

A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Nova

VENDA PROIBIDA



CÓDIGO: 82027-0 TIPO: L

8



**Giovanni
Castrucci
Giovanni Jr.**



A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Escola Municipal Math Caproni de Oliveira,
de Ensino Fundamental nº 1 a 8ª série,
Lei Municipal nº 897 de 28/09/98
R. Mercollino Pereira de Carvalho, nº 315
CEP 37760-000 - Carvalhospolis, MG

Nova

José Ruy Giovanni

Bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP).
Professor de Matemática em escolas de 1º e 2º graus desde 1960.

Benedito Castrucci

(Falecido em 2/1/1995)

Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).
Ex-professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica e da Universidade de São Paulo.
Ex-professor de escolas públicas e particulares de 1º e 2º graus.

José Ruy Giovanni Jr.

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
Professor de Matemática em escolas de 1º e 2º graus desde de 1985.

**NOVAS
SEÇÕES**

- Explorando
- Jornais e revistas

IMPORTANTE

REVISADO DE ACORDO COM
AS OBSERVAÇÕES DA
AVALIAÇÃO DE
LIVROS DIDÁTICOS
DO MEC-SEF/FNDE

8

Todos os direitos de edição reservados à

EDITORA FTD S.A.

Matriz: Rua Rui Barbosa, 156 (Bela Vista) São Paulo - SP
CEP 01326-010 - Tel. (0-XX-11) 3253-5011- Fax (0-XX-11) 3284-8500 r. 298
Caixa Postal 65149 - CEP da Caixa Postal 01390-970
Internet: <http://www.ftd.com.br>
E-mail: exatas@ftd.com.br

Editora: Júnia La Scala

Editores assistentes: Arnaldo Rodrigues
Dario Martins de Oliveira
Fabiano A. L. Wolff
Maria Ângela Pontual

Preparação: Célia Sigismondi

Revisão: Fausto Alves Barreira Filho
Solange Martins

Iconografia

Coordenação: Sônia Oddi

Pesquisa: Elizete Moura Santos

Assistente: Maria Rosa Alexandre

Edição de arte e projeto gráfico: Maria Paula Santo Siqueira

Capa: Arte Nova E. G. sobre cromo de
Michael Leshay/Rex/Keystone
(Foto alusiva à conquista brasileira
do tetracampeonato mundial de futebol.)

Ilustrações: Abê, Alberto De Stefano,
Alexandre Argozino Neto, Fê

Desenhos gráficos: Eunice Toyota

Editoração eletrônica/diagramação: EXATA editoração eletrônica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Giovanni, José Ruy, 1937 -

A conquista da matemática - Nova / José Ruy Giovanni,
Benedito Castrucci, José Ruy Giovanni Jr. — São Paulo :
FTD, 1998. — (Coleção a conquista da matemática)

Edição não-consumível. ISBN 85-322-4110-7
Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries.
Suplementado pelo livro do professor.

1. Matemática (Ensino fundamental)
I. Castrucci, Benedito, 1909 - II. Giovanni Júnior,
José Ruy, 1963 - III. Título. IV. Série.

98-3263

CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: Ensino fundamental 372.7



APRESENTAÇÃO

Estudando as potências e suas propriedades

1. Potência de um número real com expoente natural
2. Potências de um número real com expoente inteiro negativo
3. Transformando e simplificando uma expressão

A Matemática é geralmente considerada uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra de um gabinete fechado, onde não entram ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores do homem.

Porém, isso só em parte é verdadeiro.

(Bento de Jesus Caraça, matemático português, 1901-1948)

A Matemática está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem até o uso em complexos computadores.

Podem parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata no mundo em que vivemos; isso pode gerar em você um certo desapontamento. Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. Veja na Economia, por exemplo, o cálculo de juros e porcentagem; na Engenharia, os cálculos trigonométricos.

Para entender a Matemática e suas aplicações são necessários dedicação e estudo. Por esse motivo, ao escrever esta coleção, procuramos apresentar a você as linhas mestras desse processo em linguagem simples, sem fugir ao rigor que a Matemática exige.

Os autores

Estudando as potências e suas propriedades

1

- | | |
|---|----|
| 1. Potência de um número real com expoente natural | 10 |
| 2. Potência de um número real com expoente inteiro negativo | 14 |
| 3. Transformando e simplificando uma expressão | 19 |

Calculando com radicais

- | | |
|---|----|
| 4. Raiz enésima de um número real | 26 |
| 5. Radical aritmético e suas propriedades | 28 |
| 6. Simplificando radicais: extração de fatores do radicando | 32 |
| 7. Introduzindo um fator externo no radicando | 34 |
| 8. Adicionando, algebricamente, dois ou mais radicais | 35 |
| 9. Multiplicando expressões com radicais de mesmo índice | 38 |
| 10. Dividindo expressões com radicais | 42 |
| 11. Multiplicando e dividindo expressões com radicais de índices diferentes | 43 |
| 12. Potenciação de uma expressão com radicais | 45 |
| 13. Racionalizando denominadores de uma expressão fracionária | 47 |
| 14. Simplificando expressões com radicais | 51 |
| 15. Potências com expoente racional | 52 |

Equações de 2º grau

3

- | | |
|---|----|
| 16. Equação de 2º grau com uma incógnita | 60 |
| 17. Resolvendo equações incompletas de 2º grau | 63 |
| 18. Resolvendo uma equação completa de 2º grau com uma incógnita | 67 |
| 19. Resolvendo problemas | 78 |
| 20. Estudando as raízes da equação de 2º grau | 81 |
| 21. Relacionando as raízes e os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ | 83 |
| 22. Escrevendo uma equação de 2º grau quando conhecemos as duas raízes | 86 |
| 23. Resolvendo equações biquadradas | 87 |
| 24. Resolvendo equações irracionais | 89 |
| 25. Resolvendo sistemas de equações de 2º grau | 92 |

Função polinomial de 1º grau

26. Sistema de coordenadas cartesianas _____	100
27. A noção de função _____	107
28. Função polinomial de 1º grau _____	118
29. Gráfico da função polinomial de 1º grau _____	121
30. Zero da função polinomial de 1º grau _____	124
31. Analisando o gráfico de uma função polinomial de 1º grau _____	125

5

Função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)

32. Função polinomial de 2º grau (ou função quadrática) _	130
33. Gráfico da função quadrática no plano cartesiano ____	132
34. Zeros da função polinomial de 2º grau _____	136
35. Estudando a concavidade da parábola _____	140
36. Ponto de mínimo ou ponto de máximo _____	141
37. Analisando a função $y = ax^2 + bx + c$ quanto ao sinal _	142

6

Segmentos proporcionais

38. Razão e proporção _____	150
39. Razão de dois segmentos _____	151
40. Segmentos proporcionais _____	152
41. Feixe de retas paralelas _____	153
42. Teorema de Tales _____	155
43. Aplicações do teorema de Tales nos triângulos ____	160

7

Semelhança

44. Figuras semelhantes _____	170
45. Polígonos semelhantes _____	173
46. Triângulos semelhantes _____	181

Estudando as relações métricas no triângulo retângulo

47. O teorema de Pitágoras _____ 196
 48. As relações métricas no triângulo retângulo _____ 206

9

Estudando as relações trigonométricas nos triângulos

49. Relações trigonométricas no triângulo retângulo _____ 216
 50. Estudando as relações trigonométricas em um triângulo qualquer _____ 227

Estudando a circunferência e o círculo

10

51. Relações métricas na circunferência _____ 240
 52. Polígonos regulares inscritos na circunferência _____ 244
 53. Calculando o comprimento de uma circunferência _____ 251

11

Estudando as áreas das figuras geométricas planas

54. Calculando a área de algumas figuras geométricas _____ 260

Noções elementares de estatística

12

55. Organizando os dados _____ 280
 56. Estudando gráficos _____ 284

Bibliografia _____ 296

Respostas dos exercícios _____ 298

1

Estudando as potências e suas propriedades

Observe as seguintes situações:

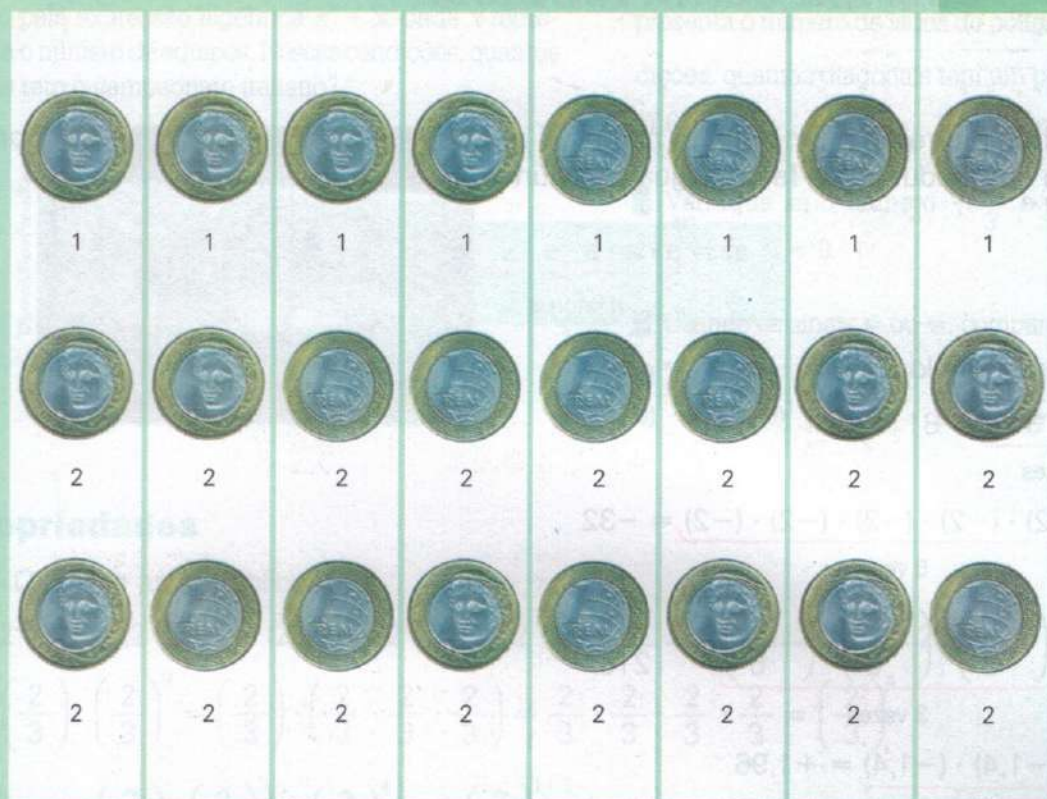
- 1^a Se lançarmos ao ar uma moeda, poderemos ter *dois resultados possíveis*.



- 2^a Se lançarmos ao ar simultaneamente duas moedas, poderemos ter *quatro resultados possíveis*.



3ª Se lançarmos ao ar simultaneamente três moedas, poderemos ter *oito resultados possíveis*.



Prosseguindo dessa forma, podemos estabelecer uma relação entre o *número de moedas* lançadas ao ar e o *número de resultados possíveis*, como vemos no quadro abaixo:

Nº de moedas	Nº de resultados possíveis
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
5	$32 = 2^5$
...	...

De um modo geral, podemos afirmar:

No lançamento simultâneo de n moedas, o número de resultados possíveis é dado por 2^n .

Esse é um exemplo prático do uso de *potências*.



POTÊNCIA DE UM NÚMERO REAL COM EXPOENTE NATURAL

Dado um número real a e um número natural n , $n \neq 0$, a expressão a^n , denominada *potência*, representa um produto de n fatores iguais ao número real a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Assim, por exemplo:

$$1. \quad 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ vezes}} = 81$$

$$2. \quad (-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{5 \text{ vezes}} = -32$$

$$3. \quad \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)}_{3 \text{ vezes}} = -\frac{1}{216}$$

$$4. \quad (-1,4)^2 = \underbrace{(-1,4) \cdot (-1,4)}_{2 \text{ vezes}} = +1,96$$

$$5. \quad 10^1 = 10$$

Na potência a^n , temos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{o número real } a \text{ chama-se } \textit{base} \\ \text{o número natural } n \text{ chama-se } \textit{expoente} \end{array} \right.$

Observe que:

$$-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4 \quad \text{e} \quad (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

Assim, $-2^2 \neq (-2)^2$.

FIXAÇÃO

1 Aplicando a definição, vamos calcular:

a) 7^2 f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

b) $(-11)^2$ g) $(-2,3)^2$

c) $(-5)^3$ h) -6^2

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ i) 3^5

e) $(\sqrt{3})^1$ j) $(-0,6)^3$

2 Qual é o valor da expressão numérica $(-2)^3 - (-1)^2 + (-3)^2 - (-2)^5$?

3 Qual é o número real expresso por

$$(-2)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 : (+3)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 ?$$

4 Sendo $x = [(-1)^3 - (-1)^5 \cdot (-1)^4] + (-1)^7$ e $y = (-2)^4 : 2^3 - 4^2 : (-2)^2$, determine o valor de xy .

Observe as potenciações:

✓ $(2^5)^2 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5} = 2^{10}$ Então: $(2^5)^2 = 2^{10}$ ou $2^{5 \cdot 2}$.

✓ $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^{4+4+4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

Então: $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$ ou $\left(\frac{3}{4}\right)^{4 \cdot 3}$.

Como esse fato sempre ocorre quando temos uma potência de outra potência, isso nos permite escrever a seguinte propriedade:

Dado um número real a , não-nulo, e sendo m e n dois números naturais, então $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Observe as potências:

✓ $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{5^2} = 3^2 \cdot 5^2$

✓ $(2 : 7)^2 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 7} = \frac{2^2}{7^2} = 2^2 : 7^2$

Podemos escrever a seguinte propriedade:

Dada a potência $(a \cdot b)^n$ ou $(a : b)^n$, sendo a e b dois números reais não-nulos e n um número natural diferente de 0, temos:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

ou

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

FIXAÇÃO

1 Aplicando as propriedades, escreva na forma de uma só potência:

a) $2^6 \cdot 2^4$

b) $7^{10} : 7^6$

c) $(5^2)^6$

d) $3^4 \cdot 3^9 \cdot 3$

e) $\left(\frac{2}{9}\right)^5 : \left(\frac{2}{9}\right)^3$

f) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^4\right]^2$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

h) $8^5 : 8^4$

i) $[(1,1)^5]^4$

j) $(0,1)^{10} : (0,1)^8$

2 Aplicando as propriedades, transforme numa só potência as expressões:

a) $x^2 \cdot x \cdot x^8 \cdot x^3$ ($x \neq 0$)

b) $x^{12} : x^9$ ($x \neq 0$)

c) $(x^5)^4$ ($x \neq 0$)

d) $a \cdot a^7 \cdot a^2$ ($a \neq 0$)

e) $p^4 : p^3$ ($p \neq 0$)

3 Transforme num produto de potências:

a) $(x \cdot y)^3$

b) $(a \cdot b^2)^2$

c) $(x^3 \cdot y^2)^4$

d) $(a^2 \cdot b^5 \cdot c^3)^2$

Expoente zero

Vamos calcular o quociente de $2^5 : 2^5$.

- ✓ Aplicando a definição: $2^5 : 2^5 = 32 : 32 = 1$
- ✓ Aplicando a propriedade da divisão de potências de mesma base: $2^5 : 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$

Comparando os dois resultados, podemos escrever que $2^0 = 1$, o que ocorre com qualquer número real não-nulo.

De modo geral:

Para todo número real a , com $a \neq 0$, temos $a^0 = 1$.

Veja como podemos, também, considerar o expoente zero:

- ✓ Observando a última coluna da direita, de cima para baixo, notamos que cada número representa a terça parte do número anterior:

Base	Expoente	Potência
3	5	$3^5 = 243$
3	4	$3^4 = 81$
3	3	$3^3 = 27$
3	2	$3^2 = 9$
3	1	$3^1 = 3$

- ✓ Se prosseguirmos com a tabela, incluindo o expoente 0, veja o que ocorre:

Base	Expoente	Potência
3	5	$3^5 = 243$
3	4	$3^4 = 81$
3	3	$3^3 = 27$
3	2	$3^2 = 9$
3	1	$3^1 = 3$
3	0	$3^0 = 1$

$81 = \frac{1}{3}$ de 243

$27 = \frac{1}{3}$ de 81

$9 = \frac{1}{3}$ de 27

$3 = \frac{1}{3}$ de 9

$1 = \frac{1}{3}$ de 3

FIXAÇÃO

1 Determine o valor de:

a) 5^0 b) -5^0 c) $(-5)^0$ d) $-(-5)^0$

2 Qual é o valor numérico da expressão $-5^0 + 3^0 - (-4)^0$?

3 Qual é o valor numérico da expressão

$$\sqrt{\frac{1}{25}} + (0,17)^0?$$

4 Calcule o valor numérico da expressão

$$2^0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2^0$$

5 Se você simplificar a expressão $\frac{3}{(2x+1)^0}$, que resultado vai obter?



POTÊNCIA DE UM NÚMERO REAL COM EXPOENTE INTEIRO NEGATIVO

Vamos calcular o quociente de $2^3 : 2^4$.

✓ Aplicando a propriedade do quociente de potências que têm a mesma base:

$$2^3 : 2^4 = 2^{3-4} = 2^{-1}$$

✓ Considerando o quociente na forma de uma fração: $2^3 : 2^4 = \frac{2^3}{2^4} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}$

Comparando os dois resultados, podemos dizer que $2^{-1} = \frac{1}{2}$, o que ocorre com qualquer número real não-nulo.

De modo geral:

$$\text{Para todo número real } a, \text{ com } a \neq 0, \text{ temos } a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Exemplos:

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Vamos calcular agora o quociente de $2^5 : 2^8$.

✓ Aplicando a propriedade do quociente de potências de mesma base: $2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$

✓ Considerando o quociente na forma de uma fração:

$$2^5 : 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Comparando os dois resultados, podemos dizer que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, o que ocorre com qualquer número real não-nulo.

De modo geral:

Para todo número real a , com $a \neq 0$, temos $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$,
sendo n um número natural diferente de zero.

Exemplos:

$$5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} \qquad (-2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \qquad \left(-\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(-\frac{7}{4}\right)^3 = -\frac{343}{64}$$

Considere a tabela a seguir:

Base	Expoente	Potência
2	4	$2^4 = 16$
2	3	$2^3 = 8$
2	2	$2^2 = 4$
2	1	$2^1 = 2$

Observe a última coluna da direita, de cima para baixo. Note que cada número representa a metade do anterior.

Se considerarmos o expoente zero e os números inteiros negativos como expoentes, podemos montar esta outra tabela:

Base	Expoente	Potência
2	4	$2^4 = 16$
2	3	$2^3 = 8$
2	2	$2^2 = 4$
2	1	$2^1 = 2$
2	0	$2^0 = 1$
2	-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
2	-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$

$8 = \frac{1}{2}$ de 16

$4 = \frac{1}{2}$ de 8

$2 = \frac{1}{2}$ de 4

$1 = \frac{1}{2}$ de 2

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ de 1

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$

Observando a última coluna, de cima para baixo, temos:

$$2^0 = 1$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Vejamos como aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas:

1. Determinar o valor da expressão $3^{-1} + 2^{-2} - (-4)^{-1}$.

$$\begin{aligned} 3^{-1} + 2^{-2} - (-4)^{-1} &= \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \\ &= \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2. Simplificar a expressão $(2a^3x^{-1})^{-1}$, para $a \neq 0$ e $x \neq 0$.

$$(2a^3x^{-1})^{-1} = \left(2a^3 \cdot \frac{1}{x}\right)^{-1} = \left(\frac{2a^3}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{2a^3}$$

3. Calcular o valor de $(9^{-1} + 6^{-2})^{-1}$.

$$(9^{-1} + 6^{-2})^{-1} = \left[\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right]^{-1} = \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{36}\right]^{-1} = \left[\frac{4+1}{36}\right]^{-1} = \left(\frac{5}{36}\right)^{-1} = \frac{36}{5}$$

FIXAÇÃO

1 Calcule e observe a seqüência:

- | | |
|----------|-------------|
| a) 3^4 | e) 3^0 |
| b) 3^3 | f) 3^{-1} |
| c) 3^2 | g) 3^{-2} |
| d) 3^1 | h) 3^{-3} |

2 Vamos calcular:

- | | |
|----------------|------------------|
| a) 2^{-1} | e) $-(-4)^{-3}$ |
| b) 2^{-5} | f) $-(-10)^{-1}$ |
| c) $(-2)^{-2}$ | g) 10^{-3} |
| d) -2^{-4} | h) $-(-7)^{-2}$ |

3 Vamos calcular:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

g) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

h) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$

d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$

i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

4 Você sabe que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Pela propriedade simétrica da igualdade podemos escrever $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. Nessas condições, escreva na forma de potência com expoente inteiro negativo as expressões:

a) $\frac{1}{10^2}$

c) $\frac{1}{5^6}$

e) $\frac{1}{6^4}$

b) $\frac{1}{7^3}$

d) $\frac{1}{2^7}$

f) $\frac{1}{10^8}$

5 Vamos calcular:

a) $\frac{1}{2^{-4}}$

d) $\frac{2^{-3}}{5^{-2}}$

b) $\frac{2}{4^{-2}}$

e) $\frac{3^0}{2^{-5}}$

c) $2^{-3} \cdot 7$

f) $9^{-2} \cdot 3^3$

6 Qual é o valor da expressão $(4^0 + 4^{-1}) : (4^0 - 4^{-1})$?

7 Sabendo que a base é um número real não-nulo, simplifique as expressões algébricas dando a resposta com expoentes inteiros positivos:

a) $(2x^2)^{-3}$

d) $(x^4y^{-2})^{-3}$

b) $(3a^2x^{-1})^{-2}$

e) $(a^{-2} \cdot b^3)^{-1}$

c) $\left(\frac{ab^{-1}}{c^{-2}}\right)^{-1}$

f) $\left(\frac{x^{-2}}{a^{-1}b}\right)^{-1}$

8 Vamos calcular:

a) $(-3)^{-1} + (-1)^{-3}$

c) $(4^{-1} + 2^{-3})^{-1}$

b) $2^{-4} - 2^2$

d) $(6^{-2} \cdot 3^2)^{-1}$

9 Sabendo que a base é um número real não-nulo, efetue as operações indicadas e simplifique as expressões algébricas:

a) $(xy^{-2}) : (x^{-3}y)$

b) $(a^2b^{-1})^{-2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

10 Qual é o número real expresso por $2^0 + (-2)^4 \cdot 4^{-2} - (-2)^3$?

11 Simplifique a expressão algébrica $\frac{a}{b^{-1}} + \frac{b}{a^{-1}}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

12 Calcule o valor da expressão numérica

$$\frac{-2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{-2^4 + (-3)^2 + 4^0}$$

13 Simplifique a expressão $\frac{x + y^{-1}}{x - y^{-1}}$ e dê o valor numérico dessa expressão quando $x = y = 3$.

Propriedades das potências com expoentes inteiros

As mesmas propriedades estudadas para as potências com expoentes naturais valem também para as potências com expoentes inteiros e base real não-nula.

Assim, temos:

❖ Para multiplicação de potências de mesma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplos:

1. $5^2 \cdot 5^{-6} = 5^{2+(-6)} = 5^{2-6} = 5^{-4}$

2. $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-3+(-2)} = 10^{-3-2} = 10^{-5}$

3. $2^n \cdot 2^3 = 2^{n+3}$, sendo n um número inteiro

❖ Para divisão de potências de mesma base: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ou $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemplos:

1. $6^4 : 6^7 = 6^{4-7} = 6^{-3}$

2. $10^3 : 10^{-2} = 10^{3-(-2)} = 10^{3+2} = 10^5$

3. $\frac{2^{-5}}{2^{-7}} = 2^{-5-(-7)} = 2^{-5+7} = 2^2$

4. $\frac{3^{n-2}}{3^{n+1}} = 3^{n-2-(n+1)} = 3^{n-2-n-1} = 3^{-3}$, sendo n um número inteiro

❖ Para potência de uma potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

1. $(10^3)^{-2} = 10^{3 \cdot (-2)} = 10^{-6}$

2. $(5^{-1})^{-3} = 5^{(-1) \cdot (-3)} = 5^3$

3. $(10^x)^5 = 10^{x \cdot 5} = 10^{5x}$, sendo x um número inteiro

❖ Para transformar potência de um produto em um produto de potências: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplos:

1. $(2 \cdot 5)^{-4} = 2^{-4} \cdot 5^{-4}$

2. $(10 \cdot x)^{-2} = 10^{-2} \cdot x^{-2}$

FIXAÇÃO

1 Transforme numa só potência (a base é sempre um número real não-nulo):

a) $7^9 \cdot 7^{-6}$

d) $x^3 \cdot x^{-5} \cdot x^4$

b) $10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^5$

e) $a^8 \cdot a^{-8} \cdot a^{-1}$

c) $8^3 \cdot 8^{-8}$

2 Transforme numa só potência (a base é sempre um número real não-nulo):

a) $6^4 : 6^5$

d) $\frac{10^{-3}}{10^{-5}}$

b) $2^7 : 2^{-2}$

e) $\frac{x^6}{x^{-2}}$

c) $7^{-4} : 7^{-1}$

f) $\frac{a^9}{a^{11}}$

3 Transforme numa só potência (a base é sempre um número real não-nulo):

a) $(6^{-1})^4$

c) $(5^{-1})^{-3}$

e) $(a^{-7})^3$

b) $(10^0)^{-2}$

d) $(x^6)^{-2}$

f) $(p^{-2})^{-4}$

4 Transforme em um produto de potências:

a) $(5 \cdot 11)^{-2}$

c) $(2^{-4} \cdot 5^4)^{-2}$

b) $(3 \cdot 10^2)^{-1}$

d) $(7^{-1} \cdot x)^{-3}$

5 Identifique como verdadeira ou falsa cada uma das igualdades:

a) $(2^5 \cdot 7^5) = (2 \cdot 7)^5$

c) $x^5 \cdot y^{10} = (x \cdot y^5)^5$

b) $x : x^2 = x^{-1}$

d) $xy^{-1} = (x^{-1} \cdot y)^{-1}$

6 Sabendo que $a = 10^{-7}$, $b = 10^{11}$ e $c = 10^{-4}$, determine:

a) $a \cdot b$

c) $b \cdot c$

b) $a \cdot c$

d) $a \cdot b \cdot c$

7 Escreva cada uma das expressões com expoente positivo:

a) $(5^{-5})^2$

d) $(10^2)^{-3}$

b) $2^3 \cdot 2^{-5}$

e) $\frac{1}{(xy)^{-2}}$

c) $\frac{5^2}{5^4}$

f) $6^{-4} \cdot 6^3$

8 Sendo x um número inteiro, escreva na forma de uma só potência cada uma das expressões:

a) $2^x \cdot 2^3$

c) $(5^x)^3$

b) $7^x : 7^3$

d) $8^{3x} \cdot 8^{-2x}$

e) $10^{3x} : 10^{-2x}$

h) $(2^2)^{x-1}$

f) $7^x \cdot 7^{x+3}$

i) $3^{x+1} \cdot 3^{x-1}$

g) $\frac{2^n}{2^{n-1}}$

j) $\frac{10^{x+3}}{10^x}$

9 Qual é a forma mais simples de escrever cada uma das seguintes expressões, sendo x um número real não-nulo?

a) $\left(\frac{x^2}{x^{-3}}\right)^2$

b) $(x^{-3} \cdot x)^{-1}$

c) $(x^{n+1} \cdot x^{2-n})^{-2}$

10 Qual é a forma mais simples de escrever a expressão $a^{2n-1} \cdot a^{n+1}$, sendo $a \neq 0$ e n um número inteiro?



TRANSFORMANDO E SIMPLIFICANDO UMA EXPRESSÃO

Muitas vezes é conveniente escrever um número em forma de potência. Essa forma de escrever os números é muito usada na simplificação de expressões em que aparecem números muito grandes ou muito pequenos.

Vamos observar alguns exemplos:

1. Escrever o número 0,0000001 na forma de potência de 10.

$$0,0000001 = \frac{1}{10\,000\,000} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7}$$

↙ 7 casas decimais
↘ 7 zeros

2. Escrever a expressão $\frac{256 \cdot 4^9}{8^7}$ na forma de uma única potência de 2.

Decompondo 256, 4 e 8 em fatores primos, temos: $256 = 2^8$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$.

Daí teremos a seguinte expressão:

$$\frac{256 \cdot 4^9}{8^7} = \frac{2^8 \cdot (2^2)^9}{(2^3)^7} = \frac{2^8 \cdot 2^{18}}{2^{21}} = \frac{2^{26}}{2^{21}} = 2^5$$

aplicando as propriedades

3. A distância média da Terra ao Sol é de 150 000 000 km. Escrever essa distância usando a notação científica.

Na notação científica, um dos fatores deve ser maior que 1 e menor que 10, enquanto o outro fator deve ser uma potência de 10.

No caso, 150 foi dividido por 10 e, ao mesmo tempo, multiplicamos 10 000 000 por 10, para não alterar o número.



$$150\,000\,000 = 15 \cdot 10\,000\,000 = 1,5 \cdot \underbrace{100\,000\,000}_{8 \text{ zeros}} = 1,5 \cdot 10^8$$

4. Simplificar a expressão $\frac{(a^5b^2)^4}{(a^2b^4)^6}$.

$$\frac{(a^5b^2)^4}{(a^2b^4)^6} = \frac{(a^5)^4 \cdot (b^2)^4}{(a^2)^6 \cdot (b^4)^6} = \frac{a^{20} \cdot b^8}{a^{12} \cdot b^{24}} = \frac{a^{20}}{a^{12}} \cdot \frac{b^8}{b^{24}} = a^8 \cdot b^{-16} = a^8 \cdot \frac{1}{b^{16}} = \frac{a^8}{b^{16}}$$

5. Simplificar a expressão $\frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4}$.

$$\frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4} = \frac{12 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^3} = \frac{12}{3} \cdot \frac{10^2}{10^3} = 4 \cdot 10^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} \text{ ou } 0,4$$

FIXAÇÃO

- 1 Escreva na forma de potência de 2 cada um dos números:

a) 64 b) $\frac{1}{128}$ c) $\frac{1}{512}$ d) 2 048

- 2 O número 729 pode ser escrito na forma de potência de 3. Qual é essa forma?

- 3 Se você escrever $\frac{1}{625}$ na forma de potência de 5, qual será essa potência?

- 4 Os seguintes números podem ser escritos na forma de potência de 10. Nessas condições, escreva-os dessa forma:

a) 100 000 000 c) 0,0000001
b) 0,00001 d) 1 000

- 5 Dada a expressão $(81)^{-2}$, escreva essa expressão na forma de potência de 3 com expoente inteiro positivo.

- 6 Escreva cada um dos seguintes números na forma de um produto de dois fatores, sendo um dos fatores um número inteiro maior que 1 e menor que 10, e o outro, uma potência de 10:

a) 700 c) 0,00007 e) 0,000009
b) 0,06 d) 0,002 f) 0,5

- 7 A velocidade da luz é de 300 000 km/s. Use a notação científica para escrever a velocidade da luz.

- 8 Aplicando as propriedades das potências, escreva na forma de uma única potência de 2 a expressão $(16^2 \cdot 64^3) : 1\,024^2$.

9 Aplicando as propriedades das potências, escreva na forma de uma única potência de 3 a expressão

$$\frac{9^3 \cdot 27^4 \cdot 3^{-7}}{3^{-1} \cdot 243^2}$$

10 Aplicando as propriedades das potências, vamos escrever a expressão $\frac{125^6 \cdot 25^{-3}}{(5^2)^{-3} \cdot 25^7}$ na forma de uma única potência de 5.

11 Dada a expressão algébrica $\frac{a}{b \cdot c}$, determine o valor numérico dessa expressão sabendo que $a = 16^{-6}$, $b = 8^{-3}$ e $c = 4^{-10}$.

12 Sabendo que x e y são dois números reais não-nulos, use as propriedades da potenciação para simplificar cada uma das expressões:

a) $\frac{(x^{-2} \cdot y)^{-5}}{(x^{-3} \cdot y^2)^{-4}}$

b) $\frac{(x^6 \cdot y^{-2})^5}{(x^7 \cdot y^{-4})^3}$

13 Simplifique a expressão $\frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4}$, escrevendo o resultado com expoente positivo.

14 Qual é o valor numérico da expressão $\frac{a^{-3} \cdot b^{-3}}{c^3}$ quando $a = 6^{-5}$, $b = 6^5$ e $c = 6^{-2}$?

RETOMANDO o que aprendeu

1 Qual é o valor numérico da expressão $\frac{4}{3}\pi r^3$, considerando $\pi = 3,14$ e $r = +3$?

2 Escreva na forma mais simples possível a expressão $\left(\frac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^{-1}$.

3 Qual é o número real expresso por

$$\left[\frac{\sqrt{9} - 2}{-10 + 2^3 + (-2)^2}\right]^{-3} ?$$

4 Usando as propriedades da potenciação, escreva da forma mais simples possível a expressão $(x^2)^3 \cdot (x^4)^5 \cdot (x^3)^{-7}$, onde $x \neq 0$.

5 Determine o valor da expressão numérica

$$\frac{2^{-3} + 3^{-2}}{2^{-4} - 3^{-1}}$$

6 Transforme numa só potência as expressões (a base é sempre um número real não-nulo):

a) $x^{-4} \cdot x^3$

c) $\frac{a^4}{a^{-6}}$

b) $(t^2)^{-3}$

d) $\frac{x^n}{x^{n+2}}$

7 Use as propriedades da potenciação e simplifique a expressão $\left[\frac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0,01)^3$.

8 Simplifique a expressão $\frac{2 \cdot x^{-1}}{y^{-1} - 2x^{-1}}$.

9 Calcule: $(9^{-1} \cdot 3^{-3})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4$.

10 Sendo $x = (2^2)^3$, $y = 8^2$ e $z = 16^{-3}$, determine o valor de $x \cdot y \cdot z$.

11 Simplifique a expressão $\frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^2 - b^2}$, sendo $(a^2 - b^2) = 0$.

12 Qual é o valor da expressão $(6^{-1} + 2^{-3}) : (5^0 + 4^{-2})$?

13 Simplifique a expressão $\frac{1}{y^{-6}} + \frac{2}{(y^2)^{-3}} + 8y^6$, sendo $y \neq 0$.

14 Simplifique a expressão $\frac{(a+b)^7 \cdot (a+b)^3}{(a+b)^8}$, sendo $a \neq -b$.

15 Simplifique a expressão $\frac{s}{t^{-1}} + \frac{t}{s^{-1}} + \frac{1}{(ts)^{-1}}$.

JORNAIS & REVISTAS

"A alimentação muda as medidas dos brasileiros, que se aproximam da altura da população dos países ricos."

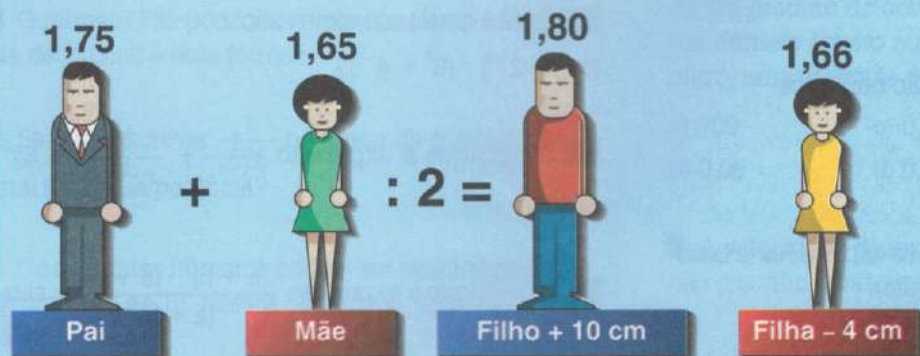
Esta afirmação é parte da matéria publicada na revista *Veja* de 17/07/96. Leia um trecho:

"O brasileiro está mudando a olhos vistos. Em quinze anos, a estatura média da população no Brasil aumentou 4 centímetros — 2,5 centímetros acima do esperado pelos especialistas em crescimento. Ao menos nas camadas sociais mais favorecidas, os adolescentes de hoje parecem gigantes desengonçados perto de seus avós e mesmo dos pais, quase sempre mais baixos. Esses jovens, com padrões de alimentação e saúde iguais aos do Primeiro Mundo, estão crescendo mais do que a média dos brasileiros, que já é elevadíssima. Os pés e as mãos, maiores a cada geração, acompanham essa tendência."

O lado negativo no estudo de Carlos Augusto Monteiro é que o brasileiro não se limita ao crescimento vertical — ele também está aumentando de tamanho nas laterais, devido ao consumo excessivo de calorias. "Comer mais não significa comer melhor", observa o pesquisador. "A carne continua fora do cardápio da maioria da população", assinala. O consumo de óleo e margarina por pessoa duplicou nas últimas três décadas, mas o de carne e ovos cresceu menos de 1%. A explicação é simples: pelo preço de 1 quilo de carne pode-se comprar oito pacotes de bolacha ou de macarrão. É por isso que, no mesmo período, o número de obesos entre os 30% mais pobres da população aumentou quatro vezes — o dobro da incidência entre os 30% mais ricos.

De que tamanho ficarão as crianças?

Aprenda a calcular, aproximadamente, a altura que seus filhos terão na idade adulta (em metros)



Obs.: Esta regra vale para um casal em que a média de idade entre o homem e a mulher é de 30 anos. Se fosse de 20 anos, os valores mudariam para 9 cm a mais no caso do menino e 3 cm a menos para a menina.

- Some a altura do pai e da mãe e divida por dois
- A partir da altura média dos pais, some 10 cm se a criança for menino e subtraia 4 cm se a criança for menina

Com base nos infográficos apresentados, resolva as questões:

- Mantendo-se o ritmo de crescimento verificado de 1980 a 1990, qual será a altura média do homem brasileiro adulto no ano 2000?
- Num casal, a média das idades é de 30 anos. Se o pai tem 1,82 m e a mãe 1,68 m, qual a provável altura do filho na idade adulta?
- Flávio tem 21 anos e 1,78 m de altura. Sua esposa Cláudia, com 19 anos e 1,64 m, teve uma filha, Juliana. Qual a provável altura de Juliana aos 18 anos?
- Supondo que o pé masculino continue crescendo na mesma proporção que cresceu entre 1965 e 1990, qual deverá ser, então, o número médio do calçado masculino em 2015?
- Reflita sobre o texto a seguir:

Além da balança, os novos hábitos alimentares do brasileiro podem ser constatados na cadeira do dentista. As comidas industrializadas são mais macias e pastosas, o que diminui o esforço na mastigação. A boca, como qualquer parte do corpo, fica flácida se não se exercitar. É o que está acontecendo com uma geração inteira. "Ao trocar a cenoura crua pelo iogurte, as crianças ficaram com os músculos da boca moles", diz a odontopediatra Denise Klatchoian. As dimensões dos ossos também diminuíram. O maxilar ficou menos proeminente e a arcada dentária, menor. Na história da evolução, o homem chegou a ter quatro molares. Na arcada dentária atual não há lugar sequer para o dente do siso, o terceiro molar, que desponta dos 16 anos.

O brasileiro está ficando...

mais alto...

Altura final média do homem, por ano de nascimento (em metros)



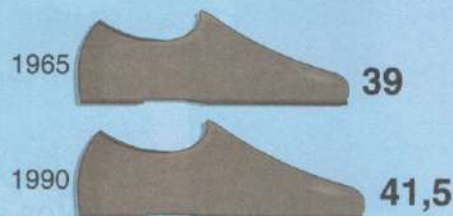
...mais gordo...

Mulheres adultas obesas (em %)



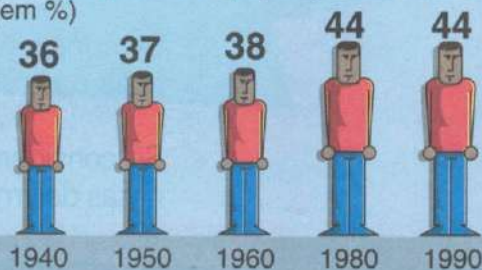
...com os pés maiores...

Número médio de calçado masculino



...e a pele mais escura...

Negros e pardos na população brasileira (em %)



Fontes: Monteiro, Benício & Gouveia, *Evolução da Altura dos Brasileiros*; Monteiro, Mondini, Souza & Popkin, *A Transição Nutricional no Brasil*; Calçados Sândalo; IBGE



Calculando com radicais

Você já estudou os números irracionais, ou seja, números cuja representação decimal apresenta infinitas casas decimais, mas não é um número periódico (dízima).

Exemplos de números irracionais:

$\sqrt{2}$, cuja representação decimal é 1,414213562...

$\sqrt{3}$, cuja representação decimal é 1,732050808...

π , cuja representação decimal é 3,1415926...

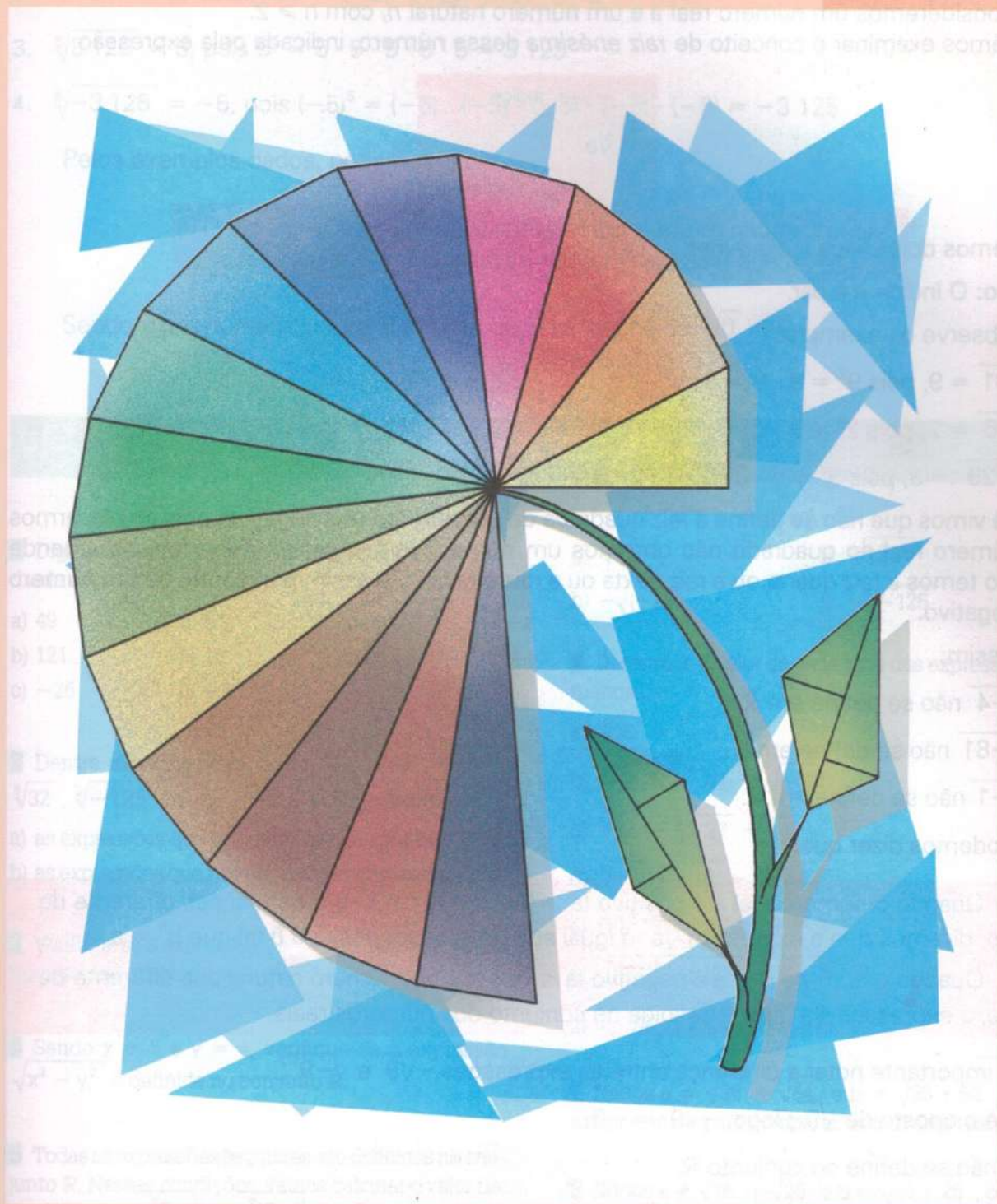
Quando operamos com números reais, e entre eles aparecem números irracionais escritos na forma decimal, os resultados obtidos nem sempre são exatos.

Tomemos, por exemplo, a expressão $6 \cdot \sqrt{2}$.

- ✓ Se considerarmos o número real $\sqrt{2}$, com aproximação de uma casa decimal, o valor da expressão será $6 \cdot 1,4 = 8,4$.
- ✓ Se considerarmos o número real $\sqrt{2}$, com aproximação de duas casas decimais, o valor da expressão será $6 \cdot 1,41 = 8,46$.
- ✓ Se considerarmos o número real $\sqrt{2}$, com aproximação de três casas decimais, o valor da expressão será $6 \cdot 1,414 = 8,484$. E assim por diante...

Considerando os exemplos dados, surge uma pergunta: Não seria possível operar com números reais irracionais e obter resultados exatos?

A resposta é *sim*, se operarmos com os números irracionais escritos na forma de *radical* e não na forma decimal.

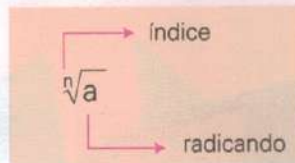


O objetivo desta Unidade é o de estudar regras que nos permitam operar diretamente com números irracionais que podem ser escritos na forma de radical.

4

RAIZ ENÉSIMA DE UM NÚMERO REAL

Consideremos um número real a e um número natural n , com $n \geq 2$.
Vamos examinar o conceito de *raiz enésima* desse número, indicada pela expressão:



Temos dois casos a examinar:

1º caso: O índice n é par.

Observe os exemplos:

- ✓ $\sqrt{81} = 9$, pois $9^2 = 9 \cdot 9 = 81$
- ✓ $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- ✓ $\sqrt[6]{729} = 3$, pois $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

Já vimos que não se define a raiz quadrada de um número real negativo, pois ao elevarmos um número real ao quadrado não obtemos um número real negativo. Esse fato se estende quando temos a raiz quarta ou a raiz sexta ou a raiz oitava, ... e assim por diante, de um número real negativo.

Assim:

- ✓ $\sqrt{-4}$ não se define em \mathbb{R} .
- ✓ $\sqrt[4]{-81}$ não se define em \mathbb{R} .
- ✓ $\sqrt[6]{-1}$ não se define em \mathbb{R} .

Podemos dizer que:

Quando o número real a é positivo ($a > 0$) e n é um número natural par, diferente de zero, dizemos que a expressão $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real positivo b tal que $b^n = a$.

Quando o número real a é negativo ($a < 0$) e n é um número natural par, diferente de zero, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não é definida no conjunto dos números reais.

É importante notar a diferença entre as expressões $-\sqrt{9}$ e $\sqrt{-9}$.

$-\sqrt{9}$ é o oposto de $\sqrt{9}$; logo, $-\sqrt{9} = -3$.

$\sqrt{-9}$ não se define no conjunto \mathbb{R} .

É importante, também, notar a diferença entre as expressões $\sqrt{(-5)^2}$ e $\sqrt{-5^2}$.

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{+25} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{-5^2} = \sqrt{-25}, \text{ que não se define no conjunto } \mathbb{R}.$$

2º caso: O índice n é ímpar.

Observe os exemplos:

1. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

3. $\sqrt[5]{3125} = 5$, pois $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

4. $\sqrt[5]{-3125} = -5$, pois $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -3125$

Pelos exemplos dados, podemos dizer:

Dado um número real a e sendo n um número natural ímpar, a expressão $\sqrt[n]{a}$ é um único número real b tal que $b^n = a$.

Se n um número natural diferente de zero, define-se: $\sqrt[n]{0} = 0$.

FIXAÇÃO

1 Diga se é definida ou não no conjunto \mathbb{R} a raiz quadrada de:

- a) 49 d) 64 g) 400
b) 121 e) 10 h) -2
c) -25 f) -9

2 Dentre as expressões $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[10]{1}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[7]{-1}$ e $\sqrt[8]{256}$, identifique:

- a) as expressões que são definidas no conjunto \mathbb{R} .
b) as expressões que não são definidas no conjunto \mathbb{R} .

3 Verifique se a expressão $\sqrt{b^2 - 4ac}$ representa um número real quando $a = 10$, $b = -1$ e $c = -3$.

4 Sendo $x = 5$ e $y = 4$, verifique se a expressão $\sqrt{x^2 - y^2}$ é definida no conjunto \mathbb{R} .

5 Todas as expressões seguintes são definidas no conjunto \mathbb{R} . Nessas condições, vamos calcular o valor de:

- a) $\sqrt{25}$ d) $\sqrt{0,01}$
b) $\sqrt{(-6)^2}$ e) $-\sqrt[4]{81}$
c) $\sqrt[5]{-32}$ f) $-\sqrt[3]{-8}$

- g) $\sqrt[6]{64}$ i) $\sqrt{121}$
h) $-\sqrt{(-2)^2}$ j) $-\sqrt[3]{-125}$

6 Determine o valor de cada uma das expressões numéricas:

- a) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{-8}$
b) $\sqrt[3]{-125} - \sqrt[4]{1} + \sqrt{(-3)^2}$
c) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt[6]{1}$
d) $\sqrt[7]{-1} - \sqrt{16} - \sqrt[3]{-64}$
e) $(\sqrt[5]{2^3 - 3^2}) : (\sqrt{6^2 + 8^2})$
f) $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} - \sqrt[3]{-5^2 + 17}$
g) $6 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt[5]{-243}$

7 Dados $a = \sqrt{36} + \sqrt{64}$ e $b = \sqrt{36 + 64}$, use os sinais = ou \neq para comparar os números reais a e b .

8 Dados $a = \sqrt{16} + \sqrt{25}$ e $b = \sqrt{16 + 25}$, compare os números a e b usando os sinais = ou \neq .

9 Sendo x um número real positivo e y um número real positivo, simplifique a expressão $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$.



RADICAL ARITMÉTICO E SUAS PROPRIEDADES

Toda expressão matemática da forma $\sqrt[n]{a}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, recebe o nome de **radical aritmético**.

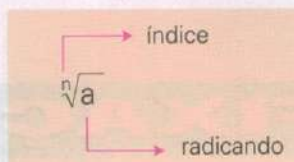
Observe:

$$\sqrt{5} \longrightarrow \text{lê-se: raiz quadrada de cinco}$$

$$\sqrt[3]{10} \longrightarrow \text{lê-se: raiz cúbica de dez}$$

$$\sqrt[4]{\frac{2}{3}} \longrightarrow \text{lê-se: raiz quarta de dois terços}$$

Como já vimos, em todo radical devemos destacar:



Assim:

No radical $\sqrt{5}$, o *índice* é 2 e o *radicando* é 5.

No radical $\sqrt[3]{10}$, o *índice* é 3 e o *radicando* é 10.

Propriedades

Os radicais aritméticos apresentam propriedades importantes não só para o estudo dos radicais como também para estudos futuros de outros temas em Matemática.

1ª propriedade

Observe:

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{e} \quad 32 = 2^5$$

Então:

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{e} \quad 81 = 3^4$$

Então:

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

Em geral, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Veja os exemplos:

1. $\sqrt{7^2} = 7$

2. $\sqrt[3]{10^3} = 10$

3. $\sqrt[5]{(x+3)^5} = x+3$, com $x \in \mathbb{R}_+$

2ª propriedade

Consideremos as expressões $\sqrt[8]{10^8}$ e $\sqrt{10^2}$.
Usando a primeira propriedade, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[8]{10^8} = 10 \\ \sqrt{10^2} = 10 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Comparando, temos } \sqrt[8]{10^8} = \sqrt{10^2}.$$

Veja o que fizemos:

$$\sqrt[8]{10^8} = \sqrt[8 \cdot 4]{10^{8 \cdot 4}} = \sqrt{10^2}$$

Em geral, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \text{ com } p \neq 0 \text{ e } p \text{ divisor comum de } m \text{ e } n.$$

Essa propriedade nos auxilia na simplificação de um radical do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, quando existe um divisor comum para os números n e m .

Veja alguns exemplos de simplificação:

$$1. \sqrt[6]{10^4} = \sqrt[6 \cdot 2]{10^{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{10^2}$$

$$2. \sqrt[20]{2^5} = \sqrt[20 \cdot 5]{2^{5 \cdot 5}} = \sqrt[4]{2}$$

$$3. \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12 \cdot 6]{2^{6 \cdot 6}} = \sqrt{2}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{64 = 2^6}$

$$4. \sqrt[25]{(xy)^{10}} = \sqrt[25 \cdot 5]{(xy)^{10 \cdot 5}} = \sqrt[5]{(xy)^2}$$

3ª propriedade

Observe as expressões $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ e $\sqrt[6]{64}$.
Calculando, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \sqrt[6]{64} = 2 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Comparando, temos } \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}.$$

Veja o que fizemos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64}$$

Em geral, podemos escrever:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > 1 \text{ e } n > 1$$

Veja os exemplos:

$$1. \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2} = \sqrt[15]{2}$$

$$2. \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[2 \cdot 2]{10} = \sqrt[4]{10}$$

4ª propriedade

Consideremos as expressões $\sqrt{4 \cdot 25}$ e $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$.
Calculando, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Comparando, temos } \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}.$$

Em geral, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Veja os exemplos:

- $\sqrt{3 \cdot 11} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$
- $\sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$
- $\sqrt[3]{4xy} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, com $x, y \in \mathbb{R}_+$

5ª propriedade

Consideremos as expressões: $\sqrt{\frac{25}{9}}$ e $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$.

Calculando, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \\ \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Comparando, temos } \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}.$$

Em geral, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Veja os exemplos:

- $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$
- $\sqrt[5]{\frac{a}{5}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{5}}$, com $a \in \mathbb{R}_+$

FIXAÇÃO

1 Dê o valor de cada uma das expressões:

a) $\sqrt{10^2}$

e) $\sqrt[5]{(2x)^6}$

b) $\sqrt[5]{3^5}$

f) $\sqrt[3]{(2 \cdot 5)^7}$

c) $\sqrt[3]{2^9}$

g) $\sqrt{(5a^2)^2}$

d) $\sqrt[3]{7^3}$

h) $\sqrt[4]{(x^2y)^4}$

2 Decomponha o radicando em fatores primos; a seguir, usando a propriedade dos radicais aritméticos, dê o valor de cada uma das expressões:

a) $\sqrt{49}$

d) $\sqrt[10]{1024}$

b) $\sqrt[6]{729}$

e) $\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[4]{625}$

f) $\sqrt[3]{343}$

3 Dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, diferente de zero, simplifique os radicais:

- a) $\sqrt[15]{2^5}$ f) $\sqrt[20]{a^{12}}$
 b) $\sqrt[14]{3^7}$ g) $\sqrt[8]{y^4}$
 c) $\sqrt[18]{10^4}$ h) $\sqrt[2]{6^{14}}$
 d) $\sqrt[9]{x^6}$ i) $\sqrt[18]{(xy)^6}$
 e) $\sqrt[10]{5^8}$ j) $\sqrt[24]{a^8}$

4 Determine o valor do número x em cada uma das igualdades:

- a) $\sqrt[14]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$ c) $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt{5^x}$
 b) $\sqrt[15]{10^5} = \sqrt[3]{10^x}$ d) $\sqrt[10]{6^x} = \sqrt[5]{6}$

5 Decomponha o radicando em fatores primos e, a seguir, simplifique cada um dos seguintes radicais:

- a) $\sqrt[10]{32}$ d) $\sqrt[8]{16}$
 b) $\sqrt[9]{27}$ e) $\sqrt[8]{64}$
 c) $\sqrt[16]{81}$ f) $\sqrt[12]{1024}$

6 Escreva sob a forma de uma única raiz:

- a) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$
 b) $\sqrt{\sqrt{6}}$ e) $\sqrt[8]{\sqrt{10}}$
 c) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

7 Escreva na forma mais simples possível cada um dos radicais:

- a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}}$ b) $\sqrt{\sqrt[5]{243}}$

8 Sendo x um número real positivo, transforme em uma única raiz:

- a) $\sqrt[4]{\sqrt{x}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}}$
 b) $\sqrt[8]{\sqrt{2x}}$ d) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^5}}$

9 Determine o número real x em cada uma das igualdades:

- a) $\sqrt[9]{\sqrt{10}} = \sqrt[24]{10}$
 b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[15]{3}$
 c) $\sqrt[10]{\sqrt{2}} = \sqrt[20]{2}$

10 Escreva sob a forma de um produto de radicais:

- a) $\sqrt{5 \cdot 7}$ e) $\sqrt[6]{x \cdot y}$
 b) $\sqrt[5]{3 \cdot 13}$ f) $\sqrt{2ab}$
 c) $\sqrt[3]{ax}$ g) $\sqrt[3]{x^2 y}$
 d) $\sqrt[7]{3^2 \cdot 11}$ h) $\sqrt[5]{2a^3 b^2}$

11 Decomponha o radicando em fatores primos e escreva cada expressão na forma de um produto de radicais:

- a) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt[7]{30}$
 b) $\sqrt[6]{21}$ e) $\sqrt[10]{15}$
 c) $\sqrt[9]{35}$ f) $\sqrt[3]{154}$

12 Transforme em um único radical as multiplicações:

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ c) $\sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[8]{13}$
 b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$ d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$

13 Sendo x e y dois números reais positivos, transforme em um único radical cada um dos produtos, simplificando o radical obtido:

- a) $\sqrt[12]{x^5} \cdot \sqrt[12]{x}$
 b) $\sqrt[20]{y^3} \cdot \sqrt[20]{y}$
 c) $\sqrt[15]{x^4 y^2} \cdot \sqrt[15]{xy^3}$
 d) $\sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[9]{x^5}$
 e) $\sqrt[14]{y^3} \cdot \sqrt[14]{y^3} \cdot \sqrt[14]{y}$

14 Transforme em um quociente de radicais cada uma das expressões:

- a) $\sqrt{\frac{11}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{13}{2}}$
 b) $\sqrt[3]{\frac{7}{5}}$ e) $\sqrt[6]{\frac{2}{13}}$
 c) $\sqrt[8]{\frac{3}{11}}$ f) $\sqrt[7]{\frac{4}{5}}$

15 Os números a e b são números reais positivos. Nessas condições, simplifique os radicais $\sqrt[6]{a^3}$ e $\sqrt[12]{b^6}$, calculando a seguir a expressão que representa o produto dos radicais obtidos.

6

SIMPLIFICANDO RADICAIS: EXTRAÇÃO DE FATORES DO RADICANDO

Observe as seguintes expressões:

$$\checkmark \sqrt{5^2 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = 5 \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

Transformando o radical dado em um produto de radicais

Aplicando a propriedade $\sqrt[n]{a^n} = a$

$$\checkmark \sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{2} \cdot 3 \cdot 7 = 21\sqrt[3]{2}$$

Transformando o radical dado em um produto de radicais

$\sqrt[3]{3^3} = 3$ $\sqrt[3]{7^3} = 7$

Desse modo, temos que:

Se um ou mais fatores do radicando têm o *expoente igual ao índice do radical*, esses fatores podem ser extraídos do radicando e escritos como fatores externos (sem o expoente).

Em alguns casos, o expoente do fator é maior que o índice do radical. Procura-se, então, fazer transformações convenientes no radicando, como você pode ver nos seguintes exemplos:

1. $\sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10} = 10\sqrt{10}$
2. $\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$
3. $\sqrt{2^3 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 50\sqrt{2}$

Há situações, porém, em que temos necessidade de fazer a fatoração completa do radicando antes de fazer a extração dos fatores.

Veja alguns exemplos:

1. Simplificar a expressão $\sqrt{75}$.
Fatorando de forma completa o radicando 75, vamos encontrar $3 \cdot 5^2$.

Dai temos:

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{3}$$

2. Simplificar a expressão $\sqrt[3]{162}$.

A fatoração completa do radicando 162 nos dá $2 \cdot 3^4$.

Dai temos:

$$\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{6}$$

3. Os números x e y são números reais positivos. Nessas condições, simplifique a expressão

$$\frac{2}{5} \sqrt{50x^3y}$$

A fatoração completa do radicando 50 nos dá $2 \cdot 5^2$.

Daí temos:

$$\frac{2}{5} \sqrt{50x^3y} = \frac{2}{5} \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y} = \frac{2}{5} \cdot \cancel{5} \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x \cdot y} = 2x\sqrt{2xy}$$

4. Simplifique a expressão $\sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2}$, fatorando o radicando.

$$\sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \sqrt{2 \cdot (a - b)^2} = (a - b)\sqrt{2}$$

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Observação:

Usando essa forma de simplificar um radical, podemos determinar a raiz enésima exata de um número real.

Vamos, então, extrair a raiz quadrada exata do número 2 304.

A fatoração completa do número 2 304 dá $2^8 \cdot 3^2$.

Daí temos:

$$\sqrt{2\,304} = \sqrt{2^8 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$$

Logo, a raiz quadrada exata de 2 304 é 48.

FIXAÇÃO

- 1 Retirando fatores do radicando, vamos simplificar os seguintes radicais:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 11}$

f) $\sqrt[3]{2^4}$

e) $\sqrt{x^9}$

g) $\sqrt[9]{y^{10}}$

b) $\sqrt[5]{2 \cdot 7^6}$

g) $\sqrt{2^7}$

f) $\sqrt[5]{y^{12}}$

h) $\sqrt[10]{x^{13}}$

c) $\sqrt[4]{3^4 \cdot 5}$

h) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3}$

- 3 Vamos simplificar cada um dos seguintes radicais, retirando fatores do radicando:

d) $\sqrt[5]{2 \cdot 3^5 \cdot 5}$

i) $\sqrt[4]{2^8 \cdot 5^9}$

a) $\sqrt{45}$

f) $\sqrt{270}$

e) $\sqrt[3]{3 \cdot 5^3 \cdot 11^3}$

j) $\sqrt[5]{2^{11}}$

b) $\sqrt{300}$

g) $\sqrt[5]{192}$

- 2 Os números x e y são números reais positivos. Nessas condições, simplifique cada um dos radicais, retirando fatores do radicando:

a) $\sqrt{x^5}$

c) $\sqrt{x^2y^3}$

c) $\sqrt{500}$

h) $\sqrt[4]{176}$

b) $\sqrt[3]{y^4}$

d) $\sqrt[5]{x^5y^7}$

d) $\sqrt[3]{54}$

i) $\sqrt{1\,200}$

e) $\sqrt[6]{128}$

j) $\sqrt[3]{375}$

Assim, podemos escrever:

Um fator externo pode ser introduzido como fator no radicando, bastando para isso escrevê-lo com um expoente igual ao índice do radical.

Veja agora:

- ✓ Introduzir no radicando o fator externo da expressão $5\sqrt{3}$.

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

- ✓ Transformar em um só radical a expressão $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}$, sendo $x \geq 0$.

Nesse problema, devemos inicialmente introduzir o fator x no radical mais interno:

$$\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}} = \sqrt[5]{x^3\sqrt{x^3 \cdot x}} = \sqrt[5]{x^3\sqrt{x^4}} = \sqrt[5]{x^4}$$

FIXAÇÃO

1 Nas expressões seguintes, vamos introduzir o fator externo no radicando:

a) $7\sqrt{3}$

d) $5\sqrt{7}$

b) $2\sqrt{5}$

e) $5\sqrt[3]{2}$

c) $10\sqrt{2}$

f) $2\sqrt[6]{10}$

2 Sendo $a \geq 0$ e $b > 0$, introduza o fator externo no radicando:

a) $6\sqrt{a}$

e) $b\sqrt[3]{ab}$

b) $2a\sqrt{b}$

f) $a\sqrt[5]{2a}$

c) $5a\sqrt{a}$

g) $3b\sqrt[4]{ab}$

d) $2ab\sqrt{ab}$

3 Sendo x e y dois números reais positivos, transforme em um só radical as expressões:

a) $\sqrt[6]{x^3\sqrt{x^2}}$

b) $\sqrt{x^5\sqrt{x^2y^3}}$



ADICIONANDO, ALGEBRICAMENTE, DOIS OU MAIS RADICAIS

Consideremos a expressão algébrica inteira $9x + 3x - 15x + 8x - x$. Como todos os termos dessa expressão são semelhantes, podemos reduzir a expressão a um só termo:

$$9x + 3x - 15x + 8x - x = (9 + 3 - 15 + 8 - 1)x = 4x$$

Quando uma expressão contiver radicais semelhantes, vamos proceder da mesma forma, ou seja, podemos reduzi-la a um só termo.

Veja os exemplos:

1. Escrever na forma mais simples possível a expressão $10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

$$10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + \sqrt{3} = (10 + 5 - 11 + 1)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Logo, $5\sqrt{3}$ é a forma mais simples da expressão dada.

2. Qual é o valor da expressão $7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$?

$$7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (7 - 5 - 4 + 2)\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = 0$$

Logo, o valor procurado é 0.

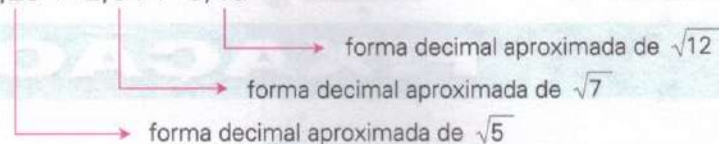
3. Simplificar a expressão $6\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$.

$$6\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7} = 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 1\sqrt{5} + 1\sqrt{7} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

Logo, $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é a forma mais simples de escrever a expressão dada.

Observe que expressões como $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ não podem ser tornadas mais simples, pois:

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} \neq \sqrt{12} \rightarrow 2,23 + 2,64 \neq 3,46$$



O mesmo vai ocorrer com expressões como:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{5} & - & \sqrt{2} & \neq & \sqrt{3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2,23 & - & 1,41 & \neq & 1,73 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & + & \sqrt{3} & \neq & 4\sqrt{3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & + & 1,73 & \neq & 6,92 \end{array}$$

Há expressões que exigem a simplificação dos seus termos antes de se realizar a adição algébrica.

Veja os exemplos:

1. Calcular o valor de $\sqrt{50} + \sqrt{18}$.

Já sabemos que $\sqrt{50} + \sqrt{18} \neq \sqrt{68}$.

Vamos, então, simplificar cada radical com a extração de fatores do radicando:

$$\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Logo, o valor procurado é $8\sqrt{2}$.

2. Escrever na forma mais simples possível a expressão $\sqrt[3]{125x^4y} - \sqrt[3]{27x^4y} + \sqrt[3]{8x^4y}$.

Vamos, inicialmente, simplificar cada radical:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{125x^4y} - \sqrt[3]{27x^4y} + \sqrt[3]{8x^4y} &= \\ &= \sqrt[3]{5^3 \cdot x^3 \cdot x \cdot y} - \sqrt[3]{3^3 \cdot x^3 \cdot x \cdot y} + \sqrt[3]{2^3 \cdot x^3 \cdot x \cdot y} = \\ &= 5x\sqrt[3]{xy} - 3x\sqrt[3]{xy} + 2x\sqrt[3]{xy} = 4x\sqrt[3]{xy} \end{aligned}$$

Logo, a forma mais simples de escrever a expressão dada é $4x\sqrt[3]{xy}$.

3. Simplificar a expressão $\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45}$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45} = \\ & = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 5} = \\ & = 10\sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = \\ & = \underbrace{10\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}_{12\sqrt{2}} + \underbrace{10\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}_{7\sqrt{5}} = 12\sqrt{2} + 7\sqrt{5} \end{aligned}$$

Logo, a forma mais simples da expressão dada é $12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$.

4. Simplificar a fração $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}}$.

$$\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5^2}}{2\sqrt{3 \cdot 7^2}} = \frac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{\cancel{7}\sqrt{3}}{14\cancel{7}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

FIXAÇÃO

1 Escreva V se a igualdade for verdadeira e F se a igualdade for falsa:

a) $\sqrt{7} + \sqrt{3} = \sqrt{10}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

c) $\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$

d) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$

e) $1 + \sqrt{x} + \sqrt{x} = 1 + 2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$)

2 Escreva na forma mais simples possível cada uma das expressões:

a) $2\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$

b) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

c) $\sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10}$

d) $7\sqrt[3]{11} - 4\sqrt[3]{11}$

e) $\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a}$ (com $a \geq 0$)

f) $\sqrt[5]{7} + 3\sqrt[5]{7} - 8\sqrt[5]{7} + 6\sqrt[5]{7}$

g) $3x\sqrt{2} + 9x\sqrt{2} - 6x\sqrt{2}$

h) $2 + 7\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 1$

i) $\sqrt{10} + 10 + \sqrt{10} + 1 - 5\sqrt{10}$

j) $2\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

3 Vamos calcular as somas algébricas (as variáveis representam sempre números reais positivos):

a) $4\sqrt{125} - 3\sqrt{45}$

b) $4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{128}$

c) $\sqrt{16x} - \sqrt{36x} - \sqrt{9x}$

d) $\sqrt{72a^3} + \sqrt{8a^3} - \sqrt{18a^3}$

e) $\sqrt{54} + \sqrt{6} - \sqrt{150} + 2\sqrt{24}$

f) $3a\sqrt{ax^3} - 7x\sqrt{a^3x} + ax\sqrt{4ax}$

g) $\frac{1}{3}x\sqrt{x^2y} - \frac{1}{2}\sqrt{x^4y} - \frac{1}{6}x^2\sqrt{y}$

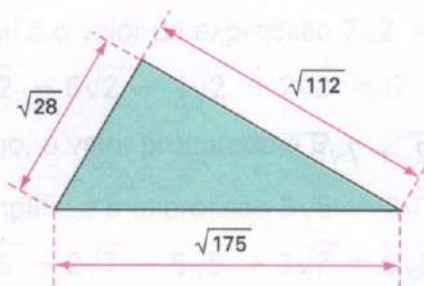
h) $2s\sqrt{\frac{t}{s}} - s\sqrt{\frac{t}{9s}}$

i) $\frac{1}{4}\sqrt{48} + \frac{1}{2}\sqrt{243} - \frac{1}{6}\sqrt{12}$

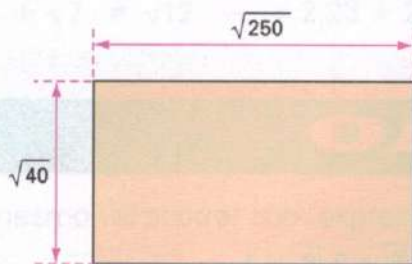
4 Qual é o número real x expresso por

$$\sqrt{18} + 3\sqrt{50} + \sqrt{98} ?$$

5 Determine o perímetro do triângulo onde estão assinaladas as medidas dos lados.



6 As medidas do retângulo são dadas em centímetros. Determine o perímetro desse retângulo.



7 Os lados de um triângulo medem $4\sqrt{96}$ cm, $5\sqrt{216}$ cm e $4\sqrt{486}$ cm. Qual é o perímetro desse triângulo?

8 Escreva na forma mais simples possível cada uma das expressões:

a) $\sqrt{50} - \sqrt{243} - \sqrt{162} + \sqrt{300}$

b) $4\sqrt{3} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{48} + \sqrt{200}$

9 Considerando que $\sqrt{5} = 2,23$ e $\sqrt{2} = 1,41$ (aproximação com duas casas decimais), dê o valor do número real x na forma decimal, sendo $x = \sqrt{5000} + \sqrt{500} + \sqrt{50} + \sqrt{5}$.

10 Simplificando o numerador, escreva na forma irredutível a fração $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80} - 2\sqrt{45}}{8}$.

11 Dados $a = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ e $b = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, onde x e y são números positivos, determine o valor de:

a) $\frac{a+b}{2}$

b) $a-b$

12 Qual é a forma simplificada da fração

$$\frac{\sqrt{28} + \sqrt{175}}{\sqrt{63}} ?$$

13 São dados os números reais a , b e c tais que $a = 1 - \sqrt{8}$, $b = 1 + \sqrt{50}$ e $c = 2 - \sqrt{98}$. Nessas condições, determine o valor de:

a) $a + b + c$

b) $a - b - c$

14 Qual é a forma mais simples de escrever a fração

$$\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{200}} ?$$



MULTIPLICANDO EXPRESSÕES COM RADICAIS DE MESMO ÍNDICE

Recordando as propriedades dos radicais aritméticos, uma delas nos mostra que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Usando a propriedade simétrica das igualdades, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \text{ com } a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Dessa maneira, podemos fazer:

$$\checkmark \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14}$$

$$\checkmark \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{5 \cdot 6} = \sqrt[3]{30}$$

$$\checkmark \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{xy} = \sqrt[4]{x \cdot xy} = \sqrt[4]{x^2y}, \text{ com } x \geq 0, y \geq 0$$

$$\checkmark \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{5 \cdot 10} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\checkmark 2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6 \cdot 2} = 10\sqrt{12} = 10\sqrt{2^2 \cdot 3} = 10 \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

$$\checkmark \sqrt[5]{a^3b} \cdot \sqrt[5]{a^2b} = \sqrt[5]{a^3b \cdot a^2b} = \sqrt[5]{a^5b^2} = a\sqrt[5]{b^2}$$

Dai podemos escrever:

O produto de dois ou mais radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice dos fatores e cujo radicando é igual ao produto dos radicandos dos fatores.

Em alguns casos, temos que usar a técnica da multiplicação de polinômios, ou seja:

$$\checkmark 2a \cdot (a - 5b) = 2a \cdot a - 2a \cdot 5b = 2a^2 - 10ab$$

$$\begin{aligned} \checkmark (3x + 1)(2x - 5) &= \underbrace{3x \cdot 2x} - \underbrace{3x \cdot 5} + \underbrace{1 \cdot 2x} - \underbrace{1 \cdot 5} = \\ &= 6x^2 - 15x + 2x - 5 = \\ &= 6x^2 - 13x - 5 \end{aligned}$$

Veja, então, as situações em que usamos essa técnica:

1ª Vamos calcular $\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{5})$.

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{5}) &= \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \\ &= 3\sqrt{10} - \sqrt{5^2} = 3\sqrt{10} - 5 \end{aligned}$$

2ª Vamos calcular $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) &= \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = \\ &= \sqrt{3^2} - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 10\sqrt{2^2} = \\ &= 3 - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 20 = \\ &= \underbrace{3 - 20}_{-17} - \underbrace{5\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}_{3\sqrt{6}} = -17 - 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

3ª Vamos calcular $(2 - \sqrt{7}) \cdot (5 + \sqrt{7})$.

$$\begin{aligned}
 & (2 - \sqrt{7}) \cdot (5 + \sqrt{7}) = \\
 & = 2 \cdot 5 + 2 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot 5 - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \\
 & = 10 + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - \sqrt{7^2} = \\
 & = 10 + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 7 = \\
 & = \underbrace{10 - 7}_3 + \underbrace{2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}}_{-3\sqrt{7}} = 3 - 3\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

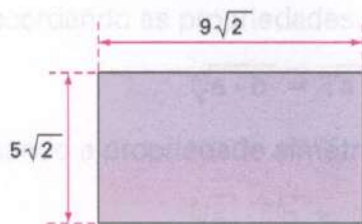
FIXAÇÃO

1 Vamos efetuar as multiplicações (todas as variáveis representam números reais positivos):

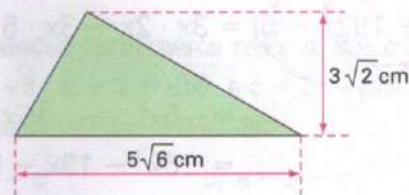
- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$
- b) $\sqrt[5]{2a} \cdot \sqrt[5]{3a}$
- c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$
- d) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- e) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$
- f) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{10}$
- g) $\sqrt{st} \cdot \sqrt{t}$
- h) $2\sqrt{21} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$
- i) $\sqrt[5]{m^4y} \cdot \sqrt[5]{my^6}$
- j) $\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{x}}$
- l) $\sqrt{\frac{2a}{n}} \cdot \sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2ax}{n}}$

2 No retângulo seguinte, as medidas indicadas são dadas em centímetros. Determine:

- a) o perímetro do retângulo.
- b) a área do retângulo.



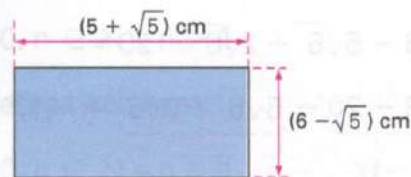
3 A área de um triângulo é dada pela metade do produto da medida da base pela medida da altura. Nessas condições, calcule, na forma decimal, a área do triângulo da figura, adotando que $\sqrt{3} = 1,73$.



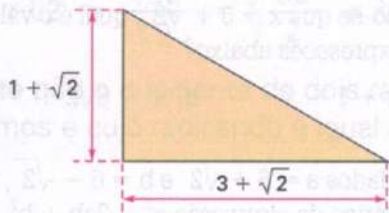
4 Vamos calcular:

- a) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})$
- b) $\sqrt{7} (\sqrt{7} + \sqrt{2})$
- c) $\sqrt{10} (5\sqrt{2} - 3\sqrt{10})$
- d) $\sqrt{5} \cdot (7 + \sqrt{5})$
- e) $\sqrt{15} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})$
- f) $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$
- g) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$
- h) $(3\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 3)$
- i) $(4 + \sqrt{13})(4 - \sqrt{13})$

5 Determine o perímetro e a área do retângulo da figura abaixo.



6 A área de um triângulo retângulo é dada pela metade do produto das medidas dos dois catetos. Qual é a área do triângulo retângulo da figura?



7 Qual é o número real x expresso por $\sqrt{6}(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$?

8 Usando a multiplicação, vamos calcular:

- a) $(1 + \sqrt{5})^2$ c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$
 b) $(2 - \sqrt{3})^2$ d) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$

9 Sendo $a = 1 - \sqrt{3}$ e $b = \sqrt{3} - 1$, determine o produto ab .

10 Efetue a multiplicação $\sqrt{7 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{5}}$, simplificando o resultado.

11 Escreva na forma mais simples possível a fração $\frac{(2 + \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}$.

12 Escreva na forma mais simples possível a expressão $(-5 + 2\sqrt{7})(4 + \sqrt{7}) - 3\sqrt{7}$.

13 Qual é o número real x expresso por $\sqrt{10 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{10}}$?

14 A propriedade fundamental das proporções nos diz que o *produto dos extremos é igual ao produto dos meios*. Usando essa propriedade, determine o valor de x nas proporções:

- a) $\frac{x}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{24}}{2}$
 b) $\frac{x}{\sqrt{13 + \sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{10}}{9}$

Recordando os produtos notáveis

Você deve estar lembrado dos produtos notáveis, estudados na 7ª série:

- ❖ Quadrado da soma de dois termos: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- ❖ Quadrado da diferença de dois termos: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- ❖ Produto da soma pela diferença de dois termos: $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

Nas expressões que envolvem radicais, também podemos aplicar as regras que regem os produtos notáveis. Veja os exemplos:

$$1. (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 =$$

quadrado da soma de dois termos $= 5 + 2\sqrt{15} + 3 =$
 $= 5 + 3 + 2\sqrt{15} = 8 + 2\sqrt{15}$

$$2. (7 - \sqrt{10})^2 = (7)^2 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{10} + (\sqrt{10})^2 =$$

quadrado da diferença de dois termos $= 49 - 14\sqrt{10} + 10 =$
 $= 49 + 10 - 14\sqrt{10} =$
 $= 59 - 14\sqrt{10}$

$$3. (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 =$$

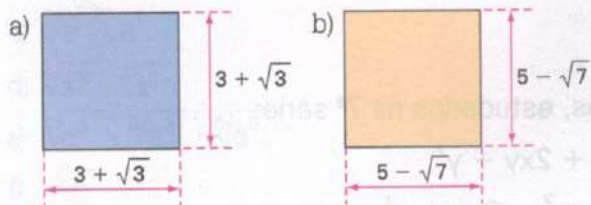
produto da soma pela diferença de dois termos $= 5 - 3 = 2$

FIXAÇÃO

1 Aplicando a regra dos produtos notáveis, calcule:

- $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
- $(1 - \sqrt{7})^2$
- $(4\sqrt{2} + 5)(4\sqrt{2} - 5)$
- $(2 + \sqrt{10})^2$
- $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$
- $(3\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
- $(7 + \sqrt{19})(7 - \sqrt{19})$
- $(-3\sqrt{5} + 1)(-3\sqrt{5} - 1)$
- $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{5})^2$

2 Você sabe que a área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do seu lado. Nessas condições, vamos calcular a área de cada um dos seguintes quadrados:



3 Sabendo-se que $x = 3 + \sqrt{2}$, qual é o valor numérico das expressões abaixo?

- $x^2 - 2x + 1$
- $x^2 - 6\sqrt{2}$

4 Sendo dados $a = 6 + \sqrt{2}$ e $b = 6 - \sqrt{2}$, calcule o valor numérico da expressão $a^2 - 2ab + b^2$.

5 Verifique se $x = 2 + \sqrt{2}$ torna verdadeira a igualdade $x^2 - 4x + 2 = 0$.

6 Escreva na forma mais simples possível a expressão $(3 + 2\sqrt{5})^2 - \sqrt{20} - 18$.

7 Vamos simplificar a fração

$$\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}$$

8 Qual é a forma mais simples de escrever a expressão $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$?

9 Qual é a expressão algébrica que representa o quadrado da expressão $\sqrt{5x} + \sqrt{2x}$ para $x > 0$?

10

DIVIDINDO EXPRESSÕES COM RADICAIS

Por uma das propriedades dos radicais, sabemos que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \geq 0, b > 0$$

Pela propriedade simétrica das igualdades, podemos escrever:

$$\text{Se } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ então } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ com } a \geq 0, b > 0.$$

Observe os exemplos:

$$1. \sqrt{40} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{40}{2}} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$2. \sqrt{6} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

$$3. \sqrt[3]{96} : \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{96}{2}} = \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{6}$$

Note que o quociente de dois radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice dos termos e cujo radicando é igual ao quociente dos radicandos dos termos.

FIXAÇÃO

1 Vamos efetuar as divisões:

a) $\sqrt{10} : \sqrt{5}$

e) $\sqrt{200} : \sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{3}}$

f) $\frac{\sqrt[7]{x^{11}}}{\sqrt[7]{x^3}}$

b) $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4}$

f) $\sqrt{240} : \sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}}$

g) $\frac{\sqrt[5]{192}}{\sqrt[5]{3}}$

c) $\sqrt{168} : \sqrt{2}$

g) $\sqrt{90} : \sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{x^7} : \sqrt[3]{x^3}, x > 0$

h) $\sqrt[4]{a^5 b^2} : \sqrt[4]{ab}, ab \neq 0$

e) $\frac{\sqrt[3]{81x^2}}{\sqrt[3]{3x}}, x \neq 0$

h) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

2 Escreva as expressões seguintes na forma $\sqrt{\frac{a}{b}}$; a seguir, simplifique cada uma delas:

a) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

3 Simplifique a expressão $\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{6} + 2} : \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3}}$.



MULTIPLICANDO E DIVIDINDO EXPRESSÕES COM RADICAIS DE ÍNDICES DIFERENTES

Redução de dois ou mais radicais ao mesmo índice

1ª Vamos considerar os radicais $\sqrt[3]{7^2}$ e $\sqrt[4]{6^3}$.

Podemos reduzir esses radicais a um mesmo índice, que deve ser *múltiplo comum* de 3 e 4. Portanto, esse índice poderá ser 12, 24, 36, 48, 60, ...; para facilitar nosso trabalho, vamos escolher o menor deles: 12.

Agora, observe:

$$\begin{array}{ccc} & \sqrt[3]{7^2} & \\ \times 4 \swarrow & & \searrow \times 4 \\ & \sqrt[12]{7^8} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \sqrt[4]{6^3} & \\ \times 3 \swarrow & & \searrow \times 3 \\ & \sqrt[12]{6^9} & \end{array}$$

Então:

$$\underbrace{\sqrt[3]{7^2}, \sqrt[4]{6^3}}_{\text{radicais com índices diferentes}} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[12]{7^8}, \sqrt[12]{6^9}}_{\text{radicais equivalentes com o mesmo índice}}$$

- 2ª** Consideremos, agora, os radicais $\sqrt[8]{a^5}$ e $\sqrt[6]{a^3}$, com $a \geq 0$. Inicialmente, vamos reduzir esses radicais a um mesmo índice, que deverá ser múltiplo comum de 8 e 6: 24, 48, 72, 96, 120, ... Por facilidade, vamos escolher o menor deles: 24. Daí teremos:

$$\begin{array}{ccc} \times 3 & & \times 4 \\ \begin{array}{c} \textcircled{\text{8}\sqrt[8]{a^5}} \\ \downarrow \\ \textcircled{\text{24}\sqrt[24]{a^{15}}} \end{array} & & \begin{array}{c} \textcircled{\text{6}\sqrt[6]{a^3}} \\ \downarrow \\ \textcircled{\text{24}\sqrt[24]{a^{12}}} \end{array} \\ \times 3 & & \times 4 \end{array}$$

Então:

$$\underbrace{\sqrt[8]{a^5}, \sqrt[6]{a^3}}_{\text{radicais com índices diferentes}} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[24]{a^{15}}, \sqrt[24]{a^{12}}}_{\text{radicais equivalentes com o mesmo índice}}$$

Multiplicação e divisão de radicais com índices diferentes

Com a redução de dois ou mais radicais ao mesmo índice, será possível efetuar a multiplicação e a divisão de radicais quando estes apresentam índices diferentes.

Veja os exemplos:

1. Vamos calcular $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[10]{2^3}$.

Como os radicais têm índices diferentes, vamos reduzi-los ao mesmo índice e, a seguir, efetuar a multiplicação:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[20]{2^5} \cdot \sqrt[20]{2^6} = \sqrt[20]{2^5 \cdot 2^6} = \sqrt[20]{2^{11}}$$

2. Vamos calcular $\sqrt{10} : \sqrt[3]{10}$.

Inicialmente, vamos reduzir os dois radicais ao mesmo índice e, a seguir, efetuar a divisão:

$$\sqrt{10} : \sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{10^3} : \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[6]{10^3 : 10^2} = \sqrt[6]{10}$$

FIXAÇÃO

- 1** Vamos reduzir ao mesmo índice os seguintes radicais:

a) $\sqrt[5]{3^2}, \sqrt[4]{3^3}$ c) $\sqrt[10]{3^2}, \sqrt[8]{2}, \sqrt[15]{2^4}$
 b) $\sqrt[4]{2^5}, \sqrt[3]{2^9}$ d) $\sqrt[5]{3^4}, \sqrt[10]{6}, \sqrt{2}$

- 2** Reduza os radicais ao mesmo índice; a seguir, usando os sinais $>$ ou $<$, compare cada par de radicais:

a) $\sqrt[10]{2}$ e $\sqrt[15]{2^2}$ c) $\sqrt[8]{2^5}$ e $\sqrt[7]{2^7}$
 b) $\sqrt[12]{3^{10}}$ e $\sqrt[18]{3^{11}}$ d) $\sqrt[8]{2^3}$ e $\sqrt[5]{2^3}$

3 Vamos efetuar as operações indicadas (simplifique o resultado quando for possível):

a) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[5]{10}$

e) $\sqrt[5]{5^2} : \sqrt[10]{5^3}$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[5]{7}$

f) $\sqrt[5]{7^5} : \sqrt[3]{7^2}$

c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}$

g) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[10]{2^7}$

d) $\sqrt{2} : \sqrt[20]{2^7}$

h) $\sqrt[5]{6^5} : \sqrt[10]{6^2}$

4 Considerando os radicandos números reais positivos, reduza ao mesmo índice os radicais:

a) $\sqrt{(x+y)}, \sqrt[5]{(x+y)}$

b) $\sqrt[5]{(a+b)^3}, \sqrt[10]{(a-b)^7}$

5 Sabendo que a e b são dois números reais positivos, escreva a expressão literal que representa o resultado de:

a) $\sqrt[5]{a^5 b^3} : \sqrt{ab^2}$

b) $\sqrt[5]{a^7 b^6} : \sqrt[3]{a^3 b^2}$



POTENCIAÇÃO DE UMA EXPRESSÃO COM RADICAIS

Usando a definição de potência e sendo $(x + y) > 0$, vamos calcular:

✓ $(\sqrt{10})^2 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10^2} = 10$

✓ $(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = 7\sqrt{7}$

✓ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^3}$

✓ $(\sqrt{x+y})^2 = \sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y} = \sqrt{(x+y)^2} = x+y$

Em geral, podemos escrever: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

Daí temos:

✓ $(\sqrt{3})^5 = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$

✓ $(\sqrt[3]{10})^4 = \sqrt[3]{10^4} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 10} = 10\sqrt[3]{10}$

FIXAÇÃO

1 Vamos calcular:

a) $(\sqrt{17})^2$

c) $(6\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt[3]{2})^4$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2$

2 Sabendo que a e b são números reais positivos, escreva a expressão algébrica mais simples que representa a expressão:

a) $(a\sqrt{b})^2$

c) $(ab\sqrt[3]{b})^4$

b) $(b\sqrt[3]{a})^4$

d) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^2$

3 Determine o valor numérico da expressão

$4\sqrt{8} - (\sqrt{2})^3$.

4 Sendo $x = 2\sqrt{3}$ e $y = 3\sqrt{2}$, calcule o valor de $x^2 \cdot y^2$.

5 Sabendo que $a = \sqrt{10}$ e $b = 2\sqrt{5}$, calcule o valor de $a^2 - b^2 + 10$.

Resolução de equações irracionais

Denomina-se *equação irracional* toda equação que apresenta a incógnita no radicando.

Assim, são exemplos de equações irracionais: $\sqrt{2x} = 10$, $\sqrt{x+1} = 6$ e $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+7}$.

A resolução de uma equação irracional é feita elevando-se os dois membros da equação a uma potência conveniente, a fim de transformá-la numa equação racional, que já sabemos resolver.

Vejamos alguns exemplos.

1. Resolver a equação $\sqrt{2x} = 6$, sendo $x \geq 0$.

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$\sqrt{2x} = 6$$

$$(\sqrt{2x})^2 = 6^2$$

$$2x = 36$$

$$x = \frac{36}{2} = 18$$

$$\text{Logo: } S = \{18\}.$$

2. Vamos resolver a equação $\sqrt{7x+18} = 9$, com $7x+18 \geq 0$.

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{7x+18})^2 = (9)^2$$

$$\sqrt{(7x+18)^2} = 81$$

$$7x+18 = 81$$

$$7x = 81 - 18$$

$$7x = 63$$

$$x = \frac{63}{7} = 9$$

$$\text{Logo: } S = \{9\}.$$

3. Vamos resolver a equação $\sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x+7}$.

Elevando os dois membros da equação ao cubo, temos:

$$(\sqrt[3]{3x+1})^3 = (\sqrt[3]{x+7})^3$$

$$\sqrt[3]{(3x+1)^3} = \sqrt[3]{(x+7)^3}$$

$$3x+1 = x+7$$

$$3x = x+7-1$$

$$3x = x+6$$

$$3x-x=6$$

$$2x=6$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Logo: } S = \{3\}.$$



FIXAÇÃO

1 Vamos resolver cada uma das seguintes equações:

- a) $\sqrt{3x} = 6$
- b) $\sqrt{3x-2} = 5$
- c) $\sqrt{2x+1} = -3$
- d) $2\sqrt{x} = 4$
- e) $3\sqrt{x} = 12$
- f) $\sqrt{x^2+3x-9} = x$
- g) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{x+8}$
- h) $3\sqrt{2x} = 6$

2 Determine o conjunto solução da equação

$$\sqrt{x^2+2} = x+1.$$

3 Qual é o valor de x na equação

$$\sqrt{5x+2} = \sqrt{-6+9x}?$$

4 Determine o número real x para que se tenha

$$\sqrt{x-5} = \frac{3}{\sqrt{x-5}}, \text{ com } x \neq 5.$$



RACIONALIZANDO DENOMINADORES DE UMA EXPRESSÃO FRACIONÁRIA

Consideremos, inicialmente, a expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Considerando $\sqrt{3} = 1,732$ (aproximação com três casas decimais), vamos encontrar o valor decimal da expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1,732} = 0,577$$

10000	1732
13400	0,577
12760	
0636	

Voltemos a considerar a expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Usando a propriedade da equivalência de frações, vamos multiplicar o numerador e o denominador dessa fração pelo mesmo número $\sqrt{3}$, calculando, a seguir, o valor decimal do resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$$

1,732	3
23	0,577
22	
1	

Como você pôde observar, as expressões $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$ são *equivalentes* e obtivemos o mesmo resultado na forma decimal: 0,577. Porém, você deve ter notado que foi muito mais simples dividir $\sqrt{3}$ por 3 do que dividir 1 por $\sqrt{3}$.

Por esse motivo, usamos transformar a expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$ em $\frac{\sqrt{3}}{3}$, na qual o denominador é um número racional.

A essa transformação ou a uma transformação desse tipo damos o nome de *racionalização de denominadores*.

Veremos, então, alguns casos simples de racionalização de denominadores, que, como já sabemos, consiste em transformar um denominador expresso por um número irracional em um denominador expresso por um número racional.

1. Vamos tornar racional o denominador da expressão $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Se multiplicarmos o denominador $\sqrt{7}$ pelo número $\sqrt{7}$, teremos:

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7$$

Por esse motivo, dizemos que $\sqrt{7}$ é o *fator racionalizante* da expressão $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Conhecido o fator racionalizante, vamos, então, multiplicar o numerador e o denominador da expressão dada pelo fator racionalizante e teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

expressão equivalente com denominador racional

2. Racionalizar o denominador da expressão $\frac{5}{3}\sqrt{10}$.

Se multiplicarmos $3\sqrt{10}$ por $\sqrt{10}$, teremos $3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{10^2} = 3 \cdot 10 = 30$.

Então, dizemos que $\sqrt{10}$ é o fator racionalizante da expressão $\frac{5}{3\sqrt{10}}$.

$$\frac{5}{3\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{10^2}} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot 10} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

expressão equivalente com denominador racional

3. Escrever na forma mais simples a expressão $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{aplicando uma das propriedades dos radicais}$$

Considerando a expressão $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, o fator racionalizante é $\sqrt{3}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4. Vamos tornar racional o denominador da expressão $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$, com $a > 0$.

Quando o índice do radical existente no denominador for diferente de 2, devemos ter um pouco mais de cuidado para achar o fator racionalizante. Na expressão $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$, o fator racionalizante é dado por $\sqrt[5]{a^{5-2}} = \sqrt[5]{a^3}$.

Dai teremos:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2 \cdot a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$$

expressão equivalente com denominador racional

5. Racionalizar o denominador da expressão $\frac{21}{\sqrt[7]{3^5}}$.

Nessa expressão, o fator racionalizante é $\sqrt[7]{3^{7-5}} = \sqrt[7]{3^2}$.

Dai teremos:

$$\frac{21}{\sqrt[7]{3^5}} = \frac{21 \cdot \sqrt[7]{3^2}}{\sqrt[7]{3^5} \cdot \sqrt[7]{3^2}} = \frac{21\sqrt[7]{3^2}}{\sqrt[7]{3^5 \cdot 3^2}} = \frac{21\sqrt[7]{3^2}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{21\sqrt[7]{3^2}}{3} = 7\sqrt[7]{3^2}$$

6. Vamos tornar racional o denominador da expressão $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$.

Lembrando da regra dos produtos notáveis, vamos observar que:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

produto da soma pela diferença de dois termos

expressão racional

Então, você nota que o fator racionalizante da expressão dada é $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

expressão equivalente com denominador racional

7. Racionalizar o denominador da expressão $\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$.

Considerando o exemplo anterior e observando a expressão dada, podemos dizer que o fator racionalizante dessa expressão é $(2 + \sqrt{2})$.

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \frac{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2^2}}{(2)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2}{4 - 2} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2(3 + 2\sqrt{2})}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

colocando o fator 2 em evidência no numerador e simplificando, pelo cancelamento

expressão equivalente com denominador racional

FIXAÇÃO

1 Vamos tornar racional o denominador de cada uma das seguintes expressões:

a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

f) $\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

g) $\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

h) $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

i) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

e) $\frac{20}{3\sqrt{10}}$

j) $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

2 Sabendo que x e y são números reais positivos, racionalize o denominador de cada uma das seguintes expressões:

a) $\frac{x}{\sqrt{x}}$

c) $\frac{xy}{5\sqrt{x}}$

b) $\frac{x}{2\sqrt{y}}$

d) $\frac{x\sqrt{y}}{y\sqrt{x}}$

3 Escreva na forma mais simples possível cada uma das expressões:

a) $\sqrt{\frac{2}{11}}$

d) $\sqrt{\frac{3}{8}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

e) $\sqrt{0,9}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

f) $\sqrt{0,3}$

4 São dados: $\sqrt{6} = 2,449$; $\sqrt{2} = 1,414$ e $\sqrt{10} = 3,162$. Nessas condições, calcule o valor decimal de cada uma das seguintes expressões:

a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

5 Racionalize o denominador de cada uma das seguintes expressões:

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{6^3}}$

d) $\frac{6}{\sqrt[10]{3^5}}$

b) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$

e) $\frac{4}{\sqrt[4]{8^3}}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2^7}}$

f) $\frac{20}{\sqrt[10]{10^8}}$

6 Vamos racionalizar o denominador de cada uma das seguintes expressões:

a) $\frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

d) $\frac{11}{2\sqrt{3} - 1}$

g) $\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

h) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{13} + \sqrt{7}}$

7 Escreva na forma mais simples a expressão

c) $\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$

f) $\frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{1} - \sqrt{7}}$

$\frac{2 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt{2}$.

14

SIMPLIFICANDO EXPRESSÕES COM RADICAIS

Vamos usar as operações com radicais que já aprendemos para simplificar algumas expressões.

1. Simplificar a expressão $\frac{1}{3 + \sqrt{7}} + \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 + \sqrt{7}} + \frac{1}{3 - \sqrt{7}} &= \\ &= \frac{1(3 - \sqrt{7}) + 1(3 + \sqrt{7})}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{7} + 3 + \sqrt{7}}{(3)^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6}{9 - 7} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

2. Sendo $x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ e $y = \frac{4}{\sqrt{2}}$, calcular o valor de $x - y$.

$$\begin{aligned} x - y &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{18} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{36} - 4}{\sqrt{2}} = \frac{6 - 4}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Simplificar a expressão $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}) - \sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{2}^2 - \cancel{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-2}{1-\sqrt{2}} = \\ &= \frac{-2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-1} = 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

FIXAÇÃO

1 Qual é o número inteiro que se obtém quando simplificamos a expressão $\frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}$?

2 Qual é o resultado da multiplicação $\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$?

3 Qual é a forma mais simples de escrever a expressão $10\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2)$?

4 Calcule a soma $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

5 Simplifique a expressão

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

6 Qual é a forma mais simples de escrever

$$\sqrt{3} + \frac{2}{2-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}?$$

15

POTÊNCIAS COM EXPOENTE RACIONAL.

Nos capítulos anteriores, já estudamos expressões da forma 10^2 , 6^{-1} e 2^0 , que são potências com expoente inteiro e cujo significado já conhecemos, ou seja:

$$10^2 = 100$$

$$6^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$2^0 = 1$$

Qual será, então, o significado de uma potência com expoente fracionário, como, por exemplo, a expressão $2^{\frac{3}{4}}$?

Consideremos um número real x , tal que $x = \sqrt[4]{2^3}$.

Usando a definição que já vimos anteriormente, podemos escrever:

$$x = \sqrt[4]{2^3} \Rightarrow x^4 = 2^3 \quad \textcircled{1}$$

Consideremos, então, um número real y , tal que $y = 2^{\frac{3}{4}}$.

Se elevarmos os dois membros à 4ª potência, teremos:

$$y = 2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y^4 = (2^{\frac{3}{4}})^4 \Rightarrow y^4 = 2^3 \quad \text{II}$$

Comparando I e II, obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} x^4 = 2^3 \\ y^4 = 2^3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow x = y$$

como os expoentes
são iguais as bases, positivas,
também são iguais.

Daí, podemos escrever:

$$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

Consideremos, agora, o radical $\sqrt[5]{2^{20}}$.

Como o radicando 2^{20} pode ser escrito na forma $(2^4)^5$, podemos fazer:

$$\sqrt[5]{2^{20}} = \sqrt[5]{(2^4)^5} = 2^4$$

Ocorre que o expoente 4 pode ser escrito na forma $\frac{20}{5}$ (4 e $\frac{20}{5}$ são numerais do mesmo número).

$$\sqrt[5]{2^{20}} = 2^4 = 2^{\frac{20}{5}}$$

potência com expoente fracionário

O mesmo podemos fazer quando temos, por exemplo:

$$\sqrt[3]{10^{12}} = 10^{\frac{12}{3}}$$

$$\sqrt[6]{2^{30}} = 2^{\frac{30}{6}}$$

Você observou que, nos exemplos dados, o expoente do radicando é múltiplo do índice do radical.

Porém, podemos proceder dessa maneira mesmo quando isso não ocorre, ou seja:

$$\checkmark \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$\checkmark \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\checkmark \sqrt[3]{10^2} = 10^{\frac{2}{3}}$$

$$\checkmark \sqrt[8]{3^5} = 3^{\frac{5}{8}}$$

A expressão $a^{\frac{m}{n}}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, que representa $\sqrt[n]{a^m}$, ou seja: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

❖ Todo radical pode ser escrito na forma de potência com expoente fracionário:

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

❖ Toda potência com expoente fracionário pode ser escrita na forma radical:

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3}$$

Propriedades das potências com expoente racional

As mesmas propriedades que foram estudadas para expoentes inteiros valem para as potências com expoente fracionário:

- ❖ Produto de potências de mesma base:

$$6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 6^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = 6^{\frac{5}{6}}$$

- ❖ Quociente de potências de mesma base:

$$10^{\frac{1}{3}} : 10^{\frac{2}{5}} = 10^{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = 10^{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}} = 10^{-\frac{1}{15}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{15}}}$$

- ❖ Potência de uma potência:

$$(2^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{7}} = 2^{\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{7}} = 2^{\frac{5}{14}}$$

Com a aplicação dessas propriedades, podemos resolver alguns problemas, como veremos nos seguintes exemplos:

1. Qual é o valor da expressão $125^{\frac{1}{3}}$?

Decompondo 125 em fatores primos, encontramos $125 = 5^3$.

$$125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5$$

Logo: $125^{\frac{1}{3}} = 5$.

2. Qual é o valor da expressão $81^{0,75}$?

$$\text{Inicialmente, fazemos } 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

Decompondo 81 em fatores primos, temos $81 = 3^4$.

$$81^{0,75} = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 3^3 = 27$$

Logo: $81^{0,75} = 27$.

3. Qual é o número real expresso por $36^{-\frac{1}{2}}$?

Decompondo 36 em fatores primos, encontramos $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$.

$$36^{-\frac{1}{2}} = (6^2)^{-\frac{1}{2}} = 6^{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

Logo: $36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$.

4. Determinar o valor da expressão $27^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{5}{2}}$.

$$27^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{5}{2}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} + (2^2)^{\frac{5}{2}} =$$

$$= 3^2 + 2^5 = 9 + 32 = 41$$

Logo: $27^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{5}{2}} = 41$.

FIXAÇÃO

1 Escreva na forma de potência com expoente fracionário cada um dos seguintes radicais:

a) $\sqrt[3]{2^3}$ f) $\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[3]{10^4}$ g) $\sqrt{11}$

c) $\sqrt[3]{7^2}$ h) $\sqrt[4]{2^3}$

d) $\sqrt{2^5}$ i) $\sqrt[5]{5^3}$

e) $\sqrt[3]{2}$ j) $\sqrt[3]{7}$

2 Escreva na forma de radical cada uma das seguintes potências com expoente fracionário:

a) $5^{\frac{2}{3}}$ f) $8^{\frac{5}{7}}$

b) $3^{\frac{5}{7}}$ g) $6^{\frac{3}{2}}$

c) $10^{\frac{3}{4}}$ h) $7^{\frac{4}{9}}$

d) $7^{\frac{1}{2}}$ i) $9^{\frac{1}{6}}$

e) $6^{\frac{4}{3}}$

3 Escreva na forma de potência de 2:

a) $2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ e) $16^{\frac{2}{3}}$

b) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$ f) $(2^{-2})^{\frac{1}{4}}$

c) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}}$ g) $8^{\frac{1}{2}}$

d) $4^{\frac{3}{5}}$

4 Sabendo que x é um número real positivo, escreva sob a forma de uma única potência de x a expressão $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$. A seguir, escreva a expressão obtida na forma de radical.

5 Escreva na forma de potência única de 3:

a) $(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$ c) $27^{\frac{1}{6}}$

b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{-\frac{1}{6}}$ d) $9^{\frac{5}{4}}$

6 Determine o valor de cada uma das seguintes potências:

a) $8^{\frac{4}{3}}$ b) $256^{0,25}$ c) $64^{\frac{3}{2}}$

7 Escreva a expressão $[(\sqrt{10})^3]^{\frac{1}{6}}$ na forma de potência.

8 Qual é a fração que corresponde à potência $625^{-0,5}$?

9 Considerando as variáveis números reais positivos, escreva a expressão algébrica representada por:

a) $(16x^4y^8)^{\frac{1}{4}}$ c) $[(t+1)^2 \cdot (t-1)^2]^{\frac{1}{2}}$

b) $(4a^6b^{10})^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{256x^4}{y^8}\right)^{\frac{1}{4}}$

10 Determine o valor da expressão numérica

$81^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{1}{5}}$.

RETOMANDO o que aprendeu

1 Qual é o resultado da multiplicação

$$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{5})?$$

2 Sendo $a > 0$, qual é a forma mais simples de escrever

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$$
 ?

3 Sendo $a = \sqrt{24}$ e $b = \sqrt[4]{36}$, pede-se:

- a forma simplificada do número b .
- o valor do produto $a \cdot b$.

4 Determine o valor da soma

$$\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - \sqrt{50} - (\sqrt{2})^3.$$

5 Qual é o valor do número real x em cada uma das igualdades?

a) $\sqrt{2} + x = 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} \cdot x = \sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot x = 2$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[12]{2}$

6 Sendo $x = 1 - \sqrt{3}$ e $y = \sqrt{3} - 1$, calcule o número real que expressa o valor de $x^2 - y^2$.

7 Qual é o valor que você encontra quando simplifica a expressão

$$(3 + 2\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{2})^2 - \sqrt{720} + \sqrt{2160}?$$

8 Usando os produtos notáveis e a fatoração, simplifique a fração

$$\frac{\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}}{2x - 2y}, \text{ onde } x \neq y.$$

9 Calcule o valor da expressão

$$8^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{4}} - (-2)^2 + 8^{\frac{4}{3}}.$$

10 Qual é a expressão algébrica que expressa o quadrado de $\left(\sqrt{3a} - \frac{1}{2a}\right)$, sendo a um número real positivo?

11 São dadas as expressões:

a) $\sqrt[5]{a^5 + b^5} = a + b$, sendo a e b números reais positivos.

b) $a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a}$, sendo a um número real positivo.

c) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[5]{a}$, sendo a um número real positivo.

d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{ab}$, sendo a e b números reais positivos.

e) $\sqrt[5]{a^5 b^5} = ab$, sendo a e b números reais positivos.

Duas dessas expressões são verdadeiras; indique quais são elas.

12 Simplificando a expressão $a\sqrt{ax^3} + x\sqrt{a^3x}$, qual a expressão algébrica que você vai obter sabendo que $a \geq 0$ e $x \geq 0$?

13 Qual é o número inteiro que você obtém quando simplifica a expressão $3\sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3}$?

14 Determine o valor da expressão $27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}$.

15 Calcule a soma $\sqrt{75} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

JORNAIS & REVISTAS

Com relação ao Imposto de Renda 1998, ano-base 1997, reproduzimos um trecho do artigo publicado no *Jornal da Tarde* em 03/04/98:

“Para chegar ao imposto, é preciso aplicar a alíquota e parcela a deduzir correspondentes. O resultado é o imposto devido, exceto se foi feita doação a fundos do Direito da Criança e do Adolescente ou de incentivo à cultura e à atividade audiovisual — aí, deduza o valor doado ou 12% do imposto, o que for menor.”

Acerte as contas com o Leão

Tabela progressiva anual para o cálculo do imposto

Base de cálculo (R\$)	Alíquota	Parcelas a deduzir (R\$)
Até 10 800,00	Isento	—
De 10 800,01 a 21 600,00	15%	1 620,00
Acima de 21 600,00	25%	3 780,00



Observando a tabela progressiva, calcule:

1. O imposto devido pelos contribuintes A e B relacionados abaixo:

Contribuinte	Base de cálculo (R\$)
A	16 800,00
B	23 460,00

2. O valor da *base de cálculo* para um contribuinte C, sabendo que o imposto devido é R\$ 3 102,00.



3

Equações de 2º grau

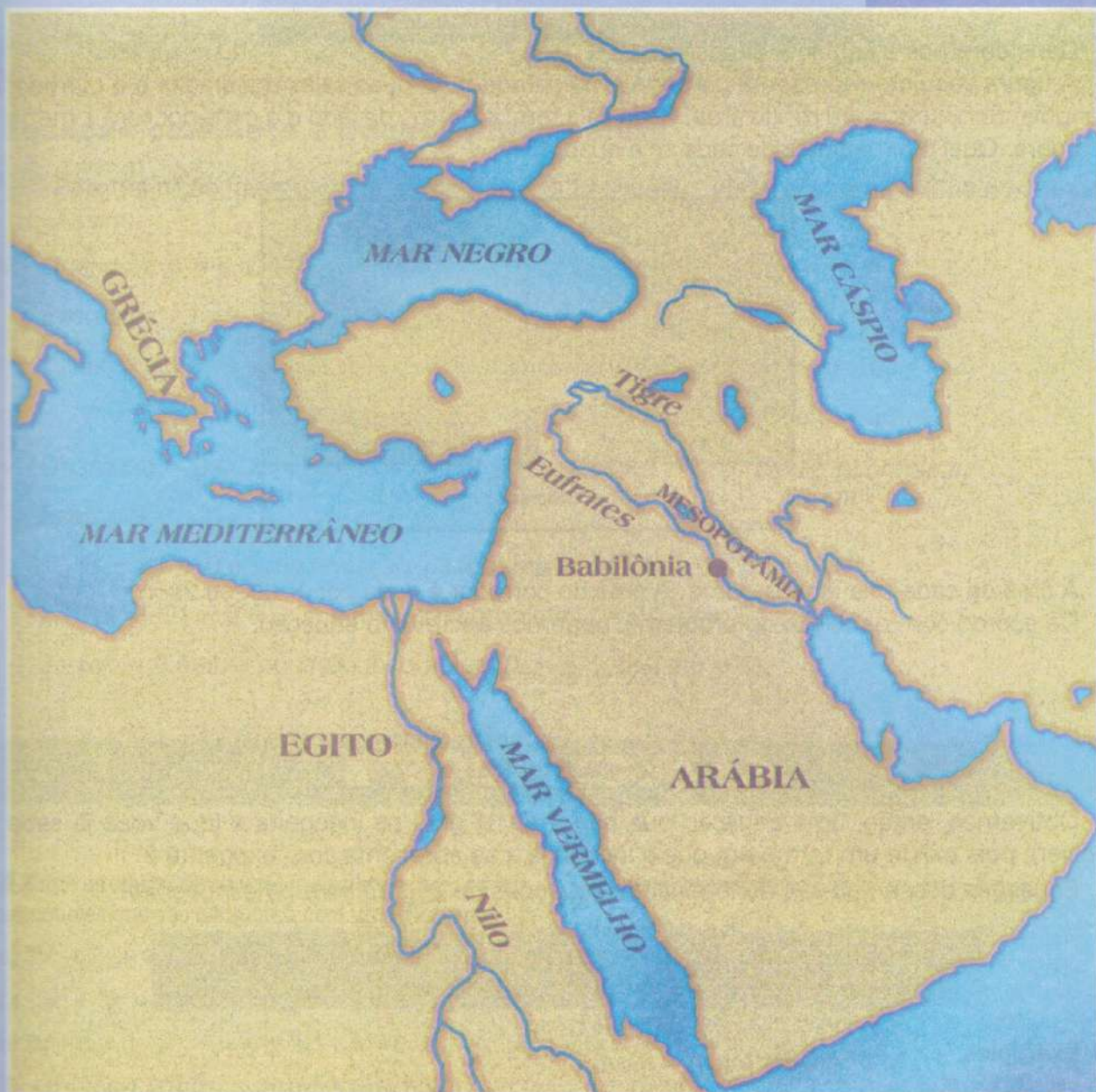
Textos babilônios, escritos há cerca de 4000 anos, já faziam referência a problemas que resolvemos hoje usando equações de 2º grau.

Um dos problemas mais comuns nesses escritos era o que tratava da determinação de dois números, quando conhecidos a soma e o produto deles. A resolução desses problemas era estritamente geométrica: consideravam o produto dos dois números como a área; e a soma deles, o semiperímetro de um retângulo. As medidas dos lados do retângulo correspondiam aos números dados, que eram sempre naturais.

Tábua de argila conhecida como mapa babilônico do mundo. Mostra um círculo que representa o oceano. No centro está o mundo, com o ocidente na parte de cima. O mapa foi composto provavelmente em 700 a.C.



Esse tratamento geométrico dado aos problemas era longo e cansativo, o que levou os gregos — e posteriormente os árabes — a buscarem um procedimento mais metódico para resolver tais problemas.



No século IX, al-Khowarizmi, matemático árabe, desenvolveu um processo para a resolução desses problemas que deu início à chamada álgebra geométrica.

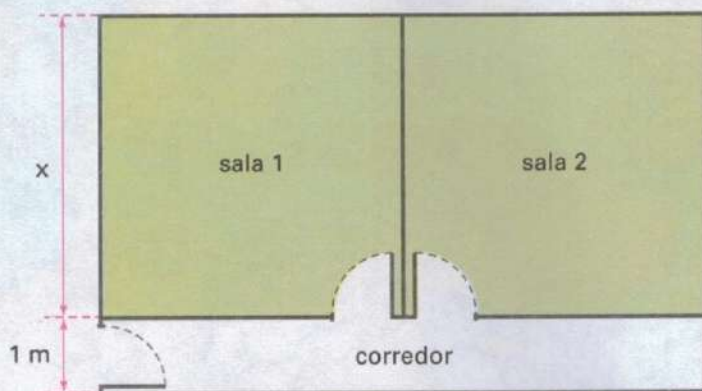
No século XII, baseado nos estudos feitos por al-Khowarizmi, o matemático hindu Bháskara apresentou um processo puramente algébrico que permitia resolver qualquer equação de 2º grau. Ele chegou a uma fórmula que é usada até hoje e que ficou conhecida como *fórmula resolutiva de Bháskara* para equações de 2º grau.

16

EQUAÇÃO DE 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Consideremos a seguinte situação:

A figura seguinte representa parte de um escritório. As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m^2 de área. Cada sala tem x metros de lado e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida x de cada sala quadrada?



A área de cada sala é dada por x^2 . A área do corredor é dada por $1 \cdot 2x$ ou $2x$. De acordo com os dados do problema, podemos escrever a equação:

$$2x^2 + 2x = 40$$

→ área das duas salas → área do corredor

Obtivemos, então, uma equação que não é de 1º grau na incógnita x (que você já sabe resolver), pois existe um termo em que a incógnita x se apresenta com expoente 2.

Equações desse tipo são denominadas *equações de 2º grau com uma incógnita*.

Denomina-se *equação de 2º grau* na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

1. $2x^2 + 2x - 40 = 0$ é uma equação de 2º grau na incógnita x , onde $a = 2$, $b = 2$ e $c = -40$.
2. $x^2 - 7x + 10 = 0$ é uma equação de 2º grau na incógnita x , onde $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$.
3. $5y^2 - 7y + 2 = 0$ é uma equação de 2º grau na incógnita y , onde $a = 5$, $b = -7$ e $c = 2$.
4. $-t^2 + 4t - 4 = 0$ é uma equação de 2º grau na incógnita t , onde $a = -1$, $b = 4$ e $c = -4$.
5. $6x^2 - 9x = 0$ é uma equação de 2º grau na incógnita x , onde $a = 6$, $b = -9$ e $c = 0$.
6. $x^2 - 25 = 0$ é uma equação de 2º grau na incógnita x , onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.

Nas equações de 2º grau com uma incógnita, os números reais a , b e c são chamados *coeficientes* da equação. Assim, se a equação for na incógnita x , temos:

a é sempre o coeficiente do termo em x^2
 b é sempre o coeficiente do termo em x
 c é o coeficiente ou termo *independente* de x

Equação completa e equação incompleta

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$. Assim:

- ✓ Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação de 2º grau se diz *completa*.

Exemplos:

- $5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa ($a = 5$, $b = -8$ e $c = 3$).
- $y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa ($a = 1$, $b = 12$ e $c = 20$).

- ✓ Quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$, a equação de 2º grau se diz *incompleta*.

Exemplos:

- $x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 1$, $b = 0$ e $c = -81$).
- $10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta ($a = 10$, $b = 2$ e $c = 0$).
- $5y^2 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 5$, $b = 0$ e $c = 0$).

FIXAÇÃO

1 Entre as equações seguintes, escreva no seu caderno aquelas que são de 2º grau com uma incógnita:

- | | |
|---------------------------|------------------------|
| a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ | e) $4x^2 - x = 0$ |
| b) $10x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ | f) $9x^2 - 1 = 0$ |
| c) $2x - 3 = 0$ | g) $2x^4 + 5 = 0$ |
| d) $-x^2 - 3x + 2 = 0$ | h) $0x^2 - 5x + 6 = 0$ |

2 Todas as equações seguintes são equações de 2º grau e estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Nessas condições, identifique os coeficientes de cada uma das equações:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $10x^2 + 3x - 1 = 0$ | e) $-4x^2 + 6x = 0$ |
| b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ | f) $r^2 - 16 = 0$ |
| c) $y^2 - 3y - 4 = 0$ | g) $-6x^2 + x + 1 = 0$ |
| d) $7p^2 + 10p + 3 = 0$ | h) $5m^2 - 10m = 0$ |

3 Escreva a equação $ax^2 + bx + c = 0$ quando:

- $a = 1, b = 6, c = 9$
- $a = 4, b = -6, c = 2$
- $a = 4, b = 0, c = -25$
- $a = -21, b = 7, c = 0$
- $a = \frac{1}{2}, b = -2, c = -\frac{1}{3}$
- $a = -9, b = 0, c = 1$
- $a = 1,5, b = 1, c = 0,2$

4 Identifique como *completa* ou *incompleta* a equação de 2º grau:

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ | d) $x^2 - x - 12 = 0$ |
| b) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ | e) $9x^2 - 4 = 0$ |
| c) $-4x^2 + 6x = 0$ | f) $7x^2 + 14x = 0$ |

Escrevendo uma equação de 2º grau com uma incógnita na sua forma normal

Observe as seguintes equações de 2º grau com uma incógnita:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$-3t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$y^2 - 25 = 0$$

$$-2x^2 + 8x = 0$$

Todas essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada *forma normal* ou *forma reduzida* de uma equação de 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações de 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, como por exemplo:

$$3x^2 - 6x = x - 3 \text{ ou } \frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x-4}$$

Por meio de transformações convenientes, onde aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo, essas equações podem ser reduzidas a essa forma.

Veja os seguintes exemplos:

1. Dada a equação $2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$, escrevê-la na forma normal.

$$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2 \longrightarrow \text{equação dada}$$

$$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0 \longrightarrow \text{aplicando o princípio aditivo}$$

$$3x^2 - 7x + 3 = 0 \longrightarrow \text{forma normal da equação dada}$$

2. Qual é a forma normal da equação $(2x + 3)^2 = 10 - (x + 4)(x - 2)$?

$$(2x + 3)^2 = 10 - (x + 4)(x - 2) \longrightarrow \text{equação dada}$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 10 - (x^2 + 2x - 8)$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 10 - x^2 - 2x + 8 \longrightarrow \text{eliminando os parênteses}$$

$$4x^2 + 12x + 9 = -x^2 - 2x + 18$$

$$4x^2 + x^2 + 12x + 2x + 9 - 18 = 0 \longrightarrow \text{pelo princípio aditivo}$$

$$5x^2 + 14x - 9 = 0 \longrightarrow \text{forma normal da equação dada}$$

3. Vamos escrever a equação $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x-4}$, (com $x \neq 0$ e $x \neq 4$) na sua forma normal.

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x-4} \longrightarrow \text{equação dada}$$

$$\frac{4(x-4) - x(x-4)}{2x(x-4)} = \frac{2x^2}{2x(x-4)} \longrightarrow \text{reduzindo todos os termos ao mesmo denominador}$$

$$4(x-4) - x(x-4) = 2x^2 \longrightarrow \text{eliminando os denominadores pelo princípio multiplicativo}$$

$$4x - 16 - x^2 + 4x = 2x^2 \longrightarrow \text{aplicando a propriedade distributiva}$$

$$-x^2 + 8x - 16 = 2x^2$$

$$-x^2 - 2x^2 + 8x - 16 = 0 \longrightarrow \text{pelo princípio aditivo}$$

$$-3x^2 + 8x - 16 = 0 \longrightarrow \text{forma normal da equação dada}$$

FIXAÇÃO

1 Escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ (forma normal) cada uma das seguintes equações de 2º grau:

a) $x^2 - 1 = x + 11$

b) $x^2 - 7x = 6 - 2x$

c) $x(x - 3) + (x - 1)(x - 4) = 0$

d) $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 = 10$

e) $x^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

f) $\frac{x^2}{5} = \frac{x}{4} + \frac{x^2}{10}$

g) $x - 3 = \frac{3x}{x - 4}$, (com $x \neq 4$)

h) $\frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{-3x^2}{x^2 - 1}$, (com $x \neq -1$ e $x \neq 1$)

2 O quadrado de um número aumentado do triplo desse número é igual ao próprio número mais 35. Escreva na forma normal a equação de 2º grau que se pode formar com os dados deste problema.

3 Você sabe que a área de um retângulo é calculada multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura. Em um retângulo de área 60 cm^2 , a medida do comprimento é expressa por $(x + 2) \text{ cm}$ e a medida da largura é expressa por $(x - 5) \text{ cm}$. Nessas condições, escreva na forma normal a equação de 2º grau que se pode formar com esses dados.

4 A medida do lado de um quadrado é expressa por $(2x - 1) \text{ cm}$ e a área desse quadrado é 25 cm^2 . Qual é a equação de 2º grau, na forma normal, que se pode obter com os dados deste problema?

5 O número de diagonais de um polígono pode ser obtido pela fórmula $d = \frac{n(n - 3)}{2}$. Sendo $d = 10$, escreva, na forma normal, a equação de 2º grau na incógnita n que se pode obter.



RESOLVENDO EQUAÇÕES INCOMPLETAS DE 2º GRAU

Você já sabe que *resolver* uma equação significa determinar o *conjunto solução* dessa equação. Na resolução das equações incompletas de 2º grau, usaremos a fatoração, que você já aprendeu na 7ª série, e duas propriedades importantes dos números reais:

Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x \cdot y = 0$, então, $x = 0$ ou $y = 0$.

Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então, $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Resolvendo equações da forma $ax^2 + bx = 0$

Observe os exemplos:

1. Vamos resolver a equação $x^2 - 9x = 0$ no conjunto \mathbb{R} .

$$x^2 - 9x = 0$$

$$x \cdot (x - 9) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{colocando } x \text{ em evidência}$$

Pela propriedade dos números reais, temos:

$$x = 0 \longrightarrow \text{uma raiz da equação}$$

ou

$$x - 9 = 0 \longrightarrow x = 9 \longrightarrow \text{outra raiz da equação}$$

Logo, $S = \{0, 9\}$ e os números 0 e 9 são as raízes da equação.

2. No conjunto \mathbb{R} , determinar o conjunto solução da equação $(x - 2)^2 = 4 - x \cdot (x + 3)$.

$$(x - 2)^2 = 4 - x \cdot (x + 3)$$

Vamos, inicialmente, escrever a equação na sua forma normal:

$$x^2 - 4x + 4 = 4 - x^2 - 3x$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 3x + 4 - 4 = 0$$

$$2x^2 - x = 0 \longrightarrow \text{forma normal}$$

$$x \cdot (2x - 1) = 0 \longrightarrow \text{colocando } x \text{ em evidência}$$

$$x = 0 \text{ (uma raiz)}$$

ou

$$2x - 1 = 0 \longrightarrow 2x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (outra raiz)}$$

Logo, $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ e os números 0 e $\frac{1}{2}$ são as raízes da equação.

3. Um número real é tal que seu quadrado é igual ao seu triplo. Qual é esse número?
Representando por x o número procurado, podemos escrever a equação:

$$x^2 = 3x \qquad x = 0$$

$$x^2 - 3x = 0 \qquad \text{ou}$$

$$x(x - 3) = 0 \qquad x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$$

Logo, o número procurado é 0 ou 3.

Resolvendo equações da forma $ax^2 + c = 0$

Observe os seguintes exemplos:

1. Resolver a equação $x^2 - 49 = 0$ no conjunto \mathbb{R} .

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = 49 \longrightarrow \text{pelo princípio aditivo}$$

Pela propriedade dos números reais, temos:

$$x = +\sqrt{49} \text{ ou } x = -\sqrt{49}$$

$$x = +7 \text{ ou } x = -7$$

Logo, $S = \{-7, 7\}$ e os números 7 e -7 são as raízes da equação.

2. Qual é a solução da equação $16x^2 - 1 = 0$, no conjunto \mathbb{R} ?

$$16x^2 - 1 = 0$$

$$16x^2 = 1 \longrightarrow \text{pelo princípio aditivo}$$

$$x^2 = \frac{1}{16} \longrightarrow \text{pelo princípio multiplicativo}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{16}} \longrightarrow \text{pela propriedade dos números reais}$$

$$x = \pm \frac{1}{4}$$

Logo, $S = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$ e os números $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ são as raízes da equação.

3. Determinar os valores reais de x para que se tenha $3x^2 - 60 = 0$.

Como todos os termos da equação são divisíveis por 3, vamos simplificar a equação dividindo todos os termos por 3:

$$3x^2 - 60 = 0 \longrightarrow \frac{3x^2}{3} - \frac{60}{3} = \frac{0}{3} \longrightarrow x^2 - 20 = 0$$

$$x^2 - 20 = 0$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \pm \sqrt{20}$$

Como 20 não apresenta raiz quadrada exata, vamos simplificar o radical:

$$x = \pm \sqrt{2^2 \cdot 5} = \pm 2\sqrt{5}$$

Logo, $S = \{-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\}$ e os números $-2\sqrt{5}$ e $+2\sqrt{5}$ são as raízes da equação.

4. Determinar a solução da equação $x^2 + 4 = 0$ no conjunto \mathbb{R} .

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-4}$$

Como $\sqrt{-4}$ não existe no conjunto \mathbb{R} , não temos valores reais para x .

Logo, $S = \emptyset$ e a equação não tem raízes reais.

5. Vamos resolver, no conjunto \mathbb{R} , a equação $(2y + 1)^2 = 8 + 2 \cdot (2y + 1)$.

Inicialmente, vamos escrever a equação dada na sua forma normal:

$$(2y + 1)^2 = 8 + 2(2y + 1)$$

$$4y^2 + 4y + 1 = 8 + 4y + 2$$

$$4y^2 + 4y + 1 = 10 + 4y$$

$$4y^2 + \cancel{4y} - \cancel{4y} + 1 - 10 = 0$$

$$4y^2 - 9 = 0 \longrightarrow \text{forma normal}$$

$$4y^2 = 9 \longrightarrow \text{pelo princípio aditivo}$$

$$y^2 = \frac{9}{4} \quad \longrightarrow \quad \text{pelo princípio multiplicativo}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}$$

Logo, $S = \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$ e os números $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são as raízes da equação.

6. A área de uma praça quadrada é 144 m^2 . Quanto mede o lado dessa praça?

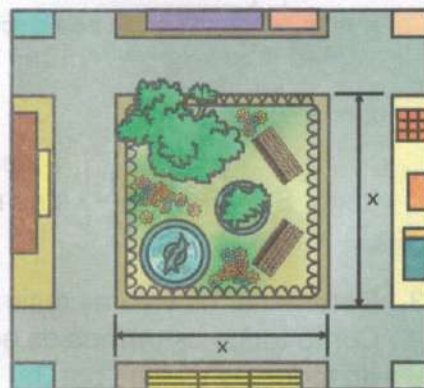
Indicando por x a medida do lado dessa praça, podemos escrever a equação:

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm \sqrt{144} \Rightarrow x = \pm 12$$

Como a medida de um lado não pode ser um número negativo, a solução $x = -12$ não serve para o problema.

Logo, a medida do lado da praça quadrada é 12 m .



FIXAÇÃO

- 1 Vamos determinar, no conjunto \mathbb{R} , o conjunto solução de cada uma das seguintes equações:

a) $x^2 - 6x = 0$

g) $8x^2 - 6x = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$

h) $-4x^2 + 12x = 0$

c) $x^2 - 1 = 0$

i) $6x^2 - x = 0$

d) $x^2 + x = 0$

j) $x^2 - 18 = 0$

e) $7x^2 - 2x = 0$

l) $16y^2 = 9$

f) $x^2 + 49 = 0$

m) $-20x^2 - 5x = 0$

g) $1 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{2}$

h) $\frac{x}{x+1} = \frac{8}{3} + \frac{x}{1-x}$, (com $x \neq -1$ e $x \neq 1$)

i) $\frac{x-3}{x^2-4} + 1 = \frac{1}{x-2}$, (com $x \neq -2$ e $x \neq 2$)

j) $\frac{2}{x} + \frac{1-x}{x^2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{x^2}$, (com $x \neq 0$)

- 2 Vamos determinar o conjunto solução de cada uma das equações de 2° grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $(x-6)(x+5) + x = 51$

b) $x^2 + 3x \cdot (x-12) = 0$

c) $(x-3)^2 = 5x + 9$

d) $2x(x+1) - x(x+5) = +3(12-x)$

e) $5x(x+1) + (x-4)^2 = 16 + 3x$

f) $3x - \frac{1}{3x} = 0$, (com $x \neq 0$)

- 3 Em um quadrado, o número que expressa a área é igual ao número que expressa o perímetro. Sendo x a medida do lado desse quadrado, determine o valor de x .

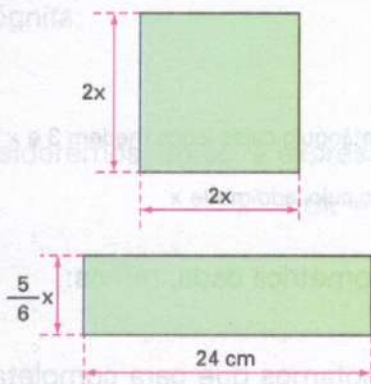
- 4 Determine um número real x tal que o seu quadrado seja igual ao seu quádruplo.

- 5 Do quadrado de um número real x subtraímos 12, obtendo assim o número 109. Qual é o número real x ?

- 6 Determine o número real y para que se tenha $\frac{y^2 - y}{2} = y - \frac{y - y^2}{3}$.

- 7 Qual deve ser o valor do número real t para que as expressões $\frac{t^2 + 2t + 1}{2}$ e $\frac{t^2 + 3t + 6}{3}$ sejam iguais?

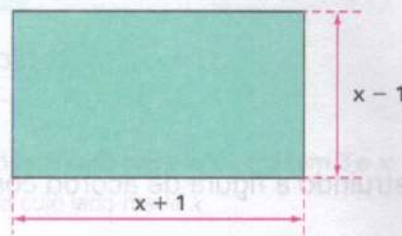
8 O quadrado e o retângulo abaixo têm áreas iguais.



Nessas condições, pede-se:

- a medida do lado do quadrado.
- a medida da largura do retângulo
- o perímetro do quadrado
- o perímetro do retângulo

9 A área do retângulo abaixo é 399 m^2 . As medidas do retângulo estão indicadas na figura. Determine essas medidas.



10 As seguintes equações são literais de 2° grau na incógnita x . Nessas condições, resolva cada uma delas:

- $x^2 - 25a^2 = 0$
- $x^2 - 3bx = 0$
- $2x^2 + ax = 2ax$
- $(x + a)(x - a) = 36m^2 - a^2$
- $(x - a)^2 + (x + a)^2 = 10a^2$

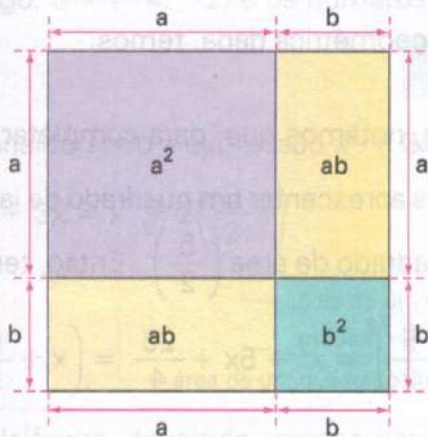
18

RESOLVENDO UMA EQUAÇÃO COMPLETA DE 2° GRAU COM UMA INCÓGNITA

O processo do completamento de quadrados

Baseado na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$, o matemático árabe al-Khowarizmi, no século IX, estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações de 2° grau com uma incógnita.

Inicialmente, vejamos a figura que é a representação geométrica da expressão $(a + b)^2$.



Pela figura, vemos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A interpretação geométrica é:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

- área do quadrado de lado b
- área de um dos retângulos de lados a e b
- área do quadrado de lado a

Baseados nessa interpretação, vamos considerar as seguintes situações que nos mostram como al-Khowarizmi desenvolveu seus estudos.

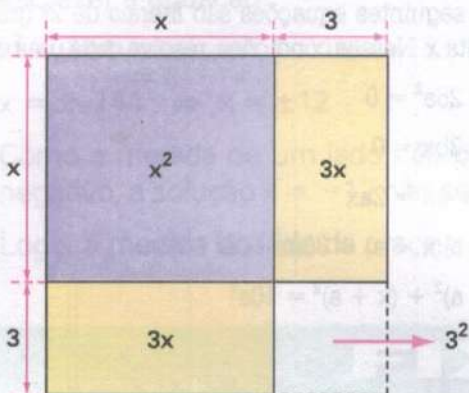
Consideremos a expressão $x^2 + 6x$. Fazendo uma interpretação geométrica dessa expressão, temos:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$$

→ área de um retângulo cujos lados medem 3 e x

→ área de um quadrado cujo lado mede x

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada, temos:



Pela figura, notamos que para completar o quadrado devemos acrescentar um quadrado de lado 3, ou seja, de área 3^2 . Assim, se adicionarmos 3^2 à expressão $x^2 + 6x$, obteremos $x^2 + 6x + 3^2$, que é um trinômio quadrado perfeito; daí, podemos escrever:

$$x^2 + 6x + 3^2 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

trinômio quadrado perfeito

forma fatorada do trinômio

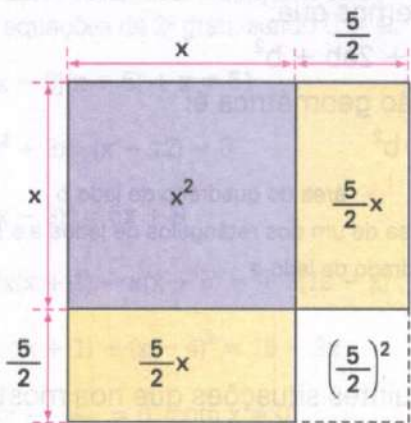
Consideremos, agora, a expressão $x^2 + 5x$. Fazendo uma interpretação geométrica dessa expressão, temos:

$$x^2 + 5x = x^2 + 2\left(\frac{5}{2}x\right)$$

→ área de um retângulo cujos lados medem $\frac{5}{2}$ e x

→ área de um quadrado cujo lado mede x

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada, temos:



Pela figura, notamos que, para completar o quadrado, devemos acrescentar um quadrado de lado $\frac{5}{2}$, ou seja, um quadrado de área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Então, teremos:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

trinômio quadrado perfeito

forma fatorada do trinômio

Aplicando esses conhecimentos, vamos resolver as seguintes equações de 2º grau com uma incógnita:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Consideremos, então, a expressão $x^2 + 6x$ e teremos:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$$

\swarrow área de um retângulo cujos lados medem 3 e x
 \searrow área de um quadrado cujo lado mede x

Pela figura, observamos que devemos acrescentar à expressão dada o número $(3)^2$, ou seja, 9, para obtermos um quadrado.

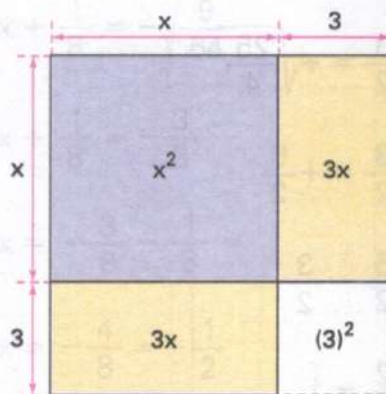
Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 6x$, vamos voltar à equação dada:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x = -8 \quad \longrightarrow \quad \text{princípio aditivo}$$

$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9 \quad \longrightarrow \quad \text{princípio de equivalência das equações}$$

quadrado perfeito



Fatorando o trinômio quadrado perfeito no 1º membro, temos:

$$(x + 3)^2 = 1$$

Daí:

$$(x + 3) = +\sqrt{1} \quad \text{ou} \quad (x + 3) = -\sqrt{1}$$

$$x + 3 = 1 \quad \quad \quad x + 3 = -1$$

$$x = 1 - 3 \quad \quad \quad x = -1 - 3$$

$$x = -2 \quad \quad \quad x = -4$$

Logo, $S = \{-4, -2\}$ e os números -4 e -2 são as raízes da equação.

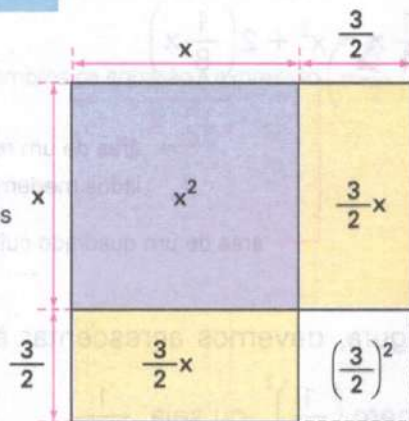
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Considerando a expressão $x^2 + 3x$, temos:

$$x^2 + 3x = x^2 + 2\left(\frac{3}{2}x\right)$$

\swarrow área de um retângulo cujos lados medem $\frac{3}{2}$ e x
 \searrow área de um quadrado cujo lado mede x

Pela figura, devemos acrescentar à expressão dada o número $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{9}{4}$.



Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 3x$, vamos voltar para a equação dada:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \longrightarrow x^2 + 3x = 4$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4} \longrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

quadrado perfeito

$$x + \frac{3}{2} = +\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x + \frac{3}{2} = +\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

$$x + \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{8}{2} = -4$$

ou

Logo, $S = \{-4, 1\}$ e os números -4 e 1 são as raízes da equação.

$$8x^2 + 2x - 1 = 0$$

Vamos, inicialmente, dividir todos os termos da equação pelo coeficiente a ; no caso, $a = 8$:

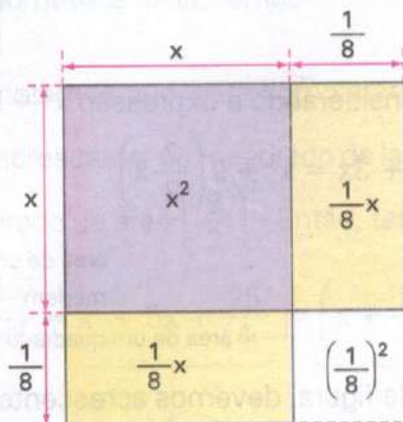
$$\frac{8x^2}{8} + \frac{2x}{8} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$$

Considerando a expressão $x^2 + \frac{1}{4}x$, temos:

$$x^2 + \frac{1}{4}x = x^2 + 2\left(\frac{1}{8}x\right)$$

área de um retângulo cujos lados medem $\frac{1}{8}$ e x

área de um quadrado cujo lado mede x



Pela figura, devemos acrescentar à expressão

dada o número $\left(\frac{1}{8}\right)^2$, ou seja, $\frac{1}{64}$.

Voltando à equação, temos:

$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0 \longrightarrow x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} \longrightarrow \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

quadrado perfeito

$$x + \frac{1}{8} = +\sqrt{\frac{9}{64}}$$

$$x + \frac{1}{8} = -\sqrt{\frac{9}{64}}$$

$$x + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$$

ou

$$x = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$$

$$x = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} =$$

$$x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ e os números $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ são as raízes reais da equação.

Para não termos que repetir sempre o desenho, podemos dizer que a expressão $ax^2 + bx$, com $a = 1$, se torna um trinômio quadrado perfeito quando adicionamos a ela a expressão $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Veja, agora, estes exemplos:

1. Resolver a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x = 8$$

$$x^2 - 2x + 1^2 = 8 + 1^2 \longrightarrow \text{adicionando em ambos os membros da equação a expressão } \left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x - 1)^2 = 9 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x - 1 = \pm 3$$

Dai temos:

$$x - 1 = 3$$

ou

$$x - 1 = -3$$

$$x = 3 + 1 = 4$$

$$x = -3 + 1 = -2$$

Logo, $S = \{-2, 4\}$ e os números -2 e 4 são as raízes da equação.

2. Determinar o conjunto solução da equação $3x^2 - 2x - 1 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.
 Neste caso, sendo $a = 3$, ou seja, $a \neq 1$, devemos dividir todos os termos da equação pelo coeficiente a e teremos:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{0}{3} \rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \text{adicionando em ambos os membros da equação}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \quad \left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

quadrado perfeito

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{2}{3}$$

Dai, temos:

$$x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ou

$$x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$ e os números $-\frac{1}{3}$ e 1 são as raízes da equação.

FIXAÇÃO

1 Qual é o número que você deve adicionar a cada uma das seguintes expressões para que tenhamos um trinômio quadrado perfeito?

a) $x^2 + 6x$

d) $x^2 + 8x$

g) $x^2 - 12x$

b) $x^2 - 10x$

e) $x^2 - 5x$

h) $x^2 + x$

c) $x^2 - 2x$

f) $x^2 + 9x$

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

g) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 - 10x + 9 = 0$

h) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

i) $x^2 - 10x + 24 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

j) $6x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - x - 6 = 0$

l) $x^2 - 8x + 7 = 0$

f) $x^2 - 3x + 2 = 0$

m) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Fórmula resolvente ou fórmula de Bháskara

Usando o processo de Bháskara e partindo da equação escrita na sua forma normal, foi possível chegar a uma fórmula que vai nos permitir determinar o conjunto solução de qualquer equação de 2º grau com uma incógnita de maneira mais simples.

Essa fórmula é chamada *fórmula resolvente* ou *fórmula de Bháskara*.

Vejam como chegar a essa fórmula:

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c, \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Vamos dividir todos os termos da equação pelo coeficiente a , pois $a \neq 0$, e teremos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Usando o princípio aditivo, vamos adicionar o termo $-\frac{c}{a}$ aos dois membros da equação e teremos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Para que o primeiro membro se torne um trinômio quadrado perfeito, devemos adicionar

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \text{ ao primeiro membro, fazendo o mesmo com o segundo membro, a}$$

fim de obter uma equação equivalente (princípio aditivo):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ (que é um número real) é usualmente representada pela letra grega Δ (delta) e é chamada *discriminante* da equação:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Fatorando o primeiro membro, temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \text{fórmula resolvente ou fórmula de Bháskara}$$

Nesta fórmula, o fato de x ser ou não um número real vai depender do discriminante Δ . Temos, então, três casos a estudar:

1º caso: Δ é um número real positivo ($\Delta > 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real e existem dois valores reais diferentes para a incógnita x , sendo costume representar esses valores por x' e x'' , que constituem as raízes da equação.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

2º caso: Δ é zero ($\Delta = 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e ocorre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Observamos, então, a existência de um único valor real para a incógnita x , embora seja costume dizer que a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

3º caso: Δ é um número real negativo ($\Delta < 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois não há no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo.

Dizemos, então, que não há valores reais para a incógnita x , ou seja, a equação não tem raízes reais.

Neste 3º caso, as raízes da equação pertencem a um outro conjunto numérico chamado *conjunto dos números complexos*, cujo estudo será feito no 2º grau.

Como acabamos de ver, a existência ou não de raízes reais e o fato de elas serem duas ou uma única dependem, exclusivamente, do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$; daí o nome que se dá a essa expressão.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- ✓ Quando $\Delta \geq 0$, a equação tem raízes reais $\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \text{ (duas raízes diferentes);} \\ \Delta = 0 \text{ (uma única raiz).} \end{array} \right.$
- ✓ Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Vamos, agora, resolver algumas equações de 2º grau usando a fórmula resolvente ou fórmula de Bháskara:

1. Resolver a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ no conjunto \mathbb{R} .

Nessa equação, temos:

$$a = 1, b = 2 \text{ e } c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{array} \right.$$

Então: $S = \{-4, 2\}$. (Procure fazer a verificação.)

2. Resolver a equação $x^2 - 14x + 49 = 0$ no conjunto \mathbb{R} .

$$a = 1, b = -14, c = 49$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(1)(49) = 196 - 196 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem uma única raiz real, dada por:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-14)}{2(1)} = \frac{14}{2} = 7$$

Então: $S = \{7\}$.

3. Resolver a equação $x^2 - 5x + 8 = 0$ no conjunto \mathbb{R} .

Nessa equação, temos:

$$a = 1, b = -5, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(8) = 25 - 32 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a equação dada não tem raízes reais.

Neste caso, $S = \emptyset$.

4. Vamos determinar, no conjunto \mathbb{R} , a solução da equação $3x(x+1) - x = 33 - (x-3)^2$.

Vamos, inicialmente, escrever a equação dada na sua forma normal:

$$3x(x+1) - x = 33 - (x-3)^2$$

$$3x^2 + 3x - x = 33 - (x^2 - 6x + 9)$$

$$3x^2 + 3x - x = 33 - x^2 + 6x - 9$$

$$3x^2 + 2x = -x^2 + 6x + 24$$

$$3x^2 + x^2 + 2x - 6x - 24 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{dividindo todos os termos por 4 para simplificar a equação}$$

Nesta equação, temos:

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{array} \right.$$

Logo, $S = \{-2, 3\}$.

5. Vamos resolver a equação $x - 5 = -\frac{1}{x-3}$ no conjunto $\mathbb{R} - \{3\}$.

Inicialmente, vamos escrever a equação dada na forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x - 5 = -\frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x(x-3) - 5(x-3)}{x-3} = \frac{-1}{x-3}$$

$$x(x-3) - 5(x-3) = -1$$

$$x^2 - 3x - 5x + 15 = -1$$

$$x^2 - 3x - 5x + 15 + 1 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$a = 1, b = -8, c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem uma única raiz real dada por:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

Logo, $S = \{4\}$.

As equações incompletas também podem ser resolvidas com a aplicação da fórmula resolutive. Veja:

6. Resolver a equação $x^2 - 9 = 0$, no conjunto \mathbb{R} .

Nessa equação, temos: $a = 1, b = 0, c = -9$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{0 \pm 6}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{0-6}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$

Logo, $S = \{-3, 3\}$.

7. Resolver, no conjunto \mathbb{R} , a equação $2x^2 - 5x = 0$.

Nessa equação temos: $a = 2, b = -5, c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(0) = 25$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{5 \pm 5}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{5+5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ x'' = \frac{5-5}{4} = \frac{0}{4} = 0 \end{array} \right.$$

Logo, $S = \left\{0, \frac{5}{2}\right\}$.

FIXAÇÃO

1 Todas as equações seguintes estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Determine o valor do discriminante Δ em cada uma delas e diga se a equação tem raízes reais:

- a) $x^2 - 3x - 4 = 0$ d) $x^2 - 7x + 15 = 0$
 b) $5x^2 + 4x - 1 = 0$ e) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
 c) $x^2 + 8x + 16 = 0$ f) $4x^2 - 2x + 1 = 0$

2 Todas as equações seguintes estão escritas na sua forma normal. Usando a fórmula resolvente, determine o conjunto solução de cada uma dessas equações:

- a) $x^2 - x - 12 = 0$ e) $x^2 - 12x + 36 = 0$
 b) $6x^2 + x - 1 = 0$ f) $9x^2 + 8x - 1 = 0$
 c) $x^2 - 2x - 24 = 0$ g) $-2x^2 + 9x + 18 = 0$
 d) $7x^2 + 2x + 1 = 0$ h) $5x^2 - 3x - 2 = 0$

3 Determine o conjunto solução das seguintes equações no conjunto \mathbb{R} :

- a) $x^2 - 4 = 3x$ d) $10x^2 = 1 + 3x$
 b) $2x^2 = 5x - 8$ e) $6x^2 - 2x = 1 - 3x$
 c) $x^2 - x = x - 1$ f) $7x^2 + 3x + 1 = 3x^2$

4 Considere a equação de 2º grau $5x^2 - 10x = 0$, que é uma equação incompleta. Determine o conjunto solução dessa equação:

- a) usando a fórmula resolvente.
 b) sem usar a fórmula resolvente.

5 Dadas as expressões $5x^2 + 12x + 9$ e $x^2 + 9x + 10$, para quais valores reais de x as duas expressões têm valores iguais?

6 Dada a expressão $x^2 - 8x + 5$, para quais valores reais de x essa expressão dá -7 ?

7 Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações de 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

- a) $(x + 2)^2 + x = 0$
 b) $3x^2 - 3 = 2(x - 1)^2$
 c) $x(x + 11) + 2(x + 21) = 0$

d) $6(x^2 - 1) - x = 14 + 5x^2$

e) $x^2 - \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}$

f) $x + \frac{x^2 + 4}{5} = 2$

g) $\frac{x(x + 1)}{4} - \frac{x - 5}{12} = \frac{5(2x - 1)}{6}$

h) $\frac{x^2}{2} - \frac{x + 12}{3} = 2x$

8 Quais são os valores reais de x para os quais as expressões $\frac{(3x - 2)^2}{6}$ e $\frac{2x + 3}{3} - \frac{x(1 - 5x)}{2}$ são iguais?

9 Qual é o número real positivo y que verifica a igualdade $y + 1 = \frac{8 - y}{y}$?

10 Vamos resolver as seguintes equações de 2º grau:

a) $x + 10 = -\frac{9}{x}$, (com $x \neq 0$)

b) $6x + 5 = \frac{3x + 5}{x - 1}$, (com $x \neq 1$)

c) $\frac{1}{x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x - 1}$, (com $x \neq 0$ e $x \neq 1$)

d) $\frac{x}{x - 2} - \frac{3}{x - 1} = \frac{3}{(x - 2)(x - 1)}$, (com $x \neq 1$ e $x \neq 2$)

e) $\frac{x}{x - 2} + \frac{4}{x - 1} = 5$, (com $x \neq 1$ e $x \neq 2$)

f) $\frac{2}{x^2 - 1} - 2 = \frac{x}{x - 1}$, (com $x \neq -1$ e $x \neq 1$)

g) $\frac{3x}{x + 2} - \frac{3}{x^2 - 4} = 2$, (com $x \neq -2$ e $x \neq 2$)

h) $\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x - 2}$, (com $x \neq 2$ e $x \neq 3$)

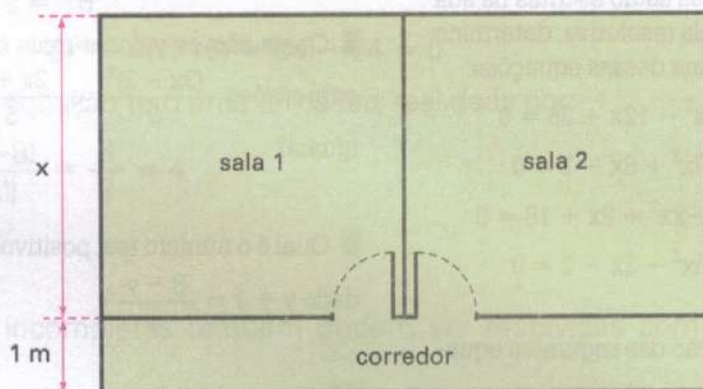
11 Determine os valores reais de y que tornam verdadeira a equação $\frac{9 - y}{2} + \frac{4}{y - 2} = \frac{3}{2}(y - 1)$, com $y \neq 2$.



RESOLVENDO PROBLEMAS

Vejam, agora, algumas situações em cuja resolução vamos usar uma equação de 2º grau com uma incógnita.

- 1ª** A figura abaixo representa parte de um escritório. As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m² de área. Cada sala tem x metros de lado e o corredor tem 1 m de largura. Qual é a medida x de cada sala quadrada?



A área de cada sala é dada por x^2 . A área do corredor é dada por $1 \cdot 2x = 2x$.

De acordo com a figura, podemos escrever a equação:

$$2x^2 + 2x = 40$$

→ área das duas salas
→ área do corredor

$$2x^2 + 2x = 40$$

$$2x^2 + 2x - 40 = 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0 \rightarrow \text{dividindo todos os termos por 2, para simplificar a equação}$$

Nesta equação, temos:

$$a = 1, b = 1, c = -20$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-20) = 1 + 80 = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 9}{2} \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x'' = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \end{array} \right.$$

Como uma medida não pode ser negativa, a solução -5 não serve para o problema.

A medida do lado de cada sala é 4 m.

2ª Você sabe que o número de diagonais de um polígono pode ser calculado usando a fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Qual é o número n de lados de um polígono que tem 9 diagonais?

Pela situação temos que $d = 9$.

Substituindo na fórmula, temos a equação:

$$9 = \frac{n(n-3)}{2} \text{ ou } \frac{n(n-3)}{2} = 9$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = 9$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{18}{2}$$

$$n^2 - 3n = 18$$

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -18$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-18) = 9 + 72 = 81$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2(1)} = \frac{3 \pm 9}{2} \left\{ \begin{array}{l} n' = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ n'' = \frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$

A resposta -3 não serve para o problema, pois n deve representar o número de lados de um polígono.

O polígono tem 6 lados, ou seja, é um hexágono.

FIXAÇÃO

1 A soma do quadrado com o quádruplo de um mesmo número real x é igual a 36. Qual é esse número x ?

2 A soma de um número real inteiro diferente de zero com o seu inverso dá $\frac{10}{3}$. Qual é o número inteiro considerado?

3 A soma de um número real positivo x com o seu quadrado dá 42. Determine esse número.

4 Multiplique o quadrado de um número inteiro por 3. O resultado é igual ao quádruplo do mesmo número aumentado de 2 unidades. Qual é esse número?

5 Um terreno retangular tem 300 m^2 de área. A frente do terreno tem 13 m a menos que a lateral. Determine as dimensões desse terreno.

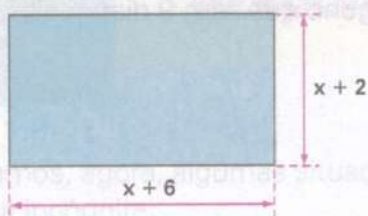
6 Um retângulo tem 5 m de comprimento e 2 m de largura. Se aumentarmos o comprimento e a largura na mesma quantidade, a área do novo retângulo será 7 vezes a área do retângulo original. Nessas condições:

- Quais as dimensões do novo retângulo?
- Qual é o perímetro do novo retângulo?

7 A soma S dos n primeiros números inteiros positivos é dada por $S = \frac{1}{2}n(n+1)$. Quando essa soma é 210?

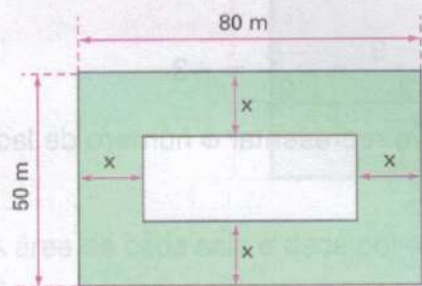
8 A altura de um projétil, depois de t segundos de seu lançamento, pode ser calculada pela expressão $128t - 16t^2$. Depois de quantos segundos esse projétil atinge uma altura de 256 metros?

9 O retângulo seguinte tem 140 cm^2 de área. Nessas condições:



- Qual é a medida x indicada?
- Quais as dimensões desse retângulo?
- Qual é a área de um quadrado cujo lado tem a mesma medida do comprimento desse retângulo?

10 Em um terreno retangular de 80 m por 50 m foi construído um barracão para servir como depósito de uma firma. Esse depósito ocupa uma área de $1\,000 \text{ m}^2$. Em torno do barracão foi deixado um recuo de x metros de cada lado, para um gramado (ver figura abaixo). Nessas condições, qual é a medida x do recuo?

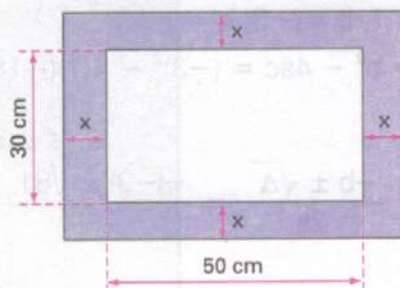


11 O número p de partidas que devem ser disputadas em um torneio de basquete com turno e retorno pode ser calculado pela fórmula $p = x(x - 1)$, onde x indica o número de equipes que participam desse torneio. Quantas equipes participam de um torneio em que é disputado um total de 132 partidas?



12 A distância entre duas cidades é de 300 km . Para cobrir essa distância, a uma certa velocidade média, um carro levou x horas. Sabe-se que a mesma distância seria percorrida em 2 horas a menos se o carro aumentasse 40 km/h a sua velocidade média. Lembrando que velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$, qual o tempo x de horas que o carro gastou para percorrer os 300 km ?

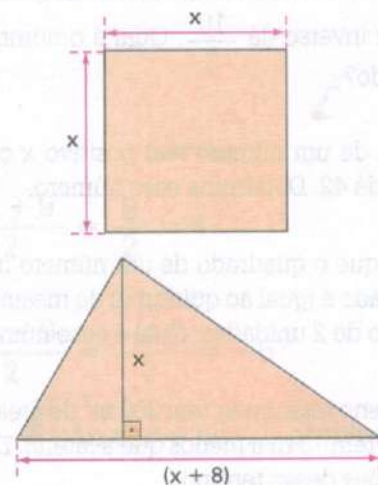
13 A tela de um quadro tem a forma retangular e mede 50 cm e 30 cm . Nessa tela, foi colocada uma moldura, também retangular, de largura x uniforme. Calcule essa largura sabendo que o quadro todo passou a ocupar uma área de $2\,400 \text{ cm}^2$.



14 Um pedaço de arame de 40 cm de comprimento foi cortado em dois pedaços de comprimentos diferentes. Os pedaços foram usados para fazer dois quadrados que juntos formam uma área de 58 cm^2 . Determine o comprimento de cada pedaço em que o arame foi cortado.

15 O quadrado e o triângulo abaixo têm a mesma área. Nessas condições:

- Qual a medida x do lado do quadrado?
- Qual é a área do quadrado?
- Qual é a área do triângulo?





ESTUDANDO AS RAÍZES DA EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Por estudos realizados anteriormente, sabemos que:

- ✓ um número real r é raiz de uma equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ quando, substituindo a incógnita x pelo número real r , obtemos uma sentença verdadeira;
- ✓ quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes diferentes;
- ✓ quando $\Delta = 0$, a equação tem uma única raiz real (ou diremos que ela tem duas raízes reais iguais);
- ✓ quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Vamos usar esses conhecimentos para resolver alguns problemas:

1. Verificar se o número real -5 é raiz da equação $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

$$\text{Para } x = -5 \longrightarrow 2 \cdot (-5)^2 + 9(-5) - 5 = 0 \longrightarrow 50 - 45 - 5 = 0$$

(verdadeiro)

Logo, o número -5 é raiz da equação dada.

2. Sabe-se que o número 1 é raiz da equação $ax^2 - 6x + 1 = 0$. Nessas condições, calcular o valor do coeficiente a .

$$ax^2 - 6x + 1 = 0$$

Como 1 é raiz da equação, vamos substituir a incógnita x pelo número 1:

$$a(1)^2 - 6(1) + 1 = 0$$

$$a - 6 + 1 = 0$$

$$a - 5 = 0 \longrightarrow \text{equação de 1º grau na incógnita } a$$

$$a = 5$$

Logo, o valor do coeficiente a é 5.

3. Sabe-se que a equação $5x^2 - 4x + 2m = 0$ tem duas raízes reais e diferentes. Nessas condições, determinar o valor real de m .

A equação tem duas raízes reais diferentes quando $\Delta > 0$.

Vamos, então, determinar Δ :

$$5x^2 - 4x + 2m = 0$$

$$a = 5, b = -4, c = 2m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (5) \cdot (2m) = 16 - 40m$$

De acordo com o problema, $\Delta > 0$; daí:

$$16 - 40m > 0 \rightarrow \text{inequação de 1º grau na incógnita } m$$

$$-40m > -16$$

$$40m < 16 \rightarrow m < \frac{16}{40} \rightarrow m < \frac{2}{5}$$

Logo, devemos ter $m < \frac{2}{5}$.

4. Vamos determinar o valor de p na equação $x^2 - px + 9 = 0$ para que essa equação tenha uma única raiz real.

Para que a equação tenha uma única raiz real, devemos ter $\Delta = 0$.

Vamos calcular Δ :

$$x^2 - px + 9 = 0$$

$$a = 1, b = -p, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-p)^2 - 4(1)(9) = p^2 - 36$$

De acordo com o problema, $\Delta = 0$; daí:

$$p^2 - 36 = 0 \rightarrow \text{equação incompleta de 2º grau na incógnita } p$$

$$p^2 = 36$$

$$p = \pm\sqrt{36}$$

$$p = \pm 6$$

Logo, devemos ter $p = 6$ ou $p = -6$.

FIXAÇÃO

1 Dentre os números $-2, 0, 1$ e 4 , quais deles são raízes da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$?

2 O número $2 + \sqrt{6}$ é raiz da equação $x^2 - 4x - 2 = 0$. Essa afirmação é correta?

3 O número -3 é raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor de c .

4 Determine o coeficiente b na equação $2x^2 - bx + 10 = 0$, sabendo que o número 5 é raiz dessa equação.

5 Verifique se o número $\frac{1}{4}$ é raiz da equação $4x^2 + 7x - 2 = 0$.

6 Sabe-se que a equação $9x^2 - 6x + 2m = 0$ tem raízes reais. Nessas condições, qual é o valor de m ?

7 Determine o valor de k de modo que a equação $9x^2 + 9x + k = 0$ não tenha raízes reais.

8 Qual deve ser o valor do coeficiente b para que a equação $2x^2 + bx + 8 = 0$ tenha uma única raiz real?

9 Determine o valor de p para que a equação $4x^2 - 4x + 2p - 1 = 0$ tenha raízes reais e diferentes.

10 Vamos determinar o valor de m para que a equação $x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$ tenha uma única raiz real (ou duas raízes reais iguais).



RELACIONANDO AS RAÍZES E OS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO $ax^2 + bx + c = 0$

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e sejam x' e x'' as raízes reais dessa equação.

Entre essas raízes x' e x'' e os coeficientes a , b , c da equação existem duas relações importantes:

1ª relação: Sendo x' e x'' as raízes da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Somando membro a membro as duas igualdades, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Em toda equação de 2ª grau onde x' e x'' são raízes reais, temos que $x' + x'' = \frac{-b}{a}$.

2ª relação: Sendo x' e x'' as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Multiplicando membro a membro as duas igualdades, temos:

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Em toda equação de 2ª grau onde x' e x'' são raízes reais, temos que $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$.

Vamos, então, usar essas duas relações importantes para resolver alguns problemas:

Exemplo: A equação $3x^2 - 8x - 3 = 0$ apresenta duas raízes reais e diferentes. Sem resolver a equação, determinar a soma e o produto dessas duas raízes.

Na equação dada, temos:

$$a = 3, b = -8, c = -3$$

De acordo com as relações, podemos escrever:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{e} \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$

2. Determinar o valor de m na equação $12x^2 - mx - 1 = 0$, de modo que a soma das raízes dessa equação seja $\frac{5}{6}$.

Nessa equação, temos:

$$a = 12, b = -m, c = -1$$

De acordo com a relação da soma, podemos escrever:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{12} = \frac{m}{12} \quad (1)$$

De acordo com os dados do problema, temos:

$$x' + x'' = \frac{5}{6} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), podemos escrever a equação:

$$\frac{m}{12} = \frac{5}{6}$$

$$6m = 60$$

$$m = \frac{60}{6} \Rightarrow m = 10$$

Logo, devemos ter $m = 10$.

3. O produto das raízes reais da equação $8x^2 - 9x + c = 0$ é igual a $\frac{3}{4}$.

Nessas condições, calcular o valor do coeficiente c .

Na equação dada, temos:

$$a = 8, b = -9, c = c$$

Pela relação do produto, podemos escrever:

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{c}{8} \quad (1)$$

De acordo com os dados do problema, temos:

$$x' \cdot x'' = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), podemos escrever a equação:

$$\frac{c}{8} = \frac{3}{4}$$

$$4c = 24$$

$$c = \frac{24}{4}$$

$$c = 6$$

Logo, devemos ter $c = 6$.

4. Calcular a soma dos inversos das raízes reais da equação $6x^2 - 5x - 1 = 0$, sem resolver a equação.

Na equação dada, temos:

$$a = 6, b = -5, c = -1$$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{6} = \frac{5}{6} \text{ e } x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{6}$$

Observe, agora:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x' \cdot x''}$$

Substituindo $x' + x''$ por $\frac{5}{6}$ e $x' \cdot x''$ por $-\frac{1}{6}$, temos:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{\frac{5}{6}}{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} : \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \cdot (-6) = -5$$

Logo, a soma dos inversos das raízes dá -5 .

FIXAÇÃO

1 A equação $x^2 - 6x - 2 = 0$ tem duas raízes reais diferentes, expressas por x' e x'' . Nessas condições, determine, sem resolver a equação, o valor de:

a) $x' + x''$ b) $x' \cdot x''$ c) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

2 Calcule a soma e o produto das raízes reais de cada uma das seguintes equações, sem resolvê-las:

- a) $x^2 - x - 20 = 0$
 b) $16x^2 + 8x + 1 = 0$
 c) $6x^2 - 4x - 3 = 0$
 d) $10x^2 + 3x - 4 = 0$

3 Os números reais x' e x'' são as raízes da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Nessas condições, sem resolver a equação, calcule o valor da expressão $(x' + x'') + (x' \cdot x'')$.

4 Dada a equação $2x^2 - 5x + c = 0$, determine o valor do coeficiente c de maneira que o produto das raízes reais dessa equação seja igual a $\frac{5}{4}$.

5 Qual deve ser o valor do coeficiente b para que a soma das raízes da equação $2x^2 + bx + 1 = 0$ seja igual a $-\frac{7}{6}$?

6 O produto das raízes reais da equação $2x^2 + 5x + 2m - 3 = 0$ é igual a $\frac{3}{4}$. Nessas condições, qual é o valor de m ?

7 Na equação $2px^2 - 3x - 2 = 0$, com $p \neq 0$, a soma das duas raízes reais é igual a $\frac{1}{4}$. Nessas condições, qual é o valor de p ?

8 Na equação $4x^2 - 3px + p - 4 = 0$, a soma das raízes é igual ao produto dessas raízes. Nessas condições, determine o valor de p .

9 As raízes reais da equação $2x^2 + 5x + m - 5 = 0$ são tais que uma delas é igual ao inverso da outra $\left(x' = \frac{1}{x''}\right)$. Nessas condições, determine o valor de m .

10 Na equação $4x^2 - 2(m - 1)x - 1 = 0$, as raízes são opostas ou simétricas ($x' = -x''$). Nessas condições, qual é o valor de m ?



ESCREVENDO UMA EQUAÇÃO DE 2º GRAU QUANDO CONHECEMOS AS DUAS RAÍZES

Uma das aplicações da relação entre as raízes e os coeficientes da equação de 2º grau é permitir escrever a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ quando são dados dois números reais (x' e x'') como raízes da equação.

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Como $a \neq 0$, vamos dividir todos os termos pelo coeficiente a :

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sendo x' e x'' as raízes reais da equação, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \longrightarrow \quad \frac{-b}{a} = x' + x'' \quad \longrightarrow \quad \frac{b}{a} = -(x' + x'') \quad \longrightarrow \quad \textcircled{I}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \quad \longrightarrow \quad \frac{c}{a} = x' \cdot x'' \quad \longrightarrow \quad \textcircled{II}$$

Substituindo \textcircled{I} e \textcircled{II} na equação, temos:

$$x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x'' = 0$$

Se indicarmos por S a soma das raízes ($x' + x'' = S$) e por P o produto dessas raízes ($x' \cdot x'' = P$), poderemos escrever a equação na forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Essa equação nos permite escrever uma equação de 2º grau na variável x quando são dadas as raízes x' e x'' .

Os exemplos seguintes nos mostram como podemos formar a equação:

1. As raízes reais de uma equação de 2º grau, na incógnita x , são os números 7 e -3 . Escrever, então, essa equação.

$$S = 7 + (-3) = 7 - 3 = 4 \quad P = 7 \cdot (-3) = -21$$

A equação procurada será:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - (4)x + (-21) = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

Logo, a equação procurada é $x^2 - 4x - 21 = 0$.

2. Sejam $\frac{2}{5}$ e -1 as raízes reais de uma equação de 2º grau, na incógnita x .

Vamos escrever essa equação

$$S = \frac{2}{5} + (-1) = \frac{2}{5} - 1 = \frac{2-5}{5} = -\frac{3}{5} \quad P = \frac{2}{5} \cdot (-1) = -\frac{2}{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{2}{5}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$

Essa mesma equação pode ser escrita assim: $5x^2 + 3x - 2 = 0$.

Logo, a equação procurada é $x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ ou $5x^2 + 3x - 2 = 0$.

3. Vamos escrever a equação de 2º grau, na incógnita x , sabendo que as raízes dessa equação são os números reais $-3 + \sqrt{3}$ e $-3 - \sqrt{3}$.

$$S = (-3 + \sqrt{3}) + (-3 - \sqrt{3}) = -3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = -6$$

$$P = (-3 + \sqrt{3}) \cdot (-3 - \sqrt{3}) = (-3)^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - (-6)x + 6 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 6 = 0$$

Logo, a equação procurada é $x^2 + 6x + 6 = 0$.

FIXAÇÃO

- 1 Os seguintes pares de números reais são raízes de uma equação de 2º grau na incógnita x ; vamos, então, escrever cada uma das equações:

a) 5 e 7

g) $\frac{1}{2}$ e -4

b) 6 e 6

h) $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$

c) -2 e 11

i) $\frac{2}{7}$ e $-\frac{2}{7}$

d) -8 e -5

j) $\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

e) -8 e 8

l) $-4 + \sqrt{2}$ e $-4 - \sqrt{2}$

f) -9 e 0

m) $-1 + \sqrt{10}$ e $-1 - \sqrt{10}$

- 2 Escreva a equação de 2º grau, na incógnita x , que nos permite calcular dois números reais quando:

a) a soma dos números é 7 e o produto é 10.

b) a soma dos números é -4 e o produto é -60 .

c) a soma dos números é $\frac{1}{2}$ e o produto é $-\frac{1}{2}$.

- 3 Lembrando da forma $x^2 - Sx + P = 0$, procure descobrir, mentalmente, as raízes de cada uma das equações:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $x^2 - 8x + 7 = 0$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

e) $x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $x^2 - 10x + 24 = 0$



RESOLVENDO EQUAÇÕES BIQUADRADAS

Denomina-se *equação biquadrada*, na incógnita x , toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

São exemplos de equações biquadradas:

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

2. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

3. $9x^4 - 6x^2 = 0$

Você nota que as equações biquadradas são equações incompletas de 4º grau, desprovidas dos termos em que a incógnita teria expoente ímpar.

A resolução das equações biquadradas envolve um artifício conforme veremos nos exemplos a seguir.

1. Resolver a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Vamos, inicialmente, indicar $x^2 = p$, usando a incógnita auxiliar p .

Substituindo x^2 por p na equação dada, temos:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$p^2 - 5p + 4 = 0 \rightarrow \text{equação de 2º grau na incógnita } p$$

Nesta equação, temos:

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(4) = 25 - 16 = 9$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} p' = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ p'' = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

As raízes 4 e 1 são valores da incógnita p ; como fizemos $x^2 = p$, vamos obter os valores de x , que serão as raízes da equação biquadrada.

Assim:

$$\text{Para } p = 4, \text{ temos } x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Para } p = 1, \text{ temos } x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Então: } S = \{-2, 2, -1, 1\}.$$

2. No conjunto \mathbb{R}^* , vamos determinar a solução da equação $x^2 = 1 + \frac{2}{x^2}$.

Vamos, inicialmente, escrever a equação dada na sua forma normal:

$$x^2 = 1 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{x^4}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}$$

$$x^4 = x^2 + 2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Vamos, agora, usar a incógnita auxiliar s , fazendo $x^2 = s$:

$$s^2 - s - 2 = 0 \rightarrow \text{equação de 2º grau na incógnita } s$$

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s' = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ s'' = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

As raízes 2 e -1 são valores da incógnita s .

Como fizemos $x^2 = s$, vamos obter os valores de x , que serão as raízes da equação biquadrada. Assim:

Para $s = 2$, temos: $x^2 = 2 \rightarrow x = +\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Para $s = -1$, temos $x^2 = -1 \rightarrow x = +\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ e $x = -\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Logo, $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

FIXAÇÃO

1 Determine, no conjunto \mathbb{R} , o conjunto solução de cada uma das equações biquadradas:

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

d) $x^4 - 4 = 3x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 - 5x^2 + 10 = 0$

c) $x^4 - 16x^2 = 0$

2 Determine o conjunto solução de cada uma das equações, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $(x^2 - 1)(x^2 - 12) + 24 = 0$

b) $(x^2 + 2)^2 = 2 \cdot (x^2 + 6)$

c) $(x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) + 5x^2 = 20$

d) $x^2(x^2 - 9) = -20$

3 Para quais valores reais de x vamos ter

$\frac{x^2 - 2}{x^2 - 4} + 2 = x^2$, (com $x \neq -2$ e $x \neq 2$)?

4 Quais são os valores reais de x para os quais a expressão $x^4 - 26x^2 + 25$ é igual a 0?

5 Quais os valores reais de x que tornam verdadeira a

igualdade $x^2 - 7 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$, (com $x \neq -2$ e $x \neq 2$)?

6 Determine os valores reais de x para os quais as expressões $11x^4 - 6x^2$ e $x^2 + 4$ apresentam valores iguais.

24

RESOLVENDO EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Você já sabe que toda equação que apresenta a incógnita no radicando é chamada *equação irracional*.

São equações irracionais:

1. $x = \sqrt{x}$

3. $\sqrt{x} - x = 2$

2. $\sqrt{x-1} = x + 3$

4. $\sqrt{x^2 - 6x + 8} = 0$

A resolução de uma equação irracional é feita elevando-se os dois membros da equação a uma potência conveniente, a fim de que possamos transformá-la em uma equação racional, que já sabemos resolver.

Veja os exemplos:

1. Resolver, no conjunto \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x+5} = x-1$.

Nessa equação devemos ter $x \geq -5$ para que, no conjunto dos números reais, a expressão $\sqrt{x+5}$ tenha sentido.

$$(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2 \rightarrow \text{elevando os dois membros ao quadrado}$$

$$x+5 = x^2 - 2x + 1$$

$$x+5 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3 \pm 5}{2} \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x'' = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Determinamos as raízes da equação de 2º grau. Para determinar as raízes da equação irracional dada, precisamos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, ao elevar os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes estranhas à equação dada.

Veja, então, a verificação:

Para $x = 4$, temos:

$$\sqrt{-4+5} = 4-1$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3$$

Para $x = -1$, temos:

$$\sqrt{-(-1)+5} = (-1)-1$$

$$\sqrt{-1+5} = -1-1$$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2 \neq -2$$

Logo, apenas o número 4 verifica a equação irracional dada.

Então: $S = \{4\}$.

2. Vamos resolver a equação $\sqrt{x-3} + 5 = x$.

Nessa equação, devemos ter $x \geq 3$ para que a expressão $\sqrt{x-3}$ tenha sentido em \mathbb{R} .

Ao olharmos a equação, notamos que o radical não está isolado em um dos membros, como no caso anterior. Para facilitar nosso cálculo, o primeiro passo é isolar o radical em qualquer um dos membros da equação.

$$\sqrt{x-3} + 5 = x$$

$$\sqrt{x-3} = x-5 \rightarrow \text{isolando o radical no primeiro membro}$$

$$(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2 \rightarrow \text{elevando os dois membros ao quadrado}$$

$$x - 3 = x^2 - 10x + 25$$

$$-x^2 + x + 10x - 3 - 25 = 0$$

$$-x^2 + 11x - 28 = 0$$

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{equação racional a ser resolvida}$$

$$a = 1, \quad b = -11, \quad c = 28$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(1)(28) = 121 - 112 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{11 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{11+3}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x'' = \frac{11-3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Fazendo a verificação:

Para $x = 7$, temos

$$\sqrt{7-3} + 5 = 7$$

$$\sqrt{4} + 5 = 7$$

$$2 + 5 = 7$$

Logo, $S = \{7\}$.

Para $x = 4$, temos:

$$\sqrt{4-3} + 5 = 4$$

$$\sqrt{1} + 5 = 4$$

$$1 + 5 \neq 4$$

FIXAÇÃO

1 Vamos resolver, no conjunto \mathbb{R} , a equação irracional

$$\sqrt{x-1} = 3-x.$$

2 Quais os valores reais de x para os quais a expressão

$$\sqrt{x^2 - 6x + 16} \text{ é igual a } 2\sqrt{2}?$$

3 Qual é o conjunto solução da equação

$$4-x = \sqrt{x+2}, \text{ no conjunto } \mathbb{R}?$$

4 Sabendo que as expressões $\sqrt{x^2-9}$ e $\sqrt{x+11}$ apresentam o mesmo valor, determine os valores reais de x .

5 Sabendo que a raiz quadrada de um número real positivo x é igual à diferença entre 2 e o mesmo número x , determine o número x .

6 Vamos resolver a equação irracional

$$\sqrt{7x-3} - 1 = x \text{ no conjunto } \mathbb{R}.$$

7 Qual é o valor do número real x que torna a expressão

$$\sqrt{x^2 - x + 4} \text{ igual a } 4?$$

8 Sabendo que as expressões $\sqrt{x+\sqrt{x-1}}$ e $\sqrt{7}$ têm o mesmo valor numérico, determine o valor do número real x .

9 Qual é a solução da equação

$$\sqrt{\frac{x}{4-x}} = \sqrt{\frac{4-x}{2}} \text{ (com } x \neq 4\text{)?}$$

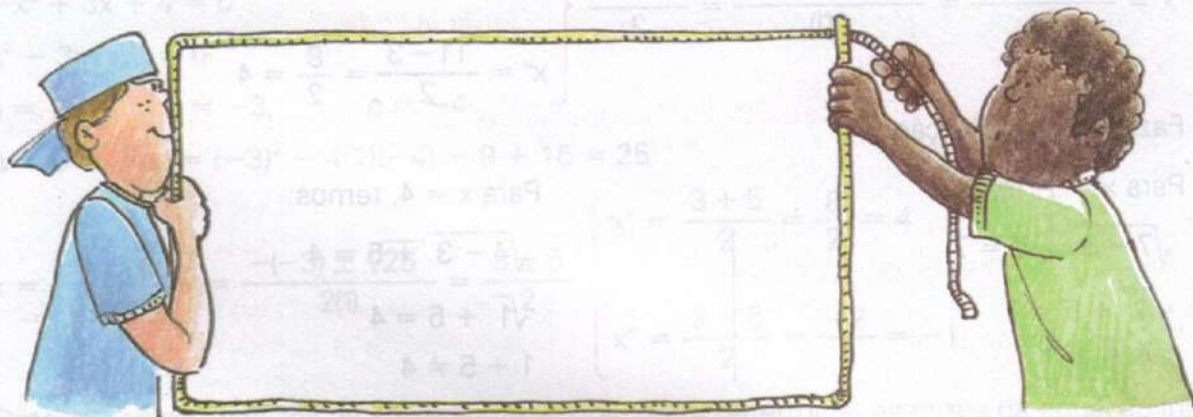
10 Se a um número real x adicionarmos o número real $\sqrt{x+2}$, vamos obter 10. Nessas condições, qual é o valor do número x ?



RESOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU

Vejamos alguns exemplos:

1. Dobrando-se convenientemente 6 m de arame, foi possível construir um retângulo. A área do retângulo é de 2 m^2 . Quais são as dimensões do retângulo formado com o pedaço de arame?



Se representarmos por x e por y as dimensões do retângulo, poderemos escrever:

$$2x + 2y = 6 \text{ ou } x + y = 3 \text{ e } xy = 2$$

Podemos, então, formar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Esse sistema é de 2º grau, pois uma das equações é de 2º grau.

Para resolvê-lo, vamos usar o método da substituição.

Da primeira equação, temos:

$$x + y = 3$$

$$x = 3 - y$$

Substituindo x pelo seu valor $3 - y$ na segunda equação, temos:

$$xy = 2$$

$$(3 - y)y = 2$$

$$3y - y^2 = 2$$

$$-y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow \text{equação de 2º grau na incógnita } y$$

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y'' = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Determinamos, assim, os valores para a incógnita y . Como $x = 3 - y$, vamos determinar os valores da incógnita x .

Quando $y = 2$, então $x = 3 - 2 = 1$.

Quando $y = 1$, então $x = 3 - 1 = 2$.

Logo, temos como solução do sistema os pares ordenados $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Então, $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Assim, as dimensões do retângulo feito quando se dobrou o pedaço de arame são 1 m e 2 m.

2. Vamos resolver o sistema de equações $\begin{cases} x^2 = 6 + xy \\ x + y = 4 \end{cases}$

Da segunda equação, temos:

$$x + y = 4$$

$$x = 4 - y$$

Substituindo, na outra equação, x pelo seu valor $4 - y$, temos:

$$x^2 = 6 + xy$$

$$(4 - y)^2 = 6 + (4 - y)y$$

$$16 - 8y + y^2 = 6 + 4y - y^2$$

$$y^2 + y^2 - 8y - 4y + 16 - 6 = 0$$

$$2y^2 - 12y + 10 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{equação de 2º grau na incógnita } y$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{simplificando a expressão}$$

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ y'' = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Assim, obtivemos os valores da incógnita y .

Como $x = 4 - y$, vamos determinar os valores da incógnita x .

Para $y = 5$, temos $x = 4 - 5 = -1$.

Para $y = 1$, temos $x = 4 - 1 = 3$.

A solução do sistema é dada pelos pares ordenados $(-1, 5)$ e $(3, 1)$.

Logo, $S = \{(-1, 5), (3, 1)\}$.

FIXAÇÃO

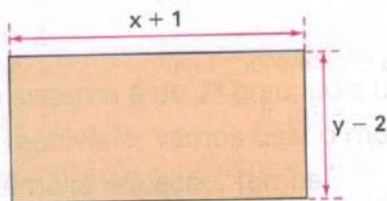
1 Vamos resolver os seguintes sistemas de equações nas incógnitas x e y .

- a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + y^2 = 35 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y(x + y) = 28 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 14 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3 - x \\ (x - y)^2 + x(2y - 1) = 4 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y^2 - 7 = -3x \end{cases}$ g) $\begin{cases} \frac{x + 5y}{x + 2y} = 2 \\ x^2 + y = 6 \end{cases}, (x \neq -2y)$
- d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - xy = 6 \end{cases}$

2 Multiplicando x por y vamos obter 80 e dividindo x por y , obtemos 5. Nessas condições, determine os números x e y .

3 Determine dois números inteiros e positivos tais que o produto entre eles é 140 e a diferença entre eles é 4.

4 No retângulo abaixo, o perímetro é 30 cm e a área é 50 cm^2 . Determine as medidas x e y indicadas.

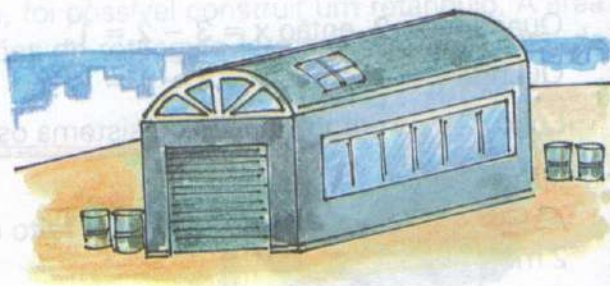


5 Se você dividir um número real positivo x por um número real positivo y vai encontrar 3 como resultado. Se o quadrado do número y é igual ao número x aumentado de 10 unidades, determine os dois números.

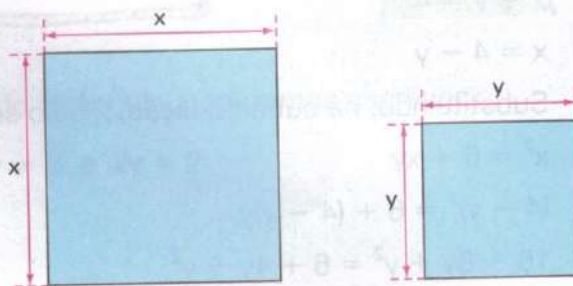
6 Vamos decompor o número 12 em duas parcelas de tal modo que o quadrado da maior menos o quádruplo da menor resulte 66.

7 Sabendo que $x \neq 0$ e $x \neq y$, determine os valores reais positivos de x e y de modo que $\frac{x + y}{x - y} = 2$ e $x = \frac{10 - y}{x}$.

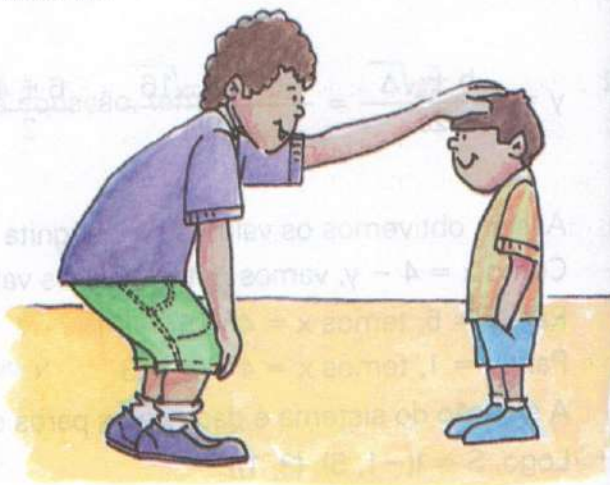
8 Um galpão de forma retangular tem 96 m^2 de área. Se aumentarmos o comprimento desse galpão em 3 m e a largura em 2 m, a área do galpão passa a ser 150 m^2 . Calcule as dimensões originais do galpão.



9 A soma das áreas dos quadrados abaixo dá 52 cm^2 . Sabendo que a diferença entre as medidas dos lados desses quadrados é 2 cm, calcule a área de cada quadrado.

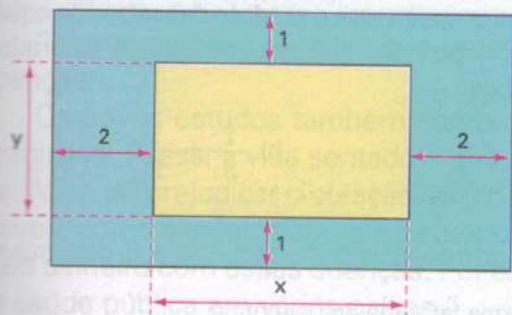


10 Carlos tinha 5 anos quando Eduardo nasceu. Atualmente, a razão entre os quadrados das idades de Eduardo e Carlos é $\frac{4}{9}$. Determine a idade atual de cada um.

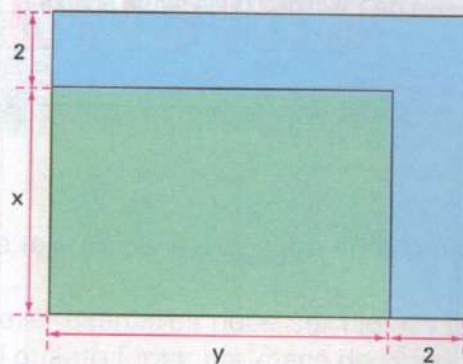


11 Um fazendeiro, percorrendo com um jipe todo o contorno de sua fazenda, de forma retangular, perfaz exatamente 26 km. A área ocupada pela fazenda é de 40 km^2 . Quais são as dimensões da fazenda?

12 Na figura abaixo, a área do retângulo maior é 45 cm^2 , enquanto a área do retângulo menor é 15 cm^2 . Calcule as medidas x e y indicadas.



13 Na figura abaixo, a área da região retangular maior é 88 cm^2 , enquanto a região retangular menor (colorida de verde) tem 54 cm^2 de área. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.



14 A diferença entre as medidas dos lados de dois quadrados é 5 m e a soma das suas áreas é 325 m^2 . Determine a soma dos perímetros desses dois quadrados.

RETOMANDO O MANDO o que aprendeu

1 Quais são os valores reais de x para que as expressões $5x + 9$ e $5 + \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$, sejam iguais?

2 Sem efetuar o produto indicado no primeiro membro, determine as raízes da equação $(x - 5) \cdot (3x + 1) = 0$.

3 A equação $px^2 - 2(p - 1)x + 3 = 0$ admite uma raiz igual a $-\frac{1}{3}$. Nessas condições, qual é o valor de p ?

4 Sejam x' e x'' as duas raízes reais da equação $x - \frac{12}{x} = 1$, com $x \neq 0$. Nessas condições, vamos determinar o valor de:

a) $(x' - x'')^2$ b) $x'^2 - x''^2$

5 Expresse em números decimais as raízes reais da equação $x(4x - 1) = 3(x + 1)$.

6 Consideremos a equação $x^3 - 4x + x^2 - 4 = 0$. Nessas condições:

a) Escreva a forma fatorada do primeiro membro dessa equação.

b) Determine as raízes dessa equação.

7 Qual é o valor que você encontra para a expressão $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$, sabendo que os números a e b , com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a > b$, correspondem às raízes reais da equação $x^2 - x - 12 = 0$?

8 Dada a equação $x^3 - 12x^2 + 11x = 0$, responda:

a) Qual a forma fatorada do primeiro membro dessa equação?

b) Qual é o conjunto solução da equação?

c) Qual é a média aritmética das raízes dessa equação?

9 A equação $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4 . Determine a outra raiz dessa equação.

JORNAIS & REVISTAS

"Novos estudos revelam que uma dose mínima de exercícios já reduz em 40% o risco de doenças.

Os novos estudos também comprovam que não fazer exercícios pode ser pior do que se imaginava. Passar a vida sentado é quase tão prejudicial quanto fumar um maço de cigarros por dia. Além de prejudicar o coração, o sedentarismo contribui para o desenvolvimento de doenças graves, como câncer, diabete e osteoporose (veja quadro). No mundo inteiro, gasta-se cada vez mais dinheiro com essas doenças. Por essa razão, a atividade física está se tornando um quesito de saúde pública em vários países."

(Artigo publicado na revista *Veja* de 2/10/96.)

Os males da inatividade

O sedentarismo está relacionado a:

35% das mortes por problemas cardiovasculares

32% das mortes por câncer de colo

35% das mortes por diabete

O coração e as pernas

Conforme aumenta a atividade física, diminui o risco de morte por acidente cardiovascular.

Veja em quanto:

Redução do risco

Pouco ativo **37%**

Ativo **45%**

Muito ativo **64%**

Perigo de vida

O sedentarismo é um dos principais fatores de risco à saúde

Cigarro **65%**

Sedentarismo **52%**

Colesterol alto **34%**

Pressão alta **34%**

Mexa-se!

Uma pessoa que gasta 150 kcal por dia em atividade física já não é considerada sedentária.

Veja no quadro ao lado, em que atividades e em quanto tempo se pode atingir essa meta.

Para atingir a meta apresentada, sugere-se também correr 3 quilômetros durante x minutos. Determine esse tempo, sabendo que:

$$\frac{5}{x} + \frac{4}{x+1} = \frac{7}{12}$$

use



Lavar o carro durante



45 minutos

Nadar

20 minutos



Jogar basquete

30 minutos

Lavar os vidros da janela ou o chão da casa



45 minutos

Andar 3 quilômetros em **30 minutos**



Andar de bicicleta 6 quilômetros em

15 minutos

4

Função polinomial de 1º grau

A idéia de função está presente nos mais diversos ramos da atividade humana.

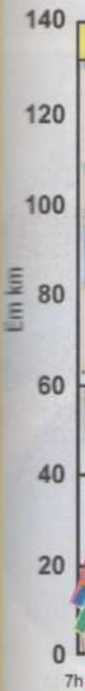


A quantidade de tinta que se gasta para pintar uma parede *depende* da área da parede.

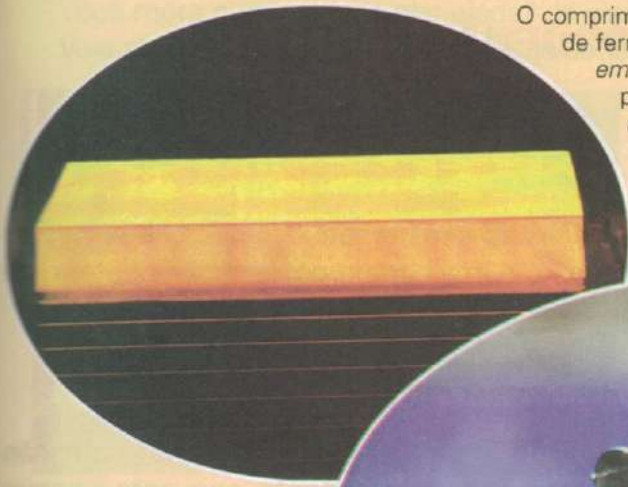


O consumo de combustível de um veículo é dado *em função* da velocidade do veículo.

Es
27/9/9
que oc
ção do

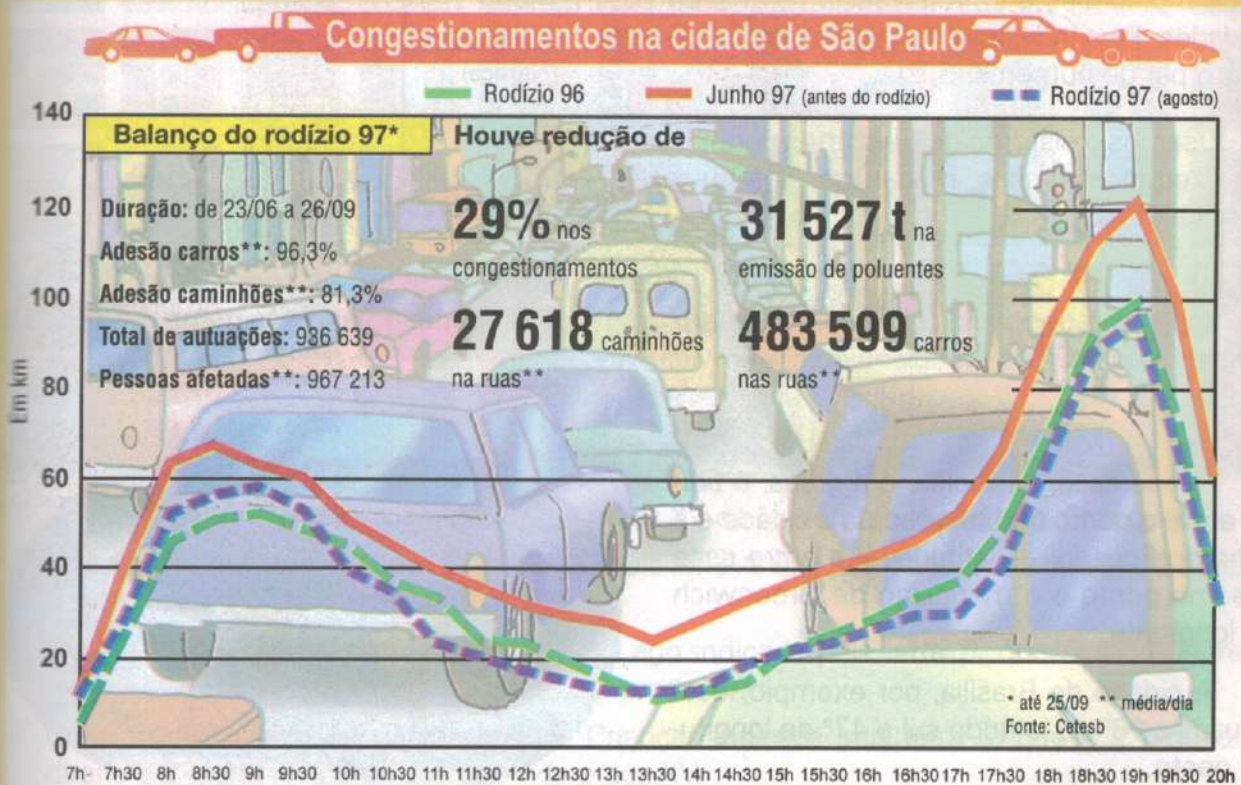


O comprimento de uma barra de ferro *depende* ou é dado *em função* da temperatura, pois o ferro se dilata quando aquecido.



O preço que se paga por uma ligação telefônica é dado *em função* do tempo que se fala ao telefone.

Este gráfico, publicado no jornal *Folha de S. Paulo*, em 27/9/97, nos mostra os congestionamentos, em quilômetros (km), que ocorreram na cidade de São Paulo em 1996 e 1997, *em função* do rodízio de carros.



Em 1637, ao publicar seu livro *La Géométrie*, o filósofo e matemático francês René Descartes lançou a idéia de que um par de números, disposto numa certa ordem, poderia determinar uma posição no plano.



René Descartes

O ponto P dista de O uma distância horizontal de 5 unidades e uma distância vertical de 2 unidades. Para indicar a posição do ponto P usamos o par de números $(5, 2)$.

Usamos o sistema de Descartes para fazer, por exemplo, gráficos, mapas de ruas ou mapas-múndi.

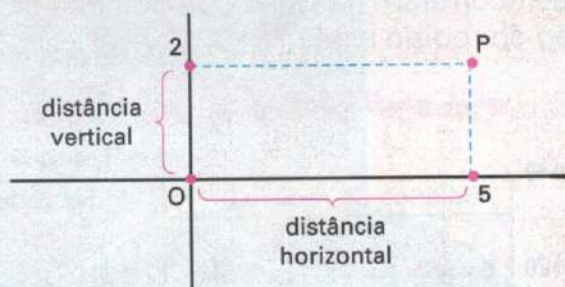
A posição geográfica de uma cidade em um mapa é obtida tomando-se como referência a linha do Equador e o meridiano de Greenwich.

Nesse caso, a medida, em graus, é tirada entre o ponto que representa a cidade e a linha do Equador — latitude — e entre esse mesmo ponto e o meridiano de Greenwich — longitude.

A cidade de Brasília, por exemplo, está situada a 18° de latitude sul e 47° de longitude oeste.

O primeiro número representava a distância medida horizontalmente, enquanto o segundo representava a distância medida verticalmente em relação a um ponto.

Descartes mostrou que, usando como referência um par de retas que se interceptavam, seria possível construir um sistema no qual números poderiam estar associados a pontos.



Você mora numa cidade planejada? Já visitou alguma cidade assim?
Veja alguns exemplos de cidade cuja construção foi planejada.



Brasília (DF)



Rio Claro (SP)

Em cidades planejadas é mais fácil localizar um ponto qualquer. Vamos supor que o mapa abaixo represente o centro de uma cidade planejada. Três amigos, Ana, Beto e Carlos, combinaram de se encontrar no centro da praça XV de Novembro. Ana está na esquina indicada pela letra A, Beto na esquina indicada pela letra B e Carlos na esquina indicada pela letra C.

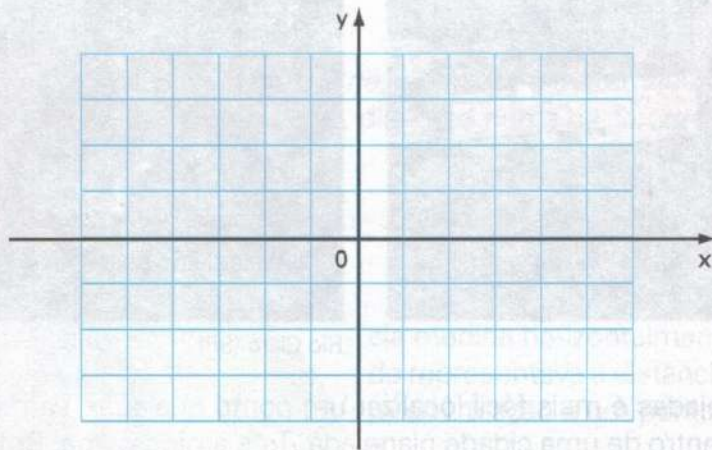


Tomando como referência o centro da praça XV de Novembro, podemos dizer que:

- ✓ Ana está na esquina do Cine Jóia indicada pela letra A, que fica 4 quadras à direita e 2 quadras acima do centro da praça XV.
- ✓ Beto está na esquina do restaurante do Lago indicada pela letra B, que fica 5 quadras à esquerda e 3 quadras abaixo do centro da praça XV.
- ✓ Carlos está na esquina do Parque das Crianças indicada pela letra C, que fica 1 quadra à direita e 2 quadras abaixo do centro da praça XV.

Vamos esquematizar a planta desse mapa do seguinte modo:

◆ Traçamos duas retas perpendiculares, uma horizontal, chamada eixo x , e outra vertical, chamada eixo y .

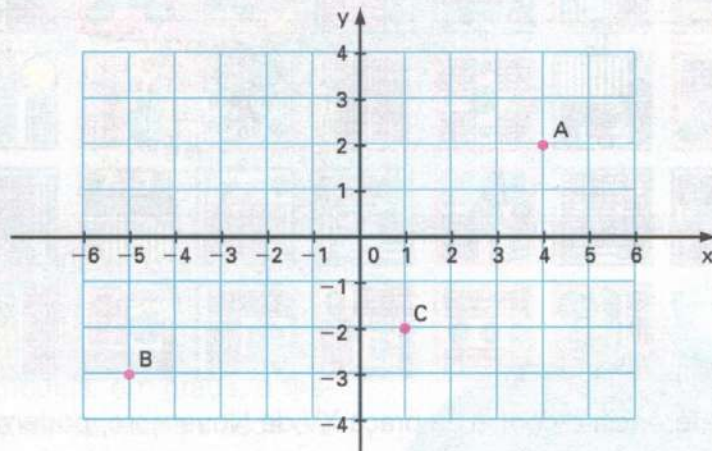


◆◆ O ponto de intersecção das duas retas, que coincide com o centro da praça XV de Novembro, é identificado pelo ponto 0 e recebe o nome de *origem*.

◆◆ Usando segmentos de mesma medida, associamos o lado de cada quadra a esse segmento.

Usaremos:

- ◆ *números positivos*
para identificar as quadras situadas à *direita* e *acima* da praça XV;
- ◆ *números negativos*
para identificar as quadras situadas à *esquerda* e *abaixo* da praça XV.



Assim:

- ✓ Ana está na posição A (4, 2)
- ✓ Beto está na posição B (-5, -3)
- ✓ Carlos está na posição C (1, -2)

Os
conven
eixo x e,

A fi
letras e nú
elemento.



1. Observ
(B, 7).
Dê a lo
a) resta

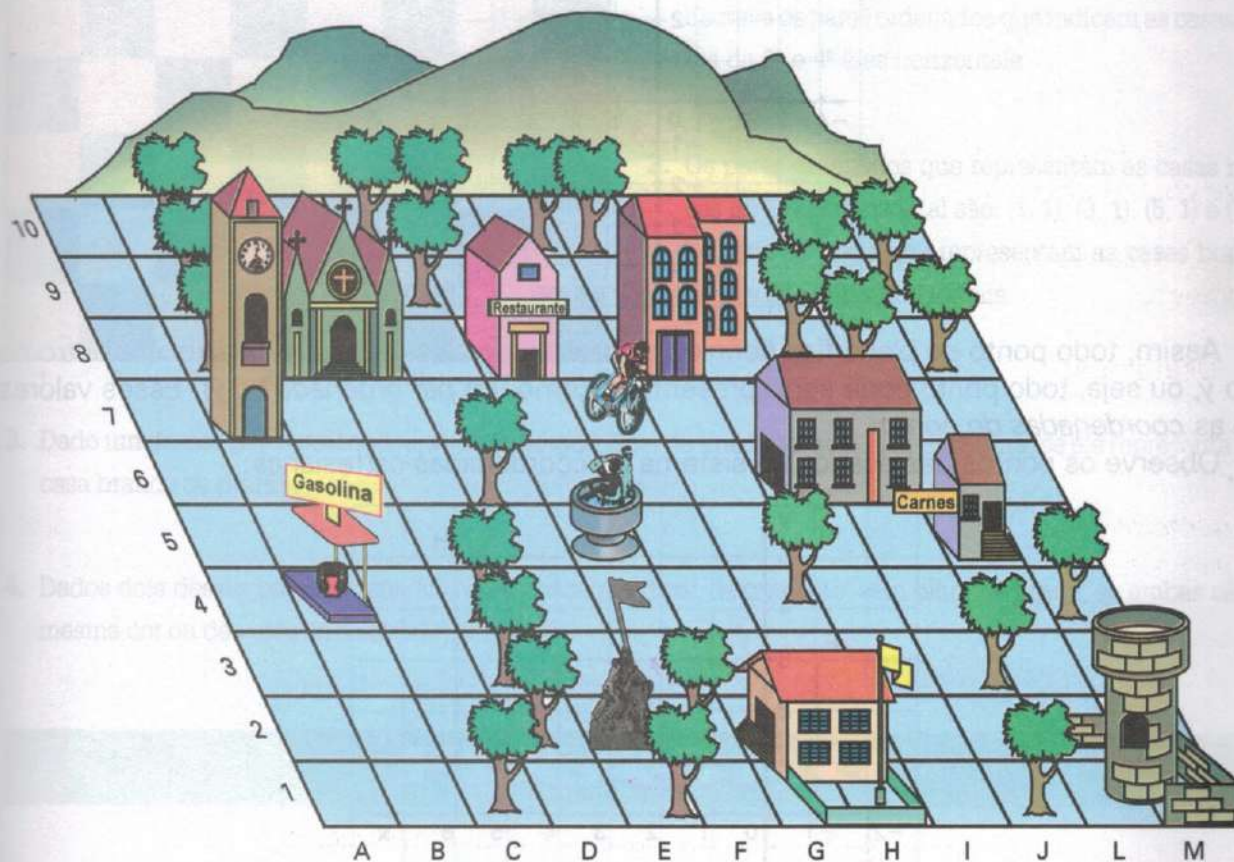
2. O que
a) (L, 5)

3. Faça u
Aprove

Os pares de números $(4, 2)$, $(-5, -3)$ e $(1, -2)$ são chamados *pares ordenados* porque convençamos uma *ordem* para escrever os seus números: em primeiro lugar o número do eixo x e, em seguida, o número do eixo y .

Explorando Gráficos

A figura seguinte nos mostra uma maquete de parte de uma cidade e um sistema de referência indicado por letras e números. Vamos combinar que a letra deve ser o primeiro elemento do par e o número deve ser o segundo elemento.



- Observe a localização da torre da igreja na maquete. Esta localização pode ser representada pelo par ordenado $(B, 7)$.
Dê a localização do:
a) restaurante b) chafariz c) menino andando de bicicleta
- O que você encontra em:
a) $(L, 5)$? b) $(B, 4)$? c) $(E, 2)$?
- Faça um projeto de maquete como este e desenhe: um cruzador, um submarino, uma ilha, um porta-aviões etc. Aproveite a maquete e jogue batalha naval com um amigo de classe que tenha feito o mesmo exercício.

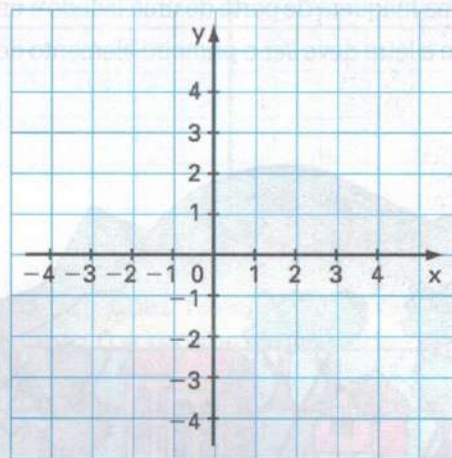
Vamos ver como se constrói um sistema de coordenadas cartesianas.

◆ Traçamos duas retas perpendiculares, uma horizontal, chamada eixo x , e outra vertical, chamada eixo y .

◆◆ O ponto de intersecção dos dois eixos recebe o nome de *origem do sistema*, e corresponde ao par ordenado $(0, 0)$.

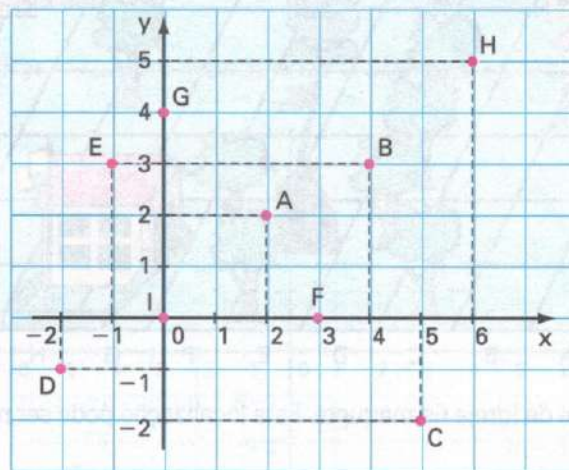
◆◆ Nos eixos, a cada ponto fazemos corresponder um número: os números positivos à direita e acima da origem; os números negativos à esquerda e abaixo da origem.

O sistema assim formado recebe o nome de *plano cartesiano*.



Assim, todo ponto do plano fica definido a partir de dois valores: um no eixo x , e outro no eixo y , ou seja, todo ponto pode ser representado como um *par ordenado* (x, y) . Esses valores são as *coordenadas do ponto*.

Observe os pontos destacados no sistema de coordenadas cartesianas:



$$A(2, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$D(-2, -1) \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$G(0, 4) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$B(4, 3) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$E(-1, 3) \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$H(6, 5) \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$$

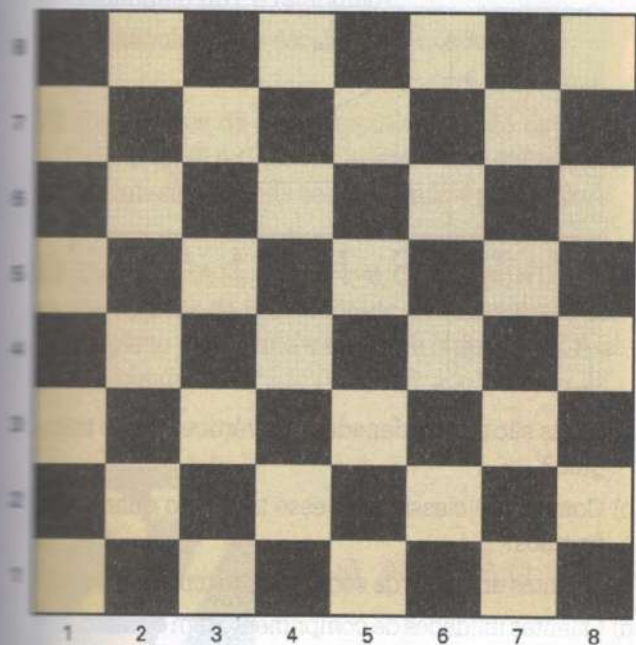
$$C(5, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$F(3, 0) \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$I(0, 0) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Explorando Geometria

Observe o desenho de um tabuleiro de xadrez. Cada casa pode ser identificada por um par ordenado de números: o 1º identifica a fila vertical (coluna) e o 2º, a fila horizontal (linha).



1. Os pares ordenados que indicam as casas pretas da 1ª e da 2ª filas horizontais são:

1ª fila horizontal: (2, 1), (4, 1), (6, 1) e (8, 1)

2ª fila horizontal: (1, 2), (3, 2), (5, 2) e (7, 2)

Escreva os pares ordenados que indicam as casas pretas da 3ª e 4ª filas horizontais.

2. Os pares ordenados que representam as casas brancas da 1ª fila horizontal são: (1, 1), (3, 1), (5, 1) e (7, 1).

Escreva os pares que representam as casas brancas da 5ª e da 6ª filas horizontais.

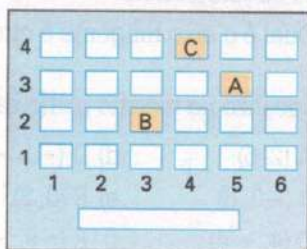
3. Dado um desses pares ordenados, você consegue dizer de imediato, sem olhar na figura, se ele representa uma casa branca ou preta?

4. Dados dois desses pares ordenados, você consegue dizer, de imediato, sem olhar na figura, se ambas são da mesma cor ou de cores diferentes?

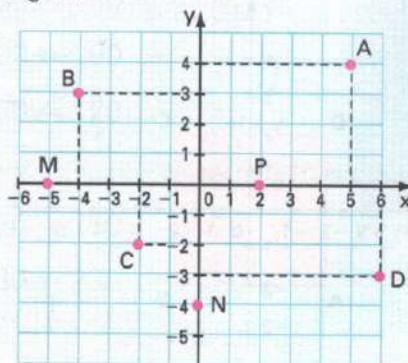
FIXAÇÃO

1 Em um auditório, as poltronas estão dispostas em 6 colunas e 4 linhas, conforme mostra a figura. Sabendo que o primeiro número do par indica a coluna e o segundo indica a linha, escreva o par ordenado que corresponde:

- a) à poltrona A
- b) à poltrona B
- c) à poltrona C

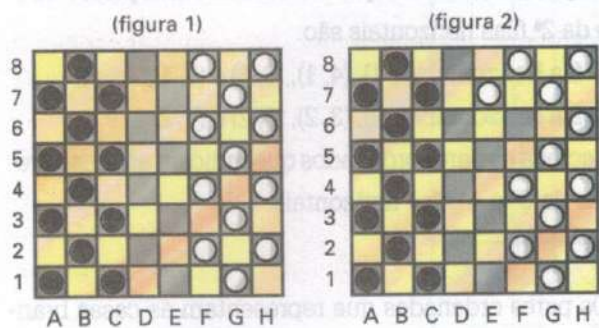


2 Dê as coordenadas cartesianas dos pontos assinalados na figura.



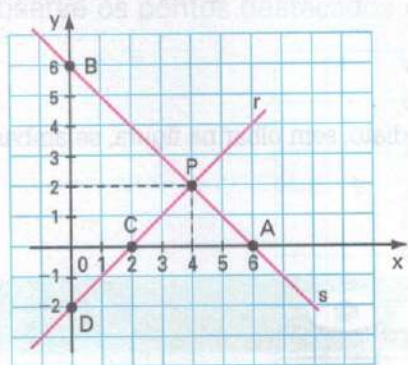
3 Nas figuras seguintes, você está vendo um tabuleiro de dama. Na figura 1, temos as pedras em posição de partida, enquanto a figura 2 mostra a movimentação de uma pedra branca. Sabendo-se que a posição de uma pedra pode ser dada por um par ordenado onde o primeiro elemento é uma letra (coluna) e o segundo é um número (linha), pede-se:

- a posição ocupada, na figura 1, pela pedra que se movimentou.
- a posição ocupada, na figura 2, pela mesma pedra.

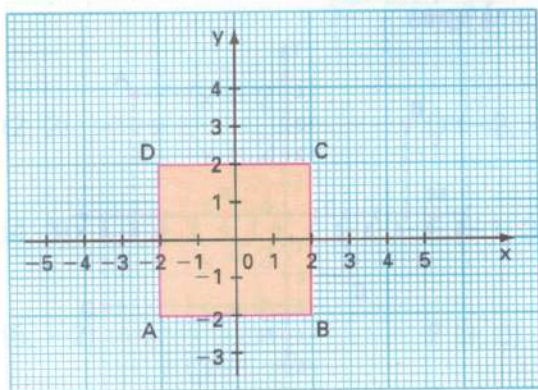


4 Na figura você observa as retas r e s , que se interceptam no ponto P . Nessas condições, dê as coordenadas cartesianas:

- do ponto P
- do ponto A , intersecção da reta s com o eixo x
- do ponto D , intersecção da reta r com o eixo y

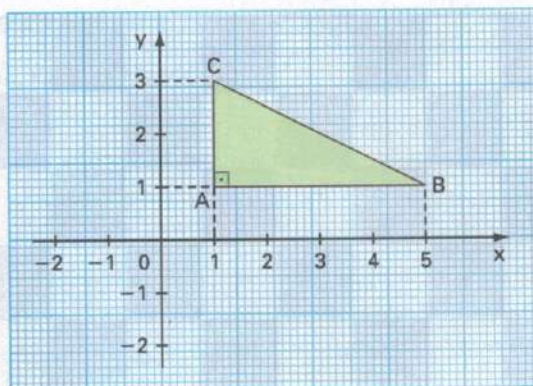


5 Observando o plano cartesiano a seguir, responda:



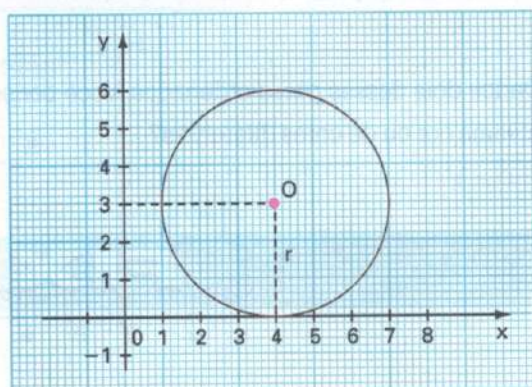
- Quais são as coordenadas dos vértices do quadrado $ABCD$?
- Quantas unidades de comprimento tem cada lado do quadrado?

6 Observando o triângulo ABC , no plano cartesiano seguinte, responda:



- Quais são as coordenadas dos vértices desse triângulo?
- Como você classificaria esse triângulo quanto aos ângulos?
- Quantas unidades de comprimento tem o cateto AB ?
- Quantas unidades de comprimento tem o cateto AC ?

7 Observe a circunferência no plano cartesiano e responda:



- Quais as coordenadas do centro dessa circunferência?
- Quantas unidades de comprimento tem o raio dessa circunferência?
- Qual é o eixo tangente à circunferência?

8 Localize no mesmo plano cartesiano os pontos:

- | | | |
|---------------|----------------|---------------|
| a) $A(2, 5)$ | d) $D(-1, -1)$ | g) $G(-4, 0)$ |
| b) $B(-3, 6)$ | e) $E(0, 3)$ | h) $H(5, 5)$ |
| c) $C(4, -4)$ | f) $F(-9, -3)$ | |

9 Use papel milimetrado e construa os segmentos \overline{AB} e \overline{PR} , sendo dados:

- a) A (5, 2) e B (-1, 4) b) P (-2, -2) e R (3, -4)

10 Sabendo que R (5, 1), S (5, 3) e T (3, 1) são os vértices de um triângulo, desenhe o triângulo e responda:

- a) O triângulo RST é retângulo?
b) O triângulo RST é escaleno ou isósceles?

11 Os vértices de um triângulo ABC são os pontos A (0, 5), B (0, 0) e C (3, 0). Desenhe esse triângulo no plano cartesiano e diga se o triângulo é retângulo.

12 Os pontos A (4, 4), B (-4, 4), C (-4, -4) e D (4, -4) são os vértices de um quadrado. Localize esses pontos no plano cartesiano e construa o quadrado. A seguir responda:

- a) Qual é o comprimento de cada lado desse quadrado?
b) De quantas unidades é o seu perímetro?

13 Desenhe o quadrilátero que tem como vértices os pontos A (-4, 1), B (-4, -2), C (2, -2) e D (2, 1). Feito o desenho, responda:

- a) Qual o quadrilátero que você desenhou no plano cartesiano?
b) Qual é a área do quadrilátero?

14 Use um papel milimetrado para desenhar o quadrilátero cujos vértices são os pontos P (0, 2), Q (4, 0), R (8, 2) e S (4, 4) e identifique o tipo desse quadrilátero.

15 Um quadrado tem seus vértices nos pontos A (3, 3), B (0, 3), C (0, 0) e D (3, 0). Faça o desenho desse quadrado e, a seguir, determine o seu perímetro.

27

A NOÇÃO DE FUNÇÃO

Com bastante freqüência, encontramos situações que envolvem relações entre duas grandezas variáveis.

Consideremos algumas dessas situações:

- 1ª Uma caneta custa 30 reais. Se representamos por x o número dessas canetas que queremos comprar e por y o preço correspondente a pagar, em reais, podemos organizar a seguinte tabela:

Número de canetas (x)	Preço a pagar (y)
1	$1 \cdot 30 = 30$
2	$2 \cdot 30 = 60$
3	$3 \cdot 30 = 90$
4	$4 \cdot 30 = 120$
...	...
10	$10 \cdot 30 = 300$
11	$11 \cdot 30 = 330$
...	...

Olhando a tabela você percebe que o preço y a pagar vai depender do número x de canetas que forem compradas. Entre as grandezas y e x existe uma relação expressa pela sentença matemática $y = x \cdot 30$ ou $y = 30x$.

Você nota também que:

- ✓ o número x de canetas é uma grandeza variável
- ✓ o preço y a pagar é uma grandeza variável
- ✓ a todos os valores de x estão associados valores de y
- ✓ para cada valor de x está associado um único valor de y

Nessas condições podemos dizer:

O preço y a pagar é dado *em função* do número x de canetas e a sentença $y = 30x$ é chamada *lei de formação da função*.

Uma vez estabelecida a relação entre as variáveis *número de canetas* e *preço a pagar*, podemos responder a questões como:

a) Quanto vou pagar por 50 canetas iguais a essa?

$$y = 30x \Rightarrow y = 30 \cdot 50 \Rightarrow y = 1\,500$$

Logo, vou pagar R\$ 1 500,00 por 50 canetas.

b) Se eu tiver R\$ 780,00, quantas dessas canetas consigo comprar?

$$y = 30x \Rightarrow 780 = 30x \Rightarrow x = \frac{780}{30} = 26$$

Portanto, vou conseguir comprar 26 canetas.

2ª Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores Internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de R\$ 30,00, mais 15 centavos de real (R\$ 0,15) a cada minuto de uso. O valor a ser pago por Márcia ao final do mês depende, então, do tempo que ela gasta acessando a Internet.



Observe a tabela que relaciona o valor a ser pago com o tempo de acesso à rede:

Tempo de acesso (em minutos)	Valor a ser pago (em R\$)
1	$30 + 0,15 = 30,15$
2	$30 + 0,15 \cdot 2 = 30,30$
3	$30 + 0,15 \cdot 3 = 30,45$
4	$30 + 0,15 \cdot 4 = 30,60$
...	...
10	$30 + 0,15 \cdot 10 = 31,50$
...	...
20	$30 + 0,15 \cdot 20 = 33,00$
...	...
60	$30 + 0,15 \cdot 60 = 39,00$
...	...
t	$30 + 0,15 \cdot t$

Podemos, então, estabelecer uma relação entre o tempo de utilização da rede e o valor a ser pago por Márcia no final do mês, através da fórmula $V = 30 + 0,15 \cdot t$, onde V é o valor a ser pago (em reais) e t o tempo de utilização (em minutos).

Nessa fórmula:

- ✓ t é uma grandeza variável
- ✓ V é uma grandeza variável
- ✓ a variável V depende da variável t , ou seja, a variável V é dada em função da variável t

Estabelecida a relação entre as variáveis tempo e valor, podemos responder às questões:

a) Quanto gastará Márcia se, durante o mês, utilizar a Internet por 10h 20min?

$$10\text{h } 20\text{min} = 10 \cdot 60 + 20 = 620 \text{ min}$$

$$V = 30 + 0,15 \cdot 620 = 123,00$$

Ela gastará R\$ 123,00.

b) Quantas horas ela poderá utilizar a Internet, se quer gastar, no máximo, R\$ 90,00 no mês?

$$V = 90 \longrightarrow 90 = 30 + 0,15 \cdot t \Rightarrow 60 = 0,15 \cdot t \Rightarrow t = \frac{60}{0,15} = 400 \text{ min}$$

$$400 \left| \begin{array}{l} 60 \\ 40 \quad 6 \end{array} \right. \longrightarrow 400 \text{ min} = 6\text{h } 40\text{min}$$

Nesse caso, ela poderá utilizar a Internet por 6h 40 min.

Quando escrevemos a lei de formação de uma função, utilizamos, em geral, as letras x e y para representar as variáveis que estamos relacionando, sendo y dada em função de x . Desse modo, estamos uniformizando a notação de funções.

Explorando Álgebra

Oba! Férias no *camping*. Veja os preços e as promoções:

Camping do Sol

- 5 reais o pernoite (por pessoa) durante a 1ª semana (7 noites)
- 4 reais o pernoite (por pessoa) durante a 2ª semana (7 noites)
- 3 reais o pernoite (por pessoa) para o restante da estada
- crianças com menos de 5 anos não pagam

Camping dos Pássaros

- 4 reais o pernoite — valor por pessoa a partir de 15 anos
- 2 reais o pernoite para pessoas com menos de 15 anos

A família Soares — pai, mãe e 2 filhos — vai acampar durante 2 semanas (14 noites) em um mesmo *camping*. Que *camping* eles devem escolher? Isso depende da idade das crianças.

Como podemos ajudá-los a fazer essa escolha?

Para responder essa pergunta construa uma tabela, onde x representa a idade de um dos filhos, o mais velho, e y a idade do outro.

Idade dos filhos	Camping do Sol	Camping dos Pássaros
$x < 5$		
$y < 5$ e $5 \leq x < 15$		
$y < 5$ e $x \geq 15$		
$y \geq 5$ e $x < 15$		
$5 \leq y < 15$ e $x \geq 15$		
$y \geq 15$		

FIXAÇÃO

1 A área de um quadrado é dada em função da medida do seu lado. Sendo y a área e sendo x a medida do lado, qual é a lei de formação dessa função?

2 Quando compramos laranja na feira, o preço y que pagamos ao feirante depende ou é dado em função do número x de dúzias de laranja que compramos. Se a dúzia de laranja custa 3 reais, qual é a lei de formação dessa função?



Dolfin Martins/Pulsar

3 Um vendedor trabalha à base de comissão. Assim, seu ganho mensal y depende ou é dado em função do total x de vendas que ele realiza durante o mês. Sabendo-se que esse vendedor recebe 15% do total que vende, qual é a lei de formação dessa função?



4 Uma firma que conserta geladeiras cobra uma taxa fixa de 20 reais pela visita e mais 0,30 real, por hora, de mão-de-obra. Logo, o preço y que se paga pelo conserto depende ou é dado em função dessas condições. Sabendo-se que foram empregadas x

horas de mão-de-obra, qual é a lei de formação que define essa função?



Neilson Toledo

5 Uma academia paga a seus professores a quantia de 15 reais por aula mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então, a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função do número x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação dessa função?

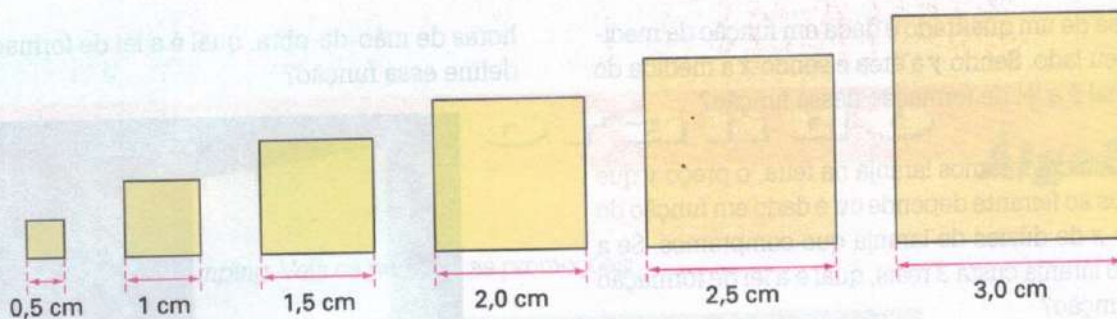
6 Uma máquina produz 1 200 peças por hora. Então, a produção y de peças por dia depende do número x de horas que a máquina trabalha durante o dia. Encontre a lei de formação dessa função.

7 Vamos escrever a lei de formação de cada uma das seguintes funções:

- A cada número real x associar um número real y que representa o triplo do número x .
- A cada número real x associar um número real y que representa o dobro de x menos 10.
- A cada número real positivo x associar um número real y que representa o inverso de x .
- A cada número real x associar um número real y que representa o quadrado de x menos 4.
- A cada número real x associar um número real y que representa a metade de x aumentada de 5.

A função como relação entre dois conjuntos

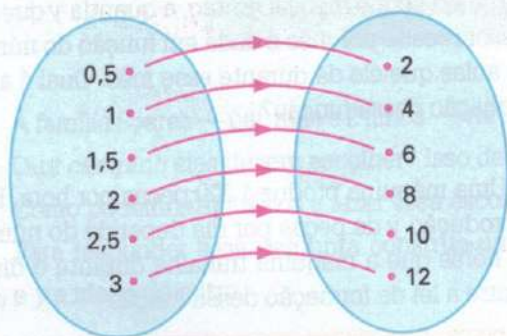
Observe os quadrados abaixo onde estão assinaladas as medidas de seus lados.



Podemos construir uma tabela relacionando as medidas dos lados desses quadrados com as medidas dos seus perímetros (soma das medidas dos lados).

Medida do lado (em cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Perímetro (em cm)	2	4	6	8	10	12

Essa tabela também pode ser representada na forma de um diagrama, pelo qual relacionamos dois conjuntos: A , conjunto formado pelas medidas dos lados, e B , conjunto formado pelos perímetros.



As flechas indicam a relação:

lado 0,5 cm \longrightarrow perímetro 2 cm

lado 1 cm \longrightarrow perímetro 4 cm

E assim por diante.

Nessa relação, você pode notar que:

- ✓ todos os elementos do conjunto A estão associados a um valor do conjunto B .
- ✓ cada elemento do conjunto A está associado a *um único* valor do conjunto B .

Nessas condições, dizemos que a relação entre os conjuntos A e B é *uma função de A em B* . Indicamos:

$$f: A \longrightarrow B$$

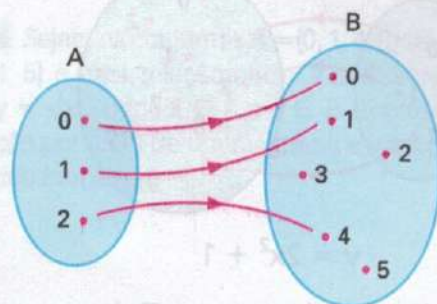
\searrow
função de A em B

Podemos também escrever a fórmula matemática ou lei de formação dessa função: $y = 4x$, onde y é o perímetro e x a medida do lado.

São dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a relação entre A e B expressa pela fórmula matemática $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Vamos representar essa relação através de um diagrama:

$x \in A$	$y \in B$
$x = 0$	$y = 0^2 = 0$
$x = 1$	$y = 1^2 = 1$
$x = 2$	$y = 2^2 = 4$



Observe que:

- ✓ todos os elementos do conjunto A estão associados a um valor no conjunto B .
- ✓ cada elemento do conjunto A está associado a *um único valor* no conjunto B .

Nessas condições, dizemos que a relação entre A e B é uma *função de A em B* .

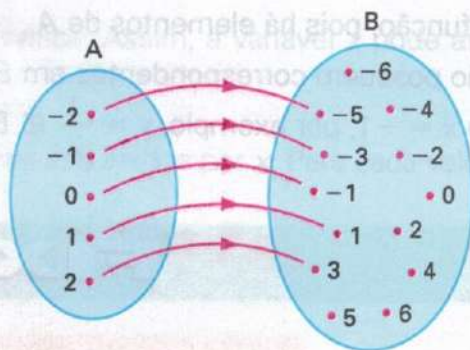
$$\text{Notação: } f: A \longrightarrow B$$

$$y = x^2$$

Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq y \leq 6\}$ e uma relação entre A e B expressa pela lei de formação $y = 2x - 1$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Vamos representar essa relação por meio de um diagrama:

$x \in A$	$y \in B$
$x = -2$	$y = 2(-2) - 1 = -5$
$x = -1$	$y = 2(-1) - 1 = -3$
$x = 0$	$y = 2(0) - 1 = -1$
$x = 1$	$y = 2(1) - 1 = 1$
$x = 2$	$y = 2(2) - 1 = 3$



Observe que:

- ✓ todos os elementos do conjunto A estão associados a um valor no conjunto B .
- ✓ cada elemento do conjunto A está associado a *um único valor* no conjunto B .

Nessas condições, dizemos que a relação entre A e B é uma *função de A em B* .

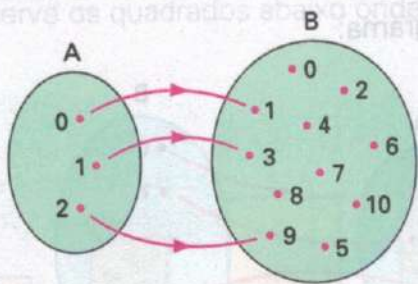
$$\text{Notação: } f: A \longrightarrow B$$

$$y = 2x - 1$$

De maneira geral:

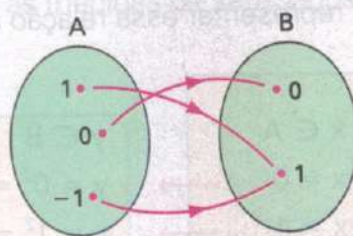
Sendo A e B dois conjuntos não-vazios, uma relação entre A e B é chamada *função* quando a cada elemento x do conjunto A está associado *um único* elemento y do conjunto B .

Observe os diagramas abaixo que representam relações entre os conjuntos A e B:



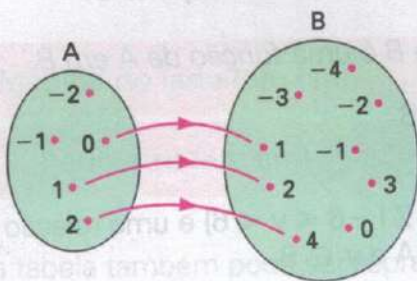
$$y = 2x^2 + 1$$

É função, pois todo elemento $x \in A$ tem correspondente em B, e cada elemento tem um único correspondente em B.



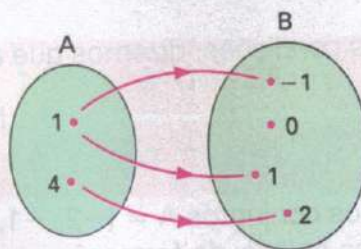
$$y = x^4$$

É função, pois todo elemento $x \in A$ tem correspondente em B, e cada elemento tem um único correspondente em B.



$$y = 2^x$$

Não é função, pois há elementos de A que não possuem correspondentes em B (sendo $x = -1$, por exemplo, $y = \frac{1}{2} \notin B$).

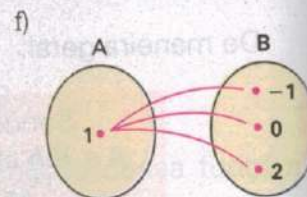
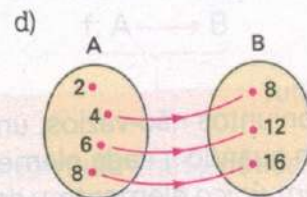
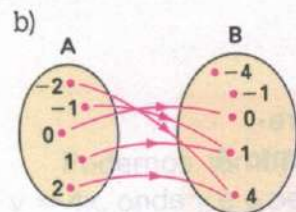
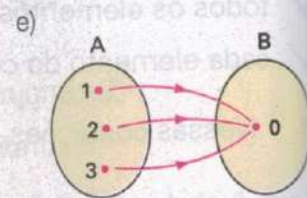
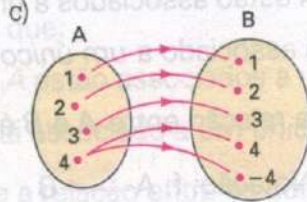
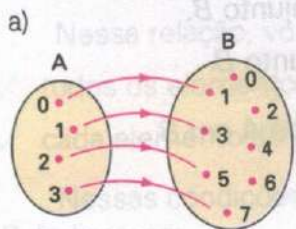


$$y^2 = x$$

Não é função, pois há elementos de A que possuem mais de um correspondente em B (sendo $x = 1$, $y = \pm 1$).

FIXAÇÃO

1 Observe os diagramas que representam relações e assinale as que são funções de A em B.



2 Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e uma relação entre A e B dada pela fórmula $y = -x + 7$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Represente essa relação por meio de um diagrama e verifique se ela é ou não função. Justifique sua resposta.

3 Seja a relação entre dois conjuntos A e B dada pela fórmula $y = \frac{x}{2} + 3$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Sendo

$A = \{0, 4, 10\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, represente essa relação por meio de um diagrama e verifique se ela é ou não função.

4 Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e uma relação entre A e B dada pela fórmula $y = \sqrt{x}$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Represente essa relação por meio de um diagrama e verifique se ela é ou não função.

Domínio e imagem de uma função

Quando estamos relacionando duas variáveis por meio de uma função, devemos estar atentos aos possíveis valores que as variáveis podem assumir na função.

Anteriormente, vimos que o perímetro de um quadrado é dado em função da medida do seu lado, pela lei de formação $y = 4x$.

Nesse caso, x tem que ser um número real positivo, ou seja, $x \in \mathbb{R}^+$, pois não existe medida de lado nula ou negativa. Assim, x nunca pode assumir o valor -2 , por exemplo.

Os valores que y irá assumir dependem dos valores assumidos por x . Para cada valor de x teremos um valor correspondente para y .

Na função dada pela fórmula $y = \frac{1}{x}$, a variável x não pode assumir o valor 0 (zero), pois a fração $\frac{1}{0}$ (divisão por zero) não é definida em Matemática. Assim, a variável x pode assumir qualquer valor real, menos o zero, ou seja, $x \in \mathbb{R}^*$.

Os valores que y irá assumir dependem dos valores assumidos por x . Para cada valor de x teremos um valor correspondente para y .

Vamos definir:

O conjunto de valores que a variável x pode assumir chama-se *domínio* da função. Vamos indicá-lo por D .

O valor da variável y corresponde a um determinado valor de x chamado *imagem* do número x pela função. O conjunto formado por todos os valores de y é chamado *conjunto imagem* da função. Vamos indicá-lo por Im .

Vejamos então:

♦ O perímetro de um triângulo equilátero é dado em função da medida do seu lado.

Sendo x a medida do lado e y o perímetro do triângulo equilátero, essa função tem a seguinte fórmula matemática: $y = 3x$.

A partir do que vimos acima, o domínio da função é $D = \mathbb{R}^+$ ou $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Nessas condições, podemos determinar a imagem de cada valor de x :

Se $x = 3$, então $y = 3 \cdot (3) = 9 \rightarrow 9$ é a imagem do número 3 pela função.

Se $x = 2,5$, então $y = 3 \cdot (2,5) = 7,5 \rightarrow 7,5$ é a imagem do número 2,5 pela função.

Se $x = \sqrt{10}$, então $y = 3 \cdot (\sqrt{10}) = 3\sqrt{10} \rightarrow 3\sqrt{10}$ é a imagem do número $\sqrt{10}$ pela função.

Se $x = \frac{2}{15}$, então $y = 3 \cdot \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5}$ é a imagem do número $\frac{2}{15}$ pela função.

- ❖ Considere a função dada pela fórmula $y = \frac{1}{x}$. Nessa função a variável x pode assumir qualquer valor real, menos aqueles que anulem o denominador, uma vez que não definimos fração com denominador zero.

Nesse caso, o domínio da função é $D = \mathbb{R}^*$ ou $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Se $x = 10$, então $y = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{1}{10}$ é a imagem do número 10 pela função.

Se $x = -2$, então $y = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ é a imagem do número -2 pela função.

Se $x = \frac{1}{8}$, então $y = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \rightarrow 8$ é a imagem do número $\frac{1}{8}$ pela função.

- ❖ Quando a um número real associamos o seu triplo aumentado de 2 unidades, temos uma função definida pela fórmula matemática $y = 3x + 2$. Nessa função não há restrições para os valores que x pode assumir. Nesse caso, x pode assumir todos os valores reais. Logo, o domínio da função é $D = \mathbb{R}$.

Assim, podemos determinar a imagem de qualquer elemento do domínio.

Se $x = -10$, então $y = 3(-10) + 2 = -28 \rightarrow -28$ é a imagem do número -10 pela função.

Se $x = 0,5$, então $y = 3(0,5) + 2 = 3,5 \rightarrow 3,5$ é a imagem do número 0,5 pela função.

Se $x = -\frac{1}{3}$, então $y = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 1 \rightarrow 1$ é a imagem do número $-\frac{1}{3}$ pela função.

FIXAÇÃO

1 O perímetro y de um quadrado é dado em função da medida x do lado. Essa função é definida pela fórmula matemática $y = 4x$. Nessas condições, responda:

a) Qual é o domínio da função?

b) Qual é a imagem do número 21 pela função?

c) Qual é a imagem do número 10,5 pela função?

d) Qual é o número real x cuja imagem pela função é 28?

2 A área de um quadrado é dada em função da medida do lado. Sendo y a área e x a medida do lado, a função é definida pela fórmula matemática $y = x^2$. Nessas condições, determine:

- a imagem do número 0,4 pela função
- a imagem do número $\sqrt{5}$ pela função
- o número real x cuja imagem pela função é 81

3 O preço de um sorvete é 2,50 reais. Se você comprar x sorvetes, deverá pagar y reais, ou seja, a quantia que você vai pagar é dada em função do número de sorvetes que vai comprar. Nessas condições, responda:



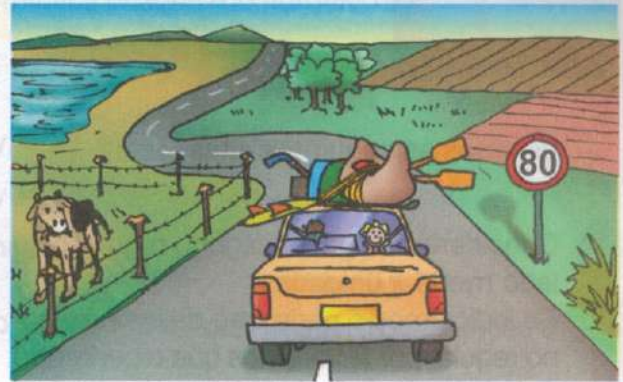
- Qual é a fórmula matemática que define essa função?
- Quanto você gastará se comprar 3 sorvetes?
- Qual é a imagem do número 7 pela função?
- Se você pagou 12,50 reais, quantos sorvetes você comprou?
- Qual é o número x cuja imagem pela função é 20?

4 Quando a um número real associamos o seu dobro diminuído de 5 unidades, temos uma função definida pela fórmula matemática $y = 2x - 5$. Nessas condições, determine:

- o domínio dessa função
- a imagem do número 3,5 pela função
- a imagem do número $\frac{5}{2}$ pela função
- o número real x cuja imagem pela função é -1
- o número real x cuja imagem pela função é $\frac{1}{2}$

5 Um motorista, saindo de um ponto A , viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, desde o ponto inicial, pode ser calculada por $y = 51x + 17$, em que y é dado em quilômetros e x é dado em horas.

Nessas condições, determine as distâncias percorridas de hora em hora, desde $x = 1$, até $x = 4$.



6 Uma função é definida pela fórmula matemática $y = 1 - 7x$, sendo o seu domínio dado por $D = \mathbb{R}$. Nessas condições:

- Qual é a imagem do número real -3 pela função?
- Qual é a imagem do número 0,2 pela função?
- Qual é o número real x cuja imagem pela função é -41 ?

7 Sabemos que uma função é definida pela fórmula matemática $y = \frac{10}{x}$ e seu domínio é o conjunto \mathbb{R}^* . Nessas condições:

- Qual é a imagem do número $\sqrt{5}$ pela função?
- Qual é a imagem do número 0,1 pela função?
- Qual é o número real x cuja imagem pela função é $\frac{1}{5}$?
- Qual é o número real x cuja imagem pela função é $\frac{2}{\sqrt{2}}$?

8 Em uma função definida pela fórmula matemática $y = x^2 - 8x + 12$, cujo domínio é \mathbb{R} , determine o número real x cuja imagem pela função é 0.

9 Em um retângulo, cujo comprimento é 50 unidades, a área y é dada em função da largura x . Nessas condições:

- Escreva a fórmula matemática que define essa função.
- Qual é a imagem do número 32 pela função?
- Qual é o número real x cuja imagem pela função é 750?

Vejam as seguintes situações:

- 1ª** Consideremos um hexágono regular cujo lado mede x unidades. Se indicarmos o perímetro desse hexágono regular por y , veremos que o perímetro é dado em função do lado e que essa função é definida pela fórmula matemática

$$y = 6x$$

- 2ª** Consideremos um retângulo onde o comprimento mede x unidades e a largura mede 10 unidades. Se indicarmos por y o perímetro desse retângulo, veremos que o perímetro é dado em função do comprimento e que essa função é definida pela fórmula matemática

$$y = 2x + 20$$

Podemos observar, então, que nas duas fórmulas matemáticas o 2º membro é um polinômio de 1º grau na variável x .

$$y = 6x$$

polinômio de 1º grau
na variável x

$$y = 2x + 20$$

polinômio de 1º grau
na variável x

Uma função é chamada *polinomial de 1º grau* ou simplesmente *função de 1º grau* quando é definida pela fórmula matemática $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Pela definição, são funções polinomiais de 1º grau:

✓ $y = 3x - 1$

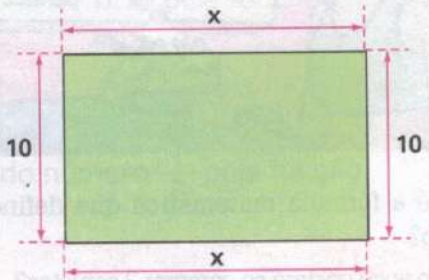
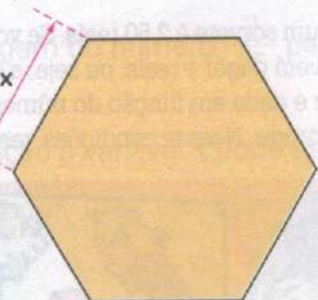
✓ $y = \frac{1}{3}x - 2x$

✓ $y = -6x$

✓ $y = 7 - 5x$

✓ $y = \frac{1}{2}x + 5$

✓ $y = 12x$



Ob
1. Dad
Nes
Daí:
y =
y =
Log
2. Dac
Nes
Daí:
1
10
1
10
1 =
Log
T
Veículo:
coeficie
as tabel
auton
auton
moto
cami
cami
gasol
cami
álcool
cami
ônib
(Fon

Observe, agora, alguns exemplos de questões que envolvem funções de 1º grau:

1. Dada a função definida por $y = -7x + 5$, determinar a imagem do número real -3 pela função. Neste caso, temos $x = -3$.

Daí:

$$y = -7x + 5$$

$$y = 21 + 5$$

$$y = -7(-3) + 5$$

$$y = 26$$

Logo, 26 é a imagem do número -3 pela função.

2. Dada a função definida por $y = 5 - 4x$, qual é o número real x cuja imagem pela função é $\frac{1}{10}$?

Neste caso, temos $y = \frac{1}{10}$.

Daí:

$$\frac{1}{10} = 5 - 4x$$

$$1 + 40x = 50$$

$$\frac{1}{10} = \frac{50 - 40x}{10}$$

$$40x = 50 - 1$$

$$1 = 50 - 40x$$

$$40x = 49$$

$$x = \frac{49}{40}$$

Logo, o número real procurado é $\frac{49}{40}$.

Explorando Tabelas

Todo ano os proprietários de carros, motos, ônibus etc. devem pagar o IPVA (Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores). Esse imposto (i) é calculado pela fórmula $i = v \cdot c$, onde v é o valor venal do veículo e c é o coeficiente. O imposto pode ser parcelado em três vezes ou pode ser pago a vista, com um desconto de 3,5%. Veja as tabelas:

veículo	coeficiente	ano de fabricação				
		marca-modelo	1997	1996	1995	1994
automóvel — gasolina	4% = 0,04	Fiat: Palio ED/EDX-1.0	11 290	10 868	9 586	—
automóvel — álcool	3% = 0,03	VW: Gol 1000	8 900	8 504	7 636	7 025
motocicletas	2% = 0,02	Ford: Fiesta 1.0	11 011	10 228	8 326	7 453
camionetes simples	2% = 0,02	Ford: F1000 (cabine simples)	19 354	17 540	16 241	14 789
camionetes duplas — gasolina	4% = 0,04	GM: D10/D20 (cabine dupla)	29 500	27 750	25 200	23 805
camionetes duplas — álcool	3% = 0,03	Ford: caminhão cargo 2425	59 100	52 900	49 000	44 900
caminhões	1,5% = 0,015	Volvo - ônibus	132 000	106 100	95 000	90 000
ônibus/microônibus	2% = 0,02	Honda - CG 125 (moto)	2 560	2 430	2 310	2 190

(Fonte: *Jornal da Tarde*, 24/10/97.)

- Qual é o valor do IPVA a ser pago, em três vezes, pelo proprietário de um Fiat – Pálio ED, ano 96, movido a gasolina?
- Dos automóveis que aparecem na tabela, qual deles paga o menor IPVA, quando parcelado em três vezes? Qual o valor da parcela mensal?
- Mário tem uma moto Honda – CG 125, ano 94, e uma camionete Ford – F1000, cabine simples, álcool, ano 97. A cada mês, ele só pode dispor de R\$ 150,00 para pagamento do IPVA. Nessas condições, ele poderá optar por pagar o IPVA da moto a vista e o da camionete parcelado? Em caso negativo, como poderá pagar essa dívida?
- Uma empresa de transporte reservou R\$ 60 560,00 para pagar cada parcela de IPVA de sua frota de ônibus Volvo, sendo 10 veículos do ano de 94 e os demais de 97. Quantos ônibus de 97 essa empresa possui?

FIXAÇÃO

- Uma função polinomial de 1ª grau é definida por $y = 5x + 3$. Nessas condições, determine a imagem do número -2 pela função.
- Dada a função polinomial de 1ª grau definida por $y = -8x + 4$, determine o número real x cuja imagem pela função é 0.
- O perímetro y de um quadrado é dado em função da medida x do lado, função esta definida pela fórmula matemática $y = 4x$. Nessas condições:
 - Organize uma tabela para as seguintes medidas do lado:
5 cm; 7,2 cm; 11 cm; 20,5 cm e $10\sqrt{3}$ cm.
 - Observando a tabela que você organizou, qual é a imagem do número real $10\sqrt{3}$ pela função?
 - Observando a tabela que você organizou, qual é o número real x cuja imagem, pela tabela, é 44?
- Descubra o número real x cuja imagem pela função $y = 1 - 9x$ é:
 - 19
 - 0,1
- Dada a função $y = \frac{1}{4}x - 2$, determine a imagem pela função de cada um dos números reais.
 - 0
 - 4
 - 8
- O chefe do departamento de promoção de uma loja verificou que quanto mais anunciava na televisão, mais ele vendia. Logo, a venda era dada em função dos anúncios feitos na televisão. Após estudos, verificou-se que essa função era definida pela fórmula $y = \frac{3}{2}x + 150$, em que y representa a quantidade de mercadorias vendidas na semana e x representa o número de comerciais de televisão durante essa semana. Nessas condições:
 - Quantas mercadorias a loja vendeu durante a semana em que o seu comercial apareceu 42 vezes na televisão?
 - Quantas vezes o comercial da loja apareceu na televisão durante a semana em que a loja vendeu 240 mercadorias?
- Em um retângulo, a largura mede 72 cm e o comprimento mede x cm. Se você indicar o perímetro desse retângulo por y , esse perímetro será definido pela função $y = 2x + 144$. Nessas condições:
 - Qual é o perímetro se o comprimento mede 102 cm?
 - Qual será o comprimento desse retângulo quando o perímetro for 402 cm?

8 A tarifa de uma corrida de táxi, numa determinada cidade, é composta de duas partes: uma parte fixa chamada bandeirada e uma parte correspondente ao número de quilômetros que o táxi percorreu. Sabe-se que a parte fixa ou bandeirada corresponde a 2 reais, enquanto o preço do quilômetro percorrido é de 0,53 real. Sendo y o preço a pagar pela corrida e x

o número de quilômetros percorridos, a tarifa final passa a ser definida pela função $y = 2 + 0,53x$. Nessas condições:

- Quanto se deverá pagar por uma corrida na qual o táxi percorreu 16 km?
- Quantos quilômetros percorreu o táxi se o passageiro ao descer pagou 8,36 reais pela corrida?



GRÁFICO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU

Podemos representar graficamente uma função polinomial de 1º grau utilizando para isso um sistema de coordenadas cartesianas.

Na verdade, a representação gráfica de uma função deve nos dar todas as informações sobre como se comporta essa função e, por ser de fácil visualização, é muito utilizada.

Sabemos que cada valor de x tem o seu correspondente valor de y , pela função; marcamos, então, no plano cartesiano os pontos de coordenadas (x, y) . Dessa maneira, obtemos um conjunto de pontos e esse conjunto é chamado *gráfico* da função.

Observando os exemplos seguintes, vamos compreender melhor o que significa o gráfico de uma função.

- Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = 2x$.

Inicialmente, vamos organizar uma tabela atribuindo valores arbitrários para x e determinando os valores correspondentes para y :

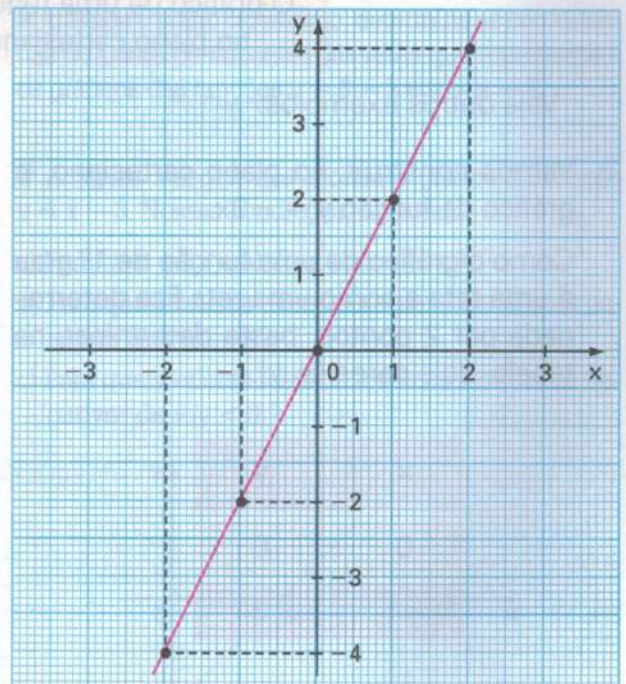
$$\begin{aligned} x = 0 & \longrightarrow y = 2 \cdot (0) = 0 \\ x = 1 & \longrightarrow y = 2 \cdot (1) = 2 \\ x = -1 & \longrightarrow y = 2 \cdot (-1) = -2 \\ x = 2 & \longrightarrow y = 2 \cdot (2) = 4 \\ x = -2 & \longrightarrow y = 2 \cdot (-2) = -4 \end{aligned}$$

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	2	(1, 2)
-1	-2	(-1, -2)
2	4	(2, 4)
-2	-4	(-2, -4)

A cada par ordenado (x, y) da tabela associamos um ponto do plano cartesiano.

O gráfico da função é o conjunto de todos os pontos (x, y) com x real e $y = 2x$.

Observe que o gráfico da função $y = 2x$ é uma reta.



2. Vamos representar, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = 2x - 3$.

Inicialmente, vamos elaborar a tabela:

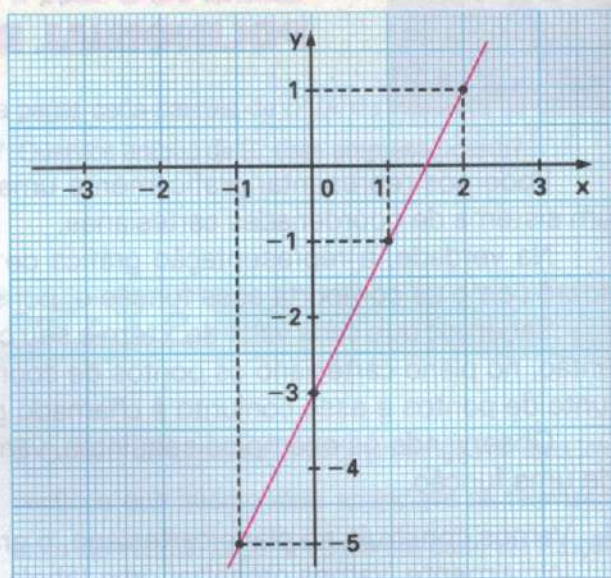
$x = 0 \rightarrow y = 2(0) - 3 = -3$

$x = 1 \rightarrow y = 2(1) - 3 = -1$

$x = -1 \rightarrow y = 2(-1) - 3 = -5$

$x = 2 \rightarrow y = 2(2) - 3 = 1$

x	y	(x, y)
0	-3	(0, -3)
1	-1	(1, -1)
-1	-5	(-1, -5)
2	1	(2, 1)



No plano cartesiano, ao lado, a cada par (x, y) associamos um ponto.

O conjunto de todos os pontos (x, y) , com x real e $y = 2x - 3$, é o gráfico da função, que, neste caso, também é uma *reta*.

Podemos dizer:

O gráfico de uma função polinomial de 1º grau, no plano cartesiano, é sempre uma *reta*.

Veja outros exemplos:

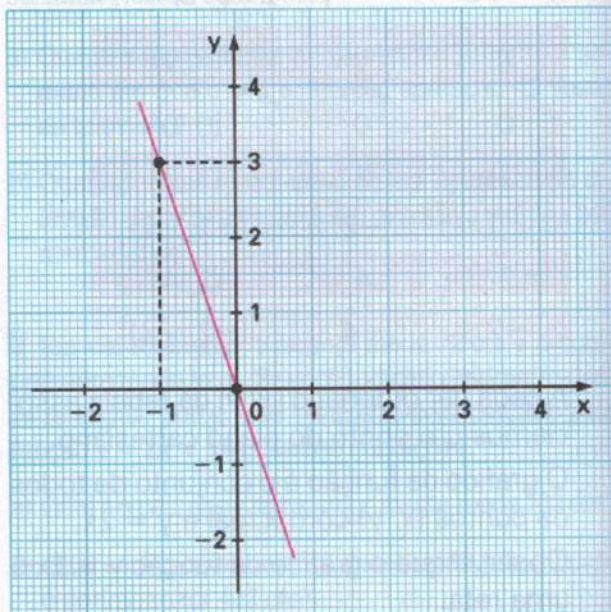
3. Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = -3x$.

Como o gráfico de uma função de 1º grau é uma reta e como uma reta fica determinada por 2 pontos, basta determinar, na tabela, dois pares (x, y) .

x	y
0	0
-1	3

$x = 0 \rightarrow y = -3 \cdot (0) = 0$

$x = -1 \rightarrow y = -3 \cdot (-1) = 3$



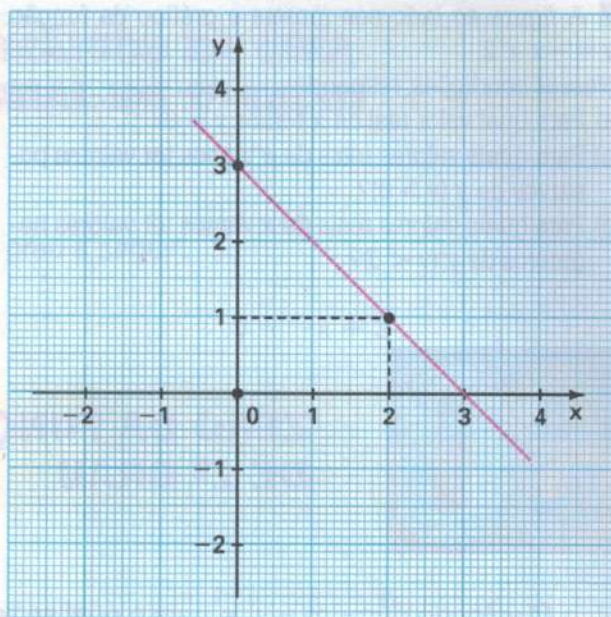
4. Construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = -x + 3$.

Para construir a tabela, devemos obter dois pares (x, y) .

x	y
0	3
2	1

$x = 0 \rightarrow y = -(0) + 3 = 3$

$x = 2 \rightarrow y = -(2) + 3 = 1$



FIXAÇÃO

1 Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico de cada uma das seguintes funções polinomiais de 1º grau:

- | | |
|-----------------|---------------------------|
| a) $y = x + 1$ | e) $y = -4x$ |
| b) $y = x$ | f) $y = 3x + 1$ |
| c) $y = -x + 4$ | g) $y = \frac{1}{2}x + 2$ |
| d) $y = 1 - 2x$ | h) $y = 2 - 3x$ |

2 Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = 3x - 2$ e $y = 2x - 1$. A seguir, observando o gráfico, responda:

- As retas que você traçou são concorrentes ou paralelas?
- Se são concorrentes, quais as coordenadas do ponto de encontro das duas retas?

3 Num mesmo plano cartesiano, trace as retas que representam os gráficos das funções $y = x + 3$ e $y = x - 2$. Como são essas duas retas?

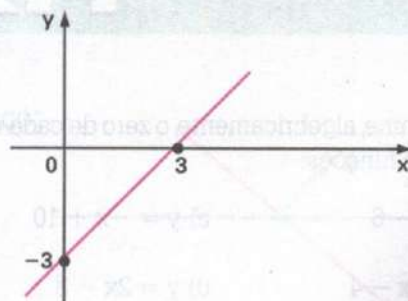
4 Um carro se movimenta em velocidade constante segundo a fórmula matemática $y = 2x + 1$, em que y

representa a posição do carro no instante x. Construa, no plano cartesiano, o gráfico da posição do carro em função do tempo (lembre que, neste caso, a variável x assume apenas valores reais não-negativos).

5 Usando o plano cartesiano, determine as coordenadas do ponto de encontro das retas que representam os gráficos das funções $y = 6 - x$ e $y = x - 2$.

6 A figura a seguir nos mostra o gráfico da função $y = x - 3$. Nessas condições, responda:

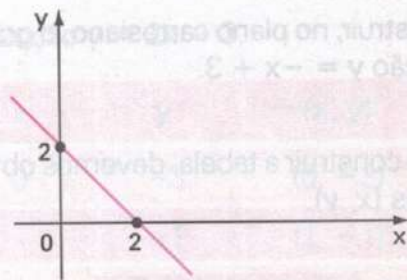
- Para qual valor real de x temos $y = 0$?
- Para quais valores reais de x vamos ter valores positivos de y ($y > 0$)?
- Para quais valores reais de x vamos ter valores negativos de y ($y < 0$)?



7 A figura ao lado nos mostra o gráfico da função $y = -x + 2$.

Nessas condições, responda:

- Para qual valor real de x temos $y = 0$?
- Para quais valores reais de x vamos ter valores positivos de y ($y > 0$)?
- Para quais valores reais de x vamos ter valores negativos de y ($y < 0$)?



ZERO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU

O valor do número real x , para o qual se tem $y = 0$ (ou $ax + b = 0$), denomina-se **zero** ou **raiz** da função polinomial de 1º grau.

Exemplo:

Vamos determinar o zero da função definida por $y = x - 3$.

Algebricamente, devemos fazer $x - 3 = 0$ e resolver a equação obtida:

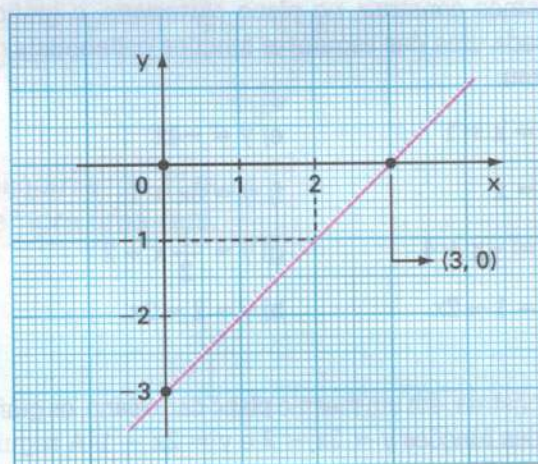
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Geometricamente, construímos o gráfico da função.

Pelo gráfico, vemos que $y = 0$ no ponto associado ao par ordenado $(3, 0)$.

Logo, o zero da função é dado pelo valor $x = 3$.

Você pode notar que, geometricamente, o zero da função está associado ao ponto em que a reta corta o eixo x .



FIXAÇÃO

1 Determine, algebricamente, o zero de cada uma das seguintes funções:

a) $y = x - 6$

c) $y = -x + 10$

b) $y = -x - 4$

d) $y = 2x - 3$

e) $y = 1 - 5x$

f) $y = \frac{1}{2}x + 3$

2 Fazendo o gráfico dê o zero de cada função:

a) $y = x + 1$

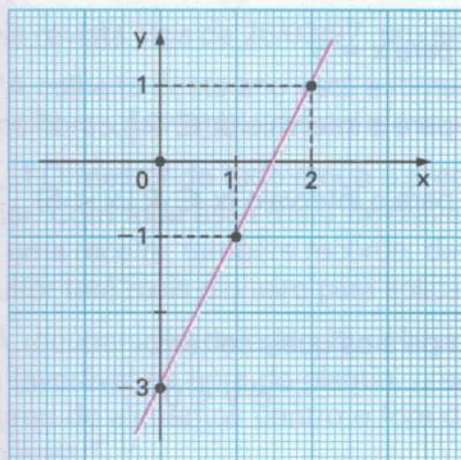
c) $y = 2 - x$

b) $y = -x + 3$

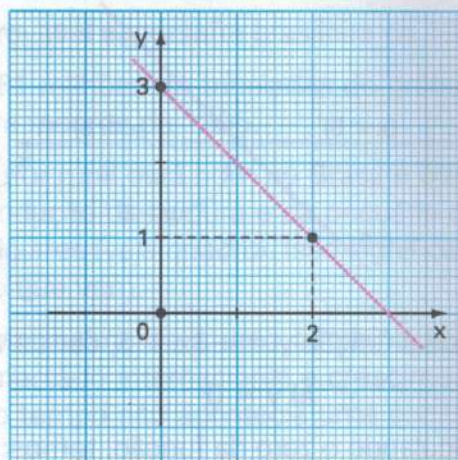
ANALISANDO O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU

Consideremos os gráficos das funções de 1º grau a seguir:

$$y = 2x - 3$$



$$y = -x + 3$$



Você nota que:

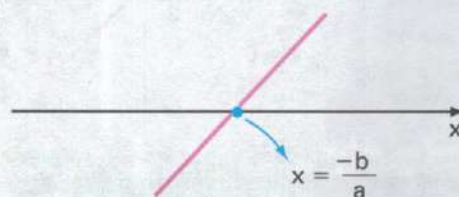
- ✓ na função $y = 2x - 3$, o coeficiente a é um número real positivo ($a > 0$).
- ✓ essa função é *crescente* (aumentando o valor de x , aumenta o valor correspondente de y).
- ✓ na função $y = -x + 3$, o coeficiente a é um número real negativo ($a < 0$).
- ✓ essa função é *decrescente* (aumentando o valor de x , o valor correspondente de y diminui).

Daí podemos dizer:

Função crescente

Uma função $y = ax + b$ é *crescente* quando $a > 0$.

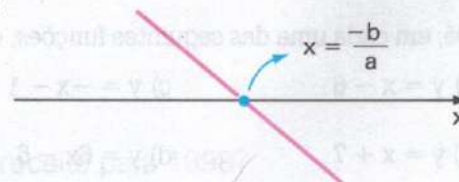
Esboço:



Função decrescente

Uma função $y = ax + b$ é *decrescente* quando $a < 0$.

Esboço:



Tomando como base esses conhecimentos, podemos fazer as seguintes análises:

❖ Dada a função $y = x - 5$, dar os valores reais de x para os quais:

a) $y = 0$

b) $y > 0$

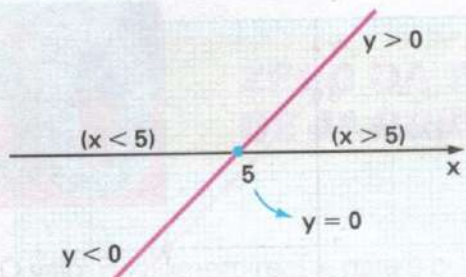
c) $y < 0$

Vamos calcular o zero da função:

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

Como $a = 1 > 0$, a função é crescente.

Desses dois fatos, temos o esboço:



$y = 0$ para $x = 5$

$y > 0$ para o intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

$y < 0$ para o intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

❖ Dada a função $y = -3x + 5$, dar os valores reais de x para os quais se tem:

a) $y = 0$

b) $y > 0$

c) $y < 0$

Calculando o zero da função, temos:

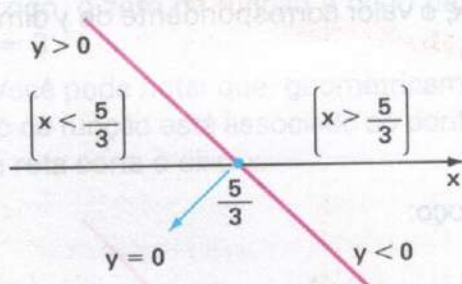
$$-3x + 5 = 0$$

$$-3x = -5$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Como $a = -3 < 0$, a função é decrescente.

Esboço:



$y = 0$ para $x = \frac{5}{3}$

$y > 0$ para o intervalo $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{3}\right\}$

$y < 0$ para o intervalo $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{3}\right\}$

FIXAÇÃO

Dê, em cada uma das seguintes funções, os valores reais de x para os quais se tem $y = 0$, $y > 0$ e $y < 0$:

a) $y = x - 6$

c) $y = -x - 1$

e) $y = 2x - 3$

g) $y = -3x - 12$

b) $y = x + 7$

d) $y = 6x - 6$

f) $y = 10 - 2x$

h) $y = \frac{1}{2}x - 3$

JORNAIS & REVISTAS

Na revista *Veja* de 26/03/97, um artigo enfatiza a provável supersafra brasileira de 1997.

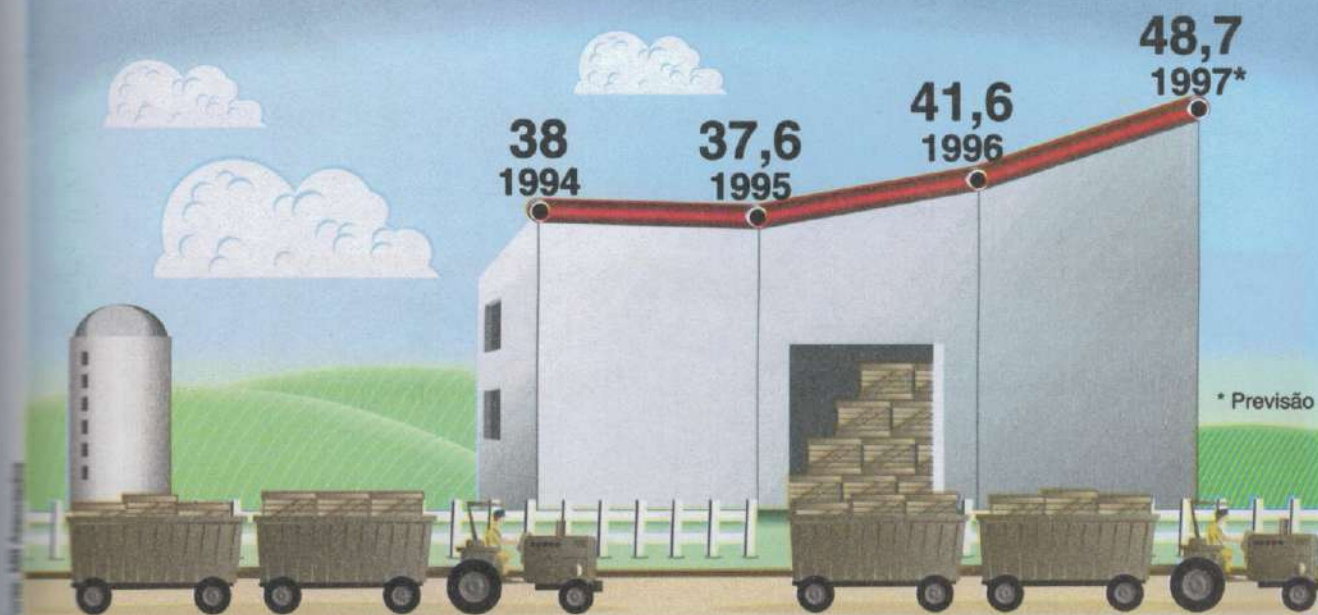
"A colheita desta ano está estimada em mais de 81 milhões de toneladas de grãos, uma das melhores da história, talvez até maior do que a safra recorde de 1995.

(...) O melhor de tudo é que o preço pago ao produtor rural está bom no Brasil e ótimo no exterior. Com toda essa maré favorável, a venda da produção da lavoura e da pecuária deverá gerar uma receita, também recorde, de 48 milhões de dólares (*veja quadro*). Isso significa que o agricultor terá mais dinheiro para aplicar na terra no ano que vem.

A recuperação da agricultura brasileira deve-se principalmente a uma combinação entre clima favorável na hora do plantio, preços ótimos no mercado internacional e crescimento no consumo de alimentos dentro e fora do país. Há muito tempo não acontecia uma conjugação como essa."

Dinheiro farto

A renda do campo deve ser recorde neste ano (em bilhões de dólares)



Com base no gráfico, responda:

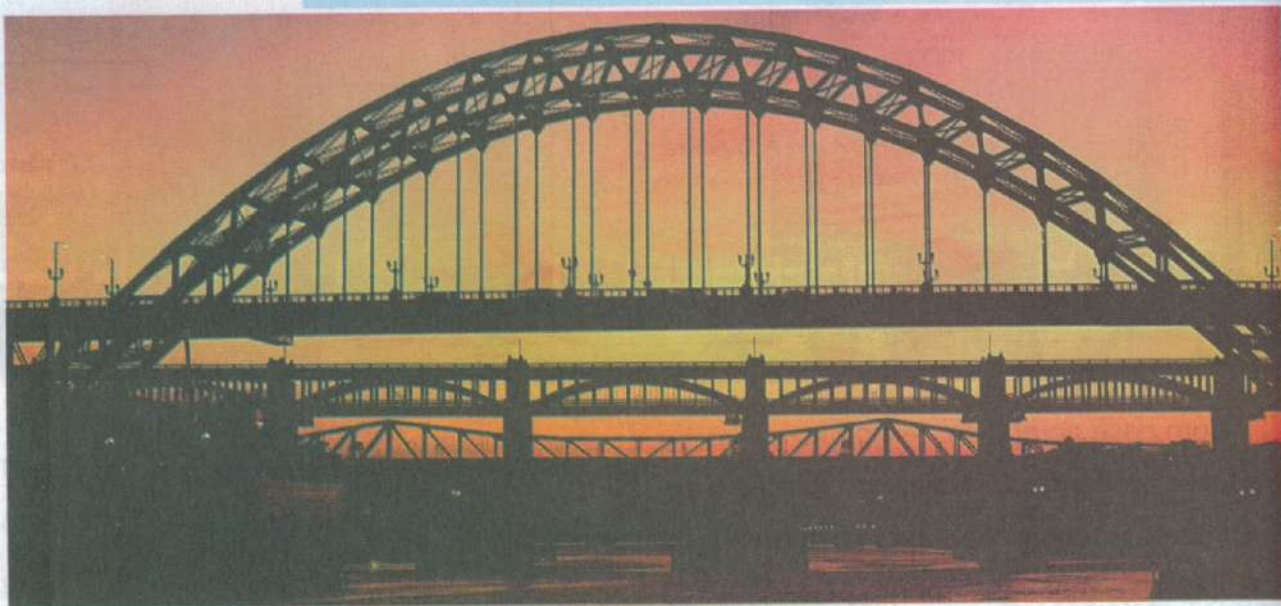
1. Qual o aumento da receita em relação à de 1996?
2. Quanto por cento representa o aumento dessa receita?
3. Supondo o mesmo aumento percentual, qual a provável receita para 1998?

5

Função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)

No seu dia-a-dia, você já deve ter visto uma curva conhecida como parábola.

Vejamos algumas situações:



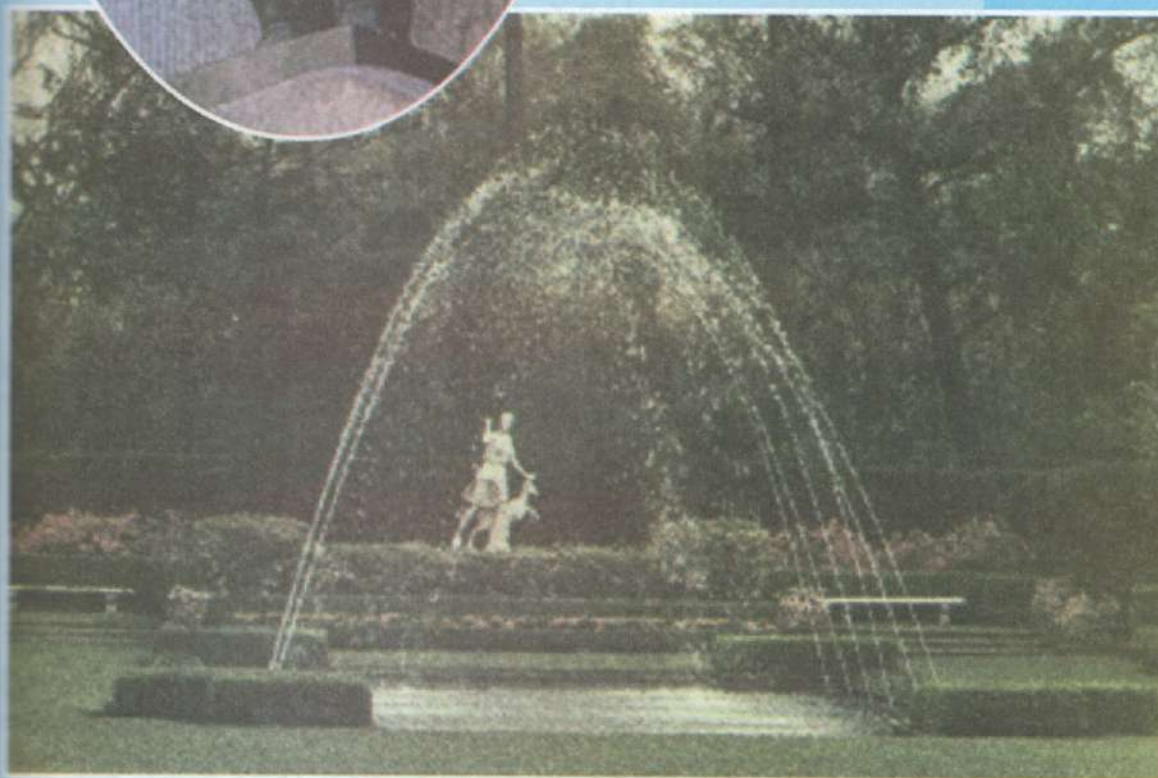
A
essa c
nada f

A
obser



Numa partida de futebol, na cobrança de um escanteio ou de uma falta, a bola, na maioria das vezes, faz uma curva que se assemelha a uma parábola.

Numa partida de voleibol, quando o levantador impulsiona a bola, na maioria das vezes ela também descreve uma curva que lembra uma parábola.



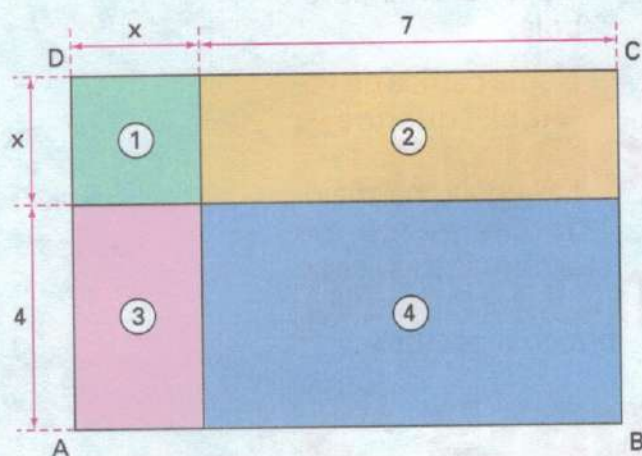
As situações vistas nos mostram a relação que existe entre essa curva, denominada *parábola*, e a *função polinomial*, denominada função de 2º grau ou *função quadrática*.

A parábola também pode ser lembrada em alguns fatos que observamos no dia-a-dia.

FUNÇÃO POLINOMIAL DE 2º GRAU (OU FUNÇÃO QUADRÁTICA)

Consideremos as seguintes situações:

- 1ª Se observarmos a figura seguinte, veremos que a área y do retângulo ABCD é dada em função da medida x indicada na figura:



Área do retângulo ABCD = área da fig. ① + área da fig. ② + área da fig. ③ + área da fig. ④.

$$y = x \cdot x + 7 \cdot x + 4 \cdot x + 7 \cdot 4$$

$$y = x^2 + 7x + 4x + 28$$

$$y = x^2 + 11x + 28$$

polinômio de 2º grau

- 2ª Quando se disputa um torneio de futebol, basquete ou voleibol, com turno e retorno, o número total de jogos do torneio, que indicamos por y , é dado em função do número x de equipes que disputam o torneio, conforme podemos observar na tabela ao lado:

Número de equipes (x)	Número de jogos (y)
2	$2 = 2 \cdot (2 - 1)$
3	$6 = 3 \cdot (3 - 1)$
4	$12 = 4 \cdot (4 - 1)$
5	$20 = 5 \cdot (5 - 1)$
...	...
x	$x \cdot (x - 1)$

Pela tabela, temos:

$$y = x \cdot (x - 1)$$

$$y = x^2 - x$$

polinômio de 2º grau

Nas duas situações apresentadas, pudemos observar que o 2º membro da fórmula matemática que define a função é um *polinômio de 2º grau na variável x*.

Isso nos leva a dizer:

Função polinomial de 2º grau ou função quadrática é toda função definida pela fórmula matemática $y = ax^2 + bx + c$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$.

Assim, são funções polinomiais de 2º grau:

✓ $y = x^2 + 2x - 8$

✓ $y = -2x^2 + 6$

✓ $y = x^2 - 9$

✓ $y = 4x^2 - 4x + 1$

✓ $y = -x^2 + 9x - 18$

✓ $y = -3x^2 - 2x + 1$

Considerando as definições dadas e os conhecimentos que você já tem, observe os exemplos:

1. Dado o número real 7, qual é a sua imagem pela função $y = 3x^2 - 4x + 1$?

Nesse caso, temos $x = 7$. Daí:

$$y = 3(7)^2 - 4(7) + 1 \longrightarrow y = 147 - 28 + 1 \longrightarrow y = 120$$

Logo, a imagem do número real 7, pela função, é 120.

2. Dada a função definida por $y = x^2 + 5x - 4$, determinar o número real x cuja imagem, pela função, é 20.

Nesse caso, temos $y = 20$.

Daí, podemos escrever:

$$x^2 + 5x - 4 = 20 \longrightarrow x^2 + 5x - 4 - 20 = 0 \longrightarrow x^2 + 5x - 24 = 0$$

Vamos, então, resolver a equação de 2º grau $x^2 + 5x - 24 = 0$.

Nessa equação, temos:

$$a = 1, b = 5, c = -24$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(-24) = 25 + 96 = 121$$

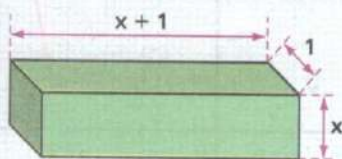
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) \pm \sqrt{121}}{2(1)} = \frac{-5 \pm 11}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{-5 + 11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{-5 - 11}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \end{array} \right.$$

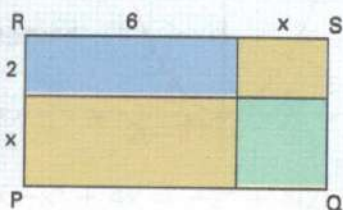
Logo, temos $x = -8$ ou $x = 3$.

FIXAÇÃO

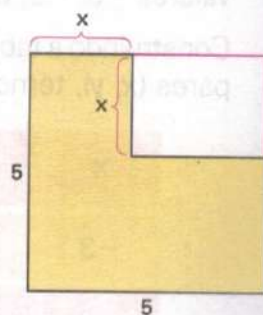
- 1 O volume y do paralelepípedo abaixo é dado em função da medida x indicada na figura. Qual é a fórmula matemática que define essa função?



- 2 A área y do retângulo RSQP da figura abaixo é dada em função da medida x . Escreva a fórmula matemática que define essa função.



- 3 A área y da região colorida na figura ao lado é dada em função da medida x . Nessas condições, escreva a fórmula matemática que define essa função.



- 4 Dada a função $y = x^2 - 15x + 26$, determine a imagem do número real 10 pela função.

- 5 Dada a função definida por $y = 3x^2 - 1$, determine a imagem do número real $2\sqrt{5}$ pela função.

- 6 Dada a função $y = 6x^2 - x - 3$, qual é a imagem do número real $\frac{1}{2}$ pela função?

7 Qual é o número real x cuja imagem é -2 pela função $y = x^2 - 15x + 24$?

8 Qual é o número real x cuja imagem pela função $y = 2x^2 - \sqrt{2}x$ é 0 ?

9 O número y de diagonais de um polígono é dado em função do número x de lados do polígono. Essa função é definida pela fórmula matemática $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$. Nessas condições, responda:

a) Qual é o número y de diagonais quando o polígono tem $x = 8$ lados?

b) Qual é o número x de lados quando o polígono tem 9 diagonais?

10 A soma y dos x primeiros números inteiros positivos é uma função definida pela fórmula matemática $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Nessas condições, determine:

a) a soma dos 40 primeiros números inteiros positivos

b) a quantidade x de números inteiros positivos quando a soma é 210

33

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO PLANO CARTESIANO

Já vimos que o gráfico de uma função polinomial de 1ª grau, no plano cartesiano, é uma *reta*. Veremos, nos exemplos a seguir, qual a figura que representa o gráfico de uma função polinomial de 2ª grau ou função quadrática.

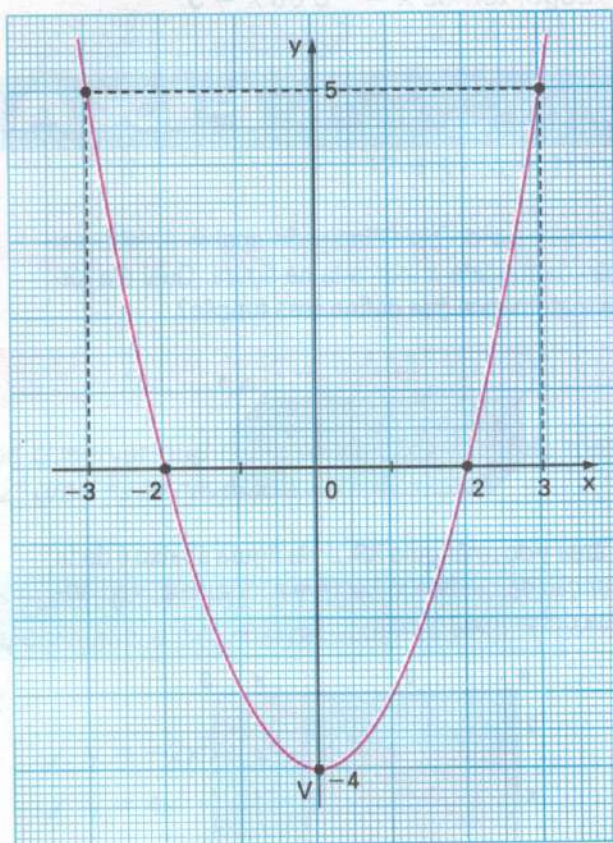
1. Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = x^2 - 4$.

Vamos atribuir alguns valores reais arbitrários para x ; neste caso, atribuímos os valores $-3, -2, 0, 2, 3$ por exemplo.

Construindo a tabela para determinar os pares (x, y) , temos:

x	y	(x, y)
-3	5	$(-3, 5)$
-2	0	$(-2, 0)$
0	-4	$(0, -4)$
2	0	$(2, 0)$
3	5	$(3, 5)$

Vamos localizar esses pontos no plano cartesiano ao lado.

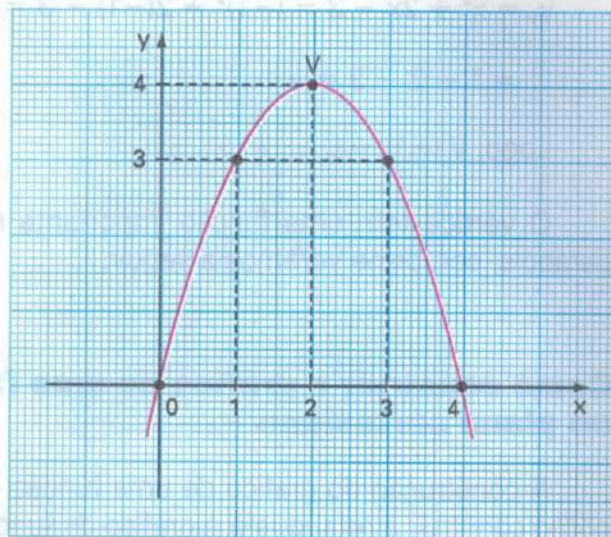


O conjunto de todos os pontos (x, y) , com x real e $y = x^2 - 4$, é o gráfico da função, representado por uma curva chamada *parábola*. O ponto V , que você observa na figura, chama-se *vértice* da parábola.

2. Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = -x^2 + 4x$.

Inicialmente, vamos construir a tabela para determinar alguns pontos (x, y) :

x	0	1	2	3	4
y	0	3	4	3	0



Localizando esses pontos no plano cartesiano, temos:

O conjunto de todos os pontos (x, y) com x real e $y = -x^2 + 4x$, que é o gráfico da função, nos dá a *parábola* da figura acima. Observe, novamente, o ponto V , que se constitui no *vértice* da parábola.

Observação:

Você pode notar a existência de um ponto V em cada parábola que foi construída nos exemplos dados: o *vértice*, cujas coordenadas vamos indicar por (x_v, y_v) .

No 1º exemplo ($y = x^2 - 4$) vimos que $V(0, -4)$.

Pode-se demonstrar (e você verá essa demonstração no 2º grau) que:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(0)}{2(1)} = \frac{0}{2} = 0$$

coeficiente do termo em x

coeficiente do termo em x^2

$$y_v = x^2 - 4 = (0)^2 - 4 = -4$$

Logo, $V(0, -4)$.

No 2º exemplo ($y = -x^2 + 4x$), vimos que $V(2, 4)$.

Observe:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Logo, $V(2, 4)$.

$$y_v = -x^2 + 4x = -2^2 + 4(2) = -4 + 8 = 4$$

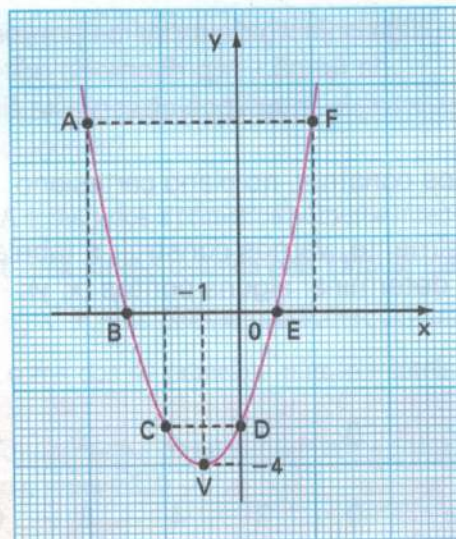
Finalmente, observando o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$, vemos que $V(-1, -4)$.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_v = x^2 + 2x - 3 = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Logo, $V(-1, -4)$.

O vértice tem uma função importante na parábola, conforme veremos a seguir.



Como construir o gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano

A construção do gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano não é tão simples como construir a reta, que é o gráfico da função de 1º grau.

Na construção de uma parábola, devemos seguir um roteiro para que tenhamos de forma clara e precisa o gráfico desejado. Vejamos esse roteiro:

- 1º) Determinamos as coordenadas do vértice: $V(x_v, y_v)$.
- 2º) Organizamos uma tabela atribuindo à variável x alguns valores menores que x_v e alguns valores maiores que x_v .
- 3º) Marcamos os pontos (x, y) no plano cartesiano.
- 4º) Unindo esses pontos, construímos a parábola.

Vejamos alguns exemplos:

1. Construir no plano cartesiano o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$.

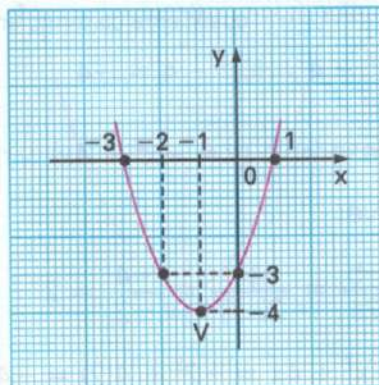
Inicialmente, vamos determinar as coordenadas do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_v = x^2 + 2x - 3 = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \quad V(-1, -4)$$

Organizamos a tabela e marcamos os pontos (x, y) :

x	y
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0



2. Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$.
Determinando as coordenadas do vértice:

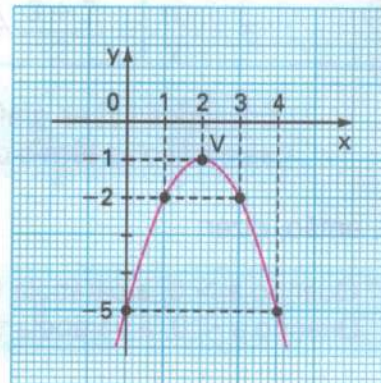
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y_v = -x^2 + 4x - 5 = -(2)^2 + 4(2) - 5 = -1$$

} V (2, -1)

Construindo a tabela:

x	y
0	-5
1	-2
2	-1
3	-2
4	-5



3. Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 4$.
Determinando as coordenadas do vértice:

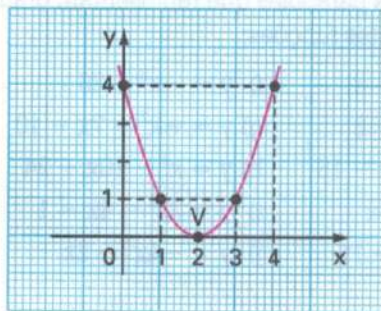
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = x^2 - 4x + 4 = (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$$

} V (2, 0)

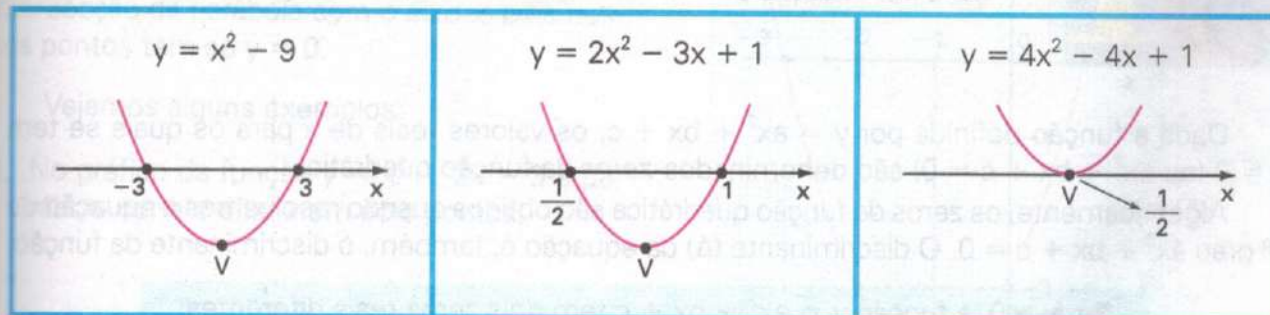
Construindo a tabela:

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

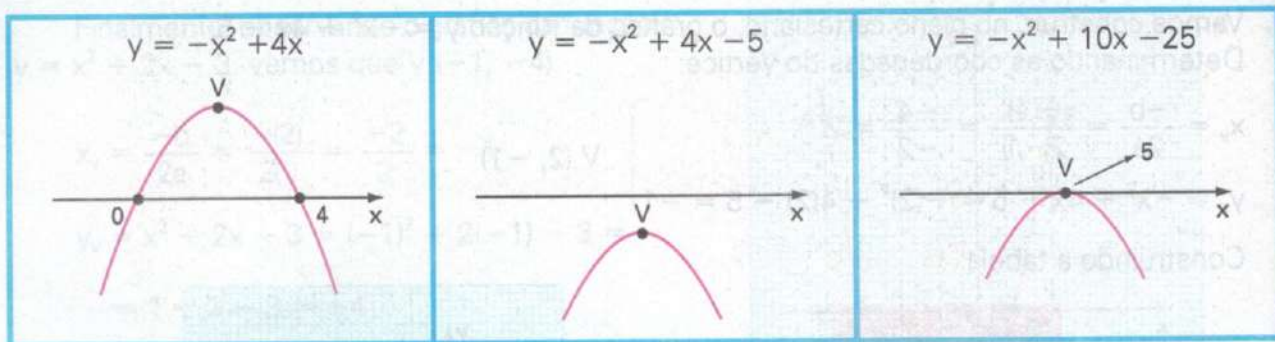


Estudando a concavidade da parábola

Consideremos as seguintes funções quadráticas e os esboços dos gráficos de cada uma delas:



Em todos esses gráficos, notamos que $a > 0$ e que as parábolas têm concavidade voltada para cima.



Em todos esses gráficos, notamos que $a < 0$ e que as parábolas têm a concavidade voltada para *baixo*.

Podemos, então, dizer:

Quando $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para *cima*.
Quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para *baixo*.

FIXAÇÃO

1 Vamos determinar as coordenadas (x, y) do vértice de cada uma das parábolas que representam graficamente as seguintes funções:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $y = x^2 + 6x + 8$ | f) $y = -x^2 + 36$ |
| b) $y = x^2 - 2x - 8$ | g) $y = -x^2 + 7x - 10$ |
| c) $y = -x^2 + 8x - 15$ | h) $y = x^2 - 10x + 24$ |
| d) $y = -4x^2 + 6x$ | i) $y = 2x^2 - 4x - 1$ |
| e) $y = x^2 + 6x + 11$ | j) $y = -4x^2 - 2x$ |

2 Dadas as seguintes funções, dê as coordenadas do vértice, organize uma tabela conveniente e faça o gráfico de cada função no plano cartesiano:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) $y = x^2 - 1$ | d) $y = x^2 - 2x$ |
| b) $y = -x^2$ | e) $y = x^2 - 2x + 4$ |
| c) $y = x^2 + 2x - 8$ | f) $y = -x^2 + 6x - 9$ |



ZEROS DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 2º GRAU

Dada a função definida por $y = ax^2 + bx + c$, os valores reais de x para os quais se tem $y = 0$ (ou $ax^2 + bx + c = 0$) são denominados *zeros* da função quadrática.

Algebricamente, os zeros da função quadrática são obtidos quando resolvemos a equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. O discriminante (Δ) da equação é, também, o discriminante da função:

Se $\Delta > 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem dois zeros reais diferentes.

Se $\Delta = 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um único zero real.

Se $\Delta < 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ não tem zeros reais.

Observe os exemplos:

1. Determinar os zeros da função $y = x^2 - 3x - 10$.

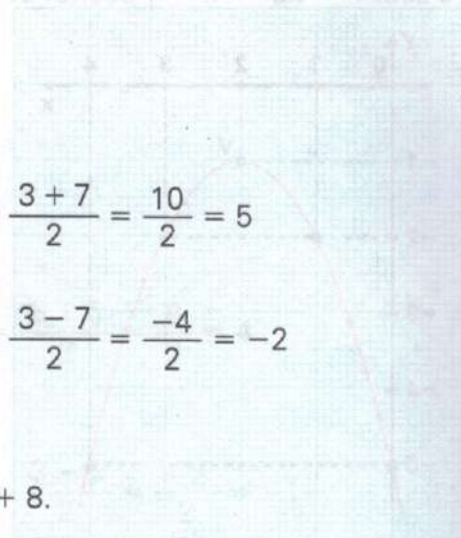
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-10) = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{3 \pm 7}{2} \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ x'' = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{array} \right.$$

Logo, os zeros da função são os números 5 e -2.



2. Vamos determinar os zeros da função $y = x^2 - 3x + 8$.

$$x^2 - 3x + 8 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(8) = 9 - 32 = -23$$

Como $\Delta = -23 < 0$, a função não tem zeros reais.

3. Vamos determinar os zeros da função $y = -x^2 + 8x - 16$.

$$-x^2 + 8x - 16 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

Na equação acima, temos:

$$a = 1, b = -8, c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$$

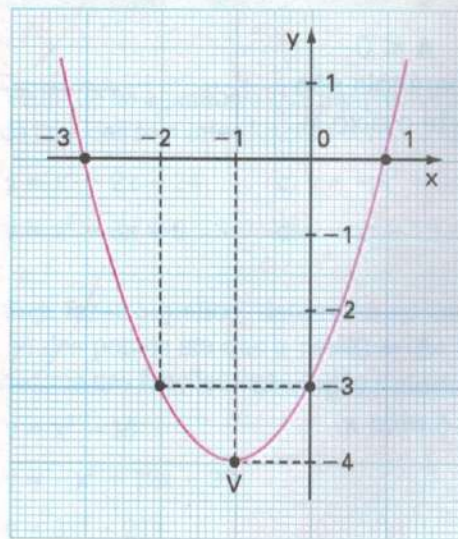
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

Logo, a função tem um único zero real, que é o número 4.

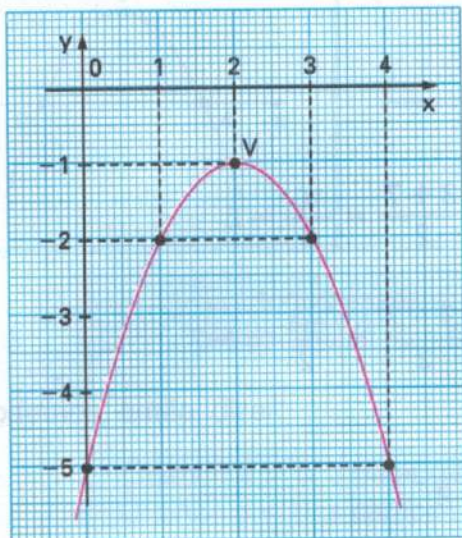
Geometricamente, os zeros da função correspondem aos valores de x nos pontos de intersecção da parábola com o eixo x , pois nesses pontos tem-se $y = 0$.

Vejam alguns exemplos:

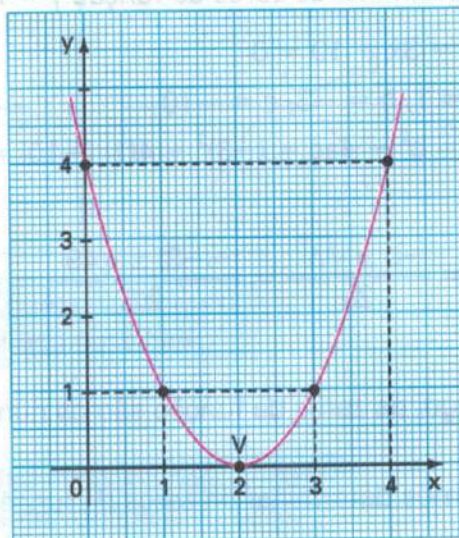
1. No gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$ a parábola corta o eixo x em dois pontos.



2. No gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$ a parábola não corta o eixo x .



3. No gráfico da função $y = x^2 - 4x + 4$ a parábola toca o eixo x em um só ponto.



Essas condições têm relação com o discriminante Δ da seguinte maneira:

Se $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo x em dois pontos.

Se $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo x .

Se $\Delta = 0$, a parábola toca o eixo x em apenas um ponto, ou seja, ela tangencia o eixo x .

Podemos fazer um resumo dessas condições, usando um simples esboço do gráfico da função quadrática:

<p>$\Delta > 0$ A parábola corta o eixo x em 2 pontos.</p>	
<p>$\Delta < 0$ A parábola não corta o eixo x.</p>	
<p>$\Delta = 0$ A parábola tangencia o eixo x.</p>	

Observe os exemplos:

1. Verificar se a parábola que corresponde ao gráfico da função $y = x^2 - 3x - 4$ toca ou não o eixo x .

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$$

Como $\Delta > 0$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x' = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Sendo $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo x nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(4, 0)$.

2. A parábola que representa o gráfico da função $y = -x^2 + 5x - 10$ corta ou não o eixo x ?

$$-x^2 + 5x - 10 = 0$$

$$x^2 - 5x + 10 = 0$$

$$a = 1, b = -5, c = 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(10) = 25 - 40 = -15 < 0$$

Como $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo x .

FIXAÇÃO

- 1 Determine, algebricamente, os zeros de cada uma das seguintes funções de 2º grau:

a) $y = x^2 - 25$

b) $y = x^2 - 10x + 21$

c) $y = -x^2 + 6x$

d) $y = x^2 + 4x + 8$

e) $y = -x^2 + x + 6$

f) $y = 9x^2 - 1$

g) $y = -4x^2 + 4x - 1$

h) $y = 6x^2 + 6x$

- 2 Verifique se a parábola que representa o gráfico de cada uma das seguintes funções corta ou não o eixo x :

a) $y = x^2 - 2x - 24$

c) $y = -x^2 + 9x - 14$

b) $y = x^2 - 6x + 9$

d) $y = x^2 - 7x + 13$

- 3 Sem fazer o gráfico, determine as coordenadas (x, y) dos pontos em que a parábola que representa cada uma das funções corta o eixo x :

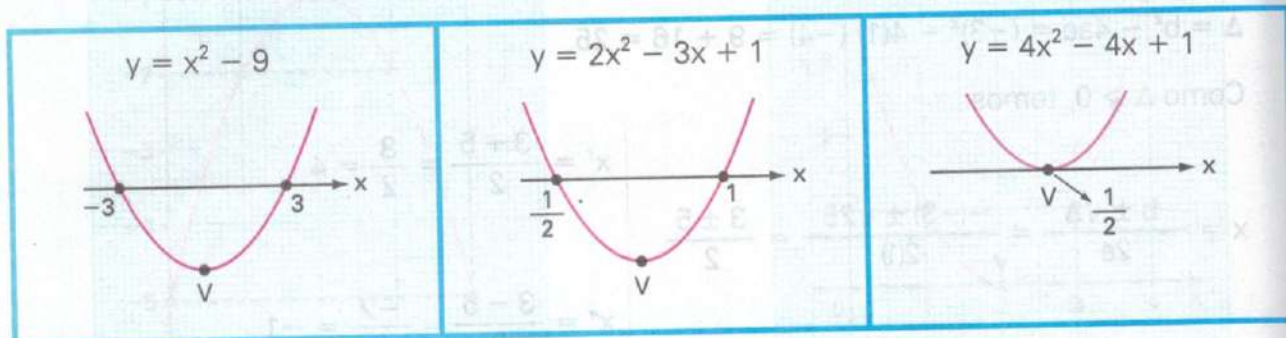
a) $y = x^2 - 16$

b) $y = -x^2 + 12x - 36$

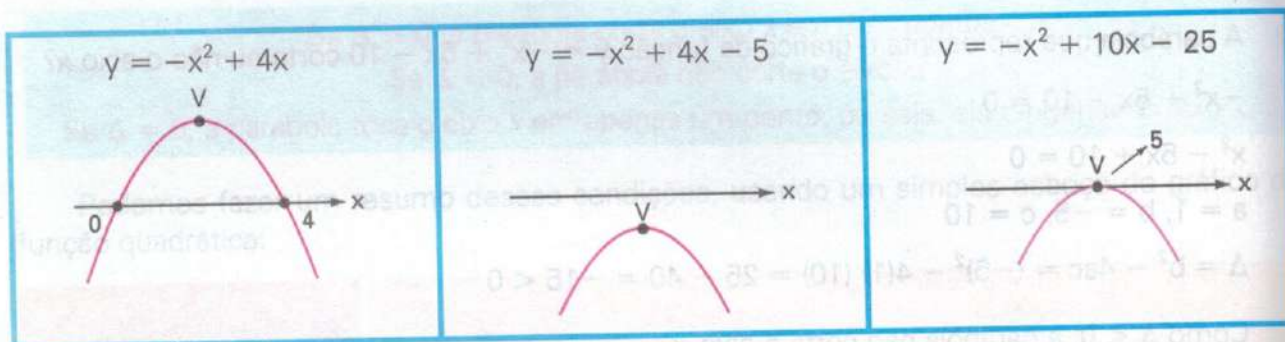
c) $y = 3x^2 - 21x$

ESTUDANDO A CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

Consideremos as seguintes funções quadráticas e os esboços dos gráficos de cada uma delas:



Em todos esses gráficos, notamos que $a > 0$ e que a parábola tem a concavidade voltada para cima.



Em todos esses gráficos, notamos que $a < 0$ e que a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Dizemos que:

Quando $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.
Quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

FIXAÇÃO

Sem fazer o gráfico e observando apenas o coeficiente a , verifique se a parábola que representa o gráfico de cada uma das seguintes funções tem a concavidade voltada para cima ou para baixo:

a) $y = x^2 - 7x + 10$

c) $y = -x^2 + 25$

e) $y = -x^2 - 14x - 49$

b) $y = 3x^2 - 7x + 4$

d) $y = -6x^2 + x + 1$

f) $y = 7x^2 - 2x$

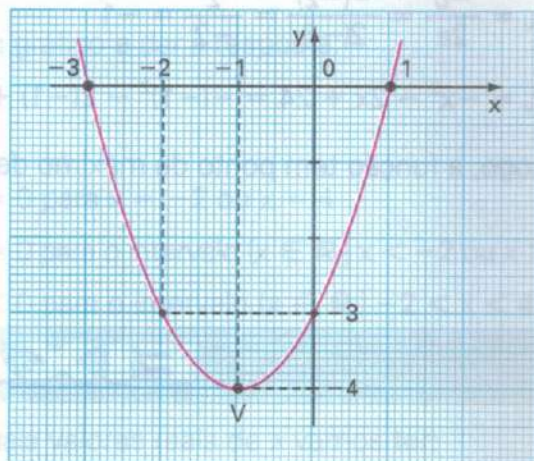


PONTO DE MÍNIMO OU PONTO DE MÁXIMO

A figura ao lado nos mostra o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$, onde $a > 0$.

Percorrendo o gráfico da esquerda para a direita, notamos que os valores de y vão diminuindo até se chegar ao vértice. Depois os valores de y vão aumentando.

Nesse caso, dizemos que o vértice é o *ponto de mínimo* da função.



A figura ao lado nos mostra o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$ onde $a < 0$.

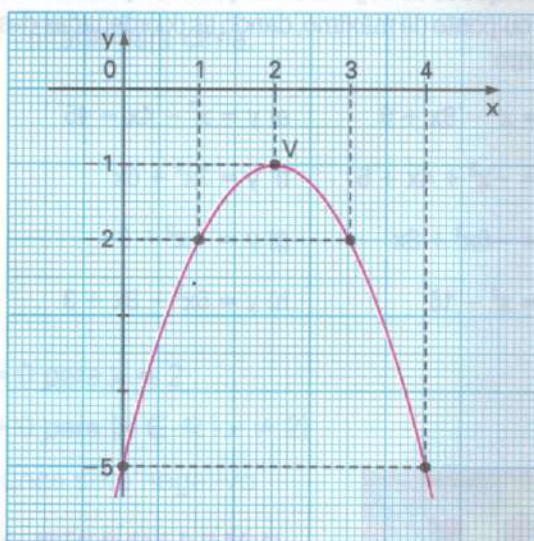
Percorrendo o gráfico, da esquerda para a direita, notamos que os valores de y vão aumentando até se chegar ao vértice. Depois, os valores de y vão diminuindo.

Nesse caso, dizemos que o vértice é o *ponto de máximo* da função.

Então:

Quando $a > 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um *ponto de mínimo* no vértice.

Quando $a < 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um *ponto de máximo* no vértice.



Observe os exemplos:

1. A função $y = x^2 - 3x - 18$ tem ponto de mínimo ou ponto de máximo? Dar as coordenadas do ponto.

Pela função dada, vemos que $a = 1 > 0$. Logo, essa função tem um *ponto de mínimo*, cujas coordenadas são:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}$$

$$y_v = x^2 - 3x - 18 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) - 18 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 18 = \frac{9 - 18 - 72}{4} = -\frac{81}{4}$$

Logo, a função tem ponto de mínimo de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, -\frac{81}{4}\right)$.

2. A função $y = -x^2 - 2x + 24$ tem ponto de mínimo ou ponto de máximo? Dar as coordenadas do ponto.

Pela função dada, temos que $a = -1 < 0$. Logo, essa função tem um *ponto de máximo*.

As coordenadas desse ponto são:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y_v = -x^2 - 2x + 24 = -(-1)^2 - 2(-1) + 24 = -1 + 2 + 24 = 25$$

Logo, a função tem ponto de máximo de coordenadas $(-1, 25)$.

FIXAÇÃO

1 Verifique se as seguintes funções têm ponto de mínimo ou ponto de máximo, dando as coordenadas desse ponto:

a) $y = x^2 - 8x + 6$

e) $y = x^2 - 4x - 45$

b) $y = -x^2 + 4x + 5$

f) $y = 3x^2 + 6x$

c) $y = -6x^2 + 6x$

g) $y = -x^2 + 9$

d) $y = x^2 - 16$

h) $y = 5x^2 - 8x + 3$

2 Um projétil é lançado da origem, segundo um referencial dado, e percorre a trajetória de uma parábola. A função que representa essa parábola é $y = -x^2 + 4x$. Quais são as coordenadas do ponto no qual esse projétil atinge sua altura máxima?

3 Você sabe que a função $y = 3x^2 - 6x - 2$ tem um ponto de mínimo. Quais são as coordenadas desse ponto de mínimo?



ANALISANDO A FUNÇÃO $y = ax^2 + bx + c$ QUANTO AO SINAL

Consideremos os seguintes exemplos:

1. Dada a função $y = x^2 - 2x - 8$, verifique quais são os valores reais de x para que se tenha:

a) $y = 0$

b) $y > 0$

c) $y < 0$

Inicialmente, vamos analisar o coeficiente a e o discriminante Δ da função para podermos fazer um esboço do gráfico da função:

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

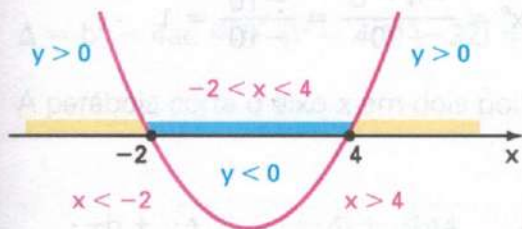
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

A parábola corta o eixo x em dois pontos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x'' = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{array} \right.$$

Pelo que obtivemos, podemos fazer o esboço do gráfico e dar a resposta:

Esboço:



$$y = 0 \text{ para } x = -2 \text{ ou } x = 4$$

$$y > 0 \text{ para o intervalo } \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$$

$$y < 0 \text{ para o intervalo } \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$$

2. Dada a função $y = x^2 - 4x + 4$, verifique para quais valores reais de x vamos ter:

a) $y = 0$

b) $y > 0$

c) $y < 0$

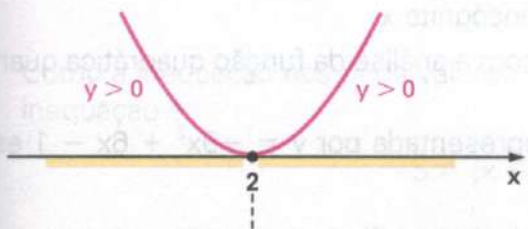
Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

A parábola tangencia o eixo x :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Esboço:



$$y = 0 \text{ para } x = 2$$

$$y > 0 \text{ para } \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

y nunca será negativo

3. Dada a função $y = -x^2 + 2x - 10$, determine para quais valores reais de x vamos ter:

a) $y = 0$

b) $y > 0$

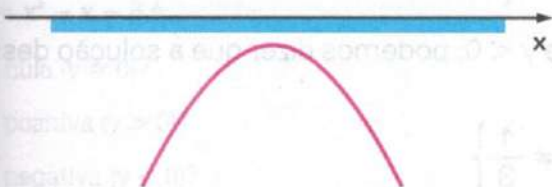
c) $y < 0$

Como $a = -1 < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-10) = 4 - 40 = -36 < 0$$

A parábola não vai cortar o eixo x .

Esboço:



Nesse caso, y será sempre negativo para qualquer valor real de x .

4. Para quais valores reais de x a função $y = -5x^2 + 4x + 1$ é positiva?

Como $a = -5 < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-5)(1) = 16 + 20 = 36$$

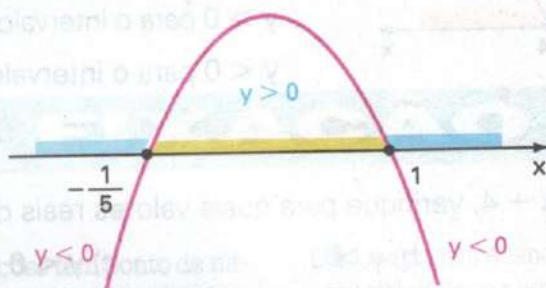
A parábola corta o eixo x em dois pontos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(+4) \pm \sqrt{36}}{2(-5)} = \frac{-4 \pm 6}{-10}$$

$$x' = \frac{-4 + 6}{-10} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$$

$$x'' = \frac{-4 - 6}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$$

Esboço:



Pelo esboço do gráfico, a função é positiva para o intervalo $-\frac{1}{5} < x < 1$, ou seja:

$$y > 0 \text{ para } \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x < 1\}$$

5. Resolver a inequação $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

A inequação dada é uma inequação de 2ª grau na incógnita x .

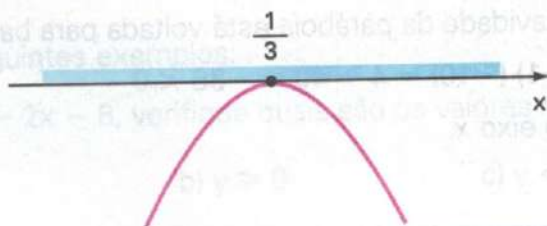
Para resolvê-la, vamos aplicar o que aprendemos com a análise da função quadrática quanto ao sinal. Assim, temos:

Como $a = -9 < 0$, a concavidade da parábola representada por $y = -9x^2 + 6x - 1$ está voltada para baixo.

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-9)(-1) = 36 - 36 = 0$, logo a parábola tangencia o eixo x :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

Esboço:



Como a inequação nos pede valores de x tais que $y < 0$, podemos dizer que a solução dessa inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{3}\right\}$$

6. Determinar os valores reais de x para os quais o produto $(x - 7)(x + 3)$ é maior que 11. Pelo problema apresentado, temos:

$$(x - 7)(x + 3) > 11 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 > 11$$

$$x^2 - 4x - 21 - 11 > 0$$

$$x^2 - 4x - 32 > 0 \rightarrow \text{inequação de 2º grau}$$

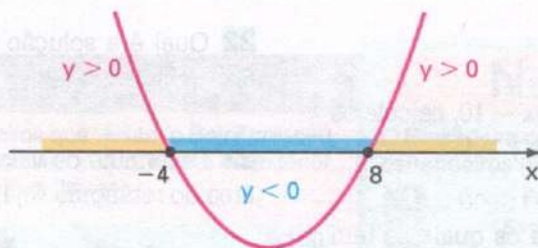
Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola representada por $y = x^2 - 4x - 32$ está voltada para cima.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-32) = 16 + 128 = 144 > 0$$

A parábola corta o eixo x em dois pontos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{144}}{2(1)} = \frac{4 \pm 12}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{4 + 12}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ x'' = \frac{4 - 12}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{array} \right.$$

Esboço:



Como a inequação nos pede valores reais de x para os quais temos $y > 0$, a solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 8\}$$

Então o produto $(x - 7)(x + 3)$ é maior que 11 para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 8\}$

FIXAÇÃO

1 Para quais valores reais de x a função $y = x^2 - x - 6$ é:

- a) nula ($y = 0$)?
- b) positiva ($y > 0$)?
- c) negativa ($y < 0$)?

2 Dada a função $y = 9x^2 - 8x - 1$, determine os valores reais de x para os quais se tem:

- a) $y = 0$
- b) $y > 0$
- c) $y < 0$

3 Dada a função $y = -x^2 + 5x$, determine os valores reais de x para que se tenha:

- a) $y = 0$
- b) $y > 0$
- c) $y < 0$

4 Sabendo que $y = -x^2 + 10x - 25$, determine os valores reais de x para que se tenha:

- a) $y = 0$
- b) $y > 0$
- c) $y < 0$

5 Sendo dada a função $y = x^2 - 6x + 15$, analise essa função quanto ao sinal.

6 É dada a função $y = -x^2 + 9$. Para quais valores reais de x vamos ter:

- a) $y = 0$?
- b) $y > 0$?
- c) $y < 0$?

7 Sendo dada a função $y = x^2 - 9x - 10$, calcule os valores reais de x para que se tenha $y > 0$.

8 Existem valores reais de x para os quais se tem $x^2 - 8x + 16 < 0$?

9 Existem valores reais de x para os quais a função $y = 2x^2 - x + 3$ é positiva ($y > 0$)?

10 Para quais valores reais de x o produto $(x - 7)(x + 3)$ é positivo?

11 Vamos determinar a solução da inequação de 2º grau $x^2 + 3x < 0$.

12 Dada a inequação de 2º grau $(x - 1)^2 + x > 3$, determine a sua solução no conjunto \mathbb{R} .

13 Para quais valores reais de x a expressão $x^3 - 1$ é menor, numericamente, que a expressão $x^3 - x^2 + 5x - 5$?

14 Qual é o menor inteiro positivo x que verifica a inequação $(3x - 1)(x - 2) > 2(x^2 - 2)$?

15 Determine o menor inteiro negativo x que verifica a inequação $x^2 + 3x - 10 < 0$.

16 Determine a solução da inequação $x^2 - 36 < 0$.

17 A função $y = x^2 - 2x + 8$ é positiva para todo valor real de x . Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

18 Determine o maior inteiro positivo x que verifica a inequação $-x^2 + 13x - 22 > 0$.

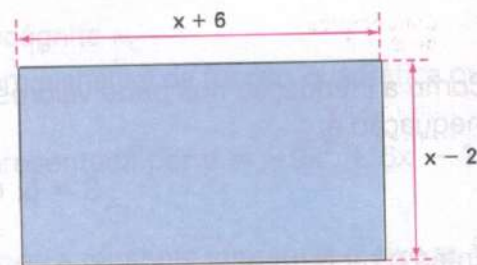
19 Qual é o menor e qual é o maior número inteiro x que faz com que a expressão $x^2 - 5x - 36$ seja menor que zero?

20 Para que valores reais de x a função $y = x^2 - 10x + 21$ é negativa?

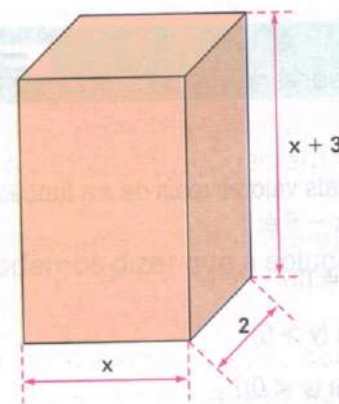
21 Existe algum valor real de x que verifica a inequação $4x^2 - 3 < 12(x - 1)$?

22 Qual é a solução no conjunto \mathbb{R} , da inequação $8(x^2 - 3) + 1 < 5(x^2 - 1) - 6$?

23 Determine os valores reais de x para os quais a área do retângulo seja maior que 9.



24 Determine os valores reais de x para os quais o volume do paralelepípedo retângulo seja maior que 20.



JORNAIS & REVISTAS

A revista *Veja* de 16/10/96 publicou artigo sobre o turismo no Brasil. Leia um trecho desse artigo.

"Ficou pronta na semana passada a última boa surpresa numérica brasileira. Um levantamento da Polícia Federal nos postos de fronteira e aeroportos revela que, no ano passado, pela primeira vez o total de visitantes estrangeiros no Brasil ultrapassou a casa de 2 milhões. A cifra exata, de 2 034 271 visitantes, é duas vezes maior que a de 1990 e 10% superior à de 1994.

O número é animador, mas não justifica grandes comemorações. Até 1986, o número de estrangeiros que chegavam aqui já era quase igual ao de hoje. Houve depois o período negro da virada dos anos 80 para os 90 — e o que se vê agora é mais uma recuperação do que propriamente um avanço significativo."

Mão única

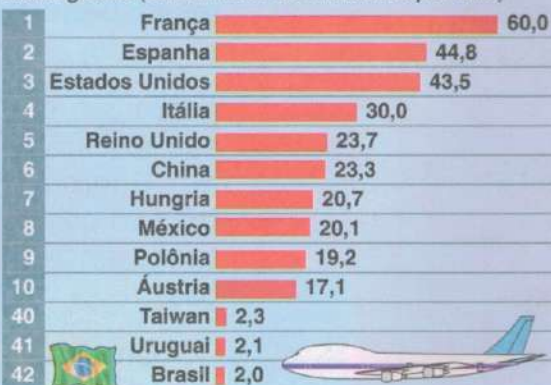
Enquanto o número de estrangeiros que visitam o Brasil cresceu seis vezes desde 1970, o de brasileiros que viajam ao exterior aumentou dezessete vezes (em milhares)



Fonte: Embratur

No fim da fila

O Brasil é um dos países que menos recebem turistas estrangeiros (em milhões de visitantes por ano)



Fonte: OMT

Observando o que foi mostrado acima, responda:

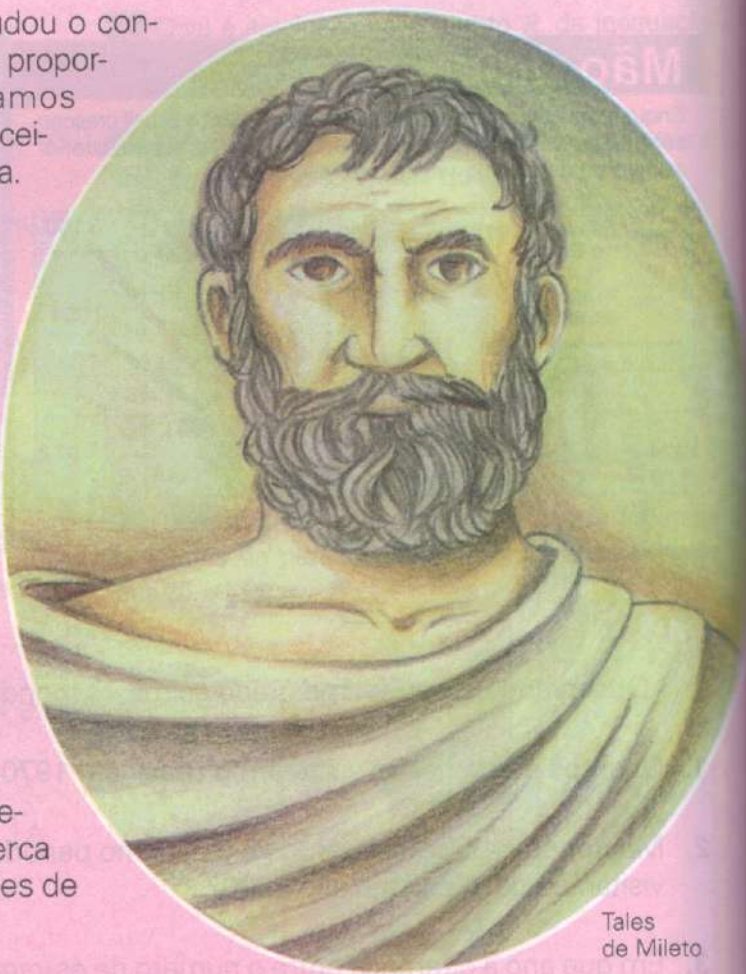
1. Quantos estrangeiros visitaram o Brasil em 1970? E em 1990?
2. Mantendo-se o crescimento verificado no período 1990-1995, quantos turistas estrangeiros visitarão nosso país no ano 2000?
3. Em que ano a diferença entre o número de estrangeiros que visitaram o Brasil e o de brasileiros que viajaram ao exterior foi maior? Em quanto?

6 Segmentos proporcionais

Você já estudou o conceito de razão e proporção. Agora, vamos aplicar esses conceitos em Geometria.

A idéia de proporção e a sua aplicação em Geometria são bastante antigas.

Um dos trabalhos mais importantes nesse sentido foi desenvolvido por Tales, um rico comerciante da cidade grega de Mileto, cerca de 600 anos antes de Cristo.



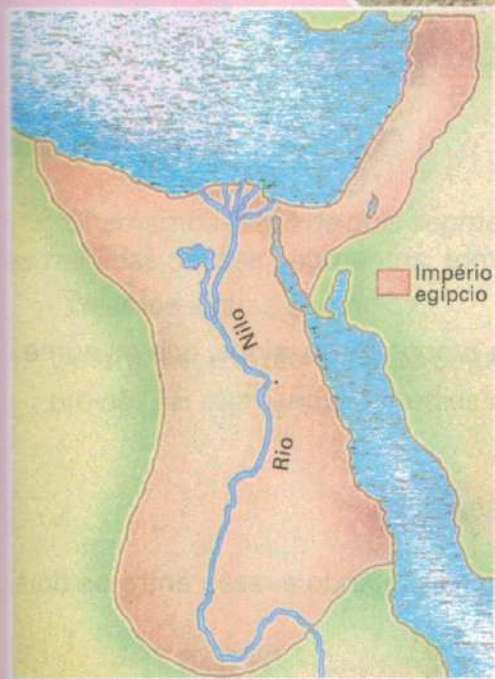
Tales de Mileto

T
tura c
projet
P
teve a
trar e
outra
se q
suas
Egito,
safiaç
altura
râmio

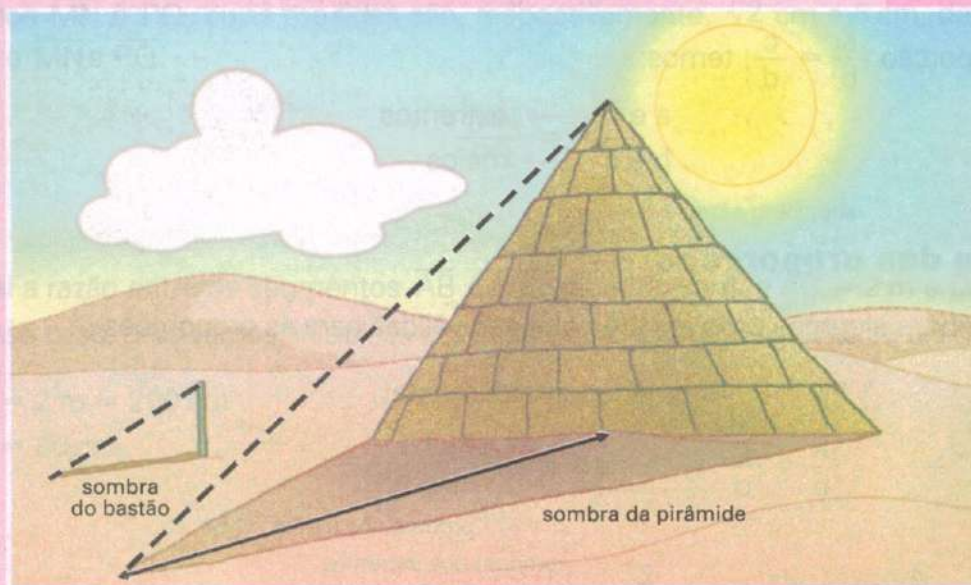


Tales observou que, num mesmo instante, a razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projetava no chão era sempre a mesma para quaisquer objetos.

Por ser comerciante, Tales teve a oportunidade de entrar em contato com outros povos. Conta-se que numa de suas viagens ao Egito, Tales foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Quéops.



Usando um bastão, Tales aplicou seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais, pois a razão entre a altura da pirâmide e o comprimento da sombra projetada pela pirâmide (aumentado pela metade do comprimento da aresta da base) é igual à razão entre a altura do bastão e o comprimento da sombra projetada por esse bastão.



Já estudamos, na 6ª série, que a *razão* de dois números a e b , com $b \neq 0$, é o quociente do primeiro pelo segundo: $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Por exemplo:

1. A razão entre 8 e 6 é $8 : 6$ ou $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
2. A razão entre 20 e 15 é $20 : 15$ ou $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

Nos exemplos acima, verificamos que as razões $\frac{8}{6}$ e $\frac{20}{15}$ são iguais:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{20}{15}$$

Dizemos, então, que as razões $\frac{8}{6}$ e $\frac{20}{15}$ formam uma *proporção* ou, ainda, que os números 8, 6, 20 e 15 são, nessa ordem, *proporcionais*.

Então:

Proporção é a igualdade entre duas razões.

Quatro números a , b , c e d são, nessa ordem, proporcionais quando a razão entre os dois primeiros é igual à razão entre os dois últimos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Em toda proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

a e d \rightarrow extremos

b e c \rightarrow meios

Propriedades das proporções

Já vimos também algumas propriedades que são válidas para as proporções:

Propriedade fundamental

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios}}$$

Propriedade da soma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \text{ ou } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Propriedade da diferença

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \text{ ou } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$



RAZÃO DE DOIS SEGMENTOS

Chamamos *razão de dois segmentos* a razão ou quociente entre os números que exprimem as medidas desses segmentos, tomados na mesma unidade.

Vejamos alguns exemplos:

1. Determinar a razão entre os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , sendo $AB = 6$ cm e $CD = 12$ cm. (Lembre-se: AB representa a medida do segmento \overline{AB} .)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

: 6 : 6
razão procurada

2. Dados \overline{MN} e \overline{PQ} , cujas medidas são, respectivamente, $\sqrt{2}$ cm e 5 cm, determinar a razão entre \overline{MN} e \overline{PQ} .

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

razão procurada

3. Qual a razão entre os segmentos \overline{AB} e \overline{DE} , sabendo-se que $AB = 2$ m e $DE = 60$ cm? Nesse caso, precisamos, inicialmente, transformar as duas medidas para a mesma unidade:

$$AB = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$$

$$DE = 60 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{200}{60} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

: 10 : 2 : 10 : 2
razão procurada

Você pode perceber, pelos exemplos, que a *razão* entre dois segmentos é sempre um número *real positivo*.

Sendo um número real, a razão pode ser:

- ✓ um número racional \rightarrow neste caso dizemos que os segmentos são *comensuráveis*.

$$\frac{AB}{CB} = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{AB} \text{ e } \overline{CB} \text{ são segmentos comensuráveis}$$

\swarrow
número racional

$$\frac{AB}{DE} = \frac{10}{3} \rightarrow \overline{AB} \text{ e } \overline{DE} \text{ são segmentos comensuráveis}$$

\swarrow
número racional

- ✓ um número irracional \rightarrow neste caso dizemos que os segmentos são *incomensuráveis*.

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{5} \rightarrow \overline{MN} \text{ e } \overline{PQ} \text{ são segmentos incomensuráveis}$$

\swarrow
número irracional

40

SEGMENTOS PROPORCIONAIS

Pelas definições de proporção e razão de segmentos, podemos dizer que quatro *segmentos*, \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} , nessa ordem, são *proporcionais*, quando a razão entre os dois primeiros for igual à razão entre os dois últimos, ou seja:

$$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{GH} \text{ são, nessa ordem, proporcionais, quando } \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Lembre-se de que as medidas dos segmentos devem estar na mesma unidade para formar a proporção.

Vejam alguns exemplos:

- Os segmentos $AB = 4 \text{ cm}$, $CD = 6 \text{ cm}$, $EF = 8 \text{ cm}$ e $GH = 12 \text{ cm}$ formam, nessa ordem, uma proporção, pois:

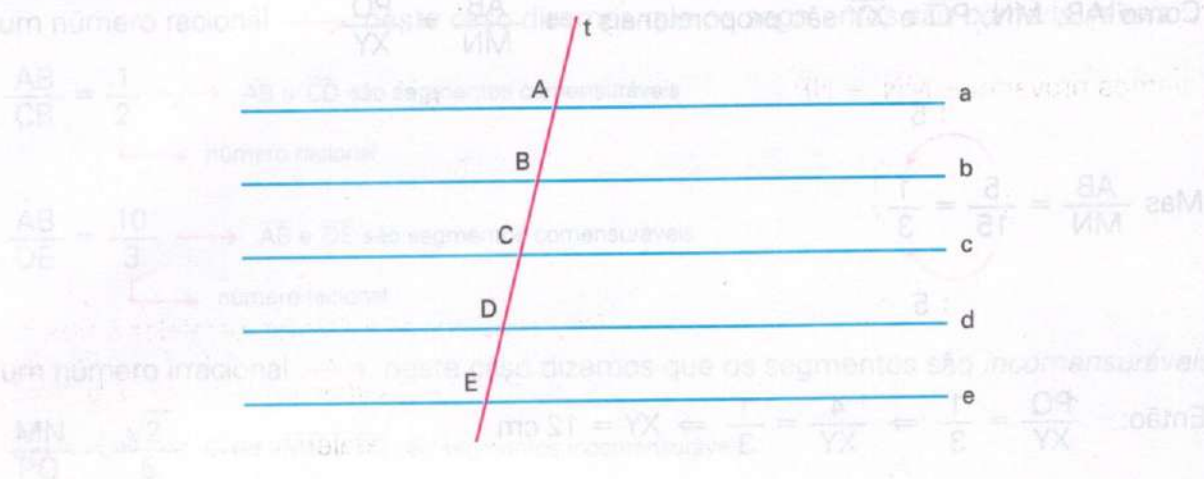
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} \\ \frac{EF}{GH} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

: 2

: 2

Propriedade de um feixe de retas paralelas

Vamos considerar um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal t . Assim, na transversal ficam determinados os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} , como mostra a figura seguinte.

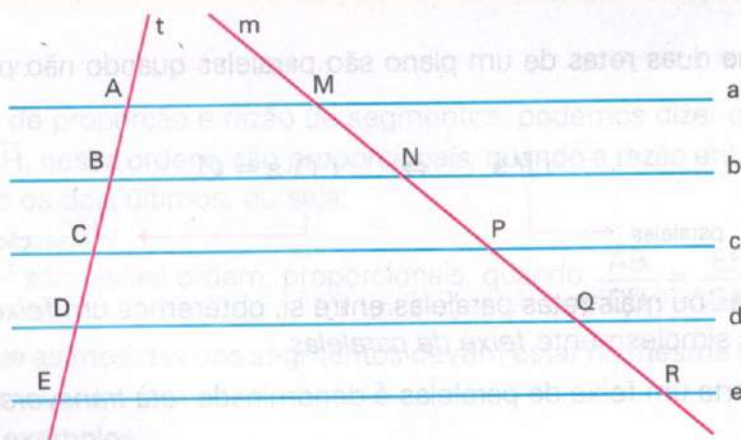


Medindo os segmentos com uma régua, vamos obter:

$$AB = BC = CD = DE = 1 \text{ cm} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE}$$

→ congruente

Vamos, agora, traçar uma reta m , transversal ao feixe de paralelas, determinando os segmentos \overline{MN} , \overline{NP} , \overline{PQ} e \overline{QR} .



Medindo os segmentos, vamos obter:

$$MN = NP = PQ = QR = 1,5 \text{ cm} \Rightarrow \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QR}$$

Podemos repetir este procedimento traçando outras transversais ao feixe de paralelas e verificaremos que os segmentos determinados em cada transversal serão congruentes entre si.

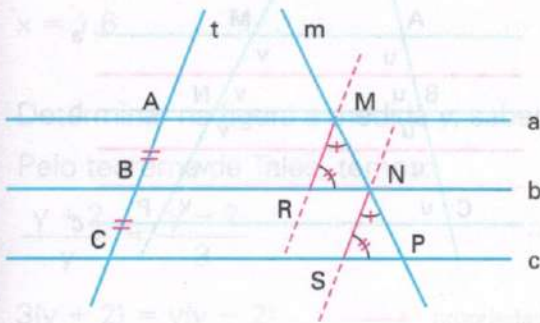
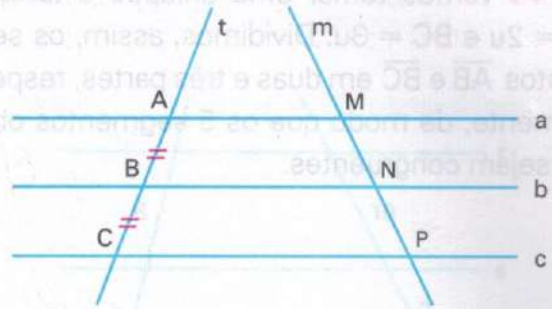
Dizemos então:

Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Podemos fazer a demonstração usando um feixe de três retas paralelas.

Sejam $a \parallel b \parallel c$ e t e m duas transversais, tais que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

Vamos provar que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.



Traçamos por M e N retas paralelas à reta t .

- ✓ $ABRM$ é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{MR}$
- ✓ $BCSN$ é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{BC} \cong \overline{NS}$
- ✓ Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (dado) $\Rightarrow \overline{MR} \cong \overline{NS}$ ①
- ✓ $\hat{R}MN \cong \hat{S}NP$ (correspondentes) ②
- ✓ $\hat{M}RN \cong \hat{N}SP$ ($b \parallel c$ e $\overline{MR} \parallel \overline{NS}$) ③

Por ①, ② e ③, temos $\triangle MRN \cong \triangle NSP$ (caso ALA)

Portanto, $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

Essa demonstração pode facilmente ser estendida a um feixe de mais de três retas paralelas.

42

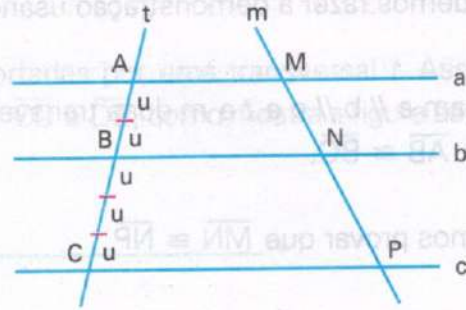
TEOREMA DE TALES

Vamos ver a seguir o que acontece quando os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre uma transversal não são congruentes entre si.

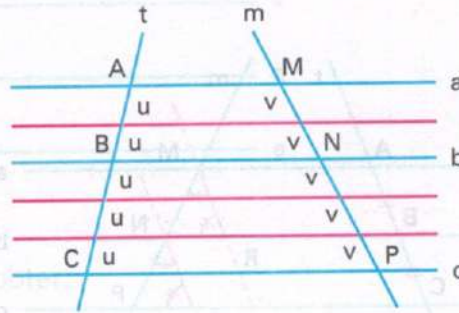
◆ Sejam as retas $a \parallel b \parallel c$, que determinam sobre a transversal t os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} e sobre a transversal m os segmentos \overline{MN} e \overline{NP} .



◆◆ Vamos tomar uma unidade u tal que $AB = 2u$ e $BC = 3u$. Dividimos, assim, os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} em duas e três partes, respectivamente, de modo que os 5 segmentos obtidos sejam congruentes.



◆◆ Pelos pontos de divisão, traçamos retas paralelas às retas a , b e c . Pela propriedade vista no capítulo anterior, se os segmentos determinados em t são congruentes, então os segmentos determinados em m também são congruentes. Chamamos essas medidas de v .



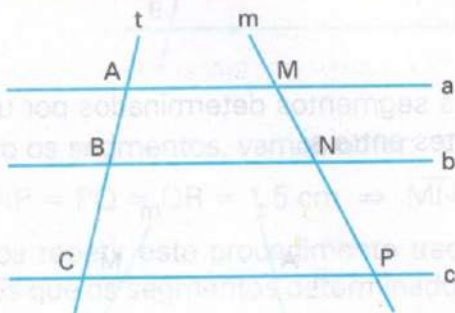
Então:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3} \\ \frac{MN}{NP} &= \frac{2v}{3v} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}, \text{ o que significa que os segmentos } \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \text{ são proporcionais.}$$

Essa relação é conhecida como *teorema de Tales*, em homenagem ao matemático grego Tales, que a desenvolveu.

Podemos, então, enunciar o teorema da seguinte maneira:

Um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.



$$a \parallel b \parallel c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Observação:

Podemos considerar ainda outras proporções a partir do teorema de Tales, tais como:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

Vejam alguns exemplos nos quais utilizamos o teorema de Tales:

1. Na figura $r \parallel s \parallel t$, determinar a medida x indicada.

Pelo teorema de Tales, temos:

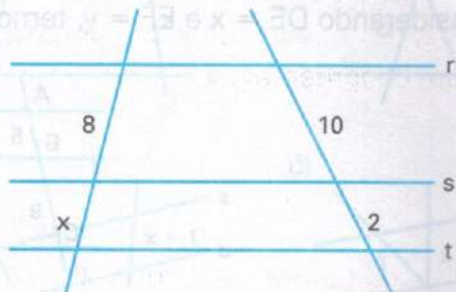
$$\frac{10}{2} = \frac{8}{x}$$

$$10x = 2 \cdot 8 \quad \rightarrow \text{propriedade fundamental das proporções}$$

$$10x = 16$$

$$x = \frac{16}{10}$$

$$x = 1,6$$



2. Determinar na figura a medida y , sabendo-se que $a \parallel b \parallel c$.

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{y+2}{y} = \frac{y-2}{3}$$

$$3(y+2) = y(y-2) \quad \rightarrow \text{propriedade fundamental das proporções}$$

$$3y+6 = y^2-2y$$

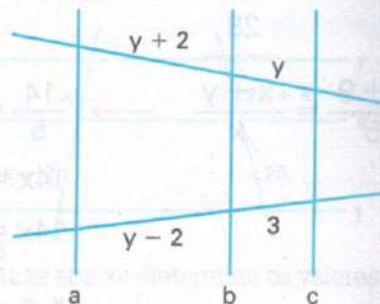
$$-y^2+3y+2y+6=0$$

$$-y^2+5y+6=0$$

$$y^2-5y-6=0 \quad \rightarrow \text{equação de 2º grau}$$

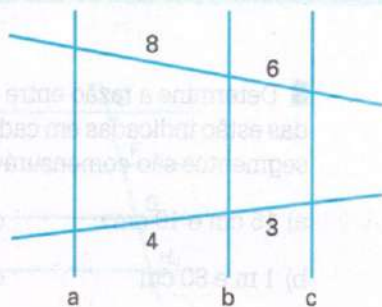
$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49$$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} y' = \frac{12}{2} = 6 \\ y'' = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$



Como $y = -1$ não serve, pois não existe medida negativa, então $y = 6$.

Para verificar se a resposta obtida está certa, basta substituir o valor encontrado na figura e verificar a validade do teorema de Tales:

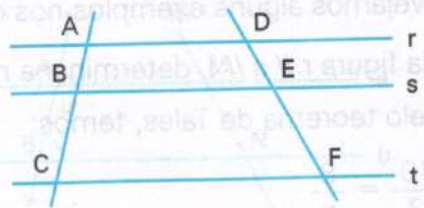


$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

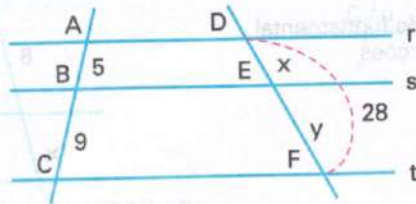
↓

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

3. Na figura ao lado $r \parallel s \parallel t$. Sabendo-se que $AB = 5$ cm, $BC = 9$ cm e $DF = 28$ cm, determinar as medidas \overline{DE} e \overline{EF} .



Considerando $DE = x$ e $EF = y$, temos:



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{5}{9} = \frac{x}{y}$$

Aplicando as propriedades da soma nas proporções:

$$\frac{5+9}{5} = \frac{x+y}{x} \rightarrow \frac{14}{5} = \frac{28}{x}$$

$$14x = 5 \cdot 28$$

$$14x = 140$$

$$x = \frac{140}{14} = 10$$

Como $x + y = 28 \rightarrow y = 28 - x$

$$y = 28 - 10$$

$$y = 18$$

Então, $DE = 10$ cm e $EF = 18$ cm.

FIXAÇÃO

1 Determine a razão entre os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , sabendo que $AB = 8$ cm e $CD = 20$ cm.

2 Sejam \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos tais que $AB = 2$ cm e $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}$. Qual a medida de \overline{CD} ?

3 Determine a razão entre os segmentos cujas medidas estão indicadas em cada item. A seguir, diga se os segmentos são comensuráveis ou incomensuráveis:

- a) 15 cm e 10 cm c) 3 m e $\sqrt{3}$ m
b) 1 m e 80 cm d) $\sqrt{20}$ cm e $\sqrt{5}$ cm

4 A razão entre dois segmentos é $\frac{2}{5}$. Sabendo-se que o maior mede 8 cm, qual a medida do segmento menor?

5 Seja M o ponto médio de um segmento \overline{AB} . Nessas condições, determine:

a) $\frac{AM}{MB}$ b) $\frac{AM}{AB}$ c) $\frac{AB}{MB}$

6 Na figura abaixo, $\overline{AM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NB}$. Sabendo que $AB = 12$ cm, determine:



a) $\frac{AM}{MN}$ d) $\frac{AN}{AB}$
 b) $\frac{AM}{AN}$ e) $\frac{NB}{AB}$
 c) $\frac{AM}{AB}$ f) $\frac{AN}{MB}$

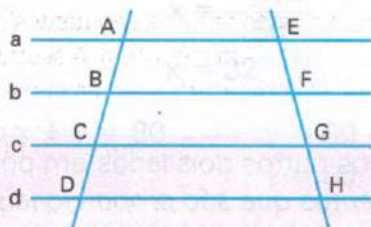
7 Dado um segmento \overline{RQ} , determinamos um ponto $P \in \overline{RQ}$, distante 6 cm de R . Sabendo-se que $\frac{PR}{PQ} = \frac{3}{10}$, qual a medida de \overline{RQ} ?

8 Verifique se os segmentos $AB = 25$ cm, $MN = 15$ cm, $PQ = 10$ cm e $RS = 6$ cm são, nessa ordem, proporcionais.

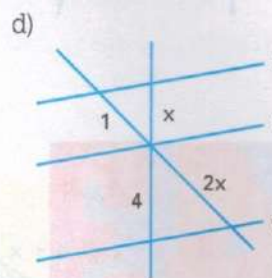
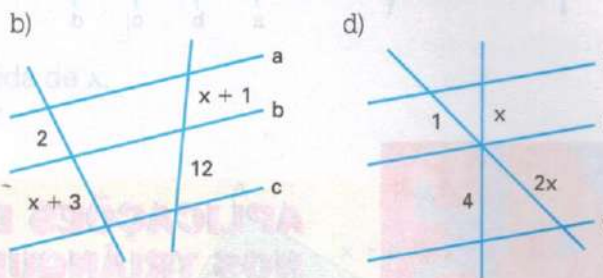
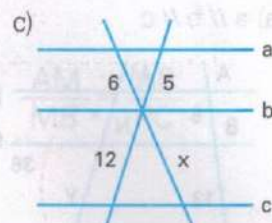
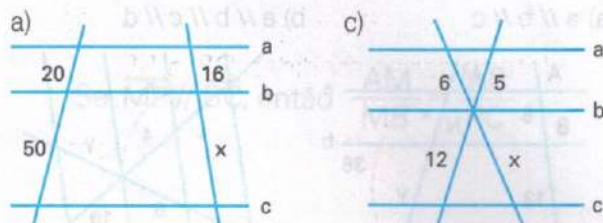
9 No exercício 8, estabeleça duas outras ordens entre os quatro segmentos, para que eles permaneçam proporcionais.

10 Quatro segmentos, \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} , são, nessa ordem, proporcionais. Sabendo-se que $AB = 15$ cm, $CD = 12$ cm e $EF = 8$ cm, qual a medida de \overline{GH} ?

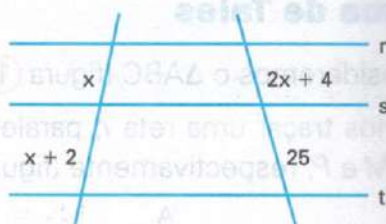
11 Na figura, $a // b // c // d$. Sabendo que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$ e $\overline{EF} = 3$ cm, determine as medidas de \overline{FG} e \overline{GH} .



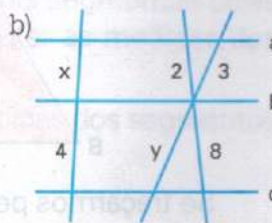
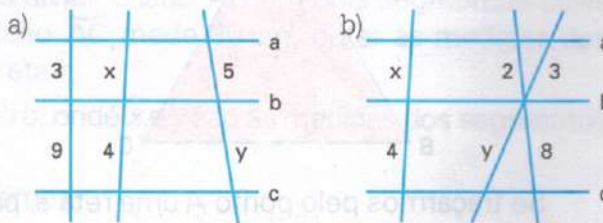
12 Nas figuras, $a // b // c$, determine os valores de x .



13 Na figura seguinte, $r // s // t$. Nessas condições, determine o valor de x .

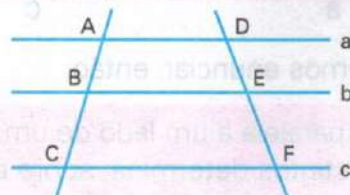


14 Nas figuras abaixo, determine os valores de x e y , sendo $a // b // c$.



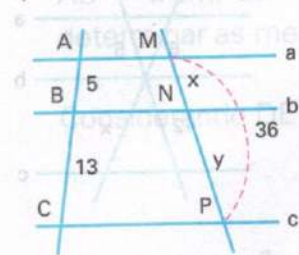
15 Um feixe de três retas paralelas encontra duas transversais r e s , determinando em r os pontos A , B e C , e em s os pontos P , Q e R . Sabendo-se que $AB = 6$ cm, $BC = 15$ cm e $PQ = 8$ cm, qual a medida de \overline{QR} ?

16 Na figura, $a // b // c$. Sabendo-se que $AB = 14$, $AC = 42$ e $DE = 18$, qual a medida de \overline{DF} ?

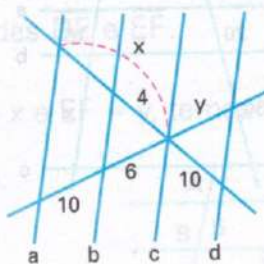


17 Determine nas figuras as medidas x e y .

a) $a \parallel b \parallel c$



b) $a \parallel b \parallel c \parallel d$



18 Três paralelas encontram duas transversais r e s . As paralelas encontram a transversal r nos pontos A , B e C e encontram a transversal s nos pontos D , E e F . Sabendo-se que $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm e $DF = 40$ cm, determine as medidas \overline{DE} e \overline{EF} .

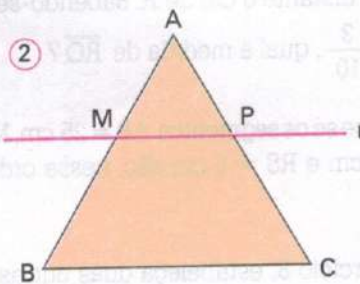
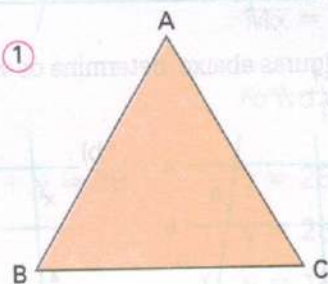
43

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE TALES NOS TRIÂNGULOS

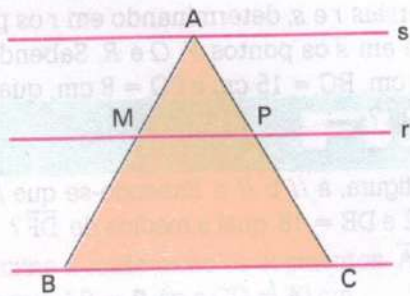
Teorema de Tales

Consideremos o $\triangle ABC$ (figura ①).

Vamos traçar uma reta r , paralela ao lado \overline{BC} , que irá interceptar os lados \overline{AB} e \overline{AC} nos pontos M e P , respectivamente (figura ②).



Se traçarmos pelo ponto A uma reta s , paralela à reta r , obteremos três retas paralelas (\overline{BC} , r e s) e duas transversais (\overline{AB} e \overline{AC}).



$$r \parallel s \parallel \overline{BC}$$

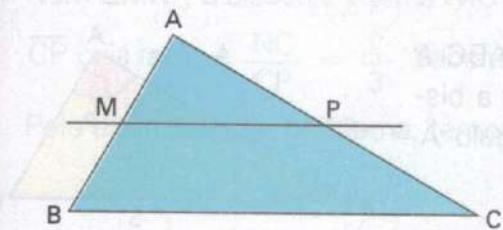
Pelo teorema de Tales

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC}$$

Podemos enunciar, então:

Toda paralela a um lado de um triângulo que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina, sobre esses dois lados, *segmentos que são proporcionais*.

Assim:



Se $\overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{BC}$, então $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC}$

Vejamos alguns exemplos:

1. Na figura abaixo, $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$. Determinar a medida de x .
Pelo teorema de Tales aplicado nos triângulos:

$$\frac{2x}{x} = \frac{x+4}{x+1}$$

$$2x(x+1) = x(x+4)$$

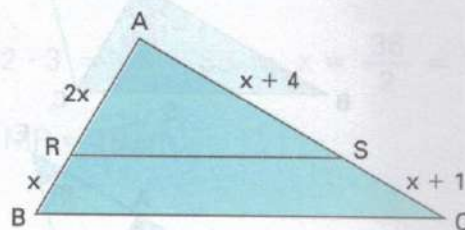
$$2x^2 + 2x = x^2 + 4x$$

$$2x^2 + 2x - x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Como $x = 0$ não serve, então $x = 2$.



2. Num ΔABC , uma reta r , paralela ao lado \overline{BC} , irá dividir o lado \overline{AB} em dois segmentos cujas medidas são 20 cm e 30 cm. Sabendo que o lado \overline{AC} mede 80 cm, obter as medidas dos segmentos determinados neste lado \overline{AC} pela reta r .

Pelo enunciado do problema, temos a figura abaixo, onde x e y são as medidas dos segmentos formados em \overline{AC} pela reta r .

Aplicando o teorema de Tales nos triângulos, temos:

$$\frac{20}{30} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{20+30}{20} = \frac{x+y}{x}$$

$$\frac{50}{20} = \frac{80}{x}$$

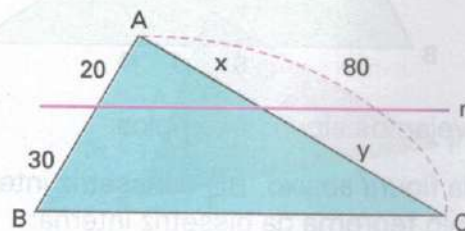
$$50x = 1600$$

$$x = \frac{1600}{50}$$

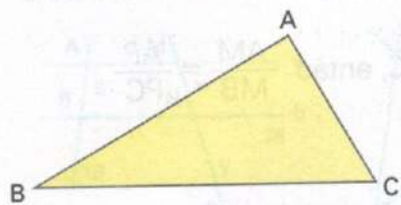
$$x = 32$$

Como $x + y = 80 \rightarrow y = 80 - x$
 $y = 80 - 32 = 48$

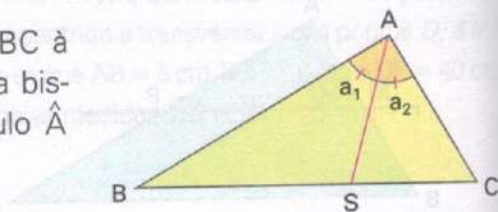
Então, os segmentos medem 32 cm e 48 cm.



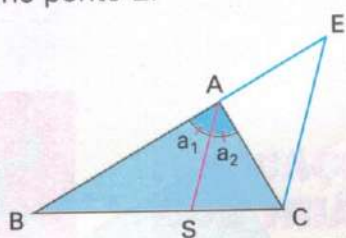
Teorema da bissetriz interna de um triângulo



Considerando o ΔABC à esquerda, vamos traçar a bissetriz interna \overline{AS} do ângulo \hat{A} (à direita).



Traçamos pelo vértice C uma reta paralela à bissetriz \overline{AS} , que irá encontrar o prolongamento do lado \overline{AB} no ponto E .



Considerando o ΔBCE e $\overline{AS} \parallel \overline{EC}$, temos:

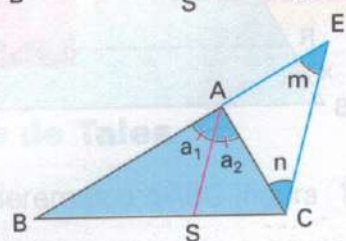
$$\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{SC} \quad (1)$$

Mas:

$m = a_1 \rightarrow$ ângulos correspondentes

$n = a_2 \rightarrow$ ângulos alternos internos

$a_1 = a_2 \rightarrow \overline{AS}$ é bissetriz de \hat{A} .

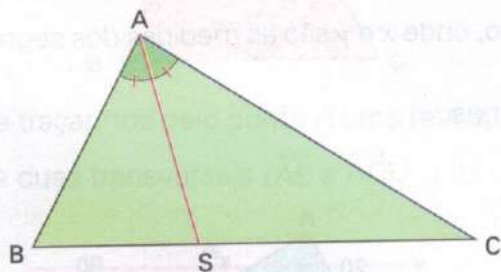


Então, $m = n \Rightarrow \Delta AEC$ é isósceles $\Rightarrow \overline{AE} \cong \overline{AC}$

Substituindo \overline{AE} por \overline{AC} na proporção (1), temos: $\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC}$.

Podemos, então, enunciar:

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, sobre o lado oposto, segmentos que são proporcionais aos lados do triângulo que formam o ângulo considerado.



Se \overline{AS} é bissetriz do ângulo \hat{A} , então:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BS} = \frac{AC}{SC}$$

Vejamos alguns exemplos:

- Na figura abaixo, \overline{BD} é bissetriz interna do ângulo \hat{B} . Determinar o valor de x .
Pelo teorema da bissetriz interna:

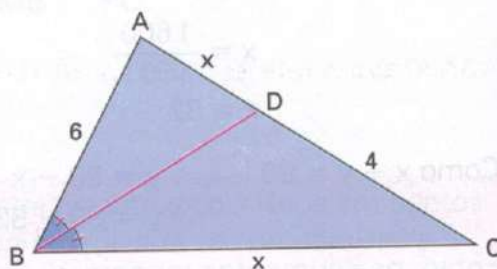
$$\frac{x}{6} = \frac{4}{x} \rightarrow x \cdot x = 6 \cdot 4$$

$$x^2 = 24$$

$$x = \sqrt{24}$$

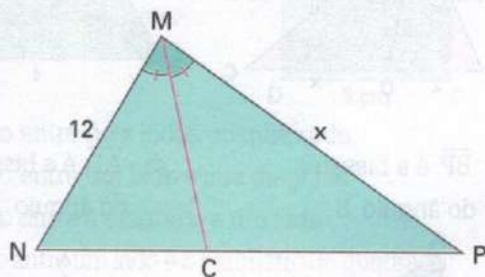
$$x = 2\sqrt{6}$$

Então, $x = 2\sqrt{6}$.



2. Num $\triangle MNP$, a bissetriz interna \overline{MC} do ângulo \hat{M} determina no lado \overline{NP} os segmentos \overline{NC} e \overline{CP} cuja razão é $\frac{NC}{CP} = \frac{2}{3}$. Sabendo-se que $MN = 12$ cm, determinar a medida do lado \overline{MP} .

Pelo enunciado do problema, temos a figura abaixo, onde x é a medida do lado \overline{MP} .



Pelo teorema da bissetriz interna:

$$\frac{12}{x} = \frac{NC}{CP}$$

Mas, $\frac{NC}{CP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{2}{3}$

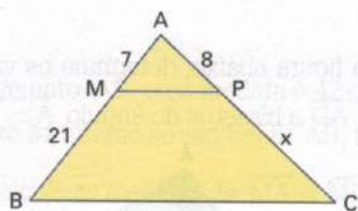
$$2x = 12 \cdot 3 \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{2} = 18$$

Então, $MP = 18$ cm.

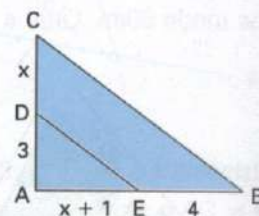
FIXAÇÃO

- 1 Nos triângulos abaixo, determine a medida x indicada:

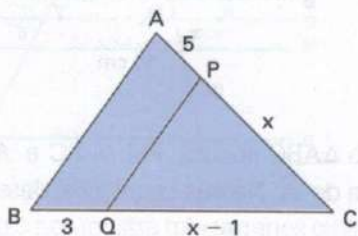
- a) $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$



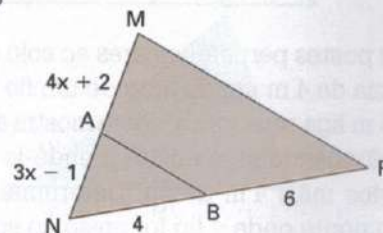
- c) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



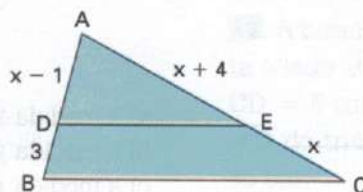
- b) $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$



- d) $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$

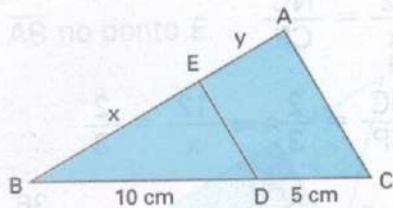


- 2 No $\triangle ABC$ abaixo, sabe-se que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Calcule as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo.



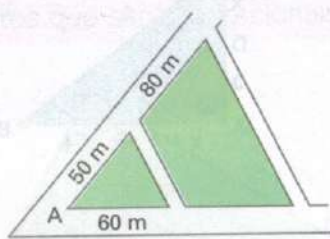
3 Num $\triangle ABC$, o lado \overline{AB} mede 20 cm. Por um ponto D , em \overline{AB} , a 12 cm do vértice A , traça-se a paralela ao lado \overline{BC} , que corta o lado \overline{AC} no ponto E . Se $AE = 15$ cm, qual a medida do lado \overline{AC} ?

4 Na figura abaixo, sabe-se que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ e que $AB = 21$ cm. Nessas condições, determine as medidas x e y .

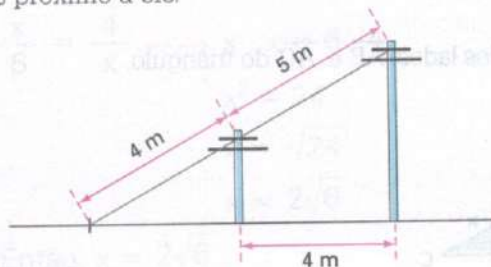


5 Num $\triangle ABC$, os lados \overline{AB} e \overline{AC} medem, respectivamente, 18 cm e 12 cm. Traçamos uma reta paralela ao lado \overline{BC} do triângulo que irá cortar o lado \overline{AB} no ponto P e o lado \overline{AC} no ponto Q , de tal forma que $AQ = 9$ cm e $QC = 3$ cm. Quais as medidas dos segmentos \overline{AP} e \overline{PB} ?

6 Duas avenidas partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas, como mostra a figura. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas medem 50 m e 80 m, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual a medida do outro quarteirão?

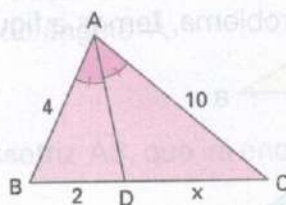


7 Dois postes perpendiculares ao solo estão a uma distância de 4 m um do outro, e um fio bem esticado de 5 m liga seus topos, como mostra a figura abaixo. Prolongando esse fio até prendê-lo no solo, são utilizados mais 4 m de fio. Determine a distância entre o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele.

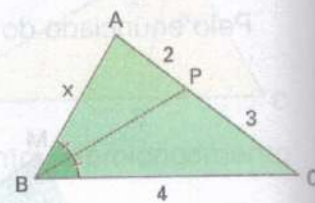


8 Nas figuras seguintes, determine o valor de x .

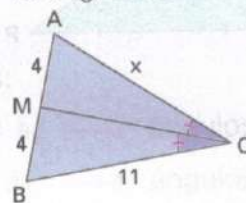
a) \overline{AD} é a bissetriz do ângulo \hat{A} .



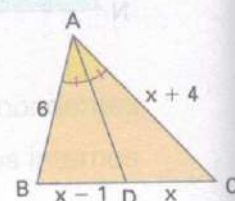
c) \overline{CM} é a bissetriz do ângulo \hat{C} .



b) \overline{BP} é a bissetriz do ângulo \hat{B} .

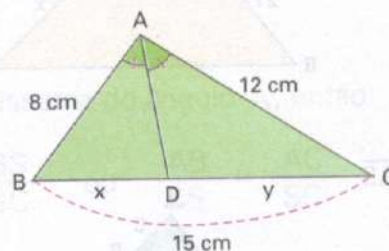


d) \overline{AD} é a bissetriz do ângulo \hat{A} .

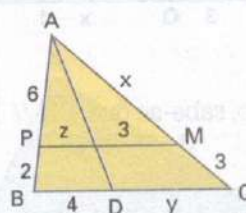


9 Num $\triangle ABC$, os lados \overline{AB} e \overline{AC} medem, respectivamente, 15 cm e 20 cm. A bissetriz do ângulo interno \hat{A} determina sobre o lado oposto \overline{BC} os segmentos \overline{BD} e \overline{DC} , cujas medidas são expressas, em centímetros, por $x - 4$ e x , respectivamente. Nessas condições, determine a medida do lado \overline{BC} desse triângulo.

10 Na figura abaixo, determine os valores de x e y , sendo \overline{AD} a bissetriz do ângulo \hat{A} .



11 No $\triangle ABC$ abaixo, $\overline{PM} \parallel \overline{BC}$ e \overline{AD} é a bissetriz interna de \hat{A} . Nessas condições, determine:

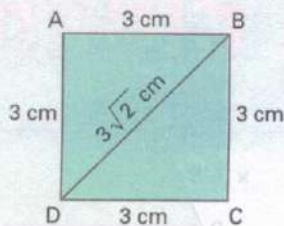


- a) a medida x
b) a medida y
c) a medida z

- d) o perímetro do $\triangle ABC$
e) o perímetro do $\triangle APM$

RETOMANDO o que aprendeu

1 No quadrado da figura, o lado mede 3 cm e sua diagonal mede $3\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine:



- a razão entre dois lados do quadrado.
- a razão entre um lado e sua diagonal.
- a razão entre a diagonal e um lado.
- a razão entre um lado e o perímetro do quadrado.

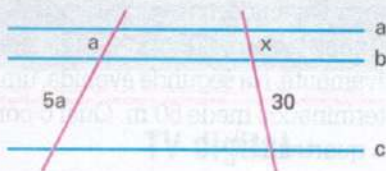
2 Os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} são, nessa ordem, proporcionais. Sabendo que $AB = 6$ m, $CD = 8$ m e $EF + GH = 21$ m, calcule as medidas de \overline{EF} e \overline{GH} .

3 Seja um segmento $AB = 32$ cm. Sobre a reta suporte de \overline{AB} e externo ao segmento, tomamos um ponto N , tal que $\frac{AB}{BN} = \frac{8}{3}$. Nessas condições:

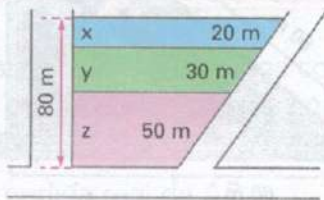
- Faça uma figura que represente a situação acima.
- A que distância do ponto B deve ser marcado o ponto N ?

4 Dado um segmento \overline{AB} , cuja medida é 42 cm, tomamos um ponto M , interno ao segmento \overline{AB} , tal que $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5}$. Calcule as medidas de \overline{MA} e \overline{MB} .

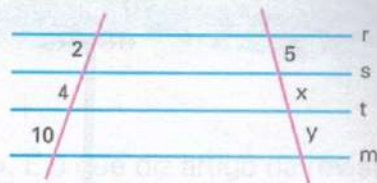
5 Na figura abaixo, $a \parallel b \parallel c$. Determine o valor de x .



6 A planta abaixo nos mostra três terrenos cujas laterais são paralelas. Calcule, em metros, as medidas x , y e z indicadas.

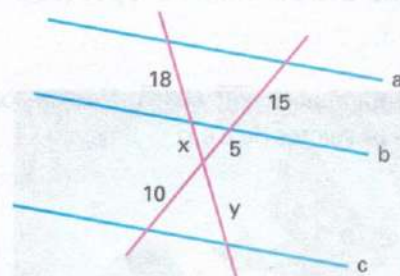


7 Na figura seguinte, $r \parallel s \parallel t \parallel m$. Nessas condições, determine x e y .

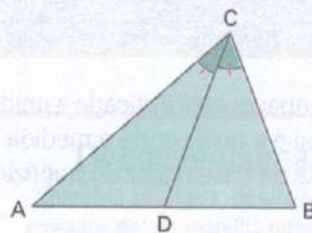


8 Um feixe de paralelas determina sobre uma transversal os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} , tal que $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm e $CD = 7$ cm. Calcule as medidas dos segmentos \overline{MN} , \overline{NP} e \overline{PQ} , determinados pelo mesmo feixe sobre outra transversal, sabendo que $\overline{MQ} = 60$ cm.

9 Na figura abaixo, $a \parallel b \parallel c$. Qual o valor de x e y ?



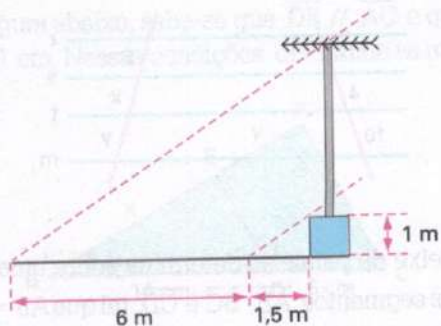
10 No $\triangle ABC$ da figura, \overline{CD} é a bissetriz do ângulo \hat{C} . Se $AD = 3$ cm, $DB = 2$ cm e $AC = 6$ cm, determine:



- a medida do lado \overline{BC} .
- o perímetro do $\triangle ABC$.

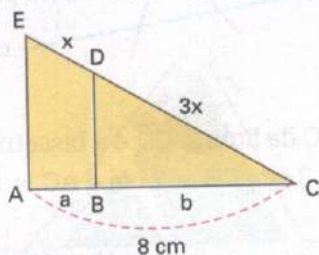
11 A bissetriz do ângulo \hat{A} de um $\triangle ABC$ intercepta o lado \overline{BC} em um ponto D tal que $BD = 9$ cm e $CD = 6$ cm. Calcule as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo, sabendo que o seu perímetro é 45 cm.

12 Uma antena de TV é colocada sobre um bloco de concreto, como mostra a figura abaixo. Esse bloco tem 1 m de altura. Em certo instante, a antena projeta uma sombra de 6 m, enquanto o bloco projeta uma sombra de 1,5 m. Nessas condições, qual é a altura da antena?

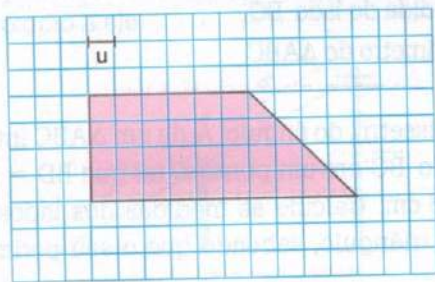


13 Calcule o perímetro de um $\triangle MNP$, sabendo que as medidas dos lados \overline{MN} e \overline{MP} diferem de 3 cm e que a bissetriz de \hat{M} determina no lado \overline{NP} segmentos de 6 cm e 5 cm.

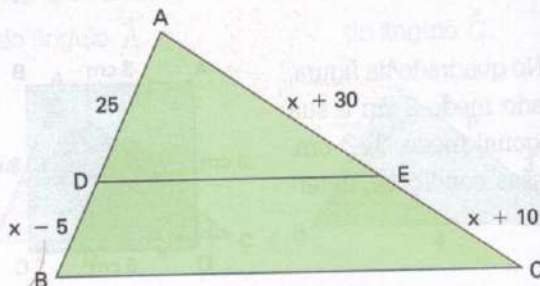
14 Na figura abaixo, $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$. Nessas condições, determine os valores de a e b .



15 Na figura abaixo está indicada a unidade de comprimento. Qual é a razão entre a medida da base menor e a medida da base maior do trapézio?

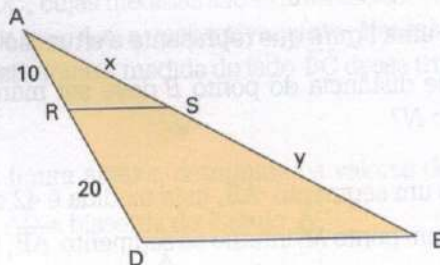


16 No triângulo ABC da figura, sabe-se que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Calcule as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo.

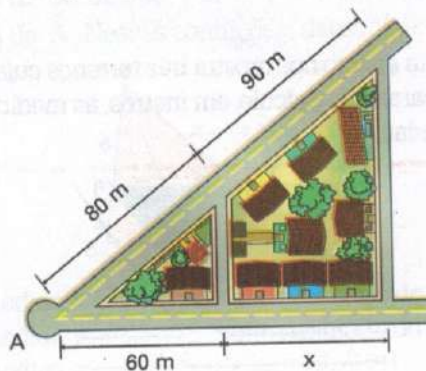


17 Num triângulo ABC, o lado \overline{AB} mede 24 cm. Por um ponto D, sobre o lado \overline{AB} , distante 10 cm do vértice A, traça-se a paralela ao lado \overline{BC} , que corta o lado \overline{AC} no ponto E. Sabendo-se que o segmento \overline{AE} tem 15 cm de comprimento, determine a medida do lado \overline{AC} .

18 Na figura abaixo, sabe-se que $\overline{RS} \parallel \overline{DE}$ e que $AE = 42$ cm. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.



19 A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas têm 80 m e 90 m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual o comprimento do outro quarteirão?

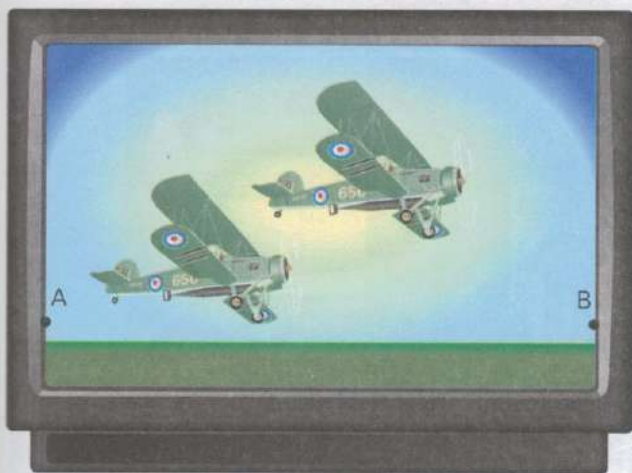


JORNALIS & REVISTAS

A televisão de alta definição, HDTV, já está a caminho. É o que diz artigo da revista *Veja* de 23/4/97. Leia um trecho:

"A televisão vai mudar radicalmente, muito em breve. Depois de anos de indecisão, o governo americano decidiu dar às grandes redes exibidoras o comando do processo de implantação no país da televisão de alta definição, a HDTV. Até o ano 2006, em menos de uma década, portanto, todos os 240 milhões de televisores espalhados pelos Estados Unidos terão de ser trocados por modelos que recebam sinais de HDTV. Serão sinais digitais, como os dos computadores, capazes de transportar até a casa dos telespectadores uma imagem dezenas de vezes mais cristalina e fiel que a dos televisores atuais, aliada a um som puro e estereofônico de até seis canais simultâneos (veja quadro).

Com a bandeirada de largada dada nos Estados Unidos, logo a HDTV estará batendo na porta dos consumidores no Brasil e em outros países."



TV digital

De alta definição, os sinais chegam ao aparelho em seqüências de 0 e 1 eletrônicos — a mesma linguagem dos computadores. A imagem, muito mais nítida, tem 1 080 linhas de resolução. É retangular, como nas telas de cinema. O som também é digital.



TV convencional

Chamada analógica, os sinais são enviados para o aparelho num fluxo constante de ondas de rádio. As imagens são reproduzidas na tela numa resolução de 480 linhas horizontais.

As telas desses aparelhos costumam ser medidas, em diagonal, por polegadas. Admitindo que cada centímetro na figura corresponda a quatro polegadas nos modelos reais, determine:

- o tamanho da tela de cada televisor
- a medida real de AB.

7

Semelhança

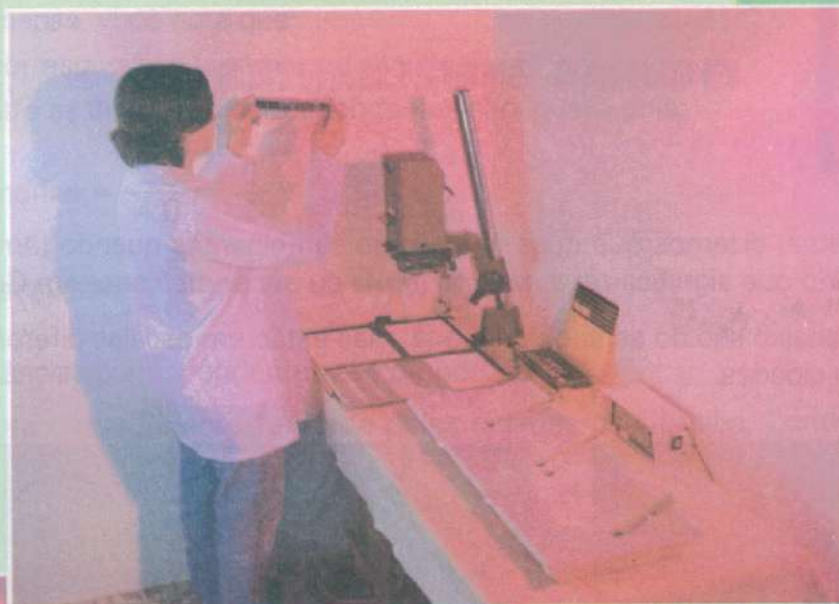
Engenheiros e arquitetos, antes da execução de seus projetos, freqüentemente desenham ou montam as obras que projetam em dimensões reduzidas, fazendo uso de plantas e maquetes. Nas maquetes os edifícios projetados mantêm a forma que terão originalmente, porém são construídos em dimensões bem reduzidas.



M
cos é
repro
tama
terior
maio
tama
ado
mas
rente

O
a me
difer
obje
melh
dar n

pro-
que
ma-
orma
ções



Nos laboratórios fotográficos é conhecido o trabalho de reprodução de negativos em tamanho reduzido, para posterior ampliação das fotos de maior interesse. Fotos em tamanhos reduzido ou ampliado têm a mesma forma, mas os tamanhos são diferentes.

Quando dois objetos têm a mesma forma e tamanhos diferentes, dizemos que esses objetos representam *figuras semelhantes*. É o que vamos estudar nesta Unidade.

Escola Municipal Maria Caproni de Oliveira
de Ensino Fundamental (1ª à 8ª série)
R. Marcolino Perelra de Carvalho, nº 315
CEP 37760-000 - Carvalhópolis MG

Em Geometria, dizemos que duas figuras são semelhantes quando têm a *mesma forma*. Vejamos melhor o que significa *ter a mesma forma* ou *ser semelhante* em Geometria.

Os mapas abaixo são do estado do Paraná, mas estão em escalas diferentes. Neles destacamos algumas cidades.



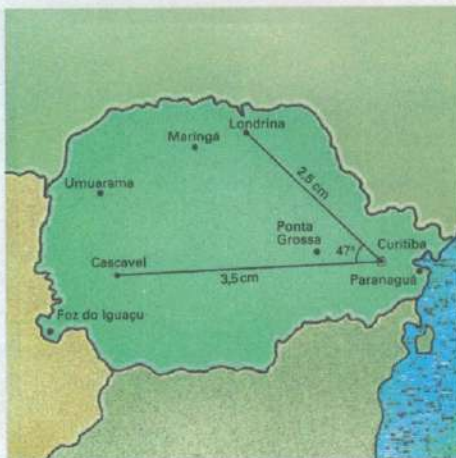
Mapa 1



Mapa 2

Você pode notar que os dois mapas têm a *mesma forma*, embora tenham *tamanhos diferentes*, pois o mapa 2 é uma ampliação do mapa 1. Dizemos que esses mapas representam *figuras semelhantes*.

Voltando aos mapas, vamos assinalar as distâncias, em linha reta, entre Curitiba (capital) e Londrina (norte do estado) e entre Curitiba e Cascavel (oeste do estado). Vamos assinalar também o ângulo formado por esses segmentos que traçamos, cujo vértice está em Curitiba.



Mapa 1



Mapa 2

Olhando os mapas, você nota que:

Os ângulos correspondentes têm medidas iguais (47°).

As razões entre as distâncias correspondentes são iguais, pois:

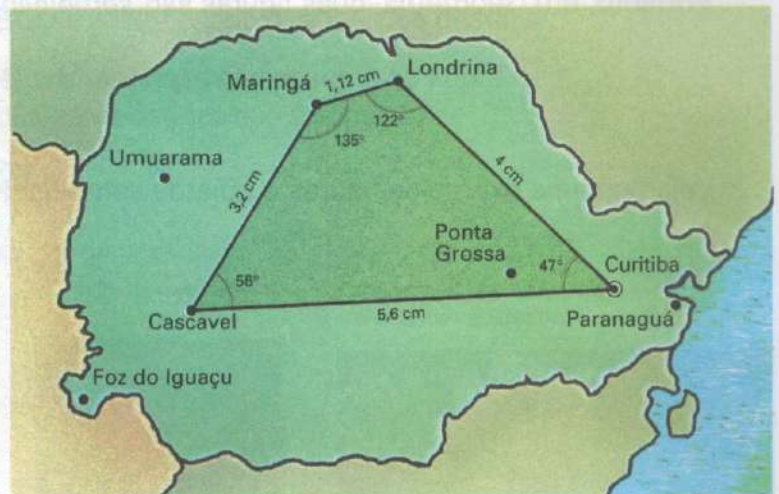
$$\left. \begin{aligned} \text{Curitiba - Londrina} &= \frac{2,5}{4,0} = \frac{5}{8} \\ \text{Curitiba - Cascavel} &= \frac{3,5}{5,6} = \frac{5}{8} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{2,5}{4,0} = \frac{3,5}{5,6} = \frac{5}{8}$$

Logo, as distâncias correspondentes são proporcionais.

Vejam agora o quadrilátero formado pelas cidades de Curitiba, Londrina, Maringá e Cascavel.



Mapa 1



Mapa 2

Vamos considerar os pontos que representam essas cidades no mapa como os vértices, e as distâncias em linha reta entre as cidades como as medidas dos lados do quadrilátero.

Organizando uma tabela, temos:

Distâncias	Mapa 1	Mapa 2
Curitiba – Londrina	2,5 cm	4,0 cm
Londrina – Maringá	0,7 cm	1,12 cm
Maringá – Cascavel	2,0 cm	3,2 cm
Cascavel – Curitiba	3,5 cm	5,6 cm

Note que:

Os ângulos correspondentes possuem medidas iguais.

As distâncias correspondentes (medidas dos lados dos quadriláteros) são proporcionais, pois:

$$\frac{2,5}{4,0} = 0,625$$

$$\frac{0,7}{1,12} = 0,625$$

$$\frac{2,0}{3,2} = 0,625$$

$$\frac{3,5}{5,6} = 0,625$$

$$\frac{2,5}{4,0} = \frac{0,7}{1,12} = \frac{2,0}{3,2} = \frac{3,5}{5,6} = 0,625$$

Portanto, em Geometria, duas figuras são *semelhantes* quando:

Todos os ângulos correspondentes têm medidas iguais;
as distâncias correspondentes são proporcionais.

Vejamos, nos exemplos, figuras e objetos semelhantes:

Um slide e sua imagem projetada numa tela



Foto: Sérgio Dotta Jr/The Next

A maquete de um prédio e o prédio real

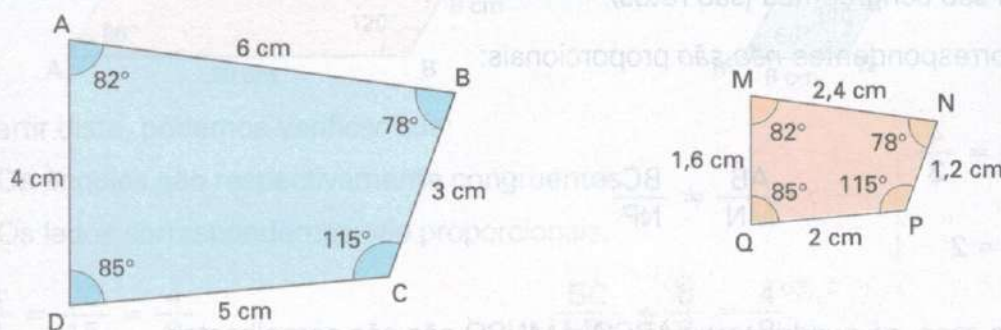
POLÍGONOS SEMELHANTES

Para que duas figuras sejam semelhantes, é necessário que tenham ângulos correspondentes de mesma medida e as medidas dos lados correspondentes proporcionais.

Dois polígonos com o mesmo número de lados são *semelhantes* quando possuem:

- ✓ os ângulos respectivamente congruentes
- ✓ os lados correspondentes proporcionais

Por exemplo, nos quadriláteros ABCD e MNPQ abaixo, podemos destacar:



Você nota que:

- ✓ Os ângulos correspondentes possuem a mesma medida: $\hat{A} \cong \hat{M}$, $\hat{B} \cong \hat{N}$, $\hat{C} \cong \hat{P}$, $\hat{D} \cong \hat{Q}$.
- ✓ Os lados correspondentes são proporcionais:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{MN} &= \frac{6}{2,4} = 2,5 \\ \frac{BC}{NP} &= \frac{3}{1,2} = 2,5 \\ \frac{CD}{PQ} &= \frac{5}{2} = 2,5 \\ \frac{AD}{MQ} &= \frac{4}{1,6} = 2,5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{AD}{MQ} = 2,5$$

Dizemos, então, que os quadriláteros ABCD e MNPQ são *semelhantes* e indicamos:

$$\text{quadrilátero ABCD} \sim \text{quadrilátero MNPQ}$$

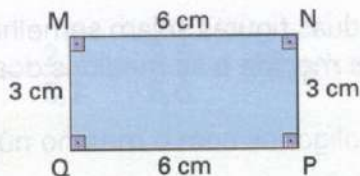
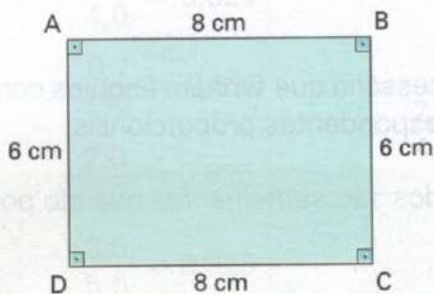
→ símbolo de semelhança

Observe que:

- ◆ A razão entre qualquer lado do quadrilátero ABCD e o lado correspondente no quadrilátero MNPQ é sempre a mesma, 2,5.

Dizemos, então, que 2,5 é a *razão de semelhança* do quadrilátero ABCD para o quadrilátero MNPQ.

◆◆ Para saber se dois polígonos são semelhantes, devemos verificar sempre as duas condições: ângulos respectivamente congruentes e lados correspondentes proporcionais, pois apenas uma das condições não garante a semelhança, como podemos comprovar pelos exemplos:



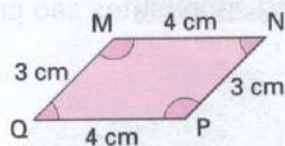
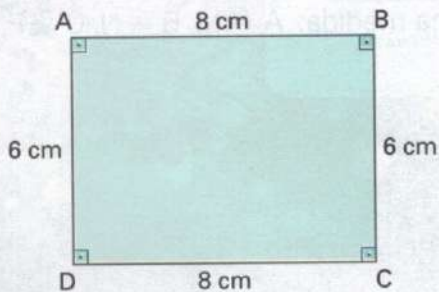
Se considerarmos os quadriláteros ABCD e MNPQ, verificamos que:

- ✓ Os ângulos são congruentes (são retos).
- ✓ Os lados correspondentes *não são* proporcionais:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{MN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{BC}{NP} = \frac{6}{3} = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{AB}{MN} \neq \frac{BC}{NP}$$

Logo, neste caso, os quadriláteros ABCD e MNPQ não são semelhantes.

Observe agora estes outros dois quadriláteros:



Verificamos que:

- ✓ Os lados correspondentes são proporcionais

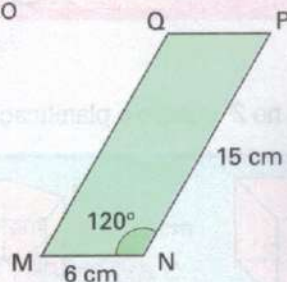
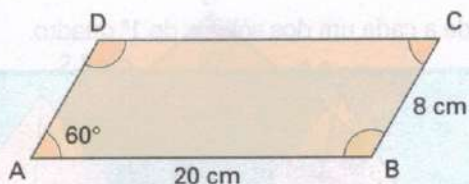
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{MN} = \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{BC}{NP} = \frac{6}{3} = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

- ✓ Os ângulos *não são* congruentes

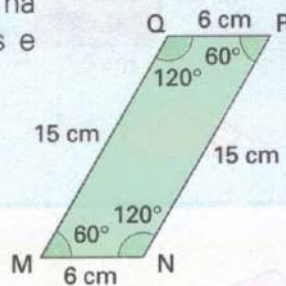
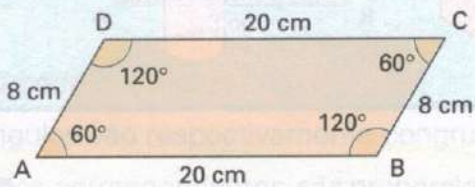
Neste caso, os quadriláteros ABCD e MNPQ *não são* semelhantes.

Observe, agora, alguns exemplos onde vamos usar o conceito de semelhança entre dois polígonos.

1. Verificar se os paralelogramos ABCD e MNPQ abaixo são semelhantes.



Pelas propriedades dos paralelogramos, que estudamos na 7ª série, podemos completar as medidas dos ângulos e dos lados nas figuras:



A partir disto, podemos verificar que:

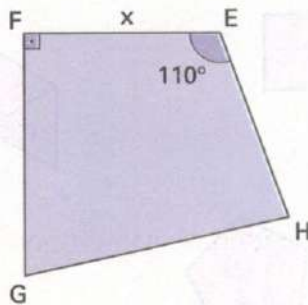
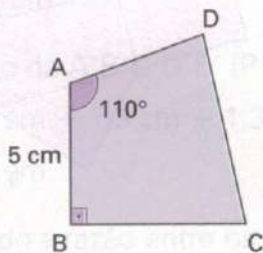
- ✓ Os ângulos são respectivamente congruentes.
- ✓ Os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{PN} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{BC}{MN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Então, concluímos que $ABCD \sim MNPQ$ e a razão de semelhança é $\frac{4}{3}$.

2. Os quadriláteros ABCD e EFGH são semelhantes. O lado \overline{AB} do primeiro corresponde ao lado \overline{EF} do segundo. Sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é de $\frac{2}{3}$, qual é a medida do lado \overline{EF} do quadrilátero EFGH?



Como $ABCD \sim EFGH$, temos que:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$$

Assim, $\frac{5}{x} = \frac{2}{3}$ → razão de semelhança

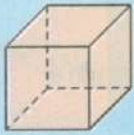
$$\frac{5}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow 2x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{2} \rightarrow x = 7,5 \text{ cm}$$

Logo, $EF = 7,5 \text{ cm}$.

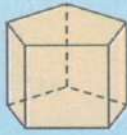
Explorando

Geometria

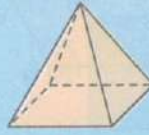
Descubra no 2º quadro a planificação que corresponde a cada um dos sólidos do 1º quadro.



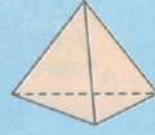
A



B



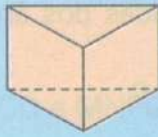
C



D



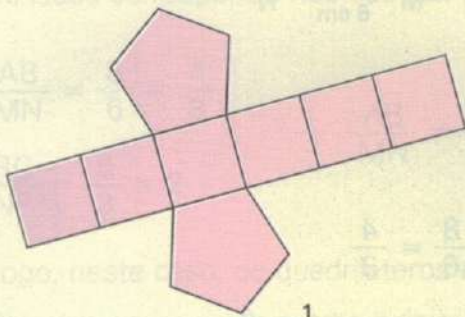
E



F



G



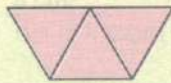
1



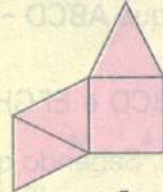
2



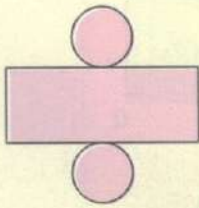
3



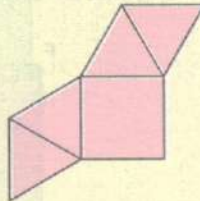
4



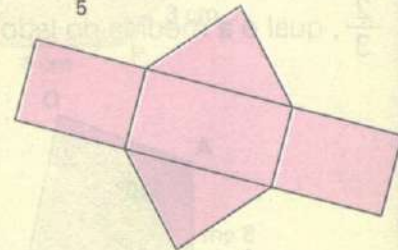
5



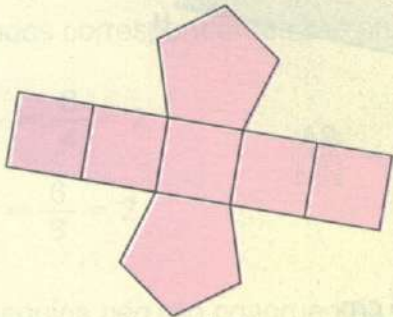
6



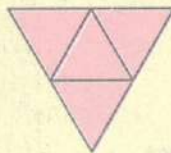
7



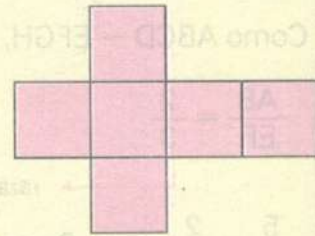
8



9



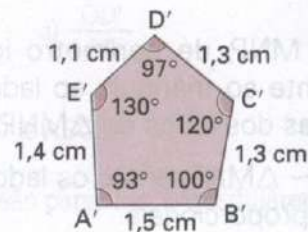
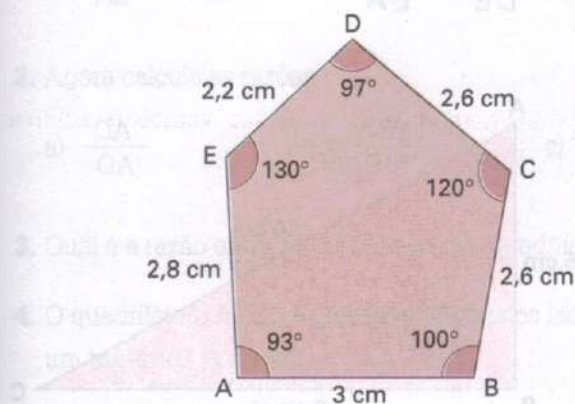
10



11

Uma propriedade importante

Observe os pentágonos ABCDE e A'B'C'D'E' abaixo:



Você pode notar que:

- ✓ Os ângulos são respectivamente congruentes
- ✓ Os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{2,6}{1,3} = 2$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{2,6}{1,3} = 2$$

$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{2,2}{1,1} = 2$$

$$\frac{EA}{E'A'} = \frac{2,8}{1,4} = 2$$

Então, $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ e a razão de semelhança é 2.

Vamos, agora, calcular os perímetros dos dois pentágonos.

Perímetro de ABCDE (P):

$$P = 3 \text{ cm} + 2,6 \text{ cm} + 2,6 \text{ cm} + 2,2 \text{ cm} + 2,8 \text{ cm}$$

$$P = 13,2 \text{ cm}$$

Perímetro de A'B'C'D'E' (P'):

$$P' = 1,5 \text{ cm} + 1,3 \text{ cm} + 1,3 \text{ cm} + 1,1 \text{ cm} + 1,4 \text{ cm}$$

$$P' = 6,6 \text{ cm}$$

Calculando a razão entre os perímetros:

$$\frac{P}{P'} = \frac{13,2}{6,6} = 2$$

razão de semelhança ou razão entre os lados correspondentes

Assim, podemos escrever:

Quando dois polígonos são semelhantes, os perímetros desses polígonos são proporcionais às medidas de dois lados correspondentes quaisquer.

Nos pentágonos que acabamos de ver, temos:

$$\frac{\text{perímetro de } ABCDE}{\text{perímetro de } A'B'C'D'E'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Vejamos um exemplo de aplicação dessa propriedade.

Um triângulo MNP, de perímetro igual a 36 cm, é semelhante ao triângulo ao lado. Determinar as medidas dos lados do $\triangle MNP$.

Como $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, então os lados correspondentes são proporcionais.

Indicando as medidas do $\triangle MNP$ por x , y e z , temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10} = \frac{\text{perímetro do } \triangle MNP}{\text{perímetro do } \triangle ABC} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

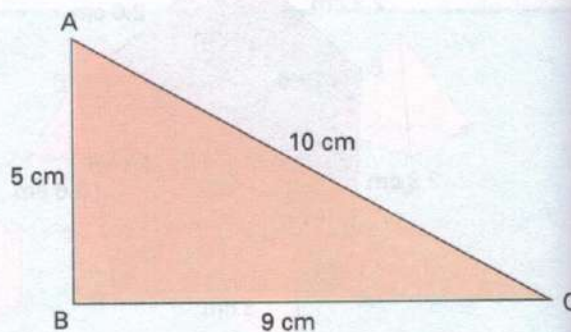
razão de semelhança

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{2} \rightarrow 2x = 15 \rightarrow x = 7,5$$

$$\frac{y}{9} = \frac{3}{2} \rightarrow 2y = 27 \rightarrow y = 13,5$$

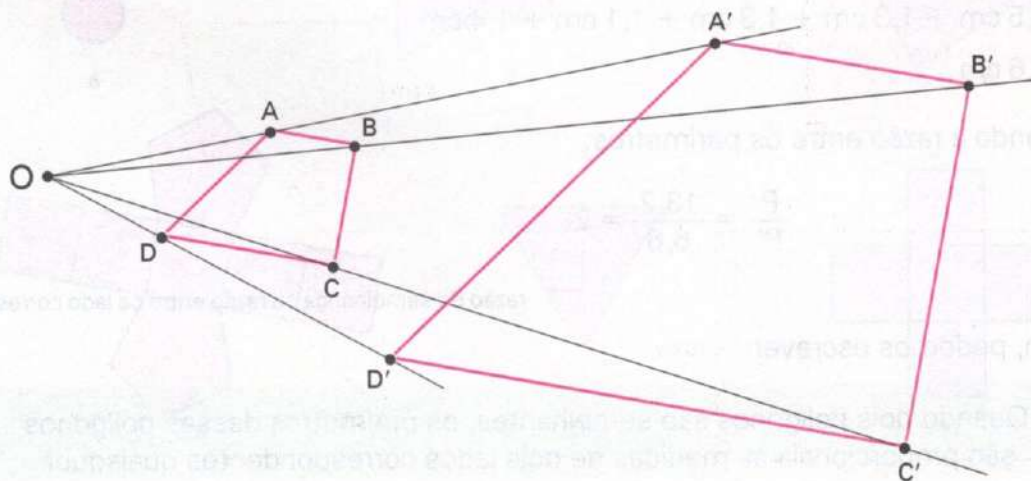
$$\frac{z}{10} = \frac{3}{2} \rightarrow 2z = 30 \rightarrow z = 15$$

Então, os lados do $\triangle MNP$ medem 7,5 cm, 13,5 cm e 15 cm.



Explorando Geometria

A figura mostra a projeção $A'B'C'D'$ do quadrilátero $ABCD$ a partir do ponto O , chamado centro de projeção.



1. Use uma régua para medir os lados dos quadriláteros. A seguir, calcule as razões da projeção:

a) $\frac{A'B'}{AB}$

b) $\frac{B'C'}{BC}$

c) $\frac{D'C'}{DC}$

d) $\frac{A'D'}{AD}$

2. Agora calcule as razões:

a) $\frac{OA'}{OA}$

b) $\frac{OB'}{OB}$

c) $\frac{OC'}{OC}$

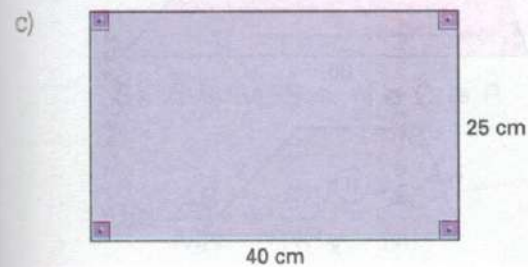
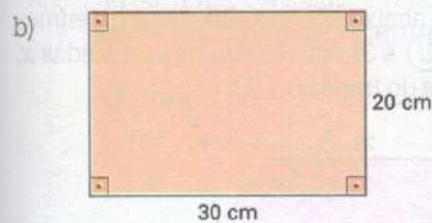
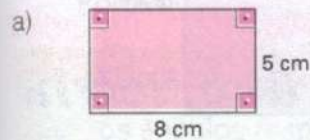
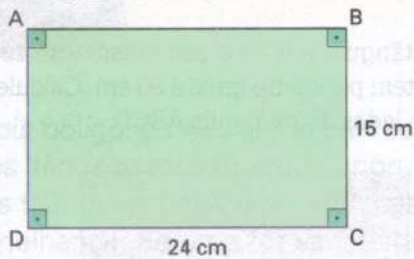
d) $\frac{OD'}{OD}$

3. Qual é a razão entre os perímetros dos quadriláteros $A'B'C'D'$ e $ABCD$?

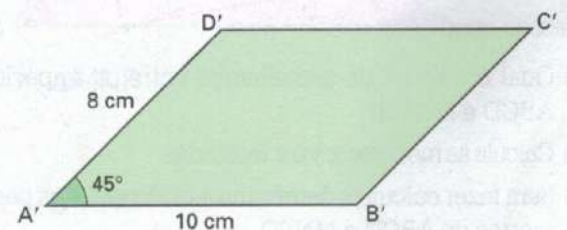
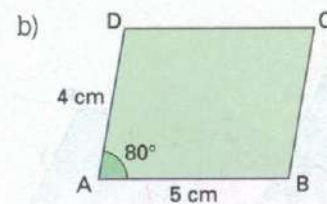
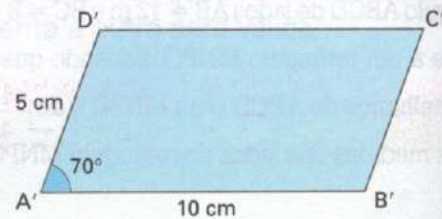
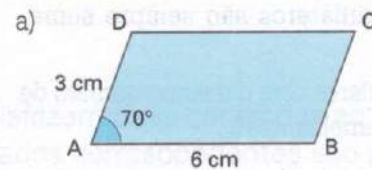
4. O quadrilátero $ABCD$ é um trapézio, pois os lados \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos. O quadrilátero $A'B'C'D'$ também é um trapézio? Por quê?

FIXAÇÃO

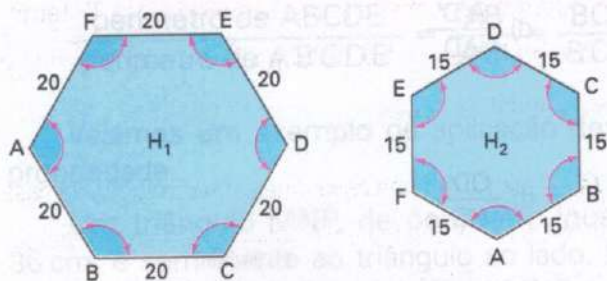
1 Dado o retângulo $ABCD$ abaixo, verifique quais dos retângulos seguintes são semelhantes a ele.



2 Verifique se são semelhantes os paralelogramos a seguir, justificando sua resposta.



3 Os hexágonos H_1 e H_2 abaixo são semelhantes.



Nessas condições:

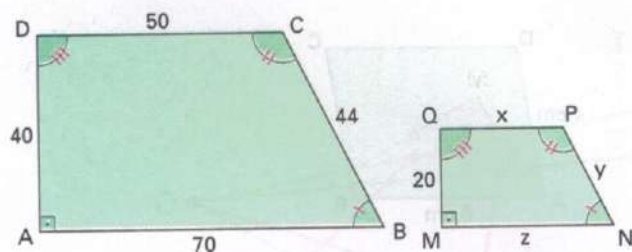
- Qual é a razão de semelhança entre H_1 e H_2 ?
- Qual é a razão de semelhança entre os perímetros de H_1 e H_2 ?
- O que podemos afirmar sobre os ângulos internos de H_1 e H_2 ?

4 Responda:

- Dois retângulos são sempre semelhantes?
- Dois quadrados são sempre semelhantes?
- Dois triângulos são sempre semelhantes?
- Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes?
- Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são sempre semelhantes?

5 Um retângulo ABCD de lados $AB = 12$ m e $BC = 8$ m é semelhante a um retângulo MNPQ. Sabendo que a razão de semelhança de ABCD para MNPQ é de $\frac{1}{4}$, determine as medidas dos lados do retângulo MNPQ.

6 Os dois trapézios abaixo são semelhantes.

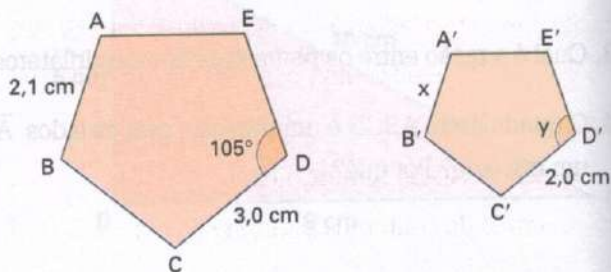


Nessas condições:

- Qual é a razão de semelhança entre os trapézios ABCD e MNPQ?
- Calcule as medidas x , y e z indicadas.
- Sem fazer cálculos, determine a razão entre os perímetros de ABCD e MNPQ.

7 Um quadrado tem lado medindo 5 cm. Qual será o perímetro de um outro quadrado, sabendo-se que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo é $\frac{2}{5}$?

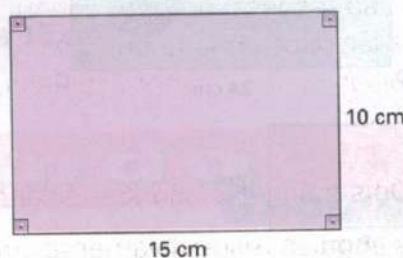
8 Os pentágonos ABCDE e $A'B'C'D'E'$ seguintes são semelhantes. O lado \overline{CD} corresponde ao lado $\overline{C'D'}$ e o lado \overline{AB} corresponde ao lado $\overline{A'B'}$.



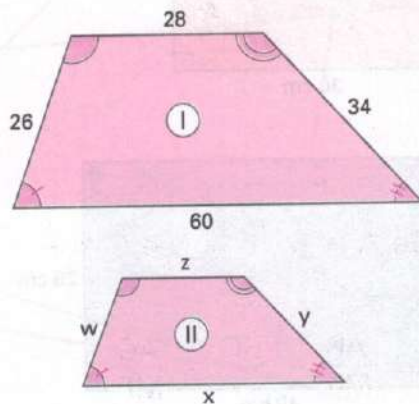
Nessas condições:

- Qual a razão de semelhança entre ABCDE e $A'B'C'D'E'$?
- Qual a medida x indicada?
- Qual a medida y indicada?

9 Um retângulo ABCD é semelhante ao retângulo abaixo e tem perímetro igual a 90 cm. Calcule as medidas dos lados do retângulo ABCD.



10 Os trapézios abaixo são semelhantes e o perímetro do trapézio (I) é 37 cm. Determine as medidas x , y , z e w dos lados do trapézio (II).



11 Em um pentágono ABCDE, o perímetro mede 245 cm e o lado \overline{AB} mede 52 cm. Qual é o perímetro do pentágono GHIJL, semelhante a ABCDE, se o lado \overline{GH} , correspondente ao lado \overline{AB} , mede 13 cm?

12 Dois terrenos retangulares são semelhantes e a razão entre seus lados é $\frac{2}{5}$. Se o terreno maior tem 50 m de frente e seu contorno (perímetro) mede 400 m, determine:

- as dimensões do terreno menor.
- a medida do contorno do terreno menor.

13 Dois polígonos são semelhantes e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é $\frac{3}{4}$. Determine o perímetro do segundo polígono, sabendo que o do primeiro é 27 cm.

14 A planta de uma casa, que é uma redução da casa no real, foi feita na escala $\frac{1}{200}$ (razão de semelhança). Uma sala retangular dessa casa tem 5 cm e 6 cm de dimensão nessa planta. Nessas condições:

- Quais as dimensões reais dessa sala?
- Qual a área da sala na planta?
- Qual a área da sala no real?

46

TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem duas condições ao mesmo tempo: os ângulos são respectivamente congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

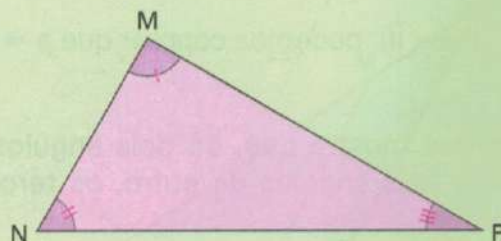
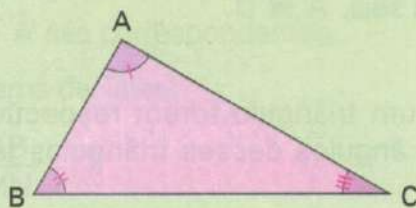
Os triângulos constituem um caso especial: basta que verifiquem uma das duas condições de semelhança. Se uma for satisfeita, automaticamente a outra será válida.

Portanto:

Dois triângulos são *semelhantes* quanto têm:

- ✓ os ângulos respectivamente congruentes
ou
- ✓ os lados correspondentes proporcionais

Então:



$$\text{Se } \hat{A} \cong \hat{M}, \hat{B} \cong \hat{N} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{P} \longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

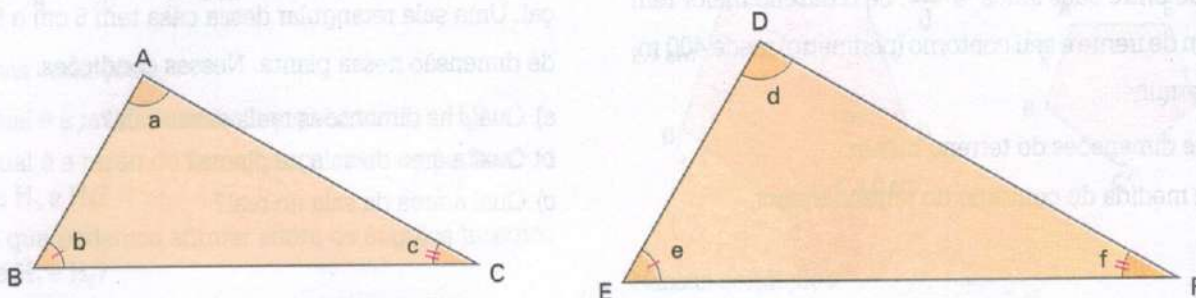
ou

$$\text{Se } \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} \longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP.$$

Em dois triângulos semelhantes:

- ✓ Os ângulos congruentes são chamados *ângulos correspondentes*.
- ✓ Os lados opostos aos ângulos correspondentes são chamados *lados homólogos*.

Observação:



Nos triângulos acima, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$.

Assim:

$$\left. \begin{array}{l} b = e \\ c = f \end{array} \right\} \longrightarrow b + c = e + f \quad \text{I}$$

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° , temos:

$$\triangle ABC: a + b + c = 180^\circ$$

$$\triangle DEF: d + e + f = 180^\circ \quad \text{II}$$

De I e II podemos concluir que $a = d$, ou seja, $\hat{A} \cong \hat{D}$.

Isso nos mostra que, se dois ângulos de um triângulo forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro, os terceiros ângulos desses triângulos também serão congruentes.

Assim, para verificar se dois triângulos são semelhantes, basta verificar se eles possuem dois ângulos respectivamente congruentes.

Propriedade

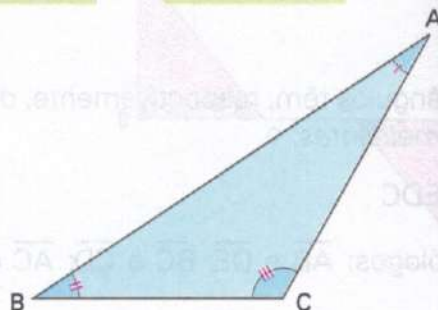
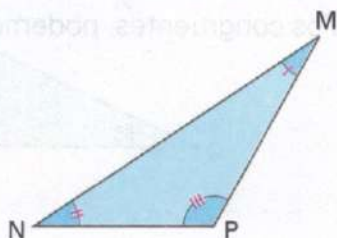
Se dois triângulos são semelhantes, então os lados de um são proporcionais aos lados homólogos do outro.

Sejam os triângulos ABC e MNP abaixo, tal que:

$$\hat{A} \cong \hat{M}$$

$$\hat{B} \cong \hat{N}$$

$$\hat{C} \cong \hat{P}$$



Nessas condições, $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

Vamos mostrar que são válidas as proporções:

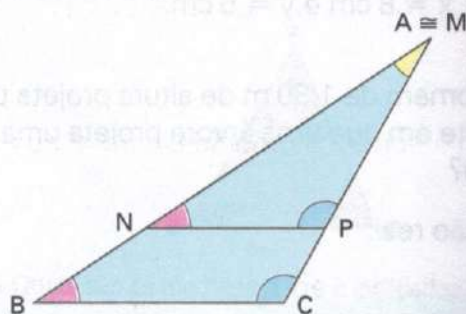
$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

Como os ângulos \hat{M} e \hat{A} são congruentes, vamos sobrepor o ΔMNP ao ΔABC , de modo que \hat{M} e \hat{A} fiquem superpostos.

Nessas condições, \overline{NP} é paralelo a \overline{BC} , pois $\hat{N} \cong \hat{B}$ e \hat{N} e \hat{B} são correspondentes.

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \quad \textcircled{I}$$



Como os ângulos \hat{N} e \hat{B} são congruentes, vamos sobrepor o ΔMNP ao ΔABC , de modo que \hat{N} e \hat{B} fiquem superpostos.

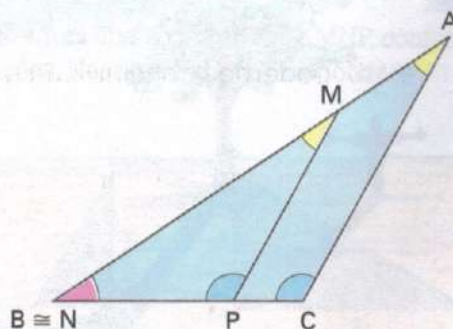
Nessas condições, \overline{MP} é paralelo a \overline{AC} , pois $\hat{M} \cong \hat{A}$ e \hat{M} e \hat{A} são correspondentes.

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{BC}{NP} = \frac{AB}{MN} \quad \textcircled{II}$$

Das igualdades \textcircled{I} e \textcircled{II} , concluímos que:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$



Ou seja, os lados do ΔABC são proporcionais aos lados correspondentes do ΔMNP .

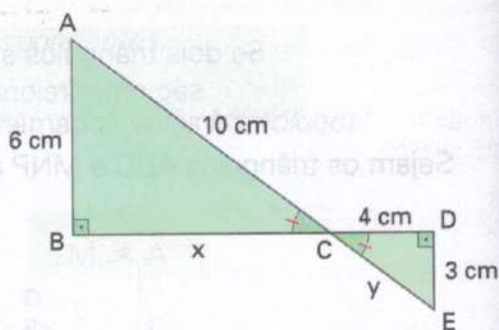
Vejamos alguns exemplos nos quais aplicamos essa propriedade.

1. Na figura ao lado, determinar os valores de x e y .

Comparando os triângulos ABC e CDE, temos:

$$\hat{B} \cong \hat{D} \rightarrow \text{ângulos retos}$$

$$\hat{BCA} \cong \hat{DCE} \rightarrow \text{ângulos o.p.v.}$$



Como os triângulos têm, respectivamente, dois ângulos congruentes, podemos concluir que eles são *semelhantes*.

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

Lados homólogos: \overline{AB} e \overline{DE} ; \overline{BC} e \overline{CD} ; \overline{AC} e \overline{CE} .

Pela propriedade: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$

$$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} = \frac{10}{y}$$

razão de semelhança

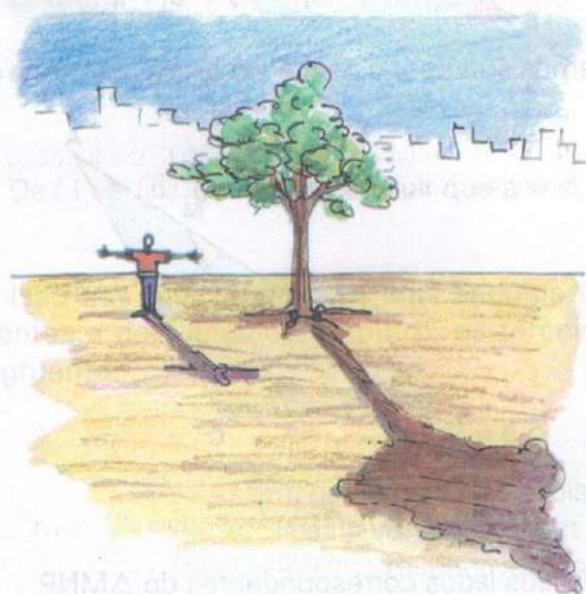
$$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8$$

$$\frac{6}{3} = \frac{10}{y} \rightarrow 6y = 30 \rightarrow y = 5$$

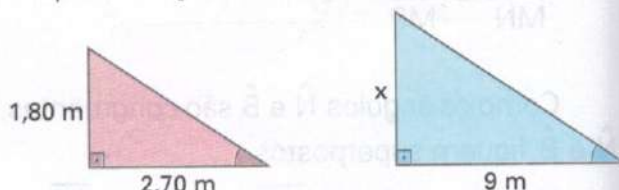
Então, $x = 8$ cm e $y = 5$ cm.

2. Um homem de 1,80 m de altura projeta uma sombra de 2,70 m de comprimento no mesmo instante em que uma árvore projeta uma sombra de 9 m de comprimento. Qual é a altura da árvore?

Situação real:



Representação matemática:



Como os triângulos acima são semelhantes, temos:

$$\frac{1,80}{x} = \frac{2,70}{9}$$

$$2,70x = 9 \cdot 1,80$$

$$2,70x = 16,2$$

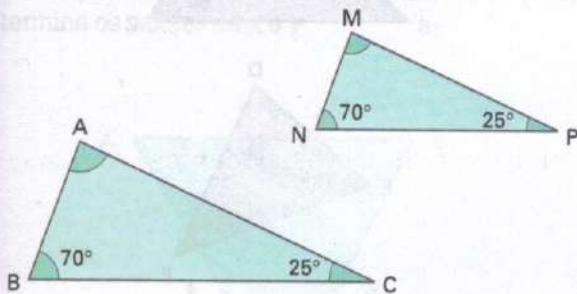
$$x = \frac{16,2}{2,7} = 6$$

Então, a altura da árvore é 6 m.

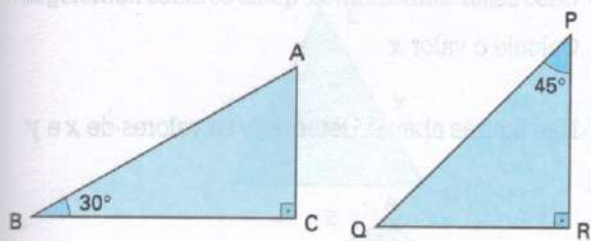
FIXAÇÃO

1 Diga se os pares de triângulos abaixo são ou não semelhantes.

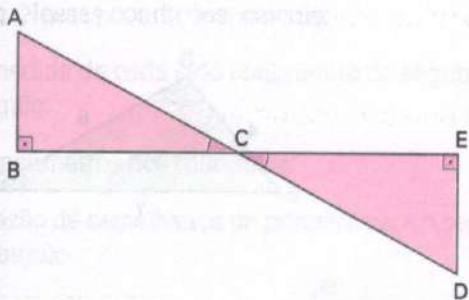
a)



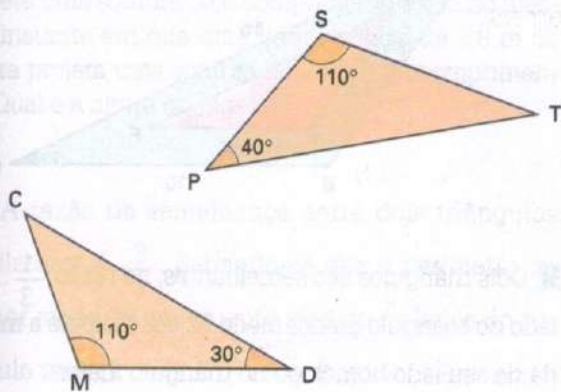
b)



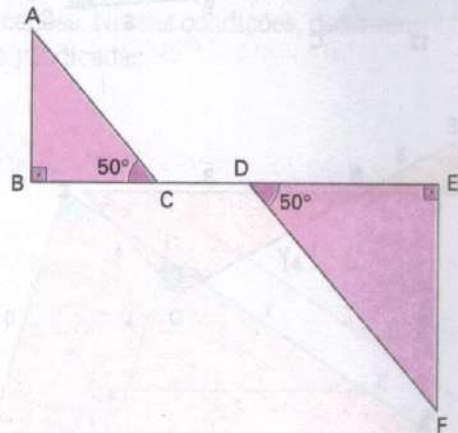
c)



d)

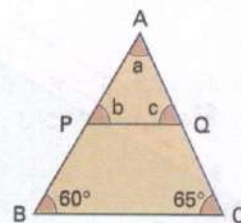


2 Na figura abaixo, temos os triângulos ABC e DEF. Pelas indicações, responda:



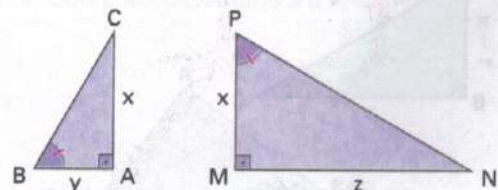
- Os triângulos são semelhantes?
- Caso sejam semelhantes, quais são os lados homólogos?

3 Na figura a seguir, temos $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$. Nessas condições, responda:



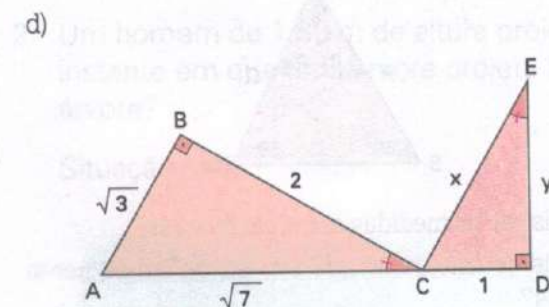
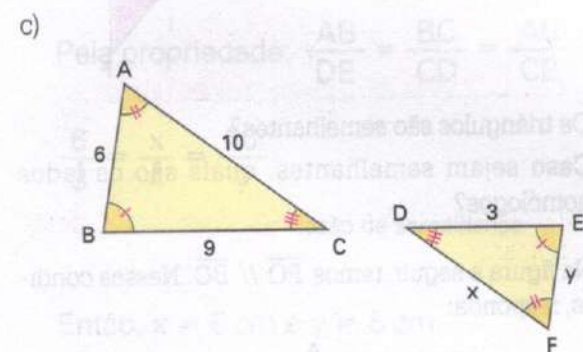
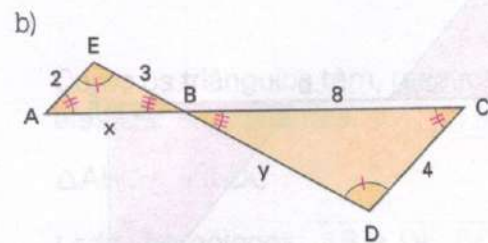
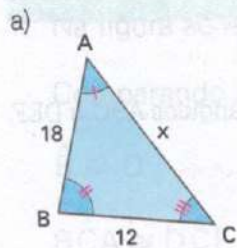
- Quais são as medidas a , b e c indicadas?
- Quais os triângulos que são semelhantes nessa figura?

4 Na figura abaixo, $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, conforme as indicações. Nessas condições, responda:

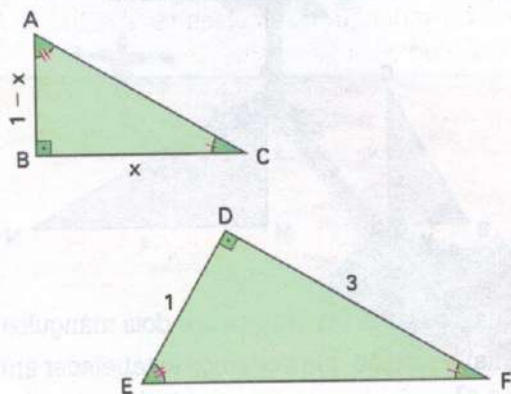


- Quais os lados homólogos nos dois triângulos?
- Qual a relação que podemos estabelecer entre x , y e z ?

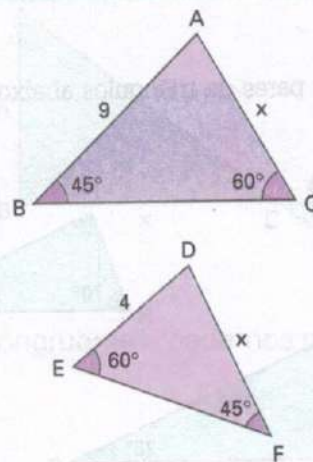
5 As figuras abaixo nos mostram pares de triângulos semelhantes. Calcule x e y em cada uma delas.



6 Na figura abaixo, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Qual o valor de x ?

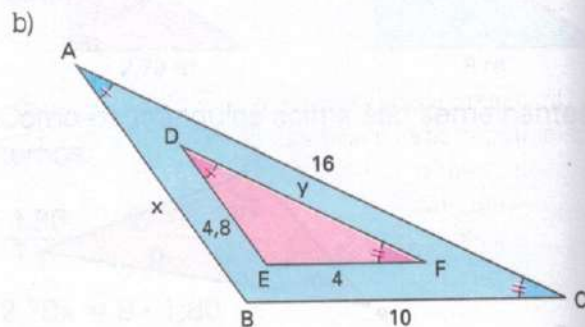
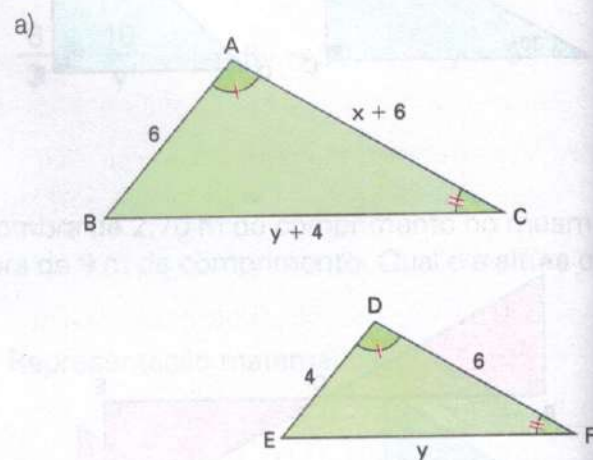


7 De acordo com as indicações feitas na figura abaixo, responda:



- Os triângulos ABC e DEF são semelhantes?
- Caso sejam semelhantes, quais os lados homólogos?
- Calcule o valor x .

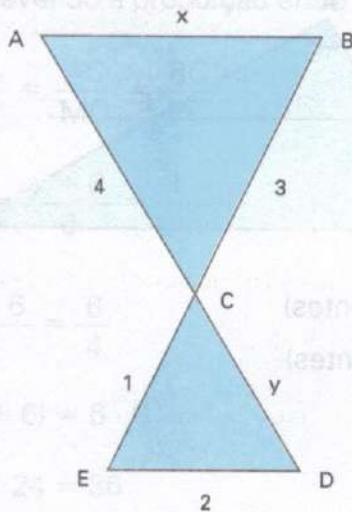
8 Nas figuras abaixo, determine os valores de x e y .



9 Dois triângulos são semelhantes, na razão $\frac{1}{3}$. Um lado do triângulo menor mede 12 cm. Calcule a medida de seu lado homólogo no triângulo maior.

10 Uma ripa de madeira de 1,5 m de altura, quando colocada verticalmente em relação ao solo, projeta uma sombra de 0,5 m. No mesmo instante, uma torre projeta uma sombra de 15 m. Calcule a altura da torre.

11 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$. Nessas condições, determine os valores de x e y .



12 As bases de dois triângulos isósceles semelhantes medem, respectivamente, 8 cm e 4 cm. A medida de cada lado congruente do primeiro triângulo é 10 cm. Nessas condições, calcule:

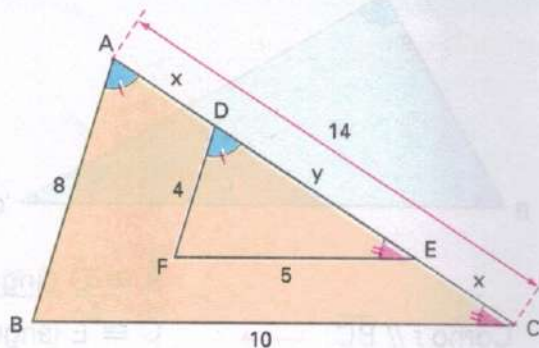
- a medida de cada lado congruente do segundo triângulo.
- os perímetros dos triângulos.
- a razão de semelhança do primeiro para o segundo triângulo.

13 Um mastro usado para hasteamento de bandeiras projeta uma sombra cujo comprimento é 6 m no mesmo instante em que uma barra vertical de 1,8 m de altura projeta uma sombra de 1,20 m de comprimento. Qual é a altura do mastro?

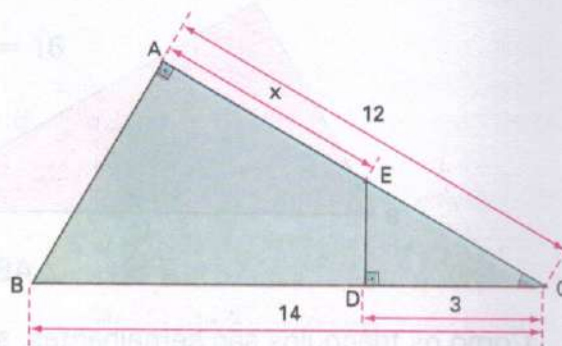
14 A razão de semelhança entre dois triângulos equiláteros é $\frac{2}{3}$. Sabendo-se que o perímetro do menor mede 18 cm, quanto medem os lados do triângulo maior?

15 Um triângulo tem seus lados medindo 10 cm, 12 cm e 15 cm, respectivamente. Determine as medidas dos lados de um outro triângulo, semelhante ao primeiro, sabendo que seu maior lado mede 27 cm.

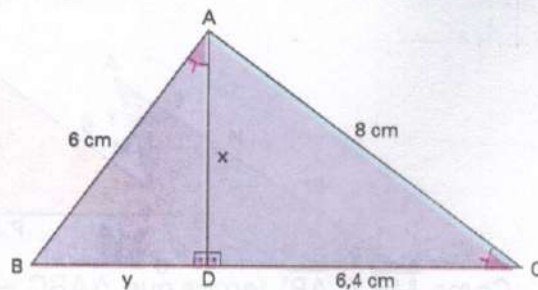
16 Na figura abaixo, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, de acordo com as indicações. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas:



17 Considerando a figura abaixo, determine a medida x indicada.



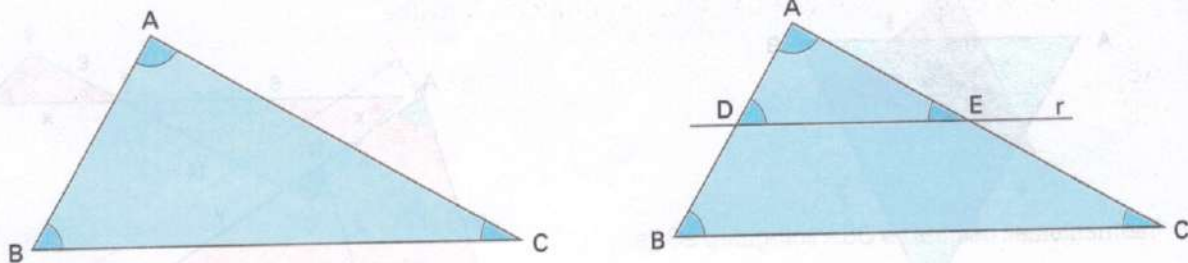
18 Na figura abaixo, a altura \overline{AD} divide o $\triangle ABC$ em dois outros triângulos semelhantes: $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$. Nessas condições, determine x e y .



Teorema fundamental da semelhança de triângulos

Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina com esses lados um triângulo semelhante ao primeiro.

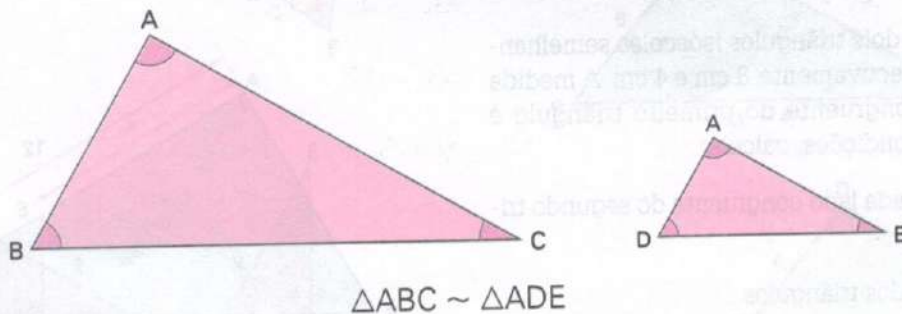
Considerando o $\triangle ABC$ abaixo, traçamos uma reta r , paralela ao lado \overline{BC} , e que encontra o lado \overline{AB} no ponto D e o lado \overline{AC} no ponto E .



Como $r \parallel \overline{BC}$ \rightarrow

- $\hat{B} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes)
- $\hat{C} \cong \hat{E}$ (ângulos correspondentes)
- $\hat{A} \cong \hat{A}$

Separando os triângulos ABC e ADE , temos:

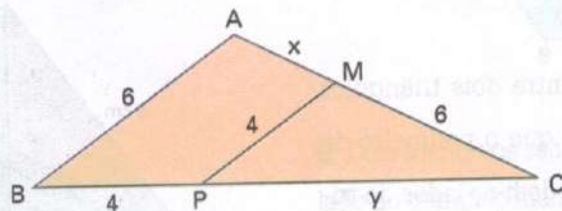


Como os triângulos são semelhantes, seus lados homólogos são proporcionais, ou seja:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

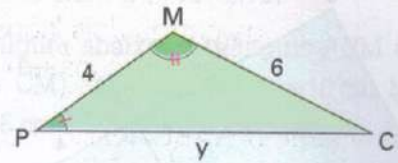
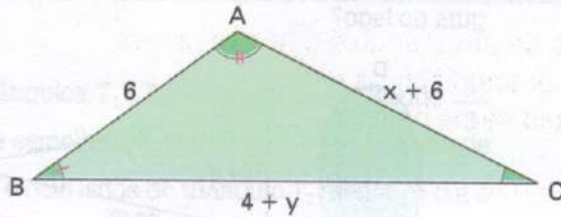
Veja uma situação onde podemos aplicar essa propriedade:

Na figura abaixo, $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$. Calcular os valores de x e y .



Como $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$, temos que $\triangle ABC \sim \triangle MPC$ (teorema fundamental).

Separando os triângulos:



Escrevendo a proporção entre os lados homólogos, temos:

$$\frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{PC}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{x+6}{6} = \frac{4+y}{y}$$

$$\frac{x+6}{6} = \frac{6}{4}$$

$$4(x+6) = 6 \cdot 6$$

$$4x + 24 = 36$$

$$4x = 36 - 24$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Então, $x = 3$ e $y = 8$.

$$\frac{4+y}{y} = \frac{6}{4}$$

$$6y = 4(4+y)$$

$$6y = 16 + 4y$$

$$6y - 4y = 16$$

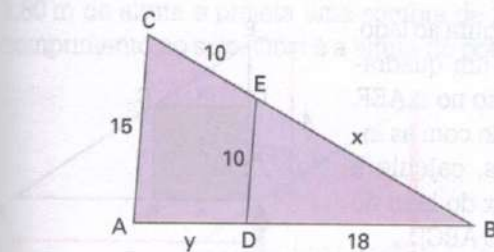
$$2y = 16$$

$$y = 8$$

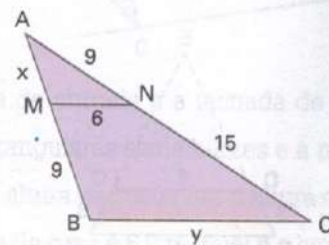
FIXAÇÃO

1 Nas figuras abaixo, determine as medidas x e y .

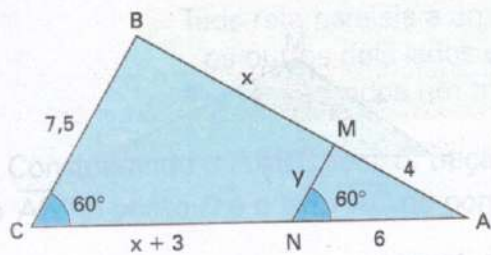
a) $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$



b) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

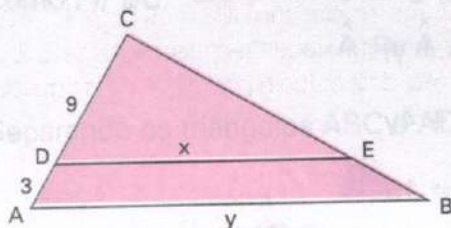


2 Na figura abaixo, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Nessas condições, determine:

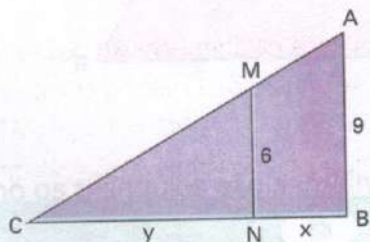


- as medidas x e y indicadas.
- as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{AC} .
- os perímetros dos triângulos ABC e AMN .
- a razão de semelhança entre os triângulos ABC e AMN .

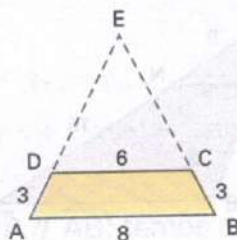
3 Na figura abaixo, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Nessas condições, qual o valor de $\frac{x}{y}$?



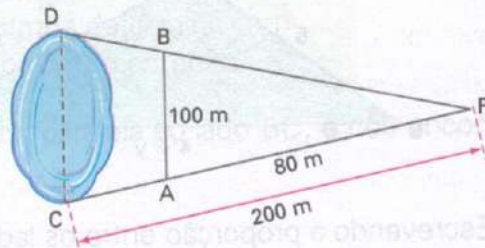
4 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Qual a relação que podemos estabelecer entre x e y ?



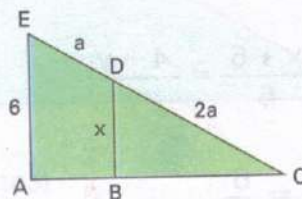
5 No trapézio $ABCD$, prolongamos os lados não-paralelos \overline{AD} e \overline{BC} até se encontrarem num ponto E . Nessas condições, verifique a semelhança entre os triângulos ABE e DEC e calcule as medidas de \overline{DE} , \overline{CE} e \overline{BE} .



6 Para determinar a largura de um lago, foi utilizado o esquema representado pela figura abaixo. Qual é a largura do lago?

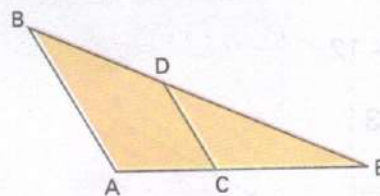


7 Na figura abaixo, $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$. Nessas condições, determine:



- a razão de semelhança entre os triângulos BCD e AEC .
- a medida de x .
- a razão entre o perímetro do $\triangle BCD$ e do $\triangle AEC$.

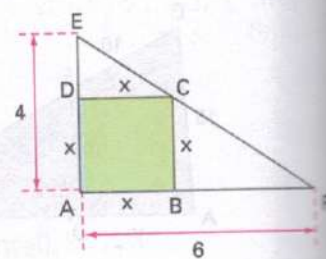
8 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Se $AB = 136$ cm, $CE = 75$ cm e $CD = 50$ cm, determine a medida de \overline{AE} .



9 As bases de um trapézio medem 18 cm e 25 cm, e a altura mede 14 cm. Calcule a altura do menor triângulo que se obtém prolongando-se os lados não-paralelos até se encontrarem.

10 Um $\triangle ABC$ é isósceles, tal que $AB = AC = 20$ cm. Por um ponto D do lado \overline{AB} , tal que $AD = 5$ cm, traça-se uma paralela ao lado \overline{BC} do triângulo, que irá encontrar o lado \overline{AC} no ponto E . Sabendo-se que $DE = 4$ cm, qual a medida da base do triângulo isósceles ABC ?

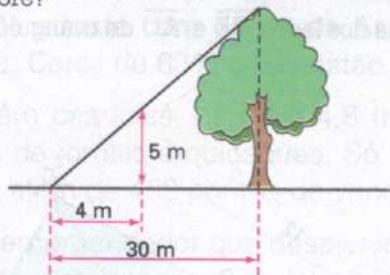
11 Na figura ao lado, $ABCD$ é um quadrado inscrito no $\triangle AEF$. De acordo com as indicações, calcule a medida x do lado do quadrado $ABCD$.



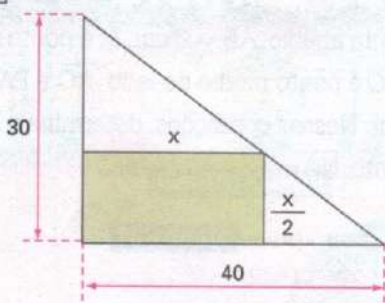
RETOMANDO o que aprendeu

1 Dois triângulos, T_1 e T_2 , são semelhantes, sendo $\frac{4}{3}$ a razão de semelhança. O triângulo T_1 tem 38 cm de perímetro e dois lados do triângulo T_2 medem 6 cm e 9 cm. Determine as medidas dos lados do triângulo T_1 e a medida do lado desconhecido do triângulo T_2 .

2 Para determinar a altura de uma árvore utilizou-se o esquema mostrado. Nessas condições, qual é a altura da árvore?

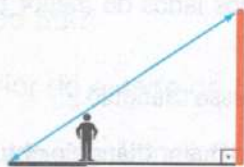


3 Num terreno em forma de triângulo retângulo, conforme nos mostra a figura, deseja-se construir uma casa retangular cujas dimensões são indicadas, em metros, por x e $\frac{x}{2}$. Nessas condições, determine:

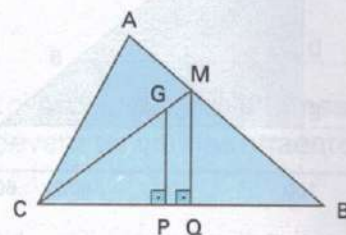


- a medida x .
- a área ocupada pela casa (área do retângulo = base \times altura).

4 Uma pessoa se encontra a 6,30 m da base de um poste, conforme nos mostra a figura. Essa pessoa tem 1,80 m de altura e projeta uma sombra de 2,70 m de comprimento no solo. Qual é a altura do poste?

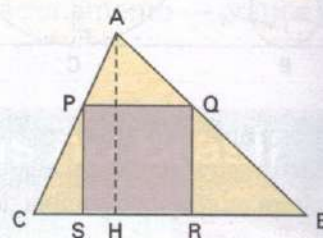


5 Na figura abaixo, o triângulo ACM é isósceles ($\overline{CA} \cong \overline{CM}$). Sabendo que $CA = 10$ cm, $MQ = 6$ cm, $GP = 5$ cm e $CQ = 8$ cm, calcule:

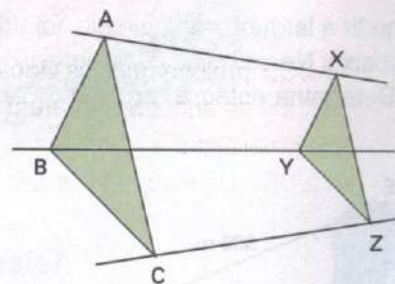


- a medida x do segmento \overline{CG} .
- a medida y do segmento \overline{CP} .
- a razão $\frac{x}{y}$.

6 Na figura, temos que $BC = 15$ cm, $AH = 10$ cm e PQRS é um quadrado cujos lados medem x . Nessas condições, determine o perímetro desse quadrado.

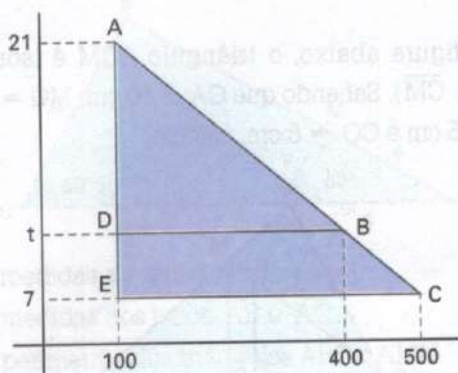


7 A perspectiva da figura abaixo nos mostra que os triângulos ABC e XYZ são semelhantes. No triângulo ABC, temos $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm e $AC = 27$ cm. Se o perímetro do triângulo XYZ é 20 cm, qual é a medida do lado \overline{XZ} ?

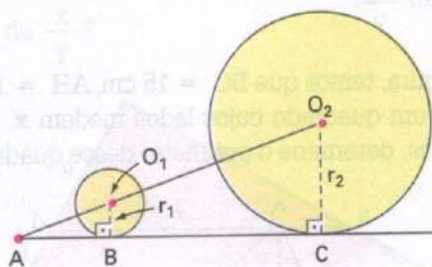


8 A porta de entrada e a fachada de uma casa são figuras retangulares semelhantes e a razão de semelhança da altura da casa para a altura da porta é $\frac{5}{2}$. Se a altura da casa é 6,0 m, qual é a altura da porta?

9 Na figura abaixo, você nota que os triângulos AEC e ADB são semelhantes. Nessas condições, determine o número t indicado na figura.



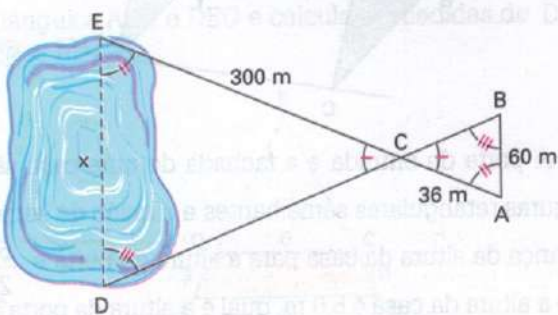
10 Na figura abaixo, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 6$ cm e $AO_1 = 5$ cm. Nessas condições, determine a distância d entre os centros O_1 e O_2 .



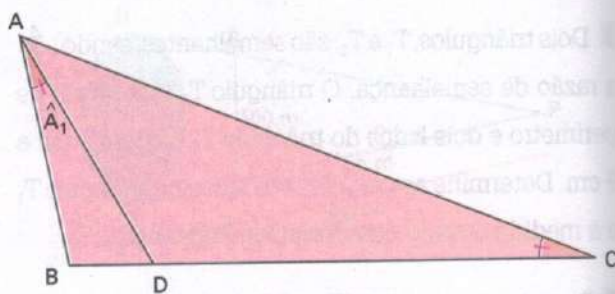
11 Que altura tem uma árvore que projeta uma sombra de 10 m no mesmo instante em que uma pessoa de 1,60 m de altura projeta uma sombra de 2,50 m?

12 Um quadrado está inscrito em um triângulo de base 12 cm e altura correspondente a 8 cm. Sabendo que um dos lados do quadrado se assenta sobre a base do triângulo, determine a medida x do lado do quadrado.

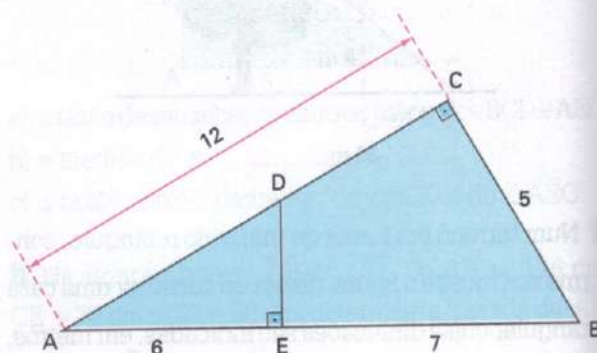
13 Para medir a largura x de um lago, foi utilizado o esquema abaixo. Nessas condições, obteve-se $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Determine, então, a largura x do lago.



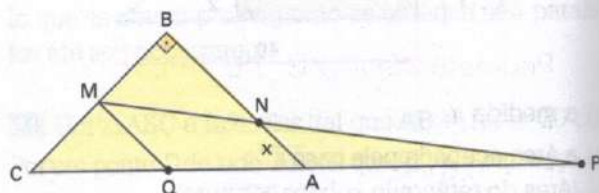
14 Na figura abaixo, tem-se $AB = 4$ cm e $BC = 10$ cm. Nessas condições, determine a medida x do lado \overline{BD} .



15 Considerando a figura abaixo, vamos determinar as medidas dos lados \overline{DE} e \overline{AD} do triângulo ADE.



16 Na figura abaixo, $AB = 6$ cm, M é ponto médio do lado \overline{BC} , Q é ponto médio do lado \overline{AC} e $PA = AC = 6\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine a medida x do segmento \overline{NA} .



17 As bases de um trapézio medem 8 cm e 12 cm, enquanto os lados não-paralelos medem 3 cm e 5 cm. Prolongam-se os lados não-paralelos até se encontrarem. Determine:

- as medidas dos lados do menor triângulo assim obtido.
- o perímetro desse triângulo.
- o perímetro do maior triângulo obtido.

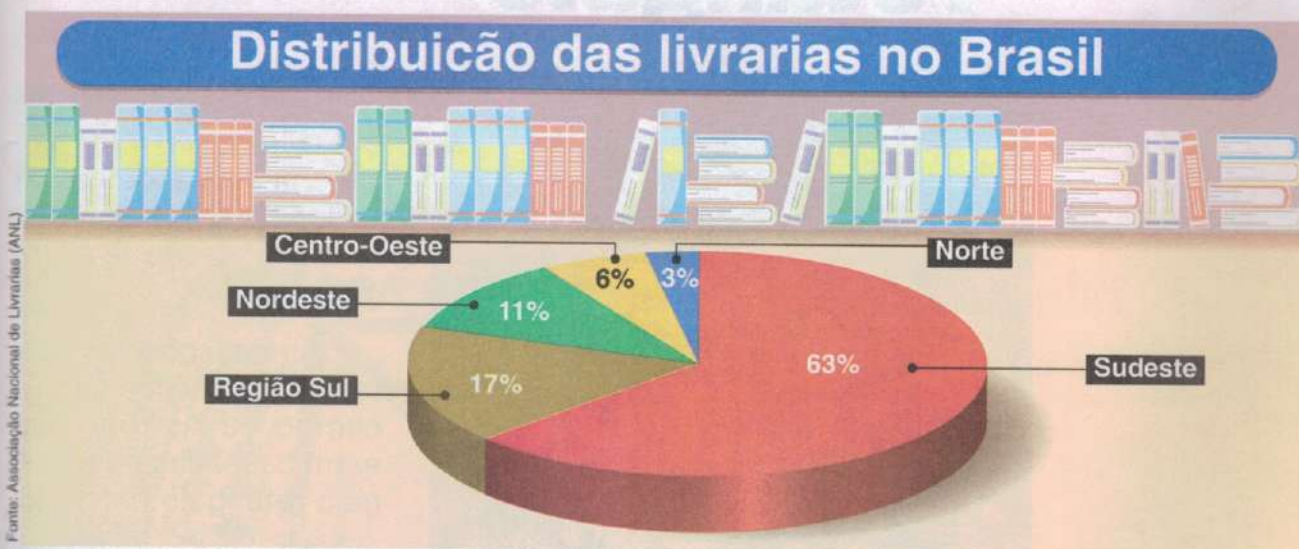
JORNAIS & REVISTAS

Na edição de 31/03/98 do jornal *O Estado de S. Paulo* foi publicada uma interessante matéria a respeito das livrarias no Brasil, com o título: "Livrarias devem ter vitrines atraentes, ambiente espaçoso e instalações adequadas":

"De acordo com dados da Associação Nacional de Livrarias (ANL), no Brasil há 1,2 mil livrarias. Cerca de 63% delas estão localizadas na região Sudeste.

Além das lojas, há mais 4,8 mil pontos-de-venda, incluindo supermercados, magazines, bancas de jornais e quiosques. Só no estado de São Paulo há 360 livrarias, das quais 190 na capital, além de 409 pontos-de-venda.

O empreendedor que desejar iniciar atividade no ramo das livrarias deverá dar atenção especial às instalações, pois elas terão de agradar a públicos bem diferentes, como intelectuais, crianças e adolescentes. A escolha do ponto comercial, seja na rua ou em shopping, deve levar em consideração o fluxo das pessoas, além de oferecer estacionamento — grande atrativo para os clientes hoje em dia."

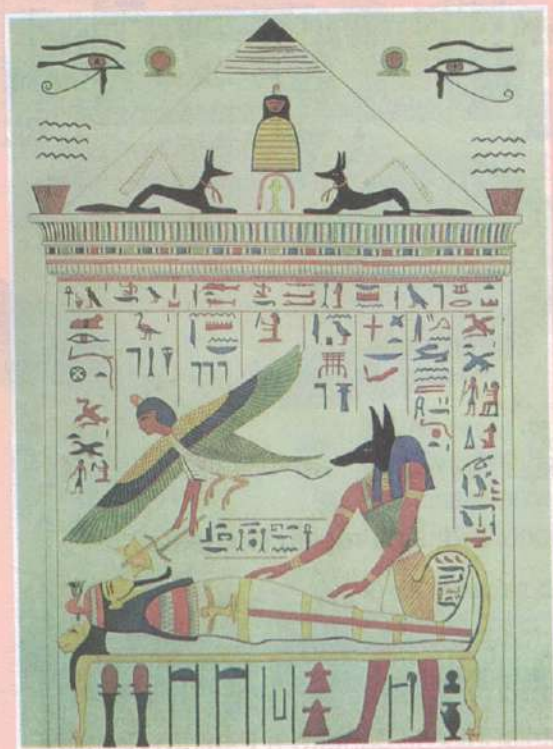


Analisando as informações, determine:

1. Qual o número de livrarias localizadas na região Nordeste?
2. E na região Sul?
3. E no interior do estado de São Paulo?
4. E nos estados de Minas Gerais, Rio de Janeiro e Espírito Santo?

8

Estudando as relações métricas no triângulo retângulo

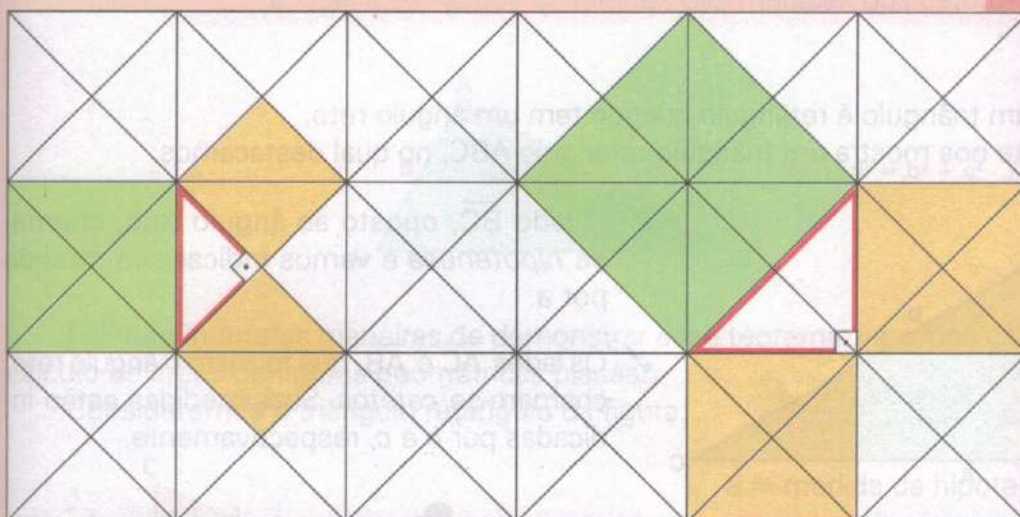


O triângulo retângulo sempre exerceu uma atração especial sobre o homem, desde a Antigüidade.

As descobertas feitas pelos babilônios no campo da Astronomia eram baseadas no triângulo retângulo.

Os antigos egípcios, usando uma corda com 12 nós, parecem ter utilizado um triângulo retângulo particular para a construção de "cantos" em ângulos retos.

Mosaicos como o da figura seguinte, onde aparecem vários triângulos retângulos de diferentes tamanhos, são encontrados nas culturas mais antigas.



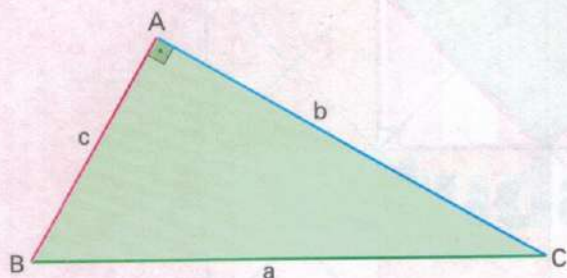
Esses mosaicos deram ao homem a oportunidade de perceber que, usando cada lado do triângulo retângulo como um lado de um quadrado, ele sempre encontrava a mesma relação: *a área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados.*

Essa relação tornou-se importantíssima no desenvolvimento dos conhecimentos geométricos, como veremos nesta Unidade.



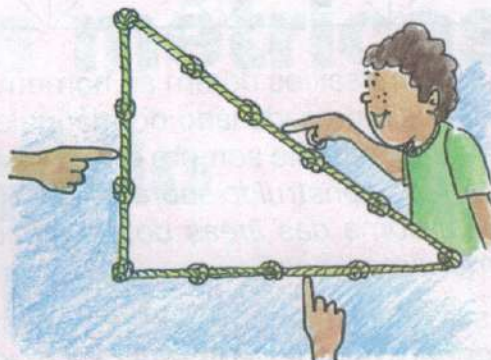
O TEOREMA DE PITÁGORAS

Sabemos que um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto. A figura seguinte nos mostra um triângulo retângulo ABC, no qual destacamos:



- ✓ O lado \overline{BC} , oposto ao ângulo reto, chama-se *hipotenusa* e vamos indicar sua medida por a .
- ✓ Os lados \overline{AC} e \overline{AB} , que formam o ângulo reto, chamam-se *catetos*. Suas medidas estão indicadas por b e c , respectivamente.

Os antigos egípcios, usando uma corda com 12 nós, parecem ter construído um triângulo retângulo particular para obter "cantos" em ângulos retos. Esse triângulo particular tem lados medindo 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento. Neste triângulo, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo *reto*.



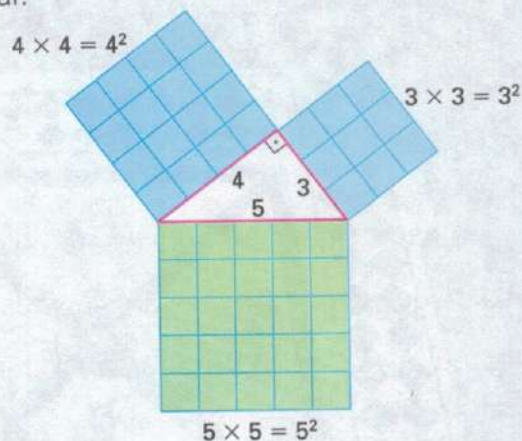
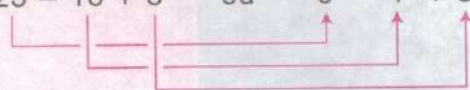
Baseado no triângulo retângulo particular dos egípcios e construindo quadrados sobre os lados desse triângulo, podemos obter a figura ao lado, que nos permite estabelecer uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo particular.

— = 1 unidade de comprimento

■ = 1 unidade de área

Assim, temos

$$25 = 16 + 9 \quad \text{ou} \quad 5^2 = 4^2 + 3^2$$

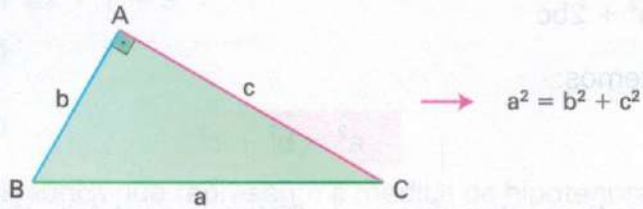


Nessas condições confirma-se a relação: a área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados.

Dizem que um filósofo e matemático grego, Pitágoras, que viveu na cidade de Samos, no século VI a.C., conseguiu provar que essa relação métrica era válida para todos os triângulos retângulos. Até hoje essa relação métrica é utilizada, sendo um dos mais importantes teoremas da Matemática.

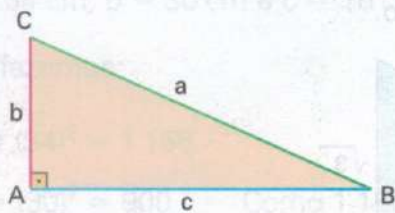
Podemos, então, enunciar o *teorema de Pitágoras*:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



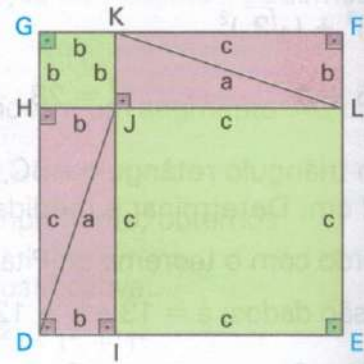
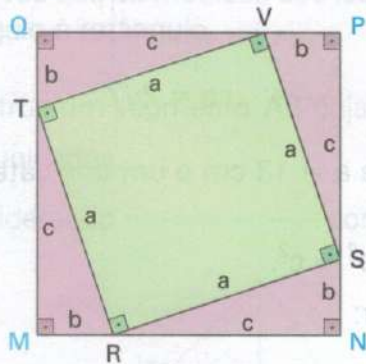
Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema; veremos uma delas, baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

Consideremos o triângulo retângulo da figura:



- a = medida da hipotenusa
- b = medida de um cateto
- c = medida do outro cateto

Observe, agora, os quadrados MNPQ e DEFG, que têm a mesma área, pois o lado de cada quadrado mede $(b + c)$.



A partir desses dois quadrados, temos:

- ✓ área do quadrado MNPQ = área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS) · 4
- ✓ área do quadrado DEFG = área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH) · 2
- ✓ área do quadrado RSVT = a^2
- ✓ área do triângulo RNS = $\frac{b \cdot c}{2}$
- ✓ área do quadrado IELJ = c^2
- ✓ área do quadrado GHJK = b^2
- ✓ área do retângulo DIJH = $b \cdot c$

Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, podemos escrever:

$$a^2 + \left(\frac{bc}{2}\right) \cdot 2 = c^2 + b^2 + (bc) \cdot 2$$

$$a^2 + 2bc = c^2 + b^2 + 2bc$$

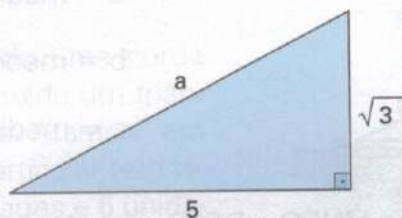
Cancelando $2bc$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A demonstração algébrica do teorema de Pitágoras será feita logo adiante, nesta mesma Unidade.

Vejam, agora, alguns exemplos onde vamos aplicar o teorema de Pitágoras.

1. Determinar a medida a indicada no triângulo retângulo.



Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$a^2 = (5)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$a^2 = 25 + 3 \longrightarrow a^2 = 28 \longrightarrow a = \sqrt{28} \longrightarrow a = 2\sqrt{7}$$

2. Em um triângulo retângulo ABC, a hipotenusa mede $a = 13$ cm e um dos catetos mede $b = 12$ cm. Determinar a medida do outro cateto.

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Como são dados: $a = 13$ e $b = 12$, podemos escrever:

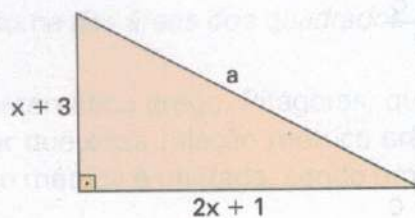
$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow (13)^2 = (12)^2 + c^2 \longrightarrow 169 = 144 + c^2$$

Resolvendo a equação $169 = 144 + c^2$, temos:

$$c^2 = 169 - 144 \longrightarrow c^2 = 25 \longrightarrow c = \sqrt{25} \longrightarrow c = 5$$

Então, o outro cateto mede 5 cm.

3. Qual é a expressão que representa a medida a da hipotenusa no triângulo retângulo abaixo?



Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$a^2 = (2x + 1)^2 + (x + 3)^2$$

$$a^2 = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 + 6x + 9$$

$$a^2 = 4x^2 + x^2 + 4x + 6x + 1 + 9$$

$$a^2 = 5x^2 + 10x + 10$$

$$a = \sqrt{5x^2 + 10x + 10}$$

Logo, a expressão algébrica que representa a medida da hipotenusa é $\sqrt{5x^2 + 10x + 10}$.

4. Verificar se o triângulo cujos lados medem 16 cm, 30 cm e 34 cm é um triângulo retângulo.

Sendo a hipotenusa o maior lado do triângulo retângulo, podemos escrever:

$$a = 34 \text{ cm}, b = 30 \text{ cm e } c = 16 \text{ cm}.$$

Daí fazemos:

$$a^2 = (34)^2 = 1\,156$$


$$b^2 = (30)^2 = 900$$

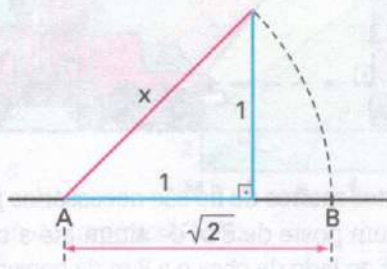
$$c^2 = (16)^2 = 256$$

Como $1\,156 = 900 + 256$, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

Uma vez que as medidas dos lados satisfazem a relação de Pitágoras, podemos dizer que o triângulo é retângulo.

5. Construir um segmento \overline{AB} cuja medida é $\sqrt{2}$ unidades e um segmento \overline{AC} cuja medida é $\sqrt{3}$ unidades.

Considerando  como 1 unidade de comprimento, obtemos:



Justificativa:

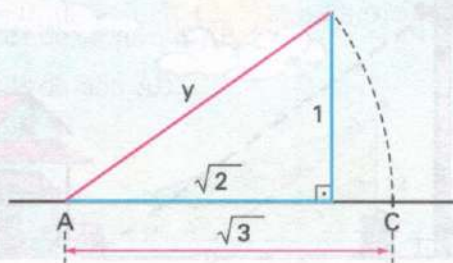
$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 1 + 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

A partir desse resultado, podemos obter:



Justificativa:

$$y^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$$

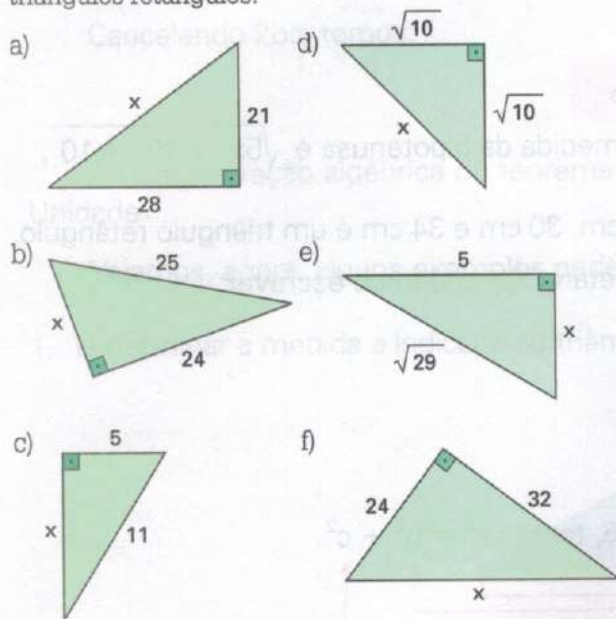
$$y^2 = 1 + 2$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \sqrt{3}$$

FIXAÇÃO

1 Aplicando o teorema de Pitágoras, vamos determinar a medida x indicada em cada um dos seguintes triângulos retângulos:



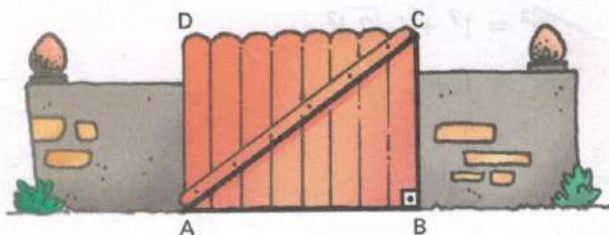
2 Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 24 cm e 26 cm. Você pode afirmar que esse triângulo é retângulo?

3 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14 cm e um dos catetos mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do outro cateto.

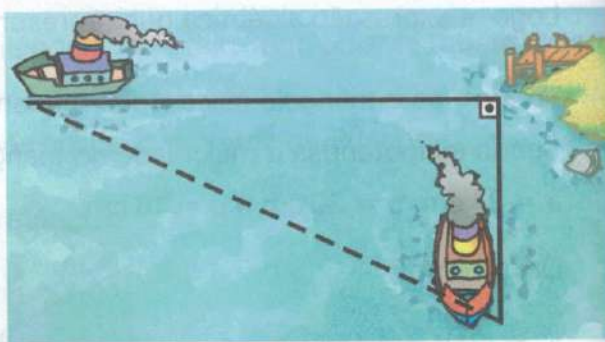
4 As medidas dos catetos de um triângulo retângulo medem $(2 + \sqrt{5})$ cm e $(-2 + \sqrt{5})$ cm. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa.

5 Um terreno triangular tem frentes de 12 m e 16 m em duas ruas que formam um ângulo de 90° . Quanto mede o terceiro lado desse terreno?

6 O portão de entrada de uma casa tem 4 m de comprimento e 3 m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o ponto C?



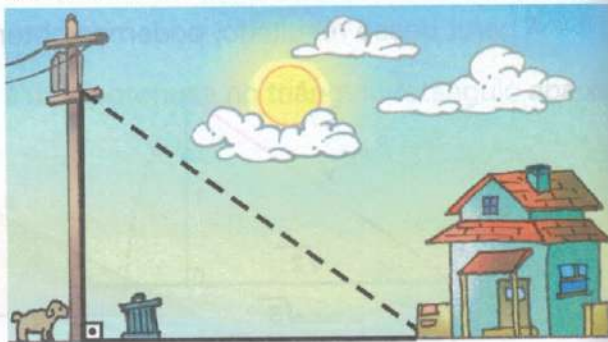
7 Dois navios partem de um mesmo ponto, no mesmo instante, e viajam com velocidade constante em direções que formam um ângulo reto. Depois de uma hora de viagem, a distância entre os dois navios é 13 milhas. Se um deles é 7 milhas mais rápido que o outro, determine a velocidade de cada navio.



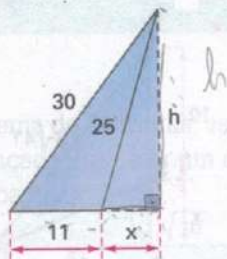
8 Durante um incêndio em um edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 m para atingir a janela do apartamento sinistrado. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 m do edifício. Qual é a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão?



9 Quantos metros de fio são necessários para "puxar luz" de um poste de 6 m de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8 m da base do poste?

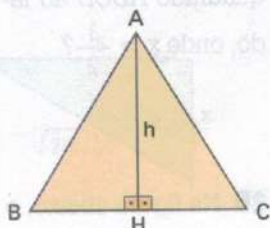


19 Na figura abaixo, determine as medidas x e h indicadas.



20 Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede $10\sqrt{2}$ cm. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

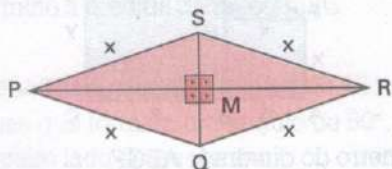
21 Sabemos que, num triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base coincidem. No triângulo isósceles ABC da figura, cada lado congruente mede 40 cm e a base \overline{BC} mede 48 cm. Determine a medida h da altura relativa à base.



22 As dimensões de um retângulo são 36 cm e 27 cm. Nessas condições, determine a medida d da diagonal desse retângulo.

23 Os lados de um retângulo medem 30 cm e 40 cm. Calcule as medidas dos lados de um retângulo semelhante, cuja diagonal mede 10 cm.

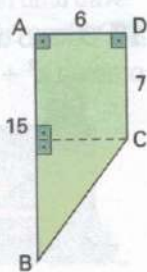
24 Em um losango, as diagonais cortam-se mutuamente ao meio, ou seja, o ponto de encontro das diagonais é o ponto médio de cada diagonal. No losango PQRS abaixo, a diagonal maior \overline{PR} mede 80 cm e a diagonal menor \overline{QS} mede 18 cm. Nessas condições, calcule:



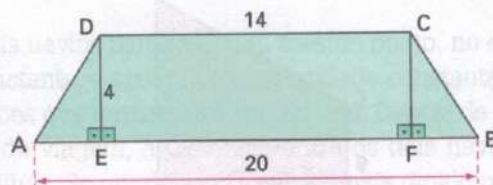
- a medida x do lado do losango;
- o perímetro desse losango.

25 A figura ao lado é um trapézio retângulo. Nela, as medidas estão indicadas em centímetros. Nessas condições, determine:

- a medida x do lado \overline{BC} .
- a medida y da diagonal \overline{BD} .

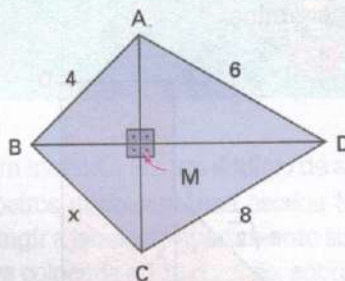


26 A figura abaixo é um trapézio isósceles, onde as medidas indicadas estão expressas em centímetros. Nessas condições, vamos calcular:

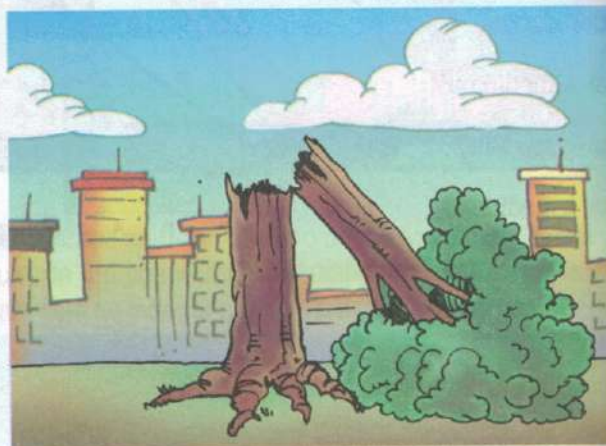


- a medida x de cada lado não-paralelo do trapézio.
- o perímetro do trapézio ABCD.

27 Determine a medida x do lado \overline{BC} do quadrilátero ABCD, onde as diagonais são perpendiculares e $\overline{AM} \cong \overline{BM}$. As medidas indicadas na figura estão expressas em centímetros.



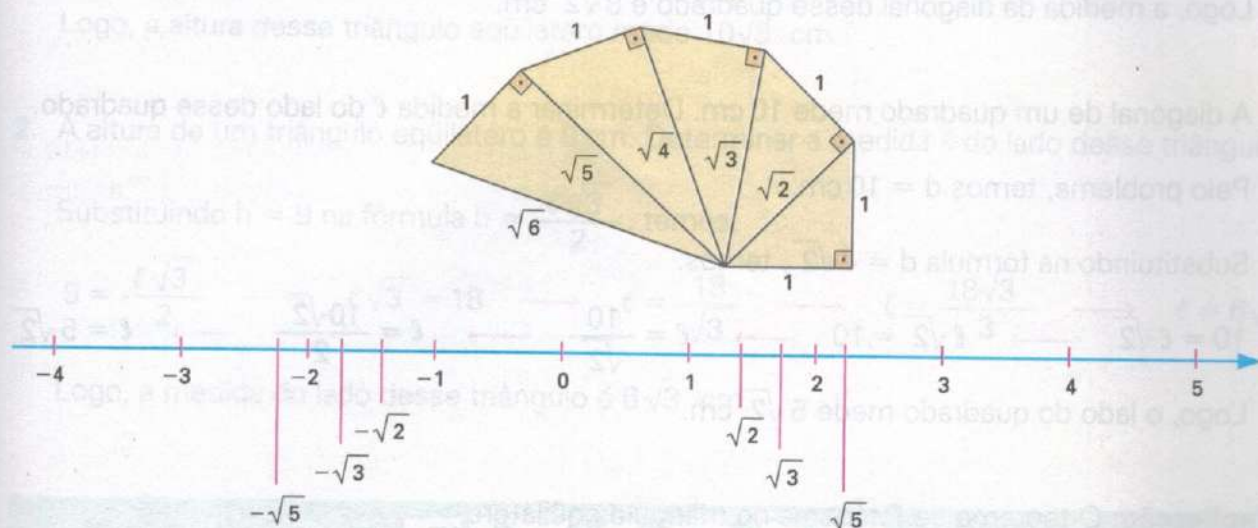
28 Uma árvore foi quebrada pelo vento e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura da árvore antes de se quebrar era 9 m e sabendo-se que a ponta da parte quebrada está a 3 m da base da árvore, qual a altura do tronco da árvore que restou em pé?



29 Um pedaço de arame de 60 cm de comprimento é dobrado convenientemente na forma de um triângulo retângulo. Se a hipotenusa desse triângulo retângulo mede 26 cm, qual o comprimento dos outros dois lados do triângulo?

Explorando Geometria

É possível determinar na reta numérica, com razoável precisão, um ponto cuja abscissa é um número irracional. Para isso, basta construir triângulos retângulos, usando a mesma unidade de medida usada na reta, e, depois, transportar para ela, a partir do ponto associado ao número zero, as medidas das hipotenusas obtidas.



1. Usando o processo acima, represente em uma reta numérica os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$.
2. Usando o compasso, verifique se $\sqrt{8}$ é o dobro de $\sqrt{2}$.
3. Depois de obtido o ponto de abscissa $\sqrt{3}$, como você faria para obter o ponto de abscissa $\sqrt{12}$?

Duas aplicações importantes

1ª aplicação: O teorema de Pitágoras no quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida d da diagonal e a medida ℓ do lado do quadrado.

A figura ao lado é um quadrado onde:

ℓ = medida do lado

d = medida da diagonal

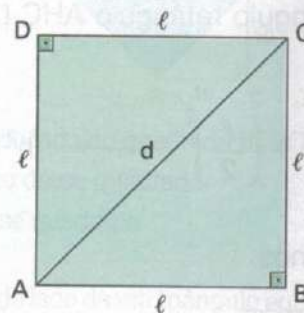
No triângulo retângulo ABC, aplicando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2$$

$$d = \sqrt{2\ell^2}$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$



Vejam os exemplos:

1. Quanto mede a diagonal de um quadrado que tem 8 cm de lado?

Pela fórmula, temos $d = \ell\sqrt{2}$.

Substituindo-se ℓ por 8, vem: $d = 8\sqrt{2}$ cm.

Logo, a medida da diagonal desse quadrado é $8\sqrt{2}$ cm.

2. A diagonal de um quadrado mede 10 cm. Determinar a medida ℓ do lado desse quadrado.

Pelo problema, temos $d = 10$ cm.

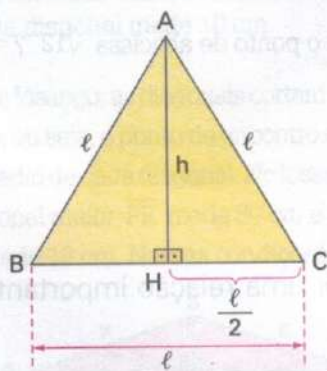
Substituindo na fórmula $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

$$10 = \ell\sqrt{2} \rightarrow \ell\sqrt{2} = 10 \rightarrow \ell = \frac{10}{\sqrt{2}} \rightarrow \ell = \frac{10\sqrt{2}}{2} \rightarrow \ell = 5\sqrt{2}$$

Logo, o lado do quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm.

2ª aplicação: O teorema de Pitágoras no triângulo equilátero

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida h da altura e a medida ℓ do lado do triângulo equilátero.



A figura ao lado é um triângulo equilátero, onde:

ℓ = medida do lado

h = medida da altura

No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem, logo, o ponto H é ponto médio do lado \overline{BC} .

No triângulo retângulo AHC (\hat{H} é reto), de acordo com o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$

Daí temos:

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3\ell^2}}{\sqrt{4}} \rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Vejamos os exemplos:

1. Vamos determinar a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

Substituindo ℓ por 20 na fórmula $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever:

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

Logo, a altura desse triângulo equilátero mede $10\sqrt{3}$ cm.

2. A altura de um triângulo equilátero é 9 cm. Determinar a medida ℓ do lado desse triângulo.

Substituindo $h = 9$ na fórmula $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$9 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \rightarrow \ell\sqrt{3} = 18 \rightarrow \ell = \frac{18}{\sqrt{3}} \rightarrow \ell = \frac{18\sqrt{3}}{3} \rightarrow \ell = 6\sqrt{3}$$

Logo, a medida do lado desse triângulo é $6\sqrt{3}$ cm.

FIXAÇÃO

- 1 Um quadrado tem 4 cm de lado. Determine a medida da sua diagonal:

- a) usando a fórmula
b) sem usar a fórmula

- 2 O lado de um triângulo equilátero mede 12 cm. Determine a medida h da altura desse triângulo:

- a) usando a fórmula
b) sem usar a fórmula

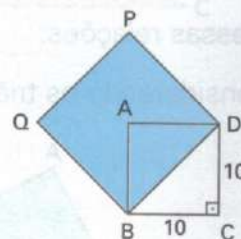
- 3 A diagonal de um quadrado mede $11\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine a medida do lado e o perímetro desse quadrado.

- 4 Em um triângulo equilátero a altura mede $3\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, qual é o perímetro desse triângulo equilátero?

- 5 A área de um quadrado pode ser calculada fazendo-se ℓ^2 . Se um quadrado tem 225 cm^2 de área, qual é o valor, em decimal, da diagonal desse quadrado? (Faça $\sqrt{2} = 1,41$.)

- 6 A área de um triângulo pode ser calculada multiplicando-se a medida de um lado pela medida da altura relativa a esse lado e dividindo-se o resultado por 2. Nessas condições e fazendo $\sqrt{3} = 1,73$, determine a área de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm.

- 7 Na figura abaixo, as medidas estão expressas em centímetros. Nessas condições, determine:



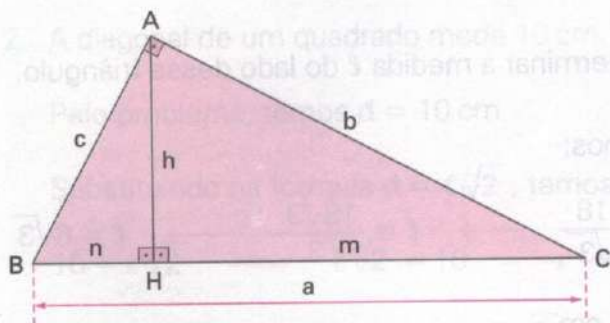
- a) a medida do lado do quadrado BDPQ.
b) o perímetro desse quadrado.
c) a área desse quadrado.

- 8 A medida do lado de um triângulo equilátero é igual à medida da diagonal de um quadrado de lado 6 cm. Nessas condições, determine a medida da altura do triângulo.

AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Além do teorema de Pitágoras, existem outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo.

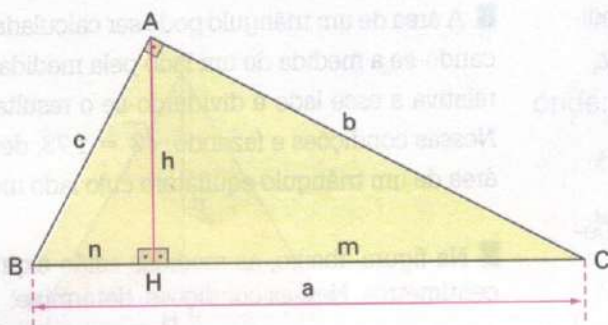
Vamos, inicialmente, identificar esses elementos considerando o triângulo retângulo abaixo:



- ✓ \overline{BC} é a hipotenusa; sua medida é indicada por a .
- ✓ \overline{AC} é um cateto; sua medida é indicada por b .
- ✓ \overline{AB} é um cateto; sua medida é indicada por c .
- ✓ \overline{AH} é a altura relativa à hipotenusa; sua medida é indicada por h .
- ✓ \overline{BH} é a projeção ortogonal do cateto \overline{AB} sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por n .
- ✓ \overline{HC} é a projeção ortogonal do cateto \overline{AC} sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por m .

Podemos estabelecer relações entre essas medidas, demonstradas a partir da semelhança de triângulos e baseadas na seguinte propriedade:

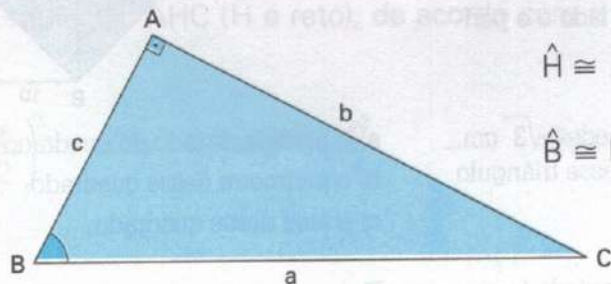
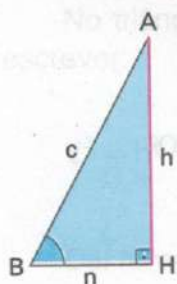
Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa à base divide o triângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes ao triângulo dado e semelhantes entre si.



$$\rightarrow \begin{cases} \triangle HBA \sim \triangle ABC \\ \triangle HAC \sim \triangle ABC \\ \triangle HBA \sim \triangle HAC \end{cases}$$

Vejam essas relações:

1ª relação: Considerando os triângulos HBA e ABC, temos:

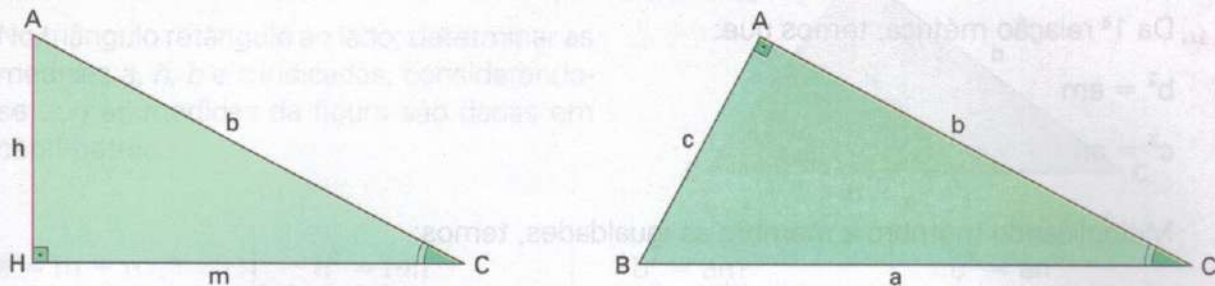


$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} \equiv \hat{A} \text{ (retos)} \\ \hat{B} \equiv \hat{B} \text{ (comum)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle HBA \sim \triangle ABC$$

Daí temos a proporção $\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$.

Dessa proporção, podemos escrever: $c \cdot c = a \cdot n \Rightarrow c^2 = an$

Considerando os triângulos HAC e ABC, temos:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} \cong \hat{A} \\ \hat{C} \cong \hat{C} \text{ (comum)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle HAC \sim \triangle ABC$$

Daí temos a proporção $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$.

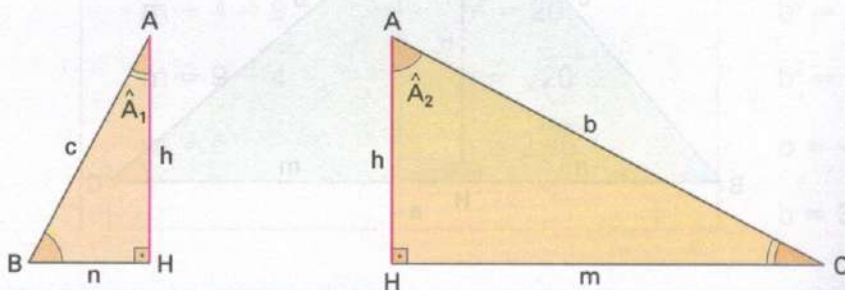
Dessa proporção podemos escrever: $b \cdot b = a \cdot m \Rightarrow b^2 = am$

Fica, então, demonstrada a relação métrica:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção do cateto considerado sobre a hipotenusa.

$$b^2 = am \text{ ou } c^2 = an$$

2ª relação: Considerando os triângulos HBA e HAC, temos:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} \cong \hat{H} \text{ (retos)} \\ \hat{A}_1 \cong \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle HBA \sim \triangle HAC$$

Daí temos a proporção $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$.

Dessa proporção, podemos escrever: $h \cdot h = m \cdot n \Rightarrow h^2 = mn$

Fica, assim, demonstrada a relação métrica:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

3ª relação:

Da 1ª relação métrica, temos que:

$$b^2 = am$$

$$c^2 = an$$

Multiplicando membro a membro as igualdades, temos:

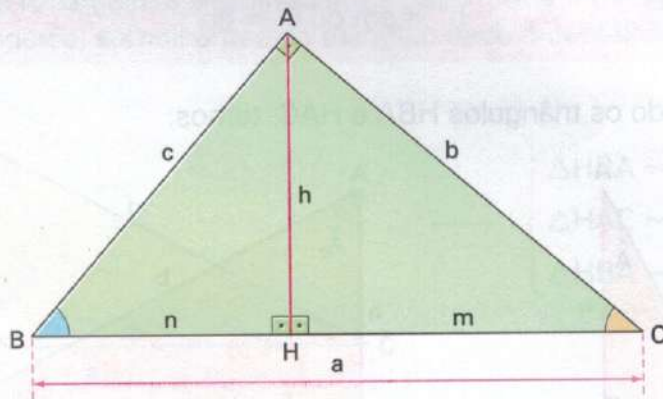
$$b^2 \cdot c^2 = am \cdot an \longrightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{n \cdot m}_{h^2} \longrightarrow b^2 c^2 = a^2 h^2 \longrightarrow bc = ah$$

Fica, assim, demonstrada a relação métrica:

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

4ª relação:

Vamos dar, agora, a demonstração algébrica do teorema de Pitágoras:



Da 1ª relação, temos:

$$b^2 = am$$

$$c^2 = an$$

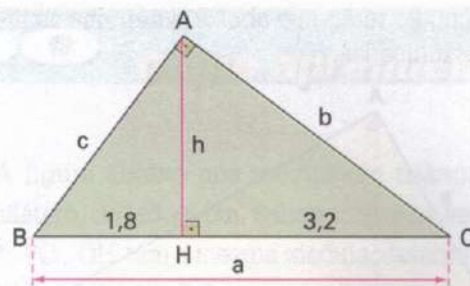
Adicionando membro a membro as duas igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an \longrightarrow b^2 + c^2 = a \underbrace{(m + n)}_a \longrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Observe, agora, os exemplos:

1. No triângulo retângulo ao lado, determinar as medidas a , h , b e c indicadas, considerando-se que as medidas da figura são dadas em centímetros.



$$a = m + n$$

$$a = 3,2 + 1,8$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$h^2 = mn$$

$$h^2 = 1,8 \cdot 3,2$$

$$h^2 = 5,76$$

$$h = \sqrt{5,76}$$

$$h = 2,4 \text{ cm}$$

$$b^2 = am$$

$$b^2 = 5 \cdot 3,2$$

$$b^2 = 16$$

$$b = \sqrt{16}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$c^2 = an$$

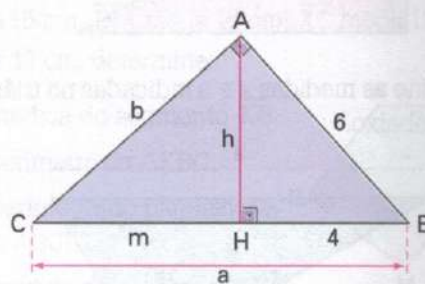
$$c^2 = 5 \cdot 1,8$$

$$c^2 = 9$$

$$c = \sqrt{9}$$

$$c = 3 \text{ cm}$$

2. No triângulo retângulo da figura ao lado, vamos determinar as medidas a , b , h e m indicadas.



$$6^2 = 4a$$

$$4a = 36$$

$$a = \frac{36}{4}$$

$$a = 9$$

$$m + 4 = a$$

$$m + 4 = 9$$

$$m = 9 - 4$$

$$m = 5$$

$$h^2 = 5 \cdot 4$$

$$h^2 = 20$$

$$h = \sqrt{20}$$

$$h = 2\sqrt{5}$$

$$b^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = 9 \cdot 5$$

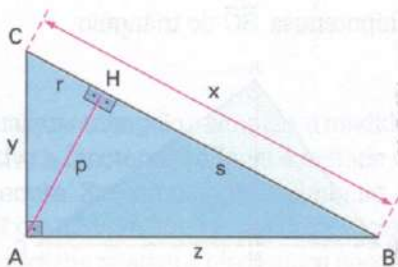
$$b^2 = 45$$

$$b = \sqrt{45}$$

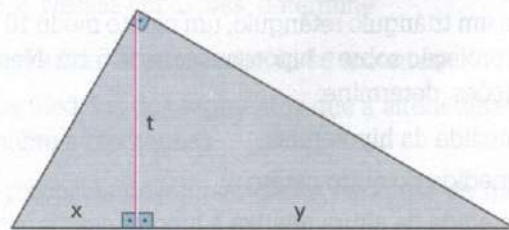
$$b = 3\sqrt{5}$$

FIXAÇÃO

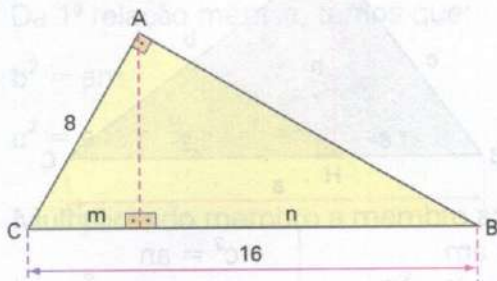
1. Escreva todas as relações métricas que você pode formar com as medidas indicadas no triângulo retângulo ABC:



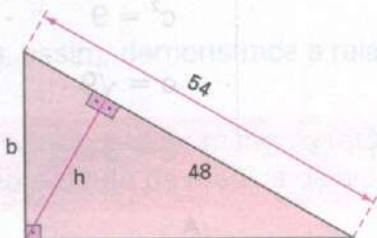
2. Qual a relação métrica que você pode formar envolvendo as medidas t , x e y indicadas no triângulo retângulo abaixo?



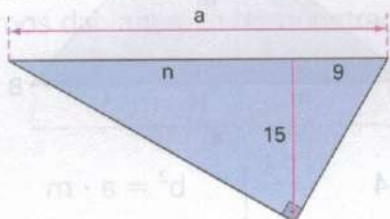
- 3 No triângulo retângulo abaixo determine as medidas m e n indicadas.



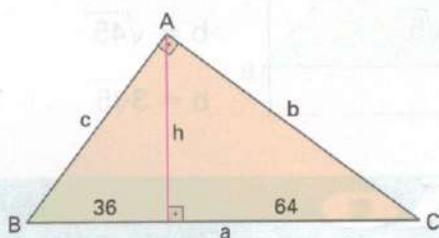
- 4 No triângulo retângulo, determine as medidas b e h indicadas.



- 5 Determine as medidas a e n indicadas no triângulo retângulo abaixo.



- 6 As medidas indicadas no triângulo retângulo ABC são tomadas em milímetros. Vamos determinar as medidas a , h , b e c nele indicadas.



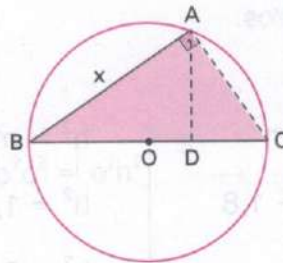
- 7 Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, determine:

- a medida da hipotenusa.
- a medida da altura relativa à hipotenusa.

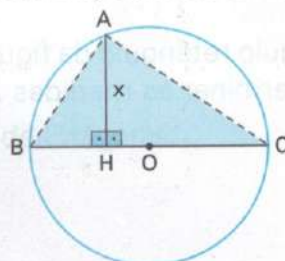
- 8 Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 5 cm. Nessas condições, determine:

- a medida da hipotenusa.
- a medida do outro cateto.
- a medida da altura relativa à hipotenusa.

- 9 Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo. Na figura abaixo, uma corda \overline{AB} é projetada ortogonalmente sobre o diâmetro \overline{BC} , determinando um segmento \overline{BD} que mede 9 cm. Se o raio da circunferência mede 8 cm, calcule a medida x da corda \overline{AB} .



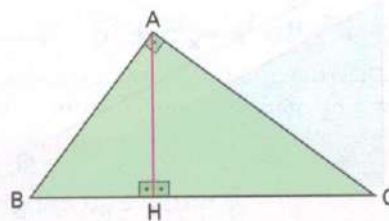
- 10 Por um ponto A de circunferência traça-se o segmento \overline{AH} perpendicular a um diâmetro \overline{BC} , conforme a figura. Se o ponto H determina no diâmetro segmentos de 4 cm e 9 cm, determine a medida x do segmento \overline{AH} , a medida y da corda \overline{AB} e a medida z da corda \overline{AC} .



- 11 Num mapa, as cidades A , B e C são os vértices de um triângulo retângulo, e o ângulo reto está em A . A estrada \overline{AB} tem 80 km e a estrada \overline{BC} tem 100 km. Um rio impede a construção de uma estrada que ligue diretamente a cidade A com a cidade C . Por esse motivo, projetou-se uma estrada saindo da cidade A e perpendicular à estrada \overline{BC} , para que ela seja a mais curta possível. Qual será o comprimento da estrada que será construída?

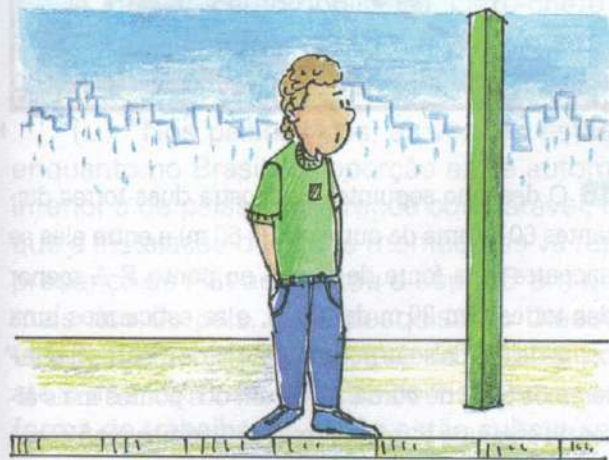
- 12 Em um retângulo, a perpendicular traçada de um vértice sobre uma diagonal determina sobre esta diagonal segmentos de 64 cm e 36 cm. Calcule o perímetro desse retângulo?

- 13 No triângulo retângulo da figura, o cateto \overline{AB} mede 15 cm e o segmento \overline{HC} mede 16 cm. Determine a medida x da hipotenusa \overline{BC} do triângulo.



RETOMANDO o que aprendeu

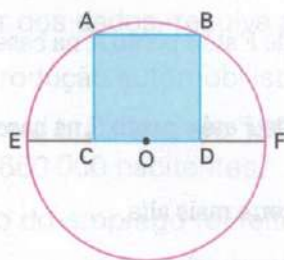
1 Para ir de sua casa ao ponto de ônibus, uma pessoa andava 120 m em linha reta até a esquina e dobrava à esquerda numa rua perpendicular, por onde andava mais 160 m. Certo dia, descobriu que podia atravessar um terreno que separava sua casa do ponto de ônibus e passou a fazer esse trajeto em linha reta. Nessas condições, quantos metros essa pessoa passou a andar?



2 Dá-se um triângulo retângulo, cujos catetos medem 18 cm e 24 cm. Nessas condições:

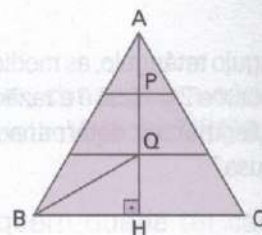
- Qual a medida da hipotenusa?
- Qual a medida da altura relativa à hipotenusa?
- Quais as medidas dos segmentos que a altura determina sobre a hipotenusa?

3 Na figura abaixo, o quadrado ABCD tem $16\sqrt{5}$ cm de perímetro e C e D pertencem ao diâmetro EF de tal modo que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$. Nessas condições, calcule a medida do raio da circunferência e a medida do segmento EC.



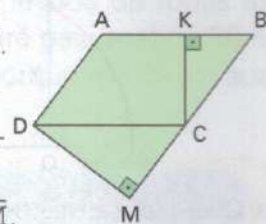
4 Em qualquer triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, calcule a medida da mediana relativa à hipotenusa nesse triângulo.

5 A figura abaixo nos mostra um triângulo ABC equilátero, de lado 6 cm. Sabendo que os segmentos AP, PQ, QH têm a mesma medida, determine a medida do segmento BQ.



6 Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo. Se BC mede 15 cm, DM mede 16 cm, KC mede 12 cm e AK mede 11 cm, determine:

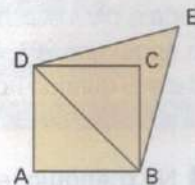
- a medida do segmento KB.
- o perímetro do $\triangle KBC$.
- o perímetro do paralelogramo ABCD.
- a medida do segmento CM.
- o perímetro do quadrilátero ABMD.



7 Uma corda AB de um círculo mede 6 cm e a distância dessa corda ao centro do círculo é de 3 cm. Determine o comprimento do raio do círculo.

8 Na figura, ABCD é um quadrado de lado $\sqrt{6}$ cm e BDE é um triângulo equilátero. Nessas condições, determine:

- a medida do lado do triângulo equilátero.
- a medida da altura desse triângulo.

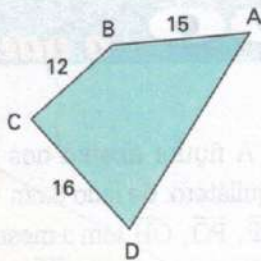


9 O perímetro de um triângulo retângulo é 24 cm e as medidas de seus lados estão expressas por $x - 2$, x e $x + 2$. Nessas condições, determine:

- a medida da altura relativa à hipotenusa.
- as medidas dos segmentos que a altura determina sobre a hipotenusa.

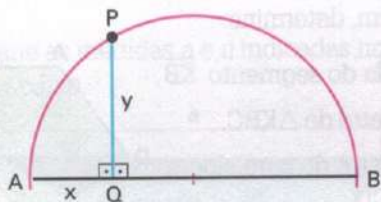
As respostas devem ser dadas na forma de número decimal.

10 Para calcular a medida do lado \overline{AD} na figura abaixo, pode-se dividi-la em dois triângulos: o triângulo BCD (retângulo em \hat{C}) e o triângulo ABD (retângulo em \hat{B}). Nessas condições, qual é a medida do lado \overline{AD} ?



11 Em um triângulo retângulo, as medidas dos catetos são expressas por x e $2x$. Qual é a razão entre o maior e o menor dos segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa?

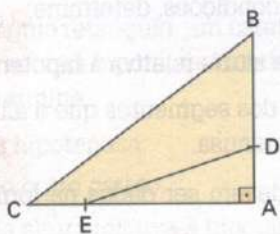
12 Na figura abaixo, um móvel P percorre a semicircunferência onde o diâmetro \overline{AB} mede 2 cm e \overline{PQ} é perpendicular a \overline{AB} . Nessas condições:



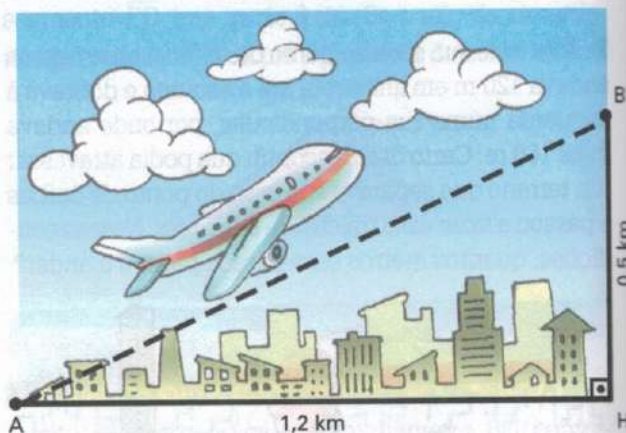
- Qual a relação métrica que se pode estabelecer entre as medidas x e y indicadas?
- Se $y = 1$, qual é o valor de x ?

13 Um avião levanta vôo para ir da cidade A até a cidade B , situada a 500 km de distância. Depois de voar 300 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção de vôo de um ângulo de 90° . A que distância o avião estava da cidade B quando houve alteração da rota?

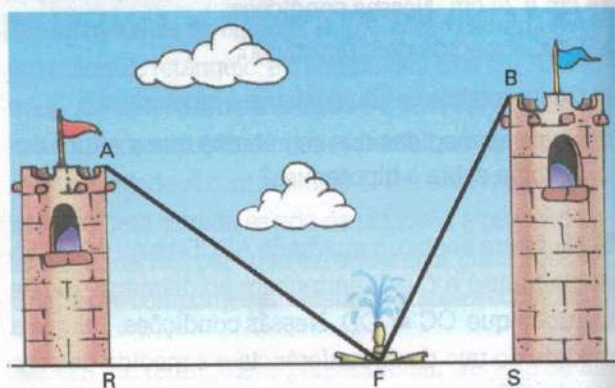
14 No triângulo retângulo representado pela figura abaixo, o lado \overline{AC} mede 16 cm e o lado \overline{BC} mede 20 cm. Sabendo que $\text{med}(\overline{AD}) = \frac{1}{3} \text{med}(\overline{AB})$ e $\text{med}(\overline{CE}) = \frac{1}{4} \text{med}(\overline{AC})$, determine as medidas dos lados do triângulo DAE .



15 Qual a distância percorrida, em linha reta, por um avião do ponto A até o ponto B , quando ele alcança a altura indicada na figura abaixo?



16 O desenho seguinte nos mostra duas torres distantes 60 m uma da outra ($RS = 60$ m) e entre elas se encontra uma fonte de centro no ponto F . A menor das torres tem 30 m de altura, e se esticarmos uma corda de um de seus pontos mais altos (ponto A) até F teremos 50 m de corda. Se de um dos pontos mais altos da segunda torre (ponto B) esticarmos uma corda até F , teremos $20\sqrt{5}$ m de corda. Nessas condições, determine:



- a distância de F até o ponto R , na base da torre mais baixa.
- a distância de F até o ponto S , na base da torre mais alta.
- a altura da torre mais alta.

17 É dado um triângulo retângulo onde a altura relativa à hipotenusa mede 24 cm. Sabendo que a soma das medidas dos dois catetos desse triângulo é 70 cm, determine as medidas dos lados desse triângulo.

JORNAIS & REVISTAS

A indústria automobilística, carro-chefe da nossa economia, consegue a cada dia produzir mais, com menos gente. É o que diz o artigo publicado na revista *Veja* de 7/8/96, analisando a crescente produção de automóveis no Brasil.

(...) "Nos países ricos, as vendas estão estabilizadas — quem queria ter carro já tem —, enquanto no Brasil a proporção entre automóveis e habitantes ainda é relativamente pequena, inferior à de países com renda comparável, como o México. Engana-se, no entanto, quem acha que a instalação de novas montadoras vá repetir o feito de Minas Gerais, que nos vinte anos de presença da Fiat aumentou o seu PIB em quase 50% e passou de quarto para segundo estado mais rico do país. Uma pesquisa do Dieese revela que, mesmo com a chegada de todas as fábricas esperadas, o número de empregos na indústria automobilística cairá pelo menos 30% até o ano 2000. As fábricas conseguem produzir mais com menos gente porque mudaram sua forma de trabalhar — robôs estão substituindo a mão-de-obra humana."

A locomotiva do país

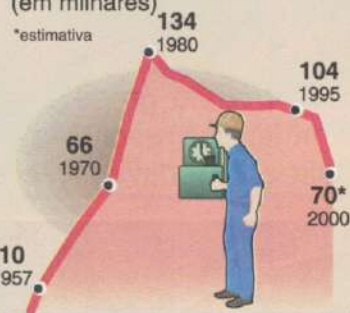
Enquanto a produção dispara...
(em milhares)

*estimativa



...o emprego estaciona e cai
(em milhares)

*estimativa



Fontes: Anfavea e Sindicato dos Metalúrgicos do ABC

Mercado atraente



A partir dos dados, resolva as seguintes questões:

- Qual a produção automobilística brasileira em 1995?
- Qual a frota brasileira em 1995, sabendo que nesse ano a população do Brasil era estimada em 155 650 000 habitantes?
- O gráfico do emprego foi feito a partir dos dados da tabela:



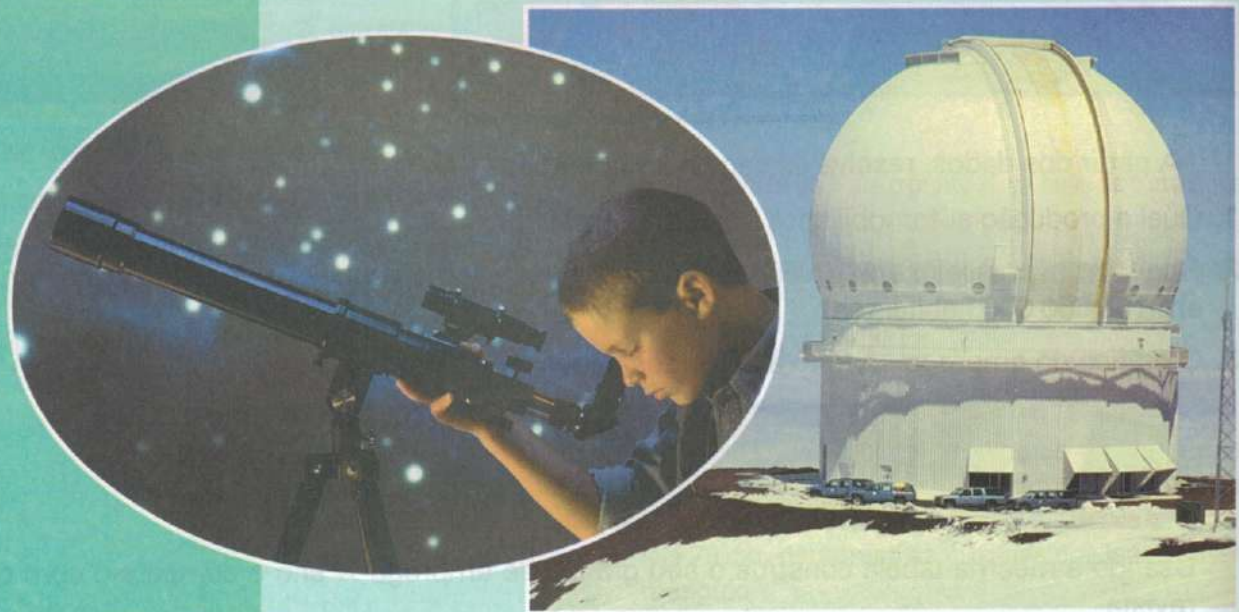
ano	1957	1970	1980	1995	2000
emprego (em milhares)	10	66	134	104	70*

Usando a mesma tabela construa o seu gráfico de emprego \times ano e compare-o com o da revista.

9

Estudando as relações trigonométricas nos triângulos

A *Trigonometria* (do grego *trigono* = triangular e *metria* = medida) teve origem na resolução de problemas práticos relacionados principalmente à navegação e à Astronomia.



dist
tos
rela
gula

ção
vo,
são

se l
triã
tran
del
ria,
na
na
Me
tron
MÚ



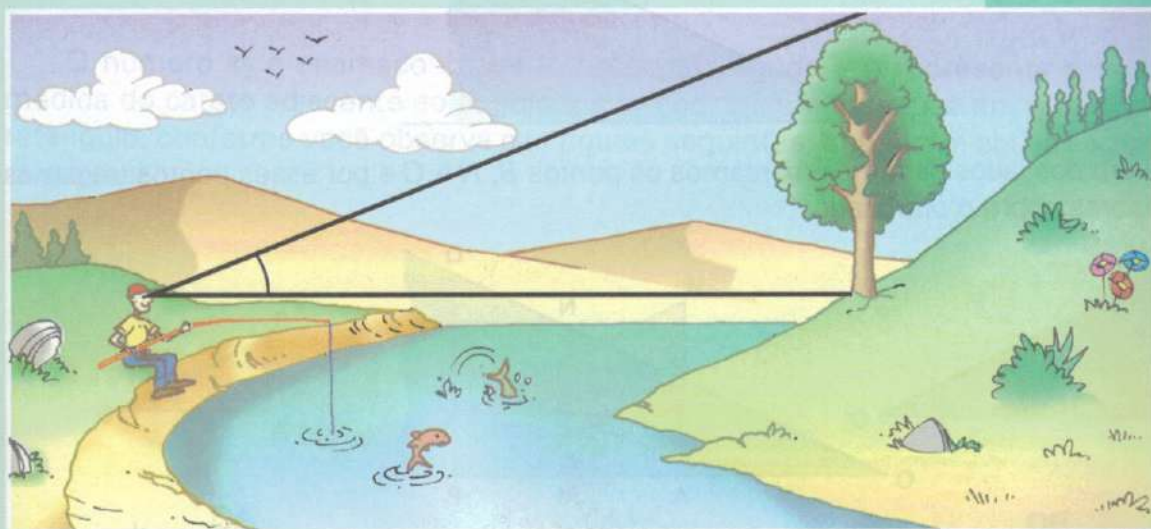
Me
Trig
e g
nor

fic
e s
triã

Esses problemas traziam a necessidade de calcular grandes distâncias, que não podiam ser determinadas com os instrumentos da época, mas podiam ser descobertas a partir de algumas relações matemáticas estabelecidas, principalmente, nos triângulos retângulos.

Como o próprio nome diz, a Trigonometria estabelece relações entre medidas de ângulos e de segmentos. Por esse motivo, em sua origem, a Trigonometria foi considerada uma extensão da Geometria.

A Trigonometria não se limita ao estudo de triângulos. Encontramos aplicações dela na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina, na Astronomia e até na Música.



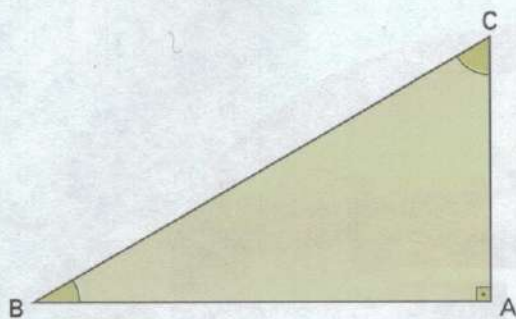
Há indícios de que os babilônios (habitantes da antiga Mesopotâmia, hoje Iraque) efetuaram estudos rudimentares de Trigonometria. Mais tarde, a Astronomia, estudada por egípcios e gregos, foi a grande impulsora do desenvolvimento da Trigonometria.

O astrônomo grego Hiparco de Nicéia (190 a.C.-125 a.C.) ficou conhecido como o *Pai da Trigonometria*, por ter estudado e sistematizado algumas relações entre os elementos de um triângulo.

49

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos o triângulo retângulo ABC da figura seguinte, no qual vamos destacar a hipotenusa \overline{BC} e os catetos \overline{AB} e \overline{AC} .



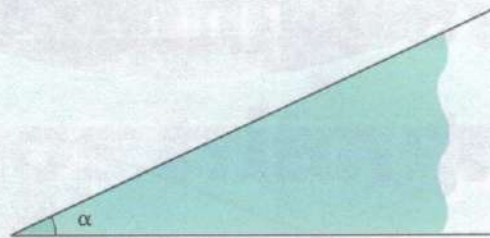
Se tomamos como referência o ângulo \hat{B} , podemos escrever:

- ✓ \overline{AC} é o cateto oposto ao ângulo \hat{B}
- ✓ \overline{AB} é o cateto adjacente ao ângulo \hat{B}

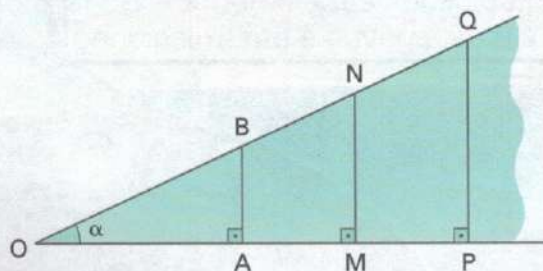
Se tomamos como referência o ângulo \hat{C} , podemos escrever:

- ✓ \overline{AB} é o cateto oposto ao ângulo \hat{C}
- ✓ \overline{AC} é o cateto adjacente ao ângulo \hat{C}

Vamos, agora, considerar que a figura seguinte seja uma rampa na qual destacamos o ângulo de medida α (ou simplesmente ângulo alfa), chamado *ângulo de subida*.



Sobre um dos lados da rampa marcamos os pontos B, N e Q e por esses pontos traçamos perpendiculares sobre o outro lado.



Por semelhança de triângulos podemos notar que:

$$\triangle OAB \sim \triangle OMN \sim \triangle OPQ \sim \triangle \dots$$

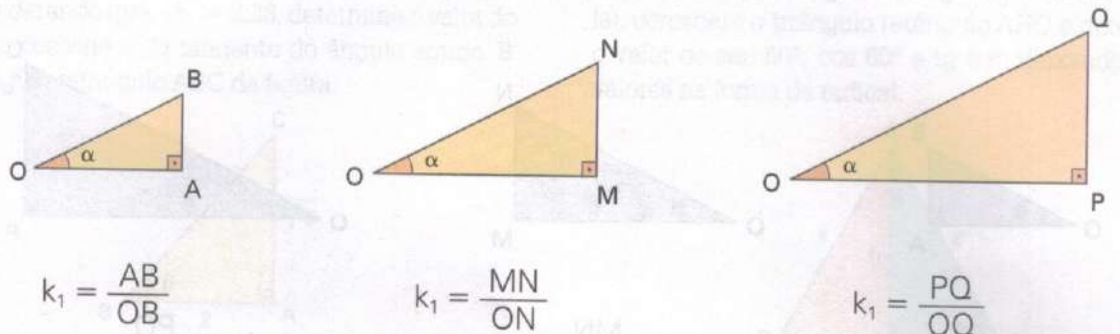
Podemos, então, estabelecer as seguintes razões:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = \dots = k_1 \text{ (constante)}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ} = \dots = k_2 \text{ (constante)}$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{PQ}{OP} = \dots = k_3 \text{ (constante)}$$

O número k_1 é chamado *seno do ângulo agudo* α e representa a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo, conforme você observa nas figuras seguintes que foram obtidas a partir da figura original:

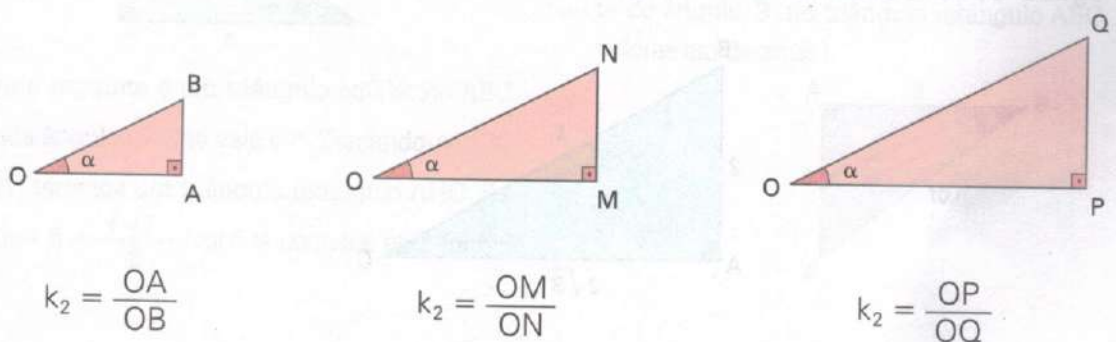


$$\text{seno do ângulo } \alpha = k_1 = \frac{AB}{OB} = \frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ}$$

ou

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

O número k_2 é chamado *coosseno do ângulo agudo* α e representa a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo, conforme você observa nas figuras seguintes, que foram obtidas a partir da figura original:



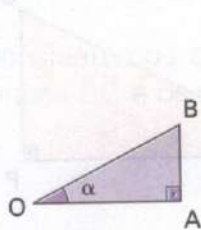
$$\text{coosseno do ângulo } \alpha = k_2 = \frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ}$$

ou

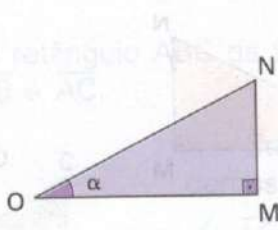
$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

O número k_3 é chamado *tangente do ângulo agudo* α e representa a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo α em qualquer triângulo retângulo.

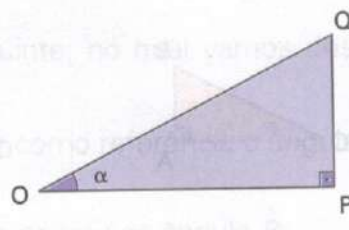
Observe as figuras seguintes, obtidas a partir da figura original:



$$k_3 = \frac{AB}{OA}$$



$$k_3 = \frac{MN}{OM}$$



$$k_3 = \frac{PQ}{OP}$$

$$\text{tangente do ângulo } \alpha = k_3 = \frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{PQ}{OP}$$

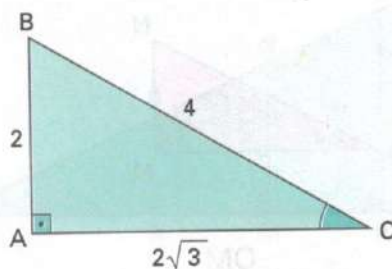
ou

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

Os números k_1 , k_2 e k_3 , que expressam, respectivamente, o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo α , são denominados *razões trigonométricas* relativas ao ângulo α .

No exemplo seguinte, você observa uma aplicação dessas relações:

No triângulo retângulo ABC da figura, calcular o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo agudo \hat{C} , considerando $\sqrt{3} = 1,73$.



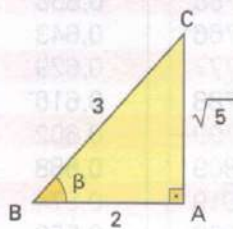
$$\text{sen } C = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\text{cos } C = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,73}{2} \cong 0,86$$

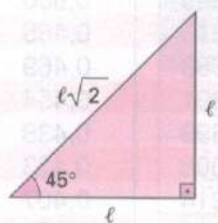
$$\text{tg } C = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1,73}{3} \cong 0,57$$

FIXAÇÃO

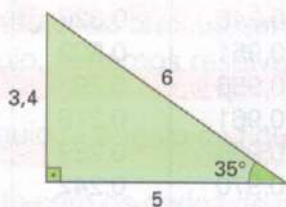
1 Considerando que $\sqrt{5} = 2,23$, determine o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo agudo \hat{B} no triângulo retângulo ABC da figura.



2 No triângulo retângulo, determine o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de 45° (deixar a resposta na forma de radical).



3 No triângulo retângulo, determine o valor de $\text{sen } 35^\circ$, $\text{cos } 35^\circ$ e $\text{tg } 35^\circ$ (os valores devem ser dados em decimal).



4 A figura seguinte é um triângulo equilátero ABC, onde cada ângulo interno vale 60° . Traçando-se a altura \overline{AH} , teremos um triângulo retângulo AHC. Sabendo que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (você já conhece essa fórmula)

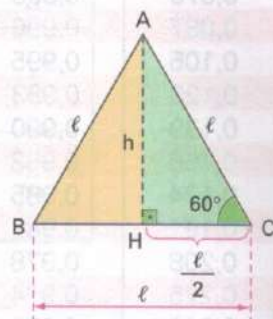
Tabela de razões trigonométricas

Em muitos casos, para resolver problemas com triângulos retângulos é necessário conhecer as razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo. Como a cada ângulo agudo está associado um único valor para o seno, para o cosseno e para a tangente, podemos elaborar uma tabela que nos forneça esses valores, evitando assim a necessidade de calculá-los a toda hora.

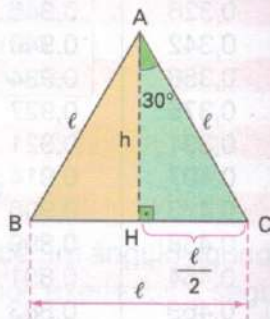
A tabela a seguir foi construída há séculos, e nos dá os valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos de 1° até 89° , com aproximação até milésimos:

Algumas calculadoras também nos fornecem esses valores.

la), considere o triângulo retângulo AHC e determine o valor de $\text{sen } 60^\circ$, $\text{cos } 60^\circ$ e $\text{tg } 60^\circ$, deixando esses valores na forma de radical.



5 Vamos usar a mesma figura e o mesmo triângulo retângulo AHC para determinar o valor de $\text{sen } 30^\circ$, $\text{cos } 30^\circ$ e $\text{tg } 30^\circ$, pois a altura \overline{AH} coincide com a bissetriz do ângulo interno \hat{A} , no triângulo equilátero ABC.



6 Determine o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo \hat{B} , no triângulo retângulo ABC. (Dar os valores em decimal.)

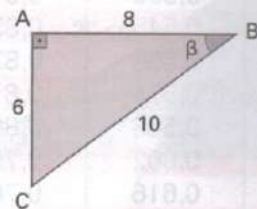


TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

Se quisermos, por exemplo, conhecer o valor do seno de 43°, procuramos, na tabela, o ângulo de 43° e na coluna seno encontraremos o valor procurado, ou seja, 0,682.

Então, $\text{sen } 43^\circ = 0,682$.

A maioria das calculadoras, hoje em dia, nos fornece esses valores.

Tabelas importantes

Na resolução de alguns problemas é mais conveniente usar os valores da seguinte tabela:

Ângulo	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Por extensão de definição, consideramos:

Ângulo	sen	cos	tg
0°	0	1	0
90°	1	0	não existe

Resolvendo problemas no triângulo retângulo

Usando os valores do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, podemos resolver problemas como veremos nos exemplos a seguir.

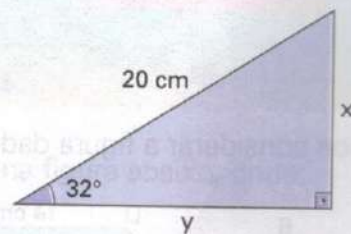
- No triângulo retângulo da figura, determinar as medidas x e y dos catetos.

De acordo com os dados do problema, temos:

20 cm = medida da hipotenusa

x = medida do cateto oposto ao ângulo de 32°

y = medida do cateto adjacente ao ângulo de 32°



Daí podemos escrever:

$$\text{sen } 32^\circ = \frac{x}{20}$$

$$0,53 = \frac{x}{20}$$

$$x = 20 \cdot 0,53$$

$$x = 10,60 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 32^\circ = \frac{y}{20}$$

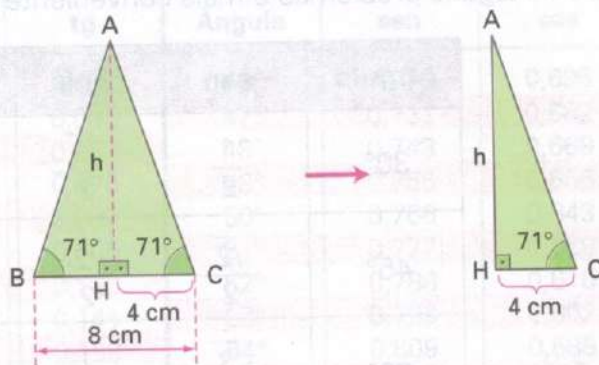
$$0,848 = \frac{y}{20}$$

$$y = 20 \cdot 0,848$$

$$y = 16,96 \text{ cm}$$

Logo, temos: $x = 10,60 \text{ cm}$ e $y = 16,96 \text{ cm}$.

2. Em um triângulo isósceles, cada ângulo da base mede 71° . Sabendo-se que a base desse triângulo mede 8 cm, determinar a medida h da altura relativa à base. Vamos fazer um esboço do triângulo dado no problema:



De acordo com os dados do problema, temos:

4 cm = medida do cateto adjacente ao ângulo de 71°

h = medida do cateto oposto ao ângulo de 71°

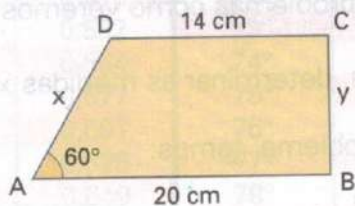
Então, podemos escrever:

$$\text{tg } 71^\circ = \frac{h}{4}$$

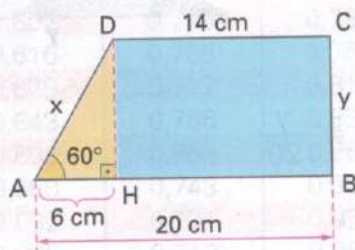
$$2,904 = \frac{h}{4} \longrightarrow h = 4 \cdot 2,904 \longrightarrow h = 11,616 \text{ cm}$$

Logo, a altura pedida mede 11,616 cm.

3. Na figura seguinte, determinar as medidas x e y dos lados não-paralelos do trapézio ABCD.



Vamos considerar a figura dada e observar que:



$$DH = BC = y$$

$$AH = AB - DC = 6 \text{ cm}$$

No triângulo retângulo AHD, temos:

6 cm = medida do cateto adjacente ao ângulo de 60°

x = medida da hipotenusa

y = medida do cateto oposto ao ângulo de 60°

Daí podemos escrever:

$$\cos 60^\circ = \frac{6}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{x}$$

$$x = 2 \cdot 6$$

$$x = 12$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{6}$$

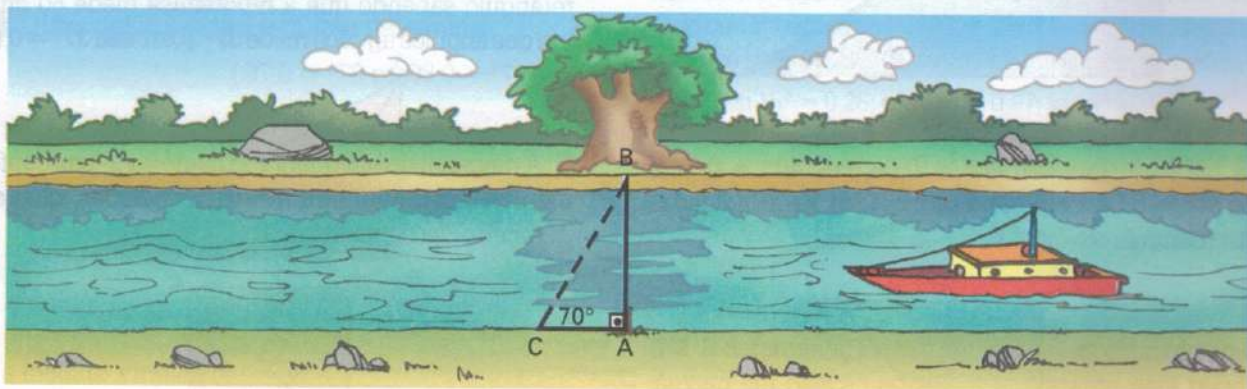
$$y = 6\sqrt{3}$$

Então, os lados não-paralelos do trapézio medem 12 cm e $6\sqrt{3}$ cm.

4. Queremos saber a largura ℓ de um rio, sem atravessá-lo. Para isso, adotamos o seguinte processo.

- ✓ Marcamos dois pontos, A (uma estaca) e B (uma árvore), um em cada margem, de tal modo que o ângulo no ponto A seja reto.
- ✓ Marcamos um ponto C , distante 8 m de A , onde fixamos o aparelho de medir ângulos (teodolito).
- ✓ Medimos o ângulo de 70° no ponto C .

Nessas condições, qual a largura ℓ do rio?



A representação matemática do problema está esboçada na figura abaixo, onde:

ℓ = medida do cateto oposto a 70°

8 = medida do cateto adjacente a 70°

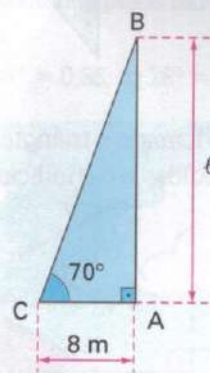
Daí temos:

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 70^\circ}{\text{cateto adjacente a } 70^\circ} \longrightarrow \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\ell}{8}$$

Como $\operatorname{tg} 70^\circ = 2,75$ (olhando a tabela), temos:

$$2,75 = \frac{\ell}{8} \longrightarrow \ell = 2,75 \cdot 8 \longrightarrow \ell = 22,00 \text{ m}$$

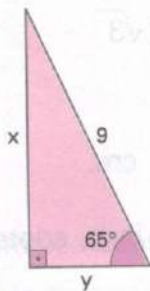
Então, a largura do rio é de 22 metros.



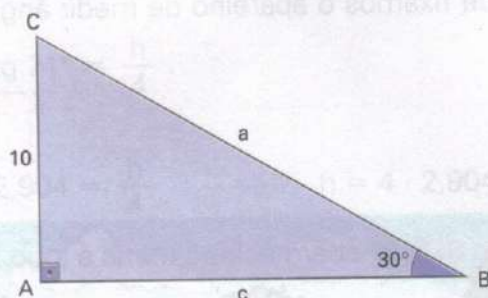
FIXAÇÃO

1 No triângulo retângulo determine as medidas x e y indicadas.

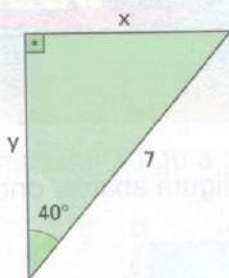
(Use: $\text{sen } 65^\circ = 0,91$; $\text{cos } 65^\circ = 0,42$; $\text{tg } 65^\circ = 2,14$)



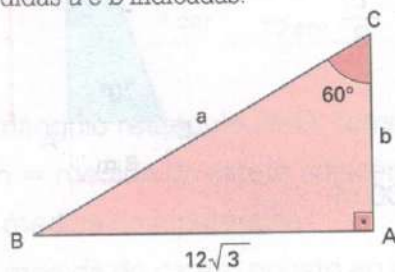
2 Determine no triângulo retângulo ABC as medidas a e c indicadas.



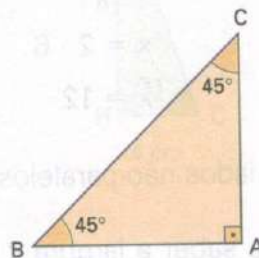
3 Sabendo que $\text{sen } 40^\circ = 0,64$; $\text{cos } 40^\circ = 0,77$ e $\text{tg } 40^\circ = 0,84$, determine as medidas x e y indicadas no triângulo retângulo.



4 Considerando o triângulo retângulo ABC, determine as medidas a e b indicadas.



5 Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.



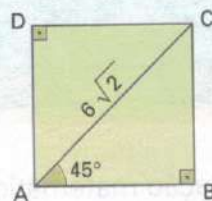
6 Sabe-se que, num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 40 cm. Se cada ângulo da base desse triângulo mede 62° , determine:

- a) a medida x da base;
- b) a medida h da altura.

(Use: $\text{sen } 62^\circ = 0,88$; $\text{cos } 62^\circ = 0,47$; $\text{tg } 62^\circ = 1,88$.)

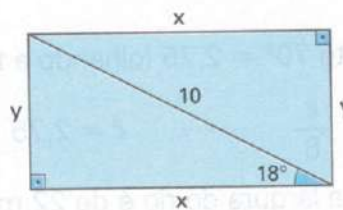
7 Determine as medidas dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa mede 50 cm e um dos ângulos agudos mede 37° . (Use: $\text{sen } 37^\circ = 0,60$; $\text{cos } 37^\circ = 0,80$; $\text{tg } 37^\circ = 0,75$.)

8 A diagonal de um quadrado mede $6\sqrt{2}$ cm, conforme nos mostra a figura. Nessas condições, qual é o perímetro desse quadrado?

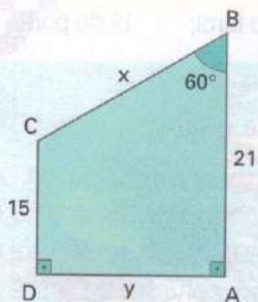


9 A diagonal de um retângulo forma com o maior lado desse retângulo um ângulo de 18° , conforme mostra a figura. Se a diagonal mede 10 cm, determine as medidas x e y dos lados do retângulo, bem como o seu perímetro.

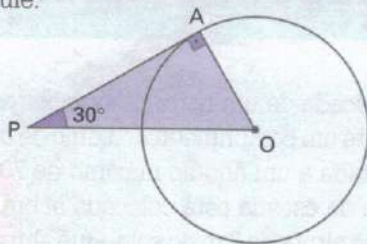
(Use: $\text{sen } 18^\circ = 0,31$; $\text{cos } 18^\circ = 0,95$; $\text{tg } 18^\circ = 0,32$.)



10 A figura seguinte é um trapézio retângulo, sendo x e y as medidas dos lados não-paralelos desse trapézio. Nessas condições, determine x e y .

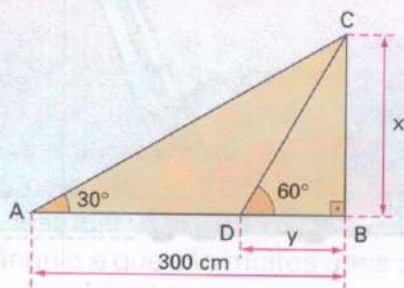


11 Na figura temos que $PA = 18$ cm. Nessas condições, calcule:



- o comprimento r do raio da circunferência;
- a distância x do ponto P ao centro O da circunferência.

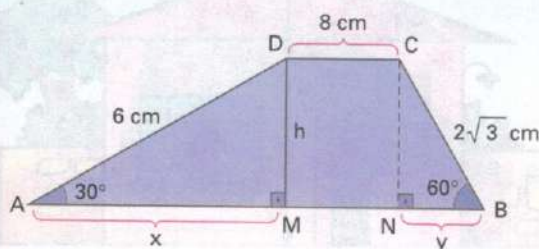
12 Observando a figura seguinte, determine:



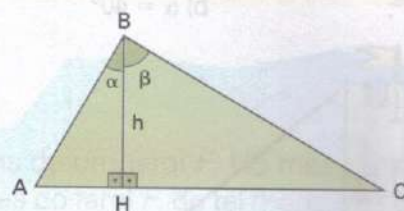
- a medida x indicada
- a medida y indicada
- a medida do segmento \overline{AD}

13 Na figura abaixo, determine:

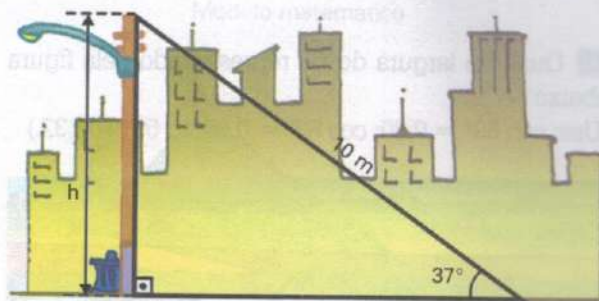
- a medida h da altura do trapézio ABCD;
- as medidas x e y indicadas;
- o perímetro do trapézio ABCD.



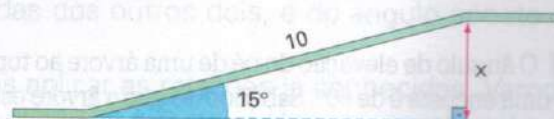
14 Na figura temos que $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ e $h = 6\sqrt{2}$ cm. Sabendo que $\sqrt{6} = 2,44$, determine a medida do lado \overline{AC} do triângulo.



15 Qual é a altura h do poste representado pela figura abaixo?

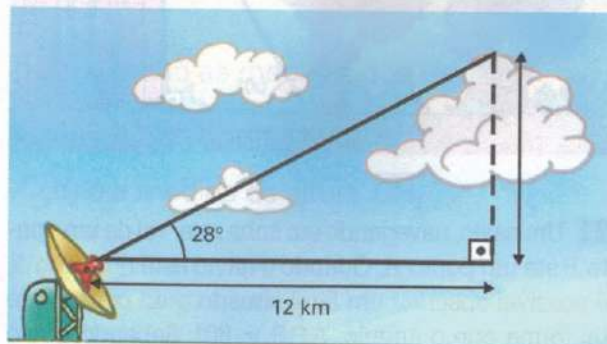


16 Uma rampa lisa com 10 m de comprimento faz ângulo de 15° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente a quantos metros? (Use: $\sin 15^\circ = 0,26$; $\cos 15^\circ = 0,97$; $\tan 15^\circ = 0,27$.)



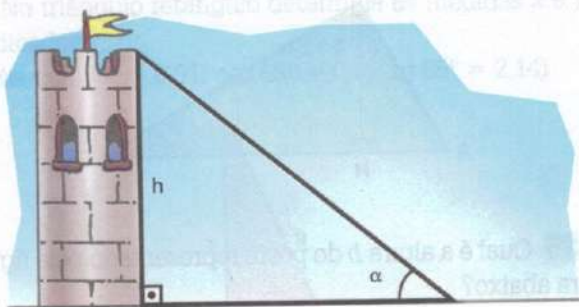
17 A determinação feita por radares da altura de uma nuvem em relação ao solo é importante para previsões meteorológicas e na orientação de aviões para que evitem turbulências. Nessas condições, determine a altura das nuvens detectadas pelos radares conforme o desenho seguinte.

(Use: $\sin 28^\circ = 0,47$; $\cos 28^\circ = 0,88$; $\tan 28^\circ = 0,53$.)



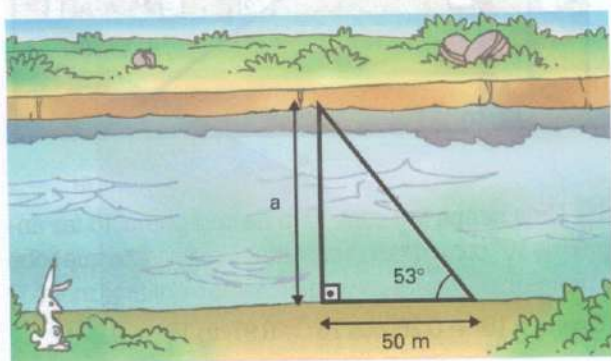
18 A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α , como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre se:

- a) $\alpha = 20^\circ$; b) $\alpha = 40^\circ$

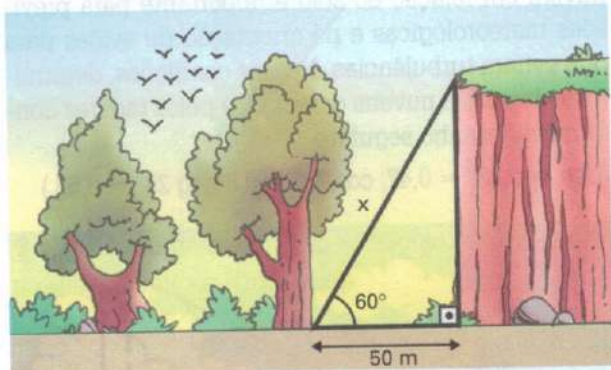


19 Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo?

(Use: $\sin 53^\circ = 0,80$; $\cos 53^\circ = 0,60$; $\tan 53^\circ = 1,32$.)



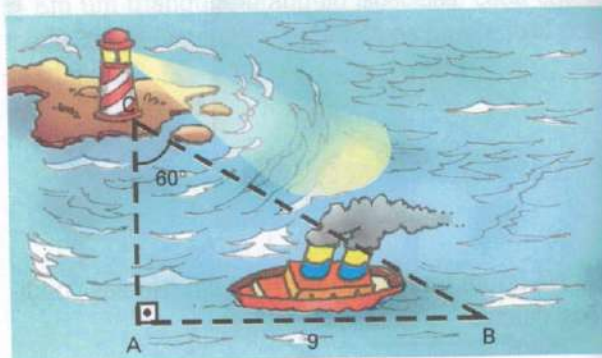
20 O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60° . Sabendo-se que a árvore está distante 50 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?



21 Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto B até um ponto A . Quando o navio está no ponto B , é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo $\hat{A}CB = 60^\circ$. Sabendo que o

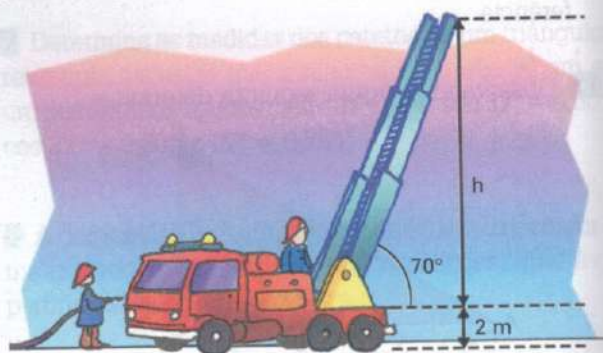
ângulo $\hat{C}AB$ é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 9 milhas, calcule a distância, em milhas: (Faça: $\sqrt{3} = 1,73$.)

- a) do ponto A ao farol; b) do ponto B ao farol.

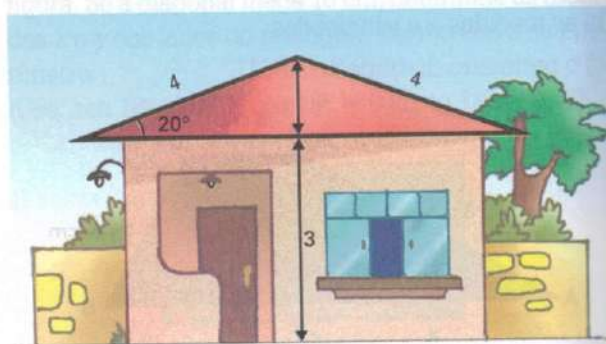


22 Uma escada de um carro de bombeiros pode estender-se até um comprimento máximo de 30 m, quando é levantada a um ângulo máximo de 70° . Sabe-se que a base da escada está colocada sobre um caminhão, a uma altura de 2 m do solo. Que altura, em relação ao solo, essa escada poderá alcançar?

(Use: $\sin 70^\circ = 0,94$; $\cos 70^\circ = 0,34$; $\tan 70^\circ = 2,75$.)

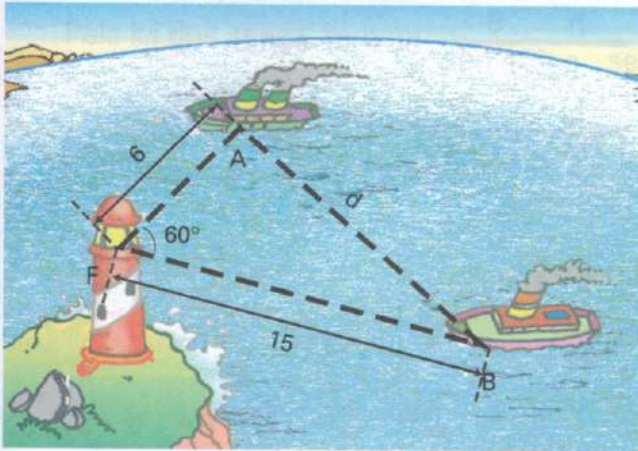


23 Na construção de um telhado, foram usadas telhas francesas e o "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6 m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa. (Use: $\sin 20^\circ = 0,34$; $\cos 20^\circ = 0,94$; $\tan 20^\circ = 0,36$.)

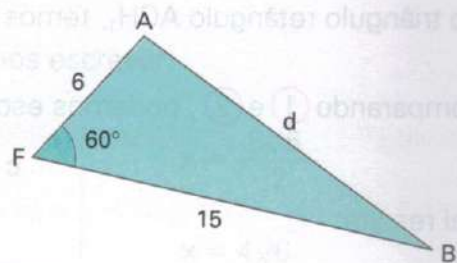


Consideremos a seguinte situação:

Um navio se encontra num ponto A , distante 6 milhas de um farol F . No mesmo instante, um outro navio se encontra num ponto B , distante 15 milhas do farol F , de tal modo que o ângulo de visão de um observador que se encontra no farol F e vê os dois navios é de 60° . Qual a distância entre os dois navios nesse instante?



Modelo matemático

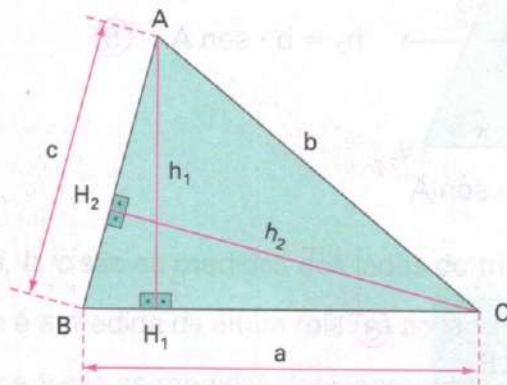


Pelo desenho, observamos que devemos determinar a medida de um lado de um triângulo que não é retângulo, quando conhecemos as medidas dos outros dois, e do ângulo oposto ao lado cuja medida se quer encontrar.

Como o triângulo não é retângulo, não podemos aplicar as relações já conhecidas. Vamos, então, estudar outras relações que podem ser aplicadas em um triângulo acutângulo ou obtusângulo e que são muito úteis no estudo da própria Matemática e da Física, principalmente nas questões de Mecânica.

Lei (ou teorema) dos senos

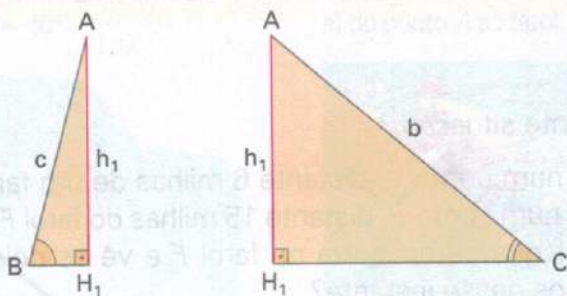
Vamos considerar o triângulo acutângulo ABC , onde:



- ✓ a, b, c são as medidas dos lados
- ✓ h_1 é a medida da altura $\overline{AH_1}$
- ✓ h_2 é a medida da altura $\overline{CH_2}$

Observe a demonstração:

◆ Consideremos os triângulos ABH_1 e ACH_1 , que são triângulos retângulos.



No triângulo retângulo ABH_1 , temos: $\text{sen } B = \frac{h_1}{c} \rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen } B$. (1)

No triângulo retângulo ACH_1 , temos: $\text{sen } C = \frac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen } C$. (2)

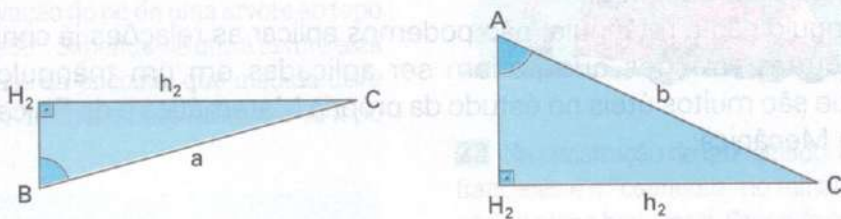
Comparando (1) e (2), podemos escrever:

$$c \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } C$$

Daí resulta:

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad (3)$$

◆◆ Consideremos os triângulos BCH_2 e ACH_2 , que são triângulos retângulos.



No triângulo retângulo BCH_2 , temos: $\text{sen } B = \frac{h_2}{a} \rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen } B$. (4)

No triângulo retângulo ACH_2 , temos: $\text{sen } A = \frac{h_2}{b} \rightarrow h_2 = b \cdot \text{sen } A$. (5)

Comparando (4) e (5), podemos escrever:

$$a \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } A$$

Daí resulta:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad (6)$$

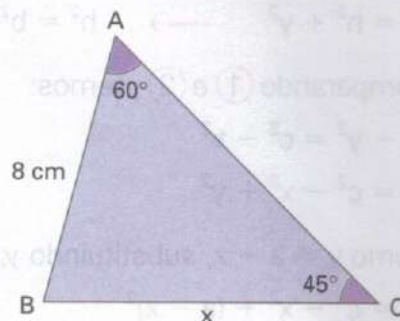
Finalmente, comparando ③ e ⑥, podemos escrever a seguinte igualdade de razões:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Essa igualdade denomina-se *lei dos senos* e é válida para qualquer triângulo.

Vejamos uma aplicação:

No triângulo acutângulo da figura ao lado, determinar a medida x indicada.



Pela lei dos senos, temos: $\frac{8}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 60^\circ}$

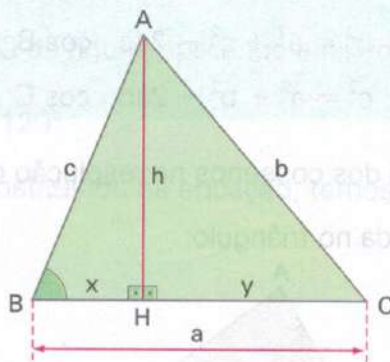
Como $\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever:

$$\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sqrt{2} \cdot x = 8\sqrt{3} \\ x = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} x = \frac{8\sqrt{6}}{2} \\ x = 4\sqrt{6} \end{array} \right.$$

Logo, a medida x procurada é $4\sqrt{6}$ cm.

Lei (ou teorema) dos cossenos

Consideremos o triângulo acutângulo ABC, onde:



- ✓ a, b, c são as medidas dos lados do triângulo
- ✓ h é a medida da altura relativa ao lado \overline{BC} do triângulo
- ✓ x e y são as medidas dos segmentos que a altura determina sobre o lado \overline{BC}

Observe, agora:

- ✓ No triângulo retângulo ABH, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad \longrightarrow \quad h^2 = c^2 - x^2 \quad (1)$$

- ✓ No triângulo retângulo ACH, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 = h^2 + y^2 \quad \longrightarrow \quad h^2 = b^2 - y^2 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos:

$$b^2 - y^2 = c^2 - x^2$$

$$b^2 = c^2 - x^2 + y^2$$

Como $y = a - x$, substituindo y , temos:

$$b^2 = c^2 - x^2 + (a - x)^2$$

$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \quad (3)$$

- ✓ No triângulo retângulo ABH, temos:

$$\cos B = \frac{x}{c} \quad \longrightarrow \quad x = c \cdot \cos B$$

Substituindo x por $c \cdot \cos B$ na igualdade (3), temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot (c \cdot \cos B)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

Essa igualdade é conhecida como *lei dos cossenos* e é válida para qualquer triângulo.

Em todo triângulo, o quadrado da medida de um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado.

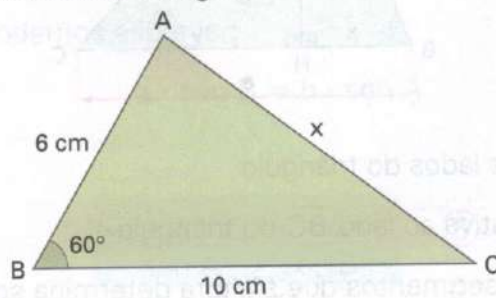
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Vejam as aplicações da lei dos cossenos na resolução de problemas:

1. Determinar a medida x indicada no triângulo:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

Sendo $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e substituindo na equação anterior, temos:

$$x^2 = 100 + 36 - 120 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 100 + 36 - 60$$

$$x^2 = 76 \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{76} \quad \longrightarrow \quad x = 2\sqrt{19}$$

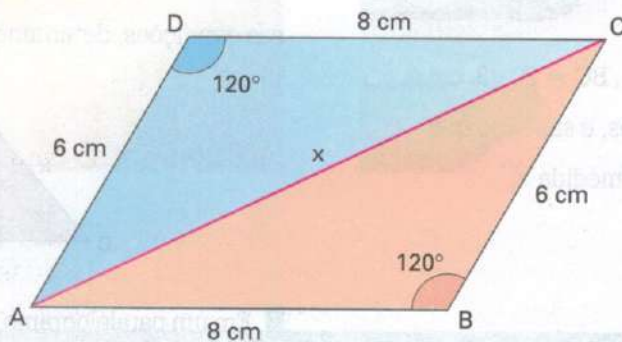
Logo, a medida x procurada é $2\sqrt{19}$ cm.

Observação:

Tanto a lei dos senos como a lei dos cossenos foram demonstradas para triângulos acutângulos. Entretanto, essas leis também são válidas para triângulos obtusângulos e retângulos.

2. Determinar a medida x da diagonal maior do paralelogramo da figura abaixo, dado

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$



No triângulo obtusângulo ABC da figura, aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ$$

Como $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, substituindo na equação, temos:

$$x^2 = 64 + 36 - 96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

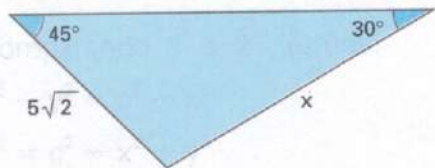
$$x^2 = 64 + 36 + 48$$

$$x^2 = 148 \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{148} \quad \longrightarrow \quad x = 2\sqrt{37}$$

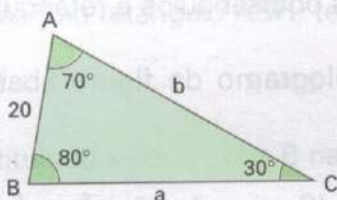
Logo, a medida x da diagonal maior é $2\sqrt{37}$ cm.

FIXAÇÃO

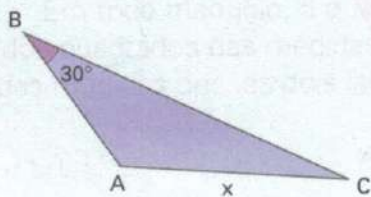
1 Sendo dados $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, determine a medida x indicada no triângulo.



2 No triângulo ABC da figura seguinte, as medidas indicadas são consideradas em centímetros. Sabendo que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 80^\circ = 0,98$ e $\sin 70^\circ = 0,94$, determine as medidas a e b .

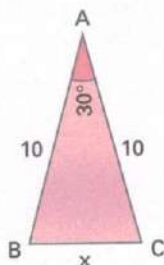


3 No triângulo ABC da figura, $BC = 20\sqrt{3}$ cm e $AB = 16$ cm. Nessas condições, e sabendo que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine a medida x .



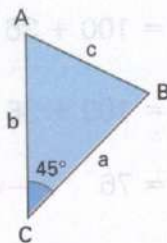
4 No triângulo isósceles ABC da figura seguinte, cada lado congruente mede 10 cm. Determine a medida x da base \overline{BC} .

(Use: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sqrt{3} = 1,73$.)

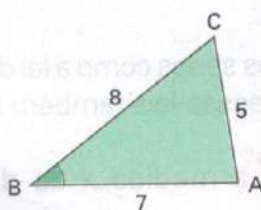


5 Consideremos o triângulo ABC da figura, cujo ângulo \hat{C} mede 45° . Se $a = 8$ cm e $b = 6\sqrt{2}$ cm, determine a medida c .

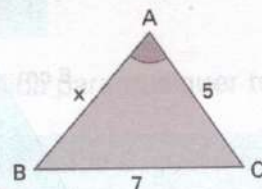
(Use: $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.)



6 Qual é o valor do $\cos B$ no triângulo ABC da figura?



7 No triângulo ABC, sabe-se que $\cos A = \frac{1}{5}$. Nessas condições, determine a medida x indicada.

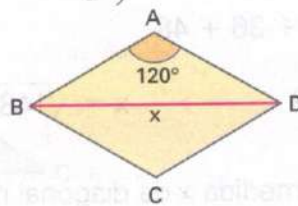


8 Em um paralelogramo, dois lados consecutivos medem 7 cm e 4 cm. Se o seu ângulo obtuso mede 120° , calcule a medida x da maior diagonal desse paralelogramo.

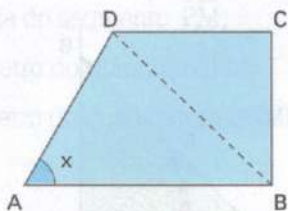
(Use: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.)

9 No losango da figura seguinte, cada lado mede 8 cm. Nessas condições, calcule a medida x da diagonal maior \overline{BD} do losango.

(Use: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.)

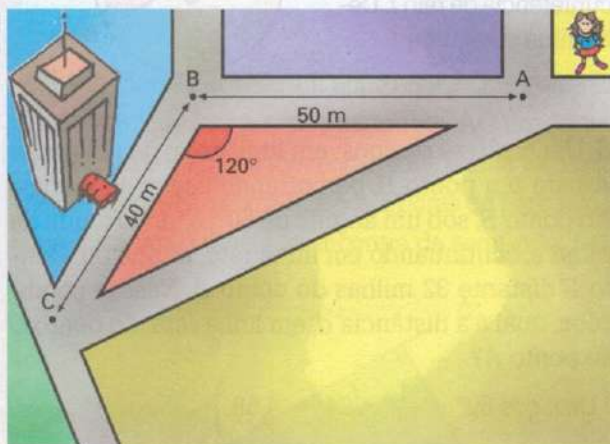


10 No trapézio retângulo da figura abaixo $AB = 7$ cm e $AD = 5$ cm, enquanto a diagonal \overline{DB} mede $\sqrt{39}$ cm. Qual é a medida x do ângulo agudo do trapézio?



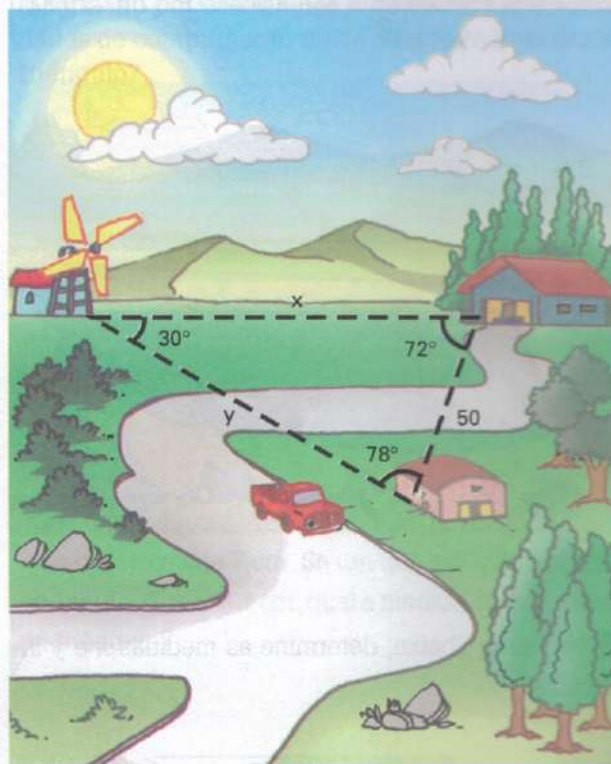
11 Uma pessoa encontra-se no cruzamento A , dirigindo-se para o cruzamento C . Tendo escolhido o caminho mais curto (\overline{AC}), quantos metros essa pessoa vai andar para ir de A até C ?

(Use: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{62} = 7,81$.)



12 Numa fazenda, o galpão fica 50 metros distante da casa. Sejam x e y , respectivamente, as distâncias da casa e do galpão ao transformador de energia, conforme mostra a figura abaixo. Nessas condições, calcule as medidas x e y indicadas.

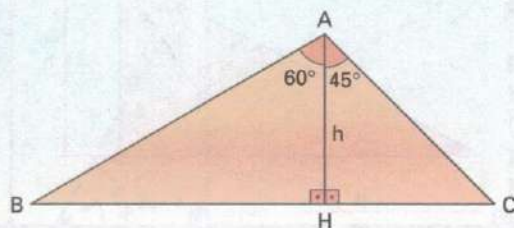
(Use: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 78^\circ = 0,98$, $\sin 72^\circ = 0,95$)



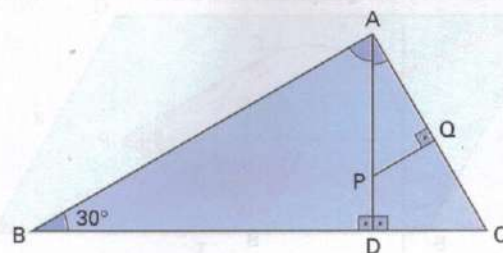
RETOMANDO o que aprendeu

1 No triângulo ABC da figura abaixo, $h = 4$ cm. Nessas condições, determine:

- a medida do segmento \overline{BH} ;
- a medida do segmento \overline{HC} ;
- a medida do lado \overline{BC} , sendo $\sqrt{3} = 1,73$.

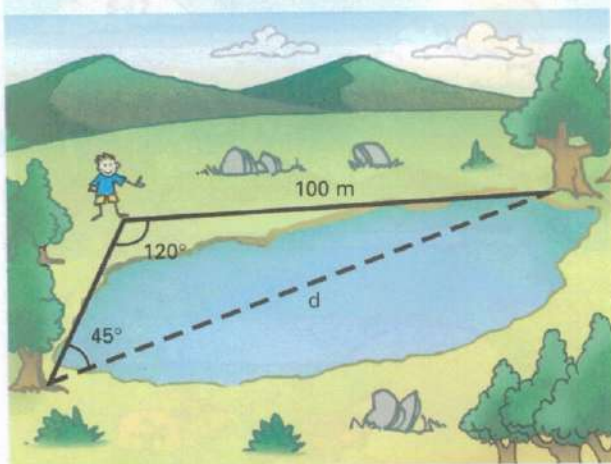


2 O triângulo ABC da figura abaixo é retângulo (\hat{A} é reto), e \overline{AD} é a altura relativa à hipotenusa. Sabendo que \overline{PQ} é perpendicular ao lado \overline{AC} do triângulo e que \overline{AP} mede 6 cm, determine a medida do segmento \overline{PQ} .

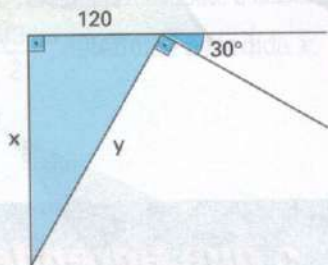


3 Duas árvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê é 120° , e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é 45° . Sabendo que uma das árvores está a 100 m do observador (ou seja, a 3ª linha mede 100 m), determine a distância d entre as árvores.

(Use: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{6} \approx 2,44$.)

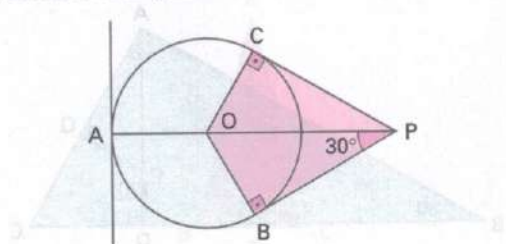


4 Na figura abaixo, determine as medidas x e y indicadas.

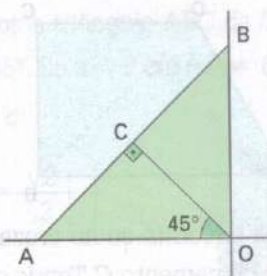


5 Na figura abaixo, A , B e C são pontos de tangência. Nessas condições, se o raio $r = 9$ cm, determine:

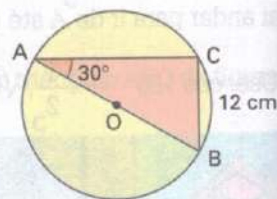
- a medida x do segmento \overline{PA} ;
- a medida y do segmento \overline{PB} ;
- o perímetro do quadrilátero $PBOC$.



6 Na figura abaixo, o segmento \overline{OA} mede $\sqrt{2}$ cm e o ponto C é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Nessas condições, determine a medida do segmento \overline{AB} .

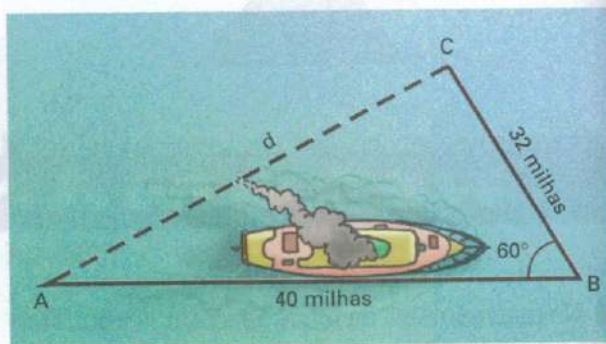


7 A figura ao lado nos mostra o triângulo ABC inscrito numa semicircunferência de raio r . Determine o valor de r .

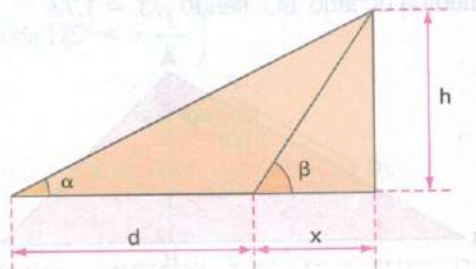


8 Um navio se desloca, em linha reta, de um ponto A para um ponto B , percorrendo assim 40 milhas. No ponto B , sob um ângulo de 60° , o navio muda de rumo e, continuando em linha reta, atinge um ponto C distante 32 milhas do ponto B . Nessas condições, qual é a distância d , em linha reta, do ponto C ao ponto A ?

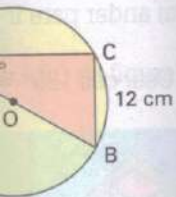
(Use: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sqrt{21} \approx 4,58$.)



9 Calcule as medidas h e x indicadas na figura abaixo, sendo dados $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$; $\operatorname{tg} \beta = 1,5$ e $d = 40$ cm.



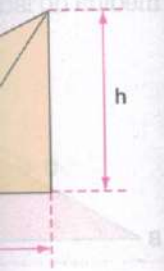
mede $\sqrt{2}$ cm e
 into \overline{AB} . Nessas
 segmento \overline{AB} .



eta, de um ponto
 assim 40 milhas.
 o navio muda de
 , atinge um pon-
 B. Nessas condi-
 reta, do ponto C

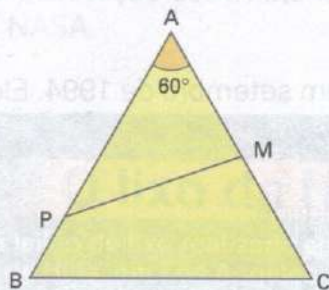


das na figura abai-
 1,5 e $d = 40$ cm.

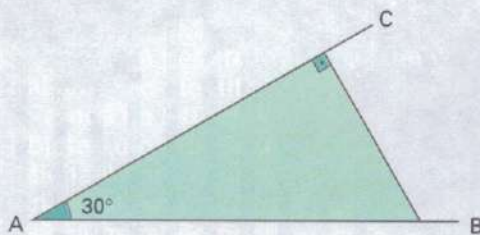


10 O triângulo ABC da figura abaixo é equilátero e seu lado mede 4 cm. Sabendo que $AM = MC = 2$ cm, $AP = 3$ cm e usando $\sqrt{7} = 2,64$ determine:

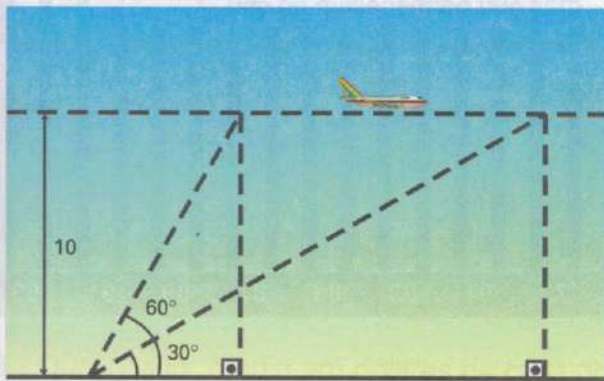
- a medida do segmento \overline{PM} ;
- o perímetro do triângulo APM;
- o perímetro do quadrilátero BCMP.



11 Um móvel parte de um ponto A e segue numa direção \overline{AB} , que forma com a semi-reta \overline{AC} um ângulo de 30° . Sabe-se que o móvel caminha a uma velocidade constante de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a que distância o móvel se encontra da semi-reta \overline{AC} ?

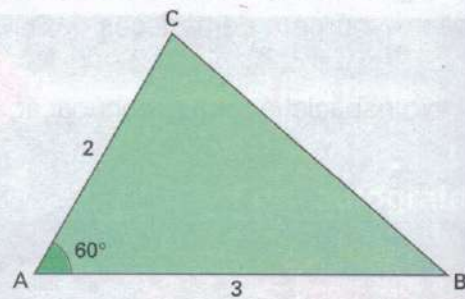


12 Um avião voa numa reta horizontal de altura 10 km em relação a um observador P, situado na projeção ortogonal da trajetória. No instante t_1 , o avião é visto sob um ângulo de 60° e no instante t_2 , sob um ângulo de 30° . Qual é a distância percorrida pelo avião no intervalo t_1 até t_2 ?

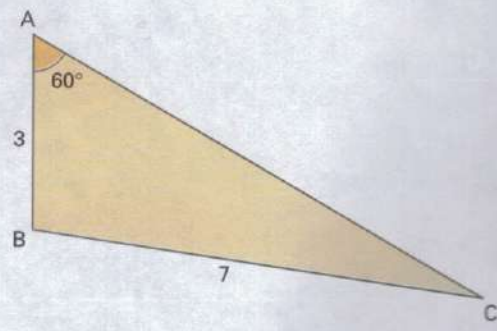


13 Uma rampa plana de 36 m de comprimento, com um ângulo de 30° com o plano horizontal. Quantos metros eleva-se verticalmente uma pessoa que sobe a rampa inteira?

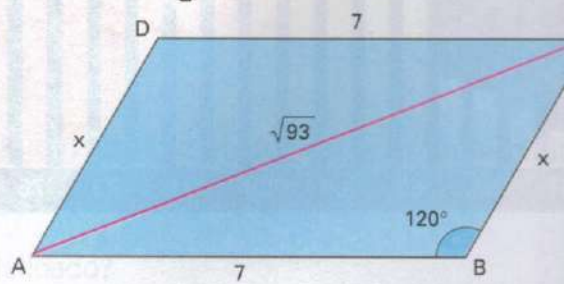
14 Dois lados de um triângulo medem 2 e 3 unidades de comprimento, respectivamente. O ângulo formado por esses lados é de 60° . Quantas unidades de comprimento mede o terceiro lado do triângulo?



15 Num triângulo ABC, o ângulo \hat{A} mede 60° e o lado oposto mede 7 cm. Se um dos lados adjacentes ao ângulo \hat{A} mede 3 cm, qual a medida do outro lado do triângulo?



16 Determine a medida x indicada no paralelogramo ABCD da figura abaixo, considerando $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.



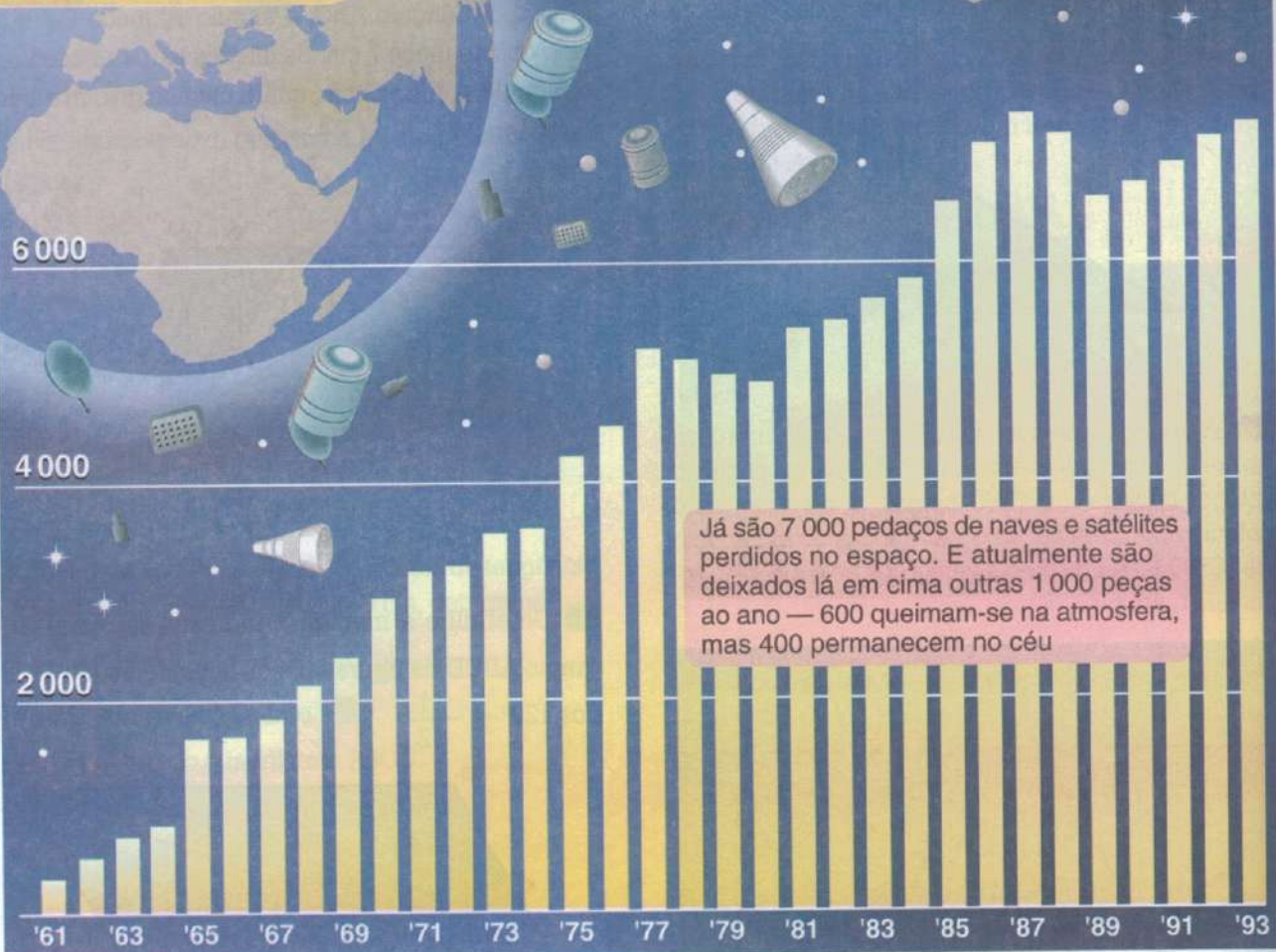
JORNAIS & REVISTAS

Este gráfico foi publicado na revista *Superinteressante*, em setembro de 1994. Ele mostra a evolução do número de pedaços de naves e satélites perdidos no espaço.

O lixo espacial é uma preocupação crescente da humanidade.

Lotação esgotada

A órbita da Terra já acumulou tanta sucata — pedaços de foguetes e satélites — que os objetos estão a ponto de colidir entre si. A reação em cadeia, ameaçaria todos os veículos espaciais lançados daqui para a frente



De acordo com as informações dadas, responda:

1. A partir de que ano o número desses objetos é maior do que 4 000?
2. Estime quantos pedaços estavam em órbita terrestre em 1996? E em 1998?

Veja a publicação da revista *Isto É* de 15/03/95 sobre o leilão de artigos encontrados nas lixeiras da NASA.

mostra a



O lixo da Nasa

- Um leilão de lixo realizado em Beverly Hills, em Los Angeles, no sábado 4, reuniu colecionadores de todo o mundo e teve a soma final de US\$ 700 mil. Os objetos (1 374 artigos ao todo) foram encontrados por funcionários da Nasa nas lixeiras da agência espacial americana. A peça mais disputada foi o macacão usado nos exercícios de treinamento por Neil Armstrong, o primeiro homem a pisar a Lua, em 1969. Arrematada por US\$ 10,5 mil, a roupa foi comprada pelo telefone por um italiano não identificado. Constam ainda na lista dos principais objetos uma foto autografada por Michael Smith, astronauta morto na explosão da Challenger em 1986; um cartão-postal escrito por Yuri Gagarin, o primeiro a fazer uma viagem espacial, em 1961; um par de luvas usado pelos russos em 1977 durante a viagem da Soyuz 25; e quatro marmitas de comida congelada, preparadas para missões espaciais mas que nunca chegaram a ser embarcadas.



Foto autografada por astronauta da Challenger
US\$ 250

Luva de um cosmonauta
US\$ 4,5 mil

Marmitas com ovos mexidos nunca levadas ao espaço
US\$ 80

Cartão-postal escrito por Yuri Gagarin
US\$ 2,7 mil

Macacão de treinamento de Neil Armstrong
US\$ 10,5 mil

3. Qual o número total de objetos encontrados pelos funcionários da NASA nas lixeiras da agência espacial americana?
4. Qual o valor final arrecadado no leilão?
5. Verifique a cotação atual do dólar e determine, em reais, o valor pelo qual foi leiloado o cartão-postal escrito por Yuri Gagarin.
6. Qual o valor médio em dólares de cada objeto leiloado?

10

Estudando a circunferência e o círculo



Arquimedes

A forma circular aparece constantemente na natureza ou embelezando as construções.

Nesta unidade, procuraremos estudar as relações que existem entre os elementos de uma circunferência e suas aplicações na Matemática.

Quando falamos na forma circular, imediatamente pensamos no número irracional π , cujo valor na forma decimal é 3,1415692... e cuja descoberta é uma das grandes páginas da história da Matemática.

Já Arquimedes, na Grécia antiga, atribuía a π um valor intermediário entre $3\frac{1}{7}$ e

$$3\frac{10}{77}.$$

O Papiro de Ahmes, escrito cerca de 1500 anos a.C., nos mostra que os matemáticos egípcios utilizavam o valor 3,16 para o número π .

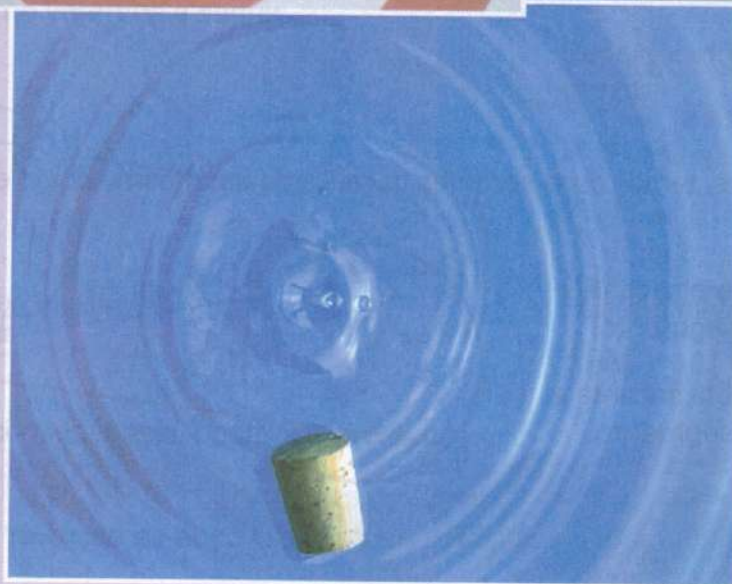
Sabe-se também que um matemático chinês, por volta de 480, chegou a um valor intermediário entre 3,1415926 e 3,1415927, resultado surpreendente para a época.

Entre os matemáticos árabes, destaca-se o cálculo feito por al-Kashi, por volta de 1430, quando escreveu o número π com 16 decimais.

Sabe-se ainda que, na Europa, no período de 1600 a 1700, o π foi calculado com 30 casas decimais. Atualmente, com os modernos computadores, podemos calcular o valor de π com mais de 100 000 casas decimais.



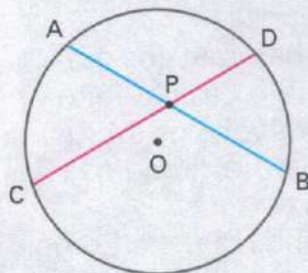
Papiro de Ahmes



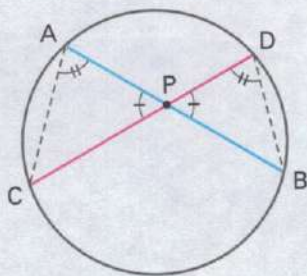
A circunferência também apresenta relações métricas entre seus elementos. Vejamos essas relações.

Relação entre as cordas

Na circunferência ao lado, temos duas cordas, \overline{AB} e \overline{CD} , que se cortam em um certo ponto P , distinto do centro O dessa circunferência.



Entre os segmentos que o ponto P determina sobre cada uma das cordas, pode-se escrever uma relação métrica, como veremos a seguir.



Considerando os triângulos APC e DPB, temos:

- ✓ $\hat{A}PC \cong \hat{D}PB$ (são ângulos o.p.v.)
- ✓ $\hat{A} \cong \hat{D}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco)

Pela definição de semelhança, temos:

$$\triangle APC \sim \triangle DPB$$

Como consequência, podemos escrever:

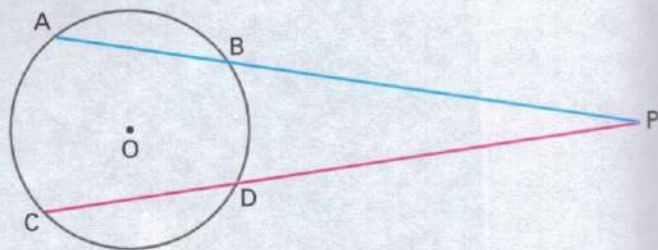
$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \quad \text{ou} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Relação entre secantes

Na circunferência seguinte, temos duas secantes traçadas de um mesmo ponto exterior P .

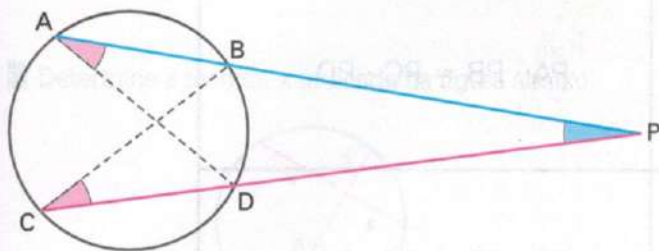
\overline{PA} é um segmento de reta secante e \overline{PB} é a parte externa desse segmento.

\overline{PC} é um segmento de reta secante e \overline{PD} é a parte externa desse segmento.



Entre esses quatro segmentos que acabamos de destacar pode-se escrever uma relação métrica, como veremos a seguir.

Considerando os triângulos PAD e PCB, temos:



✓ \hat{P} é ângulo comum

✓ $\hat{A} \cong \hat{C}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco)

Pela definição de semelhança, temos:

$$\triangle PAD \sim \triangle PCB$$

Como consequência, podemos escrever:

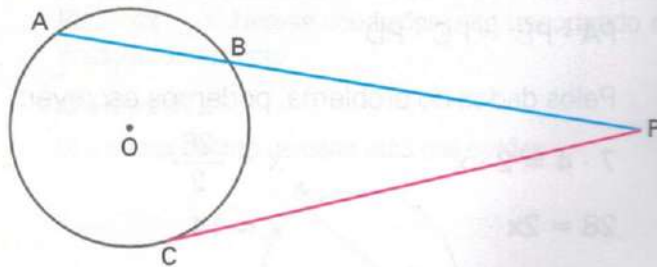
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \quad \text{ou} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Relação entre secante e tangente

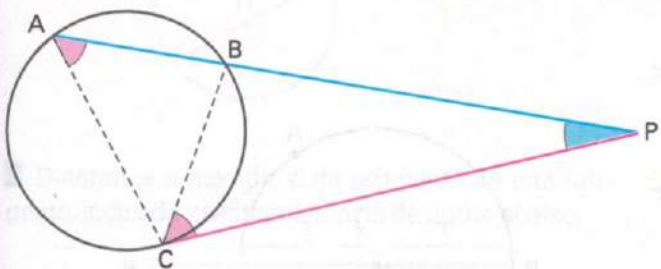
Na circunferência abaixo, temos uma secante e uma tangente traçadas de um mesmo ponto externo P .

\overline{PA} é um segmento de reta secante e \overline{PB} é a parte externa desse segmento.

\overline{PC} é um segmento de reta tangente.



Entre esses três segmentos que acabamos de destacar, pode-se escrever uma relação métrica, como veremos a seguir.



Considerando os triângulos PAC e PCB, temos:

✓ \hat{P} é ângulo comum

✓ $\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos no mesmo arco)

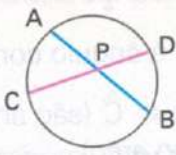
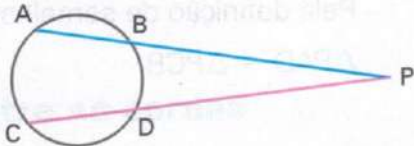
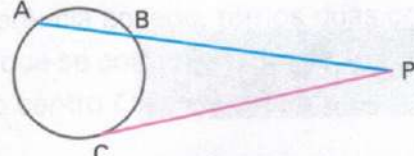
Pela definição de semelhança, temos:

$$\triangle PAC \sim \triangle PCB$$

Como consequência, podemos escrever:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB} \quad \text{ou} \quad PC^2 = PA \cdot PB$$

Podemos resumir as três relações no seguinte quadro:

	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
	$PC^2 = PA \cdot PB$

Observe os exemplos:

1. Na circunferência seguinte, determinar a medida x do segmento \overline{PD} , sabendo que $PA = 7$ cm, $PB = 4$ cm e $PC = 2$ cm.

Pela relação das cordas, temos:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

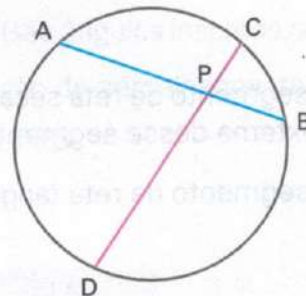
Pelos dados do problema, podemos escrever:

$$7 \cdot 4 = 2 \cdot x \quad x = \frac{28}{2}$$

$$28 = 2x \quad x = 14$$

$$2x = 28$$

Logo, a medida do segmento \overline{PD} é 14 cm.



2. Calcular o comprimento r do raio da circunferência seguinte, sendo dados $PA = 20$ cm e $PC = 10$ cm.

Pela relação entre secante e tangente, temos:

$$PA^2 = PB \cdot PC$$

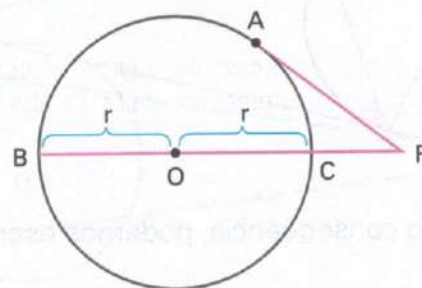
De acordo com os dados do problema, podemos escrever:

$$20^2 = (10 + 2r)10 \quad 20r = 300$$

$$400 = 100 + 20r \quad r = \frac{300}{20}$$

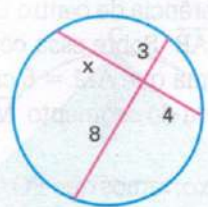
$$20r = 400 - 100 \quad r = 15$$

Logo, o comprimento do raio é 15 cm.

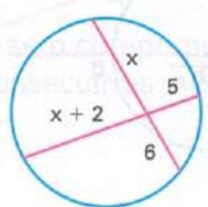


FIXAÇÃO

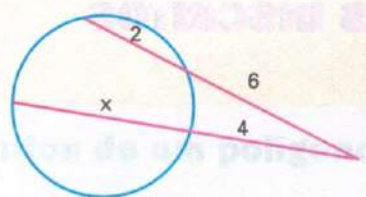
1 Determine a medida x indicada na figura abaixo.



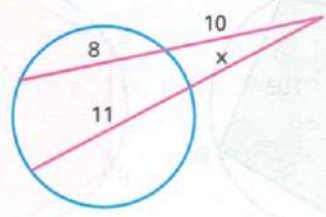
2 Na circunferência da figura abaixo, determine a medida x indicada.



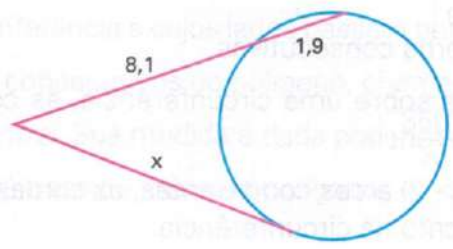
3 Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



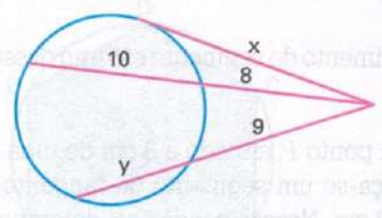
4 Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



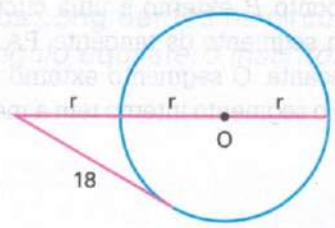
5 Determine a medida x , do segmento de reta tangente, indicada na circunferência da figura abaixo.



6 Na figura seguinte, determine as medidas indicadas.

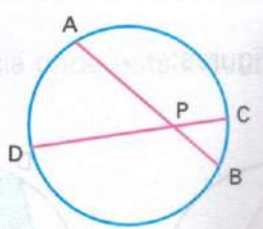


7 Determine a medida r do raio da circunferência da figura abaixo.



8 Na figura abaixo, $PA = 3x$, $PB = x + 1$, $PC = PD = 4x - 1$. Nessas condições, não importando a unidade, determine:

- a) a medida x
- b) o comprimento de cada uma das cordas



9 O raio de uma circunferência é 6 cm. De um ponto P externo, traçamos uma tangente e uma secante a essa circunferência. A secante, que encontra a circunferência nos pontos A e B , passa pelo centro e o seu segmento externo mede 8 cm. Determine a medida do segmento da tangente que foi traçada do ponto P .

10 Uma corda \overline{AB} , que mede 18 cm, corta a corda \overline{CD} de tal forma que os segmentos determinados sobre \overline{CD} medem x e $2x$ cm, respectivamente. Se a corda \overline{CD} mede 12 cm, calcule as medidas dos segmentos determinados sobre a corda \overline{AB} .

11 Por um ponto P , distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda \overline{AB} , que mede 8 cm. Se o comprimento do raio da circunferência é 12 cm, determine:

- o comprimento do segmento de secante traçada do ponto P
- o comprimento do segmento externo dessa secante

12 De um ponto P , situado a 3 cm de uma circunferência, traça-se um segmento de tangente \overline{PC} cuja medida é 9 cm. Nessas condições, determine o comprimento do raio dessa circunferência.

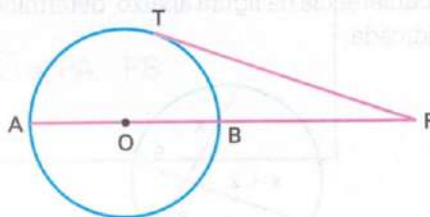
13 De um ponto P , externo a uma circunferência, traçamos um segmento de tangente \overline{PA} e um segmento de secante. O segmento externo da secante mede 4 cm e o segmento interno tem a mesma medi-

da que o segmento \overline{PA} . Nessas condições, fazendo $\sqrt{5} = 2,23$, determine:

- a medida do segmento \overline{PA}
- o comprimento do segmento de secante

14 Numa circunferência de centro O e raio 6 cm, traça-se uma corda \overline{AB} . Sobre essa corda, toma-se um ponto M de tal forma que $AM = 5$ cm e $OM = 4$ cm. Determine a medida do segmento \overline{MB} .

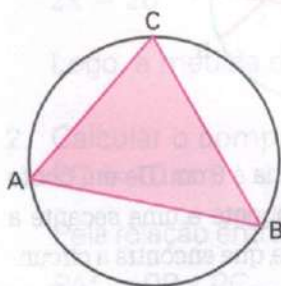
15 Na figura abaixo, temos que $PO = 20$ cm e o comprimento do raio da circunferência é 16 cm. Nessas condições, determine a medida do segmento \overline{PT} .



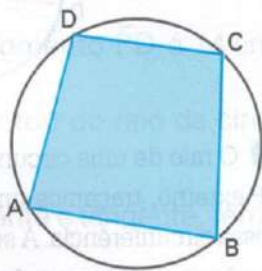
52

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NA CIRCUNFERÊNCIA

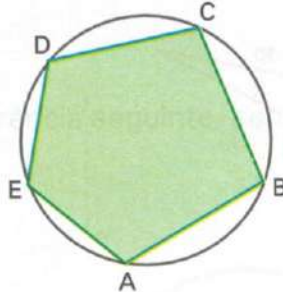
Veja as figuras:



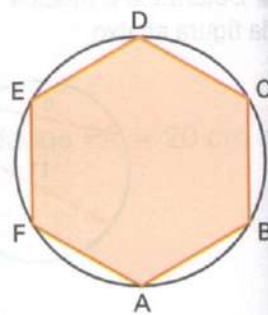
Triângulo inscrito na circunferência



Quadrilátero inscrito na circunferência



Pentágono inscrito na circunferência



Hexágono inscrito na circunferência

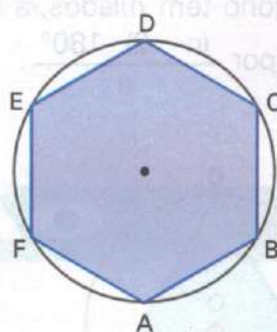
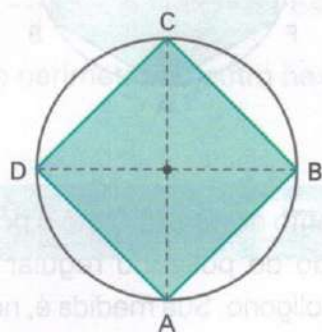
Chamaremos as cordas \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} etc. de corda consecutivas.

Quando consideramos 3, 4, 5, 6, ... pontos distintos sobre uma circunferência, as cordas consecutivas determinam *polígonos inscritos* na circunferência.

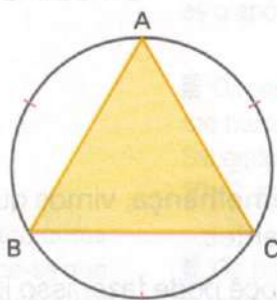
Quando dividimos uma circunferência em n (com $n > 2$) arcos congruentes, as cordas consecutivas delimitam um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência.

Quando traçamos dois diâmetros perpendiculares, dividimos a circunferência em 4 arcos congruentes; as cordas consecutivas \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} delimitam um *quadrado inscrito* (figura verde).

Tomando-se o comprimento do raio, marcamos 6 arcos congruentes na circunferência; as 6 cordas consecutivas delimitam um *hexágono regular inscrito* (figura lilás).

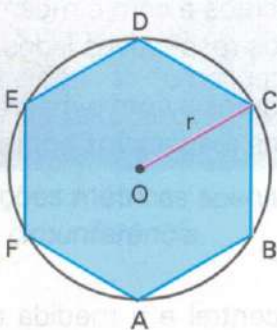


Tomando-se o comprimento do raio, marcamos 6 arcos congruentes na circunferência; as 3 cordas consecutivas \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} delimitam um *triângulo equilátero inscrito*.

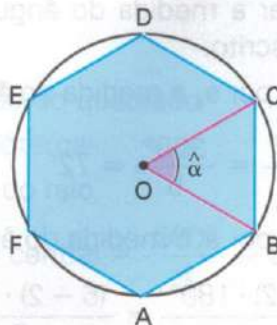


Elementos de um polígono regular inscrito

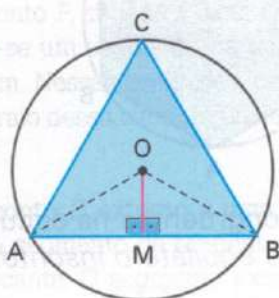
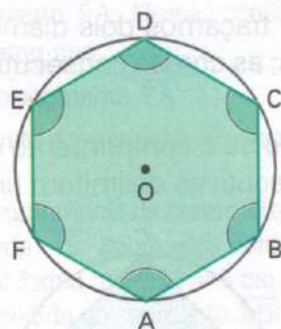
Na figura abaixo, o raio de comprimento r da circunferência onde está inscrito o polígono regular é também chamado *raio do polígono regular*.



O ângulo $\hat{\alpha}$, cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono, chama-se *ângulo central*. Sua medida é dada por $\frac{360^\circ}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.



Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados *ângulos internos*. Todos os ângulos internos são congruentes e, se o polígono tem n lados, a medida de cada um é dada por $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.



O segmento do centro O até o ponto médio M de um lado do polígono regular chama-se *apótema* do polígono. Sua medida é, normalmente, representada por a . Como o triângulo AOB é isósceles, o apótema \overline{OM} representa a altura e a mediana relativas ao lado \overline{AB} .

Propriedades

Quando estudamos a Unidade **Semelhança**, vimos que dois polígonos regulares que têm o mesmo número de lados são semelhantes.

Assim, podemos demonstrar (e você pode fazer isso junto com seu professor) as seguintes propriedades:

- 1ª Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos raios.
- 2ª Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos lados.
- 3ª Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos apótemas.

Vejamos, agora, alguns exemplos:

1. Determinar a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de um pentágono regular inscrito.

Indicando por a_c a medida do ângulo central, temos:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Indicando por a_i a medida do ângulo interno, temos:

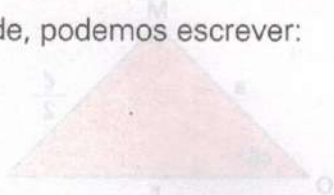
$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

2. Dois hexágonos regulares estão inscritos em circunferências de raios 14 cm e 21 cm. Se o perímetro do hexágono inscrito na menor delas é 84 cm, determinar o perímetro do outro hexágono.

Indicando o perímetro desconhecido por x e aplicando a propriedade, podemos escrever:

$$\frac{14}{21} = \frac{84}{x} \rightarrow 14x = 1764 \rightarrow x = \frac{1764}{14} \rightarrow x = 126$$

Logo, o perímetro do outro hexágono é 126 cm.



FIXAÇÃO

1. Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos:

- triângulo equilátero
- quadrado
- hexágono regular
- octógono regular

2. O perímetro de um polígono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede x é 60 cm. Sabe-se que outro polígono regular com o mesmo número de lados está inscrito numa circunferência de raio 25 cm e tem 150 cm de perímetro. Quanto mede o comprimento x do raio da primeira circunferência?

3. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados medem 48 cm e 60 cm, respectivamente. Quanto mede o apótema do segundo, se o apótema do primeiro mede $4\sqrt{3}$ cm?

4. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados estão entre si como 2 está para 5. Sabendo que a medida do lado do segundo polígono é $20\sqrt{2}$ cm, calcule a medida do lado do primeiro polígono.

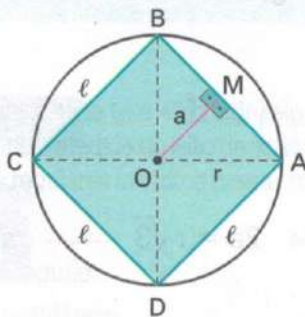
5. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são, respectivamente, 28,28 cm e 39,592 cm. Quanto mede o raio e o apótema do primeiro se o raio e o apótema do segundo medem, respectivamente, 7 cm e 3,5 cm?

Relações métricas

Quando consideramos a medida ℓ do lado do polígono regular, a medida a do apótema do mesmo polígono e o comprimento r do raio da circunferência onde o polígono está inscrito, podemos estabelecer relações métricas entre essas medidas.

Estudaremos, porém, essas relações métricas apenas no *quadrado*, no *hexágono regular* e no *triângulo equilátero inscrito numa circunferência*.

Quadrado inscrito



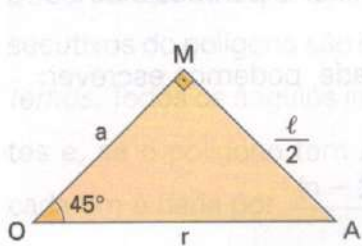
ℓ = medida do lado do quadrado

a = medida do apótema

r = comprimento do raio

$$\text{medida do ângulo central} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

Considerando o triângulo OMA da figura, temos:



$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{r} \longrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{l}{2r} \longrightarrow \sqrt{2} = \frac{l}{r} \longrightarrow \ell = r\sqrt{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{a}{r} \longrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{a}{r} \longrightarrow 2a = r\sqrt{2} \longrightarrow a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo: Um quadrado está inscrito numa circunferência de raio 24 cm. Nessas condições, vamos determinar:

a) a medida do lado do quadrado:

$$\ell = r\sqrt{2} \longrightarrow \ell = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) a medida do apótema do quadrado:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = \frac{24\sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

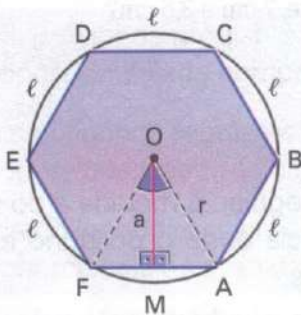
c) o perímetro do quadrado:

$$\text{perímetro} = 4\ell \longrightarrow \text{perímetro} = 4 \cdot (24\sqrt{2}) \longrightarrow \text{perímetro} = 96\sqrt{2} \text{ cm}$$

d) a área do quadrado:

$$S = \ell^2 \longrightarrow S = (24\sqrt{2})^2 \longrightarrow S = 1152 \text{ cm}^2$$

Hexágono regular inscrito



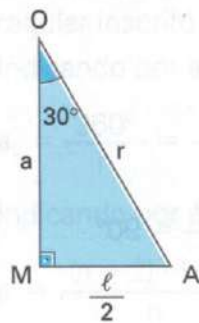
ℓ = medida do lado do hexágono

a = medida do apótema do hexágono

r = comprimento do raio da circunferência

$$\text{medida do ângulo central} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Se considerarmos o triângulo retângulo OMA da figura, teremos:



$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{r} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{l}{2r} \longrightarrow 1 = \frac{l}{r} \longrightarrow \ell = r$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{a}{r} \longrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a}{r} \longrightarrow 2a = r\sqrt{3} \longrightarrow a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo: Vamos determinar a medida do lado e a medida do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 30 cm.

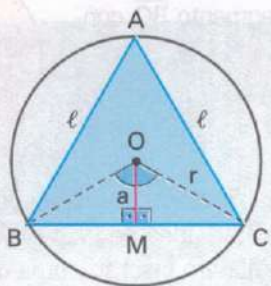
a) Calculando a medida do lado:

$$\ell = r \longrightarrow \ell = 30 \text{ cm}$$

b) Calculando a medida do apótema:

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \longrightarrow a = \frac{30\sqrt{3}}{2} \longrightarrow a = 15\sqrt{3} \text{ cm}$$

Triângulo eqüilátero inscrito



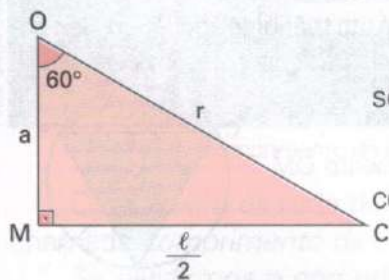
ℓ = medida do lado do triângulo

a = medida do apótema do triângulo

r = comprimento do raio

$$\text{ângulo central} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Considerando o triângulo OMC da figura, temos:



$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\ell/2}{r} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell}{2r} \longrightarrow \sqrt{3} = \frac{\ell}{r} \longrightarrow \ell = r\sqrt{3}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{a}{r} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{r} \longrightarrow 2a = r \longrightarrow a = \frac{r}{2}$$

Um triângulo eqüilátero está inscrito numa circunferência de raio $60\sqrt{3}$ cm. Vamos determinar:

a) a medida do lado do triângulo:

$$\ell = r\sqrt{3} \longrightarrow \ell = 60\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \longrightarrow \ell = 180 \text{ cm}$$

b) a medida do apótema do triângulo:

$$a = \frac{r}{2} \longrightarrow a = \frac{60\sqrt{3}}{2} \longrightarrow a = 30\sqrt{3} \text{ cm}$$

FIXAÇÃO

1 Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos nessa circunferência:

- quadrado
- hexágono regular
- triângulo eqüilátero

2 Usando $\sqrt{2} = 1,41$ e $\sqrt{3} = 1,73$, determine a medida do apótema de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos numa circunferência que tem 15 cm de raio:

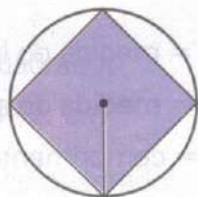
- quadrado
- hexágono regular
- triângulo eqüilátero

3 Quais são o perímetro e a área de um quadrado inscrito numa circunferência que tem 32 cm de raio?

4 Um quadrado cujo lado mede 16 cm está inscrito numa circunferência. Determine o comprimento r do raio dessa circunferência.

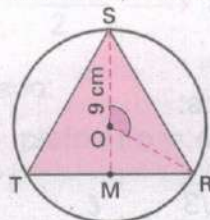
5 O apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 6,25 cm. Determine o valor de r .

6 Qual é a área do polígono regular inscrito na circunferência, sabendo-se que o raio dessa circunferência mede 20 cm?



7 Observando o triângulo equilátero inscrito, conforme a figura, determine:

- a medida do ângulo $\widehat{R\hat{O}S}$
- a medida do segmento \overline{RS}
- a medida do segmento \overline{OM}
- a medida do segmento \overline{SM}



8 Um quadrado, cujo lado mede $20\sqrt{2}$ cm, está inscrito em uma circunferência de raio r . Qual é a medida do apótema desse quadrado?

9 Sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 15 cm, determine:

- o comprimento do raio
- a medida do lado do triângulo, fazendo $\sqrt{3} = 1,73$

10 Em uma circunferência de raio r estão inscritos um quadrado e um hexágono regular. Considerando que o lado do hexágono mede 50 cm e fazendo $\sqrt{2} = 1,41$, determine a medida do lado do quadrado.

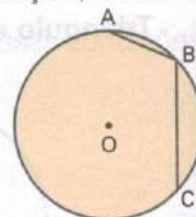
11 Determine a razão entre o lado de um hexágono regular e o lado de um triângulo equilátero inscritos numa mesma circunferência de raio r .

12 O raio de uma circunferência corresponde, em centímetros, à raiz positiva da equação $x^2 - 3x - 40 = 0$. Nessas condições, determine a medida do lado e do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.

13 A medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $2\sqrt{3}$ cm e 2 cm. Nessas condições, determine o raio da circunferência onde está inscrito o quadrado.

14 Na figura a seguir, o raio da circunferência mede 3 cm, o segmento \overline{AB} representa o lado de um hexágono regular inscrito e o segmento \overline{BC} representa o lado de um quadrado inscrito. Nessas condições, determine:

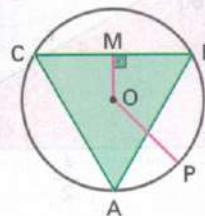
- a medida do segmento \overline{AB}
- a medida do segmento \overline{BC} , considerando $\sqrt{2} \cong 1,4$
- a distância que se percorre indo de A até C, passando por B



15 Num triângulo retângulo, as medidas dos catetos correspondem às medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 10 cm. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa desse triângulo retângulo.

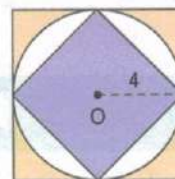
16 A figura abaixo é um triângulo equilátero. Seu perímetro é de 27 cm. Nessas condições, calcule:

- a medida do segmento \overline{OP}
- a medida do segmento \overline{OM}

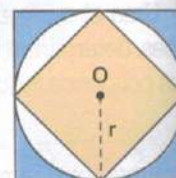


17 A figura nos mostra um quadrado inscrito e um quadrado circunscrito a uma circunferência de raio 4 cm. Nessas condições, determine:

- a medida do lado do quadrado inscrito
- a medida do lado do quadrado circunscrito
- a razão entre a medida do lado do quadrado inscrito e a medida do lado do quadrado circunscrito



18 Seja x a medida do lado do quadrado circunscrito e seja y a medida do lado do quadrado inscrito numa circunferência de raio r (veja a figura). Nessas condições, determine o valor de $\frac{x}{y}$.



CALCULANDO O COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Vamos supor que você tenha um aro da roda de uma bicicleta e que o raio desse aro tenha um comprimento r .

Consideremos que seja possível adaptar, perfeitamente, sobre esse aro um barbante qualquer. Cortando esse barbante e esticando-o, obteremos o comprimento desse aro.



comprimento do aro



comprimento da circunferência (C)

Como o aro da roda de uma bicicleta lembra uma circunferência, a medida assim obtida é chamada *comprimento da circunferência*, e é representada por C .

Se dividirmos o comprimento C da circunferência pelo comprimento $2r$ do seu diâmetro, encontraremos o número irracional π (isso você já aprendeu na 7ª série e ocorre sempre, qualquer que seja a circunferência).

$$\frac{C}{2r} = \pi \longrightarrow C = 2r \cdot \pi \longrightarrow C = 2\pi r$$

Essa fórmula matemática nos permite calcular o comprimento de qualquer circunferência, conhecido o comprimento r do seu raio.

Nos problemas que vamos resolver a seguir, consideraremos $\pi = 3,14$ para os nossos cálculos.

1. Determinar o comprimento de uma circunferência que tem 9 cm de raio.

$$C = 2\pi r \longrightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 9 \Rightarrow C = 56,52 \text{ cm}$$

Logo, o comprimento da circunferência é 56,52 cm.

2. Qual é o comprimento r do raio de uma circunferência que tem 18,84 cm de comprimento?

$$C = 2\pi r$$

$$18,84 = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$

$$6,28r = 18,84$$

$$r = \frac{18,84}{6,28}$$

$$r = 3$$

Logo, o raio da circunferência é de 3 cm.

3. Qual é o comprimento x de um arco de 60° numa circunferência que tem 21 cm de raio? Sabemos que a medida completa da circunferência, em graus, é 360. Portanto, para resolver esse problema vamos usar uma regra de três simples e direta:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{—————} & 2\pi r \\ 60^\circ & \text{—————} & x \end{array}$$

Daí:

$$\frac{360^\circ}{60^\circ} = \frac{2\pi r}{x} \quad 6x = 131,88$$

$$\frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 21}{x} \quad x = \frac{131,88}{6}$$

$$\frac{6}{1} = \frac{131,88}{x} \quad x = 21,98$$

Logo, o comprimento do arco pedido é 21,98 cm.

Explorando Geometria

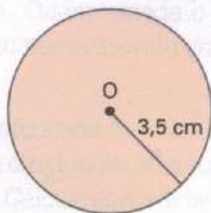
Todo domingo Carla passeia pelo parque com sua bicicleta.



1. Sabendo que 1 polegada equivale, aproximadamente, a 2,54 cm, quantos centímetros tem uma volta da roda da bicicleta de Carla?
2. No último domingo, Carla andou 4 km com sua bicicleta. Quantas voltas deu cada roda?
3. De casa ao clube, ida e volta, cada roda dá 2 000 voltas. A que distância aproximada da casa de Carla fica o clube?

FIXAÇÃO

- 1** Determine o comprimento da circunferência da figura.



- 2** Uma circunferência tem 10,5 cm de diâmetro. Nessas condições, qual é o comprimento dessa circunferência?

- 3** A medida do raio de uma circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 9 cm e 12 cm. Determine o comprimento da circunferência.

- 4** O comprimento de uma circunferência é 50,24 cm. Nessas condições, determine:

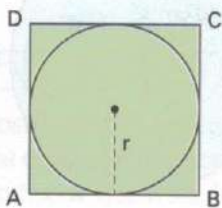
- o comprimento do raio dessa circunferência
- as medidas dos lados de um quadrado, de um hexágono regular e de um triângulo equilátero inscritos nessa circunferência.

- 5** A medida do raio de uma circunferência, em centímetro, corresponde ao valor da raiz positiva da equação $x^2 - 10x - 24 = 0$. Calcule, então, o comprimento dessa circunferência.

- 6** Um triângulo equilátero está inscrito numa circunferência de raio r . O lado do triângulo equilátero mede $20\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, calcule:

- o comprimento r do raio da circunferência
- o comprimento da circunferência.

- 7** O quadrado ABCD da figura tem 80 cm de lado. Qual é o comprimento da circunferência inscrita nesse quadrado?



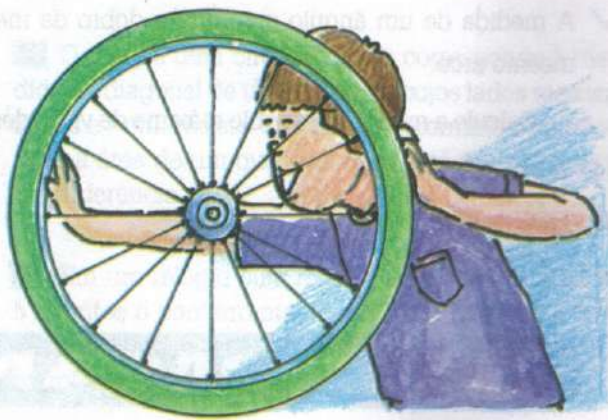
- 8** A medida r do raio da circunferência inscrita em um triângulo equilátero corresponde a $\frac{1}{3}$ da medida da altura desse triângulo. Sabendo que o triângulo equilátero tem $4\sqrt{3}$ cm de lado, determine o comprimento da circunferência inscrita nesse triângulo.

- 9** Uma pista circular tem 25 m de raio. Quantos metros percorre uma pessoa que dá 20 voltas em torno dessa pista?

- 10** Ao percorrer uma distância de 6 280 m, uma roda dá 2 000 voltas completas. Qual é o raio dessa roda?

- 11** A roda de uma bicicleta tem 0,90 m de diâmetro. Nessas condições:

- Qual é o comprimento da circunferência dessa roda?
- Quantas voltas completas a roda dá, num percurso de 9 891 m?



- 12** Se uma pessoa der 10 voltas completas em torno de um jardim circular, ela percorrerá 2 198 m. Qual é o diâmetro desse jardim?

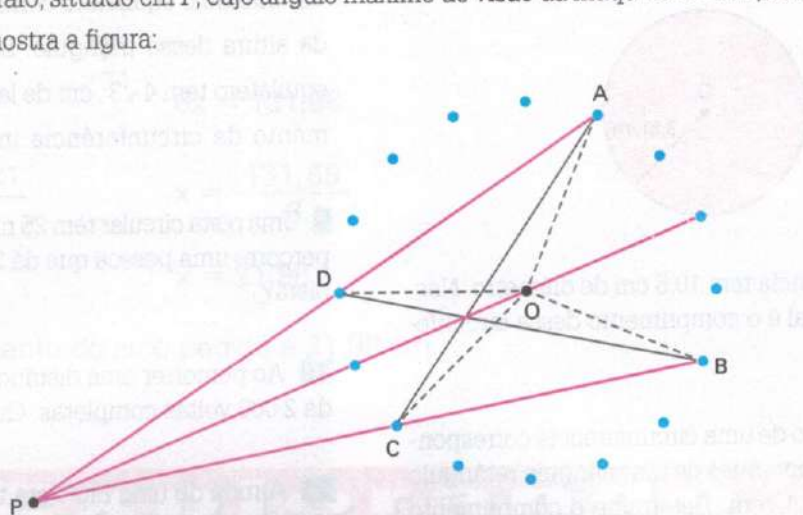
- 13** Qual é o comprimento x de um arco de 120° , numa circunferência que tem 30 cm de raio?

- 14** Um arco de 30° tem 6,28 cm de comprimento, numa circunferência de raio r . Determine o valor de r .

- 15** Qual é a medida de uma correia acoplada a duas rodas iguais de 10 cm de raio e cujos centros estão a 50 cm de distância um do outro?

Explorando Geometria

Em uma apresentação de ginástica, 16 alunos posicionam-se igualmente espaçados na circunferência central da quadra. Um fotógrafo, situado em P , cujo ângulo máximo de visão da máquina é $\hat{A}PB$, só consegue fotografar 8 alunos, conforme mostra a figura:



Vale lembrar que:

- ✓ Dois ângulos inscritos que determinam o mesmo arco são **congruentes**.
- ✓ A medida de um ângulo central é o dobro da medida de um ângulo inscrito quando eles determinam um mesmo arco.

Calcule a medida do ângulo máximo de visão dessa máquina ($\hat{A}PB$). Para isso, obtenha antes as medidas de:

- a) $\hat{A}OB$, $\hat{A}DB$ e $\hat{P}DB$
- b) $\hat{D}OC$ e $\hat{D}BC$

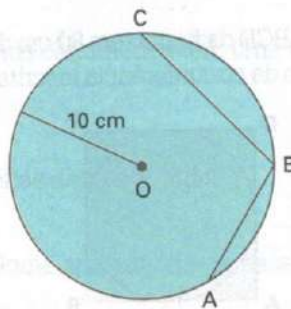
RETOMANDO o que aprendeu

1 Duas cordas, \overline{AB} e \overline{CD} , de uma circunferência cortam-se em um ponto P , de tal forma que $PA = 9$ cm e $PB = 4$ cm. Sabendo que a corda \overline{CD} mede 15 cm, calcule as medidas dos segmentos que o ponto P determina sobre essa corda.

2 Sabe-se que a medida de um meridiano terrestre é de 40 000 km, aproximadamente. Quantos quilômetros, aproximadamente, mede o raio da Terra?

3 Na figura a seguir, o segmento \overline{AB} corresponde ao lado de um hexágono regular enquanto o segmento \overline{BC}

corresponde ao lado de um quadrado. Considerando-se $\sqrt{2} = 1,41$, qual é a distância que se percorre indo de A até C , passando por B ?

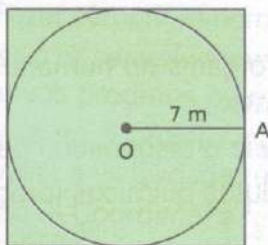


4 O mostrador de um relógio é circular e o ponteiro maior mede 1,5 cm. Qual é a distância percorrida pela extremidade desse ponteiro, das 12 horas até as 17 horas?

5 O lado de um quadrado inscrito em uma circunferência é de 6 cm. Quanto mede o lado do triângulo equilátero inscrito nessa mesma circunferência?

6 Em uma circunferência de raio 11 cm, um diâmetro divide uma corda em dois segmentos de 6 cm e 12 cm, respectivamente. Calcule as medidas dos dois segmentos em que o diâmetro fica dividido pela corda.

7 Duas pessoas partem do mesmo ponto A , conforme mostra a figura. Uma delas percorre o contorno do quadrado e a outra percorre o contorno da circunferência, voltando ambas ao ponto A . Qual delas vai percorrer uma distância maior? Quantos metros a mais?



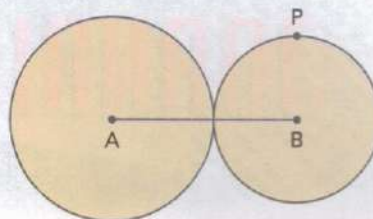
8 Quando um ponto está situado a 8 cm de uma circunferência de raio 5 cm, quanto vai medir o segmento da tangente compreendido entre esse ponto e o ponto de tangência?

9 O comprimento do raio de uma circunferência inscrita em um triângulo equilátero corresponde a $\frac{1}{3}$ da medida da altura desse triângulo. O triângulo equilátero tem $6\sqrt{3}$ cm de lado. Nessas condições, determine:

- a medida r do raio da circunferência inscrita nesse triângulo
- o comprimento dessa circunferência
- o comprimento de um arco de 36° nessa circunferência

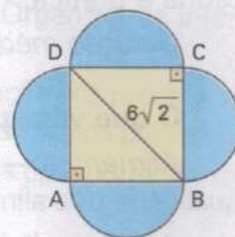
10 Duas circunferências, cujos raios são expressos por $(2x + 1)m$ e $(x - 3)m$, são tangentes externamente, conforme nos mostra a figura seguinte. Sabe-se que a distância entre os centros A e B das circunferências é 19 m. Nessas condições, quem sai do ponto P , percor-

re o contorno das duas circunferências e retorna ao ponto P , quantos metros vai percorrer?



11 De um ponto P , exterior a uma circunferência, traçamos uma secante e uma tangente a essa circunferência. Sabe-se que a parte interna e a parte externa da secante têm a mesma medida e que o segmento de tangente mede $8\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine o comprimento do segmento da secante traçado do ponto P .

12 Observando a figura, onde $ABCD$ é um quadrado, determine a distância percorrida por uma pessoa que sai do vértice A e percorre os contornos das semicircunferências, retomando ao ponto A (não importa a unidade de comprimento considerada).

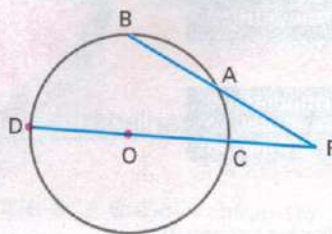


13 O raio de uma circunferência corresponde à medida da diagonal de um retângulo cujos lados medem 24 cm e 7 cm. Nessas condições, determine o perímetro e a área de um quadrado que está inscrito nessa circunferência.

14 Em um relógio cujo mostrador é circular, a cada 5 minutos o ponteiro maior percorre um arco de 30° . Se esse ponteiro tem 2 cm, quantos centímetros a sua extremidade vai percorrer em 15 minutos?

15 Na figura, os segmentos \overline{PA} , \overline{AB} e o raio da circunferência têm a mesma medida x . Sabendo que $PC = 2$ cm, determine:

- a medida do segmento x
- a medida do segmento \overline{PB}
- a medida do segmento \overline{PD}



JORNAIS & REVISTAS

Veja a seguir o que relata o *Guia Abril do Estudante-98*, sobre algumas profissões universitárias.

Farmácia e Bioquímica

Em algumas escolas, você pode escolher a habilitação em Farmácia ou Farmácia e Bioquímica já no vestibular. Em outras, no 2º ou 3º ano. Nos dois cursos, há equilíbrio entre teoria e prática.

Duração média: três anos para Farmácia e quatro anos para Farmácia e Bioquímica.

O que você pode fazer como farmacêutico

Alimentos — Analisar a ação de substâncias nutritivas no organismo humano. Controlar a qualidade dos alimentos industrializados ou feitos artesanalmente.

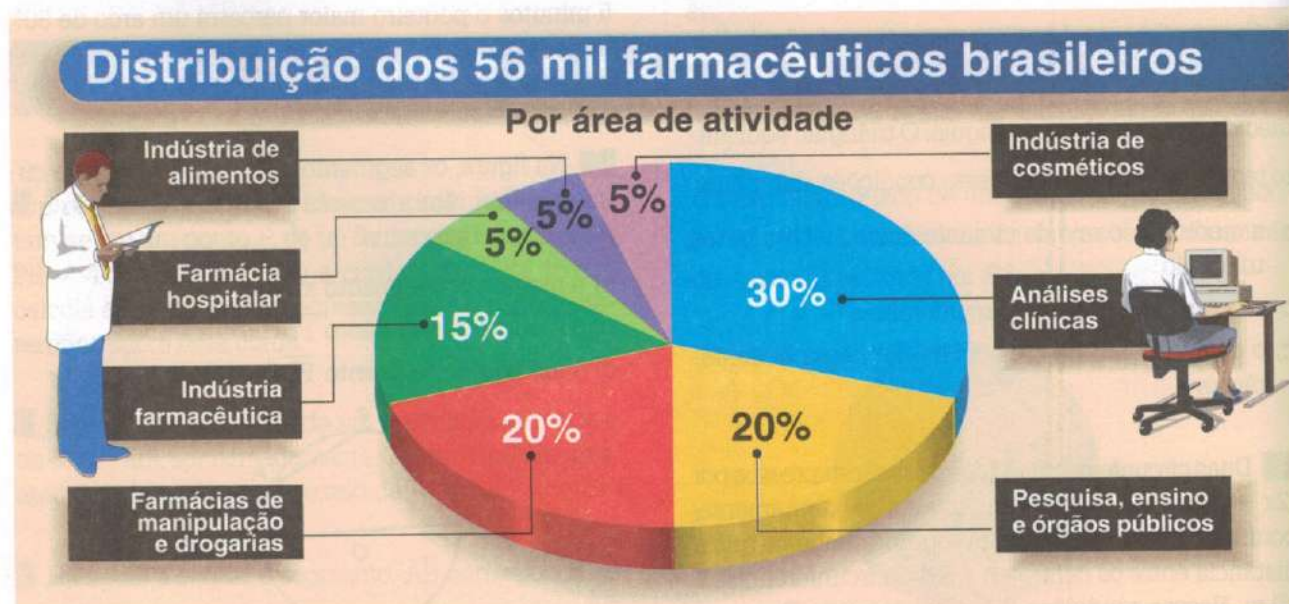
Análises clínicas — Desenvolver exames de laboratórios para o diagnóstico de doenças.

Análises toxicológicas — Verificar a contaminação por produtos químicos (drogas ou medicamentos) de alimentos, pessoas, animais, plantas e ambientes.

Farmácia — Preparar medicamentos conforme as prescrições de médicos, dentistas e veterinários. Controlar a distribuição no mercado e o prazo de validade dos remédios.

Farmácia industrial — Fabricar medicamentos, vacinas, cosméticos e produtos de higiene.

Podemos observar um gráfico circular que mostra a distribuição dos farmacêuticos brasileiros por área de atividade.



Fonte: Racine Qualificação e Assessoria S/C

A partir do gráfico, responda:

1. Quantos se dedicam à indústria farmacêutica?
2. Quantos trabalham em farmácias de manipulação e drogarias?
3. Qual a medida do ângulo central correspondente a Análises Clínicas?

Engenharia de Alimentos

A parte teórica chega a 70% do currículo e abrange Estatística, Física, Matemática e Química, além de Controle de Qualidade, Gerenciamento Industrial e Processamento de Dados. Nas aulas práticas, aprende-se a transformar matérias-primas e a armazenar e conservar produtos.

Duração média: cinco anos.

O que você pode fazer como engenheiro de alimentos

Controle de qualidade — Fiscalizar a industrialização de alimentos e garantir sua qualidade, desde a matéria-prima até o produto final.

Marketing e vendas — Fazer a ponte entre a empresa e o consumidor. Organizar as informações ao público e conquistar o mercado para o produto.

Normas e padronização — Atuar nos órgãos públicos de controle e fiscalização dos processos produtivos. Fazer cumprir as normas exigidas para o desenvolvimento e registro de novos produtos.

Pesquisa e desenvolvimento — Trabalhar com pesquisas, testes e ensaios de laboratório na criação de novos produtos ou melhoramento dos existentes.

Planejamento e projeto industrial — Definir equipamentos e instalações para uma nova indústria. Avaliar a viabilidade técnica e econômica do projeto.

Produção — Coordenar a fabricação, o acondicionamento, a conservação e a estocagem do produto, indicar técnicas adequadas para a transformação de matérias-primas.

Observe o gráfico com a distribuição de profissionais por área de atuação.



Fonte: Associação Brasileira de Engenheiros de Alimentos (Abea)

4. Qual a porcentagem total dos engenheiros de alimentos que trabalham em algum tipo de indústria?
5. Qual a medida do ângulo central do gráfico que corresponde aos engenheiros de alimentos que trabalham em indústrias de embalagens?

11

Estudando as áreas das figuras geométricas planas

A necessidade de determinar a medida da superfície (área) de uma figura geométrica plana vem dos tempos mais remotos.

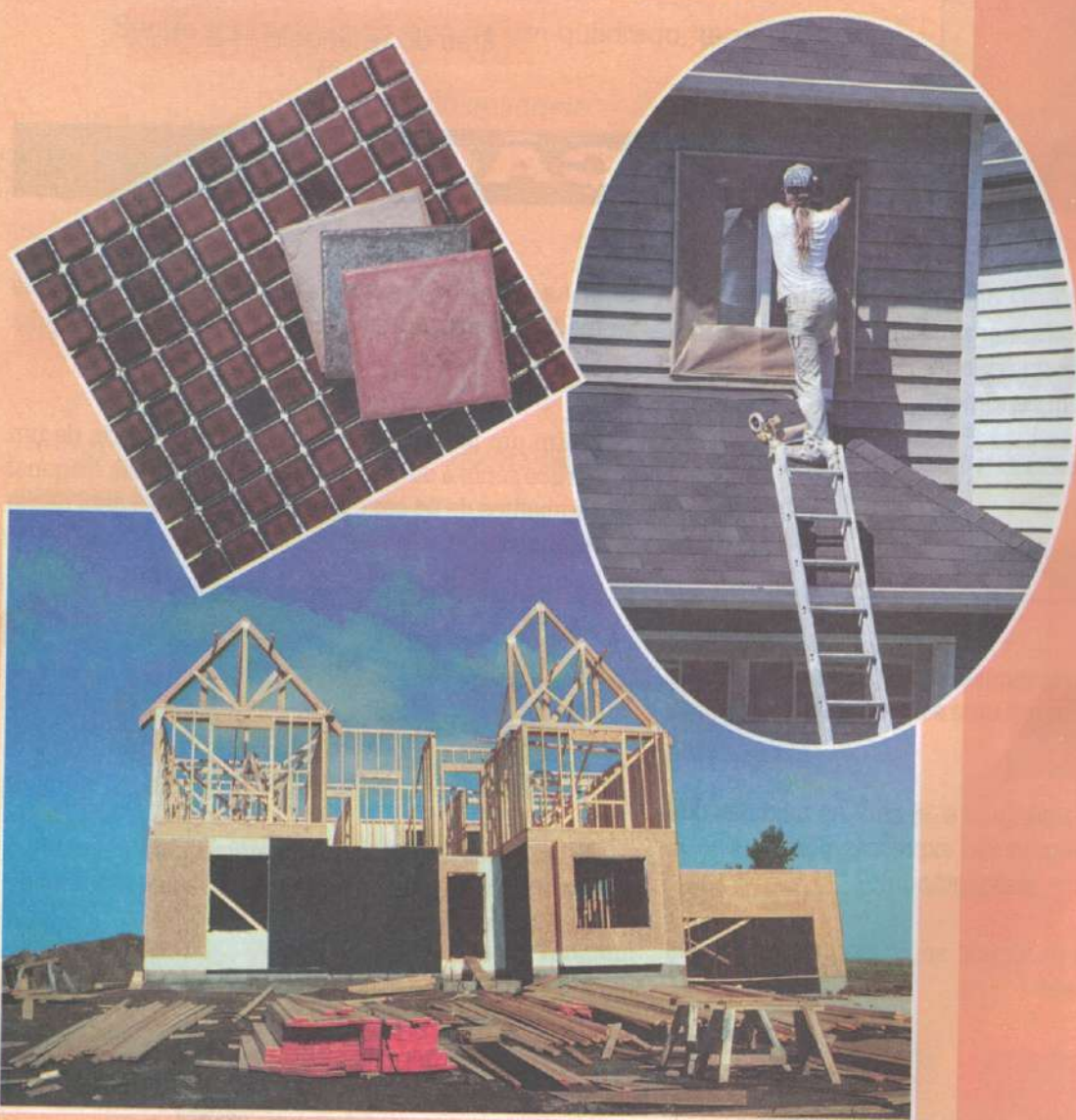
No Egito antigo, por exemplo, os agricultores das margens do rio Nilo pagavam ao faraó um imposto pelo uso da terra, imposto esse proporcional à superfície da terra cultivada.



Hoje, pagamos um imposto territorial urbano ou rural proporcional à área do terreno.

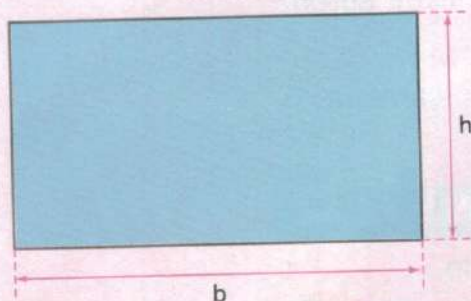
Necessitamos calcular a área de uma figura geométrica em algumas situações. Por exemplo:

1. Quando compramos um terreno e precisamos conhecer a área do terreno e o preço por metro quadrado na região.
2. Quando queremos pintar as paredes de uma casa, pois o preço é dado em função da área das paredes da casa a serem pintadas.
3. Quando queremos construir uma casa, pois o orçamento é feito em razão da área a ser construída.
4. Quando queremos colocar o piso de uma casa, em que é necessário calcular a área das superfícies a serem revestidas porque os pisos são vendidos por metro quadrado.



Daí a importância de estudar as figuras geométricas planas.

Área de um retângulo



Em um retângulo, é costume chamar um dos lados de *comprimento* (ou *base*) e o outro de *largura* (ou *altura*).

Indicamos por:

b = medida do comprimento ou da base

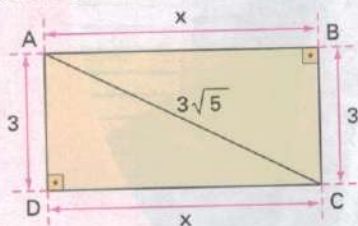
h = medida da largura ou da altura

Temos:

$$\text{área do retângulo} = b \cdot h$$

FIXAÇÃO

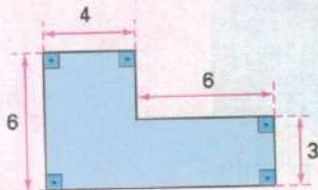
1 No retângulo ABCD da figura, use o teorema de Pitágoras para determinar a medida x indicada. A seguir, calcule a área do retângulo sabendo que as medidas são dadas em centímetro.



2 Quantos pisos retangulares de 20 cm por 35 cm são necessários para cobrir uma sala, também retangular, de 5,6 m por 8 m?

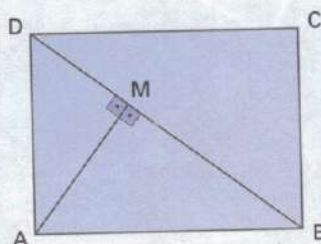
3 A área de um retângulo é 35 cm^2 . As medidas dos lados desse retângulo são expressas por x e $x - 2$. Qual é o perímetro desse retângulo?

4 Qual é a área da figura, se as medidas indicadas são dadas em metro?

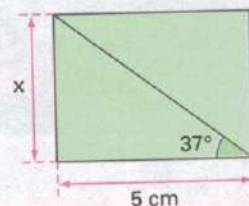


5 As raízes da equação $x^2 - 15x + 26 = 0$ são as medidas, em centímetros, dos lados de um retângulo. Determine a área desse retângulo.

6 Em um retângulo, a perpendicular traçada de um vértice sobre a diagonal determina sobre esta diagonal segmentos de 64 cm e 36 cm. Determine a área desse retângulo.



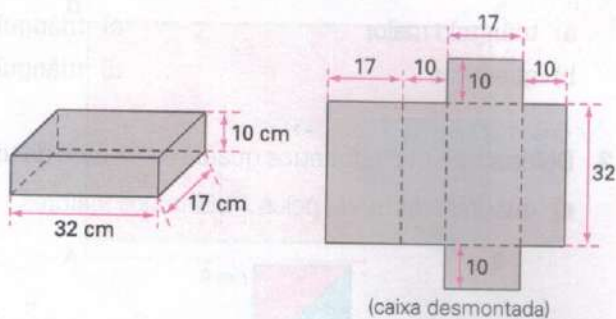
7 Utilize as razões trigonométricas para encontrar a medida x indicada no retângulo. A seguir, determine a área do retângulo.



8 Em um muro de 18,25 m de comprimento, deverão ser colocadas duas faixas de ladrilhos paralelas entre si em toda a sua extensão. A primeira faixa tem 1,25 m de altura e a segunda 0,75 m. Cada ladrilho ocupa uma área de $0,0625 \text{ m}^2$. Quantos ladrilhos serão colocados ao todo nesse muro?

9 Calcule quantas telhas francesas são necessárias para cobrir as duas partes de um telhado de uma casa, sabendo que as dimensões, em cada parte desse telhado, são 13,5 m e 5 m e que para cada $1,5 \text{ m}^2$ de telhado são usadas 30 telhas.

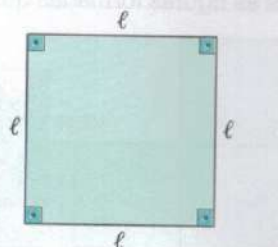
10 Quantos centímetros quadrados de papelão são gastos para fazer uma caixa de sapatos do tipo e tamanho indicados na figura seguinte?



Área de um quadrado

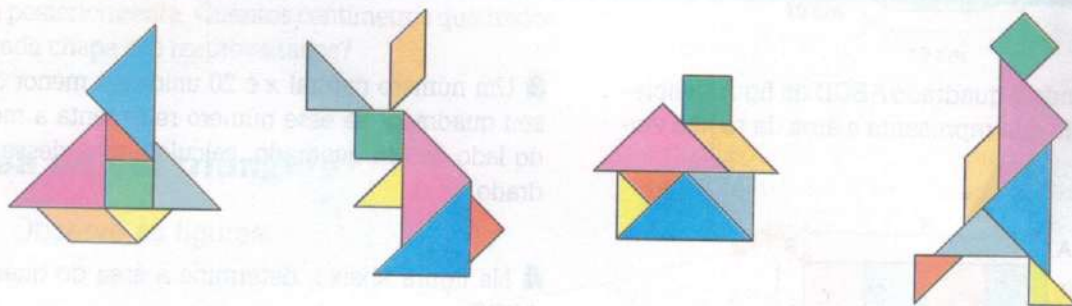
Se ℓ a medida do lado de um quadrado, temos:

$$\text{área do quadrado} = \ell^2$$

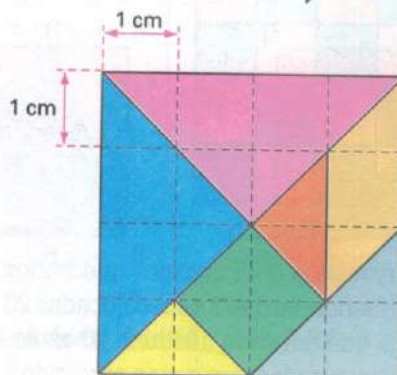



Explorando Geometria

O Tangram é o mais conhecido quebra-cabeça chinês. Com as 7 peças que o compõem é possível criar diferentes figuras. Veja:



Observe o esquema ao lado e construa um Tangram a partir de um quadriculado com 16 quadrados, cada um com 1 cm de lado.



1. No esquema do Tangram, cada  representa 1 cm^2 . Calcule, em centímetros quadrados, a área do:

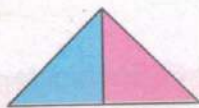
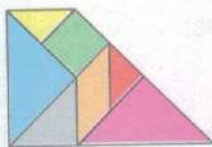
- a) triângulo maior c) triângulo médio e) paralelogramo
 b) quadrado d) triângulo menor

2. Determine, em centímetros quadrados, a área de um:

- a) quadrado formado pelos 2 triângulos maiores. b) triângulo formado pelos 2 triângulos menores e pelo triângulo médio.

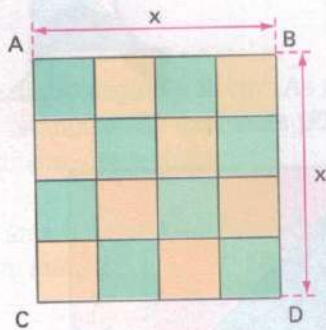


3. Quais as figuras formadas que têm a mesma área?



FIXAÇÃO

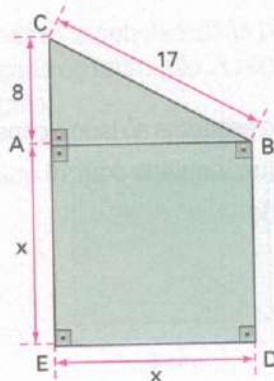
1 Considerando o quadrado ABCD da figura, escreva o polinômio que representa a área da região verde da figura.



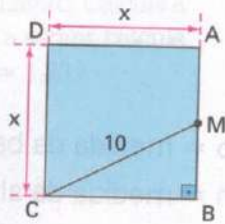
2 Uma parede foi revestida com azulejos quadrados de 15 cm de lado. Sabendo-se que foram colocadas 20 fileiras de azulejos e que em cada fileira há 40 azulejos, quantos metros quadrados tem a área revestida?

3 Um número natural x é 20 unidades menor que o seu quadrado. Se esse número representa a medida do lado de um quadrado, calcule a área desse quadrado.

4 Na figura abaixo, determine a área do quadrado ABDE.

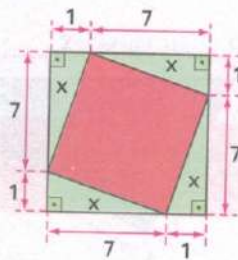


5 Na figura ao lado, ABCD é um quadrado e M é o ponto médio do lado AB. Nessas condições, determine a medida x do lado, o perímetro e a área do quadrado.

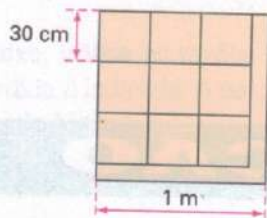


6 Um quadrado e um retângulo têm áreas iguais. Os lados do retângulo são expressos por dois números naturais consecutivos, enquanto o quadrado tem $2\sqrt{5}$ cm de lado. Qual é o perímetro do retângulo?

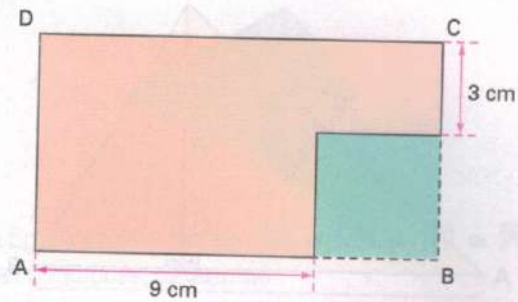
7 Na figura abaixo, aplique o teorema de Pitágoras para determinar a medida x do lado do quadrado vermelho. A seguir, determine a área desse quadrado, sabendo que as medidas indicadas são dadas em centímetros.



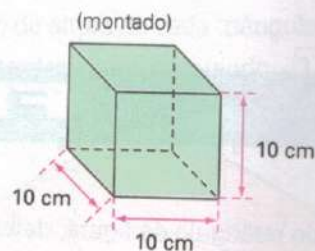
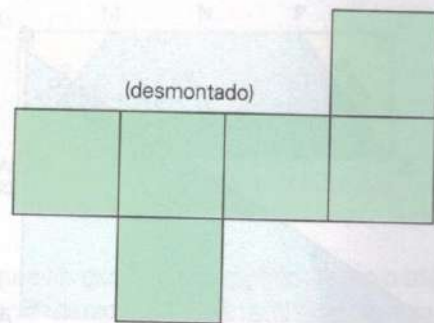
8 Uma metalúrgica utiliza chapas de aço quadradas de 1 m de lado para recortar quadrados de 30 cm de lado. Ao sair da máquina, da chapa original sobra uma parte que é reaproveitada posteriormente. Quantos centímetros quadrados de cada chapa são reaproveitados?



9 A área do retângulo ABCD da figura é 91 cm^2 . Qual é a área do quadrado verde na figura?

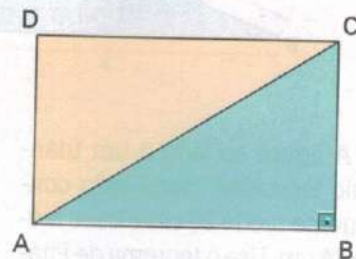
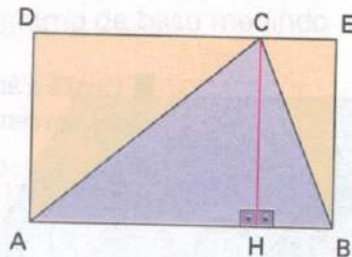
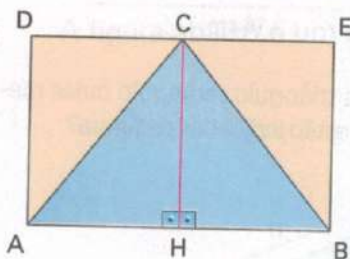


10 Quantos centímetros quadrados de cartolina são usados para montar um cubo de 10 cm de aresta?



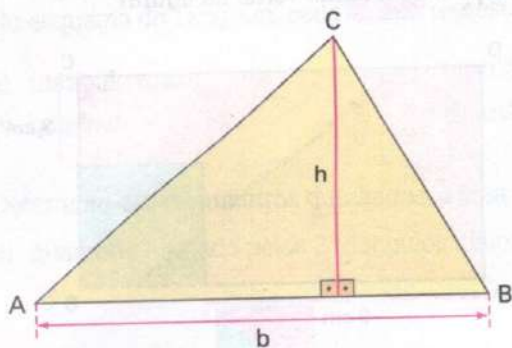
Área de um triângulo

Observe as figuras:



Você nota que, em qualquer uma das figuras, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do retângulo.

Assim, temos, de um modo geral:



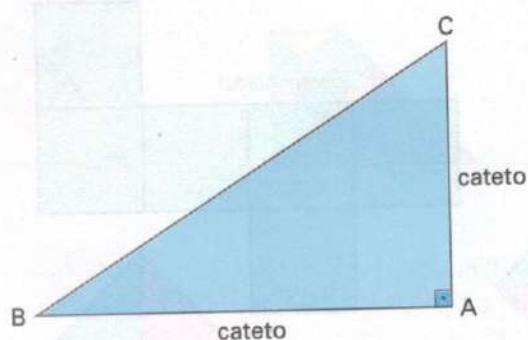
b = medida da base \overline{AB}

h = medida da altura relativa ao lado \overline{AB}

$$\text{área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Podemos considerar como base, no caso, qualquer lado do triângulo; a altura a ser considerada será a correspondente a esse lado.

No caso particular dos triângulos retângulos:



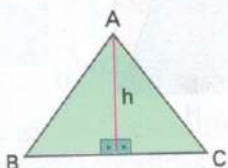
$$\text{área} = \frac{\text{produto das medidas dos catetos}}{2}$$

FIXAÇÃO

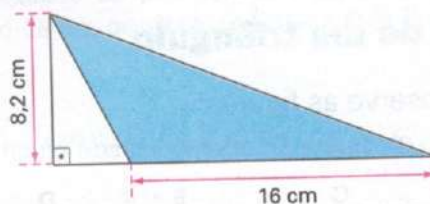
1 No triângulo retângulo da figura, determine a medida x do cateto \overline{AB} e calcule, a seguir, a área do triângulo.



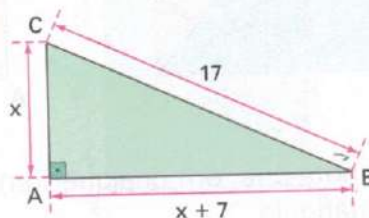
2 A figura ao lado é um triângulo isósceles. Cada lado congruente mede 20 cm e base mede 24 cm. Use o teorema de Pitágoras para calcular a medida h da altura relativa à base e calcule, a seguir, a área do triângulo ABC.



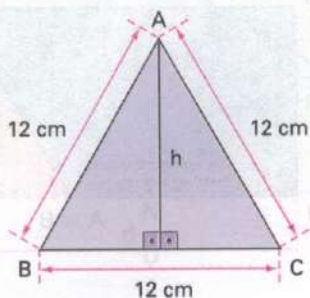
3 Um pedaço de cartolina tem a forma e as medidas indicadas na figura. Qual é a área desse pedaço de cartolina?



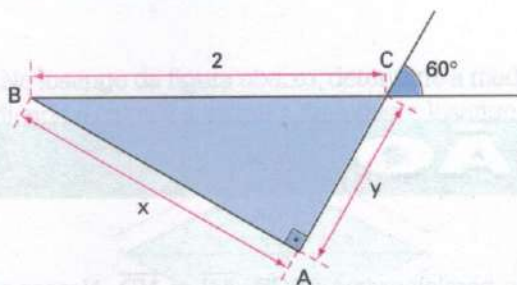
4 Qual é a área de um triângulo retângulo cujas medidas, em centímetros, estão indicadas na figura?



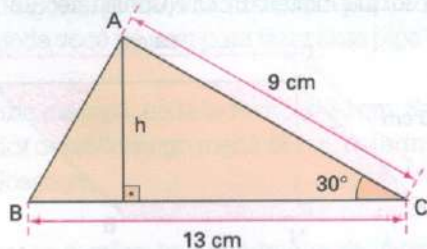
5 A figura abaixo é um triângulo equilátero. Calcule a medida h da altura desse triângulo e, a seguir, calcule a área do triângulo. (Considere: $\sqrt{3} = 1,73$.)



6 No triângulo retângulo a seguir, determine as medidas x e y dos catetos e, a seguir, a área do triângulo ABC (as medidas na figura são dadas em centímetros).

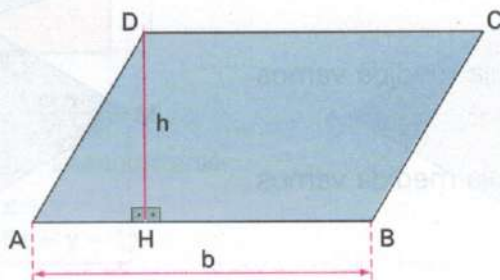


7 No triângulo da figura abaixo, utilize as razões trigonométricas e calcule a medida h indicada. A seguir, determine a área do triângulo ABC.

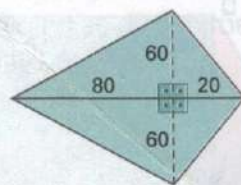


Área de um paralelogramo

A figura abaixo é um paralelogramo de base medindo b e altura medindo h .

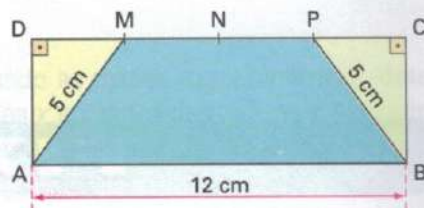


8 Um quadrilátero de zinco foi recortado de acordo com a figura e as medidas indicadas abaixo. Se essas medidas estão em centímetros, qual é a área desse quadrilátero?



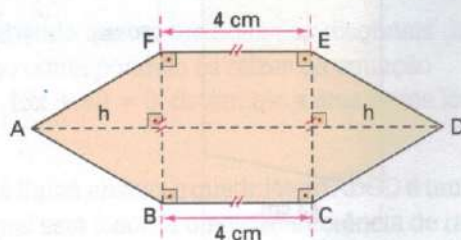
9 Na figura abaixo, temos $\overline{DM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PC}$. Nessas condições, determine:

- a medida do segmento \overline{AD}
- a área do triângulo ADM
- a área do retângulo ABCD
- a área do quadrilátero ABPM

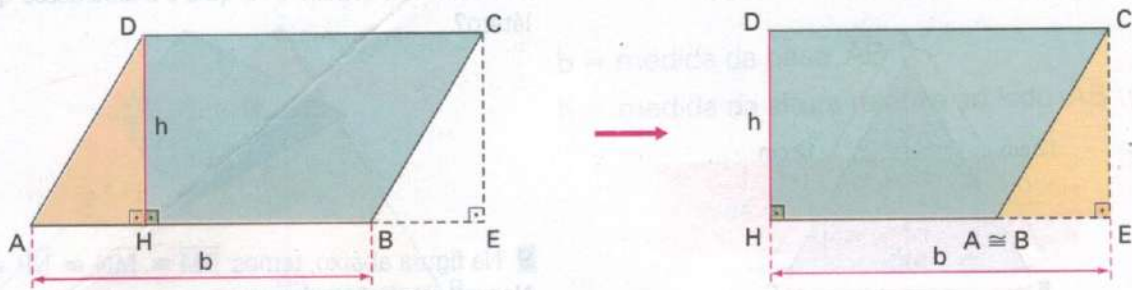


10 A figura abaixo é um hexágono. Tanto o triângulo ABF como o triângulo CDE são equiláteros, com o lado medindo 4 cm. Nessas condições, determine:

- a medida h da altura de cada triângulo
- a área do hexágono, considerando $\sqrt{3} = 1,73$



Observe, na seqüência seguinte, que o triângulo AHD é congruente ao triângulo BEC; podemos, então, separar o triângulo AHD e colocá-lo sobre BEC.

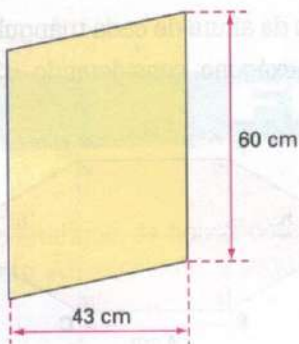


A área do paralelogramo é igual à área do retângulo formado; assim:

$$\text{área do paralelogramo} = b \cdot h$$

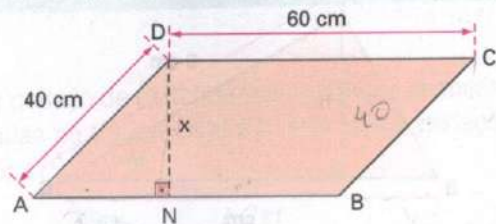
FIXAÇÃO

1 Uma folha de papelão tem a forma e as dimensões indicadas na figura. Qual é a área dessa folha de papelão?



2 No paralelogramo ABCD, $\overline{AN} \cong \overline{ND}$. Nessas condições, determine:

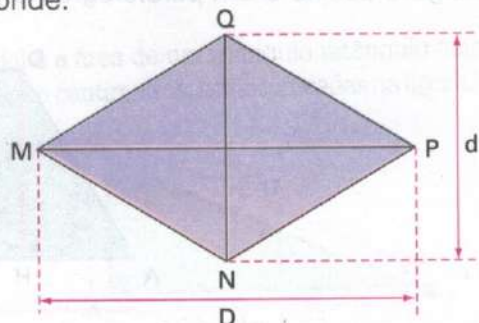
- a medida x indicada
- a área do paralelogramo ABCD
- a área do triângulo AND
- a área do quadrilátero BCDN (Considere: $\sqrt{2} = 1,41$.)



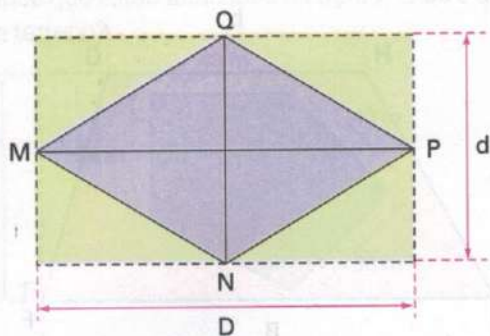
Área de um losango

A figura seguinte representa um losango MNPQ onde:

- ✓ \overline{MP} é a *diagonal maior* cuja medida vamos indicar por D .
- ✓ \overline{NQ} é a *diagonal menor* cuja medida vamos indicar por d .



Observe:



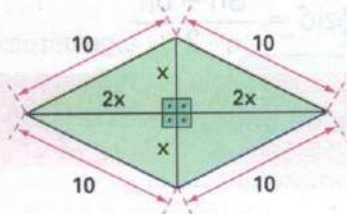
A área do losango MNPO é a metade da área do retângulo cujas dimensões são as medidas das diagonais do losango.

Então:

$$\text{área do losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

FIXAÇÃO

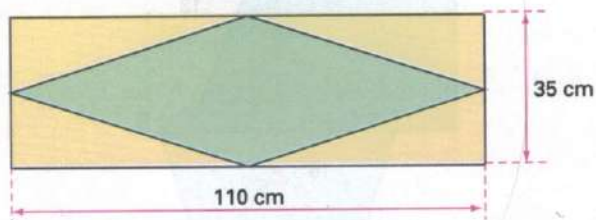
- 1** No losango da figura abaixo, determine a medida x indicada e calcule a seguir a área desse losango.



- 2** Você quer fazer uma pipa em forma de losango, de tal forma que as varetas meçam 75 cm e 50 cm. Nessas condições, quantos centímetros quadrados de papel de seda você irá usar para fazer essa pipa?

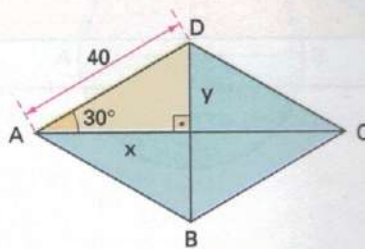
- 3** Em um losango, cada lado mede 30 cm. Se a diagonal maior desse losango mede 48 cm, determine a área desse losango.

- 4** Quantos centímetros quadrados de vidro colorido seriam gastos para fazer um vitral colorido cuja forma e medidas estão na figura abaixo?



- 5** As medidas das diagonais de um losango correspondem à solução do sistema $\begin{cases} x + y = 31 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$. Determine a área desse losango.

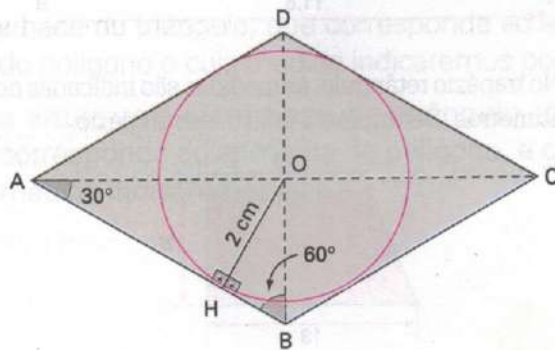
- 6** Usando as razões trigonométricas, determine as medidas x e y indicadas na figura. A seguir, determine a área do losango ABCD. (As medidas são dadas em centímetros.)



- 7** Sabendo que as medidas das diagonais de um losango correspondem às raízes da equação $x^2 - 13x + 40 = 0$, determine a área desse losango.

- 8** Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um losango no qual está inscrita uma circunferência de raio 2 cm. Sabendo que $OA = x$ e $OB = y$, determine:

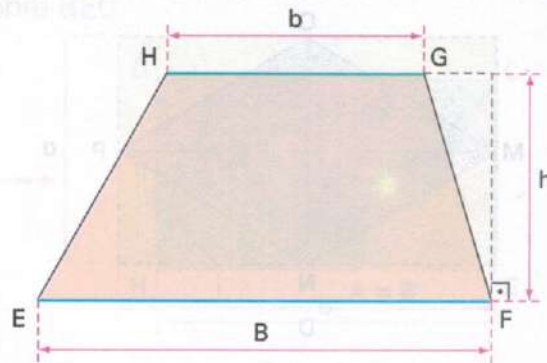
- a) as medidas x e y
b) a área do losango ABCD



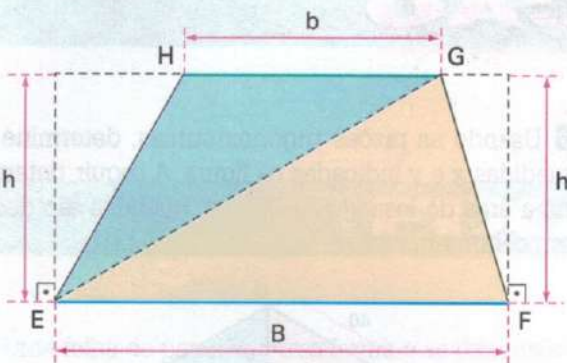
Área de um trapézio

A figura ao lado é um trapézio EFGH onde:

- ✓ \overline{EF} é a *base maior* cuja medida vamos indicar por B .
- ✓ \overline{GH} é a *base menor* cuja medida vamos indicar por b .
- ✓ A distância entre as bases é a *altura* do trapézio cuja medida indicaremos por h .



Se traçarmos a diagonal \overline{EG} , vamos obter dois triângulos, EFG e EGH, que têm a mesma altura h . Assim:



área do trapézio = área do $\triangle EFG$ + área do $\triangle EGH$

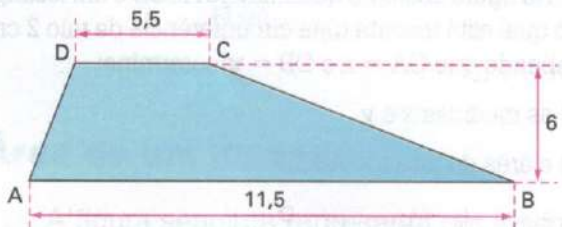
$$\text{área do trapézio} = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$\text{área do trapézio} = \frac{Bh + bh}{2}$$

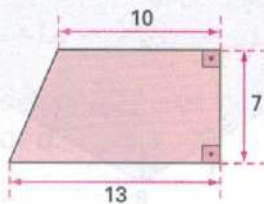
$$\text{área do trapézio} = \frac{h(B + b)}{2}$$

FIXAÇÃO

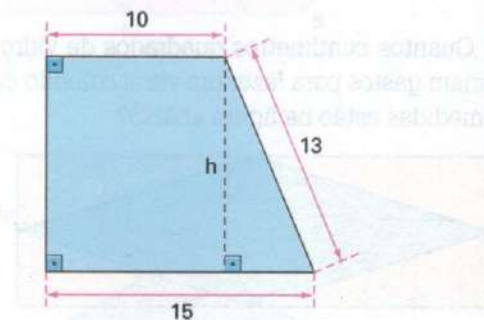
- 1** A figura abaixo é um trapézio cujas medidas são dadas em centímetros. Determine a área desse trapézio.



- 2** No trapézio retângulo, as medidas são indicadas em centímetros. Determine a área desse trapézio.

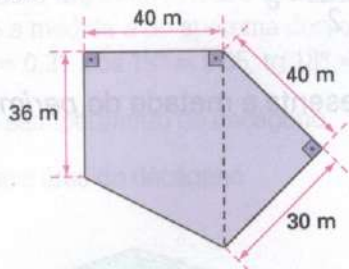


- 3** Qual é a área do trapézio retângulo cujas medidas, em centímetros, estão indicadas na figura?

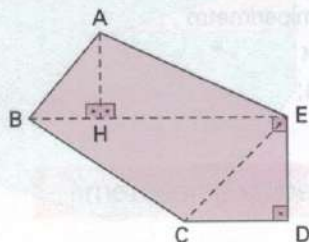


- 4** Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 35 m e 24 m, com altura 22 m. Nesse terreno, foi construída uma piscina retangular de 10,5 m por 6 m. No restante do terreno, colocou-se grama. Qual a área da parte do terreno que foi gramada?

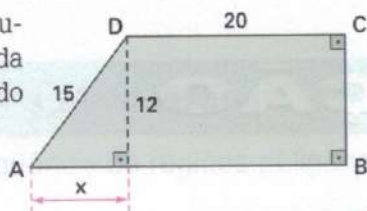
5 Feito o levantamento de um terreno, foram obtidos os dados que estão indicados na figura. Qual é a área desse terreno?



6 Na figura abaixo, $BE = 60$ cm, $AH = 20$ cm, $CD = DE$ e $CE = 24\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine a área do pentágono ABCDE.



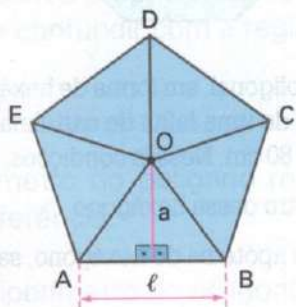
7 No trapézio retângulo, determine a medida x indicada e a área do trapézio.



Área de um polígono regular

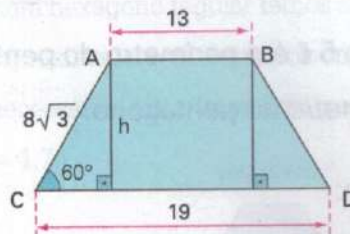
Consideremos o pentágono regular da figura ao lado.

A partir do centro, vamos decompor esse pentágono em triângulos que são isósceles e congruentes. Em cada um desses triângulos, temos:



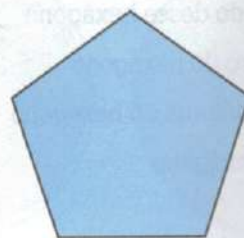
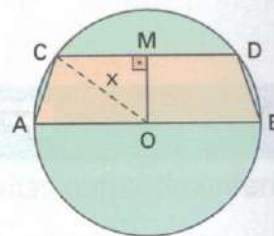
A área de cada triângulo é dada por $\frac{\ell \cdot a}{2}$.

8 O trapézio ABCD da figura é um trapézio isósceles. Use as razões trigonométricas para determinar a medida h da altura e, a seguir, calcule a área do trapézio. (As medidas são dadas em centímetros.)



9 Na figura abaixo, \overline{AB} é um diâmetro, \overline{CD} é paralela ao diâmetro e M é ponto médio de \overline{CD} . Sabendo que $CD = 8$ cm e $OM = 3$ cm, determine:

- a medida x do raio
- a medida do diâmetro \overline{AB}
- a área do trapézio ABCD



- ✓ a base do triângulo, que corresponde ao lado do polígono e cuja medida indicaremos por ℓ .
- ✓ a altura relativa à base do triângulo, que corresponde ao apótema do polígono, e cuja medida indicaremos por a .

Como são cinco triângulos, a área do polígono seria dada por:

$$5 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} \text{ ou } \frac{5\ell a}{2} \text{ ou, ainda, } \frac{5\ell}{2} \cdot a$$

Como 5ℓ é o perímetro do pentágono, então $\frac{5\ell}{2}$ representa a metade do *perímetro* ou o *semiperímetro* do pentágono.

Assim:

$$\text{área do pentágono} = \frac{5\ell}{2} \cdot a$$

\swarrow medida do apótema
 \searrow semiperímetro

Generalizando para todos os polígonos regulares, temos:

$$\text{área do polígono regular} = \text{semiperímetro} \cdot \text{medida do apótema}$$

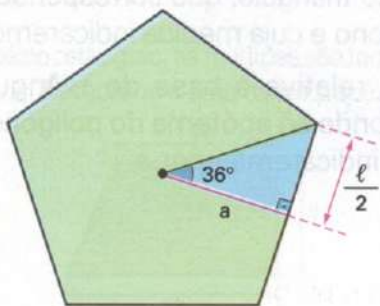
FIXAÇÃO

1 Um hexágono regular está inscrito numa circunferência de raio 18 cm. Nessas condições, determine:

- a) a medida do lado desse hexágono
- b) o semiperímetro do hexágono
- c) a medida do apótema do hexágono
- d) a área desse hexágono

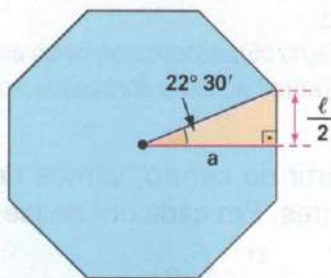
2 A figura abaixo é um pentágono regular cujo lado mede 8 cm. Usando as razões trigonométricas, você pode calcular a medida a do apótema desse pentágono. Qual é a área do pentágono?

($\text{sen } 36^\circ = 0,59$; $\text{cos } 36^\circ = 0,81$; $\text{tg } 36^\circ = 0,73$)



3 A figura a seguir é um octógono regular cujo lado mede 20 cm. Se você usar as razões trigonométricas, obterá a medida a do apótema. Determine a e a área desse octógono regular.

($\text{sen } 22^\circ 30' = 0,38$; $\text{cos } 22^\circ 30' = 0,92$; $\text{tg } 22^\circ 30' = 0,41$)

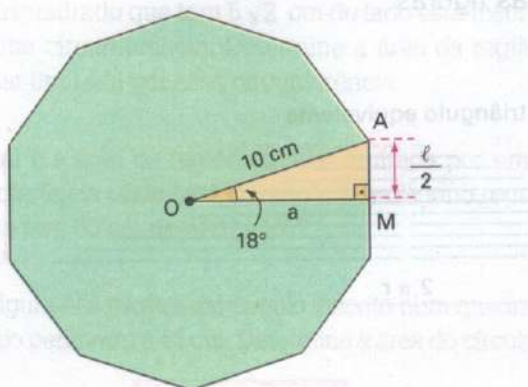


4 Uma região poligonal, em forma de hexágono regular, foi recortada de uma folha de cartolina. O lado do hexágono mede 80 cm. Nessas condições, determine:

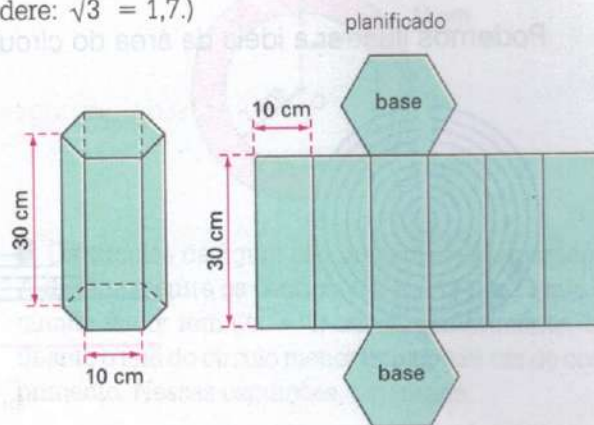
- a) o semiperímetro desse hexágono
- b) a medida a do apótema do hexágono, sabendo que $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
- c) a área da região poligonal, considerando $\sqrt{3} = 1,73$

5 A figura abaixo é um decágono regular onde \overline{OA} mede 10 cm. Nessas condições

- use as razões trigonométricas e calcule a medida ℓ do lado e a medida a do apótema desse decágono ($\text{sen } 18^\circ = 0,31$; $\text{cos } 18^\circ = 0,95$; $\text{tg } 18^\circ = 0,32$)
- calcule o semiperímetro do decágono
- determine a área do decágono

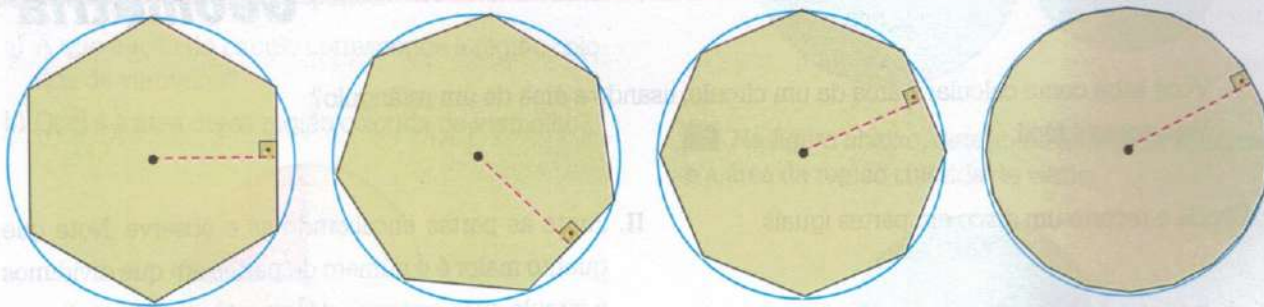


6 Uma peça como a da figura a seguir é formada por dois hexágonos regulares e seis retângulos, conforme nos mostra a mesma peça desmontada ou planificada. Se num hexágono regular temos $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, determine aproximadamente quantos cm^2 de papelão serão necessários para fazer essa peça. (Considere: $\sqrt{3} = 1,7$.)



Área de regiões circulares

Observe a seqüência de regiões poligonais regulares inscritas numa circunferência:



Você nota que, à medida que o número de lados aumenta, o polígono regular tende a confundir-se com a própria circunferência. Isto faz com que a região limitada pelo polígono regular tenda a se confundir com a região limitada pela circunferência, ou seja, o *círculo*.

Assim:

- ✓ o perímetro do polígono regular tende a se confundir com o comprimento $C = 2\pi r$ da circunferência.
- ✓ o semiperímetro do polígono regular tende ao valor $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.
- ✓ o apótema do polígono regular tende a se confundir com o próprio raio.

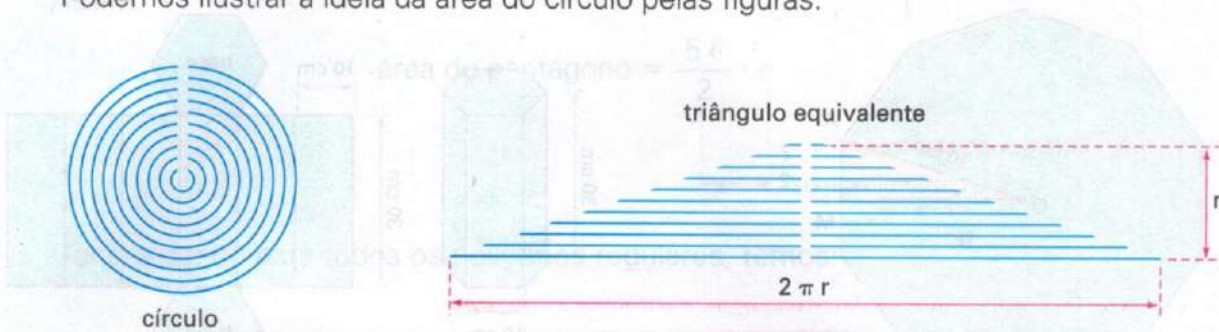
Daf:

A área do polígono regular tende a coincidir com a área do círculo. Logo:

$$\text{área do círculo} = \pi r \cdot r \text{ ou } \text{área do círculo} = \pi r^2$$

apótema
semiperímetro

Podemos ilustrar a idéia da área do círculo pelas figuras:



área do círculo = área do triângulo

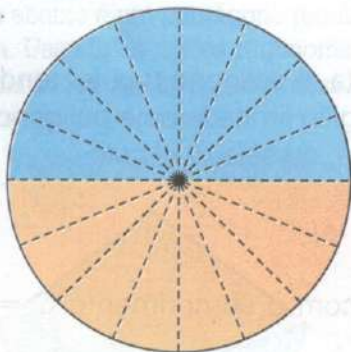
$$\text{área do círculo} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Explorando Geometria

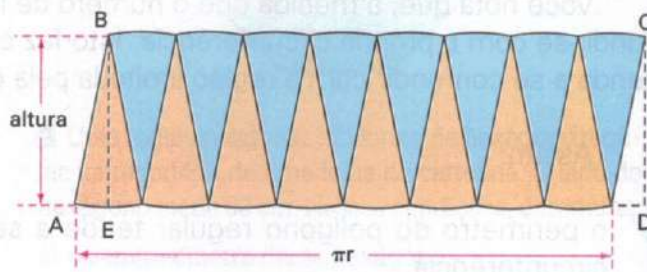
Você sabe como calcular a área de um círculo, usando a área de um retângulo?

Veja como é fácil:

I. Divida e recorte um disco em partes iguais.



II. Junte as partes encaixando-as e observe. Note que quanto maior é o número de partes em que dividimos o círculo, mais próxima de um retângulo fica a figura.



Agora que você já sabe, calcule a área do retângulo, cuja base tem a metade do comprimento da circunferência e a altura tem a medida do raio.

FIXAÇÃO

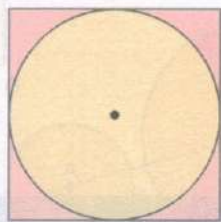
1 Qual é a área de um círculo cujo raio mede $6\sqrt{2}$ cm?

2 Um disco de cobre tem 80 cm de diâmetro. Determine a área desse disco.

3 Um quadrado que tem $5\sqrt{2}$ cm de lado está inscrito numa circunferência. Determine a área da região circular limitada por essa circunferência.

4 Qual é a área da região circular limitada por uma circunferência onde está inscrito um hexágono regular que tem 60 cm de perímetro?

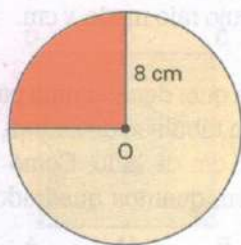
5 A figura nos mostra um círculo inscrito num quadrado, cujo perímetro é 48 cm. Determine a área do círculo.



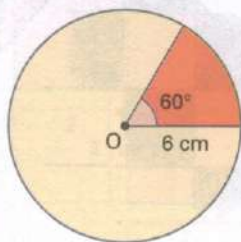
6 Observando a figura, responda:

a) A que fração do círculo corresponde a região colorida de vermelho?

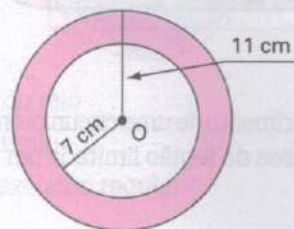
b) Qual é a área dessa região colorida de vermelho?



7 Usando uma regra de três, determine a área do setor circular que está colorido de vermelho na figura abaixo.



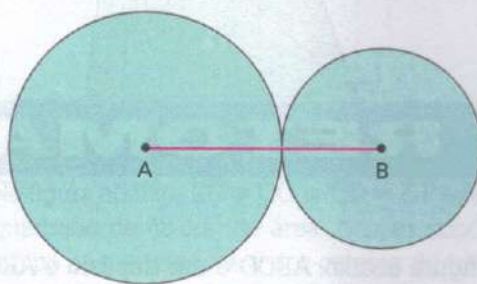
8 A figura nos mostra duas circunferências concêntricas, formando uma coroa circular (região colorida). Determine a área dessa coroa circular.



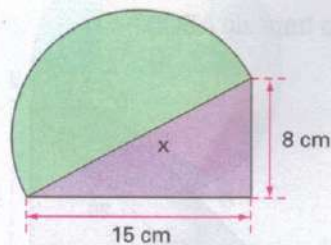
9 Os círculos da figura são tangentes externamente. A distância entre os centros A e B é 19 cm. O raio do círculo maior tem $(2x + 1)$ cm de comprimento, enquanto o raio do círculo menor tem $(x - 3)$ cm de comprimento. Nessas condições, determine:

a) a área do círculo de centro A

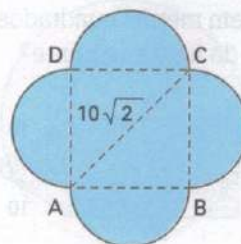
b) a área do círculo de centro B



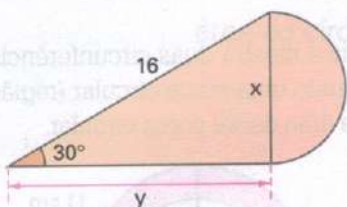
10 Na figura abaixo, determine a medida x indicada e a área da região colorida de verde.



11 ABCD é um quadrado cuja diagonal mede $10\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine a área da figura.



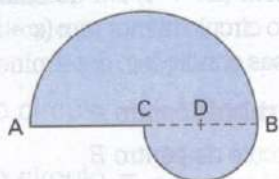
12 Na figura abaixo, use as razões trigonométricas para determinar as medidas x e y . A seguir, determine a área da região colorida. (Considere: $\sqrt{3} = 1,73$.)



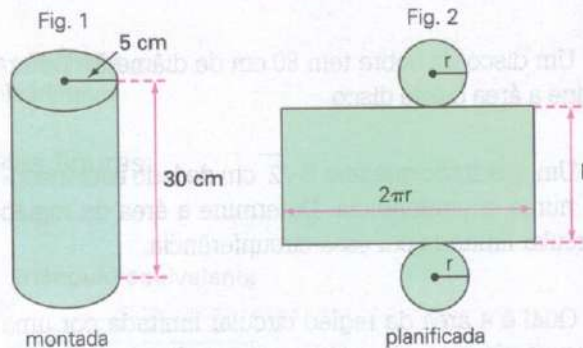
13 Se o comprimento de uma circunferência é 56,52 cm, determine a área da região limitada por essa circunferência.

14 Qual é a área da região colorida na figura se

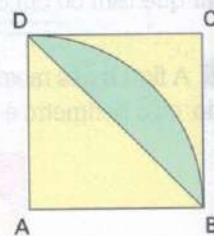
$$AB = 32 \text{ cm}, AC = \frac{1}{2} AB \text{ e } DB = \frac{1}{2} AC?$$



15 Uma lata tem a forma e as medidas indicadas pela figura 1. Quando desmontada ou planificada, assume a forma da figura 2. Quantos centímetros quadrados de folha-de-flandres são necessários para fazer uma lata como essa?



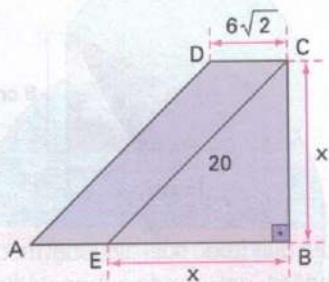
16 Qual a área da região colorida de verde na figura, se ABCD é um quadrado cuja diagonal mede 12 cm?



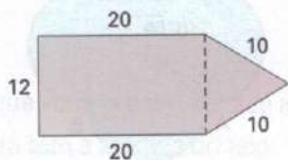
RETOMANDO o que aprendeu

1 Na figura abaixo, ABCD é um trapézio e AECD é um paralelogramo. As medidas indicadas são dadas em centímetros. Nessas condições, determine:

- a medida x
- a área do trapézio ABCD



2 Qual é a área, em metros quadrados, de um terreno que tem a forma da figura seguinte?



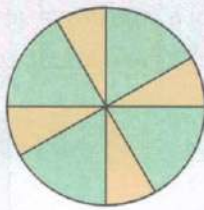
3 A divisão do número 0,5 por x tem o mesmo resultado que a adição do número 0,5 com x . Nessas condições, e sendo x um número real positivo, calcule a área do círculo cujo raio mede x cm.

4 Um enxadrista quer decorar uma parede retangular como se fosse um tabuleiro de xadrez, dividindo-a em quadrados de 15 cm de lado. Como a parede mede 4,50 m por 2,75 m, quantos quadrados ele vai desenhar na parede?



5 Em um trapézio isósceles, as bases medem 19 cm e 7 cm. Se o perímetro desse trapézio é 46 cm, determine a sua área.

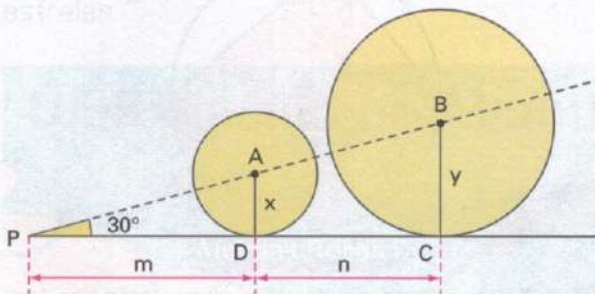
6 O desenho representa uma praça circular de 60 m de diâmetro, onde as áreas verdes representam jardins cujo ângulo central é 30° . Qual é a área ocupada pelos jardins?



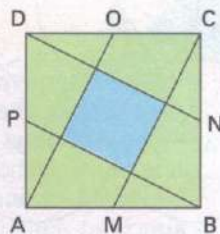
7 Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa determina sobre essa hipotenusa segmentos que medem 32 cm e 18 cm. Calcule a área desse triângulo.

8 Na figura abaixo $PA = 2$ cm e $AB = 4$ cm. Nessas condições:

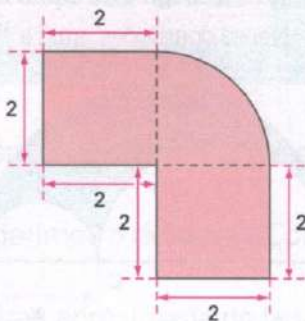
- usando as razões trigonométricas, calcule as medidas x , y , m e n indicadas
- determine a área do trapézio retângulo ABCD



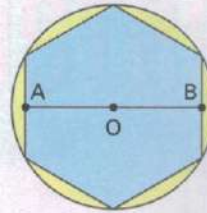
9 Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e M, N, O, P são pontos médios dos seus lados. Qual a fração que a área do quadrado azul representa da área do quadrado ABCD?



10 Determine a área da figura abaixo em centímetros quadrados.

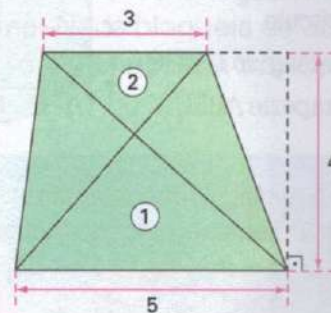


11 Na figura a seguir, os pontos A e B são os pontos médios de dois lados paralelos do hexágono regular inscrito na circunferência. Sabendo que $AB = 60$ cm, determine:

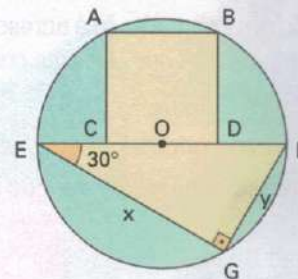


- a medida x do raio
- a área do círculo
- a área do hexágono regular

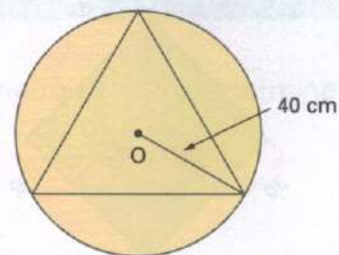
12 A altura do trapézio da figura abaixo é 4 cm. Calcule as áreas dos triângulos ① e ②.



13 Na figura abaixo, $\overline{EC} \cong \overline{CO} \cong \overline{OD} \cong \overline{DF}$ e ABCD é um quadrado de 48 cm^2 de área. Nessas condições, determine as medidas x e y dos catetos do triângulo retângulo EFG e dê a área desse triângulo.

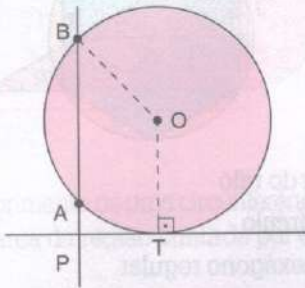


14 A figura mostra uma folha circular de zinco, de onde foi recortada a região triangular equilátera. Calcule a área dessa região triangular, considerando $\sqrt{3} = 1,73$.



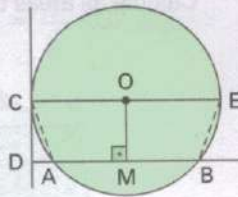
15 Na figura abaixo, $PT = 6$ cm e $PB = 18$ cm. Nessas condições, determine:

- a área do círculo de centro O
- a área do trapézio $PBOT$

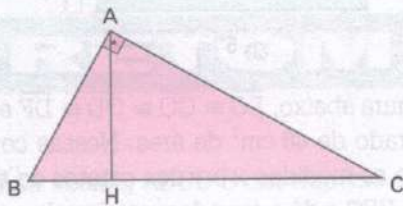


16 Na figura abaixo, $AB = 6$ cm e $OM = 4$ cm. Nessas condições, determine:

- a medida r do raio
- a área do círculo
- a área do retângulo $DMOC$
- a área do trapézio $ABEC$



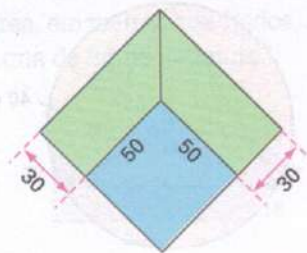
17 No triângulo retângulo da figura, temos $AB = 15$ cm e $HC = 16$ cm. Determine a área do triângulo.



18 Se cada lado de um quadrado é acrescido de 6 cm, sua área aumenta de 108 cm². Nessas condições, determine:

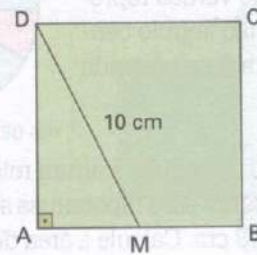
- a área do quadrado original
- a área do quadrado que tem o valor do lado aumentado

19 De uma madeira quadrada com 80 cm de lado, deve ser retirada a peça colorida de verde cujas medidas estão indicadas na figura abaixo. Quantos centímetros quadrados da madeira restarão?

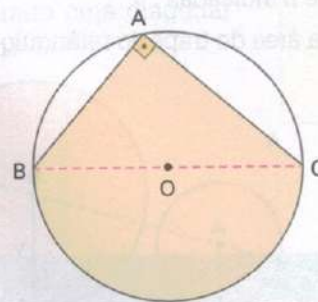


20 No quadrado $ABCD$ da figura, o ponto M é ponto médio do lado AB . Nessas condições, determine:

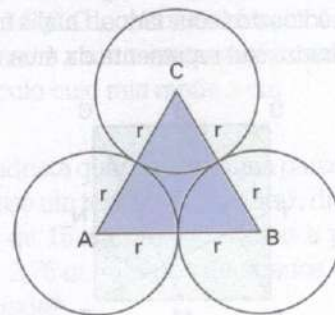
- a medida x do lado do quadrado $ABCD$
- a área desse quadrado
- a área do trapézio $BCDM$



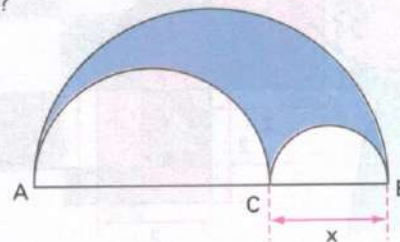
21 Na figura abaixo são dados $AB = 6$ cm e $AC = 8$ cm. Sabendo-se que \overline{BC} é o diâmetro do círculo, qual é a área da região colorida?



22 A figura abaixo mostra três circunferências tangentes duas a duas. Qual é a área do triângulo ABC se $r = 4$ cm?



23 Na figura abaixo temos três semicírculos e a medida do segmento \overline{AC} é igual ao dobro da medida do segmento \overline{CB} . Nessas condições, qual a área da região colorida?



JORNAIS & REVISTAS

Na revista *Veja* de 07/05/97, destacamos o seguinte trecho da matéria intitulada "Salvo pelas tartarugas".

"O resto do Brasil não consegue imaginá-lo. Diante do Atol das Rocas, o Atlântico tem cor de cobalto. A 30 metros da superfície, enxerga-se em seu fundo o desenho azulado dos bancos de coral. Da praia, dá para ver as formas e as cores dos cardumes, tubarões inclusive, nadando nos rasos de água turquesa. A areia, feita de conchas e algas moídas pelas ondas, reflete tanta luz que ilumina o mar de baixo para cima. Nada bloqueia os 360 graus de horizonte. O poente pinta o céu de ponta a ponta. À noite se caminha sem tropeçar à luz das estrelas."



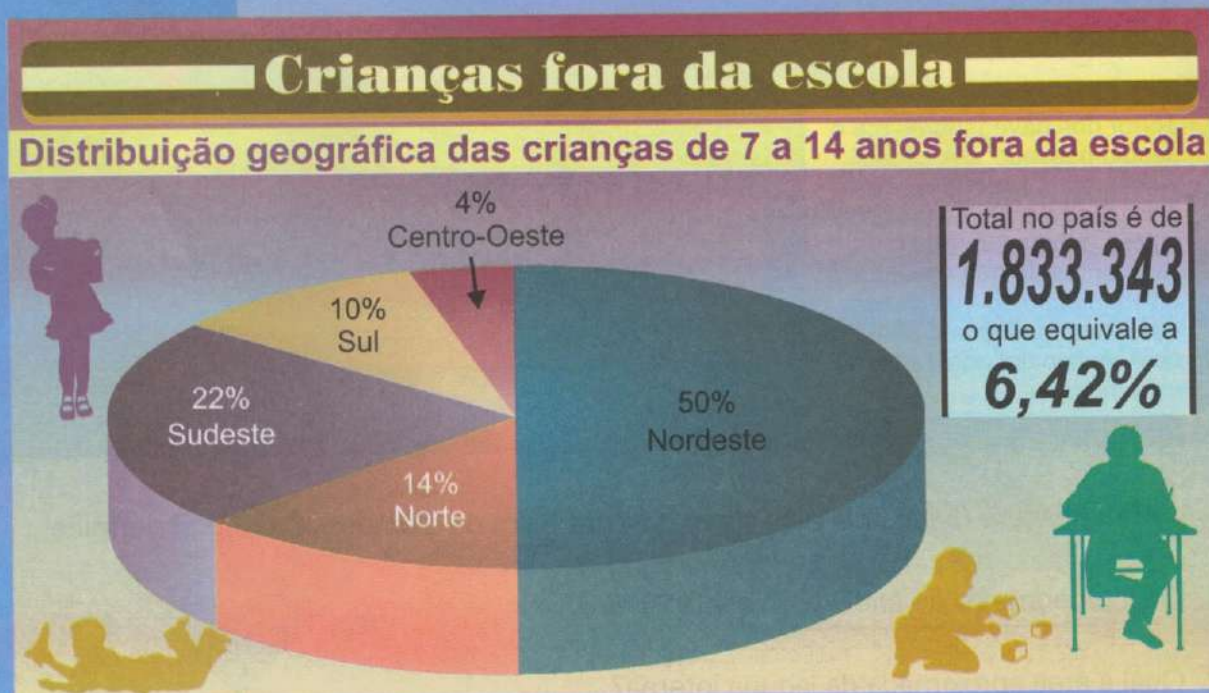
Admitindo-se que o anel seja circular e com 3 km de diâmetro externo, determine:

1. Qual o perímetro do anel? (Considere: $\pi = 3,14$.)
2. Qual a área aproximada da laguna interna?

12

Noções elementares de Estatística

Lendo um jornal ou uma revista, assistindo ao noticiário da televisão, entramos em contato com uma grande quantidade de números e gráficos que nos dão uma série de informações. Veja alguns exemplos:



Comércio

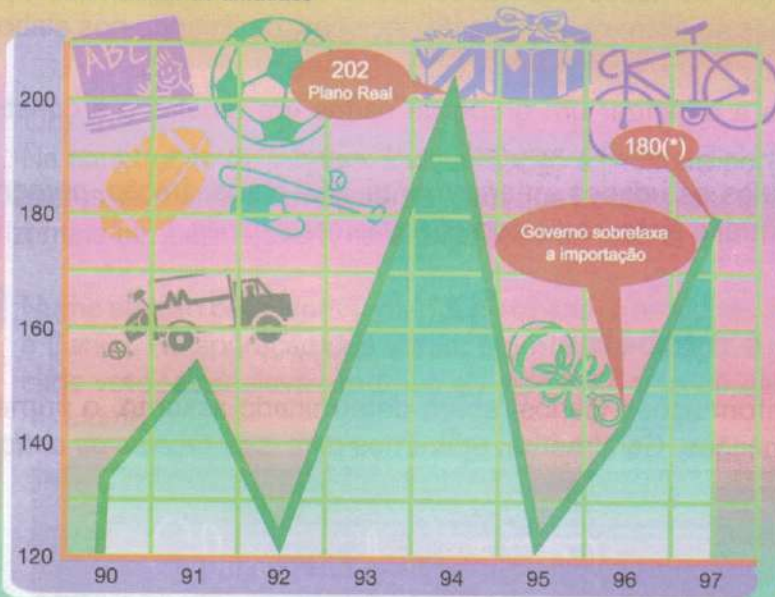


O levantamento das informações e a sua exposição em tabelas e gráficos são feitos, em geral, de forma científica, utilizando um dos ramos da Matemática — a *Estatística*. Pode parecer difícil entender tantos gráficos e índices. Porém, a Estatística não é tão complicada como parece.



Produção de brinquedos volta a crescer

Em milhões de unidades



Cresce faturamento



Aumenta o emprego



(*) previsão
Fonte: Abrinq

Nesta Unidade, vamos estudar novos elementos de Estatística que nos ajudarão a entender melhor esse importante ramo da Matemática.



ORGANIZANDO OS DADOS

O que representa a Estatística

Para fazer projeções sobre o número de habitantes que a Terra terá no ano 2000, por exemplo, precisamos inicialmente obter os *dados* sobre o crescimento da população nos últimos anos. Em seguida, *organizar* esses dados e, finalmente, *analisá-los* para tirar uma conclusão.

Numa pesquisa, onde se queira determinar a intenção de voto na eleição para prefeito de uma cidade, inicialmente deve-se colher os dados, ou seja, a intenção de voto de uma parcela previamente escolhida da população. Em seguida, esses dados devem ser organizados para, finalmente, serem submetidos a uma análise.

A partir dos primeiros votos apurados (dados organizados) numa eleição podemos fazer uma projeção dos resultados dessa eleição (análise dos dados).

Em todos os exemplos apresentados, para se chegar ao resultado pretendido, utiliza-se um ramo da Matemática chamado *Estatística*.

A Estatística trata do conjunto de métodos utilizados para a obtenção de dados, sua organização em tabelas e gráficos e a análise desses dados.

A Estatística alcançou grande desenvolvimento a partir das máquinas de calcular e dos computadores, que agilizam o cálculo matemático e, hoje, está presente em quase todas as atividades do homem.

Através das análises feitas a partir de dados organizados podemos, em muitos casos, prever determinadas tendências que nos auxiliam na tomada de decisões, permitindo-nos elaborar um planejamento mais adequado.

Nesta Unidade, aprenderemos a organizar um grupo de dados em tabelas e a construir gráficos a partir desses dados.

Para isso, utilizaremos conteúdos estudados anteriormente, tais como: fração, porcentagem, proporcionalidade, ângulo central e sistema de coordenadas cartesianas.

Como organizar os dados em tabelas

Ao reunirmos uma série de informações (dados) sobre determinado assunto, o primeiro passo é organizarmos essas informações. Geralmente, utilizamos para isso *tabelas de dados*.

Como podemos fazer para organizar essas tabelas? Vejamos algumas situações:

1ª Num grupo de 40 pessoas, 16 preferem vôlei e 24 preferem futebol.

Vamos construir uma tabela de dados quanto à preferência por esporte desse grupo. Para isso, seguimos o roteiro abaixo:

- Damos um título à tabela que explique o tipo de informação que ela contém. Nesse caso poderia ser: *Número de pessoas segundo a preferência esportiva*.
- Escrevemos em cada coluna o tipo de informação que ela contém. Veja:

Número de pessoas segundo a preferência esportiva		
Esporte	Freqüência	Porcentagem
(Nesta coluna escrevemos vôlei e futebol.)	(Nesta coluna escrevemos o número de pessoas que preferem cada esporte.)	(Nesta coluna escrevemos a porcentagem do número de pessoas que escolheram cada esporte em relação ao número total de pessoas.)

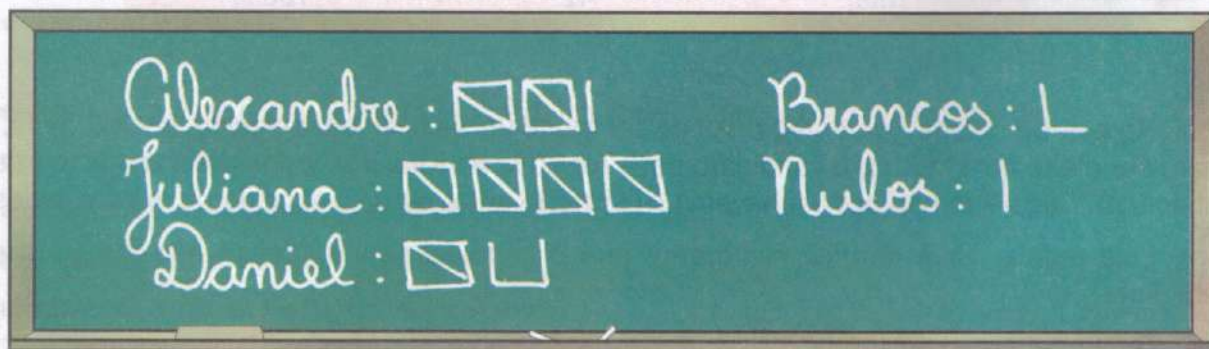
c) Preenchemos as colunas com as informações (dados) de que dispomos. Na coluna *porcentagem*, basta calcular quanto por cento 24 e 16 representam de 40, que é o total de pessoas.

Número de pessoas segundo a preferência esportiva		
Esporte	Freqüência	Porcentagem
Vôlei	16	40%
Futebol	24	60%
Total	40	100%

Observação:

Na construção de tabelas, a visualização é muito importante, ou seja, os dados devem ser espaçados de maneira conveniente, para que possam ser analisados mais facilmente. Os traços horizontais também ajudam na visualização da tabela.

2ª Numa eleição para representante de classe, três alunos se candidataram: Alexandre, Juliana e Daniel. Na apuração dos votos, o professor colocou os três nomes no quadro-negro e, a cada voto, assinalava um traço ao lado do nome do candidato. A eleição teve o seguinte resultado:



Vamos construir uma tabela com os resultados dessa eleição.

- a) Escolhemos um título: *Resultado da eleição para representante de classe.*
- b) Determinamos o número de votos de cada candidato, o número de votos brancos e nulos e o total de eleitores (para o cálculo da porcentagem):

Alexandre: 11 votos	Branco: 2 votos
Juliana: 20 votos	Nulos: 1 voto
Daniel: 8 votos	Total de eleitores: 42

- c) Escrevemos em cada coluna o tipo de informação que ela contém: *Candidato, Número de votos e Porcentagem.* A seguir, preenchemos as colunas com os dados disponíveis. Para melhor visualização e análise dos dados, devemos dispô-los sempre numa ordem conveniente. Neste caso, podemos dispor o número de votos na ordem decrescente, ou seja, do mais votado para o menos votado.

Resultado da eleição para representante de classe		
Candidato	Número de votos	Porcentagem
Juliana	20	47,6%
Alexandre	11	26,2%
Daniel	8	19,0%
Branco	2	4,8%
Nulos	1	2,4%
Total	42	100%

Note que a coluna *Porcentagem* pode ser muito útil se ficar estabelecido, por exemplo, que, para ser eleito no 1º turno, o candidato deve ter 50% do total dos votos mais um voto (maioria absoluta). Caso isso não ocorra, haverá um 2º turno entre os dois candidatos mais votados.

Pela tabela, você verifica facilmente que o candidato mais votado não atingiu maioria absoluta.

Teríamos, então, 2º turno.

FIXAÇÃO

1 Observe em sua classe o número de alunos do sexo masculino e do sexo feminino. Em seguida, construa uma tabela que indique a quantidade de alunos por sexo, assim como a respectiva porcentagem em relação ao número total de alunos.

2 Um dado foi lançado 20 vezes, sendo obtidos os seguintes pontos:

1	5	6	2	2	2	5	4	6	5	2	3	3	1	6	6	5	5	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Nessas condições construa uma tabela que indique a quantidade de vezes que cada número de pontos aparece, bem como a respectiva porcentagem em relação ao número total de vezes em que o dado foi lançado.

3 Os dados seguintes se referem às notas obtidas pelos alunos de uma 8ª série em uma prova de Matemática.

Número do aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Nota	8,0	4,0	5,0	1,0	3,0	7,0	5,0	3,0	3,0	4,0	9,0	7,0	3,0	2,0	2,0	5,0	6,0	6,0	8,0	7,0	4,0	7,0	5,0	4,0	7,0	9,0

Nessas condições, construa uma tabela que indique as notas, a quantidade de alunos que obteve cada nota e a respectiva porcentagem em relação ao número total de alunos.

A seguir, responda:

- Quantos alunos obtiveram notas menores que 5,0?
- Que porcentagem de alunos obtiveram nota igual ou superior a 5,0?
- Qual é a nota que aparece com maior frequência?

4 Um grupo de alunos do 1º grau foi escolhido para representar a escola no desfile de abertura de uma olimpíada esportiva. Pesquisando as idades dos alunos escolhidos, obtiveram-se as seguintes idades (em anos):

15	11	13	14	14	15	14	16	13	12
14	13	15	12	13	14	15	12	14	14
13	15	14	11	12	15	13	15	16	15
14	12	15	13	13	14	12	14	15	14

Construa, então, uma tabela em que apareçam as colunas *idade*, *número de alunos associados a cada idade* e *porcentagem* (de cada idade em relação ao número total de alunos).

5 Observando-se a altura dos 40 alunos da 8ª série de um colégio, foram obtidos os seguintes dados:

- 11 alunos tinham menos que 1,80 m de altura.
- 22 alunos tinham altura entre 1,80 m (inclusive) e 2,00 m de altura.
- 7 alunos tinham 2,00 m ou mais de altura.

Nessas condições, construa uma tabela em que apareçam as colunas *altura*, *quantidade de alunos* e *porcentagem* (em relação ao número total de alunos).

Explorando Gráficos

Observe a ilustração abaixo:



(Fonte: Guia do Estudante 97 – Editora Abril)

De acordo com os dados da ilustração e desconsiderando possíveis faltas, feriados e férias, qual a porcentagem de horas de 1 ano (365 dias) correspondente ao número de horas que esse biólogo dedica à pesquisa?

56

ESTUDANDO GRÁFICOS

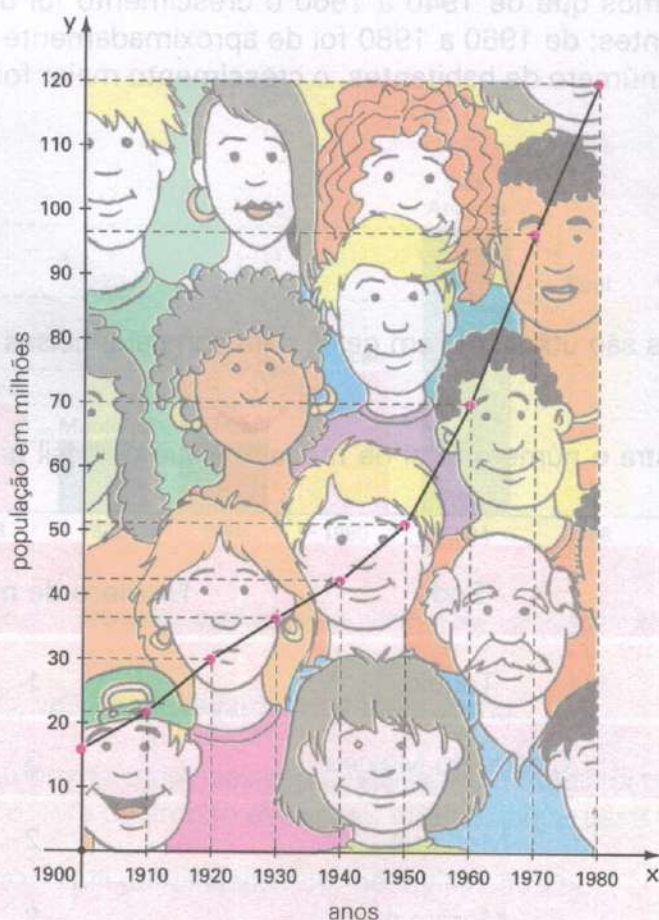
Um dos meios mais utilizados para representar e analisar dados é expresso por meio de figuras denominadas *gráficos*. Neste capítulo, estudaremos alguns tipos de gráficos utilizados em Estatística: gráficos de *segmentos*, gráficos de *barras* e gráficos *circulares*.

Gráficos de linha

Os gráficos de linha são utilizados, em geral, para mostrar a variação de algum fenômeno durante certo tempo. Observe a situação seguinte.

Gráfico do crescimento da população brasileira de 1900 a 1980.

População brasileira de 1900 a 1980



- ✓ Para construir o gráfico, utilizamos um sistema de coordenadas cartesianas: o eixo x (horizontal) é usado para mostrar a variação do tempo e o eixo y (vertical), para mostrar a variação da população.
- ✓ Note que cada intervalo entre duas datas consecutivas assinaladas no eixo x corresponde a 10 anos; de modo semelhante, cada intervalo no eixo y corresponde a 10 milhões de habitantes. A escolha do intervalo entre duas datas depende do número de datas e do espaço que você possui para representá-las. O importante é que, para intervalos iguais de anos, sejam usadas medidas iguais. Usamos o mesmo raciocínio para o eixo y (vertical).
- ✓ Para construir o gráfico, marcamos os pontos que correspondem à população referente a cada ano. Depois, unimos esses pontos através de segmentos. Assim, cada ponto do gráfico está associado a uma data (no eixo horizontal) e a uma população (no eixo vertical). É importante ressaltar que a população encontrada será sempre um número aproximado.

A partir do gráfico, podemos fazer uma série de análises acerca da população do Brasil de 1900 a 1980. Veja estes exemplos:

1. Qual era a população aproximada em 1930?
Pelo gráfico, o ponto que está associado ao ano de 1930 (eixo horizontal) corresponde ao número 36 000 000 para a população (eixo vertical). Esse número é uma aproximação, pois não podemos garantir que a população cresceu de modo uniforme de 1920 a 1940.

2. Em número de habitantes, o Brasil apresentou maior crescimento entre 1940 e 1960 ou entre 1960 e 1980?

Pelo gráfico, verificamos que de 1940 a 1960 o crescimento foi de aproximadamente 27 milhões de habitantes; de 1960 a 1980 foi de aproximadamente 50 milhões de habitantes. Portanto, em número de habitantes, o crescimento maior foi no período de 1960 a 1980.

Gráficos de barras

Os gráficos de barras são utilizados, em geral, para comparar coisas de mesma natureza. Veja o exemplo:

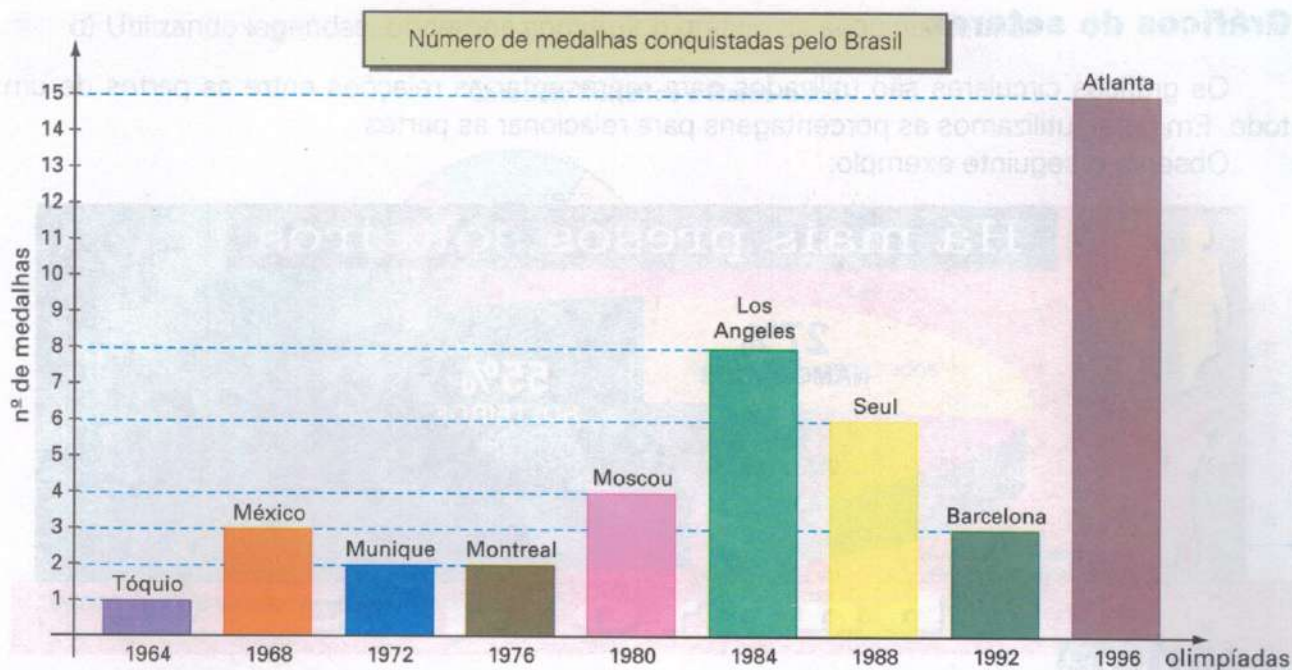
A tabela abaixo mostra o número total de medalhas que o Brasil ganhou em olimpíadas entre 1964 e 1996.

Ano	Sede	Número de medalhas
1964	Tóquio	1
1968	Cidade do México	3
1972	Munique	2
1976	Montreal	2
1980	Moscou	4
1984	Los Angeles	8
1988	Seul	6
1992	Barcelona	3
1996	Atlanta	15

Vamos construir um gráfico de barras com os dados da tabela, seguindo este roteiro:

a) Utilizando o sistema de coordenadas cartesianas, marcamos no eixo horizontal segmentos de mesma medida (essa medida vai corresponder à largura das barras), espaçadas igualmente entre si. No eixo vertical, marcamos o número de medalhas.

b) Para cada ano, determinamos a altura da barra, que vai corresponder ao número de medalhas ganhas.



Atenção: as bases dos retângulos que formam as barras devem ter sempre a mesma medida.

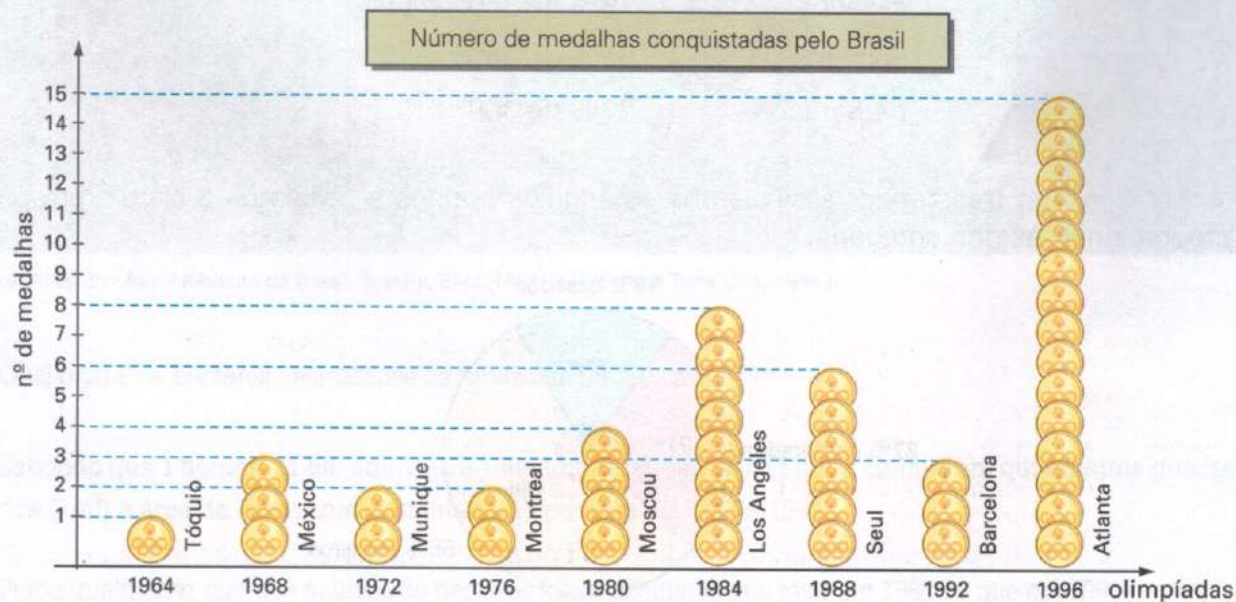
A partir do gráfico, você pode levantar questões como:

◆ Em 1996, o número de medalhas conquistadas pelo Brasil foi maior que nos anos anteriores. Há algum motivo, fora do âmbito esportivo, que justifique esse fato?

Ou, então, satisfazer sua curiosidade com pesquisas do tipo:

◆◆ Em quais esportes o Brasil obteve medalhas na olimpíada de 1988?

Esse gráfico também pode ser representado por ilustração no lugar das barras.



Gráficos de setores

Os gráficos circulares são utilizados para representar as relações entre as partes de um todo. Em geral, utilizamos as porcentagens para relacionar as partes.

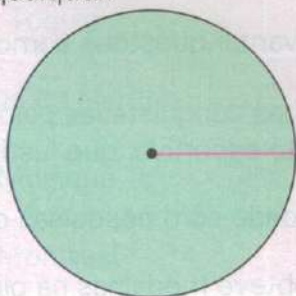
Observe o seguinte exemplo:



Fonte: Jornal Folha de S. Paulo, 26/09/97.

Vamos construir um gráfico de setores que represente os dados acima, seguindo este roteiro:

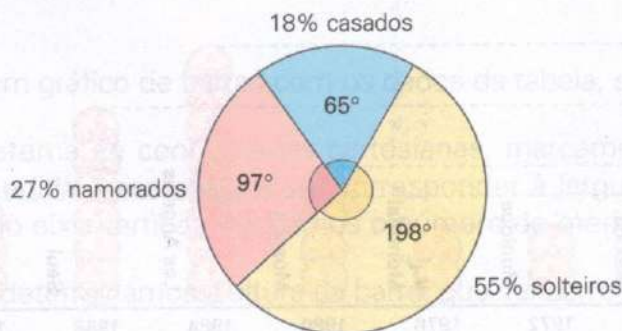
a) Traçamos um círculo de raio qualquer.



b) Lembrando que o ângulo central correspondente ao arco de uma volta tem 360° e corresponde a 100%, calculamos os ângulos correspondentes às porcentagens dadas:

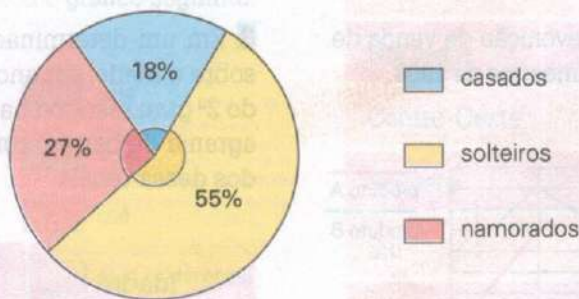
casados	→	18% de $360^\circ \cong 65^\circ$
solteiros	→	55% de $360^\circ = 198^\circ$
namorados	→	27% de $360^\circ \cong 97^\circ$

c) Com um transferidor assinalamos os ângulos obtidos e dividimos o círculo em partes proporcionais às porcentagens.



d) Utilizando legendas, podemos construir o gráfico da seguinte forma:

Casados, Solteiros e Namorados

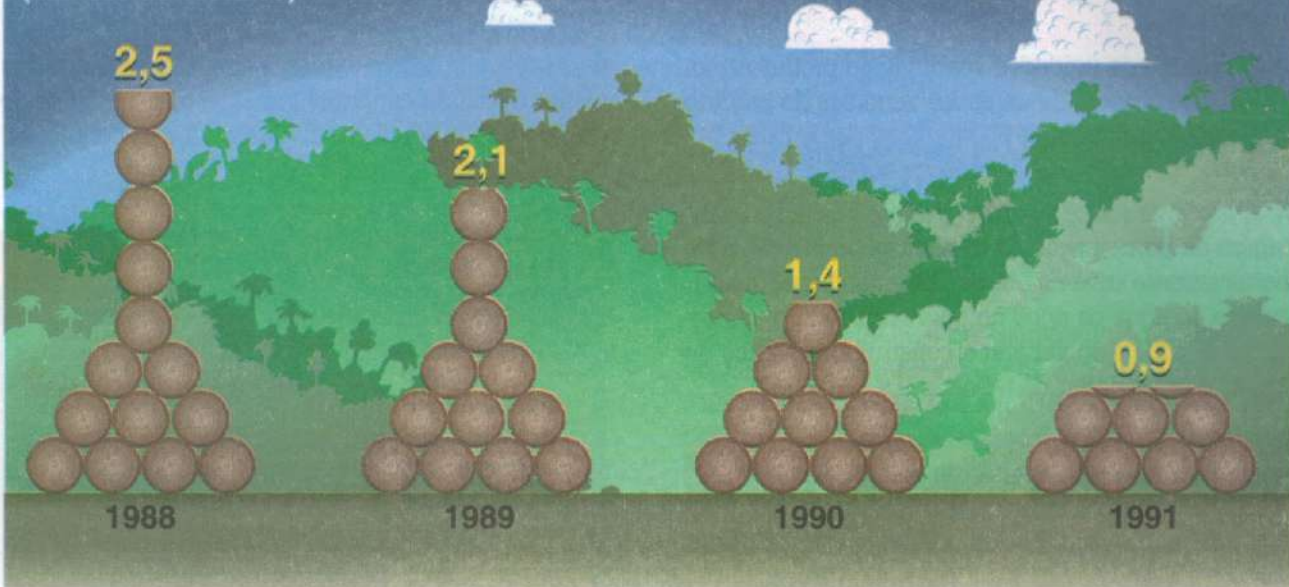


Explorando Gráficos

Observe no gráfico abaixo o desmatamento, em milhões de hectares, na Amazônia de 1988 a 1991.

Desmatamento na Amazônia

(milhões de hectares)

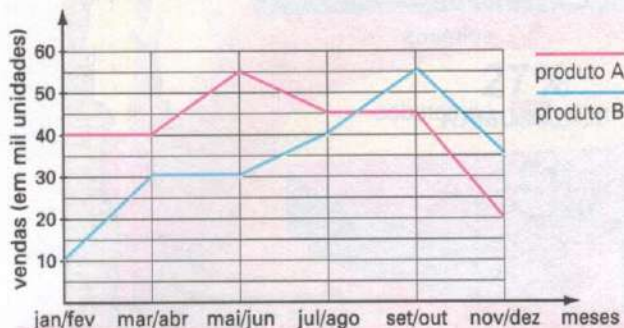


(Fonte: Atlas do Meio Ambiente do Brasil. Brasília, EMBRAPA - SPI/Editora Terra Viva, 1994.)

1. Qual o total de hectares desmatados na Amazônia de 1988 a 1991?
2. Sabendo que 1 hectare (1 ha) equivale a 1 hectômetro quadrado (1 hm^2), calcule em quilômetros quadrados (km^2) a área da Amazônia desmatada no período de 1988 a 1991.
3. Percentualmente, quantos milhões de hectares foram desmatados a mais em 1988 do que em 1991?

FIXAÇÃO

1 O gráfico seguinte mostra a evolução de venda de dois produtos, A e B, nos seis bimestres de 1998.



Analisando o gráfico, responda:

- Quantas unidades do produto B foram vendidas em julho e agosto?
- Em que bimestre a venda do produto A foi de 20 000 unidades?
- Qual o índice de vendas mais baixo do produto B?
- O número de unidades vendidas do produto A foi igual ao número de unidades vendidas do produto B em algum bimestre?

2 A tabela seguinte mostra o crescimento em porcentagem da participação da mulher na população economicamente ativa no Brasil. Utilizando papel quadriculado, indique os anos no eixo horizontal e as porcentagens no eixo vertical e construa um gráfico de barras com os dados da tabela.

Participação da mulher na população economicamente ativa	
Ano	Participação (%)
1940	15%
1970	18%
1980	28%
1989	38%
1996 (estimativa)	50%

Fonte: Interscience, Informação e Tecnologia Aplicada Ltda.

3 Em um determinado colégio, um levantamento sobre a idade, em anos, dos alunos de uma 1ª série do 2º grau resultou na tabela abaixo. Usando um diagrama de barras, construa um gráfico com os dados dessa tabela.

Idade	Número de alunos
14	4
15	12
16	8
17	1

4 O gráfico mostra o aumento das mensalidades dos planos de saúde, conforme publicou o jornal *O Estado de S. Paulo*, na edição de 05/06/96. Nessas condições, responda:

Aumento de mensalidades

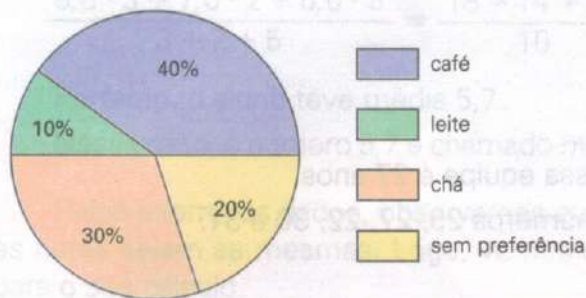
Quanto aumentaram as mensalidades dos planos de saúde - em %



* Dividido em três vezes: 31%, 6% e 6%

- Qual a empresa que apresentou o maior índice de aumento?
- Para quais empresas o aumento ficou entre 20% e 30%?

5 Ao realizar uma pesquisa para saber a preferência dos funcionários em relação à bebida que deveria ser servida no lanche, o departamento de Recursos Humanos de uma empresa elaborou o gráfico seguinte:



Sabendo que a empresa possui 180 empregados, responda:

- Quantos manifestaram preferência pelo café?
- Quantos manifestaram preferência pelo chá?
- Qual a bebida que teve a menor preferência?
- Quantos não manifestaram preferência por nenhuma bebida?

6 Construa um gráfico de setores com os dados da tabela abaixo.

Porcentagem da população urbana e rural do Brasil	
Urbana	75%
Rural	25%
Total	100%

Fonte: IBGE

7 A tabela a seguir mostra a população de cada região do Brasil, com sua respectiva porcentagem em relação à população total do Brasil. Com esses dados, construa um gráfico de setores.

Região	População	Porcentagem
Norte	10 250 000	7%
Nordeste	42 830 000	28%
Centro-Oeste	8 968 000	6%
Sudeste	65 559 000	44%
Sul	22 763 000	15%
Total	150 370 000	100%

Fonte: IBGE

8 Uma pesquisa entre 1 200 alunos revelou as atividades esportivas que eles gostariam de ter na escola. O resultado obtido está na tabela abaixo. Com base nessa tabela, construa um gráfico de setores.

Atividade esportiva	Número de alunos
Voleibol	600
Basquete	200
Futebol	100
Natação	50
Outros	250

9 Segundo o IBGE, a porcentagem da população urbana, na região Sudeste, era de 39% em 1940, 48% em 1950, 57% em 1960, 73% em 1970, 83% em 1980 e 86% em 1991. A partir desses dados, e usando papel quadriculado, faça um gráfico de linha. Analisando o gráfico, identifique em que década a população urbana cresceu mais rapidamente.

Estudando médias

Quando pretendemos estudar um fenômeno estatístico, recorremos a certos parâmetros que representam, de forma precisa, as propriedades da distribuição dos dados relativos a esse fenômeno.

Neste capítulo, vamos estudar os parâmetros de tendência central, que são: *média aritmética* e *média aritmética ponderada*.

Acompanhe os exemplos a seguir:

1. As idades dos jogadores titulares de uma equipe de basquete são: 25 anos, 27 anos, 22 anos, 30 anos e 31 anos. Qual é a idade média dos jogadores titulares dessa equipe?

Para resolver esse problema, devemos fazer:

$$\frac{25 + 27 + 22 + 30 + 31}{5} = \frac{135}{5} = 27$$

Então, a idade média dos jogadores titulares dessa equipe é 27 anos.

O número 27 é chamado *média aritmética* dos números 25, 27, 22, 30 e 31.

Assim, podemos escrever:

A *média aritmética* de n números representa a soma de todos os números dividida por n .

2. A diretoria de um clube é formada por 10 membros. As idades deles estão indicadas em anos, a seguir: 27, 30, 30, 32, 30, 32, 30, 27, 30 e 32. Qual é a idade média dos membros da diretoria desse clube?

Considerando os dados do problema, podemos observar que: o valor 27 se repete 2 vezes; o valor 30 se repete 5 vezes; o valor 32 se repete 3 vezes.

Assim, a média das idades pode ser calculada de forma mais simples:

$$\frac{27 \cdot 2 + 30 \cdot 5 + 32 \cdot 3}{2 + 5 + 3} = \frac{54 + 150 + 96}{10} = \frac{300}{10} = 30$$

Então, a idade média dos membros da diretoria é 30 anos.

O número 30 assim obtido é chamado *média aritmética*.

3. As notas em Matemática de um aluno, no 2º bimestre, foram:

1ª prova	Trabalho de pesquisa	2ª prova
6,0	7,0	5,0

Nessas condições, qual a média do aluno no bimestre?

Para responder a essa questão, devemos levar em consideração dois aspectos:

- ✓ O professor não atribui pesos diferentes para as notas.

Nesse caso, pode-se calcular a média do aluno adicionando-se as três notas e dividindo-se o resultado por 3.

$$\frac{6,0 + 7,0 + 5,0}{3} = \frac{18}{3} = 6,0$$

O número 6,0 obtido é chamado *média aritmética* dos números 6,0; 7,0; 5,0.

- ✓ O professor atribui pesos diferentes para cada nota, conforme o seguinte critério: a nota da 1ª prova tem peso 3; a nota do trabalho de pesquisa tem peso 2; a nota da 2ª prova tem peso 5. Nesse caso, a média do aluno é calculada assim:

$$\frac{6,0 \cdot 3 + 7,0 \cdot 2 + 5,0 \cdot 5}{3 + 2 + 5} = \frac{18 + 14 + 25}{10} = \frac{57}{10} = 5,7$$

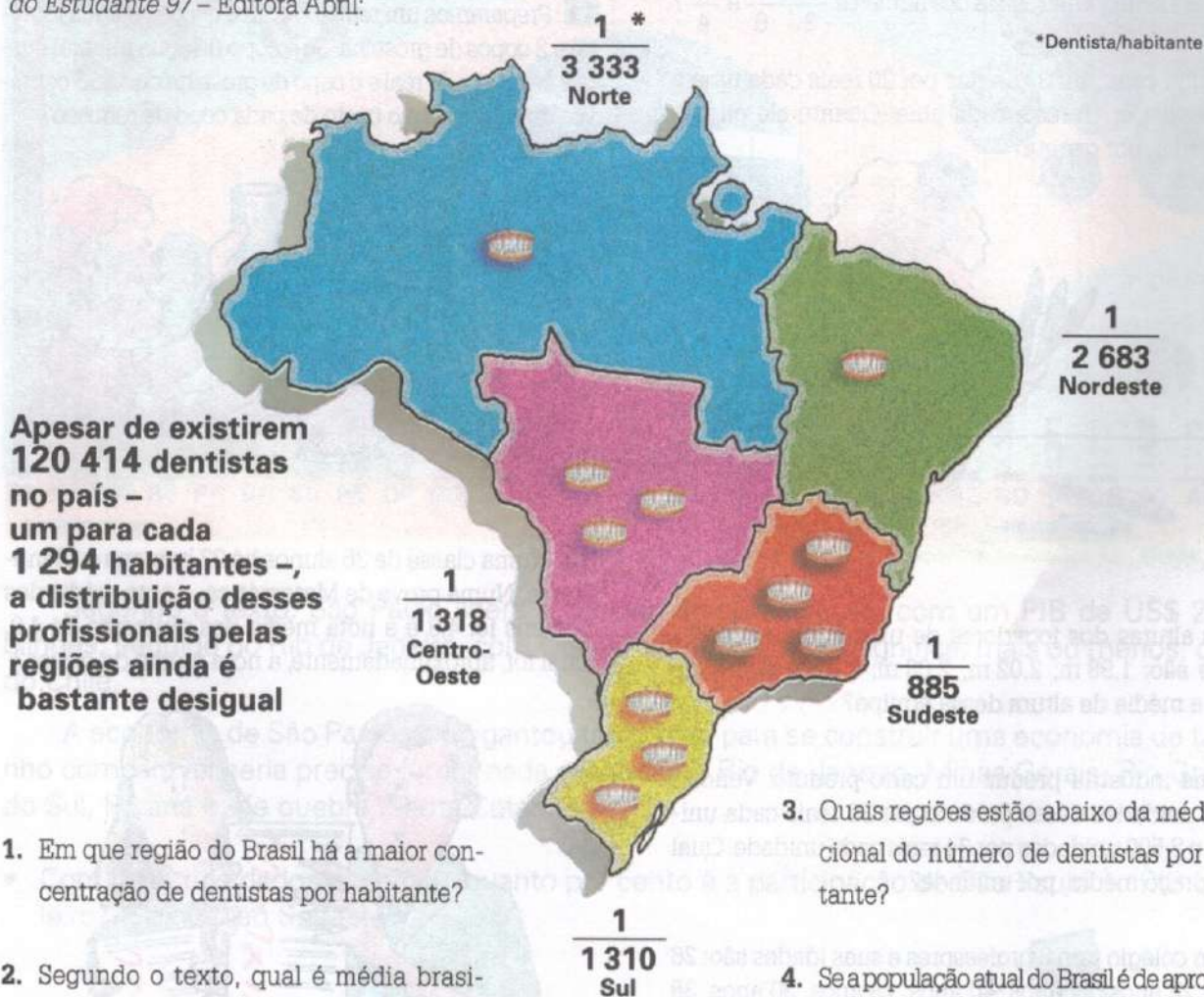
Portanto, o aluno teve média 5,7.

Nesse caso, o número 5,7 é chamado *média aritmética ponderada* dos números 6,0; 7,0; 5,0.

Pelos exemplos dados, observamos que a média de um aluno pode ser diferente, embora as notas sejam as mesmas. Logo, vemos que uma *média* depende das regras estabelecidas para o seu cálculo.

Explorando Gráficos

Observe o gráfico abaixo, sobre a distribuição dos dentistas no Brasil (dados de 1996), publicado no *Guia do Estudante 97* – Editora Abril:



- Em que região do Brasil há a maior concentração de dentistas por habitante?
- Segundo o texto, qual é a média brasileira do número de dentistas por habitante?
- Quais regiões estão abaixo da média nacional do número de dentistas por habitante?
- Se a população atual do Brasil é de aproximadamente 160 456 000 habitantes, calcule o número aproximado de dentistas no país.

FIXAÇÃO

1 Qual é a média aritmética dos números -25 , -22 , -13 , 15 e 30 ?

2 Determine a média aritmética ponderada dos números 8 , 15 e 20 , com pesos 2 , 2 e 1 , respectivamente.

3 Uma livraria vende a seguinte quantidade de livros de literatura durante uma certa semana.

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	sábado
13	23	22	27	22	25

Qual foi a média diária de livros vendidos durante essa semana?

4 Qual é a média aritmética dos números $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{4}$?

5 Karina comprou 3 canetas por 20 reais cada uma e 2 canetas por 15 reais cada uma. Quanto ela pagou, em média, por caneta?



6 As alturas dos jogadores de uma equipe de basquete são: $1,98$ m; $2,02$ m; $2,08$ m; $1,92$ m e $1,95$ m. Qual a média de altura dessa equipe?

7 Uma indústria produz um certo produto. Vendeu 3 500 unidades desse produto por 30 reais cada unidade e 8 500 unidades por 24 reais cada unidade. Qual foi o preço médio, por unidade?

8 Um colégio tem 8 professores e suas idades são: 26 anos, 28 anos, 34 anos, 40 anos, 28 anos, 30 anos, 38 anos e 32 anos. Qual a idade média dos professores desse colégio?

9 Numa empresa com 20 funcionários, a distribuição dos salários está representada no quadro abaixo. Qual é o salário médio dos empregados dessa empresa?

Número de empregados	Salário (em reais)
12	800
5	1 200
3	2 000

10 Num torneio de basquete, uma equipe marcou 104 pontos, 96 pontos, 117 pontos e 103 pontos nas 4 partidas que disputou na 1ª fase. Qual a média de pontos que essa equipe marcou nessa fase do torneio?

11 Preparamos um refresco com 8 copos de água mineral e 2 copos de groselha. Se o copo de água mineral custa 8 centavos de real e o copo de groselha custa 13 centavos de real, qual é o custo de cada copo de refresco?

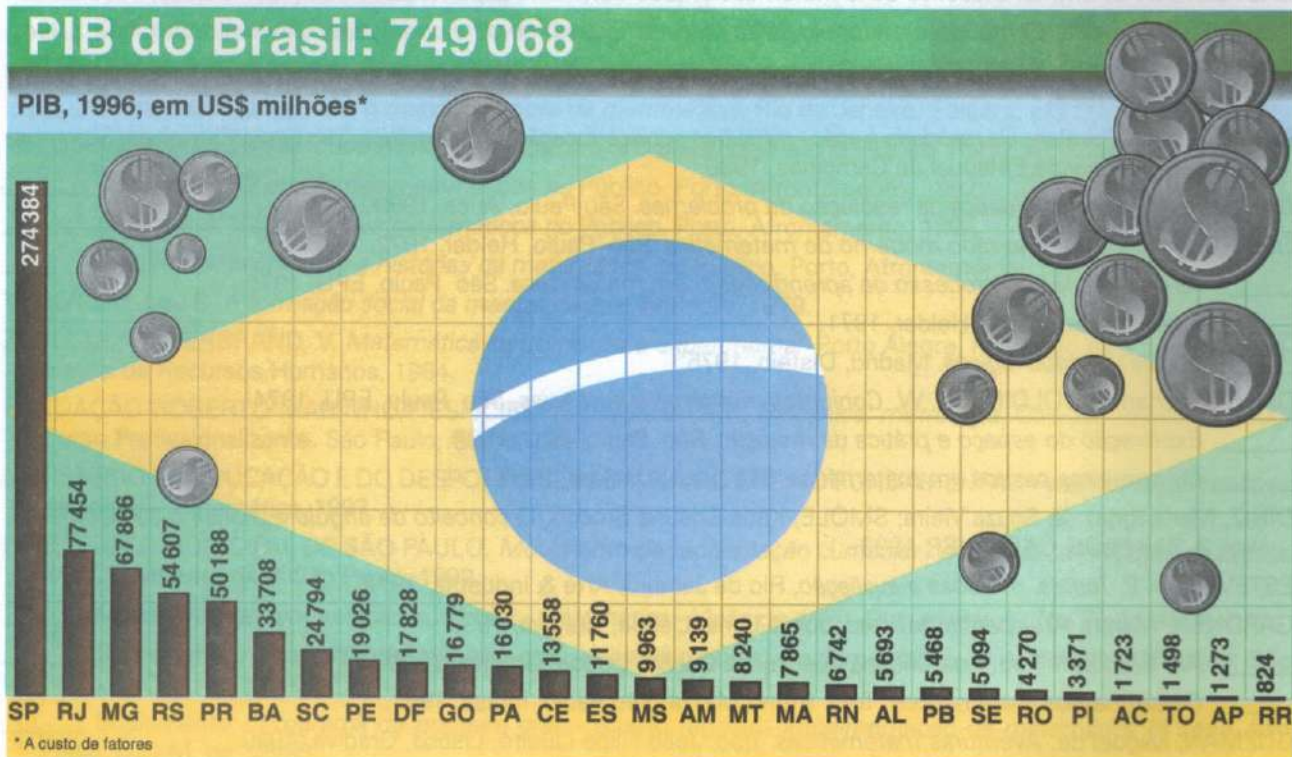


12 Numa classe de 35 alunos há 22 homens e 13 mulheres. Numa prova de Matemática, a nota média dos homens foi 4,8 e a nota média das mulheres foi 4,0. Qual foi, aproximadamente, a nota média da classe?



JORNAIS & REVISTAS

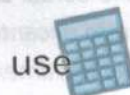
"Quem é quem entre os estados brasileiros" é o título de um artigo publicado na revista *Amanhã*, em novembro de 1997, que mostra a participação de cada estado no PIB* brasileiro:



Segundo o texto, São Paulo lidera o *ranking* de participação, com um PIB de US\$ 274,3 bilhões, seguido do Rio de Janeiro, com US\$ 77 bilhões – o que significa, mais ou menos, o PIB do Chile.

A economia de São Paulo se agigantou tanto que, para se construir uma economia de tamanho comparável seria preciso juntar nada menos que Rio de Janeiro, Minas Gerais, Rio Grande do Sul, Paraná e, de quebra, Santa Catarina.

- Com base nos dados acima, de quanto por cento é a participação de São Paulo no PIB brasileiro? E da região Sudeste?



* PIB – Produto Interno Bruto – é um dos mais importantes índices levados em conta no conjunto de indicadores de riqueza do Brasil.

Bibliografia

- ASOCIACIÓN DE MAESTROS ROSA SENSAT. *Didáctica de los números enteros*. Madrid, Nuestra Cultura, 1980.
- BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos geométricos*. Trad. Luís Filipe Coelho e Maria do Rosário Pedreira. Lisboa, Gradiva, 1991.
- _____. *100 jogos lógicos*. Trad. Luís Filipe Coelho e Maria do Rosário Pedreira. Lisboa, Gradiva, 1991.
- _____. *100 jogos numéricos*. Trad. Luís Filipe Coelho e Maria do Rosário Pedreira. Lisboa, Gradiva, 1991.
- BORDENAVE, Juan Díaz; PEREIRA, Adair Martins. *Estratégias de ensino-aprendizagem*. 7. ed. Petrópolis, Vozes, 1985.
- BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*, vol. 6. São Paulo, CAEM-USP, 1995.
- BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL, Luís Alberto S. *Estudo dirigido de matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro, Fundo de Cultura, 1967.
- BRUNER, Jerome S. *O processo da educação*. Trad. Lobo L. de Oliveira. 4. ed. São Paulo, Nacional, 1974.
- CAGGIANO, Angela et alii. *Problema não é mais problema*, vol. 4. São Paulo, FTD, 1996.
- CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la matemática moderna*. Trad. Felipe Robledo Vázquez. México, 1973.
- CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da matemática - números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.
- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (organizadores). *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação - reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo/Campinas, Summus/Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas*. São Paulo, Ática, 1989.
- DIENES, Zoltan P. *Aprendizado moderno de matemática*. São Paulo, Helder, 1972.
- _____. *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*. São Paulo, EPU, 1975.
- _____. *Frações*. São Paulo, Helder, 1971.
- _____. *Lógica y juegos lógicos*. Madrid, Distein, 1975.
- DIENES, Zoltan P.; GOLDING, E. W. *Conjuntos, números e potências*. São Paulo, EPU, 1974.
- _____. *Exploração do espaço e prática da medição*. São Paulo, EPU, 1984.
- _____. *Os primeiros passos em matemática*. São Paulo, Helder, 1969.
- DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *O conceito de ângulo e o ensino de geometria*, vol. 3. São Paulo, CAEM-USP, 1993.
- ESTEVES, O. P. *Testes, medidas e avaliação*. Rio de Janeiro, Arte & Indústria, 1972.
- GARDNER, Martin. *Ah, apanhei-te!* Trad. Jorge Lima. Lisboa, Gradiva, 1993.
- _____. *Ah, descobri!* Trad. Ana Cristina dos Reis e Cunha. Lisboa, Gradiva, 1990.
- _____. *Divertimentos matemáticos*. Trad. Bruno Mazza. São Paulo, Ibrasa, 1961.
- GUZMÁN, Miguel de. *Aventuras matemáticas*. Trad. João Filipe Queiró. Lisboa, Gradiva, 1990.
- _____. *Contos com contas*. Trad. Jaime Carvalho e Silva. Lisboa, Gradiva, 1991.
- _____. *Mirar y ver*. Madrid, Alhambra, 1977.
- HAYDT, Regina Cazaux. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo, Ática, 1988.
- HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. Porto Alegre, Educação & Realidade, 1993.
- IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande civilização*. Trad. Stella M. de Freitas Senra. 4. ed. São Paulo, Globo, 1992.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (organizadores). *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.
- MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna*. São Paulo, Cortez, 1990.
- MATAIX, Mariano Lorda. *Divertimentos lógicos y matemáticos*. Barcelona, Marcombo, 1979.
- _____. *El discreto encanto de las matemáticas*. Barcelona, Marcombo, 1988.
- _____. *Nuevos divertimentos matemáticos*. Barcelona, Marcombo, 1982.
- OCHI, Fusako Hori; PAULO, Rosa Monteiro; YOKOYA, Joana Hissae; Ikegami, João Kazuwo. *O uso de quadriculados no ensino de geometria*, vol. 1. São Paulo, CAEM-USP, 1992.

- PERELMÁN, Y. *Matemáticas recreativas*. Trad. F. Blanco. 6. ed. Moscou, Mir, 1985.
- PIAGET, Jean. *Fazer e compreender matemática*. São Paulo, Melhoramentos, 1978.
- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
- RATHS, Louis E. et alii. *Ensinar a pensar*. São Paulo, Herder/Edusp, 1972.
- ROCHA-FILHO, Romeu C. *Grandezas e unidades de medida - o sistema internacional de unidades*. São Paulo, Ática, 1988.
- SOUZA, Eliane Reame; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; PAULO, Rosa Monteiro; OCHI, Fusako Hori. *A matemática das sete peças do tangram*, vol. 7. São Paulo, CAEM-USP, 1995.
- TAHAN, Malba. *A lógica na matemática*. São Paulo, Saraiva, 1966.
- _____. *As maravilhas da matemática*. 5. ed. Rio de Janeiro, Bloch, 1983.
- _____. *Diabruras da matemática: problemas curiosos e fantasias aritméticas*. 2. ed. São Paulo, Saraiva, 1966.
- _____. *Didática da matemática*. vol. 1. 2. ed. São Paulo, Saraiva, 1965.
- _____. *Didática da matemática*. vol. 2. 2. ed. São Paulo, Saraiva, 1965.
- _____. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro, Record, 1991.
- _____. *Matemática divertida e delirante*. São Paulo, Saraiva, 1965.
- _____. *O homem que calculava*. 34. ed. Rio de Janeiro, Record, 1989.
- _____. *O problema das definições em matemática: erros, dúvidas e curiosidades*. São Paulo, Saraiva, 1965.
- _____. *Os números governam o mundo (folclore da matemática)*. Rio de Janeiro, Ediouro, s/d.
- VELOSO, Eduardo; VIANA, José Paulo. *Desafios: um ano de problemas no Público*. Porto, Afrontamento, 1991.
- _____. *Desafios 2: 52 problemas matemáticos no Público*. Porto, Afrontamento, 1992.
- _____. *Desafios 3: 52 problemas matemáticos no Público*. Porto, Afrontamento, 1994.
- _____. *Desafios 4: problemas e histórias da matemática no Público*. Porto, Afrontamento, 1995.
- VYGOTSKY, Lev S. *A formação social da mente*. Lisboa, Antídoto, 1979.
- ZARO, M.; HILLERBRAND, V. *Matemática instrumental e experimental*. Porto Alegre, Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos, 1984.
- FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO/FIESP/CIESP/SESI/SENAI/IRS. *Mecânica: metrologia*. Coleção Telecurso 2000/ Curso Profissionalizante. São Paulo, Globo, 1996.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO/SECRETARIA DO ENSINO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares nacionais - matemática*. 1997.
- PREFEITURA MUNICIPAL DE SÃO PAULO. *Movimento de reorientação curricular - matemática - Relatos de prática 4/8, Documento 6/92*. São Paulo, 1992.
- _____. *Movimento de reorientação curricular - matemática - Visão de área - Documento 5*. São Paulo, 1992.
- _____. *Suplemento - Programa de primeiro grau - ensino regular - implementação de Matemática 5ª série*. São Paulo, D.O.M. de 14/10/87.
- _____. *Suplemento - Programa de primeiro grau - ensino regular - implementação de matemática 6ª série*. São Paulo, D.O.M. de 3/8/88.
- _____. *Suplemento - Programa de primeiro grau - ensino regular - implementação de matemática 7ª e 8ª séries*. São Paulo, D.O.M. de 17/12/88.
- PREMEN — MEC/IMECC — UNICAMP. D'Ambrosio, Ubiratan (execução do projeto); Bastos, Almerindo Marques (coord.). *Geometria experimental: livro do professor*. Rio de Janeiro, 1985.
- _____. D'Ambrosio, Ubiratan (execução do projeto); Bastos, Almerindo Marques (coord.). *Geometria experimental 5ª série*. Rio de Janeiro, 1985.
- SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Matemática: curso ginásial*. vol. I. Trad. Lafayette de Moraes, Lydia Condé Lamparelli e colaboradores. São Paulo, EDART, 1967.
- _____. *Matemática: curso ginásial*. vol. II. Trad. Lafayette de Moraes. São Paulo, EDART, 1967.
- SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Proposta curricular para o ensino de matemática - 1º grau*. 4. ed. São Paulo, SE/CENP, 1991.
- _____. *Experiências matemáticas: 5ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 6ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 7ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.
- _____. *Experiências matemáticas: 8ª série*. São Paulo, SE/CENP, 1994.

Respostas dos exercícios

Unidade 1

Página 10

1. a) 49 e) $\sqrt{3}$ f) 243
 b) 121 f) $-\frac{1}{32}$ g) -0,216
 c) -125 g) 5,29
 d) $\frac{4}{25}$ h) -36
2. 32
 3. 4
 4. 2
 5. 380 jogos
 6. a) 9 diagonais b) 35 diagonais
 7. sim
 8. a) = b) \neq c) = d) =

Página 12

1. a) 2^{10} e) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$ f) $(1,1)^{20}$
 b) 7^4 f) $\left(\frac{3}{7}\right)^8$ g) $(0,1)^3$
 c) 5^{12} g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$
 d) 3^{13} h) 8^1
2. a) x^{14} c) x^{20} e) p
 b) x^2 d) a^{10}
3. a) x^2y^3 c) $x^{13}y^3$
 b) a^2b^4 d) $a^8b^{10}c^4$

Página 14

1. a) 1 b) -1 c) 1 d) -1
 2. -1
 3. $\frac{6}{5}$
 4. -2
 5. 3

Página 16

1. a) 81 c) 9 e) 1 g) $\frac{1}{9}$
 b) 27 d) 3 f) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{1}{27}$
2. a) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{16}$ g) $\frac{1000}{1}$
 b) $\frac{1}{32}$ e) $\frac{1}{64}$ h) $-\frac{1}{49}$
 c) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{10}$
3. a) 2 e) $\frac{3}{2}$ f) -9
 b) 4 f) $\frac{25}{4}$ g) $\frac{8}{27}$
 c) 9 g) $-\frac{27}{125}$
 d) -4 h) 6
4. a) 10^{-2} c) 5^{-4} e) 6^{-4}
 b) 7^{-3} d) 2^{-7} f) 10^{-8}
5. a) 16 c) $\frac{7}{8}$ e) 32
 b) 32 d) $\frac{25}{8}$ f) $\frac{1}{3}$
6. $\frac{5}{3}$
7. a) $\frac{1}{8x^6}$ c) $\frac{b}{ac^2}$ e) $\frac{a^2}{b^3}$
 b) $\frac{x^2}{9a^4}$ d) $\frac{y^3}{x^{12}}$ f) $\frac{bx^2}{a}$

8. a) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{3}$
 b) $-\frac{63}{16}$ d) 4
9. a) $\frac{x^4}{y^2}$ b) $\frac{b^2}{a^3}$
10. 10
 11. 2ab
 12. $-\frac{5}{6}$
 13. $\frac{xy+1}{xy-1} \cdot \frac{5}{4}$

Página 18

1. a) 7^3 c) 8^{-3} e) a^{-1}
 b) 10^{-3} d) x^2
2. a) 6^{-1} c) 7^{-3} e) x^8
 b) 2^9 d) 10^3 f) a^{-2}
3. a) 6^{-4} c) 5^3 e) a^{-21}
 b) 10^{-12} d) x^{-12} f) p^7
4. a) $5^{-2} \cdot 11^{-2}$ c) $2^2 \cdot 5^{-8}$
 b) $3^{-1} \cdot 10^{-2}$ d) $7^4 \cdot x^{-3}$
5. a) V b) V c) F d) V
6. a) 10^4 c) 10^7
 b) 10^{-11} d) 10^8 ou 1
7. a) $\frac{1}{5^{10}}$ c) $\frac{1}{5^2}$ e) x^2y^2
 b) $\frac{1}{2^2}$ d) $\frac{1}{10^2}$ f) $\frac{1}{6}$
8. a) 2^{x+3} e) 10^{2a} f) 3^{2a}
 b) 7^{x-1} g) 7^{2a+2} h) 10^3
 c) 5^{2x} g) 2¹
 d) 8^x h) 2^{2x-2}
9. a) x^{10} b) x^2 c) $\frac{1}{x^0}$
10. a^{20}

Página 20

1. a) 2^8 b) 2^{-7} c) 2^{-9} d) 2^{11}
 2. 3^8
 3. 5^{-4}
 4. a) 10^8 b) 10^{-5} c) 10^{-7} d) 10^3
 5. $\frac{1}{3^8}$
 6. a) $7 \cdot 10^2$ c) $7 \cdot 10^{-5}$ e) $9 \cdot 10^{-6}$
 b) $6 \cdot 10^{-2}$ d) $2 \cdot 10^{-3}$ f) $5 \cdot 10^{-1}$
 7. $3 \cdot 10^5$ km/s
 8. 2^8
 9. 3^2
 10. 5^4
 11. 2^8 ou 32
 12. a) $x^{-2} \cdot y^3$ ou $\frac{y^3}{x^2}$
 b) x^2y^2
 13. $\frac{1}{10^2}$
 14. 6^3

Retomando o que aprendeu

Página 21

1. +113,04
 2. $\frac{1}{a}$
 3. 8
 4. x^6
 5. $-\frac{34}{39}$
 6. a) x^{-1} b) t^{-8} c) a^{10} d) x^{-2}
 7. 10

8. $\frac{2y}{x-2y}$
 9. -3
 10. 1
 11. $\frac{1}{ab(a+b)}$
 12. $\frac{14}{51}$
 13. $11y^8$
 14. $(a+b)^2$
 15. 3st

Unidade 2

Página 27

1. a) sim c) não e) sim g) sim
 b) sim d) sim f) não h) não
2. a) $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt{-125}$
 $\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{256}$
 b) $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt{-1}$
3. Sim, pois é igual a $\sqrt{121} = 11$.

4. Sim, pois é igual a $\sqrt{9} = 3$.
5. a) 5 c) 0,1 g) 2 j) 5
 b) 6 e) -3 h) -2
 c) -2 f) 2 i) 11
6. a) 4 d) -1 g) 24
 b) -3 e) $-\frac{1}{10}$
 c) 6 f) 7
7. a \neq b
 8. a = b
 9. xy

Página 30

1. a) 10 d) 7 g) $5a^2$
 b) 3 e) $2x$ h) x^2y
 c) 2 f) $(2 \cdot 5)$
2. a) 7 c) 5 e) 3
 b) 3 d) 2 f) 7
3. a) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt[3]{5^4}$ f) $\sqrt[3]{xy}$
 b) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{a^3}$ g) $\sqrt[3]{a}$
 c) $\sqrt[3]{10}$ g) \sqrt{y}
 d) $\sqrt[3]{x^2}$ h) $\sqrt[3]{6^2}$
4. a) $x = 7$ c) $x = 1$
 b) $x = 1$ d) $x = 2$
5. a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[4]{2^2}$
 b) $\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[3]{2^2}$ f) $\sqrt[3]{2^5}$
6. a) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt[3]{a}$ e) $\sqrt[3]{10}$
 b) $\sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[3]{2}$ f) $\sqrt[3]{2}$
7. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$
 8. a) \sqrt{x} c) $\sqrt[3]{x}$
 b) $\sqrt[3]{2x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$
9. a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = 2$
10. a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$
 b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{13}$
 c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$
 d) $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{11}$
 e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$
 f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
 g) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y}$
 h) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}$
11. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$
 b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7}$

- c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$
 d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$
 e) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$
 f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{11}$
12. a) $\sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{39}$
 b) $\sqrt[3]{14}$ d) $\sqrt{70}$
13. a) \sqrt{x} c) $\sqrt[3]{xy}$ e) \sqrt{y}
 b) $\sqrt[3]{y}$ d) $\sqrt{x^2}$
14. a) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$
 b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5}}$ d) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}}$
15. \sqrt{ab}

Página 33

1. a) $2\sqrt{11}$ f) $2\sqrt[3]{2}$
 b) $7\sqrt{2}$ g) $8\sqrt{2}$
 c) $3\sqrt[3]{5}$ h) $6\sqrt{3}$
 d) $3\sqrt[3]{10}$ i) $100\sqrt[3]{5}$
 e) $55\sqrt[3]{3}$ j) $4\sqrt[3]{2}$
2. a) $x^2\sqrt{x}$ e) $x\sqrt{x}$
 b) $y\sqrt[3]{y}$ f) $y^2\sqrt[3]{y^2}$
 c) $xy\sqrt{y}$ g) $y\sqrt[3]{y}$
 d) $xy\sqrt[3]{y^2}$ h) $x\sqrt[3]{x^3}$
3. a) $3\sqrt{5}$ f) $3\sqrt[3]{30}$
 b) $10\sqrt[3]{3}$ g) $2\sqrt[3]{6}$
 c) $10\sqrt[3]{5}$ h) $2\sqrt[3]{11}$
 d) $3\sqrt[3]{2}$ i) $20\sqrt{3}$
 e) $2\sqrt[3]{2}$ j) $5\sqrt[3]{3}$
4. a) 4,23 c) 5,64 e) 12,69
 b) 6,92 d) 14,1 f) 8,65
5. a) $2x\sqrt{2x}$ e) $xy^2\sqrt{11}$
 b) $2y^2\sqrt{5y}$ f) $2y\sqrt[3]{3xy}$
 c) $3x^2\sqrt[3]{x}$ g) $x^2y^2\sqrt[3]{3x}$
 d) $10x^2y^2\sqrt[3]{3y}$ h) $5x^2\sqrt{2x}$
6. a) $(x-y)$ d) $(a+b)\sqrt{2}$
 b) $(x+1)$ e) $\frac{1}{x+3}$
 c) $2(x-1)$
7. a) 45 b) 64 c) 6
8. 2
 9. a) $5 \cdot (1 + \sqrt{2})$ c) $2 \cdot (5 - \sqrt{2})$
 b) $3 \cdot (1 - \sqrt{2})$ d) $10 \cdot (1 + \sqrt{2})$
10. a) $1 + \sqrt{3}$ c) $1 + \sqrt{2}$
 b) $2 - \sqrt{2}$ d) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$
11. a) $4\sqrt[3]{6}$ b) 2
 12. 34,60
 13. $(a+b)\sqrt{a-b}$

Página 35

1. a) $\sqrt{147}$ d) $\sqrt{175}$
 b) $\sqrt{20}$ e) $\sqrt[3]{250}$
 c) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt[3]{640}$

2. $x^2 + 2x - 35 = 0$
 3. $x^2 - 3x - 70 = 0$
 4. $4x^2 - 4x - 24 = 0$ ou $x^2 - x - 6 = 0$
 5. $n^2 - 3n - 20 = 0$

Página 66

1. a) (0,6) g) $\left\{0, \frac{3}{4}\right\}$
 b) (-4,4) h) (0,3)
 c) (-1,1) i) $\left\{0, \frac{1}{6}\right\}$
 d) (0,-1) j) $\{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$
 e) $\left\{0, \frac{2}{7}\right\}$ l) $\left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}$
 f) \emptyset m) $\left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}$
 2. a) (-9,9) n) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$
 b) (0,9) g) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
 c) (0,11) h) (-2,2)
 d) (-6,6) i) (-3,3)
 e) (0,1) j) $\left\{\frac{8}{5}\right\}$
 3. 4
 4. 0 ou 5
 5. -11 ou 11
 6. 0 ou 7
 7. -3 ou 3
 8. a) 10 cm c) 40 cm
 b) $\frac{25}{6}$ cm d) $\frac{169}{3}$ cm
 9. 21 m e 19 m
 10. a) (-5a, 5a) d) (-6m, 6m)
 b) (0,3b) e) (-2a, 2a)
 c) $\left\{0, \frac{a}{2}\right\}$

Página 72

1. a) 9 d) 16 g) 36
 b) 25 e) $\frac{25}{4}$ h) $\frac{1}{4}$
 c) 1 f) $\frac{81}{4}$
 2. a) (2,4) g) (-1,5)
 b) (1,9) h) $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$
 c) (-4) i) (4,6)
 d) (3) j) $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$
 e) (-2,3) l) (1,7)
 f) (1,2) m) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Página 77

1. a) $\Delta = 25$ (raízes reais diferentes)
 b) $\Delta = 36$ (raízes reais diferentes)
 c) $\Delta = 0$ (uma só raiz real)
 d) $\Delta = -11$ (não tem raízes reais)
 e) $\Delta = 0$ (uma única raiz real)
 f) $\Delta = -12$ (não tem raízes reais)
 2. a) (-3,4) e) (6)
 b) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ f) $\left\{-1, \frac{1}{9}\right\}$
 c) (-4,6) g) $\left\{-\frac{3}{2}, 6\right\}$
 d) \emptyset h) $\left\{-\frac{2}{5}, 1\right\}$

3. a) (-1,4) d) $\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right\}$
 b) \emptyset e) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$
 c) (1) f) \emptyset

4. b) (0,2)
 5. $x = \frac{1}{4}$ ou $x = -1$
 6. 2 ou 6
 7. a) (-4,-1) e) $\left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$
 b) (-5,1) f) (-6,1)
 c) (-7,-6) g) (1,5)
 d) (-4,5) h) $\left\{-\frac{4}{3}, 6\right\}$
 8. $x = -\frac{1}{6}$ ou $x = -2$
 9. a) 2
 10. a) (-9,-1) e) $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$
 b) $\left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$ f) $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$
 c) $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$ g) (1,5)
 d) (3) h) (1,4)
 11. 1 ou 4

Página 79

1. 4 ou -9
 2. 3
 3. 6
 4. 2
 5. 25 m e 12 m
 6. a) 10 m e 7 m b) 34 m
 7. para n = 20
 8. 4 segundos
 9. a) 8
 b) 14 cm e 10 cm
 c) 196 cm²
 10. 15 m
 11. 12 equipes
 12. 5 horas
 13. 5 cm
 14. 28 cm e 12 cm
 15. a) 8 b) 64 c) 64

Página 82

1. -2 e 4
 2. sim
 3. c = 15
 4. b = 12
 5. sim
 6. $m \leq \frac{1}{2}$
 7. $k > \frac{9}{4}$
 8. b = 8 ou b = -8
 9. p < 1
 10. m = 3

Página 85

1. a) 6 b) -2 c) -3
 2. a) $x' + x'' = 1, x' \cdot x'' = -20$
 b) $x' + x'' = -\frac{1}{2}, x' \cdot x'' = \frac{16}{16}$
 c) $x' + x'' = \frac{2}{3}, x' \cdot x'' = -\frac{1}{2}$
 d) $x' + x'' = -\frac{3}{10}, x' \cdot x'' = -\frac{2}{5}$
 3. 3
 4. $c = \frac{5}{2}$
 5. $b = \frac{7}{3}$
 6. $m = \frac{9}{4}$

7. p = 6
 8. p = -2
 9. m = 7
 10. m = 1

Página 87

1. a) $x^2 - 12x + 35 = 0$
 b) $x^2 - 12x + 36 = 0$
 c) $x^2 - 9x - 22 = 0$
 d) $x^2 + 13x + 40 = 0$
 e) $x^2 - 64 = 0$
 f) $x^2 + 9x = 0$
 g) $2x^2 + 7x - 4 = 0$
 h) $18x^2 - 24x + 9 = 0$
 i) $49x^2 - 4 = 0$
 j) $x^2 - 6\sqrt{2}x + 10 = 0$
 l) $x^2 + 8x + 14 = 0$
 m) $x^2 + 2x - 9 = 0$
 2. a) $x^2 - 7x + 10 = 0$
 b) $x^2 + 4x - 60 = 0$
 c) $2x^2 - x - 1 = 0$
 3. a) 3 e 2 c) 6 e 4 e) 6 e -2
 b) 5 e 2 d) 7 e 1

Página 89

1. a) (-2,2) d) (-2,2)
 b) (-3,3) e) \emptyset
 c) (0,-4,4)
 2. a) (-3,3,-2,2)
 b) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
 c) (-2,2)
 d) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -2,2\}$
 3. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
 4. (-5,5,-1,1)
 5. $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -3,3\}$
 6. -1 ou 1

Página 91

1. (2)
 2. 4 ou 2
 3. (2)
 4. -4 ou 5
 5. 1
 6. (1,4)
 7. $x = 4$ ou $x = -3$
 8. 5
 9. (2)
 10. 7

Página 94

1. a) (10,5), (-14,-7)
 b) (7,2), (2,7)
 c) (1,2), (-3,4)
 d) (-1,5), (3,1)
 e) (2,4), (4,2)
 f) $(1,2), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 g) (2,2), (-3,-3)
 2. duas possibilidades: $x = 20$ e $y = 4$ ou -20 e $y = -4$
 3. 14 e 10
 4. $x = 4$ e $y = 12$ ou $x = 9$ e $y = 7$
 5. $x = 15$ e $y = 5$
 6. 9 e 3 ou -14 e 26
 7. $x = 3$ e $y = 1$
 8. 12 m e 8 m
 9. 36 cm² e 16 cm²
 10. Carlos tem 15 anos e Eduardo tem 10 anos.
 11. 8 km e 5 km
 12. duas possibilidades: $x = 5$ cm e $y = 3$ cm ou $x = 6$ cm e $y = 2.5$ cm
 13. $x = 6$ cm e $y = 9$ cm
 14. 100 m

Retomando o que aprendeu

Página 95

1. $x = \frac{1}{5}$ ou $x = -1$
 2. 5 ou $-\frac{1}{3}$
 3. p = -3
 4. a) 49 b) 7 ou -7
 5. 1,5 ou -0,5
 6. a) $(x+2)(x-2)(x+1) = 0$
 b) (-2,2,1)
 7. $-\frac{7}{144}$
 8. a) $(x-11)(x-1)$
 b) S = (0,1,11)
 c) 4
 9. -2
 10. duas possibilidades: 50 m e 20 m ou 10 m e 100 m
 11. k = 5 ou k = -1
 12. 0 ou $\frac{11}{2}$
 13. 52 e 18
 14. (-4,4)
 15. $m = \frac{1}{3}$
 16. $x = 3$ ou $x = -4$
 17. (2,0), (1,1)
 18. 9
 19. Devemos ter $m < -\frac{1}{4}$
 20. a) $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{16}{15}$
 21. a) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
 b) $2-\sqrt{3}, \sqrt{3}$
 22. $x^2 - 3x - 54 = 0$
 23. -1
 24. -2
 25. $\frac{3}{5}$ e $-\frac{2}{3}$
 26. 14
 27. $+\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$
 28. $\frac{5}{6}$

Unidade 4

Explorando

Página 103

1. a) (F,8) b) (F,5) c) (G,7)
 2. a) casa de carnes
 b) bomba de gasolina
 c) estátua

Página 105

1. 3ª fila horizontal: (2,3), (4,3), (6,3) e (8,3); 4ª fila horizontal: (1,4), (3,4), (5,4) e (7,4)
 2. 5ª fila horizontal: (1,5), (3,5), (5,5) e (7,5); 6ª fila horizontal: (2,6), (4,6), (6,6) e (8,6)

Página 105

1. a) (5,3) b) (3,2) c) (4,4)
 2. A(5,4), B(-4,3)
 C(-2,-2), D(6,-3)
 M(-5,0), N(0,-4)
 P(2,0)
 3. a) (F,6) b) (E,7)
 4. a) (4,2) b) (6,0) c) (0,-2)
 5. a) A(-2,-2), B(2,-2), C(2,2), D(-2,2)
 b) 4
 6. a) A(1,1), B(5,1), C(1,3)
 b) retângulo
 c) 4 unidades
 d) 2 unidades
 7. a) (4,3) b) 3 c) eixo x
 10. a) sim b) isósceles
 11. sim
 12. a) 8 unidades b) 32 unidades
 13. a) retângulo b) 18
 14. losango
 15. 12 unidades

5. 48 m e 32 m
 6. a) 2
 b) $x = 25$; $y = 22$; $z = 35$
 c) 2
 7. 50 cm
 8. a) $\frac{3}{2}$ b) 1,4 cm c) 105°
 9. 27 cm e 18 cm
 10. $x = 15$ cm; $y = 8,5$ cm; $z = 7$ cm;
 $w = 6,6$ cm
 11. 61,25 cm
 12. a) 20 m por 60 m b) 160 m
 13. 36 cm
 14. a) 10 m e 12 m
 b) 30 cm²
 c) 120 m²

Página 185

1. a) sim b) não c) sim d) sim
 2. a) sim
 b) $\overline{AB} \text{ e } \overline{EF}$, $\overline{BC} \text{ e } \overline{DE}$, $\overline{AC} \text{ e } \overline{DF}$
 3. a) $a = 55^\circ$, $b = 60^\circ$, $c = 65^\circ$
 b) $\triangle ABC \text{ e } \triangle AFO$
 4. a) $\overline{AB} \text{ e } \overline{PM}$, $\overline{BC} \text{ e } \overline{PN}$, $\overline{AC} \text{ e } \overline{MN}$
 b) $\frac{x}{z} = \frac{y}{x}$ ou $x^2 = y \cdot z$
 5. a) $x = 24$
 $y = 13,5$
 b) $x = 4$
 $y = 6$
 c) $x = \frac{10}{3}$
 $y = 2$
 d) $x = \frac{\sqrt{21}}{3}$
 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 6. $x = 0,75$
 7. a) sim
 b) $\overline{AB} \text{ e } \overline{DF}$, $\overline{AC} \text{ e } \overline{DE}$, $\overline{BC} \text{ e } \overline{EF}$
 8. a) $x = 3$, $y = 8$
 b) $x = 12$, $y = 6,4$
 9. 36 cm
 10. 45 cm
 11. $x = 6$, $y = \frac{4}{3}$
 12. a) 5 cm
 b) 28 cm e 14 cm
 c) 2
 13. 9 m
 14. 9 cm cada
 15. 18 cm e 21,6 cm
 16. $x = 3,5$
 $y = 7$
 17. $x = 8,5$
 18. $x = 4,8$ cm
 $y = 3,6$ cm

Página 189

1. a) $x = 20$ b) $x = 5,4$
 $y = 9$ $y = 16$
 2. a) $x = 6$, $y = 3$
 b) $AB = 10$, $AC = 15$
 c) $ABC: 32,5$ e $AMN: 13$
 d) $\frac{5}{2}$
 3. $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$
 4. $y = 2x$
 5. $CE = DE = 9$
 $BE = 12$
 6. 250 m
 7. a) $\frac{2}{3}$ b) 4 c) $\frac{2}{3}$
 8. $AE = 204$ cm
 9. 36 cm
 10. 18 cm
 11. $x = 2,4$

Retomando o que aprendeu

Página 191

1. 8 cm, 12 cm, 18 cm; 13,5 cm
 2. 37,5 m
 3. a) 24 m b) 288 m²
 4. 6 m
 5. a) $\frac{25}{3}$ cm
 b) $\frac{20}{3}$ cm
 c) $\frac{5}{4}$
 6. 24 cm
 7. 9 cm
 8. 2,4 cm
 9. $t = 10,5$
 10. 4 cm
 11. 6,4 cm
 12. 4,8 cm
 13. 500 cm
 14. 1,6 cm
 15. $DE = \frac{5}{2}$ ou 2,5; $AD = \frac{13}{2}$ ou 6,5
 16. 2 cm
 17. a) 8 cm, 6 cm, 10 cm
 b) 24 cm
 c) 36 cm

Unidade 8

Página 200

1. a) $x = 35$ d) $x = 2\sqrt{5}$
 b) $x = 7$ e) $x = 2$
 c) $x = 4\sqrt{6}$ f) $x = 40$
 2. Sim, pois $26^2 = 24^2 + 10^2$
 3. 11 cm
 4. $3\sqrt{2}$ cm
 5. 20 m
 6. 5 m
 7. 5 milhas/hora e 12 milhas/hora
 8. 8 m
 9. 10 m
 10. a) 45 b) 51
 11. a) 6 b) 72
 12. a) $2\sqrt{6}$ c) 10
 b) $4\sqrt{5}$ d) 28
 13. a) 20 b) $12\sqrt{10}$
 14. $x = 5$ e $y = 13$
 15. $6x^2 - x - 1$
 16. a) $4\sqrt{2}$ cm b) $(8 + 4\sqrt{2})$ cm
 17. a) 32 b) 56 c) 68
 18. 85
 19. $x = 7$, $h = 24$
 20. 20 cm
 21. $h = 32$ cm
 22. 46 cm
 23. 6 cm e 8 cm
 24. a) 41 cm b) 184 cm
 25. a) 10 cm b) $3\sqrt{29}$ cm
 26. a) 5 cm b) 44 cm
 27. $x = 2\sqrt{11}$ cm
 28. 4 m
 29. 24 cm e 10 cm

Explorando

Página 203

2. sim
 3. Com o compasso transportar a medida $\sqrt{3}$ duas vezes para a direita, a partir da origem.

Página 205

1. b) $d = 4\sqrt{2}$ cm
 2. b) $h = 6\sqrt{3}$ cm
 3. 11 cm e 44 cm
 4. 18 cm

5. 21,15 cm
 6. 6,92 cm²
 7. a) $10\sqrt{2}$ cm
 b) $40\sqrt{2}$ cm
 c) 200 cm²
 8. $3\sqrt{6}$ cm

Página 209

1. $x^2 = y^2 + z^2$; $p^2 = rs$; $y^2 = xr$; $z^2 = xs$;
 $px = yz$; $x = r + s$
 2. $t^2 = xy$
 3. $m = 4$; $n = 12$
 4. $b = 18$; $h = 12\sqrt{2}$
 5. $n = 25$; $a = 34$
 6. $a = 100$ mm; $h = 48$ mm
 $b = 80$ mm; $c = 60$ mm
 7. a) 25 cm b) 6,72 cm
 8. a) 20 cm
 b) $10\sqrt{3}$ cm
 c) $5\sqrt{3}$ cm
 9. $x = 12$ cm
 10. $x = 6$ cm; $y = 2\sqrt{13}$ cm;
 $z = 3\sqrt{13}$ cm
 11. 48 km
 12. 240 cm
 13. $x = 25$ cm

Retomando o que aprendeu

Página 211

1. 200 m
 2. a) 30 cm
 b) 14,4 cm
 c) 19,2 cm e 10,8 cm
 3. 10 cm; $(10 - 2\sqrt{5})$ cm
 4. 12,5 cm
 5. $2\sqrt{3}$ cm
 6. a) 9 cm d) 12 cm
 b) 36 cm e) 78 cm
 c) 70 cm
 7. $3\sqrt{2}$ cm
 8. a) $2\sqrt{3}$ cm b) 3 cm
 9. a) 4,8 cm
 b) 3,6 cm e 6,4 cm
 10. 25
 11. 4
 12. a) $y^2 = 2x - x^2$ b) $x = 1$
 13. 400 km
 14. 4 cm, 12 cm, $4\sqrt{10}$ cm
 15. 1,3 km
 16. a) 40 m b) 20 m c) 40 m
 17. 50 cm, 40 cm, 30 cm

Unidade 9

Página 219

1. $\text{sen } \hat{B} = 0,74$
 $\text{cos } \hat{B} = 0,66$
 $\text{tg } \hat{B} = 1,11$
 2. $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\text{tg } 45^\circ = 1$
 3. $\text{sen } 35^\circ = 0,56$
 $\text{cos } 35^\circ = 0,83$
 $\text{tg } 35^\circ = 0,68$
 4. $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$

5. $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$
 $\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 6. $\text{sen } \hat{B} = 0,6$
 $\text{cos } \hat{B} = 0,8$
 $\text{tg } \hat{B} = 0,75$

Página 224

1. $x = 8,19$; $y = 3,78$
 2. $a = 20$; $c = 10\sqrt{3}$
 3. $x = 4,48$; $y = 5,39$
 4. $a = 24$; $b = 12$
 5. $30\sqrt{2}$ cm
 6. a) 37,60 cm b) 35,20 cm
 7. 30 cm e 40 cm
 8. 24 cm
 9. $x = 9,5$ cm
 $y = 3,1$ cm
 perímetro = 25,2 cm
 10. $x = 12$; $y = 6\sqrt{3}$
 11. a) $r = 6\sqrt{3}$ cm b) $x = 12\sqrt{3}$ cm
 12. a) $x = 100\sqrt{3}$ cm
 b) $y = 100$ cm
 c) $AD = 200$ cm
 13. a) $h = 3$ cm
 b) $x = 3\sqrt{3}$ cm; $y = \sqrt{3}$ cm
 c) $22 + 6\sqrt{3}$ cm
 14. 19,52 cm
 15. 6,0 m
 16. 2,6 m
 17. 6,36 km
 18. a) $h = 14,40$ m b) 32,20 m
 19. 66 m 20. 100 m
 21. a) 5,19 b) 10,38
 22. 30,20 m 23. 4,36 m

Página 232

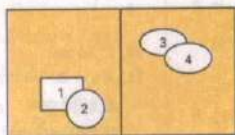
1. $x = 10$
 2. $a = 37,6$ cm; $b = 39,2$ cm
 3. $4\sqrt{31}$ cm
 4. $x = 5,1$ cm
 5. $c = 2\sqrt{10}$ cm
 6. $\text{cos } \hat{B} = \frac{11}{14}$
 7. $x = 6$
 8. $x = \sqrt{93}$ cm
 9. $x = 8\sqrt{3}$ cm
 10. $x = 60^\circ$ 11. $= 78,10$ m
 12. $x = 98$ m; $y = 95$ m

Retomando o que aprendeu

Página 233

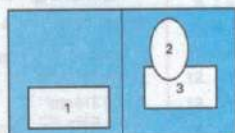
1. a) $4\sqrt{3}$ cm
 b) 4 cm
 c) 10,92 cm
 2. $PQ = 3$ cm
 3. $d = 122$ m
 4. $x = 120\sqrt{3}$; $y = 240$
 5. a) 27 cm
 b) $9\sqrt{3}$ cm
 c) $18 + 18\sqrt{3}$ cm
 6. 2 cm 7. $r = 12$ cm
 8. $d = 36,64$ milhas
 9. $x = 20$ cm; $h = 30$ cm
 10. a) 2,64 cm b) 7,64 cm c) 9,64 cm
 11. 75 km 12. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ km
 13. 18 m 14. $\sqrt{7}$
 15. 8 m 16. 4

Créditos das páginas de abertura



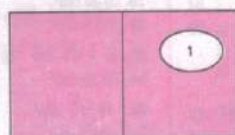
Páginas 98 e 99

Foto 1: Juca Martins/Pulsar
Foto 2: Sérgio Dotta Jr/The Next
Foto 3: Delfim Martins/Pulsar
Foto 4: Ron Chapple/Keystone



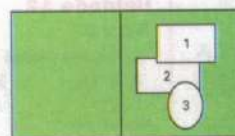
Páginas 128 e 129

Fotos 1 a 3: Corel Stock Photo



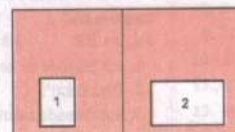
Página 149

Foto 1: Corel Stock Photo



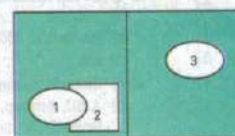
Página 169

Fotos 1 a 3: Nelson Toledo



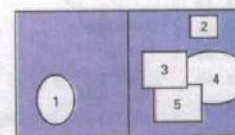
Páginas 194 e 195

Foto 1: Ippolito Rosellini. Século XIX
Foto 2: Stock Photos



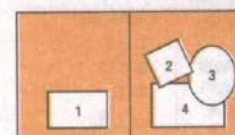
Páginas 214 e 215

Fotos 1 a 3: PhotoDisc



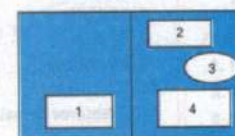
Páginas 238 e 239

Foto 1: Keystone
Foto 2: c. 1650 a.C. Trustees of the British Museum, Londres
Foto 3: Keystone
Foto 4: Corel Stock Photo
Foto 5: Sérgio Dotta Jr/The Next



Páginas 258 e 259

Foto 1: Ippolito Rosellini. Século XIX
Fotos 2 a 4: PhotoDisc



Páginas 278 e 279

Gráficos 1 e 2: Adaptado da Folha de S. Paulo, 16/10/97.
Gráfico 3: Adaptado da Folha de S. Paulo, 22/9/97.
Gráfico 4: Adaptado da Folha de S. Paulo, 5/10/97.