).

Além das propriedades gerais dos paralelogramos, o quadrado tem uma propriedade característica: *as suas diagonais são congruentes, são perpendiculares entre si e são bissetrizes dos ângulos internos.*



$$\begin{aligned} \overline{AC} &\cong \overline{BD} \\ \overline{AC} &\perp \overline{BD} \\ \overline{AC} &\text{ é bissetriz de } \hat{A} \text{ e de } \hat{C} \\ \overline{BD} &\text{ é bissetriz de } \hat{B} \text{ e de } \hat{D} \end{aligned}$$

A área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado.



$$A = \ell^2, \text{ onde } \ell \text{ representa a medida do lado}$$

Observação:

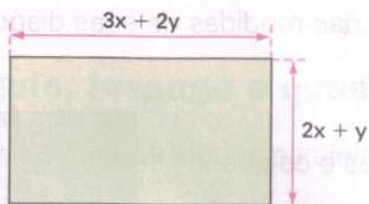
As propriedades características do retângulo, do losango e do quadrado podem ser demonstradas pela congruência de triângulos ou experimentalmente, por meio de recortes e montagens.

FIXAÇÃO

1 Associe *V* ou *F* a cada uma das afirmações:

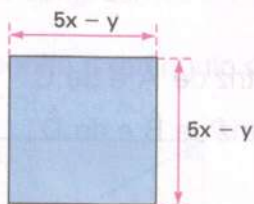
- As diagonais de um retângulo são congruentes.
- As diagonais de um losango são congruentes.
- As diagonais de um quadrado são congruentes.
- As diagonais de um retângulo são perpendiculares entre si.
- As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.
- As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.

2 A figura abaixo é um retângulo. De acordo com as indicações, escreva o polinômio que indica:



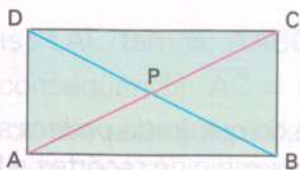
- o perímetro do retângulo
- a área do retângulo

3 A figura abaixo é um quadrado. De acordo com as indicações, escreva o polinômio que indica:

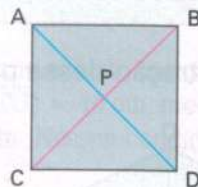


- o perímetro do quadrado
- a área do quadrado

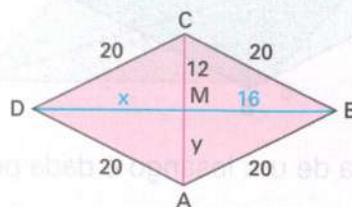
4 No retângulo a seguir, a medida do segmento \overline{AP} é expressa por $(5x + 3y)$ unidades de comprimento. Nessas condições, qual é o polinômio que expressa a medida da diagonal \overline{AC} do retângulo?



5 No quadrado abaixo, a med (\overline{AP}) = $5x - 28$ cm, enquanto med (\overline{PB}) = 52 cm. Nessas condições, qual é a medida x ?

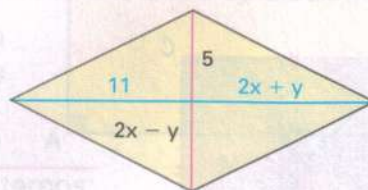


6 Observando o losango seguinte, determine:

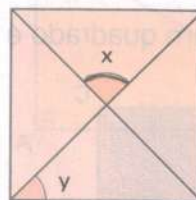


- as medidas x e y indicadas
- os perímetros dos seguintes triângulos: $\triangle AMB$, $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$

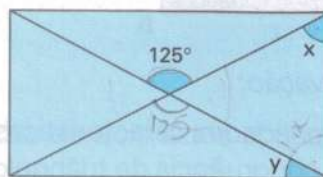
7 Observando as indicações feitas no losango abaixo, determine as medidas x e y .



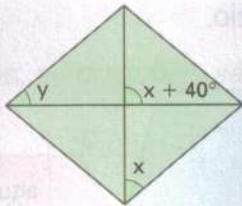
8 Sabendo que a figura a seguir é um quadrado, dê as medidas x e y indicadas.



9 Observe o retângulo abaixo e determine as medidas x e y indicadas.



10 A figura ao lado é um losango. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.



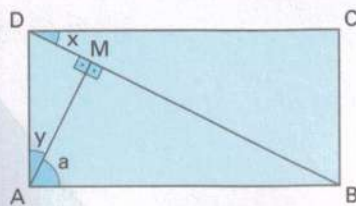
11 A diagonal \overline{BD} de um retângulo $ABCD$ determina um ângulo de 39° com o lado \overline{AB} . Determine a medida do ângulo que essa diagonal forma com o lado \overline{AD} .

12 A diagonal menor de um losango decompõe esse losango em dois triângulos congruentes. Se cada ângulo obtuso do losango mede 110° , quais as medidas dos três ângulos de cada um dos triângulos considerados?

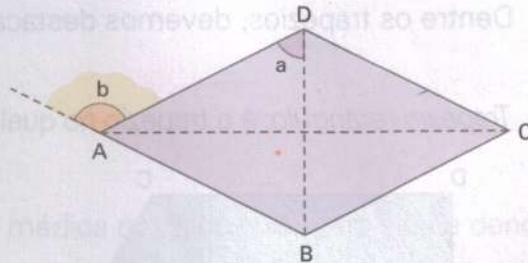
13 Quando a diagonal menor divide um losango em dois triângulos equiláteros, quais são as medidas dos ângulos desse losango?

14 Se as diagonais de um retângulo formam um ângulo de 114° entre si, quais são as medidas dos ângulos que as diagonais formam com os lados do retângulo?

15 Observe o retângulo abaixo e demonstre que $x = y$.



16 No losango abaixo, mostre que $a = \frac{b}{2}$.

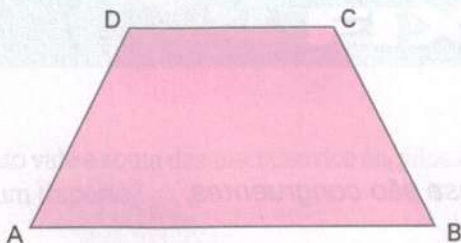


17 A medida de cada ângulo obtuso de um losango é expressa por $2x + 5^\circ$, enquanto a medida de cada ângulo agudo é expressa por $x + 40^\circ$. Nessas condições, determine as medidas dos quatro ângulos desse losango.

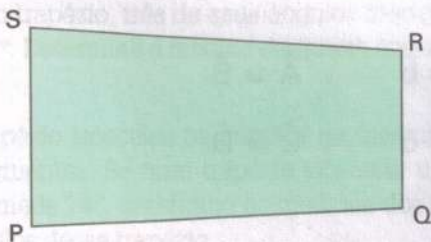
4

OS TRAPÉZIOS

Todo quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado *trapézio*. Os lados paralelos são chamados *bases* do trapézio.

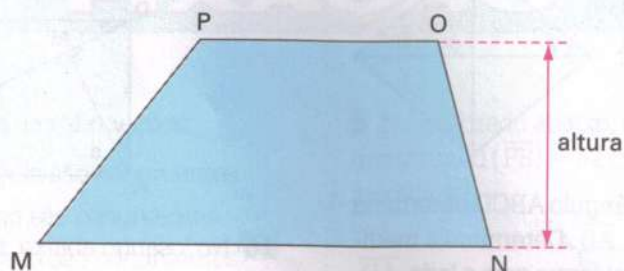


$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 \overline{AB} é a base maior
 \overline{CD} é a base menor



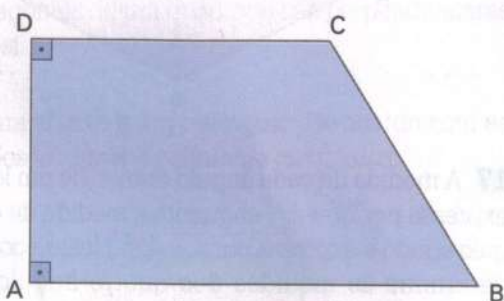
$\overline{PS} \parallel \overline{QR}$
 \overline{PS} é a base maior
 \overline{QR} é a base menor

A distância entre as bases é a *altura* do trapézio.



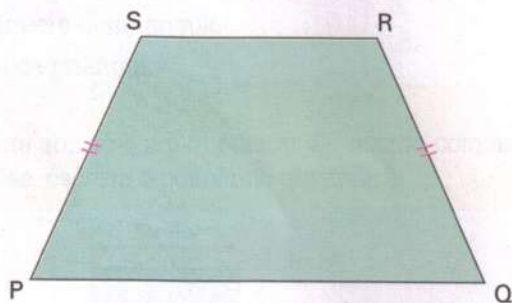
Dentre os trapézios, devemos destacar dois especiais:

Trapézio retângulo: é o trapézio no qual um dos lados não-paralelos é perpendicular às bases.



O lado \overline{AD} é perpendicular às bases.

Trapézio isósceles: é o trapézio no qual os lados não-paralelos são congruentes.

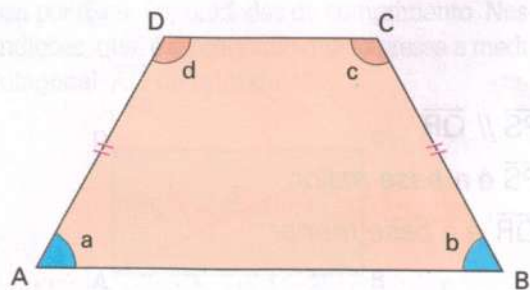


$$\overline{PS} \cong \overline{QR}$$

Os trapézios isósceles apresentam duas propriedades importantes, que podem ser verificadas experimentalmente e por meio da congruência.

1ª propriedade

Num trapézio isósceles, os ângulos da mesma base são congruentes.

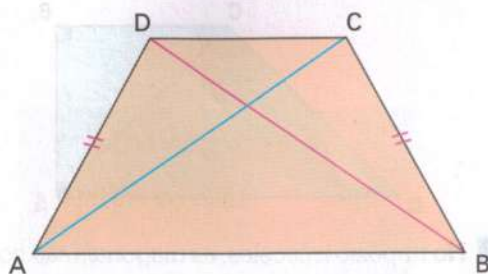


$$a = b \rightarrow \hat{A} \cong \hat{B}$$

$$c = d \rightarrow \hat{C} \cong \hat{D}$$

2ª propriedade

Num trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.

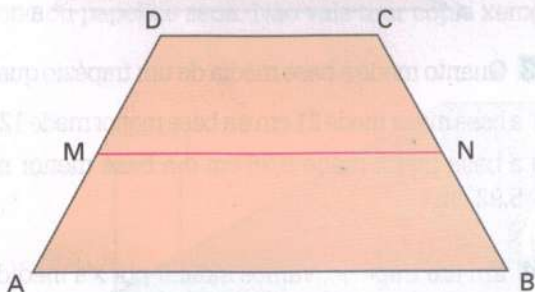


$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

Base média de um trapézio

O segmento cujas extremidades são os pontos médios dos lados não-paralelos é denominado *base média* do trapézio.

A medida da base média de um trapézio é igual à metade da soma das medidas das bases do trapézio. A base média de um trapézio é paralela às bases do trapézio.



M é o ponto médio do lado \overline{AD}

N é o ponto médio do lado \overline{BC}

\overline{MN} é a base média do trapézio

$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$

$$\text{med}(\overline{MN}) = \frac{\text{med}(\overline{AB}) + \text{med}(\overline{CD})}{2}$$

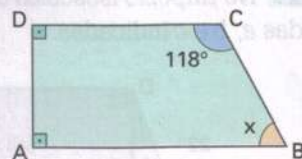
FIXAÇÃO

1 Quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos de um trapézio?

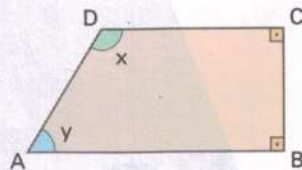
2 Em um trapézio, três de seus ângulos medem 78° , 102° e 98° . Determine a medida do quarto ângulo.

3 No trapézio isósceles os ângulos da mesma base são congruentes. Se num trapézio isósceles um dos ângulos mede 74° , determine as medidas dos outros três ângulos desse trapézio.

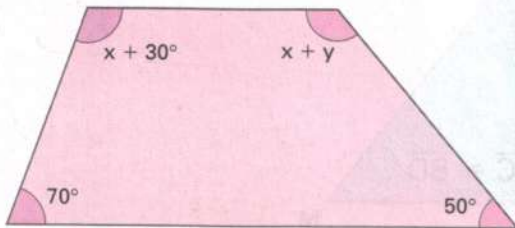
4 Determine a medida x indicada na figura.



5 No trapézio retângulo ao lado, x indica a medida do ângulo obtuso e y indica a medida do ângulo agudo. Sabendo que $x - y = 62^\circ$, determine as medidas de x e y indicadas.

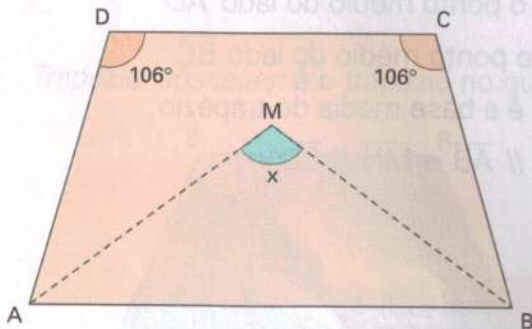


6 No trapézio abaixo, vamos determinar as medidas x e y indicadas.



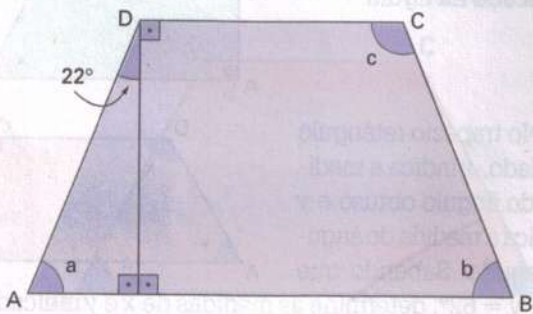
7 Em um trapézio isósceles, a medida de cada ângulo corresponde a $\frac{4}{5}$ da medida de cada ângulo obtuso. Nessas condições, determine as medidas dos quatro ângulos desse trapézio.

8 A figura abaixo é um trapézio isósceles. Sabendo que \overline{AM} está contido na bissetriz do ângulo \hat{A} e \overline{BM} está contido na bissetriz do ângulo \hat{B} , determine a medida x indicada.

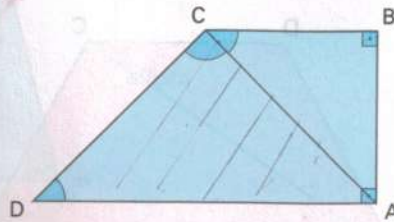


9 Em um trapézio retângulo, a diagonal maior forma com a base maior um ângulo de 37° e forma com o lado não-paralelo um ângulo de 37° . Nessas condições, quais as medidas dos quatro ângulos desse trapézio?

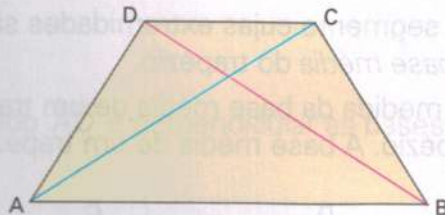
10 No trapézio isósceles abaixo, determine as medidas a , b e c indicadas.



11 No trapézio retângulo abaixo $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$. Nessas condições, determine as medidas do ângulo agudo e do ângulo obtuso do trapézio.



12 No trapézio isósceles, as diagonais são congruentes. Se, no trapézio abaixo, a medida da diagonal \overline{AC} é expressa por $\frac{2}{3}x + 10$ e a medida da diagonal \overline{BD} é 24 cm, determine o valor da medida x .

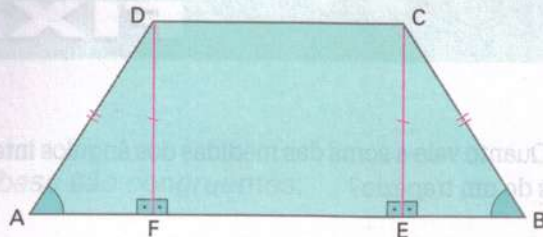


13 Quanto mede a base média de um trapézio quando:

- a base maior mede 21 cm e a base menor mede 12 cm?
- a base maior mede 9,36 cm e a base menor mede 5,92 cm?

14 Em um trapézio, vamos indicar por x a medida da base maior e por y a medida da base menor. Sabendo que a base média mede 25 cm e que $x - y = 14$ cm, determine as medidas das bases desse trapézio.

15 O trapézio ABCD abaixo é um trapézio isósceles. Os segmentos \overline{CE} e \overline{DF} são alturas desse trapézio. Nessas condições e observando as indicações dos elementos congruentes, responda:

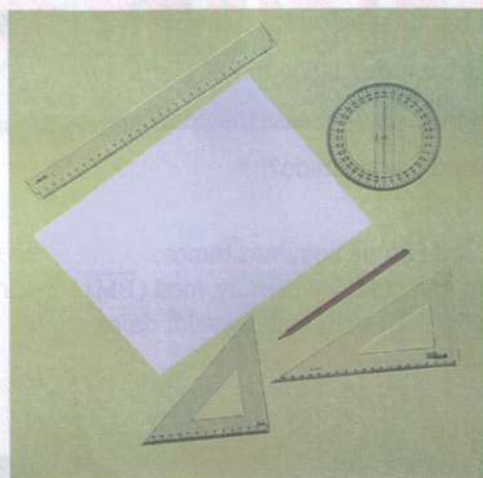


- Os triângulos AFD e BEC são congruentes?
- Qual é o caso que justifica essa afirmação?
- O lado \overline{AF} é congruente com qual lado do triângulo BEC?
- Se o segmento \overline{AB} mede 28 cm e o segmento \overline{CD} mede 16 cm, quanto mede o segmento \overline{FE} ?
- E o segmento \overline{AF} , quanto mede?

Explorando Geometria

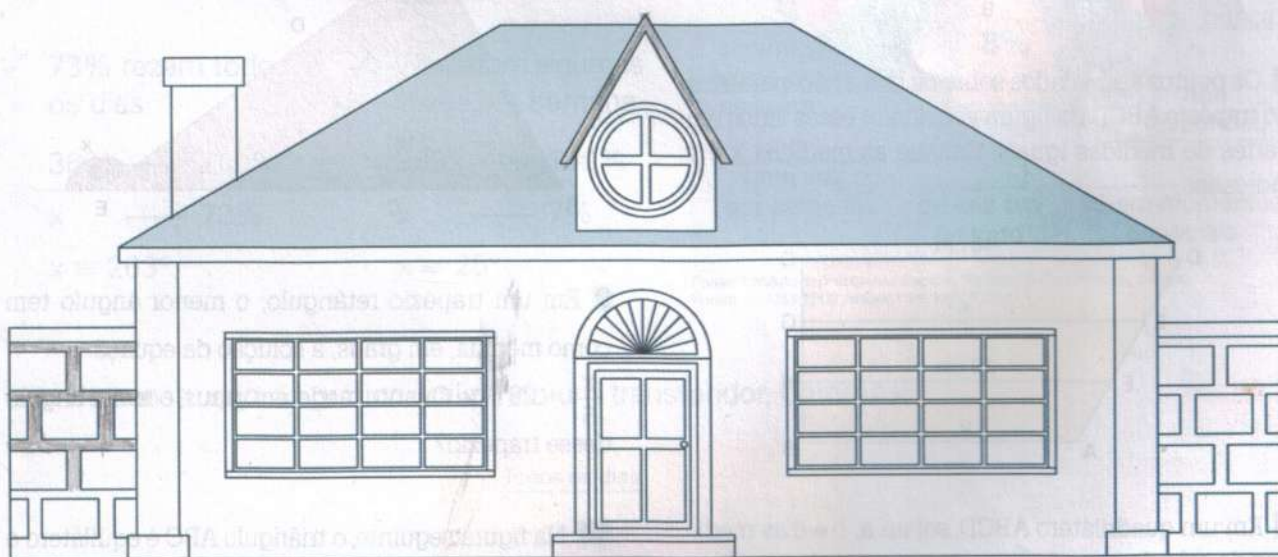
Você vai precisar de:

- 1 folha de sulfite
- lápis
- régua
- par de esquadros
- transferidor



Marinez Maravilhas Gomes

Agora você é um desenhista e precisa reproduzir esta figura numa folha de papel. Não pode usar papel carbono ou papel de seda. Não vale tirar cópia xerográfica. Faça isso, usando apenas instrumentos de desenho.



Depois, faça um relatório:

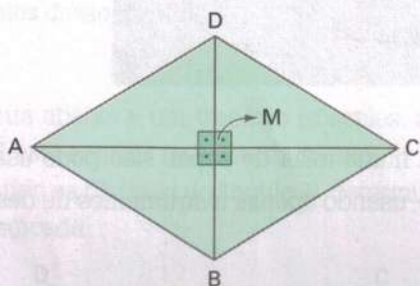
1. Por onde você começou?
2. Para quais elementos da figura você usou a régua ou o transferidor para fazer medidas?
3. Dê uma nota para sua cópia, de 0 a 10. Justifique sua avaliação.
4. Faça outros comentários que julgar necessários.
5. Junte-se a um colega de classe e troque informações a respeito dessa experiência.

(Atividade baseada na Atividade 12: Transformações de figuras — *Experiências Matemáticas: 7ª série*. SEE/SP - CENP)

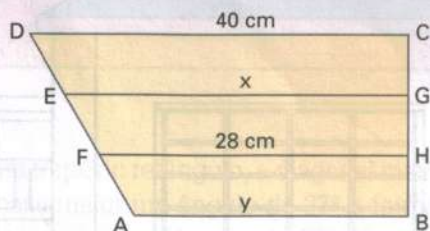
RETOMANDO o que aprendeu

1 Um retângulo e um quadrado têm o mesmo perímetro. No retângulo, um dos lados mede 15 cm e a medida de outro é igual aos $\frac{3}{5}$ dessa medida. Qual é a medida de cada lado do quadrado?

2 No losango ABCD da figura seguinte, temos: med (\overline{AM}) = 40 cm, med (\overline{MC}) = $x + 3y$, med (\overline{BM}) = $x + y$ e med (\overline{MD}) = 30 cm. Qual é o valor da expressão $x - y$?



3 Os pontos assinalados sobre os lados não-paralelos do trapézio ABCD da figura vão dividir esses lados em partes de medidas iguais. Calcule as medidas x e y indicadas.

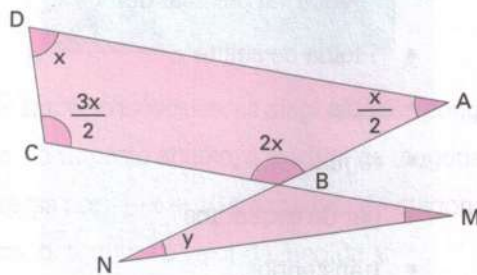


4 Em um quadrilátero ABCD, sejam a , b e c as medidas de três de seus ângulos, tal que $a = b = c$. Se o quarto ângulo desse quadrilátero mede 120° , determine as medidas a , b e c .

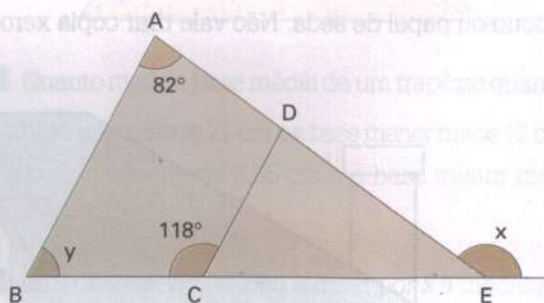
5 Em um quadrilátero, as medidas de seus ângulos são diretamente proporcionais aos números 8, 3, 5 e 2. Nessas condições, determine as medidas dos quatro ângulos desse quadrilátero.

6 Sabe-se que a , b , c e d são as medidas dos ângulos de um quadrilátero. Se $a + b = 160^\circ$, $3a = 7b$ e $b - c = 22^\circ$, quais as medidas a , b , c e d dos ângulos desse quadrilátero?

7 Na figura seguinte, o triângulo MBN é isósceles ($\overline{BM} \cong \overline{BN}$). Qual é, em graus, o valor da medida y ?

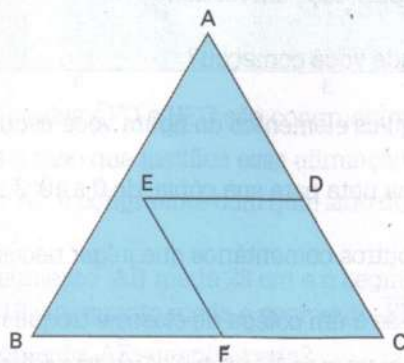


8 Na figura seguinte, ABCD é um trapézio (\overline{AB} e \overline{CD} são as bases). Qual é o valor, em graus, da expressão $x + y$?



9 Em um trapézio retângulo, o menor ângulo tem como medida, em graus, a solução da equação $\frac{x}{5} + 28 = x$. Quanto mede, em graus, o maior ângulo desse trapézio?

10 Na figura seguinte, o triângulo ABC é equilátero e o quadrilátero CDEF é um losango. Determine as medidas, em graus, dos ângulos do losango.



JORNAIS & REVISTAS

Uma pesquisa publicada na Revista *Veja* de 10/12/97 revelou que os brasileiros rezam muito, embora freqüentem pouco a igreja.

Para representar os dados da pesquisa, foi utilizado o gráfico de setores ao lado.

Conhecidas as porcentagens de incidência das respostas e lembrando que um círculo corresponde a 360°, podemos dividir corretamente o círculo, usando regra de três.

Veja os exemplos:

✓ 73% rezam todos os dias

$$360^\circ \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 73\%$$

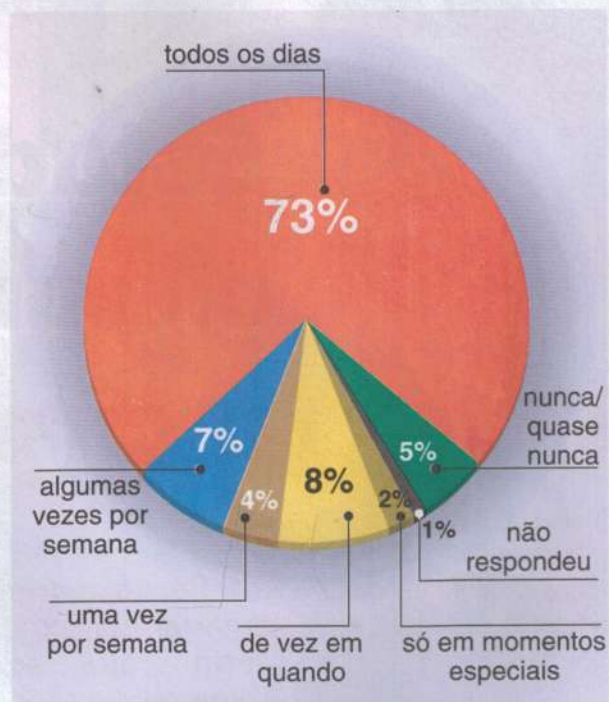
$$x \cong 263^\circ$$

✓ 7% rezam algumas vezes por semana

$$360^\circ \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 7\%$$

$$x \cong 25^\circ$$



Fonte: Instituto de Pesquisas Sociais, Políticas e Econômicas, Ipespe. Foram ouvidas 1000 pessoas em todo o país

Na construção do gráfico, utilizando um transferidor, obtemos:



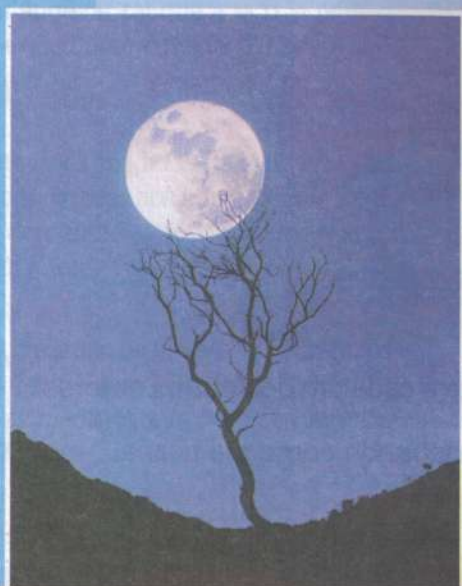
1. Calcule a medida do ângulo correspondente a cada um dos outros setores.
2. Construa esse gráfico em seu caderno, mostrando como ele ficaria.

12

Estudando a circunferência e o círculo

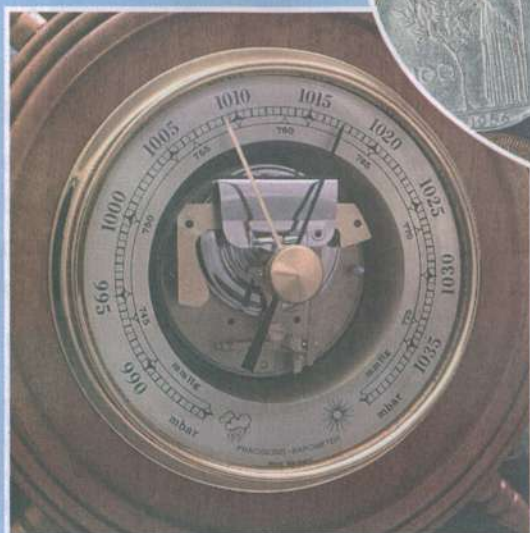
Se no extremo de um fio amarrarmos uma pedra e a fizermos girar, exercendo uma força com a mão, a figura descrita nos dá a idéia de uma figura circular.

Desde tempos mais remotos, a forma circular sempre foi admirada e adorada pelo homem.



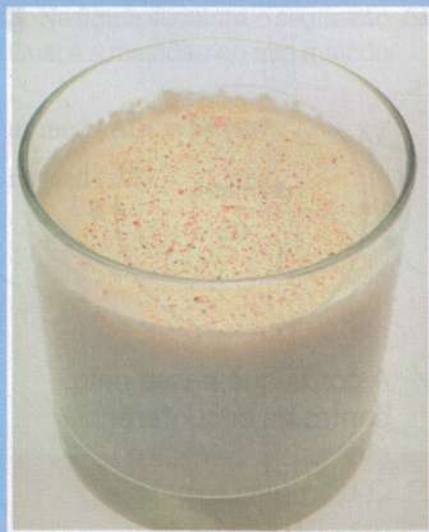
A forma circular é constantemente usada no mundo em que vivemos:

As moedas dos países, as rodas dos veículos apresentam forma circular.



Alguns instrumentos, como o barômetro e a bússola, têm forma circular.

Utensílios domésticos, como prato, panela, copo, têm a forma circular.



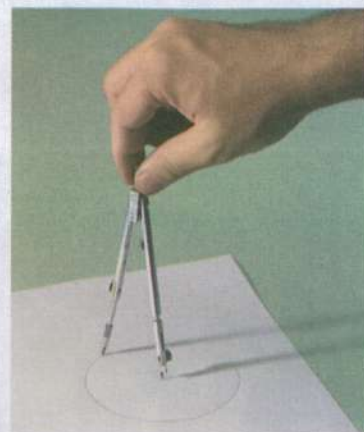
As engrenagens de relógio apresentam a forma circular.

Depois da forma triangular, a forma circular talvez tenha sido aquela que mais despertou a atenção do homem no estudo da Geometria.

Em séries anteriores, já falamos na *circunferência*, figura fundamental em numerosas construções geométricas.

Você aprendeu, também, a traçar uma circunferência usando o compasso.

Porém é sempre conveniente voltar a definir circunferência.

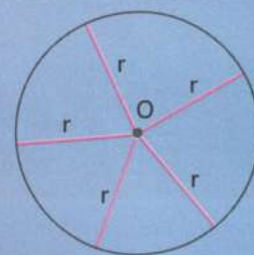


Sérgio Dotta, Jr/The Next

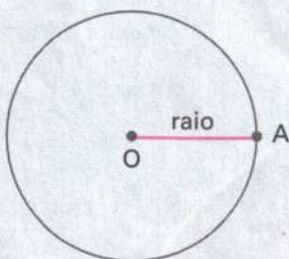
Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo.

Esse ponto fixo é chamado *centro* da circunferência (ponto O).

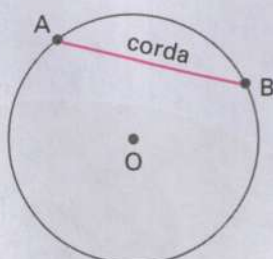
A distância constante é o *comprimento do raio*, indicado por r .



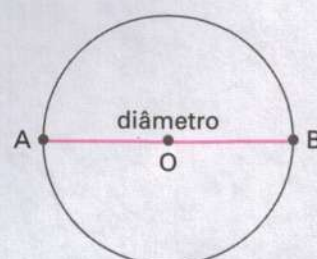
Veja alguns elementos da circunferência:



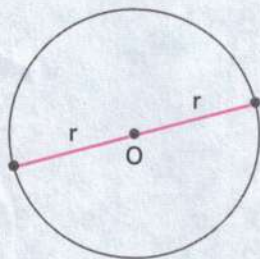
- ✓ Qualquer segmento que une o centro a qualquer ponto da circunferência chama-se *raio*.



- ✓ Qualquer segmento que une dois pontos distintos da circunferência chama-se *corda*.



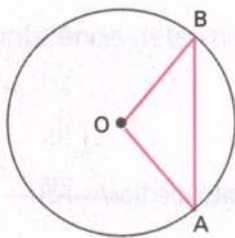
- ✓ A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se *diâmetro*. O diâmetro é, pois, a maior corda da circunferência.



Você pode observar, facilmente, que o comprimento do diâmetro (d) é igual ao dobro do comprimento do raio (r), ou seja, $d = 2r$.

FIXAÇÃO

1 Vamos considerar a figura seguinte:



Responda:

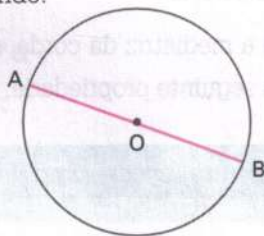
- Quais os segmentos indicados que são raios?
- Qual desses segmentos é corda?
- Existe algum segmento desses que é um diâmetro?
- Você pode afirmar que os pontos A , O e B determinam um triângulo isósceles? Justifique a resposta.

2 Determine a medida do diâmetro de uma circunferência quando a medida do raio é:

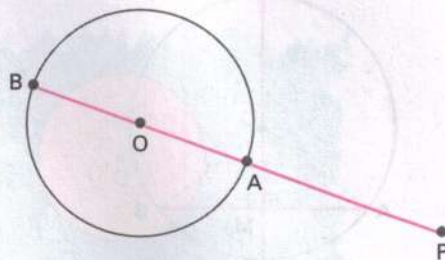
- | | |
|------------|---------------------|
| a) 15 cm | c) $\frac{1}{4}$ cm |
| b) 0,75 cm | d) $\frac{3}{2}$ cm |

3 Na figura seguinte, o segmento \overline{AB} é um diâmetro. Qual é a medida r do raio quando:

- $\text{med}(\overline{AB}) = 54$ cm?
- $\text{med}(\overline{AB}) = 11$ cm?

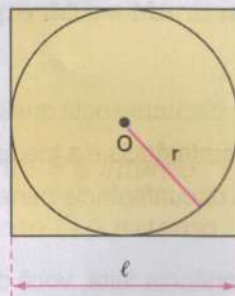


4 Na figura abaixo, a medida do segmento \overline{PB} é 72 cm. Sabendo que a medida do segmento \overline{PA} é 38 cm, determine o comprimento r do raio da circunferência.



5 Observando a figura abaixo, responda:

- Se ℓ a medida do lado do quadrado, calcule o valor de ℓ , dado $r = 10,5$ cm.
- Se r o comprimento do raio da circunferência, calcule o valor de r quando $\ell = 61$ cm.



6 Todo disco tem forma circular e sua capa tem forma quadrada. Se um disco tiver 17 cm de raio, qual deve ser a medida mínima do lado de sua capa?

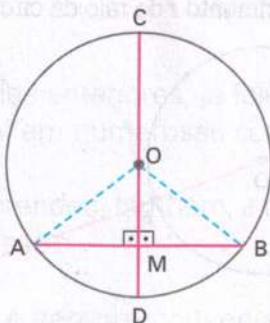
Explorando

Geometria

- Usando um compasso, construa uma circunferência qualquer de centro O .
A seguir, trace uma corda \overline{AB} e um diâmetro \overline{CD} , perpendicular a essa corda.
O ponto de encontro do diâmetro \overline{CD} com a corda \overline{AB} é o ponto M .
Use uma régua graduada e meça os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} .
O que ocorre com essas medidas?

Pela experiência feita, você deve ter percebido que o diâmetro \overline{CD} , perpendicular à corda \overline{AB} , passa pelo ponto médio dessa corda. Vamos, então, demonstrar a seguinte propriedade:

Todo diâmetro perpendicular a uma corda passa pelo ponto médio dessa corda.



\overline{AB} é corda
 \overline{CD} é diâmetro
 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

} M é o ponto médio de \overline{AB} .

Se considerarmos os triângulos retângulos OAM e OBM, verificamos que $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ pelo caso especial de congruência de triângulos: as hipotenusas, \overline{OA} e \overline{OB} , são congruentes, e os catetos, \overline{OM} em cada triângulo, são congruentes.

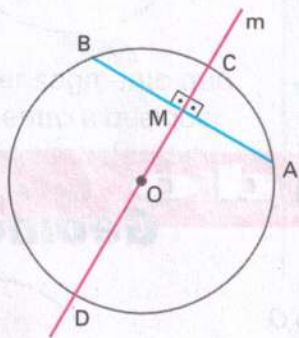
Como consequência, podemos dizer que o lado \overline{AM} do triângulo OAM e o lado \overline{BM} do triângulo OBM são congruentes, ou seja, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, o que nos leva a concluir que o ponto M é o ponto médio da corda \overline{AB} .

2. Construa uma circunferência qualquer de centro O, usando um compasso. A seguir, trace uma corda qualquer \overline{AB} dessa circunferência e a mediatriz dessa corda.

O centro O da circunferência pertence a essa mediatriz?

Pela experiência feita, você deve ter percebido que a mediatriz da corda \overline{AB} que você construiu passa pelo centro O da circunferência. Vamos, então, demonstrar a seguinte propriedade:

A mediatriz de uma corda passa pelo centro de uma circunferência.



Vamos, agora, considerar uma corda \overline{AB} e traçar a mediatriz dessa corda.

Você já sabe que a mediatriz de um segmento passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele.

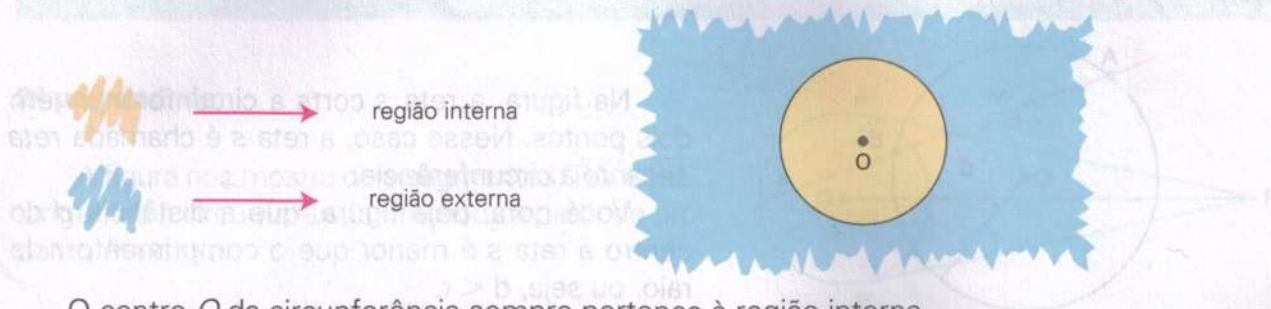
Sendo m a mediatriz da corda \overline{AB} , você nota que o diâmetro \overline{CD} está contido na mediatriz m. Isso nos leva à 2ª propriedade.

3. Tome três pontos não alinhados A, B e C na folha de seu caderno. Trace os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} e, a seguir, a mediatriz de cada um desses segmentos. O ponto de encontro das mediatrizes será o centro de uma circunferência que passa pelos pontos A, B e C. Construa, então, essa circunferência.

49

O CÍRCULO

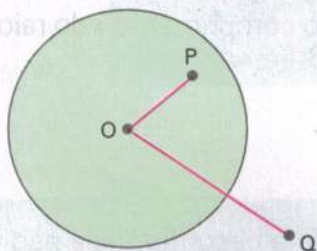
Toda circunferência determina no plano duas regiões distintas: a região *interna* e a região *externa*.



O centro O da circunferência sempre pertence à região interna.

Agora, observe:

- ✓ Um ponto P qualquer, cuja distância ao centro O é menor que o comprimento do raio, pertence à região interna, ou seja, é um ponto interno à circunferência.
- ✓ Um ponto Q qualquer, cuja distância ao centro O da circunferência é maior que o comprimento do raio, pertence à região externa, ou seja, é um ponto externo à circunferência.



Na figura, temos:

$\text{med}(\overline{PO}) < r \rightarrow$ o ponto P é *interno*

$\text{med}(\overline{QO}) > r \rightarrow$ o ponto Q é *externo*

Dáí, podemos definir:

A reunião da circunferência com a sua região interna denomina-se *círculo*.

FIXAÇÃO

1 Consideremos uma circunferência de raio 10 cm. Indicando-se por x a distância de um ponto P qualquer ao centro dessa circunferência, qual deve ser o valor de x para que:

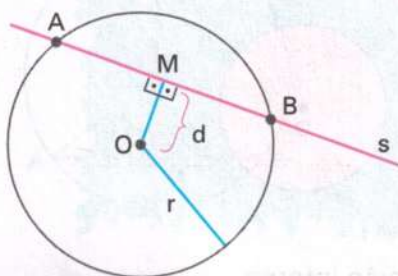
- o ponto P seja externo à circunferência?
- o ponto P seja interno à circunferência?
- o ponto P seja um ponto da circunferência?

2 Um ponto P qualquer pertence a uma circunferência de raio 20 cm e a distância do ponto P ao centro é expressa por $(3x + 5)$ cm. Nessas condições, determine o valor de x .

3 Um ponto P qualquer é externo a uma circunferência cujo raio é de 75 cm. A distância do ponto P ao centro é dada por $(7x + 33)$ cm. Nessas condições, qual o menor valor inteiro que x pode assumir?

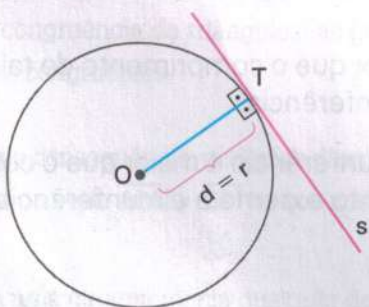
UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA: POSIÇÕES RELATIVAS

Vamos, agora, estudar as posições que uma reta pode ocupar em relação a uma circunferência.



Na figura, a reta s corta a circunferência em dois pontos. Nesse caso, a reta s é chamada *reta secante* à circunferência.

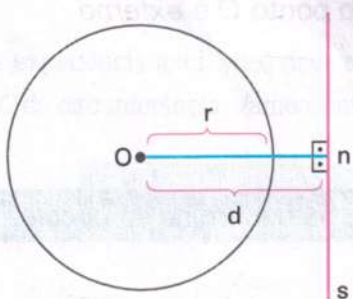
Você nota, pela figura, que a distância d do centro à reta s é menor que o comprimento r do raio, ou seja, $d < r$.



Na figura, a reta s tem apenas um ponto comum com a circunferência. Nesse caso, a reta s é chamada *reta tangente* à circunferência.

O ponto T é chamado *ponto de tangência*.

Você nota, pela figura, que a distância d do centro à reta s é igual ao comprimento r do raio, ou seja, $d = r$.



Na figura, a reta s e a circunferência não têm ponto comum. Nesse caso, a reta s é uma *reta externa* à circunferência.

Você nota, pela figura, que a distância d do centro à reta s é maior que o comprimento r do raio, ou seja, $d > r$.

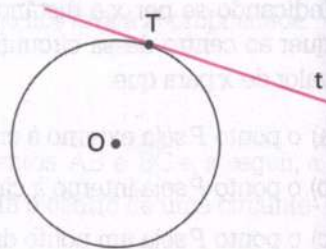
Propriedades da reta tangente

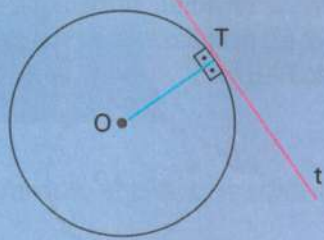
As retas tangentes a uma circunferência apresentam duas propriedades importantes:

1ª propriedade

Na figura, vemos uma circunferência de centro O e uma reta t , tangente a essa circunferência.

A menor distância do ponto O à reta s é o segmento \overline{OT} , perpendicular à reta t . Como \overline{OT} é um segmento que representa um raio dessa circunferência, podemos dizer:



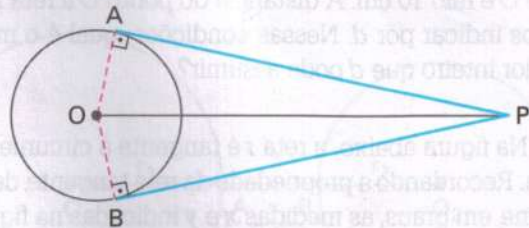


Qualquer reta *tangente* a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

$$t \perp \overline{OT}$$

2ª propriedade

A figura nos mostra dois segmentos, \overline{PA} e \overline{PB} , tangentes à circunferência, traçados a partir de um ponto P exterior.



Se considerarmos os triângulos retângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OBP$, podemos afirmar que são congruentes, pois têm a hipotenusa (\overline{OP} nos dois triângulos) e um cateto (\overline{OA} no $\triangle OAP$ e \overline{OB} no $\triangle OBP$) respectivamente congruentes.

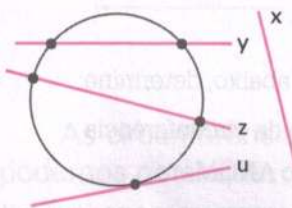
Sendo $\triangle OAP \cong \triangle OBP$, então $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Daí, temos a propriedade:

Se de um ponto P , exterior a uma circunferência, traçamos os segmentos \overline{PA} e \overline{PB} , tangentes à circunferência nos pontos A e B , então os segmentos \overline{PA} e \overline{PB} são congruentes.

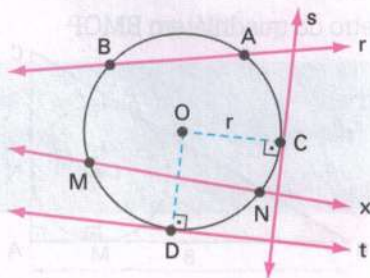
FIXAÇÃO

1 Dê o nome que cada reta recebe por sua posição em relação à circunferência:



- reta x
- reta y
- reta u
- reta z

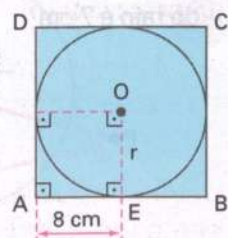
2 Observando a figura seguinte, responda:



- Quais as retas que são secantes à circunferência?
- Quais as retas que são tangentes à circunferência?
- Há alguma reta externa à circunferência?
- Como é chamado o ponto C ?
- O raio \overline{OD} é perpendicular a qual reta?
- A reta s é perpendicular a qual segmento?

3 A figura abaixo, $ABCD$, é um quadrado. Nessas condições, determine:

- a medida do lado do quadrado
- o perímetro desse quadrado
- a área do quadrado
- o comprimento r do raio da circunferência



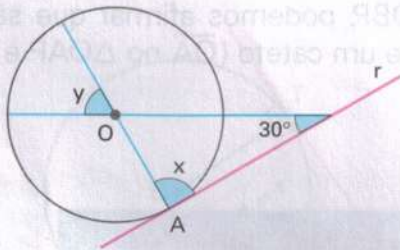
4 Consideremos uma circunferência de raio 20 cm. Vamos indicar por x a distância do centro dessa circunferência a uma reta u . Nessas condições, qual deve ser o valor de x quando:

- a) a reta u é externa à circunferência?
- b) a reta u é secante à circunferência?
- c) a reta u é tangente à circunferência?

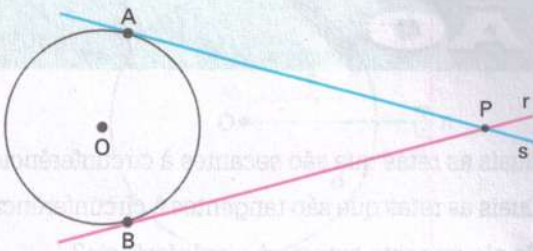


5 Uma reta t é secante a uma circunferência de centro O e raio 10 cm. A distância do ponto O à reta t vamos indicar por d . Nessas condições, qual é o maior valor inteiro que d pode assumir?

6 Na figura abaixo, a reta r é tangente à circunferência. Recordando a propriedade da reta tangente, determine, em graus, as medidas x e y indicadas na figura.

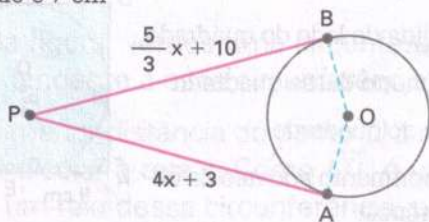


7 Na figura abaixo, as retas r e s são tangentes à circunferência. O segmento \overline{PA} mede x unidades de comprimento e o segmento \overline{PB} mede y unidades de comprimento. Qual a relação que você pode estabelecer entre os números x e y ?

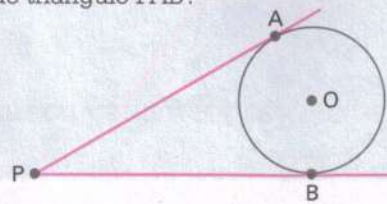


8 Observando a figura abaixo, determine:

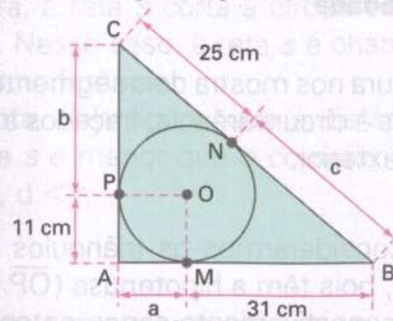
- a) a medida x
- b) a medida do segmento \overline{PA}
- c) a medida do segmento \overline{PB}
- d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm



9 Na figura abaixo, temos que a medida do segmento \overline{PA} é expressa por x e a medida do segmento \overline{AB} é expressa por y . Qual é o polinômio que expressa o perímetro do triângulo PAB?



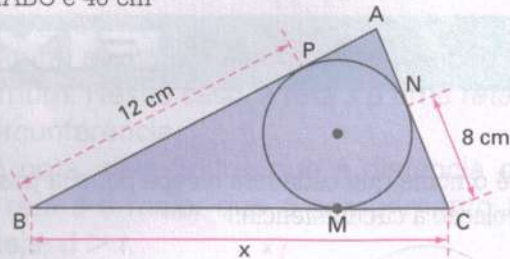
10 Observando a figura seguinte, determine:



- a) as medidas a, b, c indicadas na figura
- b) o perímetro do triângulo ABC
- c) o raio da circunferência de centro O
- d) o perímetro do quadrado AMOP

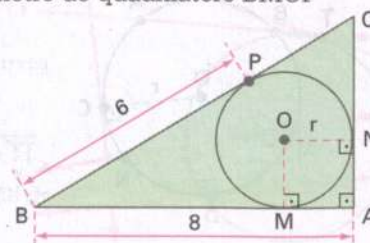
11 Observando a figura abaixo, determine:

- a) a medida x do lado \overline{BC} do triângulo ABC
- b) a medida do segmento \overline{AN} , se o perímetro do $\triangle ABC$ é 46 cm



12 Considerando a figura abaixo, determine:

- a) o comprimento r do raio da circunferência
- b) o perímetro do quadrado ANOM
- c) a expressão algébrica que representa o perímetro do $\triangle ABC$, se a medida do segmento \overline{PC} é dada por a
- d) o perímetro do quadrilátero BMOP



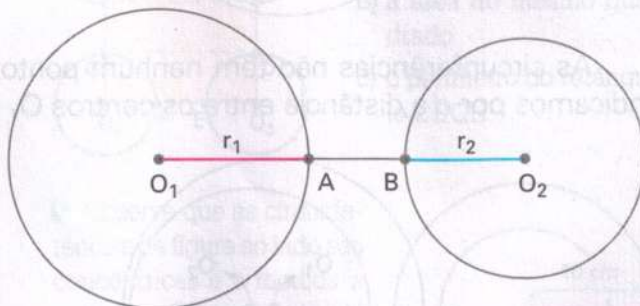


POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Vamos, agora, observar as posições que duas circunferências podem ocupar em um plano:

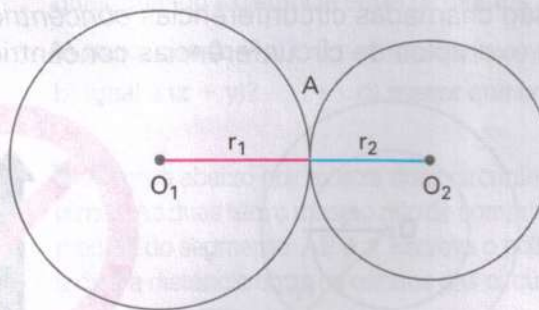
As circunferências são *externas*. Se indicamos por d a distância entre os centros O_1 e O_2 podemos notar que, neste caso:

$$d > r_1 + r_2$$



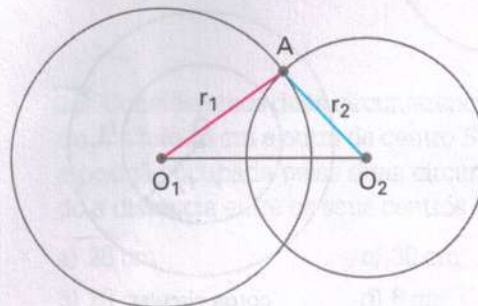
As circunferências são *tangentes externamente*. Se indicamos por d a distância entre os centros O_1 e O_2 , veremos que:

$$d = r_1 + r_2$$

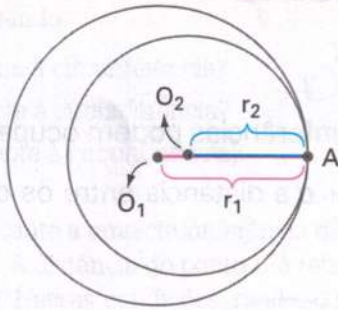


As circunferências são *secantes*. Se indicamos por d a distância entre os centros O_1 e O_2 podemos notar que, neste caso:

$$\left. \begin{array}{l} d < r_1 + r_2 \\ e \\ d > r_1 - r_2 \end{array} \right\} r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$$

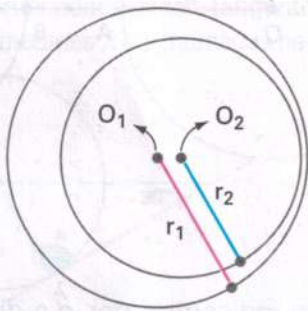


As circunferências são *tangentes internamente*. Se indicamos por d a distância entre os centros O_1 e O_2 podemos notar que:



$$d = r_1 - r_2$$

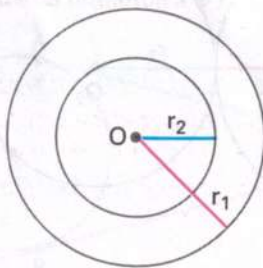
As circunferências não têm nenhum ponto comum, sendo uma delas *interna* à outra. Se indicamos por d a distância entre os centros O_1 e O_2 , temos:



$$d < r_1 - r_2$$

Existem casos especiais de duas circunferências, uma interna à outra, que têm o mesmo centro: são chamadas circunferências *concêntricas*.

Veja exemplos de circunferências concêntricas.

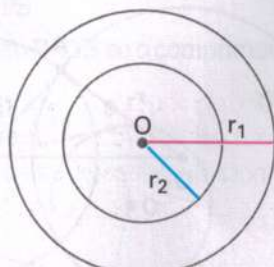


um sinal de trânsito



um alvo de treinamento para "tiro"

A figura plana limitada por duas circunferências concêntricas e de raios distintos chama-se *coroa circular*.



coroa circular

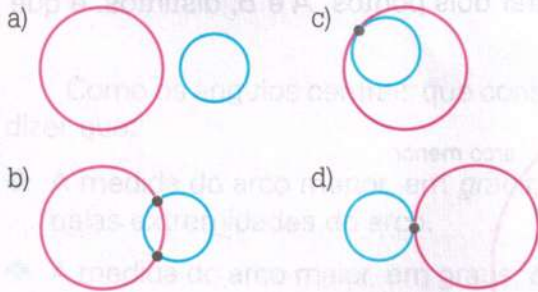


um sinal de trânsito

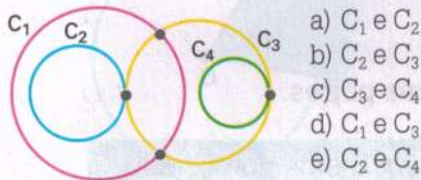
coroa circular

FIXAÇÃO

1 Dê o nome das posições ocupadas pelos pares de circunferências:

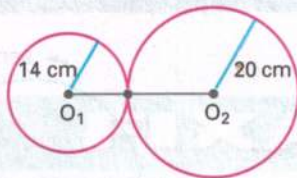


2 Observe a figura e dê a posição relativa das circunferências:

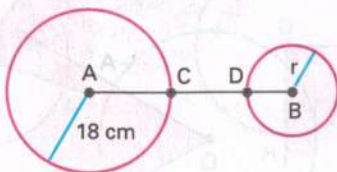


- a) C_1 e C_2
- b) C_2 e C_3
- c) C_3 e C_4
- d) C_1 e C_3
- e) C_2 e C_4

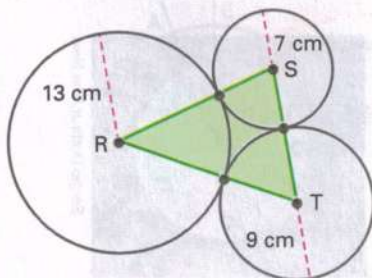
3 Na figura ao lado, seja x a distância entre os centros O_1 e O_2 . De acordo com a figura, determine x .



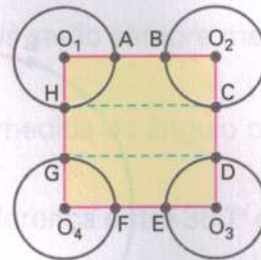
4 Na figura abaixo, a medida do segmento \overline{CD} é 37 cm e a distância entre os centros A e B é de 65 cm. Nessas condições, determine o comprimento r do raio da circunferência de centro B .



5 Na figura seguinte, as circunferências de centros R , S e T são tangentes externamente. Nessas condições, qual é o perímetro do triângulo RST ?

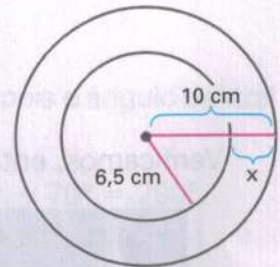


6 Na figura seguinte, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EF} \cong \overline{GH}$, e as circunferências de centros O_1, O_2, O_3, O_4 têm o mesmo raio. Sabendo que a medida do segmento \overline{AB} é 7 cm e o comprimento de cada raio é 4 cm, determine:



- a) o perímetro do quadrado O_1, O_2, O_3, O_4
- b) a área do mesmo quadrado
- c) o perímetro do retângulo $CDGH$

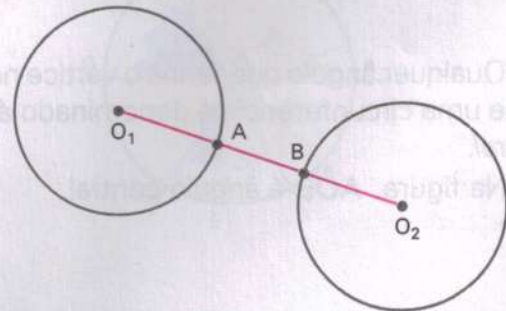
7 Observe que as circunferências da figura ao lado são concêntricas e a medida x indica o comprimento do raio da coroa circular. Nessas condições, dê a medida x .



8 Temos uma circunferência de centro A e raio x e outra de centro B e raio y . Qual a posição relativa das duas, quando a distância entre os centros A e B é:

- a) maior que $(x + y)$?
- b) igual a $(x + y)$?
- c) igual a $(x - y)$?
- d) menor que $(x - y)$?

9 A figura abaixo nos mostra duas circunferências externas. As duas têm o mesmo raio de comprimento x e a medida do segmento \overline{AB} é y . Escreva o polinômio que indica a distância entre os centros das circunferências.

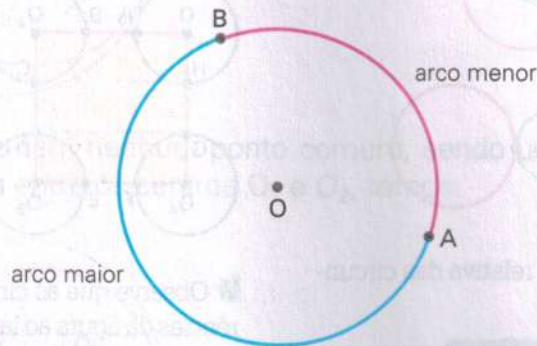


10 Consideremos duas circunferências, uma de centro A e raio 16 cm e outra de centro B e raio 10 cm. Dê a posição ocupada pelas duas circunferências quando a distância entre os seus centros é igual a:

- a) 26 cm
- b) 20 cm
- c) 30 cm
- d) 6 cm

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA E ÂNGULO CENTRAL

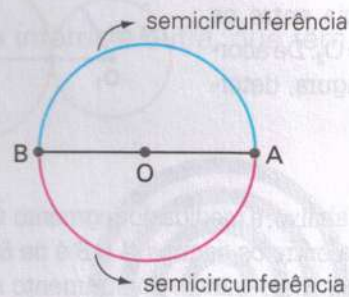
Vamos desenhar uma circunferência e nela considerar dois pontos, A e B , distintos, e que não sejam extremidades de um diâmetro.



Verificamos, então, que a circunferência fica dividida em duas partes.

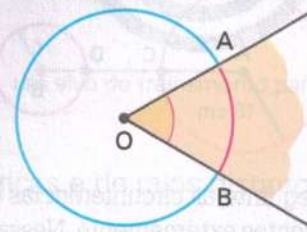
Cada uma dessas partes é chamada *arco de circunferência* e os pontos são as *extremidades* do arco. Na figura, indica-se o arco menor por \widehat{AB} .

Quando as extremidades do arco são extremidades de um mesmo diâmetro, cada um dos arcos denomina-se *semicircunferência*.



Qualquer ângulo que tenha o vértice no centro de uma circunferência é denominado *ângulo central*.

Na figura, $\widehat{AÔB}$ é ângulo central.

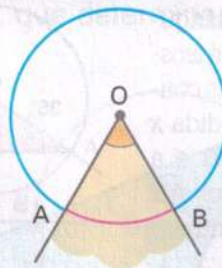


$\widehat{AÔB}$ é ângulo central

Um exemplo típico de ângulo central é o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio.

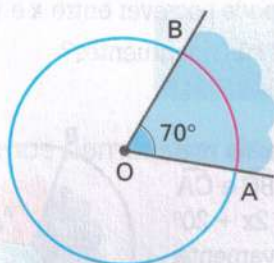


Observe que, quando traçamos um ângulo central, seus lados determinam um arco na circunferência. Na figura ao lado, \widehat{AB} é o arco determinado pelo ângulo central $\widehat{AÔB}$.



Como os ângulos centrais que consideraremos serão sempre medidos em graus, podemos dizer que:

- ❖ A medida do arco menor, em *graus*, é igual à medida do ângulo central cujos lados passam pelas extremidades do arco.
- ❖ A medida do arco maior, em graus, é igual à diferença entre 360° e a medida do arco menor.

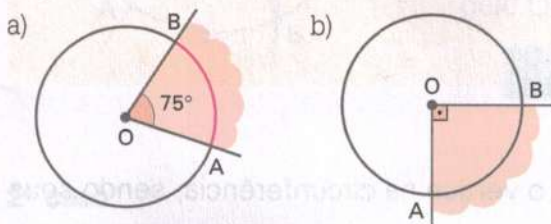


Na figura, temos:

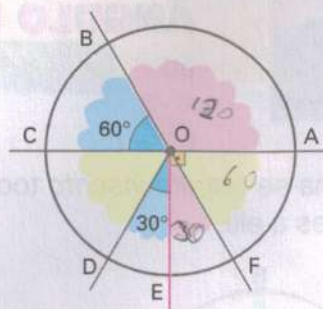
- ✓ A medida do arco menor \widehat{AB} é 70° , pois o ângulo central $\widehat{AÔB}$ mede 70° .
- ✓ A medida do arco maior \widehat{AB} é $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.

FIXAÇÃO

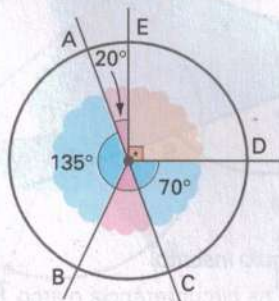
1 Em cada uma das figuras determine a medida do arco menor \widehat{AB} e a medida do arco maior \widehat{AB} :



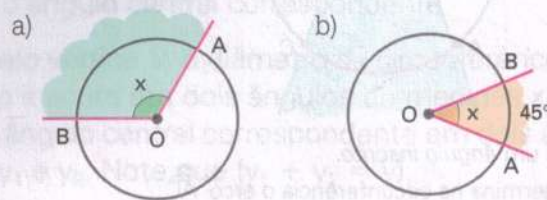
3 Na figura seguinte, determine a medida dos arcos \widehat{AB} , \widehat{CD} , \widehat{EF} e \widehat{FA} :



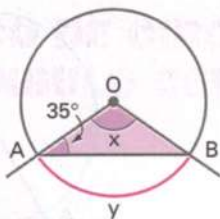
2 Observando a figura seguinte, determine a medida do arco \widehat{BC} e a do arco \widehat{DE} :



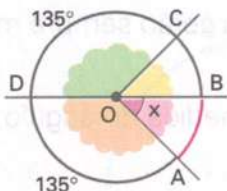
4 Em cada uma das figuras, determine a medida x do ângulo central associado ao arco menor \widehat{AB} .



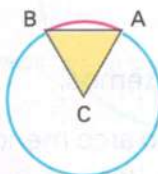
5 Você observa que o triângulo OAB da figura ao lado é isósceles ($\overline{OA} \cong \overline{OB}$). Nessas condições, determine a medida x do ângulo central \widehat{AOB} e a medida y do arco menor \widehat{AB} associado ao ângulo central.



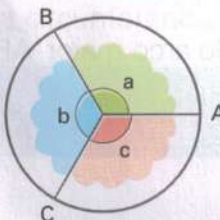
6 Na figura ao lado, os arcos \widehat{AB} e \widehat{BC} são congruentes. Nessas condições, determine a medida x do ângulo central \widehat{AOB} .



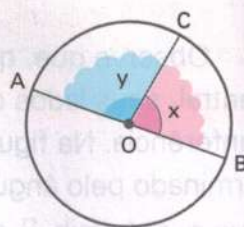
7 Na figura ao lado o triângulo ABC é equilátero. Qual é a medida do arco menor \widehat{AB} associado ao ângulo central \widehat{ACB} ?



8 Na figura ao lado, temos que $a = b = c$, sendo a, b, c as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Nessas condições, determine a medida dos arcos \widehat{AB} , \widehat{BC} e \widehat{CA} .

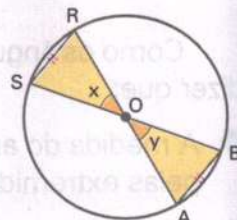


9 Na figura ao lado, o arco \widehat{BC} mede 80° . Determine as medidas x e y indicadas na figura.

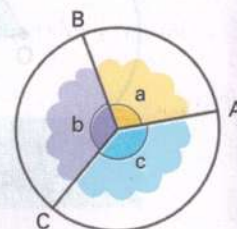


10 Na figura seguinte, as cordas \overline{AB} e \overline{RS} são congruentes. Nessas condições, responda:

- Os triângulos AOB e ROS são congruentes?
- Qual o caso de congruência que justifica sua resposta?
- Que relação você pode escrever entre x e y ?
- Os arcos \widehat{AB} e \widehat{RS} são congruentes?



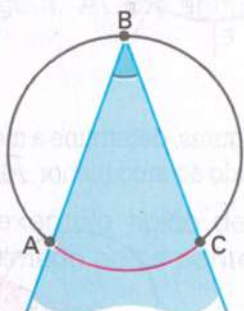
11 Na figura ao lado, as medidas dos arcos \widehat{AB} , \widehat{BC} e \widehat{CA} são expressas por $2x$, $2x + 20^\circ$ e $2x + 40^\circ$, respectivamente. Nessas condições, determine as medidas a, b, c dos ângulos centrais indicados.



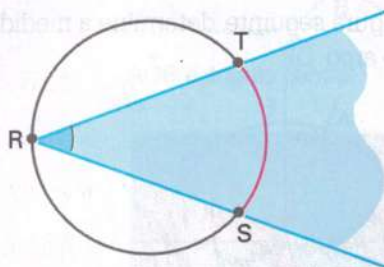
53

ÂNGULO INSCRITO

Denomina-se *ângulo inscrito* todo ângulo que tem o vértice na circunferência, sendo seus lados secantes a ela.



\widehat{ABC} é um *ângulo inscrito*.
Ele determina na circunferência o arco \widehat{AC} .



\widehat{SRT} é um *ângulo inscrito*.
Ele determina na circunferência o arco \widehat{ST} .

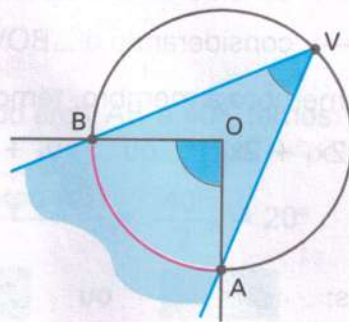
A todo ângulo inscrito corresponde um ângulo central, que determina na circunferência o mesmo arco determinado pelo ângulo inscrito.

Na figura ao lado:

$\widehat{A\hat{V}B}$ é um ângulo inscrito.

$\widehat{A\hat{O}B}$ é um ângulo central.

Ambos determinam o mesmo arco \widehat{AB} .



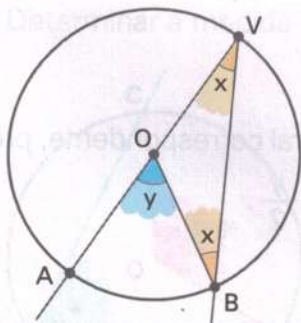
Então, existe uma relação entre a medida de um ângulo inscrito e a medida do ângulo central correspondente:

A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

Vamos demonstrar essa relação, considerando três casos:

1º caso

O centro O pertence a um dos lados do ângulo inscrito.



Na figura:

- ✓ x é a medida do ângulo inscrito
- ✓ y é a medida do ângulo central correspondente

Observando que o triângulo OBV é isósceles ($\overline{OB} \cong \overline{OV}$ e \overline{VB} é base), temos que os dois ângulos da base medem x .

Como y representa a medida do ângulo externo do triângulo OBV , temos:

$$y = x + x$$

ou

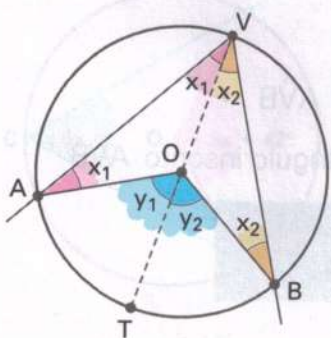
$$2x = y$$

ou

$$x = \frac{y}{2}$$

2º caso

O centro O é interno ao ângulo inscrito.



Vamos, novamente, indicar por:

- ✓ x a medida do ângulo inscrito
- ✓ y a medida do ângulo central correspondente

Traçando, pelo vértice V , o diâmetro da circunferência, dividimos o ângulo inscrito em dois ângulos de medidas x_1 e x_2 ($x_1 + x_2 = x$) e o ângulo central correspondente em dois ângulos de medidas y_1 e y_2 . Note que ($y_1 + y_2 = y$).

De acordo com o 1º caso, temos:

✓ $y_1 = 2x_1 \rightarrow$ considerando o $\triangle AOV$

✓ $y_2 = 2x_2 \rightarrow$ considerando o $\triangle BOV$

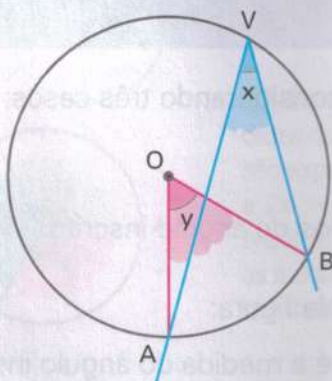
Somando membro a membro, temos:

$$y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 \quad \text{ou} \quad \underbrace{y_1 + y_2}_y = 2(\underbrace{x_1 + x_2}_x)$$

Daí, temos: $y = 2x$ ou $2x = y$ ou $x = \frac{y}{2}$

3º caso

O centro O é externo ao ângulo inscrito.

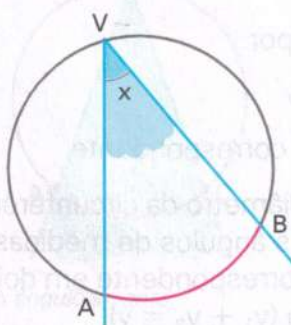


Sendo x a medida do ângulo inscrito e y a medida do ângulo central correspondente, procure demonstrar, de acordo com a figura acima, que vale a relação $x = \frac{y}{2}$.

Faça essa demonstração como uma atividade.

Como o ângulo central tem a mesma medida que o arco determinado por seus lados na circunferência, existe uma relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida do arco correspondente, ou seja:

A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco determinado por seus lados na circunferência.



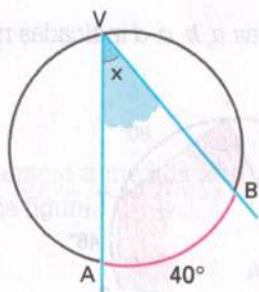
x : medida do ângulo inscrito \widehat{AVB}

\widehat{AB} : arco determinado pelo ângulo inscrito \widehat{AVB}

$$x = \frac{\text{medida de } \widehat{AB}}{2}$$

Vejamos algumas situações:

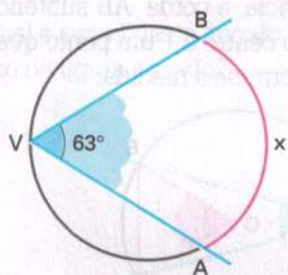
1ª Determinar a medida x na figura seguinte.



Como a medida do arco \widehat{AB} é 40° , temos:

$$x = \frac{\text{medida do arco } \widehat{AB}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

2ª Determinar a medida x na figura seguinte.



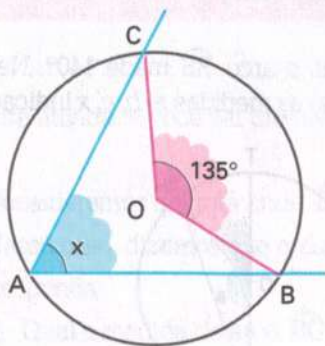
De acordo com os dados da figura, temos:

x : medida do arco \widehat{AB}

63° : medida do ângulo inscrito \widehat{AVB}

$$\text{Então, } 63^\circ = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2 \cdot 63^\circ = 126^\circ$$

3ª Determinar a medida x indicada na figura seguinte.



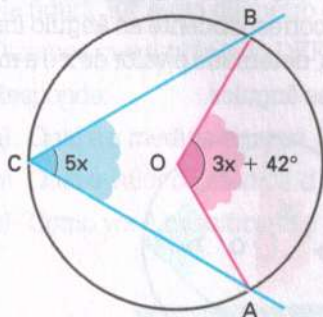
De acordo com a figura:

x : medida do ângulo inscrito \widehat{BAC} .

135° : medida do ângulo central \widehat{BOC} , correspondente ao ângulo inscrito \widehat{BAC} .

$$x = \frac{135^\circ}{2} = 62^\circ 30'$$

4ª Determinar a medida x indicada na figura seguinte.



De acordo com a figura, o ângulo \widehat{AOB} é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito \widehat{ACB} .

Daí, temos:

$$5x = \frac{3x + 42^\circ}{2}$$

$$\frac{10x}{2} = \frac{3x + 42^\circ}{2}$$

$$10x = 3x + 42^\circ$$

$$10x - 3x = 42^\circ$$

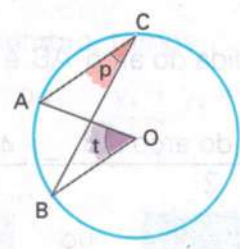
$$7x = 42^\circ$$

$$x = \frac{42^\circ}{7}$$

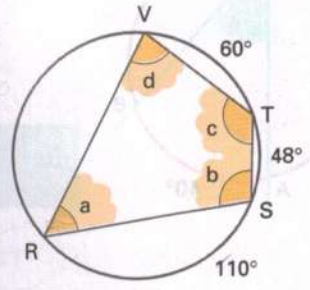
$$x = 6^\circ$$

FIXAÇÃO

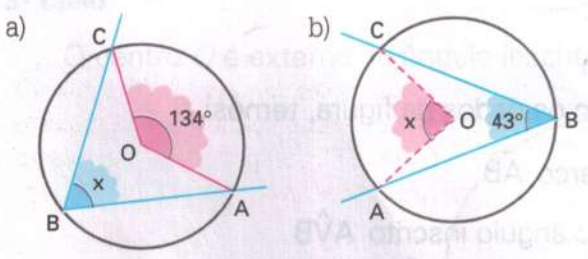
1 Na figura ao lado, escreva a medida p em função da medida t , ambas indicadas na figura.



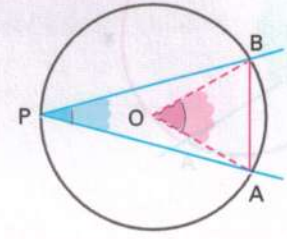
6 Determine as medidas a, b, c, d indicadas na figura abaixo.



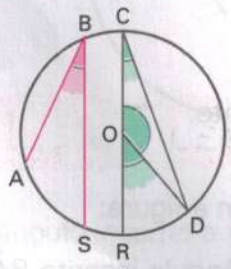
2 Em cada uma das figuras, determine a medida x indicada:



7 Em uma circunferência, a corda \overline{AB} subtende um arco de 60° . Sendo O o centro e P um ponto qualquer da circunferência, determine a medida:



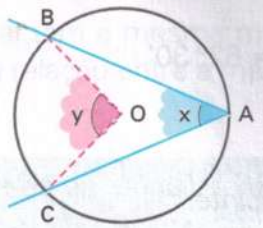
3 Observando os ângulos assinalados na figura ao lado, responda:



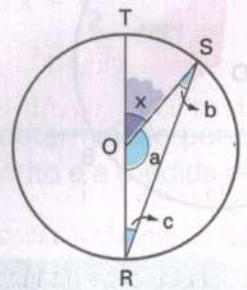
- Quais são os ângulos inscritos?
- Quais são os ângulos centrais?
- Qual é o ângulo inscrito que determina o mesmo arco que o ângulo central $\hat{R}\hat{O}\hat{D}$?

- do ângulo $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$
- do ângulo $\hat{A}\hat{P}\hat{B}$

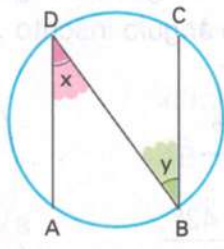
4 Na figura ao lado, a medida do arco \widehat{BC} é 92° . Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.



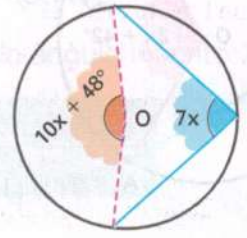
8 Na figura a seguir, o arco \widehat{RS} mede 140° . Nessas condições, determine as medidas a, b, c, x indicadas.



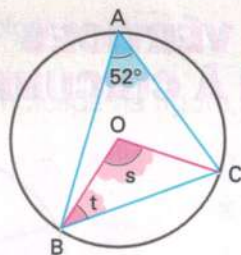
5 Na figura ao lado, a medida do arco \widehat{AB} corresponde a $\frac{1}{5}$ da medida da circunferência em graus, enquanto a medida do arco \widehat{CD} corresponde a $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência em graus. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.



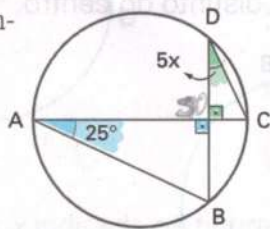
9 Na figura abaixo, você observa um ângulo inscrito e um ângulo central correspondente ao ângulo inscrito. Nessas condições, determine o valor de x e a medida de cada um desses ângulos.



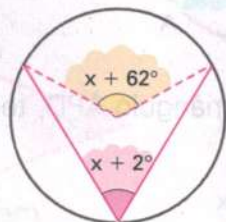
10 Determine as medidas s e t indicadas na figura ao lado.



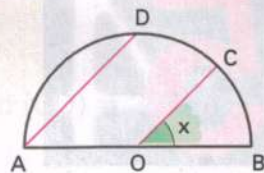
11 Determine a medida x indicada na figura.



12 Qual é a medida do ângulo inscrito na figura ao lado?



13 Na figura ao lado, temos uma semicircunferência de centro O e diâmetro \overline{AB} . Sabendo que $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$ e que o arco \widehat{CD} mede 45° , determine a medida x indicada na figura.



14 A medida de um arco corresponde a $\frac{2}{5}$ da medida total, em graus, de uma circunferência. Nessas condições, determine:

- a medida do ângulo central associado a esse arco
- a medida do ângulo inscrito que corresponde ao ângulo central

15 Numa circunferência, temos os arcos \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} e \widehat{DA} , de tal forma que suas medidas são expressas por $2x$, $3x$, $x + 30^\circ$ e $x + 50^\circ$, respectivamente. Nessas condições, determine a medida:

- do ângulo inscrito \widehat{BAC}
- do ângulo inscrito \widehat{BCD}

Explorando Geometria

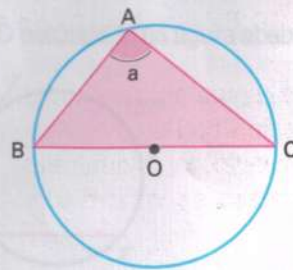
* Nesta atividade você vai precisar de um transferidor.

1. Consideremos a figura onde \overline{BC} é um diâmetro da circunferência.

Nesse caso, dizemos que o $\triangle ABC$ está inscrito numa semicircunferência.

Responda:

- Qual a medida do arco \widehat{BC} ?
- Qual o valor da medida a indicada?
- Como você classificaria o triângulo ABC quanto aos ângulos?

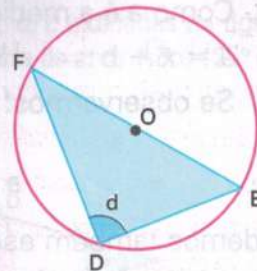


2. Na figura \overline{EF} é um diâmetro da circunferência.

Dizemos que o triângulo DEF está inscrito numa semicircunferência.

Responda:

- Qual é a medida do arco \widehat{EF} ?
- Qual o valor da medida d indicada?
- Como você classificaria o triângulo DEF em relação aos ângulos?

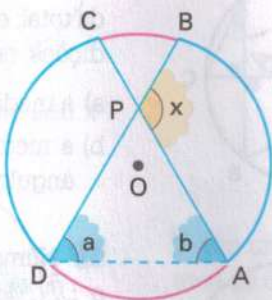


Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo.

ÂNGULOS CUJOS VÉRTICES NÃO PERTENCEM À CIRCUNFERÊNCIA

1º caso

O vértice é um ponto interno à circunferência, distinto do centro.



Como x é a medida de um ângulo externo ao triângulo APD, temos $x = a + b$.

Se observarmos:

$$a = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2}$$

e

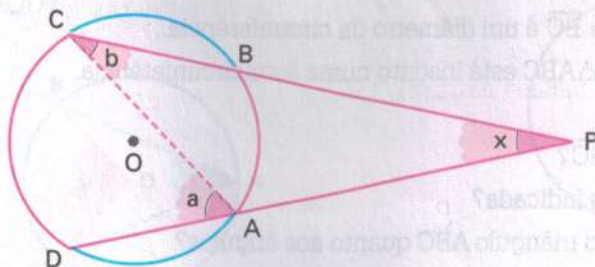
$$b = \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{2}$$

podemos também escrever:

$$x = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2} + \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{2}$$

2º caso

O vértice é um ponto externo à circunferência.



Como a é a medida de um ângulo externo ao triângulo APC, temos:

$$a = x + b \rightarrow x = a - b$$

Se observarmos:

$$a = \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{2}$$

e

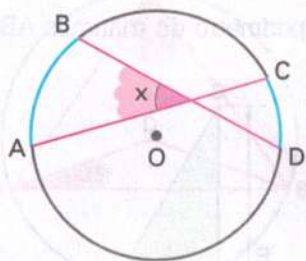
$$b = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2}$$

podemos também escrever:

$$x = \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{2} - \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2}$$

Vejam os alguns exemplos:

1. Determinar a medida x indicada na figura, dados $\text{med}(\widehat{AB}) = 60^\circ$ e $\text{med}(\widehat{CD}) = 30^\circ$.

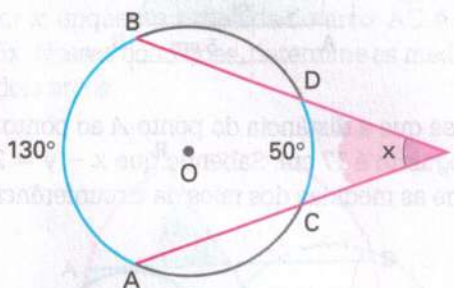


$$x = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2} + \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{2}$$

$$x = \frac{60^\circ}{2} + \frac{30^\circ}{2}$$

$$x = 45^\circ$$

2. Determinar a medida x indicada na figura, dados $\text{med}(\widehat{AB}) = 130^\circ$ e $\text{med}(\widehat{CD}) = 50^\circ$.



$$x = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2} - \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{2}$$

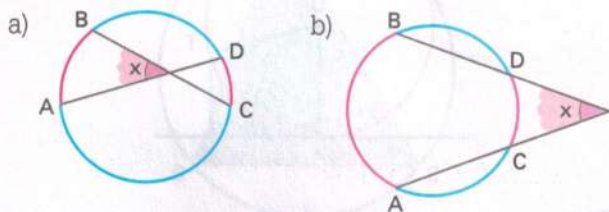
$$x = \frac{130^\circ}{2} - \frac{50^\circ}{2}$$

$$x = 65^\circ - 25^\circ$$

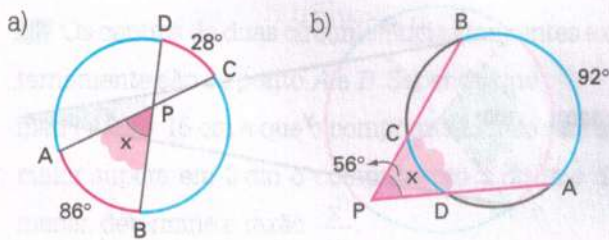
$$x = 40^\circ$$

FIXAÇÃO

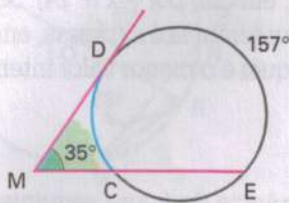
1 Em cada uma das figuras, vamos indicar por t a medida do arco \widehat{AB} e por s a medida do arco \widehat{CD} . Nessas condições, determine a medida indicada, em função de t e s .



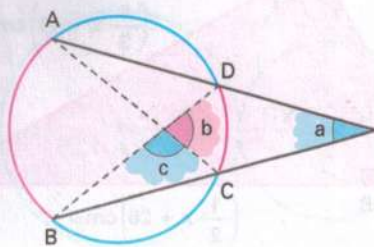
2 Determine a medida x em cada uma das figuras:



3 Quanto mede o arco \widehat{CD} assinalado na figura abaixo?

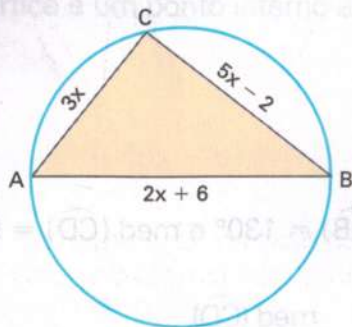


4 Determine as medidas a , b , c indicadas na figura abaixo, sabendo que a medida do arco \widehat{AB} é 125° e a medida do arco \widehat{CD} é 65° .



RETOMANDO o que aprendeu

1 Na figura seguinte, o perímetro do triângulo ABC é 24 cm. Se \overline{AB} é o diâmetro da circunferência, qual é a medida do raio dessa circunferência?



2 A medida do raio de uma circunferência, em metros,

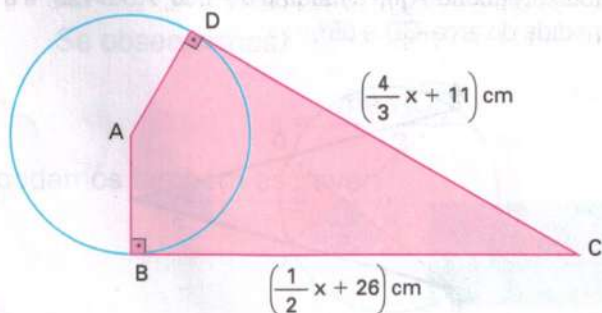
corresponde à solução da equação
$$\frac{-\frac{2}{3} + x}{\frac{1}{3} - 3x} = 1.$$

Responda:

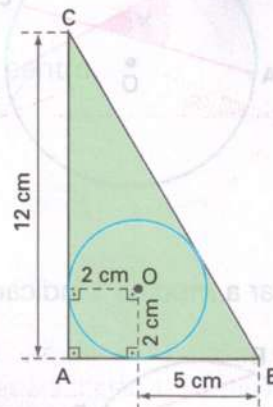
- Qual é a medida do diâmetro dessa circunferência?
- Um ponto P , distante 2 m do centro dessa circunferência, é interno ou externo à circunferência?

3 Um ponto A qualquer é externo a uma circunferência. A distância do ponto A ao centro da circunferência é expressa, em cm, por $(4x + 24)$. Se a medida do raio dessa circunferência é expressa, em centímetros, por $(2x + 34)$, qual é o menor valor inteiro que x pode assumir?

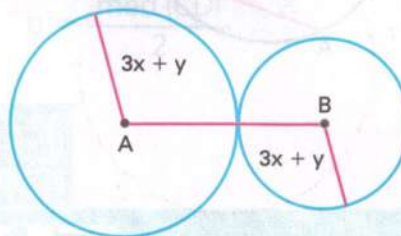
4 Na circunferência da figura seguinte a medida do diâmetro é 40 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero ABCD.



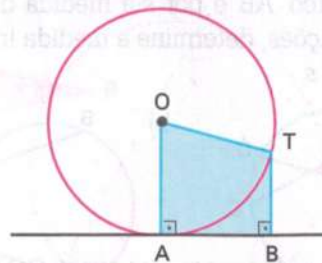
5 Qual é o perímetro do triângulo ABC, na figura a seguir?



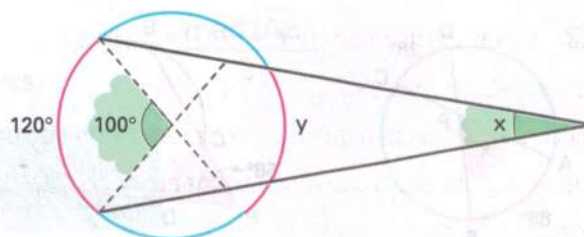
6 Sabe-se que a distância do ponto A ao ponto B na figura seguinte é 17 cm. Sabendo que $x - y = 2$ cm, determine as medidas dos raios da circunferências.



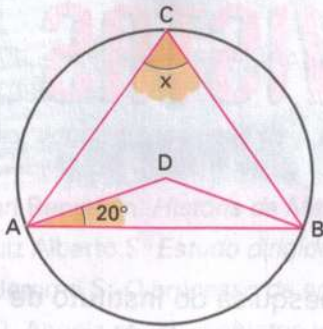
7 Na figura abaixo, o arco \widehat{AT} mede 75° . Nessas condições, determine as medidas dos ângulos internos do trapézio OABT.



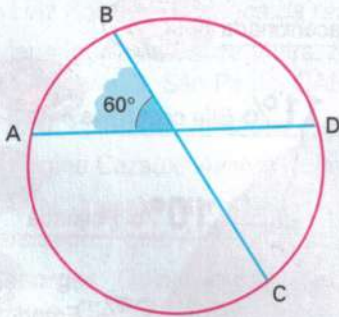
8 Considerando os dados da figura abaixo, determine as medidas x do ângulo indicado e y do arco indicado.



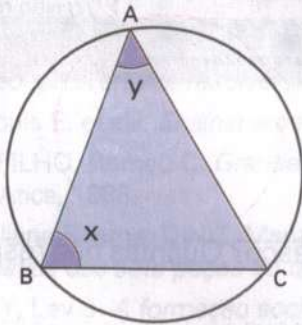
9 Na figura seguinte, o ponto D é o centro da circunferência. Qual é o valor da medida x ?



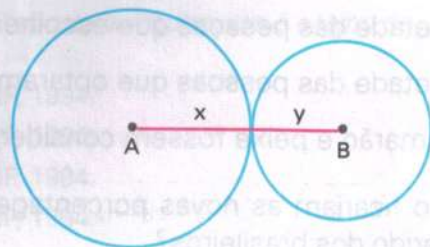
10 Na figura abaixo, a medida do arco \widehat{BD} é expressa por x , enquanto a medida do arco \widehat{AC} é expressa por $5x$. Nessas condições, determine as medidas desses dois arcos.



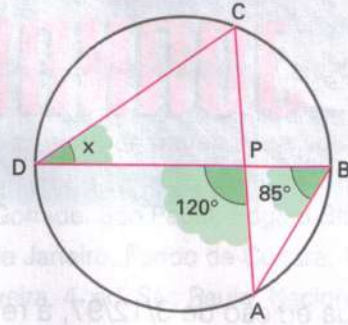
11 Na figura seguinte, o arco \widehat{AB} mede 120° . Se $x = 2y$, qual é o valor da expressão $x - y$?



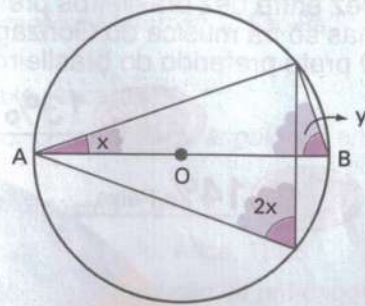
12 Os centros de duas circunferências tangentes externamente são os pontos A e B . Sabendo que $\text{med}(\widehat{AB}) = 15$ cm e que o comprimento x do raio da maior supera em 3 cm o comprimento y do raio da menor, determine a razão $\frac{x}{y}$.



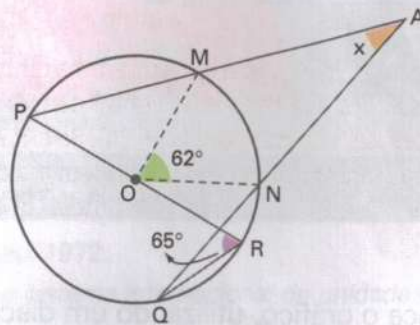
13 Qual é o valor da medida x indicada na figura seguinte?



14 Na figura seguinte, \overline{AB} é o diâmetro da circunferência. Qual é o valor, em graus, da medida y ?



15 Na figura seguinte, calcule a medida x .



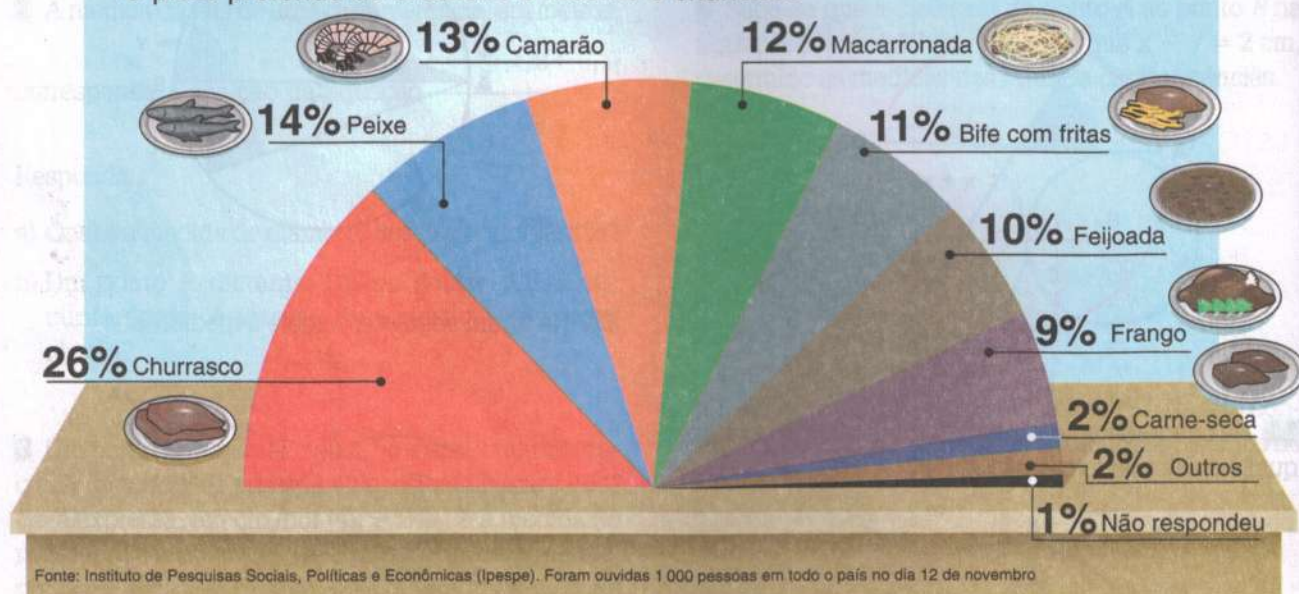
16 Na figura seguinte, a distância entre os centros A e B das circunferências é 17 cm. Sabendo que a diferença entre os comprimentos x e y dos raios é 3 cm, determine o comprimento x ?

JORNAIS & REVISTAS

Em sua edição de 3/12/97, a revista *Veja* publicou uma pesquisa do Instituto de Pesquisas Sociais Políticas e Econômicas (Ipespe) sobre o prato preferido do brasileiro.

Carne na brasa

Dez entre dez brasileiros preferem feijão - mas só na música do Gonzaguinha. O prato preferido do brasileiro é mesmo o churrasco



1. Refaça o gráfico, utilizando um disco inteiro.
2. Se foram ouvidas 1 000 pessoas, quantas optaram por churrasco? Quantas não responderam à pesquisa?
3. Suponha que:
 - metade das pessoas que escolheram macarronada tivessem optado por bife com fritas
 - metade das pessoas que optaram por feijoada tivessem optado por macarronada.
 - camarão e peixe fossem considerados uma mesma opção de peixe

Como ficariam as novas porcentagens? Nesse caso, o churrasco continuaria a ser o prato preferido dos brasileiros?

Bibliografia

- ASOCIACIÓN DE MAESTROS ROSA SENSAT. *Didáctica de los números enteros*. Madri, Nuestra Cultura, 1980.
- BORDENAVE, Juan Díaz & PEREIRA, Adair Martins. *Estratégias de ensino-aprendizagem*. 7. ed. Petrópolis, Vozes, 1985.
- BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*, vol. 6. São Paulo, CAEM-USP, 1995.
- BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL, Luiz Alberto S. *Estudo dirigido de Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro, Fundo de Cultura, 1967.
- BRUNER, Jerome S. *O processo da educação*. Trad. Lobo L. de Oliveira. 4. ed. São Paulo, Nacional, 1974.
- CAGGIANO, Angela et alii. *Problema não é mais problema*, vol. 4. São Paulo, FTD, 1996.
- CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da matemática – Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.
- COXFORD, Arthur F. & SHULTE, Albert P. (organizadores). *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação – reflexões sobre Educação e Matemática*. São Paulo/Campinas, Summus/Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas*. São Paulo, Ática, 1989.
- DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira, & SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *O conceito do ângulo e o ensino de Geometria*, vol. 3. São Paulo, CAEM-USP, 1993.
- ESTEVES, O. P. *Testes, medidas e avaliação*. Rio de Janeiro, Arte & Indústria, 1972.
- HAYDT, Regina Cazaux. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo, Ática, 1988.
- HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. Porto Alegre, Educação & Realidade, 1993.
- IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande civilização*. Trad. Stella Ma. de Freitas Senra. 4. ed. São Paulo, Globo, 1992.
- LINDQUIST, Mary Montgomery & SHULTE, Albert P. (organizadores). *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.
- MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna*. São Paulo, Cortez, 1990.
- OCHI, Fusako Hori; PAULO, Rosa Monteiro; YOKOYA, Joana Hissae & IKEGAMI, João Kazuwo. *O uso de quadriculados no ensino de geometria*. vol. 1. São Paulo, CAEM-USP, 1992.
- PIAGET, Jean. *Fazer e compreender matemática*. São Paulo, Melhoramentos, 1978.
- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
- RATHS, Louis E. et alii. *Ensinar e pensar*. São Paulo, Herder/Edusp, 1972.
- ROCHA - FILHO, Romeu C. *Grandezas e unidades de medida – o sistema internacional de unidades*. São Paulo, Ática, 1988.
- SOUZA, Eliane Reame; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; PAULO, Rosa Monteiro & OCHI, Fusako Hori. *A matemática das sete peças do tangram*, vol. 7. São Paulo, CAEM-USP, 1995.
- VYGOTSKY, Lev S. *A formação social da mente*. Lisboa, Antídoto, 1979.
- ZARO, M. & HILLERBRAND, V. *Matemática instrumental e experimental*. Porto Alegre, Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos, 1984.
- SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, *Proposta curricular para o ensino de matemática – 1º grau*. 4ª ed. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 5ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 6ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 7ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 8ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.

Respostas dos exercícios

Unidade 1

Explorando

Página 12

- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

Página 14

- a) sim c) não
b) sim d) sim
- a) sim d) sim
b) sim e) não
c) não
- a) 22 e) 43
b) 25 f) 65
c) 27 g) 64
d) 36 h) 75
- a) 1,5 e) 3,3
b) 1,9 f) 5,2
c) 2,1 g) 6,1
d) 2,8 h) 7,2
- a) 3,1 m b) 8,5 m

Página 16

- a) ≈ 12 c) ≈ 18
b) ≈ 14 d) ≈ 22
- a) $\approx 1,4$ e) $\approx 4,4$
b) $\approx 3,1$ f) $\approx 6,3$
c) $\approx 9,4$ g) $\approx 17,8$
d) $\approx 11,4$ h) $\approx 21,2$
- a) $\approx 1,8$ d) $\approx 4,3$
b) $\approx 2,6$ e) $\approx 7,3$
c) $\approx 3,2$ f) $\approx 8,3$

Página 18

- a) 0,7 g) 0,029
b) 3,1 h) 0,385
c) 0,06 i) 8,2
d) 0,11 j) 16,3
e) 1,62 l) 4,27
f) 0,009 m) 1,104
- a) 0,5 g) 1,375
b) 2,333... h) 1,32
c) 1,8 i) 0,15
d) 1,85 j) 0,1444...
e) 3,1818... l) 8,25
f) 1,2222... m) 4,1666...

Página 20

- a) infinita e periódica
b) infinita e não-periódica
c) finita
d) finita
e) infinita e não-periódica
f) infinita e periódica
g) finita
h) infinita e não-periódica
- infinita e não-periódica
- a) racional f) racional
b) racional g) racional
c) irracional h) irracional
d) irracional i) racional
e) racional j) racional

4. 6,3; número racional

5. 2,23

- a) $-6; -1,5; -\frac{2}{3}; 0; \frac{21}{5}$
b) $-2,171171117; \sqrt{2}$

Página 22

- a) 56,52 cm
b) 9,42 cm
c) 1,57 cm
- 8 cm
- a) 1,884 m b) 9,420 m
- 31,4 cm
- 37,68 cm
- 30 cm

Página 24

- a) 0; 1
b) $-4; 0; 1$
c) -4
d) $-2,3; -\frac{1}{4}; 0,666...$
- a) 6 c) 6; -6 e 6,6
b) 6 e -6 d) $\sqrt{6}$
- $\frac{22}{9}$
- a) \in d) \in g) \in
b) \in e) \in h) \in
c) \notin f) \notin
- a) 4,8 d) 13,6 g) 1,6
b) 3,6 e) $-4,5$ h) 2,8
c) 3,9 f) 1,4
- $\frac{3}{4}$

Retomando o que aprendeu

Página 24

- 56
- $\sqrt{-1}$
- 122,46 cm
- 0,8
- 168 m
- 31,4 m
- 0,9

Unidade 2

Página 28

- a) x^2 e) $b + c$
b) y^3 f) ax
c) \sqrt{a} g) $2y$
d) b^5 h) $\frac{1}{6} m$
- a) $2x + 2y$
b) $(x + y)(x - y)$
c) $x^2 + y^2$
d) $x^2 + 3x$

Explorando

Página 31

- $16a^2; 17a^2; 12a^2$

Página 31

- a) $3x$ b) $x + 52$
- a) $3a + 2b + c$ b) $5x + 3y$

- a) $2x + 5y$ b) $x - 2y$
- $12xy$
- $x - 3y$
- $a^2 + bc$
- a) $2x + 10$ e) $2p + m^2$
b) $\frac{x}{3y}$ f) $a^3 - b^3$
c) $a^2 - b^3$ g) $3b - ac$
d) $x \cdot (a - b)$
- a) $7x + 2$ b) $12y + 5$
- $\frac{a^3}{1+2b}$; fracionária

Página 34

- a) $+4$ b) 0,16
- a) 0 b) $+\frac{23}{5}$
- $-\frac{7}{4}$
- $p = 14$; valor numérico: 504
- Não, pois $\sqrt{-4}$ não representa número real.
- 2
- sim
- $+8$
- 2
- 5
- a) 85 unidades
b) 115 unidades
- a) 4 e) $-\frac{8}{9}$
b) $\frac{25}{16}$ f) $-0,25$
c) 4 g) $-\frac{65}{63}$
d) 0 h) $\frac{1}{2}$

Página 36

- a) $x = 4$ c) $x = -\frac{2}{5}$
b) $a = \frac{1}{3}$ d) $b = 1$
- a) $x = -y$ c) $2x = -y$
b) $x = 2y$

Retomando o que aprendeu

Página 36

- 2
- $-\frac{3}{4}$
- 240
- $\frac{7}{12}$
- a) 34°C
b) 28°C
c) Diminuiu de 6°C .
- 100

Unidade 3

Página 41

- $5x$
- ab
- $0,844n$
- ny
- $8a^2$
- a) sim d) sim g) não
b) sim e) não h) sim
c) não f) sim i) não
- $15x^2$
- a) coeficiente = 7;
p. literal = a^3
b) coeficiente = -1 ;
p. literal = xy^5
c) coeficiente = $-\frac{2}{3}$;
p. literal = m^2n^4

- coeficiente = $-0,06$;
p. literal = bc^3
- coeficiente = $\frac{1}{5}$;
p. literal = m^4
- coeficiente = 1;
p. literal = $a^3x^4y^2$
- coeficiente = 6,2;
p. literal = x^3y^3
- coeficiente = -20 ;
p. literal = a^4bc^3

Página 42

- $5a^2b - 6m^2n^2$
- 7° grau
- 3° grau
- $n = 9$
- x^5
- $-8a^4, -6a^3, 7a^2, 10a, 5$

Página 45

- a) $3x^2y, -\frac{1}{5}x^2y$
b) $4xy, -xy$
c) $-\frac{1}{2}x^3, 10x^2$
- a) $5a^2$ f) $-\frac{1}{18}x^2y^2$
b) $-ax$ g) $-\frac{9}{4}ay$
c) $\frac{8}{5}xy$ h) $-1,8ab^3$
d) $3,8x^2y$ i) $\frac{1}{8}y^2$
e) $2bc$ j) $0,6ab$
- a) $-2x^3y^2$ b) -2250
- a) $\frac{1}{2}ab^2$
b) -18
c) $0,008$
- $4x^2y^2$ c) $3ax$
- a) $2ax$ c) $7ax$
b) $-2ax$ d) $7ax$
- a) $10x$ c) $13ab$
b) $-y^2$ d) $-12xy$
- a) $-\frac{11}{20}x^2y$ b) $\frac{22}{5}$
- a) $-13bc$ b) $15bc$
- $10y$
- $24x$

Página 47

- a) b^8 f) $-5,2a^4y^2$
b) $5x^2$ g) $27a^3m^3$
c) $14y^2$ h) $-0,75x^2y^3$
d) $-\frac{2}{3}a^2$ i) $-\frac{m^2n}{14}$
e) $6x^2y^2$ j) $-a^4m^2$
- a) $20a^2b^3c^5$ f) $-2e^4$
b) $-3ax^2y^2$ g) $-42x^2$
c) $1,35y^2$ h) $40m^2n^3p^2$
d) $0,1x^2y^3$ i) $x^4y^2z^2$
e) $15x^3y^2$ j) $-2a^2m^2n^2$
- $16e^2$
- $\frac{1}{4}x^2$
- a) $32a^3x^2$ b) -1
- $-\frac{5}{2}a^4x^2, -40$
- $4a$
- $a^2m^3, 1$
- $-\frac{3}{4}ab^2$
- $160a^{11}b^8$
- $6x^2y^2$

12. a) $\frac{1}{2}x^2$ c) $6x^2$
 b) $6x^2$ d) $12x^2$
13. $\frac{9}{2}xy^2$

Explorando

Página 49

1. $3a^2, 7a^2, 13a^2, 13a^2$

Página 51

1. a) a^5 i) $-\frac{5}{18}xy^4$
 b) x j) $4n$
 c) 1 l) $-1,6b$
 d) $4x^2$ m) $-\frac{1}{4}a^2b^2$
 e) $-3y^3$ n) $+\frac{3}{2}y$
 f) $\frac{1}{2}a^2x$ o) $10ax^2$
 g) $-4xy^2$ p) $+x^2$
 h) $\frac{1}{3}$ q) $\frac{1}{8}mx$
2. $4xy$
 3. $-a^2x$
 4. $10x^2y^2$
 5. $-5a^2m$
 6. Errada, a resposta certa é $5x^2$.
 7. certa
 8. $-3a^2b^3$

Página 52

1. a) a^{10} g) $0,25a^2b^4$
 b) $4x^4$ h) $a^2m^2x^{12}$
 c) $-125y^3$ i) $\frac{8}{27}x^3y^6$
 d) $100a^4b^2$ j) $a^{14}c^{21}$
 e) $81x^4y^4$ l) $\frac{x^4y^4}{25}$
 f) $\frac{1}{25}m^4n^2$ m) $0,01p^{10}$
2. a) $2,25b^4c^8$ b) $0,064a^{15}b^9$
3. $\frac{1}{2}x$
4. $-5y$
5. a) $100x^5$ b) $20x^2$
6. a) $16x^4y^8$ b) $8x^2y^2$
7. $2c^2$

Página 54

1. $2x + 3y$
 2. $4x + 2y$
 3. $x - 2y$
 4. a) $10x + y$ b) $10y + x$
 5. a) $2a + b$ b) $2a - b$
 6. $a^2 + 2ab + b^2$

Página 56

1. a) $3y^3 + 9y^2 + 4y - 2$
 b) $2a^2x - 4a^2x^2 - 2ax^2$
 c) $2a + 10b + 2c$
 d) $5x + 3y + 4xy$
 e) $x^2 - 2x - 7$
2. a) $2x^3 + 3ax - 2a^2$
 b) trinômio
 c) -27
3. a) $x^2 + ax + ax + ax + x^2$
 b) $2x^2 + 3ax$
4. $\frac{3}{2}a + \frac{7}{4}b + \frac{1}{6}ab$
5. a) $3a^2 + 7a - 3$
 b) $5ab + 3a - 14b + 7$
 c) a
 d) $x^2 + y^2$
 e) $4m - 2n$
 f) $x^2 - 11xy + 5y^2$

6. a) $a^2 - b^2, x + 2a$
 b) $y^2 - 2y + 1, x^2y^2 + 4xy + 4$
7. a) $12r^2 + 11rs - 28s^2$
 b) 2,98

Página 57

1. 6º grau
 2. 3º grau
 3. $x^3 - 9x^2 + 2x - 2$
 4. incompleto;
 $x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
 5. a) $5x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 3$
 b) 5º grau
 6. $x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$
 7. a) 4º grau
 b) incompleto
 c) $x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x + 9$

Página 59

1. a) $2x + 5y$ c) $5x + 7y$
 b) $3x + 2y$ d) 55
2. a) $8a - x$ b) -77
3. a) $0,6x - 1$ c) $x + 1$
 b) $0,4x + 2$ d) $0,2x - 3$
4. a) $13x + \frac{19}{6}a$ b) 32
5. a) $0,6x + 2y$
 b) $0,4x + 3y$
 c) $0,2x - y$
6. a) $7x^2 + ax + a^2$
 b) $-x^2 - 3ax + 3a^2$
7. a) $6a - 15b + 7c$
 b) $7y^2 - 4ay + 5a^2$
 c) $-2a^3 + 5a^2b - ab^2 - 5b^3$
 d) $2x^2 + 2y^2 + 4x^2y^2$
 e) $\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$
 f) $\frac{13}{6}ax + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{4}ay$
8. a) $4a^2 - 4ab + 5b^2 + 2c^2$
 b) $2x^3 + 2x^2 - 6x + 3$
 c) $2a^2b^2 + 2ab$
 d) $3y^3 - 6y^2 + 3$
 e) $3ax - 4ay + 2 - 4xy$
 f) $5x^2 + y^2$
 g) $0,8a + 0,5x - 1,1y$
9. a) $3x^2 + 3ax + 4a^2, 328$
 b) $-x^2 - 7ax - 2a^2, \frac{5}{16}$
10. $x + 15xy + y - x^2y^2$
11. a) $-8x^3 + 5x^2 + 9x - 4$
 b) 0
 c) $16x^3 - 10x^2 - 18x + 8$
12. $6am - 6an - mp$
13. a) $3a + b + c$
 b) $a - b + 3c$
 c) $a + 3b - c$
 d) $-a + b + c$

Página 65

1. $2ab + b^2$
2. $\frac{4}{3}xy - \frac{2}{3}y^2$
3. $10x + 40y$
4. a) $10x^3 - 5x$
 b) $-4a^2b + 8a^2b^2 + 4ab^3$
 c) $7a^2bx^2 - 14abx^2$
 d) $\frac{1}{4}a^2m + \frac{1}{6}am^2 - 2a^2m^2$
 e) $2y^4 + 5y^3 - 8y^2$
 f) $x^2y^3 - x^4y^2 - x^2y^4$
 g) $b^3c^2 - \frac{8}{5}b^2c^2$
 h) $6x^2 - 6xy + 3x^2y - 30x$
5. $a^2 + b^3$
6. a) $-2abx$ b) $3ab - 5b^2$
7. $3x^2y + 3xy^2$
8. $9x^2 + 3xy - 2y^2$

9. 1 000
10. $a^2 + 2ab + b^2, 36$
11. $6x^2 - xy - y^2, 21$
12. a) $x^2 + 12x + 35$
 b) $y^2 - y - 30$
 c) $2a^2 - 3ab - 2b^2$
 d) $3ax - a^2 - 2x^2$
 e) $a^2b^2 + abx - 2x^2$
 f) $10 + 48xy - 10x^2y^2$
 g) $-3m^2x^2 + 7mxy - 2y^2$
 h) $a^2 + 20,3ax + 6x^2$

13. $4a^2 - \frac{1}{4}b^2$
14. a) $-12x^2 - 16x^2 + x + 3$
 b) $2a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a - 1$
 c) $a^3 + x^3$
 d) $27a^2 - 8b^3$
 e) $m^2 - 2mn - m^2n + n^2 + mn^2$
 f) $a^5 + 2a^4 - 2a^2 - a$
 g) $2x^3 - 9x^2 + 11x - 6$
 h) $8a^3 - 10a^2y + 7ay^2 - 2y^3$
15. $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x - 3$
16. 7
17. a) $x^2 + 12x + 36$
 b) $a^2 - 4ab + 4b^2$
 c) $1 + 6xy + 9x^2y^2$
 d) $x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^2$
18. a) $6a^3 + 2a^2$
 b) $x^2 + 4x^2 + 3x$
19. $2x^2$
20. a) $4x - 14$
 b) $a^2b - ab^3$
 c) $-3a^2 + 7ab - 2b^2$
 d) $4x^2 - 3x$
21. $x^6 - y^6, 63$
22. $-x + y, 3$

Página 71

1. a) $-7x^2 + 2$
 b) $a - b^2$
 c) $7x^2 - 4ax$
 d) $5y^4 - 8y^3 - 3$
 e) $1 + y^2 - xy$
 f) $a^2b - \frac{3}{2}a$
 g) $3x^4 - \frac{5}{3}x^2 + x - 3$
 h) $-\frac{1}{3}a^2b^2 + \frac{5}{4}ab$
2. a) $6a^2x - 4ax^2 + 90a^2x^3$
 b) $6a^2 - 4x^2 + 9a^2x^2$
 c) $-6a^2x + 4x^3 - 9a^2x^3$
3. $4ax^2 + 5a^2x$
4. $4x + 7$
5. $x^2y^2 + xy + x - y - 1$
6. $-8a^2$
7. $2x + 5, 4$
8. $4x - 1$
9. $3x - 1$
10. $x^2 - 5x + 1, 1$
11. a) $x^2 - x - 3, \text{resto } 0$
 b) $2x - 3, \text{resto } 0$
 c) $x + 1, \text{resto } -2x - 3$
 d) $x^2 + x + 1$
 e) $2x^2 + x - 3, \text{resto } 0$
12. $x^2 - x + 5, -1$
13. $9x^2 - 9x + 2, 6$
14. $2x^2 + x + 3$
15. a) $3x - 5$ b) 25
16. $x^2 + 4x + 8, \text{resto } 11$

Página 79

1. a) 225 c) 75
 b) 25 d) 3 375
2. a) $49a^2 - 1$
 b) $4 + 36x + 81x^2$
 c) $36x^2 - 12xy + y^2$

- d) $9x^2 + 4ax + \frac{4}{9}a^2$
 e) $a^3 - m^8$
 f) $a^6 + 12a^3y^2 + 36y^4$
 g) $m^4 + 4m^2n^2 + 4n^4$
 h) $b^2c^2 - \frac{1}{9}a^2$
 i) $9a^2b^2 + 6ab + 1$
 j) $25 - 10b^3c^3 + b^6c^6$
 l) $m^2n^2 - p^8$
 m) $16x^2y^2 + 2xy + \frac{1}{16}$
 n) $a^6 - 4a^4 + 4a^2$
 o) $100a^2 - b^2c^2$

3. $\text{sim}, x - y$
4. a) $(a + 3)$ b) $(y - \frac{1}{2})$
5. $4a^4 - \frac{1}{9}b^2, 55$
6. 0
7. $5a^2 + 2a + 34$
8. Não, a resposta correta é $4x^2 - 4xy^2 + y^4$.
9. $a^2 - 4ab - b^2$
10. 4
11. a) V
 b) $F \rightarrow 9y^2 - a^2$
 c) $F \rightarrow 4c^2 + 4ac + a^2$
 d) V
12. 1
13. $3a^2$
14. $4a^2 + 1$
15. $10a + 2$
16. $9x^2y^2 + 42xy + 49$
17. $2x^4 + ax^2 + 3a^2$
18. 16
19. $-2ab$
20. 225
21. 10
22. a) $6x$
 b) $6x$
 c) $x^2 + 12x + 36$
23. $b + c$
24. $b^5 + b^4 + b^3 - 3a^2, 0$
25. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 b) $1 - 6a + 12a^2 - 8a^3$
 c) $8x^2 + 12x^2y + 6xy^2 + y^2$
 d) $64y^2 - 48y^2 + 12y - 1$
26. $x^2 + x^2y + 5xy^2 + 8y^3, -15$
27. $a^2b - ab^2$
28. $15a^2 + 15a + 35$

Página 82

1. a) 2 · 15; 5 · 6; 3 · 10
 b) 2 · 30; 3 · 20; 6 · 10
 c) 2 · 24; 3 · 16; 4 · 12
 d) 2 · 60; 3 · 40; 4 · 30
2. a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ c) $2^2 \cdot 5^2$
 b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ d) $2^2 \cdot 3^4$
3. a · (x + y)
4. a) (x + y)(x - y)
 b) (b + c)(b - c)

Página 84

1. a) $10(a + b)$
 b) $a \cdot (4 - 3x)$
 c) $a \cdot (a + 5b)$
 d) $y \cdot (x + y - 1)$
 e) $\frac{1}{3}(a + \frac{1}{2}b)$
 f) $7c(5 + c)$
 g) $8x^2(3x^2 - x - 7)$
 h) $p(a^2 + ab + b^2)$
 i) $7x^2y^2(5x - 2y)$
 j) $y(1 + y^2 + y^4 + y^8)$
 l) $xy(1 - x^2y^2)$
 m) $20ax(6x^2 - 5x + 3)$
 n) $(m + 1)(a - b)$

- o) $(n + h)(x + y)$
 p) $b^2m(m + 4n)$
 q) $\frac{2}{3}a^3(a^2 + 4)$
 r) $\frac{a}{2}(1 + a^2 + a^4)$
 s) $(a + b)(x + y - z)$
 t) $\frac{1}{4}x^2(5x - 3)$
 u) $\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} - b\right)$
2. a) $2m(x^2 - y^2)$
 b) 320
3. $(2x - y)(a + b + c)$; 240
4. $xy(y^2 + 7y - 3)$; 102
5. $3xy(x + y)$; 1 152

Página 86

1. a) $(a + b) \cdot (a + x)$
 b) $(a - 1) \cdot (x + b)$
 c) $(a^2 + 1) \cdot (a^2 + 2)$
 d) $(x^2 - 2y) \cdot (b + 5)$
 e) $(c + 1) \cdot (x + 1)$
 f) $(b^2 + 1) \cdot (2 - k)$
 g) $(5y - 4) \cdot (y^2 + 2)$
 h) $(x - 1) \cdot \left(1 + \frac{a}{2}\right)$
 i) $(3 + y) \cdot (5 + 2a)$
 j) $(a^4 + 1) \cdot (a^8 - 1)$
 l) $(2a + 1) \cdot (n - m)$
 m) $(x + 1) \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right)$

2. a) $(a - b + c)(x + y)$
 b) $(a + b + 1)(m - n)$
 c) $2(a + b)(x + y)$
3. a) $(x - z)(x + 2y)$
 b) 135
4. $(a - b)(c + d)$; -2,75
5. 117

Página 88

1. a) $(x + 9)(x - 9)$
 b) $(10 + a)(10 - a)$
 c) $\left(\frac{b+2}{5}\right)\left(\frac{b-2}{5}\right)$
 d) $(1 + mn)(1 - mn)$
 e) $(4x + 3y)(4x - 3y)$
 f) $\left(\frac{1}{3} + 2y\right)\left(\frac{1}{3} - 2y\right)$
 g) $(7h + 9p)(7h - 9p)$
 h) $\left(\frac{1}{10} + xy\right)\left(\frac{1}{10} - xy\right)$
 i) $\left(b + \frac{c}{4}\right)\left(b - \frac{c}{4}\right)$
 j) $\left(\frac{1}{5} + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{a}{2}\right)$
 l) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
 m) $(ab^2 + x)(ab^2 - x)$
 n) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
 o) $(x^2 + 10)(x^2 - 10)$
 p) $(y^4 + 3)(y^4 - 3)$
 q) $(r + 9s^2)(r - 9s^2)$
2. a) $(x - 1)(x - 9)$
 b) $(y + 4)(y - 2)$
 c) $(a + b + c)(a + b - c)$
 d) $m(m + 10)$
 e) $(2x - 1)(4x - 1)$
 f) $2 \cdot (2x^2 + 2)$
3. a) $-5e5$ c) $-\frac{1}{3}e\frac{1}{3}$
 b) $-1e1$ d) $-9e9$
4. $(ab + x)(ab - x)$; 21
5. 72

Página 90

1. a) sim c) não
 b) sim d) sim
2. a) $(2x - 3y)^2$
 b) $(y + 5)^2$
 c) $(9n - 1)^2$
 d) $(2a + 4x)^2$
 e) $(11xy + 2)^2$
 f) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2$
 g) $(10p - n)^2$
 h) $(y + 7)^2$
 i) $(a^3 + 6)^2$
 j) $\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}\right)^2$
 l) $(2p - 7)^2$
 m) $(4x^2 + y)^2$
 n) $(x - bc)^2$
 o) $(m^2 + 2n)^2$
3. $(3x - ab)^2$
4. a) $(x + 8y)^2$ b) 100
5. $(x + 5)^2$
6. a) 1 c) 2a e) 9
 b) 12x d) $-abx$ f) x
7. 49
8. 250

Página 91

- a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 b) $(m - n)(m^2 + mn + n^2)$
 c) $(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$
 d) $(a + 1) \cdot (a^2 - a + 1)$

Página 92

1. a) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
 b) $3(x - 1)^2$
 c) $x \cdot (m + 1)(m - 1)$
 d) $5 \cdot (a + 3b)^2$
 e) $xy(x + y)(x - y)$
 f) $(m^2 + n^2)(m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$
 g) $(x + y)^2 \cdot (x - y)$
 h) $a \cdot (a - x)(a^2 + ax + x^2)$
 i) $\left(1 + \frac{1}{4}p^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}p\right)\left(1 - \frac{1}{2}p\right)$
 j) $y\left(y + \frac{2}{3}\right)^2$
 l) $y \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
 m) $(a + b)(x + 1)(x - 1)$
2. 180
3. $(a + b)(b + c)(b - c)$
4. $xy(x + y)^2$; 250
5. $x \cdot (a + b)(x + 1)(x - 1)$

Página 94

1. a) 216 c) 630
 b) 400 d) 72
2. 2 450
3. 3 960
4. 16 000
5. a) x^2y^3 g) $18ax^2$
 b) a^2x^2y h) $36a^2b^2$
 c) x^2y^3 i) $72a^2b^4$
 d) $15x^4$ j) $240b^3c^5$
 e) $a^2b^3c^2$ l) $60m^3x^3$
 f) x^4y^3 m) $42a^2p^4$
6. a) $8x^2(x - 5)$
 b) $x^2y^3(x + y)$
 c) $a(x - a)(x + a)$
 d) $x \cdot (y + 5)^2$
 e) $5ax(x - 1)$
 f) $6(a + b)(a - b)$
 g) $2x(x + 7)(x - 7)$
 h) $6x^2(1 + y)$
 i) $x^2(x - 3)^2$
 j) $30(a + 2)$

- l) $(a + 5)^2 \cdot (a - 5)^2$
 m) $2 \cdot (x - 1)^2$
7. $(a^3 + 1)^2 \cdot (a - 1)$
8. $(2x - 3p)^2(3x - 2y)$

Retomando o que aprendeu

Página 95

1. 15x
 2. $2x^2y, 4x^2y, 8x^2y$
 3. ac
 4. 2
 5. 2 006
 6. 20
 7. $x(3x + y)$
 8. 55 cm^2
 9. $a^2 + a + 4$, com resto $15a + 3$
 10. $-2x^3 + 8x^2 - 4x + 15$

Unidade 4

Página 101

1. $\frac{50}{x}$
 2. $\frac{x - y}{n}$
 3. $\frac{c}{2x + y}$
 4. a) $\frac{400}{x}$ b) $\frac{400}{x + 1}$
 5. a) $x \neq 0$ d) $a \neq -4$
 b) $x \neq 0$ e) $x \neq \frac{1}{2}$
 c) $x \neq 7$ f) $y \neq 5$
 6. a) $5x^2$ c) $x - 3$
 b) $x^2 - 3x$ d) $a - 5$
 7. $\frac{x - a}{x}$

Página 103

1. a) $\frac{5}{17}$ c) $\frac{2^2}{3}$
 b) $\frac{2}{55}$ d) $\frac{2}{5^2}$
 2. a) $\frac{7}{22}$ c) $\frac{3}{4}$
 b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{10}$
 3. a) $\frac{a}{4c}$ e) $\frac{2m^5}{5}$
 b) $\frac{y}{x^2}$ f) $\frac{y}{6x}$
 c) $\frac{6m}{5x}$ g) $\frac{2}{a - x}$
 d) $\frac{2c}{ab^2}$ h) $\frac{2h}{h - 1}$
 4. a) $\frac{a - 1}{c - 1}$ e) $\frac{x - 4}{x + 4}$
 b) $\frac{x + y}{1 - a}$ f) $\frac{a^2}{a + 2}$
 c) $\frac{a + b}{a^2}$ g) $\frac{x}{3}$
 d) $\frac{m + 5}{7}$ h) $\frac{xy - 1}{2}$
 5. a) $\frac{y}{2}$ c) $\frac{a}{x - y}$
 b) $\frac{a + 1}{a - 1}$ d) $\frac{x}{x + 2y}$
 6. $\frac{a + b - c}{b + c - a}$

Página 107

1. a) $\frac{19a}{6b}$
 b) $\frac{28bx + 6a}{12x^2}$

- c) $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$
 d) $\frac{m + 1 - m^2}{2m^2}$
 e) $\frac{3y - 2x^2y + x}{xy}$
 f) $\frac{a^2 + x^2}{ax}$
 g) $\frac{x^2 + 5x - 3}{3x^2}$
 h) $\frac{b^2 + a^2}{2ab}$
2. a) $\frac{3cx - c}{(x + 1)(x - 1)}$
 b) $\frac{-5x + 21}{(x + 3)(x - 3)}$
 c) $\frac{5x^2 - x + 9}{x^2 + 1}$
 d) $\frac{y^2 - 6}{y - 2}$
 e) $\frac{3x^2 + y^2}{(x + y)(x - y)}$
 f) $\frac{2}{a + 4}$
 g) $\frac{4x}{1 - x}$
 h) $\frac{ab}{(a + b)(a - b)}$

3. $\frac{4x^2 - 16}{x^2 - a^2} \cdot \frac{16}{3}$
 4. $\frac{b + 2a}{a^2b} \cdot \frac{1}{2}$
 5. a) $\frac{x^2}{y(x + y)}$ b) $\frac{2}{x + 1}$
 6. $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$
 7. $\frac{m^2}{n} \cdot \frac{1}{4}$
 8. y
 9. $\frac{2a^2 + b^2}{ab}$
 10. $\frac{2b}{(a - b)(b - c)}$
 11. $\frac{a + x}{a - 1}$
 12. $\frac{8a}{(2 - a)(2 + a)} - \frac{3}{2}$

Página 110

1. a) $\frac{6ab}{7x^2y}$ d) $\frac{9m^2}{10x^2}$
 b) $\frac{2x^7}{15y^3}$ e) $\frac{ax}{y^2}$
 c) $\frac{ax^3y^2}{b^2c^2}$ f) $\frac{c^4}{b^2}$
 2. a) $\frac{6x^2}{7ab}$ d) $\frac{3bx}{4y^2}$
 b) $\frac{a}{2b^2}$ e) $2b^2x$
 c) $\frac{3}{2a^4}$ f) $\frac{3a^3}{5}$
 3. $\frac{my}{a}$
 4. $\frac{2m}{ab}$
 5. $\frac{1}{8ac}$
 6. a) $\frac{x^2 - 4}{2x^2}$ f) $\frac{7x^2}{y}$
 b) $\frac{5a^2b}{a^2 - 4b^2}$ g) $\frac{2}{x^2 + 1}$
 c) $\frac{a + 4}{x}$ h) $\frac{3x}{m - n}$
 d) $\frac{a + 1}{x - y}$ i) $\frac{x + 3}{10ab}$
 e) $\frac{3y}{x - 2}$ j) $\frac{a}{3}$

7. $\frac{2(x+y)}{b(a-x)} \cdot \frac{1}{2}$
8. $\frac{5x}{2}$
9. a) $\frac{a-1}{x^2}$
 b) $\frac{1}{x-y}$
 c) $\frac{3(a+1)}{(x-y)(a-1)}$
 d) $\frac{m-6}{2x}$
 e) $\frac{2a^2}{3x^6}$
 f) $\frac{x^2-1}{x}$
 g) $\frac{2x^2}{a-b}$
 h) $\frac{a-b}{b-c}$
10. $\frac{x}{(x+1)^2}$
11. a) $\frac{a^6}{b^3}$
 b) $\frac{4a^2}{x^4y^2}$
 c) $\frac{x^2-2xy+y^2}{16x^2}$
 d) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3}$
12. a) $\frac{ay^2}{x}$ b) $\frac{x^2}{y^2}$ c) $\frac{a-b}{x}$
13. $2a^3; -250$
14. $\frac{a^2}{x^2}$
15. a) $\frac{y}{y+1}$
 b) $\frac{-y}{x}$
 c) $\frac{2a-2b}{b}$

Retomando o que aprendeu

Página 112

1. $\frac{500}{x+2}$
2. 5
3. $\frac{b}{b+a}$
4. $2x+y$
5. $\frac{1}{a}$
6. a) x^2 b) $\frac{x^2}{y}$ c) $\frac{3x^2}{y}$
7. 1
8. $\frac{1}{y}$
9. -10
10. -1

Unidade 5

Página 118

1. a) $S = \{3\}$ g) $S = \{-5\}$
 b) $S = \{-5\}$ h) $S = \{3\}$
 c) $S = \{7\}$ i) $S = \{-6\}$
 d) $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ j) $S = \{-29\}$
 e) $S = \{-1\}$ l) $S = \left\{\frac{41}{9}\right\}$
 f) $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

2. 15 unidades
3. 1ª prova: 8 e 2ª prova: 9
4. 5 000 aparelhos
5. $a = 6$
6. 6 arremessos
7. Venceu 5 partidas e perdeu 2 partidas.
8. Rafael recebeu 50 reais e Pedro, 40 reais.
9. a) 11 reais b) 15 reais
10. $x = 400$ km
11. a) 30 recenseadores
 b) 3 060 residências

Explorando

Página 119

1. 100 g
 2. 80

Página 123

1. a) $\{6\}$ d) $\{12\}$
 b) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$ e) $\left\{\frac{7}{8}\right\}$
 c) $\left\{-\frac{3}{17}\right\}$ f) $\{18\}$
2. 3
3. a) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ f) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
 b) $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ g) $\{0\}$
 c) \emptyset h) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
 d) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ i) \emptyset
- e) $\{-4\}$
4. $-\frac{4}{5}$
5. $\{-1\}$
6. $-\frac{2}{5}$
7. $\{4\}$
8. -1
9. a) $\frac{320}{x}$
 b) $\frac{300}{x-2}$
 c) 32 alunos na 7ª série A; 30 alunos na 7ª B
10. 3 horas

Página 125

1. a) $\{3a\}$
 b) $\left\{\frac{p}{2}\right\}$
 c) $\left\{-\frac{a}{5}\right\}$
 d) $\{16b\}$
 e) $\left\{\frac{a}{4b}\right\}$, com $b \neq 0$
 f) $\left\{-\frac{5b}{a}\right\}$, com $a \neq 0$
 g) $\left\{\frac{1}{b}\right\}$, com $b \neq 0$
 h) $\{1\}$
 i) $\{2ac\}$
 j) $\{bm\}$
2. $\left\{\frac{1}{h}\right\}$, com $h \neq 0$
3. 16b
4. $S = \{a+b\}$
5. 5a

6. 5
7. $\{4a\}$
8. $+2b$
9. $S = \{2b\}$
10. $S = \{a+2\}$

Retomando o que aprendeu

Página 126

1. $-\frac{11}{3}$
2. $-\frac{3}{5}$
3. 15 anos
4. 5a
5. $\frac{17}{4}$
6. 60 km
7. 18 jovens
8. 8 meses

Unidade 6

Página 131

1. $2x + 10 = 4y$
2. sim
3. a) sim b) sim c) não
4. $(7, 1)$
5. a) $x = 2$ b) $x = 3$
6. a) $(8, 3)$ b) $(5, -2)$
7. a) $(8, 6)$ b) $(7, 0)$
8. sim
9. $(4, 1)$

Página 134

1. a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 30 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 13 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x + y = 150 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$
 d) $\begin{cases} x + y = 50 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$
 e) $\begin{cases} x + y = 1300 \\ x = \frac{5}{4}y \end{cases}$
 f) $\begin{cases} x + y = 50 \\ x = 0,70y \end{cases}$
 g) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 5x + 10y = 55 \end{cases}$
 h) $\begin{cases} x + y = 23 \\ 4x + 2y = 82 \end{cases}$

2. sim

3. sim

4. $(2, 1)$

5. $(3, 2)$

6. não

Página 140

1. a) $(14, 6)$ f) $(1, 0)$
 b) $(7, 3)$ g) $(8, 2)$
 c) $(-5, 7)$ h) $(-4, -4)$
 d) $(-4, -4)$ i) $\left(\frac{22}{9}, \frac{10}{9}\right)$
 e) $(15, -14)$
2. a) $(25, 7)$ f) $(9, 6)$
 b) $\left(6, \frac{16}{3}\right)$ g) $(2, 3)$
 c) $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ h) $(-4, -4)$
 d) $(2, -1)$ i) $(-38, -14)$
 e) $(4, -1)$

3. a) $\left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 b) $(2, 3)$
 c) $(20, 20)$
4. a) 200 b) 500 c) 2

Explorando

Página 141

Carlos tem 72 kg, Andréa tem 51 kg e Bahu tem 15 kg.

Página 144

1. a) $(2, 2)$ c) $(4, 2)$
 b) $(6, 3)$ d) $(1, -4)$
2. a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 5

Página 146

1. 100 e 69
 2. 135 e 150
 3. 87 e 23
 4. 54 e 36

5. $\frac{21}{12}$

6. $\frac{3}{4}$

7. 42 m, 22 m, 924 m²
8. 25 votos
9. 45 anos e 25 anos
10. 6 jogos
11. 100 cm e 50 cm
12. 17 galinhas e 4 carneiros
13. 400 m²
14. 90 pontos; 83 pontos
15. 6 460 para o vencedor e 5 010 para o perdedor
16. 12 caixas de 50 livros e 15 caixas de 70 livros
17. 6 professores
18. 12 vãos de 20 cm e 12 vãos de 30 cm
19. Na loja A: 90 reais; na loja B: 72 reais
20. 135 alunos; 395 ingressos

Retomando o que aprendeu

1. $(2, 1)$
2. c
3. 36 vermelhas e 12 pretas
4. $\frac{3}{2}$
5. 50 g
6. (5)
7. 1
8. 12 reais
9. 1 900
10. 45 estudantes

Unidade 7

Página 153

1. a) ponto e) ponto i) plano
 b) reta f) reta j) reta
 c) plano g) plano l) ponto
 d) plano h) ponto m) plano
2. a) \in d) \in g) \subset j) \in
 b) \in e) $\not\subset$ h) $\not\subset$ l) \notin
 c) \notin f) \notin i) \in m) \notin

Página 158

1. infinitas
2. uma única reta
3. concorrentes ou coincidentes
4. 6 semi-retas
5. a) 5 b) 6 c) 4
 6. a) 12 b) 9

7. 6 segmentos
 8. a) 4 cm b) 18 cm
 9. $\frac{x+y}{2}$
 10. a) \overline{CD} b) \overline{DF} c) \overline{BD}
 Existem outras possibilidades.

Página 163

1. um reto e dois agudos
 2. a) 4 retos
 b) 2 agudos e 2 obtusos
 c) 2 retos, 1 agudo, 1 obtuso
 d) 2 agudos e 2 obtusos
 3. a) $x = 30^\circ$ e) $x = 10^\circ$
 b) $x = 42^\circ$ f) $x = 20^\circ$
 c) $x = 30^\circ$ g) $x = 30^\circ$
 d) $x = 40^\circ$ h) $x = 18^\circ$
 4. $a = 120^\circ$ e $b = 60^\circ$
 5. $130^\circ, 95^\circ, 60^\circ$ e 75°
 6. $x = 50^\circ$ e $y = 25^\circ$

Página 164

2. $x = 60^\circ$
 3. $x = 114^\circ; y = 23^\circ$
 4. $x = 38^\circ; y = 67^\circ$
 5. $x = 80^\circ$
 6. $130^\circ - 2a$ ou $130^\circ - 2b$

Página 167

1. a) 55° c) $67^\circ 30'$
 b) 48° d) $20^\circ 20'$
 2. a) 105° c) 45°
 b) $97^\circ 30'$ d) $50^\circ 10'$
 3. 80°
 4. 45°
 5. 72°
 6. 72°
 7. 60°
 8. 40° e 50°
 9. 105° e 75°

Página 168

1. a) $x = 60^\circ$ b) $x = 15^\circ$
 2. $x = 140^\circ; y = 40^\circ; z = 140^\circ$
 3. a) $x = 130^\circ; y = 20^\circ$
 b) $x = 90^\circ; y = 10^\circ$
 4. $x = 24^\circ$
 5. $45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 135^\circ$

Unidade 8

Página 180

1. a) $\hat{m} \hat{e} \hat{n}$ ou $\hat{p} \hat{e} \hat{q}$
 b) $\hat{p} \hat{e} \hat{o}$ ou $\hat{q} \hat{e} \hat{o}$
 c) $\hat{p} \hat{e} \hat{m}$ ou $\hat{n} \hat{e} \hat{q}$
 d) $\hat{p} \hat{e} \hat{n}$
 e) $\hat{m} \hat{e} \hat{q}$
 f) $\hat{n} \hat{e} \hat{o}$
 2. a) correspondentes
 b) colaterais internos
 c) colaterais externos
 d) alternos externos
 e) adjacentes suplementares
 f) opostos pelo vértice
 3. a) $\hat{1} \hat{e} \hat{6}, \hat{2} \hat{e} \hat{3}, \hat{4} \hat{e} \hat{5}$
 b) $\hat{3} \hat{e} \hat{4}, \hat{2} \hat{e} \hat{5}$
 c) $\hat{1} \hat{e} \hat{4}, \hat{1} \hat{e} \hat{2}, \hat{3} \hat{e} \hat{6}$
 d) $\hat{3} \hat{e} \hat{5}$
 e) $\hat{4} \hat{e} \hat{6}$
 4. a) o.p.v.
 b) adjacentes suplementares
 c) correspondentes
 d) correspondentes
 e) alternos internos
 f) colaterais internos

5. a) $a + b = 180^\circ$
 b) $b = 65^\circ$
 c) r perpendicular a r
 6. a) $x = 45^\circ$ c) $x = 45^\circ$
 b) $x = 50^\circ$ d) $x = 120^\circ$
 7. a) $a = 110^\circ$ b) $a = 28^\circ$
 8. $x = 10^\circ$
 9. $a = 150^\circ; b = 30^\circ$
 10. a) $a = 55^\circ; b = 55^\circ; c = 125^\circ$
 b) $a = 40^\circ; b = 140^\circ; c = 40^\circ$
 c) $a = 50^\circ; b = 60^\circ; c = 70^\circ$
 d) $a = 75^\circ; b = 40^\circ; c = 40^\circ$
 11. a) $a = 120^\circ; b = 60^\circ; c = 70^\circ; d = 50^\circ;$
 e) 50°
 b) $a = 45^\circ; b = 60^\circ; c = 135^\circ; d = 75^\circ;$
 e) 75°
 12. 180°
 13. 94° e 86°
 14. $55^\circ, 55^\circ, 55^\circ, 55^\circ, 125^\circ, 125^\circ, 125^\circ, 125^\circ$
 15. $x + y = 80^\circ$
 16. $x = 90^\circ$
 17. a) $m = 70^\circ$ b) $m = 82^\circ$
 18. $x = 100^\circ; y = 80^\circ$
 19. $x = y = 132^\circ$
 20. $m = 50^\circ$

Retomando o que aprendeu

Página 182

1. a) adjacentes complementares
 b) alternos internos
 2. $b = c = 32^\circ$
 3. 18°
 4. 140°
 5. $y = 55^\circ; x = 35^\circ$
 6. $x = y = 42^\circ; z = 53^\circ; x + y + z = 137^\circ$
 7. $a = 120^\circ; b = 60^\circ; x = 60^\circ$
 8. 310°
 9. 30°
 10. 100°
 11. 30°

Unidade 9

Explorando

Página 191

2. 2
 3. 1

Página 194

1. a) A, B, C, D
 b) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$
 c) quadrilátero
 d) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$
 e) $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$
 f) 180°
 2. 15 internos e 15 externos
 3. 110°
 4. adjacentes suplementares
 5. 9,2 cm
 6. 30 cm
 7. 81 m
 8. Segmento que une dois vértices não-consecutivos do polígono.
 9. não
 10. a) triângulo
 b) quadrilátero
 c) pentágono
 11. a) 20 c) 170
 b) 90 d) 350
 12. 9
 13. 54
 14. eneágono
 15. undecágono

Página 198

1. a) $m + c = 180^\circ$
 b) $a + b + c = 180^\circ$
 2. não
 3. agudos
 4. a) $x = 60^\circ$ d) $x = 40^\circ$
 b) $x = 15^\circ$ e) $x = 15^\circ$
 c) $x = 30^\circ$ f) $x = 42^\circ$
 5. $a = 113^\circ; b = 45^\circ; c = 22^\circ$
 6. $x = 25^\circ$
 7. 71°
 8. $x = 54^\circ; y = 36^\circ$
 9. $69^\circ, 51^\circ, 60^\circ$
 10. $a = 108^\circ; b = 54^\circ; c = 18^\circ$
 11. $x = 50^\circ; y = 110^\circ; w = 70^\circ; z = 80^\circ$
 12. a) $a = 56^\circ; b = 64^\circ; c = 64^\circ$
 b) $a = 50^\circ; b = 85^\circ; c = 45^\circ$
 13. $x = 92^\circ; y = 25^\circ$
 14. $a = 30^\circ; b = 65^\circ; x = 120^\circ; y = 155^\circ$
 15. $x = 130^\circ; y = 80^\circ$
 16. $x = 50^\circ; y = 90^\circ; z = 62^\circ$
 17. $50^\circ, 50^\circ$ e 80°

Página 205

1. a) 540° c) 3 240°
 b) $1 260^\circ$ d) 4 140°
 2. a) $1 080^\circ$ c) 135°
 b) 360° d) 45°
 3. ângulo interno: 60° ; ângulo externo: 120°
 4. a) 720° c) 120°
 b) 360° d) 60°
 5. undecágono (11 lados)
 6. a) decágono
 b) dodecágono
 c) polígono de 14 lados
 d) pentadecágono
 7. todos
 8. hexágono
 9. $a_1 = 156^\circ; a_n = 24^\circ$
 10. a) quadrilátero regular
 b) dodecágono
 11. a) polígono de 18 lados
 b) 160°
 12. decágono
 13. 80°
 14. 95°
 15. a) $x = 50^\circ$ b) $x = 125^\circ$
 16. $y = 108^\circ; x = 36^\circ$
 17. $x = y = z = 60^\circ$

Explorando

Página 206

1. decágono regular
 2. 1,2 km
 3. 1 650 pessoas

Retomando o que aprendeu

1. 4,2 cm cada um
 2. 408 cm
 3. 14,5 cm
 4. 44 diagonais
 5. 14,5 cm
 6. a) $18^\circ, 54^\circ, 108^\circ$
 b) $162^\circ, 126^\circ, 72^\circ$
 7. 30°
 8. $a = 65^\circ; b = 115^\circ; c = 32^\circ 30'$
 9. $x = 40^\circ$
 10. $x = 115^\circ; y = 65^\circ$
 11. hexágono
 12. $y = 36^\circ; x = 72^\circ$
 14. $x = m$
 15. 30°

Unidade 10

Página 214

1. a) \overline{BC} b) \overline{AB} c) \hat{B}
 2. a) sim d) não
 b) sim e) não
 c) sim f) sim
 3. não, pois $120 \text{ cm} > 70 \text{ cm} > +48 \text{ cm}$
 4. 8 cm ou 9 cm
 5. 4 cm
 6. 4 cm e 10 cm
 7. 11 cm ou 10 cm

Explorando

Página 215

- mínima: 24 km
 máxima: 86 km

Página 217

1. a) $a + b + c = 180^\circ$
 b) $c = a + b$
 c) $a + b = 180^\circ; a = c + d;$
 $b + c + d = 180^\circ$
 2. a) \overline{BC} b) \overline{BC} c) \overline{PN}
 3. \overline{AC}
 4. $x + y = 180^\circ; y = 2x$
 5. a) $x = 65^\circ$ c) $x = 20^\circ$
 b) $x = 70^\circ$ d) $x = 22^\circ 30'$
 6. $x = 60^\circ; y = 120^\circ$
 7. $68^\circ, 48^\circ$ e 64°
 8. 45°
 9. $x = 50^\circ$

Página 220

1. a) escaleno c) equilátero
 b) isósceles d) isósceles
 2. a) obtusângulo
 b) retângulo
 c) acutângulo
 3. a) equilátero e acutângulo
 b) escaleno e retângulo
 c) isósceles e acutângulo
 d) isósceles e obtusângulo
 4. 6 cm, 6 cm e 6 cm
 5. a) 5 cm ou 7 cm
 b) 17 cm ou 19 cm
 6. $x = 3,2$ cm

Explorando

Página 221

1. Cada lado mede 8 cm, cada ângulo mede 60° , o triângulo é equilátero.
 2. lados: 8,0 cm, 4,0 cm e 6,9 cm; ângulos: $90^\circ, 30^\circ$ e 60° ; triângulo escaleno e retângulo
 3. lados: 8,0 cm, 2,2 cm e 7,0 cm; ângulos: $105^\circ, 15^\circ$ e 60° ; triângulo escaleno e obtusângulo.

Explorando

Página 223

1. 3,6 cm
 2. Todos triângulos traçados têm a mesma altura relativa ao lado \overline{AB} : 6,1 cm
 3. a) $\triangle AFB$; b) $\triangle ACB$ e $\triangle AIB$

Página 225

1. a) mediana
 b) altura
 c) mediana
 d) bissetriz
 e) altura
 f) mediana e altura
 2. 22 cm
 3. $x = 20^\circ; y = 50^\circ$
 4. 50°

- $a = 30^\circ, b = 30^\circ, c = 60^\circ$
- $x = 80^\circ; y = 130^\circ$
- $a = 115^\circ; b = 80^\circ; c = 65^\circ$
- med(\hat{B}) = 50° ;
med(\hat{C}) = 50°
- $a = 90^\circ; b = 50^\circ; c = 95^\circ$
- $x = 5^\circ$
- $x = 28^\circ; y = 62^\circ$
- 20°

Explorando

Página 227

- a) 90°
b) 90°
- b) sim
- $\frac{1}{2}$
- sim

Página 233

- caso LAL; $x = 60^\circ; y = 30^\circ$
- $x = 4$ cm; $y = 5$ cm
- a) ALA b) \overline{NC} c) \overline{AM}
- a) LLL b) $x = y = 90^\circ$

Página 237

- $x = y = 55^\circ$
- $x = 60^\circ$ e $y = 30^\circ$
- $25^\circ, 25^\circ$ e 130°
- $x = 67^\circ$ e $y = 46^\circ$
- 63° e 63°
- 18° e 18°
- $x = 50^\circ$
- 45°
- $x = 60^\circ; y = 30^\circ$
- $a = 50^\circ; b = 65^\circ; c = 65^\circ$
- $36^\circ, 72^\circ$ e 72°
- $x = 40^\circ$
- 36°
- $55^\circ; 62^\circ 30'; 62^\circ 30'$
- $x = 60^\circ; y = 30^\circ; z = 75^\circ$

Retomando o que aprendeu

- sim, pois $18 < 13,5 + 6,75$
- 10 cm ou 12 cm
- $x = 32^\circ; y = 58^\circ$
- $55^\circ, 55^\circ$ e 70°
- 65°
- $x - y = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$
- 25°
- $x = 50^\circ; y = 40^\circ$
- $a = 150^\circ$
- a) caso ALA b) 26,8 cm

Unidade 11

Página 243

- a) \hat{P} b) \overline{PS} c) \overline{PR} e \overline{OS}
- $x = 15$ cm; $\overline{AB} = 15$ cm; $\overline{BC} = 30$ cm
- 13 cm, 15 cm, 13 cm e 10 cm
- 87°
- $x = 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ e 150°
- 75°
- $115^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ e 65°
- $165^\circ, 69^\circ, 75^\circ$ e 51°
- $a = 40^\circ; b = 120^\circ; c = 120^\circ; d = 80^\circ$
- $90^\circ, 90^\circ, 130^\circ$ e 50°

Página 245

- $75^\circ, 106^\circ$ e 105°
- $x = 3$ cm; $y = 2$ cm
- $x = 30^\circ$
- $45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 135^\circ$
- 47°

- a) $x = 21$ cm; $y = 35$ cm
b) 106 cm; 86 cm e 150 cm
- $x = 8$ cm; $y = 4$ cm;
med(\overline{AC}) = 16 cm;
med(\overline{BD}) = 8 cm
- $x = 3,6$ cm; $y = 3,2$ cm

Página 248

- a) V d) F
b) F e) V
c) V f) V
- a) $10x + 6y$
b) $6x^2 + 7xy + 2y^2$
- a) $20x - 4y$
b) $25x^2 - 10xy + y^2$
- $10x + 6y$
- $x = 16$ cm
- a) $x = 16; y = 12$
b) 48 cm; 64 cm; 72 cm
- $x = 4; y = 3$
- $x = 90^\circ; y = 45^\circ$
- $y = 27^\circ 30'; x = 62^\circ 30'$
- $x = 50^\circ; y = 40^\circ$
- 51°
- $55^\circ, 55^\circ$ e 70°
- $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ e 120°
- 33° e 57°
- $95^\circ, 95^\circ, 85^\circ$ e 85°

Página 251

- 360°
- 82°
- $74^\circ, 106^\circ$ e 106°
- $x = 62^\circ$
- $x = 121^\circ; y = 59^\circ$
- $x = 80^\circ; y = 50^\circ$
- $100^\circ, 100^\circ, 80^\circ$ e 80°
- $x = 106^\circ$
- $74^\circ, 106^\circ, 90^\circ$ e 90°
- $a = 68^\circ; b = 68^\circ; c = 112^\circ$
- O ângulo agudo mede 45° ; o ângulo obtuso mede 135° .
- $x = 21$ cm
- a) 16,5 cm
b) 7,64 cm
- $x = 32; y = 18$
- a) sim d) 16 cm
b) LAA₃ e) 6 cm
c) \overline{BE}

Retomando o que aprendeu

- 12 cm
- $x - y = 20$
- $x = 34$ cm; $y = 22$ cm
- $a = b = c = 80^\circ$
- $100^\circ, 60^\circ, 100^\circ$ e 40°
- $a = 112^\circ; b = 48^\circ; c = 70^\circ; d = 130^\circ$
- $y = 18^\circ$
- 206°
- 145°
- $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ e 120°

Unidade 12

Página 259

- a) \overline{OA} e \overline{OB}
b) \overline{AB}
c) não
d) Sim, pois $\overline{OA} \cong \overline{OB}$
- a) 30 cm c) $\frac{1}{2}$ cm
b) 1,50 cm d) 3 cm
- a) 27 cm b) 5,5 cm
- 17 cm

- a) 21 cm
b) 30,5 cm
- 34 cm

Explorando

Página 259

São iguais

Página 261

- a) $x > 10$
b) $x < 10$
c) $x = 10$
- $x = 5$ cm
- 7

Página 263

- a) externa c) tangente
b) secante d) secante
- a) $r \times x$
b) $s \times t$
c) não
d) ponto de tangência
e) reta t
f) \overline{OC}
- a) 16 cm c) 256 cm²
b) 64 cm d) 8 cm
- a) $x > 20$ cm
b) $x < 20$ cm
c) $x = 20$ cm
- 9 cm
- $x = 90^\circ; y = 60^\circ$
- $x = y$
- a) 3 cm c) 15 cm
b) 15 cm d) 44 cm
- $2x + y$
- a) $a = 11$ cm; $b = 25$ cm; $c = 31$ cm
b) 134 cm
c) 11 cm
d) 44 cm
- a) 20 cm
b) 3 cm
- a) 2 c) $2a + 16$
b) 8 d) 16

Página 267

- a) externas
b) secantes
c) tangentes internamente
d) tangentes externamente
- a) Uma é interna à outra.
b) tangentes externamente
c) tangentes internamente
d) secantes
e) externas
- 34 cm
- $r = 10$ cm
- 58 cm
- a) 60 cm
b) 225 cm²
c) 44 cm
- $x = 3,5$ cm
- a) externas
b) tangentes externamente
c) tangentes internamente
d) Uma é interna à outra.
- $2x + y$
- a) tangentes externamente
b) secantes
c) externas
d) tangentes internamente

Página 269

- a) arco menor = 75°
arco maior = 285°
b) arco menor = 90°
arco maior = 270°

- medida do arco $\widehat{BC} = 45^\circ$
medida do arco $\widehat{DE} = 90^\circ$
- medida do arco $\widehat{AB} = 120^\circ$
medida do arco $\widehat{CD} = 60^\circ$
medida do arco $\widehat{EF} = 30^\circ$
medida do arco $\widehat{FA} = 60^\circ$

- a) $x = 120^\circ$
b) $x = 45^\circ$
- $x = 110^\circ; y = 110^\circ$
- $x = 45^\circ$
- 60°
- 120°
- $x = 80^\circ; y = 100^\circ$
- a) sim c) $x = y$
b) LLL d) sim
- $a = 100^\circ; b = 120^\circ; c = 140^\circ$

Página 274

- $p = \frac{t}{2}$
- a) $x = 67^\circ$ b) $x = 86^\circ$
- a) \widehat{ABS} e \widehat{RCD}
b) \widehat{ROD} e \widehat{COD}
c) \widehat{ROD}
- $x = 46^\circ; y = 92^\circ$
- $x = 36^\circ; y = 30^\circ$
- $a = 54^\circ; b = 101^\circ; c = 126^\circ; d = 79^\circ$
- a) 60° b) 30°
- $a = 140^\circ; b = 20^\circ; c = 20^\circ; x = 40^\circ$
- $x = 12^\circ$; ângulo inscrito = 84° ; ângulo central = 168°
- $s = 104^\circ; t = 38^\circ$
- $x = 5^\circ$
- 60°
- $x = 45^\circ$
- a) 144° b) 72°
- a) 60° b) 85°

Explorando

Página 275

- a) 180°
b) 90°
c) Triângulo retângulo
- a) 180°
b) 90°
c) Triângulo retângulo

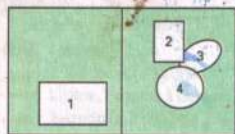
Página 277

- a) $x = \frac{t+s}{2}$ b) $x = \frac{t-s}{2}$
- a) $x = 57^\circ$ b) $x = 18^\circ$
- 87°
- $a = 30^\circ; b = 95^\circ; c = 85^\circ$

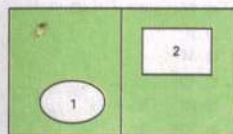
Retomando o que aprendeu

- 5 cm
- a) 0,5 m b) externo
- 4
- 76 cm
- 34 cm
- 10 cm e 7 cm
- $90^\circ, 90^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
- $x = 20^\circ; y = 80^\circ$
- 70°
- $\widehat{BD} = 40^\circ; \widehat{AC} = 200^\circ$
- $x - y = 40^\circ$
- $\frac{3}{2}$
- 35°
- 70°
- 34°
- 10 cm

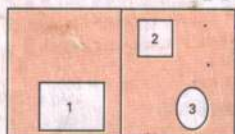
Créditos das páginas de abertura



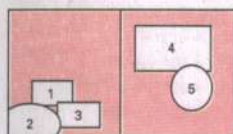
Páginas 8 e 9
Foto 1: Corel Stock Photo
Fotos 2, 3 e 4: Sérgio Dotta Jr/The Next



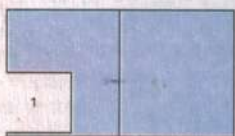
Páginas 150 e 151
Fotos 1 e 2: Corel Stock Photo



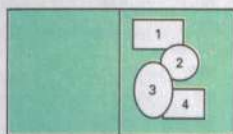
Páginas 26 e 27
Fotos 1, 2 e 3: Roger-Viollet/Keystone



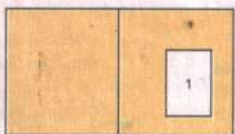
Páginas 170 e 171
Foto 1: Michael Paras/Keystone
Foto 2: Keystone
Foto 3: Corel Stock Photo
Foto 4: Court Mast/Keystone
Foto 5: L. Lefkowitz/Keystone



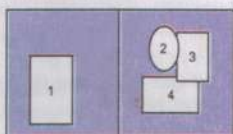
Página 38
Foto 1: Roger-Viollet/Keystone



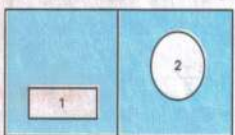
Página 185
Foto 1: Keystone
Fotos 2 e 4: Corel Stock Photo
Foto 3: Stock Photos



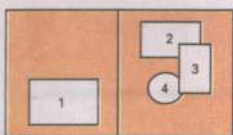
Página 99
Foto 1: c. 1650 a.c. Trustees of the British Museum, Londres



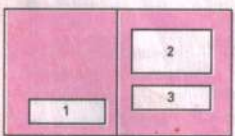
Páginas 210 e 211
Foto 1: Keystone
Fotos 2, 3 e 4: Corel Stock Photo



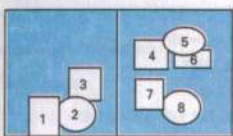
Páginas 114 e 115
Fotos 1 e 2: Roger-Viollet/Keystone



Páginas 240 e 241
Foto 1: Nelson Toledo
Foto 2: Stock Photos
Foto 3: Corel Stock Photo
Foto 4: Marinez Maravalhas Gomes



Páginas 128 e 129
Fotos 1, 2, 3: Corel Stock Photo



Páginas 256 e 257
Foto 1: Stock Photos
Fotos 2 e 8: Keystock
Fotos 3 e 4: Sérgio Dotta Jr/The Next
Fotos 5 e 7: Corel Stock Photo
Foto 6: Nelson Toledo

Agradecimentos – apoio para produção das fotos

- P.A. Percussion
- Restaurante e Lanchonete Império Ltda.
- Pow Mia – Clothing & Action Gear