Ênio Silveira

MATEMÁTICA

COMPREENSÃO E PRÁTICA

8º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular: MATEMÁTICA

MODERNA

Ênio Silveira

Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular. Autor de obras didáticas de Matemática.

MATEMÁTICA
COMPREENSÃO E PRÁTICA

8º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

3ª edição
São Paulo, 2015

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay
Edição de texto: Luana Fernandes de Souza, Maria Cecília da Silva Veridiano, Dario Martins de Oliveira, Maria Aiko Nishijima, Zuleide Maria Vilela da Motta Talarico
Assistência editorial: Roberto Paulo de Jesus Silva
Preparação de texto: Denise Ceron, Maria Aiko Nishijima
Gerência de *design* e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Coordenação de *design* e projeto gráfico: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Aurélio Camilo, Daniel Messias
Capa: Daniel Messias
Foto: Foto 360° de uma paisagem. Palmeiras em Wellington, Flórida, 2012.
© Randy Scott Slavin
Coordenação de arte: Patricia Costa, Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva, Carolina de Oliveira
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: William Taciro, Alexandre Santana de Paula
Ilustrações de vinhetas: Daniel Messias
Coordenação de revisão: Adriana Bairrada
Revisão: Cecília Setsuko Oku, Fernanda Marcelino, Rita de Cássia Sam, Thiago Dias
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Maria Mendonça
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Bureau São Paulo, Marina M. Buzzinaro, Resolução Arte e Imagem
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio N. Precendo, Hélio P. de Souza, Marcio H. Kamoto, Rubens M. Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Matemática : compreensão e prática / Ênio Silveira. — 3. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02026 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2015
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro aluno,

Ideias, por mais brilhantes e elaboradas que sejam, só adquirem um sentido maior quando encontram aplicação no dia a dia.

A Matemática jamais deve ser vista como problema, mas sim como solução. Ela nos conduz por caminhos aparentemente tortuosos ou inacessíveis, abrindo atalhos, encurtando distâncias e superando obstáculos cotidianos ou científicos.

Com as situações apresentadas neste livro, você adquirirá conhecimentos que o ajudarão no desenvolvimento da sua formação escolar, pessoal e profissional. Em cada página estudada, tarefa resolvida ou atividade solucionada, você perceberá que a Matemática é uma ferramenta poderosa que pode te ajudar a resolver muitos problemas.

O autor

Aos meus pais,
Isaías, Maria Amélia (*in memoriam*)

ESTRUTURA DE CAPÍTULO

Cada volume está dividido em capítulos, organizados de acordo com esta estrutura:

PÁGINAS DE ABERTURA

O conteúdo do capítulo é explorado inicialmente em duas páginas de abertura, compostas de uma imagem e o boxe “É hora de observar e discutir”.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Composto de um texto que explora a imagem da abertura e atividades que incentivarão você a refletir sobre o conteúdo que será trabalhado, considerando o conhecimento obtido em capítulos ou em anos anteriores.

TROCANDO IDEIAS

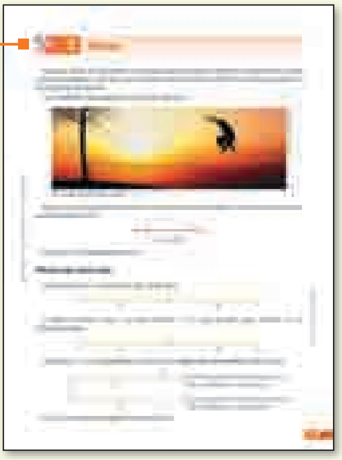
Situação introdutória sobre o conteúdo abordado no capítulo.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Contextualização do conteúdo na história da Matemática.

APRESENTAÇÃO DOS CONTEÚDOS

O conteúdo é apresentado de forma clara e direta.



ATIVIDADES

Após cada conteúdo estudado, propomos atividades com nível de dificuldade crescente. Algumas delas abordam o cálculo mental e o trabalho com a calculadora. Outras propõem a discussão e a resolução em duplas.

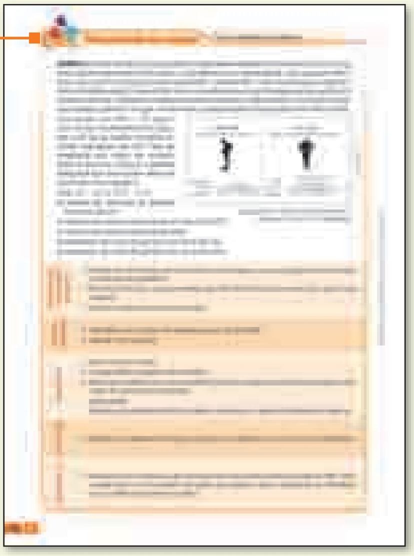
cálculo mental

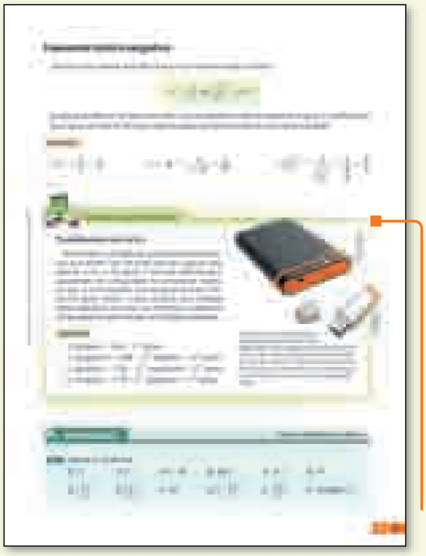
trabalho com a calculadora

duplas

RESOLVENDO EM EQUIPE

Em alguns capítulos, há uma proposta de atividade para incentivar a participação coletiva dos alunos na resolução de situações-problema.





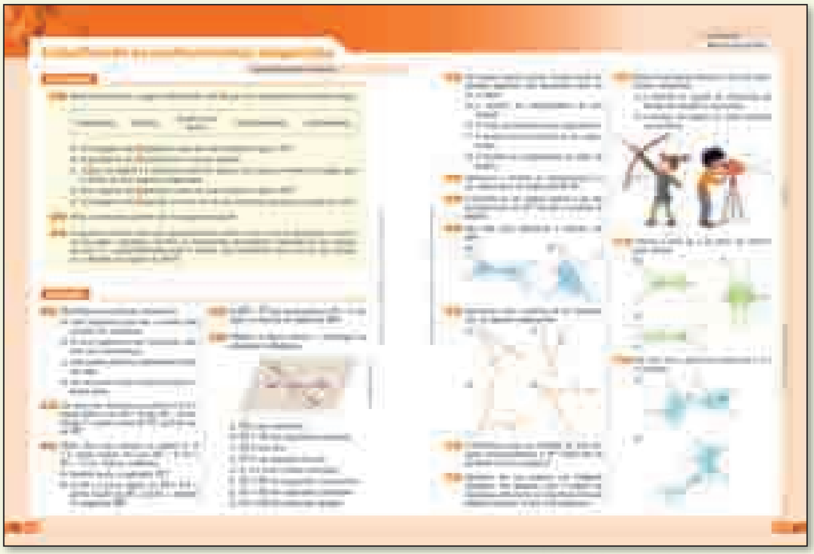
LENDO E APRENDENDO

Texto que explica e enriquece o conteúdo principal.

TRABALHANDO OS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS

Atividades que, no final de cada capítulo, abordam todo o conteúdo apresentado. A seção é dividida em duas partes:

- *Revisitando* – composta de atividades de revisão e autoavaliação;
- *Aplicando* – explora o conteúdo por meio de atividades com diferentes níveis de dificuldade, incluindo atividades "Desafio" e algumas do **Enem**.



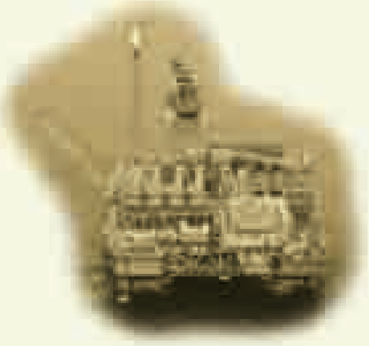
SUMÁRIO

CAPÍTULO
1


CARL DE SOUZA/AFP

Números reais 10

CAPÍTULO
2


STEFERSON FARIA/BANCO DE IMAGENS PETROBRAS

Potenciação e radiciação de números reais 26

CAPÍTULO
3

ADÃO ITURRUSGARAI

Monômios e polinômios 42

CAPÍTULO 4


JOHANNES EISELE/AFP

Produtos notáveis e fatoração 70

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 5


U.S. NAVY/MASS COMMUNICATION SPECIALIST 3RD CLASS TREVOR WELSH

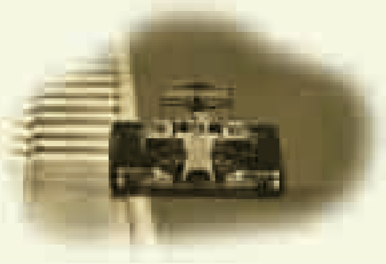
Retas e ângulos 90

CAPÍTULO 6


JONAS LINDSTRÖM/TRÄULLIT DEKOR

Polígonos e simetria 122

CATHERINE IVILL/MATTHEW ASHTON/
AMA SPORTS PHOTO/CORBIS/LATINSTOCK



MARWAN NAAMANI/AFP

REB IMAGES/BLEND IMAGES/GETTY IMAGES

CAPÍTULO 10

Triângulos 206


EVARISTO SA/AFP

CAPÍTULO 11

Quadriláteros 232


MARC TURCAN/SHUTTERSTOCK

CAPÍTULO 12

Circunferência e círculo 252


BRADFORD WAUGH DESIGN

CAPÍTULO

1

NÚMEROS REAIS

CARL DE SOUZA/AFP

Neste capítulo, faremos uma revisão dos números naturais, inteiros e racionais. Em seguida, apresentaremos aos alunos os números irracionais, passando a trabalhar com o conjunto dos números reais.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

BMX ou Bicicross é um esporte praticado com bicicletas especiais de aro 20 ou 24 polegadas, uma competição entre ciclistas em pistas de terra com alguns obstáculos. Observe a tabela abaixo, que apresenta algumas medidas dos pneus dessas bicicletas.

Algumas medidas dos pneus de aro 20 e aro 24

	Aro 20	Aro 24
Diâmetro externo do pneu	52 cm	64 cm
Comprimento aproximado do pneu	163 cm	201 cm

Agora, responda às questões.

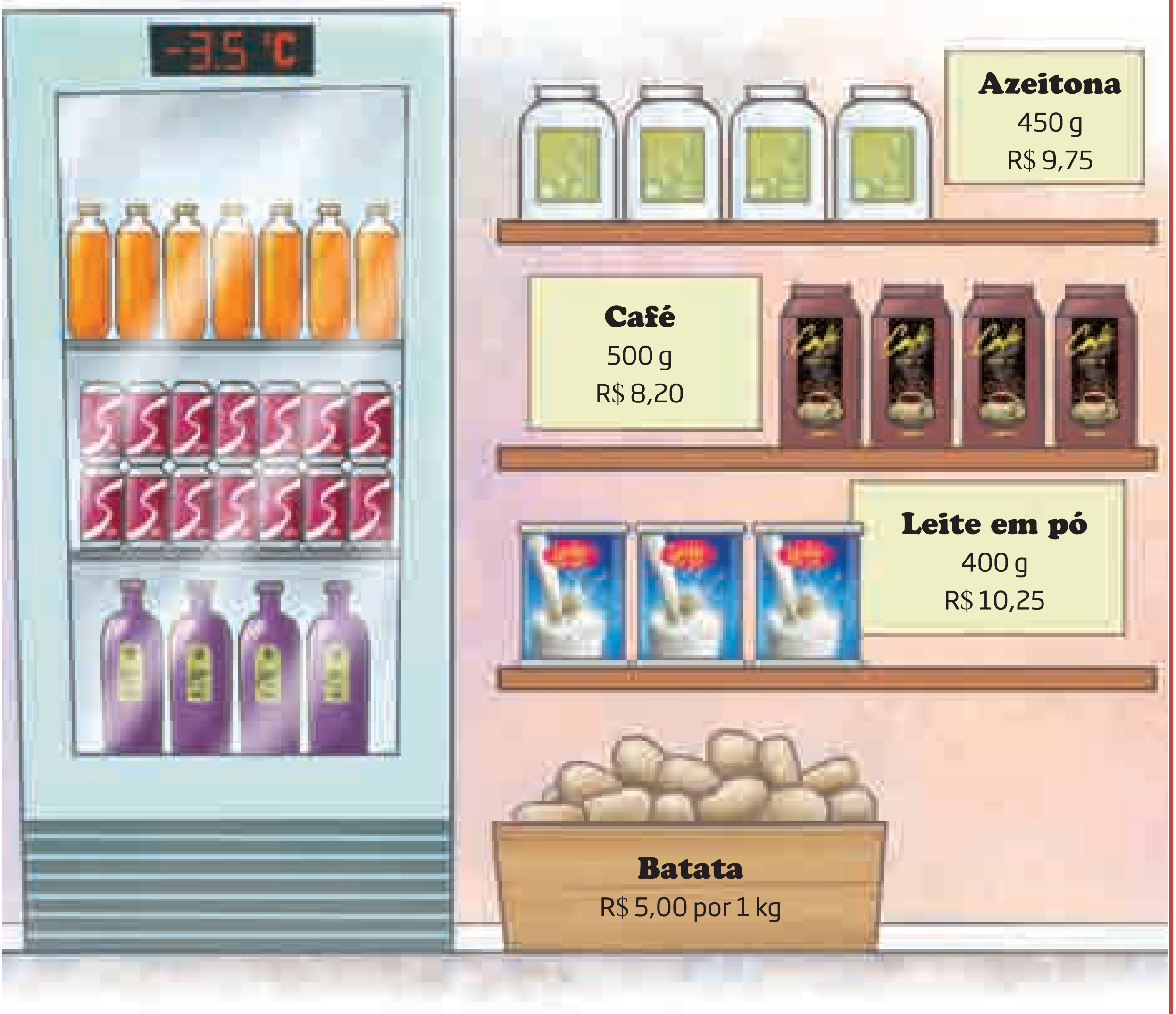
- Como você faria para medir o comprimento de um pneu de bicicleta?
Resposta pessoal.
- Divida as medidas dos comprimentos dos pneus de aros 20 e 24 indicados na tabela acima, respectivamente, pelas medidas dos diâmetros externos de cada um dos pneus. Quais são os números encontrados? Eles são aproximadamente iguais? aro 20: aproximadamente 3,1346; aro 24: 3,140625
Espera-se que os alunos concluam que esses números são aproximadamente iguais.

Atletas durante as quartas de final da Copa do Mundo de Supercross BMX, em Stratford, leste de Londres, em agosto de 2011.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

- Observe os números indicados na ilustração abaixo.



GEORGE TUTUMI

- Identifique:
  - os números inteiros; 1; 5,00; 400, 450 e 500
  - os números racionais e não inteiros. −3,5; 8,20, 9,75 e 10,25
- Converse com um colega sobre diferentes situações do dia a dia em que vocês utilizam números racionais na forma de fração e na forma decimal.

Resposta pessoal. Solicite aos alunos que compartilhem essas situações com os demais colegas da classe.

Neste capítulo, você vai conhecer os números irracionais. Antes, porém, vamos retomar alguns conceitos e algumas propriedades dos conjuntos de números já estudados e analisar as relações entre eles.

1 Números naturais, números inteiros e números racionais

Números naturais

Para contar uma quantidade de objetos, pessoas, animais etc., usamos os **números naturais**. O conjunto dos números naturais é:

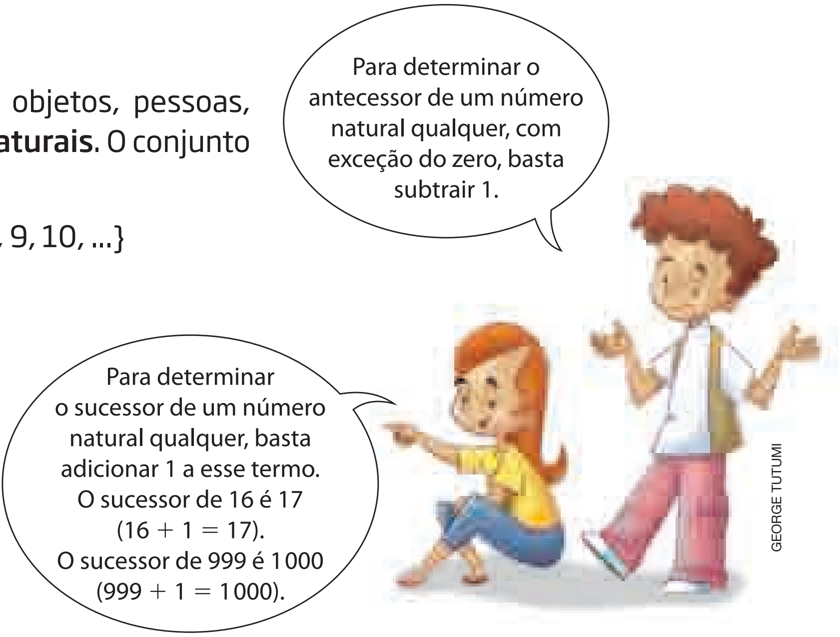
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

O **zero** é o menor número natural. Todo número natural tem um sucessor; desse modo, dizemos que a sequência dos números naturais é infinita.

Todo número natural, com exceção do zero, tem um antecessor. Observe:

O antecessor de 30 é 29.

O antecessor de 1 050 é 1 049.



GEORGE TUTUMI

Números inteiros

Observe a situação a seguir.

No fim da tarde de determinado dia de julho, a temperatura na cidade de São Joaquim (SC) era 5 °C. No início da noite, essa temperatura caiu 8 °C. Qual foi a temperatura registrada após essa queda?

Para responder a essa pergunta, podemos fazer a seguinte subtração.

$$5 - 8 = -3$$

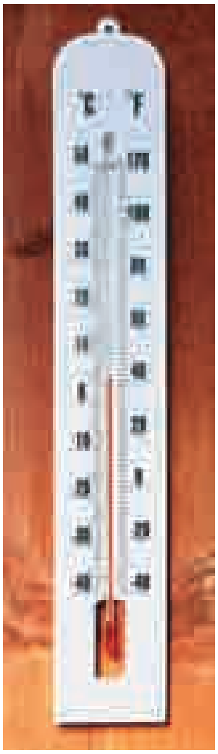
Isso significa que a temperatura chegou a três graus Celsius abaixo de zero, sendo indicada por um número negativo (-3).

O resultado (-3), dessa subtração é um número inteiro.

O conjunto dos **números inteiros** é:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Observe que todo número natural é também um número inteiro. Cada número inteiro tem um sucessor e um antecessor; por exemplo: -3 é o sucessor de -4 e -1 é o antecessor de 0.



ALISTAIR FORRESTER SHANKIE/GETTY IMAGES

O termômetro é um instrumento usado para medir a temperatura. Alguns termômetros, como o da foto, medem a temperatura com base na dilatação de líquidos, gases e metais, por efeito do calor.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Considere os números a seguir e responda:

$5;\ -8;\ 0;\ 14;\ -100;\ 57;\ -18;\ \frac{2}{3};\ -0{,}4;\ -1$

a) Quais deles são números naturais? 0, 5, 14, 57

b) Quais deles são números inteiros? −100, −18, −8, −1, 0, 5, 14, 57

c) Todo número natural é um número inteiro? Sim.

2 Analise as afirmações a seguir e copie, no caderno, a(s) verdadeira(s). alternativa **b**

a) Há sempre um número inteiro entre dois números inteiros.

b) A diferença de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

c) Existe número natural que não é número inteiro.

3 Escreva o que se pede:

a) os cinco menores números naturais ímpares; 1, 3, 5, 7 e 9

b) os números inteiros negativos maiores que −5; −4, −3, −2 e −1

c) três números inteiros menores que −20; Exemplo de resposta: −21, −22 e −23

d) os números naturais maiores que −3 e menores que 7. 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

4 Responda às questões considerando a sequência dos números inteiros:

a) Qual é o sucessor de 100? 101

b) Qual é o sucessor de −30? −29

c) Se *n* é um número dessa sequência, qual é a expressão que representa seu sucessor? $n + 1$

d) Se *a* é um número dessa sequência, qual é a expressão que representa seu antecessor? $n - 1$

5 O saldo bancário da conta de Pedro estava negativo em R$ 380,00. Ele fez um depósito e o novo saldo passou a ser R$ 970,00. Qual foi o valor do depósito realizado por Pedro? R$ 1.350,00

6 Considere a sequência dos números inteiros:

..., −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

a) Há quantos números inteiros entre −5 e 3? Há sete números inteiros: −4, −3, −2, −1, 0, 1 e 2

b) Qual é o menor número natural dessa sequência? o número zero

7 Escreva as sequências numéricas, formadas somente por números inteiros, conforme as indicações a seguir.

a) O primeiro termo da sequência é 100 e os próximos termos são obtidos subtraindo-se 10 do termo anterior. 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0, −10, −20, ...

b) O primeiro termo da sequência é 100 e os próximos termos são obtidos adicionando-se 10 ao termo anterior. 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, ...

c) O primeiro termo da sequência é 100 e os próximos termos são obtidos multiplicando-se por 10 o termo anterior. 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, ...

d) O primeiro termo da sequência é 100 e os próximos termos são obtidos dividindo-se por 10 o termo anterior. 100, 10, 1

Agora, responda às questões.

- Quais dessas sequências são formadas somente por números inteiros positivos? Sequências dos itens **b**, **c** e **d**.
- Uma dessas sequências é finita. Por que isso ocorreu? A sequência do item **d** é finita porque a divisão de 1 por 10 não resulta em um número inteiro.
- Se as sequências não precisassem ser formadas por números inteiros, essa sequência seria infinita?

Como os alunos já estudaram os números racionais em anos anteriores, espera-se que eles percebam que, se a condição de a sequência ser formada somente por números inteiros fosse retirada, a sequência seria infinita, uma vez que seria sempre possível fazer a divisão por 10, obtendo um novo número racional.

Números racionais

Observe a situação a seguir.

Uma peça de tecido com 75 metros vai ser dividida em 10 partes iguais. Quantos metros terá cada uma dessas partes?

Para responder a essa pergunta, podemos efetuar a divisão:

$$75 : 10 = 7{,}5$$

Portanto, cada uma dessas partes terá 7,5 metros.

Os números obtidos pela divisão de dois números inteiros são **números racionais**. Esses números podem ser escritos na forma de fração ou na forma decimal. Veja:

- $\frac{75}{10} = 7{,}5$
- $\frac{13}{3} = 4{,}333...$
- $-\frac{3}{8} = -0{,}375$
- $-\frac{1}{25} = -0{,}04$

Números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero, são chamados de **números racionais**. O conjunto dos números racionais é indicado por $\mathbb{Q}$ e pode ser representado em linguagem matemática da seguinte maneira:

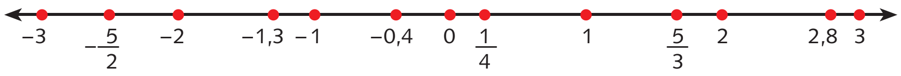
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ números inteiros e b} \neq 0\right\}$$

Observações

1 Todo número inteiro é um número racional, ou seja, pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ em que *a* e *b* são números inteiros e $b \neq 0$. Veja:

- $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$
- $-5 = -\frac{5}{1} = -\frac{20}{4} = -\frac{35}{7}$
- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4}$

2 Os números racionais podem ser representados por pontos na reta numérica:



LUIZ RUBIO

3 Entre dois números racionais quaisquer sempre existe outro número racional. Entre 1,4 e 1,6, há infinitos números racionais. Veja alguns: 1,45; 1,48; 1,5; 1,52 e 1,555.

Lendo e aprendendo

Matemática e música

GEORGE TUTUMI

O matemático e filósofo grego Pitágoras (c. 570 a.C.-c. 496 a.C.) traçou uma ligação direta entre Matemática e música ao construir, com uma corda e dois cavaletes, um instrumento que ficou conhecido como “monocórdio de Pitágoras”. Com base em observações, ele percebeu que a altura de uma nota musical dependia do comprimento da corda que a produzia.

A divisão da corda em comprimentos diferentes possibilitou, posteriormente, a criação de uma escala com sete notas: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si, que formam a escala pitagórica.

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Representação decimal dos números racionais

Os números racionais na forma de fração podem ser representados na forma decimal.

Observe:

- $\frac{4}{5} = 4 : 5$

$$\begin{array}{l|l} 4 & \underline{\ 5\ \ \ } \\ 40 & 0{,}8 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

Portanto, $\frac{4}{5} = 0{,}8$

- $\frac{7}{10} = 7 : 10$

$$\begin{array}{l|l} 7 & \underline{\ 10\ \ } \\ 70 & 0{,}7 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

Portanto, $\frac{7}{10} = 0{,}7$

- $\frac{22}{8} = 22 : 8$

$$\begin{array}{l|l} 22 & \underline{\ \ 8\ \ \ } \\ \ \ 60 & 2{,}75 \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Portanto, $\frac{22}{8} = 2{,}75$

- $\frac{7}{3} = 7 : 3$

$$\begin{array}{l|l} 7 & \underline{\ \ \ 3\ \ \ \ } \\ 10 & 2{,}333... \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array}$$

Portanto, $\frac{7}{3} = 2{,}333...$

Na divisão de 7 por 3, o algarismo 3 do quociente continuará se repetindo infinitamente. O número decimal 2,333... é uma **dízima periódica** e o algarismo 3 que se repete é chamado de período.

A dízima 2,333... é uma dízima periódica simples, pois o período (3) aparece logo após a vírgula.

Podemos também representar a dízima 2,333... colocando um traço sobre o período, ou seja: $2{,}333... = 2{,}\overline{3}$

- $\frac{4}{33} = 4 : 33$

$$\begin{array}{l|l} 4 & \underline{\ \ \ 33\ \ \ \ } \\ 40 & 0{,}1212... \\ \ \ 70 & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 70 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 4 & \end{array}$$

Portanto, $\frac{4}{33} = 0{,}1212...$

Na divisão de 4 por 33, os algarismos 1 e 2 do quociente continuarão se repetindo, nessa ordem, infinitamente. O número decimal 0,1212... é uma dízima periódica e a parte (12) que se repete é chamado de período.

A dízima 0,121212... é uma dízima periódica simples, pois o período (12) aparece logo após a vírgula.

$0{,}121212... = 0{,}\overline{12}$

- $\frac{29}{90} = 29 : 90$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 90 \\ \cline{2-2} 290 & 0{,}322... \\ 200 & \\ 200 & \\ 20 & \end{array}$$

Portanto, $\frac{29}{90} = 0{,}322...$

Na divisão de 29 por 90, o algarismo 2 do quociente continuará se repetindo infinitamente. O número decimal 0,322... é uma dízima periódica e o algarismo 2 que se repete é chamado de período.

A dízima 0,322... é uma dízima periódica composta, uma vez que, entre a vírgula e o período (2), existe uma parte não periódica, o algarismo 3.

$0{,}3222... = 0{,}3\overline{2}$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Analise as afirmações a seguir e copie, no caderno, a(s) verdadeira(s). alternativas **a** e **d**

a) Todo número inteiro é racional.

b) Todo número racional é inteiro.

c) Todo número racional é natural.

d) Entre dois números racionais existe sempre outro número racional.

- Para as afirmações falsas, dê um exemplo que justifique tal classificação. Depois, converse com os colegas e o professor sobre os diferentes exemplos apresentados.

2 Indique um número situado entre: Respostas pessoais.

a) 3,457 e 3,459;

b) 1,05 e 1,06.

- Converse com o professor e os colegas para comparar os números indicados em cada caso.
- Há somente uma resposta para cada item ou há infinitas respostas? Justifique. Há infinitas respostas.

3 Escreva, no caderno, a representação decimal de cada um dos números racionais a seguir.

a) $\frac{6}{5}$ 1,2

b) $\frac{157}{100}$ 1,57

c) $\frac{7}{3}$ $2{,}\overline{3}$

d) $\frac{13}{11}$ $1{,}\overline{18}$

e) $-\frac{3}{8}$ $-0{,}375$

f) $-\frac{15}{90}$ $-0{,}1\overline{6}$

g) $\frac{1}{55}$ $0{,}0\overline{18}$

h) $-\frac{3}{4}$ $-0{,}75$

- Quais desses números racionais têm dízima periódica como representacão decimal? $\frac{7}{3}$; $\frac{13}{11}$; $-\frac{15}{90}$; $\frac{1}{55}$

4 Identifique o período das dízimas abaixo.

a) $-3{,}4777...$ 7

b) $0{,}333...$ 3

c) $-0{,}0\overline{5}$ 5

d) $-0{,}323232...$ 32

5 Um dos benefícios do trabalhador brasileiro é o décimo terceiro salário, pago pelos empregadores no fim do ano. Para quem trabalhou o ano inteiro, o valor a ser pago corresponde a um salário de dezembro e, para quem trabalhou menos de um ano, o valor a ser pago é proporcional à quantidade de meses trabalhados.

a) Se uma pessoa foi admitida em uma empresa no dia 1º de maio, quantos meses ela trabalhou nesse ano? Esse período corresponde a que fração de um ano? 8 meses; $\frac{8}{12}$

b) Sabendo que o salário de dezembro dessa pessoa foi R$ 2 514,50, qual foi o valor recebido de décimo terceiro salário? R$ 1 676,33

6 Alguém queria determinar, usando uma calculadora, quanto gastaria ao pagar duas contas nos valores de R$ 329,18 e de R$ 2 231,11. Após apertar a tecla $\boxed{=}$, o resultado que apareceu no visor foi:

35.149,11

a) O resultado obtido está correto? Caso não esteja, explique o que pode ter acontecido.

b) Qual é o valor correto a pagar por essas duas contas? R$ 2 560,29

a) não; exemplo de explicação: a pessoa se esqueceu de apertar a tecla $\boxed{.}$ para indicar 329,18

Obtendo a fração geratriz

Podemos determinar a fração que gera uma dízima periódica. Ela é chamada de fração geratriz.

Observe os exemplos:

- Vamos encontrar a fração geratriz da dízima 0,777...

  Indicamos a dízima periódica 0,777... por x.

  $$x = 0{,}777\ldots \quad \text{(I)}$$

  Multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 10 para obter outro número na forma decimal com o mesmo período.

  $$10x = 7{,}777\ldots \quad \text{(II)}$$

  Subtraímos, membro a membro, (I) de (II), eliminando a parte que se repete.

  $$\begin{array}{rcll} 10x & = & 7{,}777\ldots & \text{(II)} \\ -\quad x & = & 0{,}777\ldots & \text{(I)} \\ \hline 9x & = & 7 & \end{array}$$

  Assim: $x = \frac{7}{9}$

  Portanto, $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz de 0,777...

- Vamos encontrar a fração geratriz da dízima 4,151515...

  Indicamos a dízima periódica 4,151515... por x.

  $$x = 4{,}151515\ldots \quad \text{(I)}$$

  Multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100 para obter outro número na forma decimal com o mesmo período.

  $$100x = 415{,}151515\ldots \quad \text{(II)}$$

  Subtraímos, membro a membro, (I) de (II), eliminando a parte que se repete.

  $$\begin{array}{rcll} 100x & = & 415{,}151515\ldots & \text{(II)} \\ -\quad x & = & 4{,}151515\ldots & \text{(I)} \\ \hline 99x & = & 411 & \end{array}$$

  Assim: $x = \frac{411}{99}$

  Portanto, $\frac{411}{99}$ é a fração geratriz de 4,151515...

- Agora, vamos encontrar a fração geratriz da dízima 0,04777...

  Indicamos a dízima periódica 0,04777... por x.

  $$x = 0{,}04777\ldots \quad \text{(I)}$$

  Multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100 para obter uma dízima periódica simples.

  $$100x = 4{,}777\ldots \quad \text{(II)}$$

Multiplicamos os dois membros da igualdade (II) por 10 para obter outro número na forma decimal com o mesmo período.

$$1000x = 47,777... \quad \text{(III)}$$

Subtraímos, membro a membro, (II) de (III), eliminando a parte que se repete.

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 47,777... \quad \text{(III)} \\ -\quad 100x & = & 4,777... \quad \text{(II)} \\ \hline 900x & = & 43 \end{array}$$

Assim: $x = \dfrac{43}{900}$

Portanto, $\dfrac{43}{900}$ é a fração geratriz de 0,04777...

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas abaixo.

a) $0,\overline{8}$ $\frac{8}{9}$

b) 3,151515... $\frac{312}{99}$

c) 0,05222... $\frac{47}{900}$

d) 0,007007007... $\frac{7}{999}$

e) 2,4777... $\frac{223}{90}$

f) 0,1444... $\frac{13}{90}$

2 Calcule mentalmente e registre no caderno os resultados de:

a) 5 + 0,777... 5,777...

b) 8 + 0,333... 8,333...

c) 0,6 + 0,222... 0,8222...

d) 1,5 + 0,555... 2,0555...

3 Efetue as operações.

a) 0,5 + 0,555... 1,0555...

b) $2,\overline{7} \cdot 0,06$ 0,1666...

4 Utilizando uma calculadora, determine o resultado de:

a) 8 000 : 9 000 0,8888...

b) 80 : 90 0,8888...

c) 16 : 18 0,8888...

d) 30 : 110 0,272727...

e) 3 000 : 11 000 0,272727...

f) 9 : 33 0,272727...

- Que regularidade você observou ao realizar essas divisões? Por que você acha que isso ocorreu?
Espera-se que os alunos percebam que ao dividir o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, o quociente não se alterou.

2 Números irracionais

Luciano queria determinar o valor de $\sqrt{2}$, ou seja, encontrar o número que elevado ao quadrado dê como resultado 2.

Inicialmente, ele verificou que $\sqrt{2}$ é um número decimal situado entre 1 e 2. Veja:

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$ $\qquad 1 < \sqrt{2} < 2$

A seguir, verificou que $\sqrt{2}$ é um número decimal situado entre 1,4 e 1,5. Veja:

$1,4^2 = 1,96$

$1,5^2 = 2,25$ $\qquad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

GEORGE TUTUMI

Luciano continuou buscando o valor de $\sqrt{2}$ e verificou que é um número situado entre 1,41 e 1,42. Veja:

$1{,}41^2 = 1{,}9881$

$1{,}42^2 = 2{,}0164$ $\quad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

Ele avançou mais algumas etapas na busca da $\sqrt{2}$ encontrando:

$1{,}414^2 = 1{,}999396$

$1{,}415^2 = 2{,}002225$ $\quad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$

$1{,}4143^2 = 2{,}00024449$ $\quad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

Luciano avançou mais algumas etapas, mas não encontrou um número que, elevado ao quadrado, resultasse exatamente em 2. Desse modo, ele concluiu que $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,414213562.

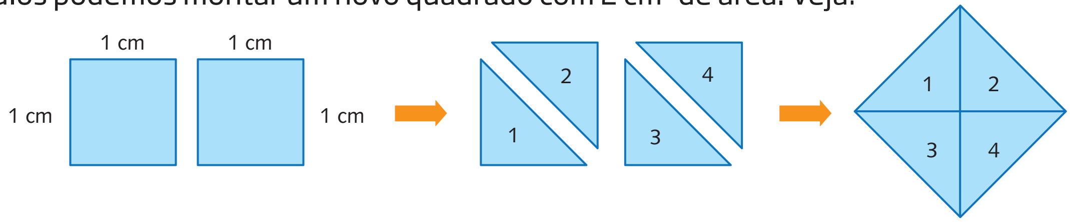
Após muitos cálculos e estudos, os matemáticos provaram que $\sqrt{2}$ não é racional, isto é, não pode ser expresso como decimal exato ou dízima periódica. Números que têm infinitas casas decimais e não são periódicos são chamados de **números irracionais**.

Os matemáticos mostraram que existem infinitos números irracionais. Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$ e seus simétricos são alguns exemplos de números irracionais.

Um número irracional pode ser representado por um ponto na reta numérica. Veja como podemos representar o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ na reta numérica por um processo geométrico.

Observe os dois quadrados a seguir com 1 cm de lado cada um. A área de cada um deles é de 1 cm^2.

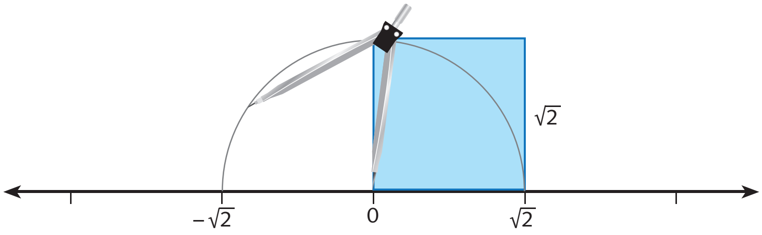
Recortando esses dois quadrados pela diagonal, obtemos quatro triângulos. Com esses triângulos podemos montar um novo quadrado com 2 cm^2 de área. Veja:



LUIZ RUBIO

A área de um quadrado corresponde ao quadrado da medida do seu lado. Como esse novo quadrado tem 2 cm^2 de área, dizemos que a medida do seu lado é o número que elevado ao quadrado tem como resultado 2. A medida do lado desse quadrado é igual à raiz quadrada de 2, ou seja, $\sqrt{2}$.

Agora, podemos transportar, com o auxílio de um compasso, a medida desse segmento para a reta numérica e determinar os pontos $\sqrt{2}$ e seu simétrico $-\sqrt{2}$:



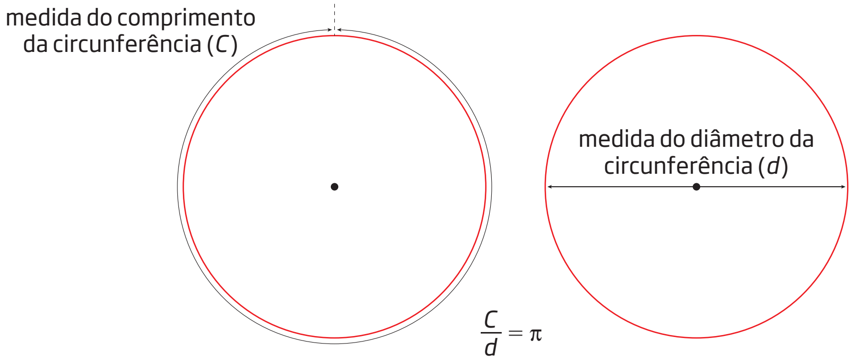
LUIZ RUBIO

Os pontos que correspondem aos números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ estão a uma mesma distância do ponto que corresponde ao zero.

Lendo e aprendendo

O número π (pi)

O número cujo valor corresponde ao quociente da medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida de seu diâmetro (dobro da medida do raio), na mesma unidade, é chamado de **número π** (pi).



$$\frac{C}{d} = \pi$$

GUILHERME CASAGRANDI

Determinar o valor de π foi, durante séculos, um desafio para os matemáticos. Eles provaram que o número π tem infinitas casas decimais e não apresenta período, ou seja, não pode ser escrito na forma de fração; portanto, é um número irracional.

O mais famoso dos números irracionais causa um fascínio tão grande em determinadas pessoas que elas se dedicam a calcular mais e mais casas decimais. O professor Yasumasa Kanada, da Universidade de Tóquio, no Japão, é conhecido por bater vários recordes mundiais, nas últimas duas décadas, no cálculo de casas decimais do π. Nessa busca, em 2002 ele empregou um supercomputador durante mais de 600 horas, atingindo 1,241 trilhões de casas. Observe a seguir o número π com 20 casas decimais.

3,14159265358979323846...

3. Verifique a conveniência de lembrar aos alunos que calculadoras diferentes, por vezes, requerem procedimentos diferentes para os cálculos.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 No caderno, identifique os números irracionais. alternativas **b**, **d**, **f** e **j**

a) 0
b) $\sqrt{2}$
c) $-3{,}14$
d) $\sqrt{5}$
e) 0,777...
f) π
g) 1,73
h) 0,54
i) $\frac{3}{900}$
j) $-\sqrt{3}$

2 Utilizando uma calculadora, calcule, com aproximação de duas casas decimais, o valor de:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 3,15
b) $\pi - 2\sqrt{3}$ −0,32
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ 2,45
d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 0,32

3 Com uma calculadora, determine o valor aproximado, com cinco casas decimais, de:

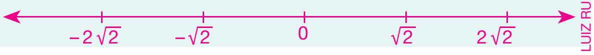
a) $\sqrt{10}$ 3,16228
b) $\left(\frac{4}{3}\right)^4$ 3,16049
c) $\frac{22}{7}$ 3,14286
d) $\frac{13\sqrt{146}}{50}$ 3,14159
e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 3,14626
f) $\frac{355}{113}$ 3,14159

- Quais desses valores são mais próximos do valor de π? $\frac{355}{113}$ e $\frac{13\sqrt{146}}{50}$

4 Represente na reta numérica os números abaixo.

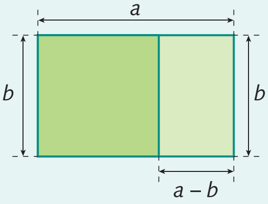
a) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $-2\sqrt{2}$

4.



LUIZ RUBIO

5 Desenhe, no caderno, um retângulo cujas dimensões sejam $a = 162$ mm e $b = 100$ mm, conforme representação a seguir.



GUILHERME CASAGRANDI

a) Um retângulo cuja razão entre as medidas dos lados é aproximadamente 1,62 é chamado retângulo áureo. Pode-se dizer que esse retângulo é um retângulo áureo? sim

b) Descubra a razão $\frac{b}{a - b}$. Qual foi o valor encontrado? O retângulo menor também é um retângulo áureo?

aproximadamente 1,61; sim

6 Coloque em ordem crescente os números a seguir: $-1,2$; $0,5$; $\frac{4}{3}$; $\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{10}{3}$

$\sqrt{3}$; $-1,2$; $\frac{10}{3}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{4}{3}$; $0,5$

7 Sabendo que o diâmetro do pneu de uma bicicleta mede 60 cm, responda às questões.

a) Qual é a medida do raio de cada um dos pneus dessa bicicleta? 30 cm

b) Quanto mede o comprimento de cada pneu dessa bicicleta? (Considere $\pi = 3,14$.) 188,4 cm

8 O raio do pneu de uma bicicleta mede 35 cm.

MINDSCAPE STUDIO/SHUTTERSTOCK

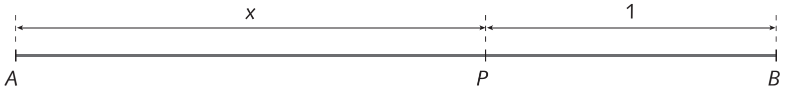
Quantas voltas deverá dar a roda dessa bicicleta para percorrer 1 099 m? 500 voltas

Lendo e aprendendo

O número de ouro

O número de ouro é um **número irracional**, misterioso e enigmático, presente em uma infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão que é considerada por muitos como a divina proporção ou razão divina.

O número de ouro foi estudado em um texto da obra *Os elementos*, do grego Euclides. Nesse estudo, um segmento $\overline{AB}$ é dividido em duas partes, tais que:



GUILHERME CASAGRANDI

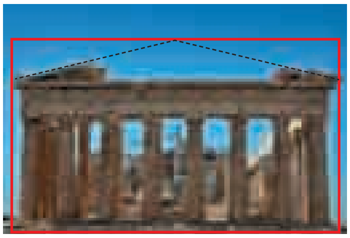
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP} \text{ ou } \frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

Essa razão é o número de ouro, e seu valor é:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

Os gregos consideravam harmoniosos os retângulos cuja razão entre a medida do lado maior e a medida do lado menor fosse aproximadamente igual ao número de ouro. Essa razão era conhecida como **razão áurea**, e os retângulos que a apresentavam eram conhecidos como **retângulos áureos**.

O Partenon é o mais conhecido dos edifícios remanescentes da Grécia antiga.

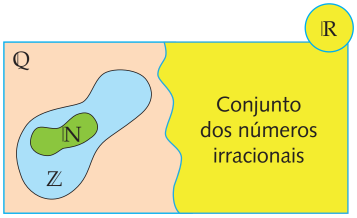


RODRIGO GARRIDO/SHUTTERSTOCK

O Partenon, na Grécia, apresenta a razão áurea no retângulo de sua fachada. Atenas, Grécia, 2013.

3 Números reais

Já vimos que os números naturais e os números inteiros são também números racionais. Se juntarmos em um só conjunto os números racionais e os números irracionais, obteremos o conjunto dos **números reais**, que indicamos por $\mathbb{R}$.



LUIZ RUBIO

Portanto, todos os números que estudamos até agora pertencem ao conjunto dos números reais.

LIBRARY OF CONGRESS, WASHINGTON

George Cantor (1845-1918) foi um matemático russo de origem alemã. Cantor criou a teoria dos conjuntos, uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos. Foi ele que utilizou pela primeira vez o símbolo $\mathbb{R}$ para representar o conjunto dos números reais.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1. b) -35; $\frac{40}{5}$ **c)** 1,222; 0,444...; $\frac{1}{7}$; $\frac{40}{5}$; -35

1 Observe os números:

-35; $\sqrt{3}$; $\frac{40}{5}$; 1,222; π; 0,444...; $-\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}$

a) Quais deles são números naturais? $\frac{40}{5}$

b) Quais deles são números inteiros?

c) Quais deles são números racionais?

d) Quais deles são irracionais? $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π

e) Quais deles são reais? Todos são reais.

2 Dê um exemplo de:

a) número racional e não inteiro maior que 2; Exemplo de resposta: 2,1

b) número real e não racional maior que 3; Exemplo de resposta: π

c) número inteiro e não natural maior que 4. Não existe.

3 Qual destes números pertence ao conjunto dos números reais? todos

$\frac{0}{5}$, $\sqrt{0}$, $-0{,}005$, $\sqrt{64}$, $-\sqrt{36}$

4 Em cada item, escreva três números:

a) inteiros maiores que -15 e menores que -11; -14, -13 e -12

b) racionais maiores do que $-\frac{3}{4}$ e menores que $-\frac{1}{2}$; Exemplo de resposta: $-\frac{7}{10}$, $-\frac{6}{10}$, $-\frac{55}{100}$

c) irracionais maiores que 1,3010010001. Exemplo de resposta: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

5 No caderno, identifique as sentenças verdadeiras. alternativas **a**, **c**, **d** e **g**

a) Todo número inteiro é racional.

b) Todo número real é racional.

c) Toda dízima periódica é número racional.

d) Todo número irracional é real.

e) Todo número decimal não exato é irracional.

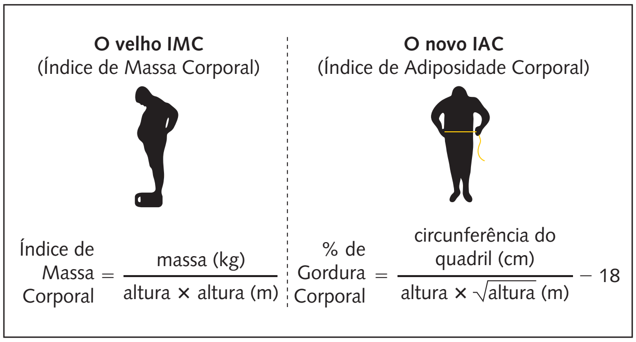
f) Todo número real é irracional.

g) O número zero é real, inteiro e racional.

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(ENEM) O Índice de Massa Corporal (IMC) é largamente utilizado há cerca de 200 anos, mas esse cálculo representa muito mais a corpulência que a adiposidade, uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Uma nova pesquisa aponta o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) como uma alternativa mais fidedigna para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura mostra como calcular essas medidas, sabendo-se que, em mulheres, a adiposidade normal está entre 19% e 26%.



$$\text{Índice de Massa Corporal} = \frac{\text{massa (kg)}}{\text{altura} \times \text{altura (m)}}$$

$$\text{\% de Gordura Corporal} = \frac{\text{circunferência do quadril (cm)}}{\text{altura} \times \sqrt{\text{altura}}\ \text{(m)}} - 18$$

TIAGO SILVA

Disponível em: <http://1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 24 abr. 2011 (adaptado).

Uma jovem com IMC $= 20$ kg/m^2, 100 cm de circunferência dos quadris e 60 kg de massa corpórea resolveu averiguar seu IAC. Para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, a atitude adequada que essa jovem deve ter diante da nova medida é: alternativa **a**

(Use $\sqrt{3} = 1{,}7$ e $\sqrt{1{,}7} = 1{,}3$)

a) reduzir seu excesso de gordura em cerca de 1%.
b) reduzir seu excesso de gordura em cerca de 27%.
c) manter seus níveis atuais de gordura.
d) aumentar seu nível de gordura em cerca de 1%.
e) aumentar seu nível de gordura em cerca de 27%.

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Nas duas fórmulas, há uma medida que não foi fornecida no enunciado. Qual é esta medida? a altura da jovem
- Calcule a altura da jovem em questão. 1,70 m

Plano de resolução

- Identifique as variáveis necessárias para o cálculo do IAC. circunferência do quadril e altura
- Calcule o IAC da jovem. 27,25%

Resolução

- Junte-se a um colega.
- Compartilhem os planos de resolução.
- Discutam as diferenças e as semelhanças entre os planos e escolham um para a execução do processo de resolução.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Pesquisem as vantagens e desvantagens de cada um dos índices estudados (IMC e IAC), comparando-os. Em seguida, escrevam um pequeno texto, explicando as semelhanças e as diferenças entre os índices.

É possível encontrar essas informações em diversos *sites* na internet. Exemplo de fonte: <http://www.proteste.org.br/saude/emagrecer/noticia/o-que-sao-imc-e-iac> (acesso em: 18 maio 2015).

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Classifique cada número a seguir como: natural, inteiro ou racional.

a) 23 natural, inteiro e racional

b) -7 inteiro e racional

c) $\frac{3}{4}$ racional

2 Copie, no caderno, o quadro a seguir e complete-o com os números que estão no quadro:

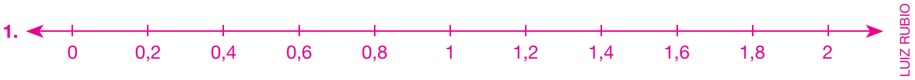
0,2	0,454545...	0,32	$0,\bar{1}$	$0,\overline{567}$	16,09

Dízima periódica	Decimal exato
$0,\bar{1}$	0,2
$0,\overline{567}$	0,32
0,454545...	16,09

3 Explique o que são números irracionais? Dê um exemplo. São números que não podem ser escritos na forma de fração. Por exemplo: π

4 Um número natural é real? E um número real, sempre é natural?
Sim. Todo número natural é um número real, porém nem todo número real é natural. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ é real, mas não é natural (é racional).

1.



LUIZ RUBIO

Aplicando

1 Desenhe, no caderno, uma reta. Determine sobre ela um segmento de 10 cm cujas extremidades correspondam aos números 0 e 2. Em seguida, localize nesse segmento de reta os pontos correspondentes aos números racionais: 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6 e 1,8.

2 Trace, no caderno, uma reta numérica e localize nela os pontos correspondentes aos seguintes números reais:

a) $A(\sqrt{2})$;

b) $B(-3{,}5)$;

c) $C\left(\frac{11}{2}\right)$;

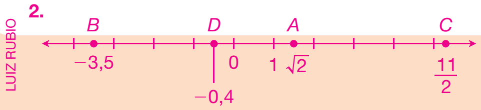
d) $D(-0{,}4)$.

- Explique ao professor e aos colegas os procedimentos que você utilizou para localizar cada ponto.

3 Dê um exemplo de dois números irracionais cuja soma seja um número racional.
Exemplo de resposta: $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

4 O produto ou o quociente de dois números irracionais pode ser um número racional? Justifique. Sim, observe: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

2.



LUIZ RUBIO

5 Os números reais abaixo representam valores aproximados de π. Identifique o número que mais se aproxima desse valor.
alternativa **b**

a) $\frac{2\,199}{700}$

b) $\frac{355}{113}$

c) $\sqrt{21} - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{9{,}9}$

6 Determine a fração geratriz de cada dízima periódica.

a) 0,4282828... $\frac{212}{495}$

b) $3{,}407\bar{6}$ $\frac{10\,223}{3\,000}$

c) 5,454545... $\frac{60}{11}$

d) $0{,}0\overline{16}$ $\frac{8}{495}$

7 Calcule: $(0{,}1333... : 0{,}2) \cdot 1{,}2$. $\frac{4}{5}$

8 Transforme os números racionais na forma fracionária para a forma decimal.

a) $\frac{3}{40}$ 0,075

b) $\frac{37}{18}$ $2{,}0\bar{5}$

c) $\frac{21}{35}$ 0,6

d) $\frac{23}{600}$ $0{,}038\bar{3}$

e) $\frac{3}{80}$ 0,0375

f) $\frac{6}{15}$ 0,4

9 Indique, no caderno, o número irracional.

a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{37}$ d) $-\sqrt{81}$

alternativa **c**

CAPÍTULO

2

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS REAIS

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

A plataforma de petróleo P-55 entrou em operação no fim de 2013, no Campo de Roncador (Bacia de Campos, no estado do Rio de Janeiro), ancorada a uma profundidade de cerca de 1 800 metros. Tem capacidade diária para processar 180 mil barris de petróleo e comprimir 4 milhões de m³ de gás natural.

- Escreva o número 180 mil, citado acima, como o produto do número 18 por uma potência de 10. $18 \cdot 10^4$
- Considerando o período de um ano, escreva o número que representa essa produção utilizando o produto de um número por uma potência de 10. $657 \cdot 10^5$

A P-55 é uma das maiores plataformas semissubmersíveis do mundo e a maior construída no Brasil. (Foto de agosto de 2014)

Neste capítulo, vamos trabalhar com as operações de potenciação e radiciação de números reais e suas propriedades.

Mais informações sobre a plataforma P-55 podem ser obtidas em:

- <http://www.petrobras.com/pt/magazine/post/nove-plataformas-que-vao-ampliar-a-producao-de-petroleo-no-brasil.htm>.
- <https://www.youtube.com/watch?v=ORv4Sz9Tiac>.
- <http://www.iesa.com.br/site/noticias/03out13b.html>.

Acessos em: 5 mar. 2015.

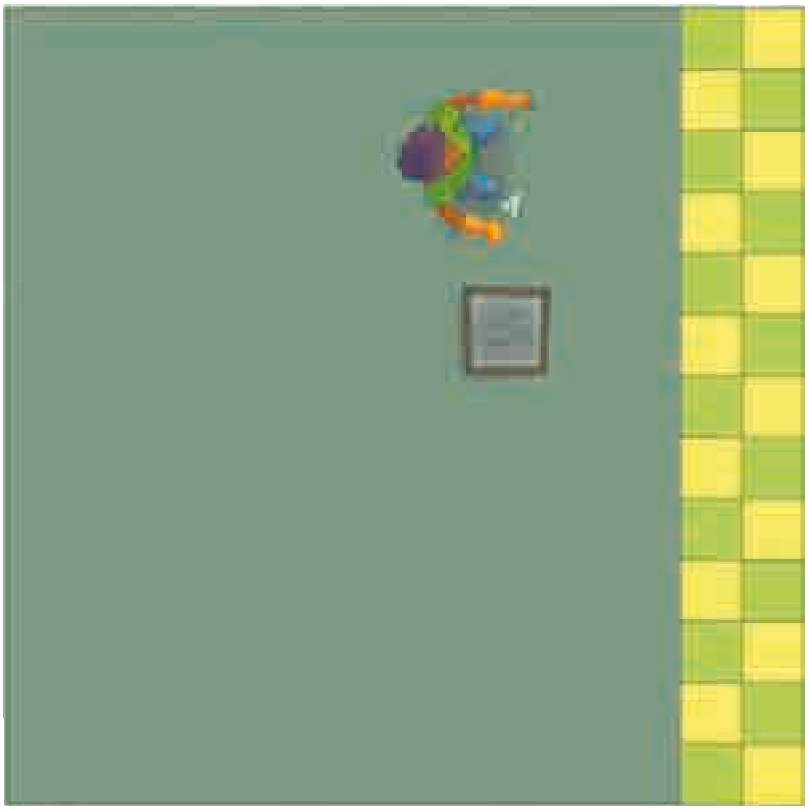
STEFERSON FARIA/BANCO DE IMAGENS PETROBRAS

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe as situações a seguir e faça o que se pede.

- Um pedreiro colocará lajotas em um piso com forma de um quadrado, conforme mostra a ilustração.



LÉO FANELLI

- Considerando que todas as lajotas são iguais, determine o total de lajotas que deverá ser usado para revestir todo o piso. 169 lajotas
- Veja ao lado a vista superior do piso de uma sala. Sabendo que esse piso tem forma quadrangular e foi revestido com 225 ladrilhos quadrados de lados medindo 20 cm, determine a medida dos lados dessa sala. 3 m

GUILHERME CASAGRANDI

- Que estratégias você utilizou para resolver as situações acima? Há mais de um modo de resolvê-las? Converse com o professor e os colegas sobre isso.

Neste capítulo, vamos ampliar os conhecimentos sobre operações com números reais, fazendo uso da **potenciação** e da **radiciação**.

1 Potenciação

Quando um objeto é abandonado no **vácuo** ou quando desconsideramos a ação do ar sobre esse objeto, ele cai em direção vertical, caracterizando um movimento chamado **queda livre**.

Vácuo

Na prática, utilizamos o termo **vácuo** ao nos referirmos a um espaço no qual a maior parte do ar ou de outro gás foi retirada e no qual a pressão é extremamente pequena.

Pode-se provar que um objeto em queda livre, durante um tempo (t) expresso em segundo, percorre uma distância (d) expressa em metro, que corresponde a: $d = \frac{g \cdot t^2}{2}$, em que g é a aceleração da gravidade de um corpo no vácuo; e seu valor é aproximadamente 10 m/s^2.

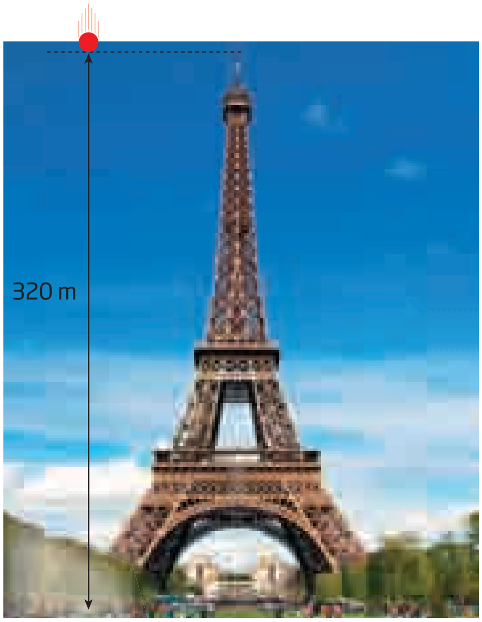
Considere a situação a seguir.

Se soltássemos uma esfera metálica de uma altura de 320 m (a mesma altura da Torre Eiffel), a distância aproximada que essa esfera metálica teria percorrido após 2 segundos de queda seria:

$$d = \frac{10 \cdot t^2}{2} = \frac{10 \cdot 2^2}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$$

Portanto, a distância percorrida pela esfera metálica após 2 segundos de queda seria de aproximadamente 20 m.

Nos cálculos acima, realizados para encontrar a distância percorrida, utilizamos as operações de multiplicação, **potenciação** e divisão.



DAN BRECKWOLDT/SHUTTERSTOCK

Torre Eiffel, em Paris, França. (Foto de 2014)

UM POUCO DE HISTÓRIA

DIOGO SAITO

Galileu Galilei (1564-1642)

TOMA

O matemático, físico e astrônomo Galileu Galilei nasceu em Pisa, na Itália. Fez descobertas fundamentais nos campos da Física e da Astronomia, revolucionando a ciência de sua época.

Foi Galileu quem estabeleceu a lei da queda dos corpos, segundo a qual, quando um corpo está em queda livre, sua aceleração é constante e é a mesma para todos os corpos, pequenos ou grandes, leves ou pesados.

O calendário é revisto pelo papa Gregório XIII	Zacharias Jansen inventa o microscópio	Galileu cria um termômetro	Galileu cria um telescópio	Wilhelm Schickard cria a primeira máquina de calcular	Fundação da Universidade de Harvard
1582	1590	1592	1609	1623	1636

Vamos retomar o estudo da potenciação considerando os casos em que a base da potência é um número real e o expoente é um número inteiro.

Expoente zero

Sendo a um número real não nulo.

$$\boxed{a^0 = 1\,,\, a \neq 0}$$

Qualquer potência de base real não nula e expoente zero é igual a 1.

Exemplos

- $(0{,}65)^0 = 1$
- $(-11{,}6)^0 = 1$
- $(0{,}232323...)^0 = 1$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

Expoente 1

$$\boxed{a^1 = a}$$

Qualquer potência de base real e expoente 1 é igual à própria base.

Exemplos

- $(0{,}25)^1 = 0{,}25$
- $(-1{,}6)^1 = -1{,}6$
- $\left(-\frac{5}{8}\right)^1 = -\frac{5}{8}$
- $(0{,}666...)^1 = 0{,}666...$

Expoente inteiro maior que 1

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}},\, n > 1}$$

Qualquer potência de base real e expoente inteiro maior que 1 é igual ao produto dessa base por ela mesma tantas vezes quanto indicar o expoente.

Exemplos

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
- $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$
- $(0{,}1)^3 = (0{,}1) \cdot (0{,}1) \cdot (0{,}1) = 0{,}001$

Quando a base é negativa, o sinal da potência pode ser:

- positivo, se o expoente é par:
  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
- negativo, se o expoente é ímpar:
  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Expoente inteiro negativo

Sendo *a* um número real não nulo e *n* um número inteiro, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ou } \left(\frac{1}{a}\right)^n,\ a \neq 0$$

Qualquer potência de base real não nula e expoente inteiro negativo é igual à potência de base igual ao inverso da base dada e expoente igual ao oposto do expoente dado.

Exemplos

- $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
- $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Lendo e aprendendo

Trabalhando com *bytes*

Bit é a menor unidade de armazenamento de dados que existe. Um *bit* pode assumir apenas dois valores: 0 ou 1. Em geral, o *bit* está relacionado à capacidade do computador de armazenar dados, ou seja, à sua memória. Um conjunto de 8 *bits* forma um *byte*. Porém, o *byte* ainda é uma unidade muito pequena; por isso, as memórias usadas em computadores são medidas em múltiplos de *byte*.

Exemplos

- 1 *kilobyte* = 1 kB = 2^{10} *bytes*
- 1 *megabyte* = 1 MB = 2^{10} *kilobytes* = 2^{20} *bytes*
- 1 *gigabyte* = 1 GB = 2^{10} *megabytes* = 2^{30} *bytes*
- 1 *terabyte* = 1 TB = 2^{10} *gigabytes* = 2^{40} *bytes*

FEDOROV OLEKSIY/ SHUTTERSTOCK

PBOMBAERT/ SHUTTERSTOCK

Pen drive é um dispositivo de armazenamento portátil. Sua capacidade de armazenamento pode ser de 1 GB, 2 GB, 4 GB, 8 GB, 16 GB, 32 GB, 64 GB e assim por diante. O *hard disk* (HD) externo funciona como um periférico, como se fosse um *pen drive*, só que com uma capacidade maior.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as potências.

a) 2^4 16

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 8

c) 2^{-3} $\frac{1}{8}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\frac{1}{125}$

e) $(-4)^3$ −64

f) 10^3 1 000

g) $(0{,}1)^{-2}$ 100

h) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}$ $\frac{49}{9}$

i) 10^{-3} $\frac{1}{1\,000}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\frac{4}{9}$

k) 0^{10} 0

l) $(0{,}181818...)^2$ $\frac{4}{121}$

2 Calcule o valor de:

a) $3x^3 - 2x^2 - x + 5$, para $x = -1$ 1

b) $(-1)^8 - 3 \cdot (-1)^5 + (-1)^{16}$ 5

c) $2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0$ 43

3 Os resultados de $(-9)^2$ e -9^2 são iguais? Justifique sua resposta.

Não, pois $(-9)^2 = 81$ e $-9^2 = -81$.

4 Qual expressão tem maior valor: A ou B?

a) $A = \left(\frac{1}{1}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

b) $B = \left(\frac{1}{1}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$

$A = 35\frac{5}{16}$ é maior que $B = 21\frac{34}{225}$.

5 Um corpo em queda livre percorre, no vácuo, uma distância d (em metro) que corresponde a $\frac{g \cdot t^2}{2}$, em que g é a aceleração da gravidade (considere $g = 10$ m/s²). Desprezando a resistência do ar, que distância percorre um paraquedista em queda livre durante 12 segundos? 720 m

GERMANSKYDIVER/ SHUTTERSTOCK

Propriedades da potenciação

Todas as propriedades da potenciação estudadas nos anos anteriores também são válidas para as potências de base real e expoente inteiro, desde que as condições para que existam as potências sejam obedecidas. Observe abaixo essas propriedades.

- **1ª propriedade:** Em uma multiplicação de potências de mesma base, conservamos a base e adicionamos os expoentes.

Exemplos

- $(0{,}15)^2 \cdot (0{,}15)^3 = (0{,}15)^{2+3} = (0{,}15)^5$
- $(0{,}777...)^{-1} \cdot (0{,}777...)^5 = (0{,}777...)^{-1+5} = (0{,}777...)^4$

De modo geral: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

- **2ª propriedade:** Em uma divisão de potências de mesma base não nula, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Exemplos

- $(0{,}19)^6 : (0{,}19)^2 = (0{,}19)^{6-2} = (0{,}19)^4$
- $(0{,}333...)^7 : (0{,}333...)^{-3} = (0{,}333...)^{7-(-3)} = (0{,}333...)^{10}$

De modo geral: $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

- **3ª propriedade:** Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita mantendo-se a base e multiplicando os expoentes.

Exemplos

- $[(0{,}32)^3]^2 = (0{,}32)^{3 \cdot 2} = (0{,}32)^6$
- $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right]^5 = \left(-\frac{1}{5}\right)^{3 \cdot 5} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{15}$

De modo geral: $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

- **4ª propriedade:** Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um mesmo expoente, podemos elevar cada um desses fatores a esse mesmo expoente.

Exemplos

- $(2 \cdot 5)^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^{-3}$
- $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

De modo geral: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, em que a e b são números reais não nulos e m é um número inteiro.

- **5ª propriedade:** Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente.

Exemplos

- $(8 : 3)^2 = 8^2 : 3^2$
- $\left(\frac{4}{3} : \frac{3}{16}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{16}\right)^{-3}$

De modo geral: $(a : b)^m = a^m : b^m$, em que a e b são números reais não nulos e m é um número inteiro.

Cuidado!

Observe atentamente estas desigualdades:

- $2^3 + 2^4 \neq 2^{3+4}$, pois: $24 \neq 128$
- $2^3 - 2^4 \neq 2^{3-4}$, pois: $-8 \neq \frac{1}{2}$
- $(5^2)^3 \neq 5^{2^3}$, pois: $5^6 \neq 5^8$
- $(5 + 3)^2 \neq 5^2 + 3^2$, pois: $64 \neq 34$
- $(5 - 3)^2 \neq 5^2 - 3^2$, pois: $4 \neq 16$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Indique sob a forma de uma só potência.

a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6$ 2^{18}

b) $(2^3)^2$ 2^6

c) $(6 : 3)^3$ 2^3

d) $10^3 \cdot 10 \cdot 10$ 10^5

e) $(3^4)^{-3}$ 3^{-12}

f) $6^4 : 6^2$ 6^2

g) $(2 \cdot 3)^3$ 6^3

h) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^3$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$

i) $7^{15} : 7^{10}$ 7^5

j) $10^{-1} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}$ 10^0

2 Calcule o valor de cada potência usando as propriedades da potenciação.

a) $\frac{2^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^6}$ 64

b) $(7 \cdot 4)^2$ 784

c) $(7^5 : 7^3) \cdot 7^2$ 2 401

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ $\frac{1}{64}$

e) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ $\frac{1}{64}$

f) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}\right]^{-1}$ $-\frac{1}{243}$

3 Determine o valor de:

$(1{,}666...)^{-1} + \frac{(3^{10} \cdot 3^{-5})^3}{9^8}$ $\frac{14}{15}$

4 Calcule o valor das expressões numéricas.

a) $3^2 \cdot 4^1 - 2^0 + 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3$ 764

b) $(-2)^{-6} \cdot 8^2 + 3^0$ 2

c) $6^1 \cdot 3^{-2} + 4^{-1} - 4 \cdot 7^0$ $-\frac{37}{12}$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^{-2}$ 9

e) $8^4 \cdot 8^3 \cdot 8^4 : 8^8$ 512

5 Escreva em seu caderno as sentenças verdadeiras. alternativa **a**

a) $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

b) $(2 + 5)^3 = 2^3 + 5^3$

c) $(17 - 1)^2 = 17^2 - 1^2$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$

Relógio radioativo

A característica radioativa de um tipo de carbono permite calcular a idade de organismos mortos há dezenas de milhares de anos.

O território brasileiro já foi habitado por gigantes. Mastodontes, entre outros animais de médio e grande porte, viveram aqui até 9 mil anos atrás, quando foram extintos na última Era do Gelo. Mas como os cientistas fazem essas datações? Eles comparam dois tipos de carbono presentes em ossos, dentes e outros materiais fósseis desses animais.

Carbono-14: raro e especial

O carbono é um elemento químico que existe na atmosfera e nos seres vivos. Observe a proporção das variedades de carbono.

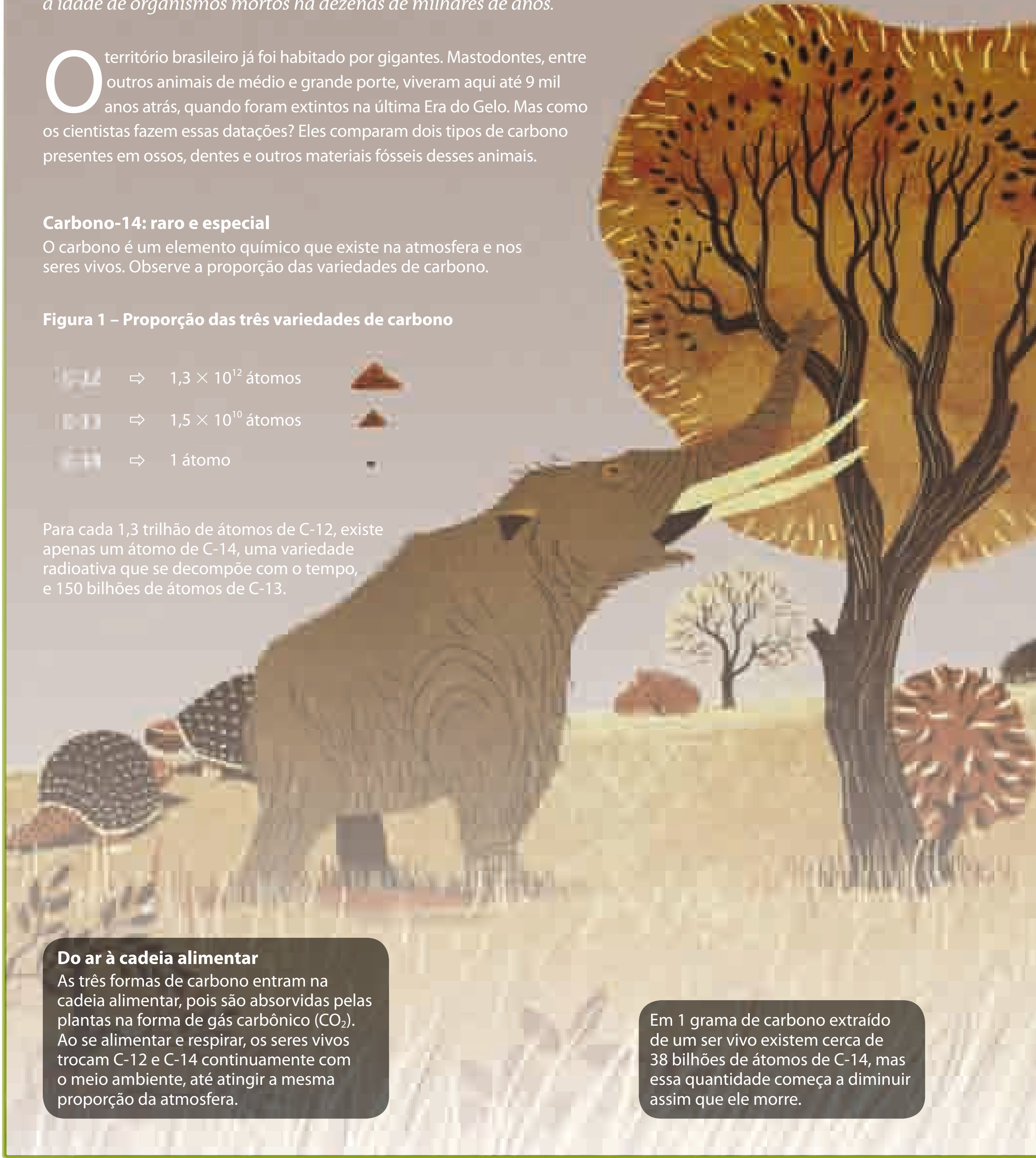
Figura 1 – Proporção das três variedades de carbono

[illegible] ⇨ $1{,}3 \times 10^{12}$ átomos

[illegible] ⇨ $1{,}5 \times 10^{10}$ átomos

[illegible] ⇨ 1 átomo

Para cada 1,3 trilhão de átomos de C-12, existe apenas um átomo de C-14, uma variedade radioativa que se decompõe com o tempo, e 150 bilhões de átomos de C-13.



Do ar à cadeia alimentar

As três formas de carbono entram na cadeia alimentar, pois são absorvidas pelas plantas na forma de gás carbônico (CO_2). Ao se alimentar e respirar, os seres vivos trocam C-12 e C-14 continuamente com o meio ambiente, até atingir a mesma proporção da atmosfera.

Em 1 grama de carbono extraído de um ser vivo existem cerca de 38 bilhões de átomos de C-14, mas essa quantidade começa a diminuir assim que ele morre.

ANDRÉ DUCCI

Os mastodontes eram mamíferos que viviam em bandos e se alimentavam de gramíneas e arbustos. Mediam de 3 a 4 metros de altura, pesavam de 4 a 7 toneladas e suas presas podiam atingir até 5 metros de comprimento. Essas medidas são muito próximas dos elefantes africanos de hoje que, quando adultos, têm cerca de 4 metros de altura, chegando a pesar 7 toneladas.

Como é feita a datação por carbono-14?

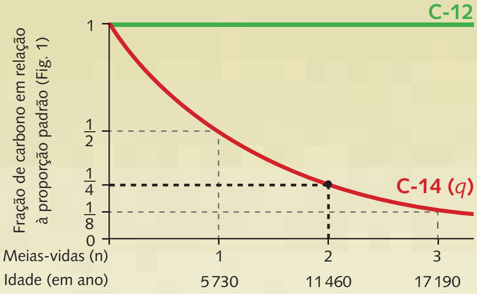
① Com uma pequena amostra extraída de fósseis, como a da foto abaixo, é possível medir no laboratório a quantidade de C-12 e de C-14. Enquanto a quantidade de C-12 permanece constante ao longo do tempo, a de C-14 diminui. Portanto, quanto menor a quantidade de C-14 na amostra em relação ao que havia antes da morte do ser vivo (que segue a proporção da Figura 1), mais velho é o fóssil.

JAIR DA SILVA/LEANDRO SALLES/ MUSEU NACIONAL - UFRJ

Restos da mandíbula de um mastodonte são examinados no Museu Nacional, na cidade do Rio de Janeiro, em 2001.

② Quando um ser vivo morre, deixa de absorver carbono, e a variedade radioativa C-14 passa a se desintegrar a uma taxa chamada meia-vida, como podemos observar no gráfico. No caso do C-14, a cada 5 730 anos, a proporção de C-14 cai à metade. A equação que expressa essa propriedade é:

$$q = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{, em que } \begin{cases} q_0 = \text{quantidade de C-14 antes da morte} \\ q = \text{C-14 da amostra} \\ n = \text{número de meias-vidas} \end{cases}$$



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Na mandíbula do mastodonte da foto, a proporção de C-14 é cerca de $\frac{1}{4}$ da inicial.

Então, como $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$, $2^n = 4$. Logo, $n = 2$.

De acordo com o gráfico acima, a proporção de C-14 é cerca de $\frac{1}{4}$ da inicial quando $n = 2$.

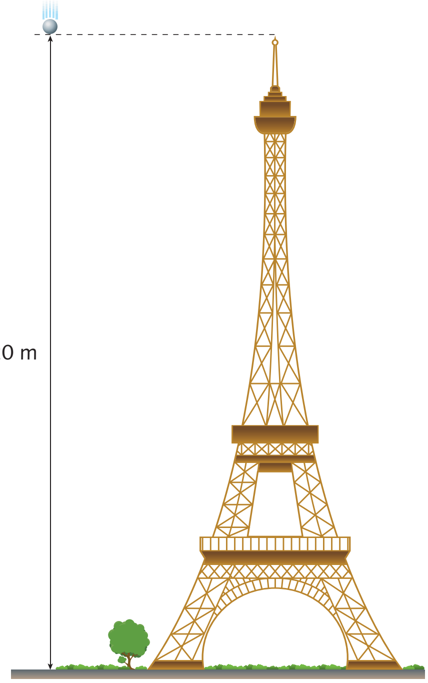
Portanto, o animal morreu há aproximadamente 11 460 anos (2 · 5 730 anos).

Fontes: SALLES, L. *O resgate do mastodonte brasileiro*. Rio de Janeiro: Museu Nacional, 2005; FARIAS, R. A química do tempo: carbono-14. *Química Nova na Escola*, São Paulo, n. 16, p. 6-8, nov. 2002; SANTOS, G. M. et al. Datação por carbono-14 utilizando espectrometria de massa com acelerador de partículas. *Revista de Física Aplicada e Instrumentação*, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 18-26, mar. 1999; CASSINO, R.; MEYER, K. Reconstituição paleoambiental do Chapadão dos Gerais (Quaternário tardio) a partir da análise palinológica da Vereda Laçador. *Revista Brasileira de Paleontologia*, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p. 127-146, jan.-abr. 2013.

2 Radiciação

No movimento de queda livre de uma esfera metálica da Torre Eiffel apresentada na página 29, vimos que a esfera metálica percorre, durante um tempo (t) expresso em segundo, uma distância (d) expressa em metro, que corresponde aproximadamente a: $d = \frac{g \cdot t^2}{2}$.

Vimos também que, se soltássemos uma esfera metálica de uma altura de 320 m (a mesma altura da Torre Eiffel), desprezando a resistência do ar, após 2 segundos, a esfera teria percorrido, aproximadamente, 20 m. Agora, vamos determinar o tempo aproximado que essa esfera demoraria para chegar ao solo.



LUIZ RUBIO

$$d = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$320 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$$

$$10 \cdot t^2 = 640$$

$$t^2 = \frac{640}{10}$$

$$t^2 = 64$$

Sabemos que t representa o tempo da queda e, por isso, é um valor positivo. Para obter o número positivo que elevado ao quadrado resulta em 64, fazemos: $\sqrt{64} = 8$. Logo:

$$t = \sqrt{64}$$

$$t = 8$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Portanto, a esfera metálica levaria, aproximadamente, 8 segundos para chegar ao solo.

Nos cálculos acima, realizados para encontrar o tempo aproximado de queda da esfera metálica, utilizamos as operações de multiplicação, divisão e **radiciação**.

Nesse exemplo, vimos que $\sqrt{64} = 8$, pois $8^2 = 64$.

A raiz quadrada de um número real a é um número não negativo que, elevado ao quadrado, tem como resultado a.

$\sqrt{225} = 15$, pois: $15^2 = 225$

$\sqrt{0,16} = 0,4$, pois: $(0,4)^2 = 0,16$

$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$, pois: $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$

Raiz quadrada exata

Considere as operações:

- $1 \cdot 1 = 1^2 = 1$
- $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
- $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
- $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$
- $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$
- $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$
- $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$
- $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$
- $9 \cdot 9 = 9^2 = 81$
- $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$
- $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$
- $12 \cdot 12 = 12^2 = 144$

Os números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 e 144 foram obtidos de um produto de dois fatores iguais. Chamados **quadrados perfeitos**, eles têm como raiz quadrada o fator que os originou.

Assim:

- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{144} = 12$

Para determinar a raiz quadrada de outros números que são quadrados perfeitos, podemos utilizar a decomposição em fatores primos.

Exemplos

- Vamos determinar a raiz quadrada de 1 296.

  Inicialmente, decompomos 1 296 em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 1\,296 & 2 \\ 648 & 2 \\ 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 1\,296 = 2^4 \cdot 3^4$$

  $1\,296 = (2^2 \cdot 3^2)^2 = 36^2$

  Portanto , $\sqrt{1296} = 36$, pois $36^2 = 1\,296$.

- Vamos determinar a raiz quadrada de 10,89.

  Inicialmente, transformamos o número decimal 10,89 na fração decimal $\frac{1089}{100}$.

  Em seguida, decompomos em fatores primos seu numerador e seu denominador. Veja:

$$\frac{1089}{100} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{(3 \cdot 11)^2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{33^2}{10^2} = \left(\frac{33}{10}\right)^2 = (3{,}3)^2$$

  Portanto, $\sqrt{10{,}89} = \sqrt{\left(\frac{33}{10}\right)^2} = \frac{33}{10} = 3{,}3$, pois $(3{,}3)^2 = 10{,}89$.

DIOGO SAITO

UM POUCO DE HISTÓRIA

O símbolo que indica a raiz quadrada sempre foi assim? Quem o criou?

Extrair a raiz quadrada de um número "x" significa encontrar o número que, multiplicado por si mesmo, resulta em "x". O conceito foi criado por matemáticos árabes. Eles imaginavam um número, por exemplo 25, e diziam que ele havia crescido de uma "raiz quadrada" com área igual a 25. Era preciso, então, "extrair a raiz" e perceber que cada lado do quadrado media 5. A ideia foi adotada por matemáticos europeus no fim da Idade Média. Ao traduzir livros árabes, eles encontraram o conceito e passaram a aplicá-lo. Para simbolizar a raiz, os europeus optaram pela letra "r" minúscula, por ser a primeira letra da palavra *radix* – que significa "raiz" em latim.

Acredita-se que o símbolo atual tenha surgido de uma mudança nessa abreviação do "r" manuscrito, que passou a sobrepor o número que estava depois dele. Contudo, não há registros precisos desse surgimento. Sabe-se apenas que o símbolo foi empregado pela primeira vez em 1525, no livro de álgebra *Die Coss*, de autoria do matemático alemão Christoff Rudolff (1499-1545), e que sua adoção geral só ocorreu no século seguinte. A vantagem do símbolo usado por Rudolff seria a possibilidade de, estendendo-se o travessão, indicar o número do qual se quer determinar a raiz quadrada, evitando, assim, o duplo entendimento. Com a evolução do uso da operação, convencionou-se a colocação de um índice sobrescrito à esquerda do símbolo para indicar raiz cúbica, raiz quarta etc.

Fonte: Nunes, Ronaldo. O símbolo que indica a raiz quadrada sempre foi assim? Quem o criou? Revista *Nova Escola*. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/simbolo-indica-raiz-quadrada-sempre-assim-quem-criou-matematica-numeros-511228.shtml>. Acesso em: 9 mar. 2015.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o valor das raízes quadradas.

a) $\sqrt{81}$ 9
b) $\sqrt{0}$ 0
c) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ $\frac{2}{5}$
d) $\sqrt{144}$ 12
e) $\sqrt{1}$ 1
f) $\sqrt{\frac{64}{169}}$ $\frac{8}{13}$
g) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ $\frac{1}{4}$
h) $\sqrt{225}$ 15
i) $\sqrt{0{,}49}$ 0,7

2 Sabendo que os números abaixo são quadrados perfeitos, determine a raiz quadrada de cada um deles.

a) 1 225 35
b) 2 401 49
c) 6 561 81
d) 6 400 80

3 Determine a raiz quadrada dos números abaixo.

a) 1,44 1,2
b) 12,96 3,6
c) 72,25 8,5
d) 39,69 6,3

4 Determine o menor número inteiro não nulo pelo qual devemos multiplicar 360 para obter como resultado um quadrado perfeito. 10

5 Faça os cálculos mentalmente, começando pela raiz quadrada de 1. 7

$$\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}$$

6 Leia as questões abaixo e responda-as.

a) Eu sou um número compreendido entre 200 e 250. Minha raiz quadrada é um número inteiro. Quem sou eu? 225

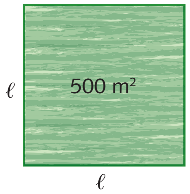
b) Eu sou um número compreendido entre 500 e 600. Minha raiz quadrada é um número par. Quem sou eu? 576

Raiz quadrada aproximada

Jonas comprou um terreno com forma de um quadrado que tem área igual a 500 m². Qual é a medida do lado desse terreno?

Considerando ℓ a medida do lado do quadrado que representa o terreno, temos:

$\ell \cdot \ell = 500$ ou $\ell^2 = 500$ ou $\ell = \sqrt{500}$



GUILHERME CASAGRANDI

Portanto, a medida do lado do terreno é $\sqrt{500}$ metros. Mas qual é o valor de $\sqrt{500}$?

Com o auxílio de uma calculadora, poderíamos facilmente determinar o valor aproximado de $\sqrt{500}$. Porém, como nem sempre podemos contar com uma calculadora, vamos aprender a estimar esse valor por meio do uso de quadrados perfeitos. Observe:

O número 500 situa-se entre os quadrados perfeitos 484 e 529.

Como $\sqrt{484} = 22$ e $\sqrt{529} = 23$, $\sqrt{500}$ é um número que está entre 22 e 23.

Calculamos os quadrados de alguns números situados entre 22 e 23, com uma casa decimal. Veja o quadro ao lado.

$22{,}1^2 = 488{,}41$
$22{,}2^2 = 492{,}84$
$22{,}3^2 = \mathbf{497{,}29}$ (< 500)
$22{,}4^2 = 501{,}76$ (> 500)

Assim, 22,3 corresponde a uma aproximação da medida do lado do terreno.

Para maior aproximação, podemos calcular os quadrados de números de duas casas decimais situados entre 22,3 e 22,4. Observe:

$22{,}31^2 = 497{,}7361$
$22{,}32^2 = 498{,}1824$
$22{,}33^2 = 498{,}6289$
$22{,}34^2 = 499{,}0756$
$22{,}35^2 = 499{,}5225$
$22{,}36^2 = \mathbf{499{,}9696}$ (< 500)
$22{,}37^2 = 500{,}4169$ (> 500)

LÉO FANELLI

Assim, 22,36 corresponde a uma aproximação de $\sqrt{500}$ com duas casas decimais.

Logo, o lado desse terreno mede, aproximadamente, 22,36 metros.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a raiz quadrada dos números com aproximação de uma casa decimal.

a) 40 6,3
c) 85 9,2
e) 800 28,2
b) 65 8,0
d) 140 11,8
f) 1050 32,4

2 Utilizando uma calculadora, determine a raiz quadrada dos números, com aproximação de duas casas decimais.

a) 30 5,47
d) 50,8 7,12
b) 8,6 2,93
e) 150 12,24
c) 95 9,74
f) 86,25 9,28

3 Determine o valor das adições, com aproximação de uma casa decimal.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 3,1
b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 3,9

4 Determine o valor de x, com uma casa decimal, que satisfaça $\sqrt{36} < x < \sqrt{38}$. 6,1

5 Coloque em ordem crescente os números:

$\sqrt{8}$, $\sqrt{4}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{2}$ $\frac{4}{5} < \sqrt{4} < \sqrt{8} < \frac{7}{2}$

6 Um quadrado tem área igual a 60 cm². Qual é a medida do lado desse quadrado?

$\sqrt{60}$ cm ou aproximadamente 7,75 cm

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Copie e complete as sentenças abaixo, a fim de torná-las verdadeiras.

a) Qualquer potência de base real não nula e expoente zero é igual a $\overset{\text{um}}{\blacksquare}$ (zero/um/própria base).

b) Qualquer potência de base real e expoente 1 é igual a $\overset{\text{própria base}}{\blacksquare}$ (zero/um/própria base).

2 Calcule o valor de:

a) 20^{-1} $\left(\frac{1}{20}\right)^{1} = \frac{1}{20}$ b) 3^{-3} $\left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27}$ c) 4^{-2} $\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{1}{16}$ d) 2^{-4} $\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}$

- Agora, escreva uma frase que sintetize o resultado de uma potência de base real não nula e expoente inteiro menor que zero. Uma potência de base real não nula e expoente inteiro menor que zero é igual ao inverso dessa base elevado ao oposto desse expoente.

3 Você estudou cinco propriedades usadas no cálculo de potências.

a) Essas propriedades envolvem quais operações entre as bases? Envolvem multiplicação, divisão e potenciação.

b) É possível aplicar alguma dessas propriedades na expressão a seguir? Justifique.

$$(3^2 + 2^3)^2$$

Não, pois dentro dos parênteses as potências estão sendo adicionadas.

4 Identifique os números que são quadrados perfeitos. alternativas **a**, **b**, **d**, **e** e **f**

a) 49
b) 900
c) 32
d) 529
e) 4
f) 1 024
g) 67
h) 913

- Explique como você pensou para identificar esses números. Resposta pessoal.

5 O número 123 não é um quadrado perfeito. É possível saber entre quais quadrados perfeitos ele se encontra? Sim, entre 11^2 e 12^2, pois $11^2 = 121$ e $12^2 = 144$.

Aplicando

1 Calcule:

a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$ $\frac{15}{16}$

b) $\sqrt{\frac{4}{1089}}$ $\frac{2}{33}$

c) $\sqrt{\frac{1024}{100}}$ $\frac{32}{10}$

d) $\sqrt{576}$ 24

e) $\sqrt{\frac{4225}{10000}}$ $\frac{65}{100}$

f) $\sqrt{5625}$ 75

2 Utilize uma calculadora para determinar o valor de:

a) 28^3 21 952 b) 5^6 15 625 c) $1{,}2^5$ 2,48832 d) $0{,}4^3$ 0,064

3 Com o auxílio de uma calculadora, determine o valor de: $(14 + 4 \cdot 3^2) \cdot (7^2 - 2 \cdot 8 - 3)$ 1 500

4 Calcule:

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ 5

b) $\sqrt{1{,}21} + \sqrt{1{,}44} + \sqrt{0{,}49} + \sqrt{0{,}16} + \sqrt{0{,}36}$ 4

c) $\sqrt{16} + \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + 7^1 - 12^0$ $\frac{65}{6}$

5 Calcule, com aproximação de duas casas decimais:

a) $\sqrt{75}$ 8,66

b) $\sqrt{7}$ 2,64

c) $\sqrt{3{,}57}$ 1,88

d) $\sqrt{500}$ 22,36

6 Calcule o valor das expressões abaixo utilizando as propriedades de potência.

a) $\dfrac{(m^3)^5}{m^{-14}} : m^{-4}$ m^{33}

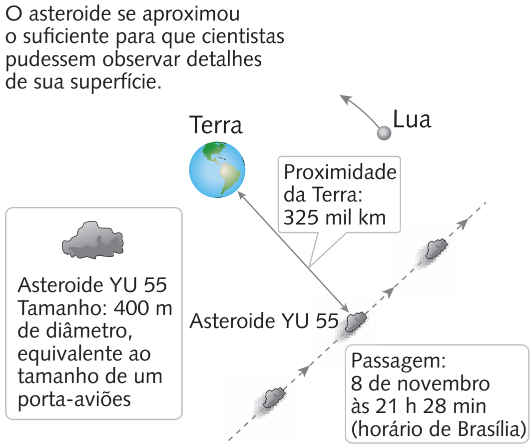
b) $\left[\left(\dfrac{1}{7}\right)^2\right]^4 : \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-3}$ $\left(\frac{1}{7}\right)^{11}$

7 Responda às questões abaixo.

a) Sendo n um número natural, $2^{n\,+\,5}$ é quantas vezes maior que 2^n? 32 vezes

b) Por quanto devemos dividir 10^{12} para obter 5^{12}? 2^{12}

8 **(Enem)** A Agência Espacial Norte-Americana (Nasa) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Fonte: Nasa.
Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. (adaptado)

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a: alternativa **d**

a) $3{,}25 \times 10^2$ km

b) $3{,}25 \times 10^3$ km

c) $3{,}25 \times 10^4$ km

d) $3{,}25 \times 10^5$ km

e) $3{,}25 \times 10^6$ km

9 Encontre o menor número inteiro que deve ser subtraído de 3 140 para que o resto seja um quadrado perfeito. 4

10 Determine x sabendo que $\sqrt{x} = 20{,}3$. 412,09

11 Responda às questões.

a) Qual é o maior número inteiro quadrado perfeito de quatro algarismos? 9 801

b) Qual é a raiz quadrada do número 11 236? 106

c) A terça parte da raiz quadrada de um número x é igual a 12. Qual é o valor de x? 1 296

d) Qual é o menor inteiro positivo que devemos multiplicar por 4 200 para obter um inteiro quadrado perfeito? 42

12 Usando as propriedades da potenciação, faça os cálculos mentalmente e copie as expressões substituindo os quadradinhos pelos valores corretos.

a) $100^2 \cdot 100^4 = 10^{■} \cdot 10^{■} = 10^{■}$ $10^4 \cdot 10^8 = 10^{12}$

b) $1\,000^5 \cdot 10\,000^{-2} = ■ \cdot ■ = ■$ $10^{15} \cdot 10^{-8} = 10^7$

c) $100\,000^{10} : 10\,000^4 = ■ : ■ = ■$ $10^{50} : 10^{16} = 10^{34}$

d) $(100\,000\,000^2 : 100\,000^{-4})^2 =$
$= (■ : ■)^2 = ■$ $(10^{16} : 10^{-20})^2 = (10^{36})^2 = 10^{72}$

13 Em uma sala havia 3 armários, em cada armário havia 3 caixas, em cada caixa havia 3 estojos e em cada estojo havia 3 colares. Quantos colares havia nessa sala? 81 colares

14 O número de bactérias, em uma colônia, é duplicado a cada 30 minutos. Se inicialmente havia 2 bactérias nessa colônia, quantas bactérias haverá após um dia? Escreva esse número na forma de potência. 2^{48}

15 Paulo dispõe de 150 placas quadradas de mesmo tamanho e quer revestir a maior superfície quadrada possível com essas placas. Sabendo que nenhuma placa poderá ser sobreposta e não poderá haver espaços sem revestimento, qual é o máximo de placas que Paulo deverá utilizar para revestir essa área? Explique como você pensou para determinar esse valor.

Deverá usar 144 dessas placas. Para formar uma superfície quadrada com placas quadradas de mesmo tamanho, deverá usar uma quantidade igual ao maior quadrado perfeito, menor do que 150.

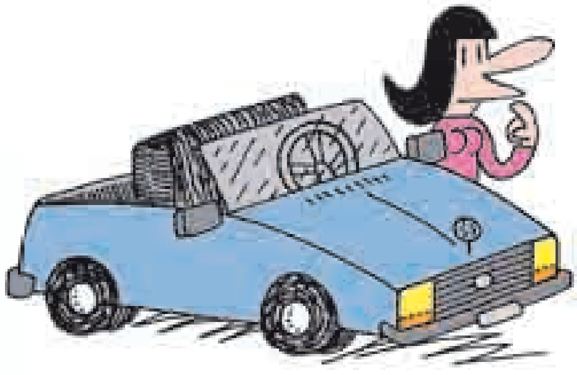
GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO

3 MONÔMIOS E POLINÔMIOS

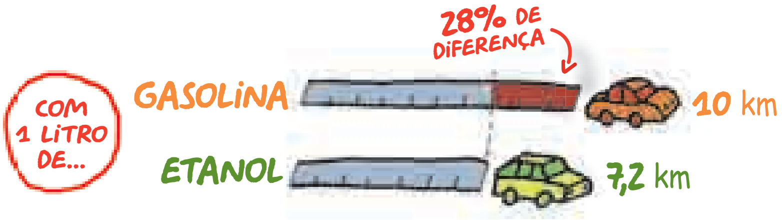
Etanol ou gasolina?

Ao abastecer um carro bicombustível, o motorista pode comparar o custo de cada combustível e escolher o mais econômico.



RENDIMENTO

O **potencial energético*** da queima do etanol combustível é cerca de 28% menor que o da gasolina. Assim, um carro bicombustível que percorre 10 quilômetros consumindo um litro de gasolina, percorrerá 2,8 quilômetros a menos com um litro de etanol.



---

* Capacidade de gerar energia.

Neste capítulo, vamos trabalhar com expressões algébricas ou literais e seus valores numéricos. Depois, serão apresentados os conceitos de monômios e polinômios. Serão efetuadas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, envolvendo monômios e polinômios.

CUSTO AMBIENTAL

A queima completa de combustíveis, como o etanol e a gasolina, gera gás carbônico. Como a gasolina é derivada do petróleo, ela é formada por carbono que, durante a queima, é transformado em gás carbônico. Durante milênios, a natureza "capturou" esses carbonos que agora são queimados e emitidos na atmosfera.
Na queima do etanol combustível, entretanto, o gás carbônico emitido tem sua origem na cana-de-açúcar, que captura o carbono do ar na forma de gás carbônico para seu crescimento, o que ajuda a diminuir a quantidade desse gás na atmosfera.


ADÃO ITURRUSGARAI

Outro fator revelante são os resíduos presentes nos combustíveis. Aqueles derivados do petróleo são misturas que contêm, além do carbono, outros elementos, como o enxofre e o nitrogênio, os quais, quando queimados, geram gases nocivos na atmosfera. Por causa da origem vegetal do etanol combustível, sua queima não gera esses gases.

Mas, apesar de a queima do etanol combustível ser mais limpa que a da gasolina, os bilhões de toneladas de gás carbônico lançados na atmosfera todos os anos geram altos custos ambientais, com os quais, em algum momento, as sociedades terão que arcar.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

- Uma pessoa vai abastecer seu automóvel com 30 litros de combustível.

a) Quanto ela vai gastar se abastecer com gasolina? E se abastecer com etanol?
R$ 92,97; R$ 65,97

b) Supondo que esse automóvel percorresse 10 km com um litro de gasolina, quantos quilômetros ele percorreria com 30 litros de gasolina? Considerando o potencial energético do etanol, indicado na ilustração, quantos quilômetros ele percorreria com 30 litros de etanol? 300 km; 216 km

c) Escreva uma expressão que indique o preço a pagar por x litro de gasolina e uma que indique o preço por x litro de etanol. Gasolina: $3{,}099x$
Etanol: $2{,}199x$

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Na Antiguidade, não havia símbolos para indicar números desconhecidos; por isso, utilizavam-se palavras e desenhos. Isso tornava as representações dos cálculos bastante extensas.

Foi somente a partir do século XVI que os matemáticos começaram a usar sistematicamente símbolos e letras para representar números.

O uso de letras na resolução de diversos problemas de Matemática inaugurou um novo segmento dessa importante área: a **Álgebra**.


BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL – BRITISH MUSEUM, LONDON

O Papiro de Rhind (ou Ahmes) é a principal fonte do atual conhecimento da matemática do antigo Egito. Em alguns problemas descritos há o uso da palavra "*aha*" ou "pilha" para designar elementos desconhecidos.

Observe a figura abaixo e responda às questões.

GUILHERME CASAGRANDI

- Que expressão matemática representa o perímetro do quarto? $2x + 2y$
- Que expressão matemática representa a área da sala? ab

Neste capítulo, vamos estudar as expressões algébricas.

1 Expressões algébricas

Acompanhe a situação a seguir.

Uma fábrica produz embalagens cartonadas (caixinhas) em série. No processo de fabricação, algumas caixinhas saem defeituosas. Cada caixinha perfeita gera um ganho de x reais, e cada uma das defeituosas, um prejuízo de y reais. Observe, na tabela abaixo, a produção dessa fábrica nos três primeiros meses do ano.

	Quantidade de caixinhas	
	Perfeitas	**Defeituosas**
Janeiro	90 mil	2,5 mil
Fevereiro	68 mil	3,2 mil
Março	75 mil	1,8 mil

Dados obtidos pelo gerente comercial.


EPSICONS/SHUTTERSTOCK

Embalagem cartonada usada para a proteção e o transporte de produtos líquidos ou pastosos, que necessitam de uma boa barreira contra os efeitos do ambiente externo.

O gerente comercial concluiu que o lucro da fábrica, no trimestre, poderia ser expresso assim:

$$(90\,000 + 68\,000 + 75\,000) \cdot x - (2\,500 + 3\,200 + 1\,800) \cdot y = 233\,000x - 7\,500y$$

A expressão algébrica obtida representa o lucro trimestral da fábrica, em função dos valores de x e y.

Se o ganho com cada caixinha fosse de R$ 0,26 e o prejuízo fosse de R$ 0,15, o lucro trimestral da fábrica seria de R$ 59 455,00. Veja o cálculo:

$$233\,000 \cdot 0{,}26 - 7\,500 \cdot 0{,}15 = 59\,455$$

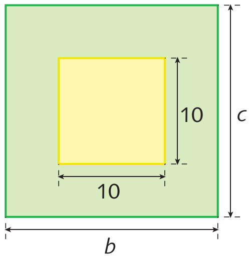
Nessa situação, empregamos letras (x e y) para representar os números referentes ao ganho e ao prejuízo. Com base nisso, montamos uma **expressão algébrica** para representar o lucro trimestral: $233\,000x - 7\,500y$

Expressões algébricas são aquelas que indicam operações matemáticas que contêm números e letras ou somente letras.

Verificamos que é possível usar letras para representar números reais desconhecidos; nesse caso, as letras são as variáveis.

Observe o exemplo:

- Vamos representar a área da parte verde da figura abaixo.



$$A_{amarela} = 10 \cdot 10 = 10^2 = 100$$

$$A_{total} = b \cdot c$$

$$A_{verde} = (A_{total}) - (A_{amarela}) = bc - 100$$

GUILHERME CASAGRANDI

A área da parte verde pode ser representada pelas expressões: $b \cdot c - 10^2$ ou $bc - 100$

DIOGO SAITO

UM POUCO DE HISTÓRIA

Na primeira fase do desenvolvimento da Álgebra não se fazia uso de símbolos ou abreviações para expressar o pensamento algébrico. Nessa fase, todos os passos eram expressos por meio da linguagem corrente. Os babilônios (por volta de 1800 a.C.), os antigos egípcios (por volta de 2000 a.C.) e os gregos (que antecederam Diofante) faziam uso desse recurso.

Foi o matemático grego, Diofante de Alexandria (cerca de 250 d.C.), em sua obra *Arithmetica*, quem fez uso, pela primeira vez, de um símbolo, a letra grega $\sum$ (sigma), para representar um número desconhecido.

A Álgebra árabe também era expressa por meio da linguagem corrente. O matemático árabe, Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi (séc. IX d.C.), em sua obra *Al-jabr Wa'l muqabalah*, introduziu grandes contribuições para a Álgebra, tanto que o próprio termo "álgebra" teve origem a partir do nome dessa obra.

Somente no século XVI, o francês François Viète (1540-1603) introduziu novos símbolos, como os sinais + e − e o uso de vogais para constantes e consoantes para incógnitas. Mas, a Álgebra como conhecemos hoje foi consolidada por René Descartes (1596-1650), em sua obra *La géométrie*, em 1637.

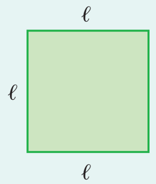
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

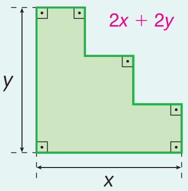
1 Determine a expressão algébrica que representa o perímetro de cada figura abaixo.

a)



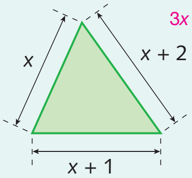
4ℓ

b)



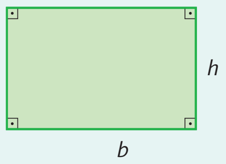
$2x + 2y$

c)



$3x + 3$

d)



$2b + 2h$

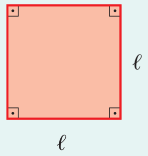
2 Responda, com uma expressão algébrica, às perguntas abaixo.

a) Quantos meses há em x anos? $12x$

b) Quantos anos há em y dias? (Considere o ano não bissexto.) $\frac{y}{365}$

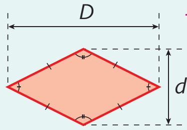
3 Qual é a expressão algébrica que representa a área de cada figura?

a)



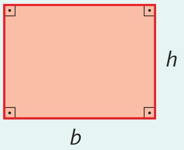
ℓ^2

b)



$\frac{D \cdot d}{2}$

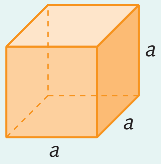
c)



$b \cdot h$

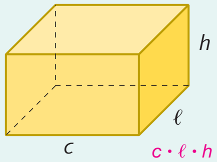
4 Qual é a expressão algébrica que representa o volume de cada paralelepípedo representado abaixo?

a)



a^3

b)



$c \cdot \ell \cdot h$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

5 Escreva uma expressão algébrica que represente:

a) a soma do triplo de um número x com seu quadrado; $3x + x^2$

b) a terça parte de um número y; $\frac{y}{3}$

c) o produto de dois números x e y; xy

d) a raiz quadrada de um número k; $\sqrt{k}$, $k \geqslant 0$

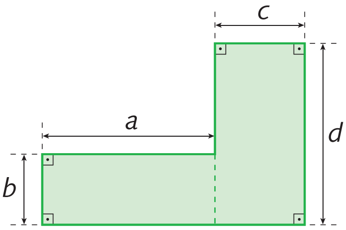
e) a soma dos quadrados dos números x e y; $x^2 + y^2$

f) o quádruplo do número y menos a sua terça parte; $4y - \frac{y}{3}$

g) 25% de um número m. $\frac{25}{100}m$

Valor numérico

Considere um terreno com a forma da figura abaixo, cujas medidas são a, b, c e d.



A área desse terreno pode ser representada pela expressão algébrica:

$$a \cdot b + c \cdot d \quad \text{ou} \quad ab + cd$$

Sendo $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$ e $d = 6$, a área do terreno corresponde a:

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 10 + 18 = 28$$

O número 28 é o **valor numérico** da expressão $ab + cd$, para $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$ e $d = 6$.

Valor numérico é o resultado das operações efetuadas em uma expressão algébrica, após a substituição das variáveis por números reais.

Observe outros exemplos.

- Determine o valor numérico da expressão $5a + 3b$, para $a = -3$ e $b = \frac{1}{2}$.

  Substituindo a e b pelos valores dados, temos:

  $$5 \cdot (-3) + 3 \cdot \frac{1}{2} = -15 + \frac{3}{2} = -\frac{30}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{27}{2}$$

- Determine o valor numérico da expressão $\frac{x^2 - xy}{3x + y}$, para $x = -1$ e $y = -\frac{1}{2}$.

  Substituindo x e y pelos valores dados, temos:

  $$\frac{(-1)^2 - (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{3 \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-3 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}{-\frac{6}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{1}{7}$$

Uma expressão algébrica pode apresentar valores numéricos diferentes, de acordo com os valores atribuídos às variáveis. Veja o exemplo a seguir.

- Dada a expressão $\frac{2x + y}{x - y}$, determine seu valor para:

a) $x = 1$ e $y = -1$

$$\frac{2 \cdot 1 + (-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

b) $x = 3$ e $y = -\frac{1}{2}$

$$\frac{2 \cdot 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{3 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{6 - \frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{12}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{6}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{11}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} = \frac{11}{7}$$

Lendo e aprendendo

Densidade de um corpo

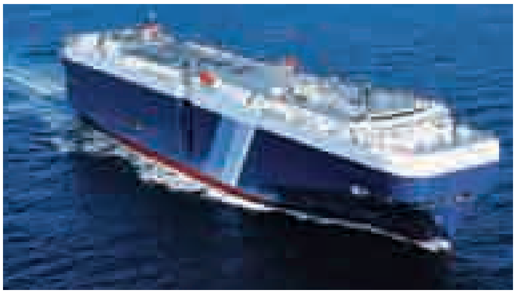
Estudamos em Ciências que a densidade (d) de um corpo é a razão entre sua massa, em grama, e seu volume, em centímetro cúbico.

$$d = \frac{m}{V} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{massa em g} \\ \leftarrow \text{volume em cm}^3 \end{array}$$

Assim, conhecendo a massa e o volume de um corpo, podemos calcular sua densidade. Por exemplo:

Corpo maciço de:	m (g)	V (cm^3)	d (g/cm^3)
Alumínio	540	200	$\frac{540}{200} = 2{,}7$
Aço	1 560	200	$\frac{1560}{200} = 7{,}8$
Mercúrio	2 720	200	$\frac{2\,720}{200} = 13{,}6$

Para que um corpo possa flutuar na água, ele deve ter densidade menor que 1 g/cm^3, que é a densidade da água. Desse modo, se jogarmos na água um bloco maciço de aço de massa 1 560 g e volume 200 cm^3, ele afundará, pois sua densidade é maior que a da água. Agora, se derretermos esse bloco de aço e construirmos um objeto oco de mesma massa, de modo que a razão $\frac{m}{V}$ seja menor que 1 g/cm^3, esse objeto, mesmo sendo de aço, flutuará na água.



© NYK LINE

Mesmo com toda a carga que carrega, um navio não afunda porque sua densidade é menor que a da água.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o valor numérico das expressões algébricas.

a) $3x - 2y$, para $x = 3$ e $y = -2$ 13

b) $a^3b - b^2$, para $a = -1$ e $b = 2$ −6

c) $(x - y) \cdot (y - 2x)$, para $x = 3$ e $y = -\frac{1}{2}$ $-\frac{91}{4}$

d) $x^2 - 3x + y$, para $x = -2$ e $y = -5$ 5

e) $(a + b)^2$, para $a = 5$ e $b = -3$ 4

f) $\sqrt{2x^2 + y}$, para $x = -2$ e $y = 8$ 4

g) $(x + y)^2$, para $x = -3$ e $y = 5$ 4

h) $x^2 - 4x + 5y$, para $x = 1$ e $y = -2$ −13

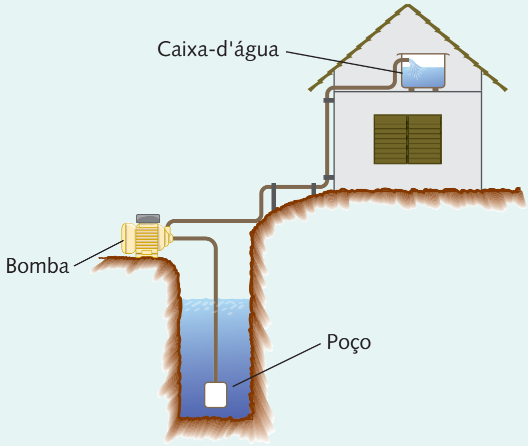
2 Você leu no boxe *Lendo e aprendendo* que a densidade de um corpo é determinada por $d = \frac{m}{V}$.

Com base nessa informação, determine o volume de uma pepita de platina cuja massa é 3,21 kg. (Dado: densidade da platina = 21,4 g/cm³) 150 cm³

E. R. DEGGINGER/ALAMY/GLOW IMAGES

Pepita de platina.

3 A quantidade de água (L), em litro, que uma bomba pode retirar de um poço e elevar até uma caixa-d'água, no alto de uma residência, é representada por $L = 45t + 10$, em que t é o tempo em minuto ($t > 0$). Quantos litros de água essa bomba terá colocado na caixa-d'água após uma hora de funcionamento? 2 710 ℓ



GUILHERME CASAGRANDI

4 A produção diária de engrenagens em uma empresa pode ser calculada por $p = 500t - 36$, em que p é a quantidade de engrenagens produzidas e t é a quantidade de horas trabalhadas por dia.

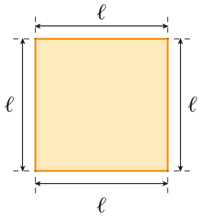
a) Quantas peças são produzidas trabalhando 6 horas em um dia? 2 964

b) Sabendo que essa empresa funciona diariamente por um período de 10 horas, determine a quantidade de peças produzidas em 5 dias. 24 820

2 Monômio

Observe as representações algébricas utilizadas nas situações abaixo.

- O perímetro de um quadrado de medida de lado ℓ.

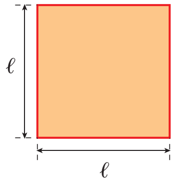


GUILHERME CASAGRANDI

expressão algébrica: $4 \cdot \ell = 4\ell$

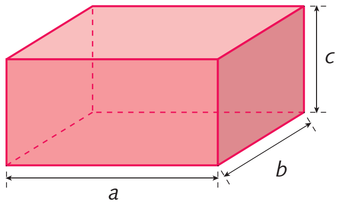
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

- A área de um quadrado de medida de lado ℓ.



expressão algébrica: $\ell \cdot \ell = \ell^2$

- O volume de um paralelepípedo retângulo de medidas *a*, *b* e *c*.



expressão algébrica: abc

- O preço de quatro chaveiros, sabendo que cada um deles custa *x* reais.

BESTNAT/SHUTTERSTOCK

expressão algébrica: $4x$

Nas situações descritas, verificamos a existência de diferentes expressões algébricas que recebem o nome de **monômio**. Um monômio pode ser um número ou uma expressão algébrica formada pela multiplicação de número e variável ou número e variáveis, de expoente natural.

Exemplos

- 16
- x
- a^3b^2
- $\frac{1}{2}x^3y^2$
- $-5n^2$

Em um monômio, distinguimos:

- o **coeficiente,** que corresponde à parte numérica (que é um número real);
- a **parte literal**, que corresponde a uma variável ou um produto de variáveis, com expoente natural.

Exemplos

- $-13x^2y^2$
  coeficiente: -13
  parte literal: x^2y^2
- $\frac{1}{2}x^4y^3$
  coeficiente: $\frac{1}{2}$
  parte literal: x^4y^3
- $-a^3b^5$
  coeficiente: -1
  parte literal: a^3b^5
- $2{,}5m^2n$
  coeficiente: $2{,}5$
  parte literal: m^2n

Observações

1 O monômio que tem coeficiente zero representa o número real zero e é chamado de **monômio nulo**. Veja os exemplos:

- $0x = 0$
- $0a^2b^3 = 0$
- $0m^5n^4 = 0$

2 Todo número real é um monômio sem a parte literal. Veja os exemplos:

- 12
- -5
- $\frac{3}{4}$
- $-0{,}6$

▶

3 Quando um monômio é formado apenas por uma variável ou por uma multiplicação de variáveis, o coeficiente é igual a 1. Veja os exemplos:

- y
- xy
- x^3yz^2
- x^4z^3

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o coeficiente e a parte literal dos monômios abaixo.

a) $\frac{1}{5}a^3b^4$ $\frac{1}{5}$, a^3b^4

b) $-a^2bc^3$ -1, a^2bc^3

c) $\frac{3}{2}x^3$ $\frac{3}{2}$, x^3

d) $-5\sqrt{3}\,mn^2$ $-5\sqrt{3}$, mn^2

e) $\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot c^4}{5}$ $\frac{1}{5}$, $a^2 \cdot b^3 \cdot c^4$

f) xyz 1, xyz

g) $-xy$ -1, xy

h) $\frac{4\pi r^3}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$, r^3

2 Identifique, entre as expressões abaixo, as que são monômios. alternativas **a**, **d**, **e**, **f**, **g**, **i**, **k** e **l**

a) -8

b) $a + 2b$

c) $\frac{5}{b}$

d) $16abc$

e) x^5

f) $\frac{2a}{3}$

g) $-ay$

h) $-a + a^2$

i) x^2y

j) $\frac{x + y}{2}$

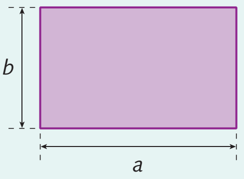
k) 1000

l) $-0{,}06b$

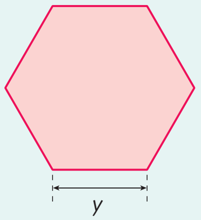
Converse com o professor e os colegas sobre o porquê das outras expressões não serem classificadas como monômios.

3 Determine o monômio correspondente:

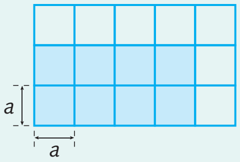
a) à área do retângulo; ab



b) ao perímetro do hexágono regular; $6y$



c) à área da parte pintada de azul da figura. $8a^2$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Monômios semelhantes

Observe os monômios a seguir.

- Os monômios $5a^3b^2$ e $-\frac{1}{2}a^3b^2$ apresentam a mesma parte literal: a^3b^2
- Os monômios $\sqrt{2}\,a^5b^2$ e $-\frac{3}{7}a^5b^2$ apresentam a mesma parte literal: a^5b^2
- Os monômios $3m^2n$ e $-\frac{4}{9}m^2n$ apresentam a mesma parte literal: m^2n

Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados **monômios semelhantes.**

Assim, são monômios semelhantes:

- $5a^3b^2$ e $-\frac{1}{2}a^3b^2$
- $\sqrt{2}\,a^5b^2$ e $-\frac{3}{7}a^5b^2$
- $3m^2n$ e $-\frac{4}{9}m^2n$

Observe outros exemplos.

- $20a^2b^5$ e $-\frac{1}{3}a^2b^5$ são monômios semelhantes.
- $2x^5$, $\frac{3}{4}x^5$ e $-7x^5$ são monômios semelhantes.
- 12, $\sqrt{3}$ e $-\frac{3}{4}$ são monômios semelhantes.

Grau de um monômio

O grau de um monômio de coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis.

Exemplos

- $6\underbrace{x^2y^3}_{\boxed{2+3=5}}$ é um monômio do **5º grau**.
- $\frac{3}{2}\underbrace{x^1y^2z^3}_{\boxed{1+2+3=6}}$ é um monômio do **6º grau**.
- 20 é um monômio de **grau zero**.

Podemos também definir o grau de um monômio em relação ao expoente de uma de suas variáveis.

Exemplos

- $6a^1b^3$
  - É um monômio do **1º grau** em relação à variável *a*.
  - É um monômio do **3º grau** em relação à variável *b*.
- $-\frac{1}{5}x^2y^5$
  - É um monômio do **2º grau** em relação à variável *x*.
  - É um monômio do **5º grau** em relação à variável *y*.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Identifique as alternativas que apresentam monômios semelhantes. alternativas **a**, **c**, **e** e **g**

a) $6x^2$ e $-5x^2$

b) $15xy$ e $30x$

c) -8, 10 e -15

d) $5b^2$ e $-7a$

e) $\frac{30x^2}{41}$ e $-2x^2$

f) $8m^2n$ e $6mn^2$

g) $\frac{x}{5}$ e $6x$

h) x^2 e $\frac{1}{x}$

2 Determine o grau de cada monômio.

a) $7x$ 1º grau

b) $-5x^3y^2$ 5º grau

c) $-15x^2y$ 3º grau

d) $2x^3y^4$ 7º grau

e) x^3y 4º grau

f) 28 grau zero

g) $\frac{x^3}{4}$ 3º grau

h) $7xyz$ 3º grau

i) $6xy^2$ 3º grau

j) $-3x^4$ 4º grau

k) 5^2 grau zero

l) $-\frac{1}{2}xy$ 2º grau

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Escreva, no caderno, um monômio semelhante a:

$-\frac{2}{3}a^5b^7c^9$ Resposta pessoal. Exemplo: $5a^5b^7c^9$

4 Determine o grau de cada monômio em relação a x.

a) $5xy^2$ 1º grau

b) $-\frac{3}{4}x^3$ 3º grau

c) xy^2z^3 1º grau

d) $12x$ 1º grau

5 Escreva, no caderno, dois monômios semelhantes cujos coeficientes sejam números inversos. Resposta pessoal. Exemplo: $2ab$ e $\frac{1}{2}ab$

6 Determine o grau dos monômios abaixo em relação a x, y e z.

a) $-15x^3y^4z^5$

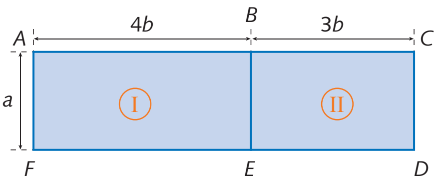
b) $-5x^4z^2$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{2}\,xy^3z^2$

a) $x \rightarrow$ 3º grau;
$y \rightarrow$ 4º grau;
$z \rightarrow$ 5º grau
b) $x \rightarrow$ 4º grau;
$z \rightarrow$ 2º grau
c) $x \rightarrow$ 1º grau;
$y \rightarrow$ 3º grau;
$z \rightarrow$ 2º grau

3 Adição e subtração de monômios

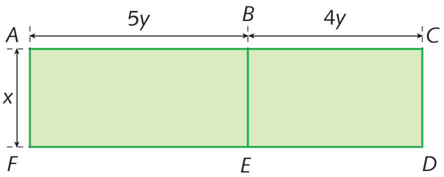
Observe a figura abaixo.



- A área do retângulo Ⅰ é expressa pelo monômio $4ab$.
- A área do retângulo Ⅱ é expressa pelo monômio $3ab$.
- A área da figura é expressa por $4ab + 3ab$ ou $7ab$.

Portanto: $4ab + 3ab = 7ab$

Observe esta outra figura:



- A área do retângulo *ACDF* é expressa pelo monômio $9xy$.
- A área do retângulo *ABEF* é expressa pelo monômio $5xy$.
- A área do retângulo *BCDE* é expressa por $9xy - 5xy$ ou $4xy$.

Portanto: $9xy - 5xy = 4xy$

Uma expressão algébrica em que todos os monômios são semelhantes pode ser simplificada adicionando ou subtraindo os coeficientes.

Veja outros exemplos.

- $3x^2y + 5x^2y = (3 + 5)x^2y = 8x^2y$
- $3a^2b + 2a^2b - 5a^2b = (3 + 2 - 5)a^2b = 0a^2b = 0$
- $8b^2c^3 - b^2c^3 = (8 - 1)b^2c^3 = 7b^2c^3$
- $6m - \frac{1}{2}m + \frac{3}{5}m = \left(6 - \frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)m = \frac{61}{10}m$

Se uma expressão tem monômios semelhantes e monômios não semelhantes, efetuamos a adição ou a subtração dos semelhantes e conservamos os demais. Veja:

- $6a^3 + 5xy + 5x + 2a^3 - 2xy + a^3 = \underline{6a^3 + 2a^3 + a^3} + \overline{5xy - 2xy} + 5x = \underline{9a^3} + \overline{3xy} + 5x$
- $6a^2b + 3m^2 - 3a^2b + a^2b - 10m^2 = \underline{6a^2b - 3a^2b + a^2b} + \overline{3m^2 - 10m^2} = \underline{4a^2b} - \overline{7m^2}$

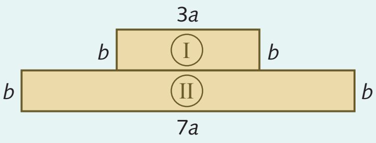
Nas expressões acima, dizemos que foi efetuada uma **redução de termos semelhantes**.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe a figura e responda às questões.



a) Que monômio representa a área do retângulo Ⓘ? E do retângulo Ⓘⓘ? $3ab$; $7ab$

b) Que monômio representa a área total da figura? $10ab$

c) Sendo $a = 5$ e $b = 5{,}5$, qual é a área total da figura? 275

2 Simplifique as expressões:

a) $7x - 4x + 3x$ $6x$

b) $15x^2 + \frac{1}{3}x^2 - 2x^2$ $\frac{40}{3}x^2$

c) $5xy + 15xy - 12xy + 2xy$ $10xy$

d) $\left(-\frac{1}{3}xy\right) + \left(+\frac{4}{9}xy\right) + \left(-\frac{1}{9}xy\right)$ 0

e) $9x^4y^3 - 18x^4y^3 - 10x^4y^3 + 2x^4y^3$ $-17x^4y^3$

f) $\left(-\frac{1}{4}x^2y\right) + \left(-\frac{3}{8}x^2y\right) + \left(-\frac{9}{8}x^2y\right)$ $-\frac{7}{4}x^2y$

3 Que monômio devemos adicionar à expressão $-3abc$ para obter $5abc$? $8abc$

4 Dada a expressão algébrica $\frac{4}{3}x^2y - \frac{3}{8}x^2y + \frac{4}{9}x^2y - \frac{1}{4}x^2y$, determine o valor numérico para $x = -1$ e $y = 2$. $\frac{83}{36}$

5 Reduza os termos semelhantes de cada expressão.

a) $5x^3 - x^2 + x - 2 + x^3 - 6x + 8$ $6x^3 - x^2 - 5x + 6$

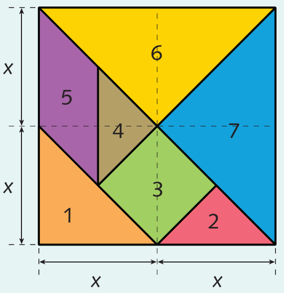
b) $\frac{3xy}{4} - \frac{xz}{2} + \frac{xy}{3} - xz$ $\frac{13}{12}xy - \frac{3}{2}xz$

c) $8mn + 2m^2 - 5mn + 3m^2$ $3mn + 5m^2$

d) $a^6 - 3a^3 - 6a^6 - 2a^3 + a^3 + 2a^6$ $-3a^6 - 4a^3$

6 O tangram é um jogo chinês, que é uma espécie de quebra-cabeça, composto de sete peças, com as quais se podem criar numerosas figuras. Determine a área das peças 1, 6 e 7, sabendo que a soma de todas as áreas corresponde a $4x^2$.

$A_1 = \frac{x^2}{2}$
$A_6 = x^2$
$A_7 = x^2$

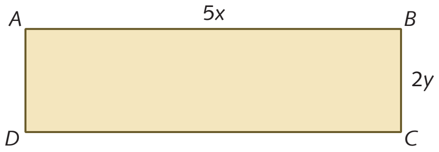


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

4 Multiplicação de monômios

Inicialmente, vamos recordar que: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, sendo a um número real não nulo e m e n dois números inteiros.

Observe a figura abaixo.



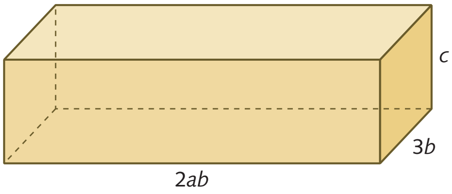
GUILHERME CASAGRANDI

A área (A) do retângulo $ABCD$ é determinada multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura:

$$A = 5x \cdot 2y = 5 \cdot 2 \cdot x \cdot y = 10xy$$

Portanto, o monômio $10xy$ representa a área desse retângulo.

Agora, observe esta figura:



GUILHERME CASAGRANDI

O volume (V) do paralelepípedo representado ao lado é determinado multiplicando-se a medida do comprimento pelas medidas da largura e da altura:

$$V = 2ab \cdot 3b \cdot c = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c = 6ab^2c$$

Portanto, o monômio $6ab^2c$ representa o volume desse paralelepípedo.

A multiplicação de monômios é efetuada multiplicando-se os coeficientes e as partes literais entre si.

Veja outros exemplos.

- $3x^2y \cdot 15xy = (3 \cdot 15) \cdot (x^2y \cdot xy) = 45x^3y^2$
- $-3a^2b \cdot 7c^4 = (-3 \cdot 7) \cdot (a^2bc^4) = -21a^2bc^4$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule os produtos abaixo.

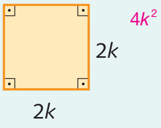
a) $x^7 \cdot x^8$ x^{15}

b) $(+3x) \cdot (-8x)$ $-24x^2$

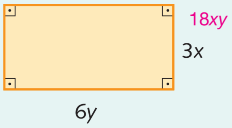
c) $(-2x^2y) \cdot (+7xy)$ $-14x^3y^2$

d) $(+4ab^2) \cdot (-2abc)$ $-8a^2b^3c$

2 Qual é o monômio que representa a área de cada figura?

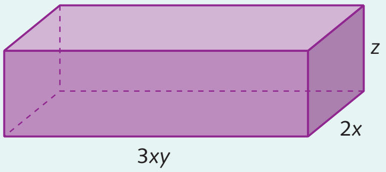
a) 

$4k^2$

b) 

$18xy$

3 Observe a figura e responda às questões.



a) Qual é o monômio que representa o volume desse paralelepípedo? $6x^2yz$

b) Qual é o valor numérico do volume quando $x = 3$, $y = 2$ e $z = 4$? 432

4 Efetue as multiplicações.

a) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^{13}$ x^{19}

b) $\left(\frac{1}{10}yk\right) \cdot \left(\frac{10}{7}x\right) \cdot (14z)$ $2ykxz$

c) $\left(-\frac{3}{2}ab\right) \cdot \left(+\frac{4}{9}bc\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}ac^2\right)$ $\frac{2}{7}a^2b^2c^3$

d) $(-15x^2y) \cdot \left(-\frac{2}{5}xy^3\right) \cdot (+3x^2y^2)$ $18x^5y^6$

e) $(-0{,}4a^2b) \cdot (+0{,}01b) \cdot (-0{,}02a^2b^3)$ $0{,}00008a^4b^5$

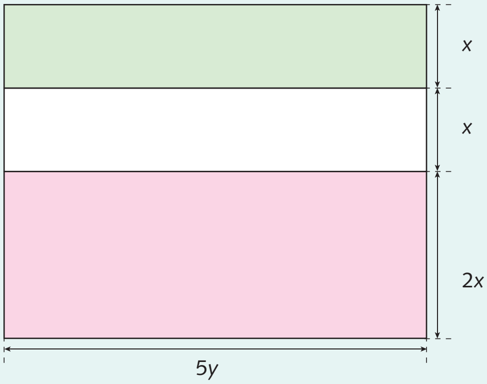
f) $(-3mnp) \cdot \left(+\frac{4}{9}mp\right) \cdot (-18mn)$ $24m^3n^2p^2$

5 Sabendo que $A \cdot B = C + D$, determine o monômio D, sendo $A = 2x^2y^3$, $B = -4xy$ e $C = -14x^3y^4$. $6x^3y^4$

6 Dê um exemplo de dois monômios tais que o seu produto seja $6p^3q$.

Exemplo de resposta: $2p^2$ e $3pq$.

7 Observe a figura e responda às questões.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA

a) Qual é o monômio que representa a área do retângulo verde? E do retângulo rosa? $5xy$; $10xy$

b) Qual é o monômio que representa a área total da figura? $20xy$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

5 Divisão de monômios

Inicialmente, vamos recordar que:

$a^m : a^n = a^{m-n}$, sendo a um número real não nulo e m e n dois números inteiros.

Observe estes exemplos:

- $(20x^5) : (4x^3) = \dfrac{20x^5}{4x^3} = 5x^{5-3} = 5x^2$
- $\left(-\dfrac{1}{2}a^5b^2\right) : (3a^3b) = \dfrac{-\dfrac{1}{2}a^5b^2}{3a^3b} = \left(-\dfrac{1}{2} : 3\right) \cdot \left(\dfrac{a^5b^2}{a^3b}\right) = -\dfrac{1}{6}a^{5-3}b^{2-1} = -\dfrac{1}{6}a^2b$
- $(-30x^4y^3z^2) : (-6xy^3z) = \dfrac{-30x^4y^3z^2}{-6xy^3z} = 5x^{4-1}y^{3-3}z^{2-1} = 5x^3z$

A divisão de monômios com divisor diferente de zero é efetuada dividindo-se os coeficientes e as partes literais, quando houver, entre si.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Qual é o monômio que representa o resultado de cada divisão?

a) $(16x^7) : (4x^3)$ $4x^4$

b) $(-60a^5b^3) : (-15a^2b)$ $4a^3b^2$

c) $(-125a^5b^3c^7) : (-25a^4b^3c^2)$ $5ac^5$

d) $(18x^5y^4) : (-9x^5y^3)$ $-2y$

e) $\left(-\dfrac{3}{5}xyz^2\right) : (0{,}2yz)$ $-3xz$

f) $(0{,}2x^2y^4) : (0{,}25xy^2)$ $+0{,}8xy^2$

g) $(b^2m^2) : (-5bm)$ $-\dfrac{1}{5}bm$

h) $(-250x^3) : (50x^3)$ -5

i) $(18x^4) : (3x^2)$ $6x^2$

j) $(-10x^3) : (-2x^2)$ $5x$

2 Responda às questões.

a) Por qual monômio devemos dividir $\dfrac{2}{3}x^2y^3$ para obter $-\dfrac{1}{5}xy$? $-\dfrac{10}{3}xy^2$

b) Qual é o monômio que, multiplicado por $10ab^3$, tem como resultado $15a^2b^5$? $\dfrac{3ab^2}{2}$

c) Qual é o monômio que devemos multiplicar por $-2xy$ para obter $\dfrac{3}{4}x^2y^3$? $-\dfrac{3}{8}xy^2$

3 Efetue as divisões a seguir.

a) $(-30a^4b^6) : (-6ab^5)$ $5a^3b$

b) $(x^4y^4z^4) : (x^2y^3z^4)$ x^2y

c) $(6x^6) : (-3x^{-4})$ $-2x^{10}$

6 Potenciação de monômios

Inicialmente, vamos recordar que:

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, sendo a um número real não nulo e m e n números inteiros.
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, sendo a e b números reais não nulos e m um número inteiro.

Observe estes exemplos:

- $(-3a^2b^3)^2 = (-3)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b^3)^2 = 9a^4b^6$
- $\left(-\frac{3}{4}m^3n^5\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^5)^3 = -\frac{27}{64}m^9n^{15}$

A potência de um monômio pode ser obtida elevando-se o coeficiente e a parte literal à potência indicada.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as potências.

a) $(x^6)^2$ x^{12}

b) $(2m^5)^3$ $8m^{15}$

c) $\left(-\frac{3a^6}{5}\right)^4$ $\frac{81a^{24}}{625}$

d) $(-a^2b^6)^0$ 1

e) $\left(\frac{c^4d^3}{2}\right)^3$ $\frac{c^{12}d^9}{8}$

f) $(0{,}1a^2b^3c^4)^2$ $0{,}01a^4b^6c^8$

g) $(-x^3y^2)^{10}$ $x^{30}y^{20}$

h) $(-x^5y)^1$ $-x^5y^1$

i) $(-2x^3y^2)^{10}$ $1\,024x^{30}y^{20}$

j) $\left(\frac{-2ab^2}{3}\right)^4$ $\frac{16a^4b^8}{81}$

2 Determine o monômio cujo cubo é $216x^9$.

$6x^3$

3 Simplifique as expressões.

a) $(-20x^2)^3 : (10x^4)$ $-800x^2$

b) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^4\right)^4 : (2a^4b^3)^2$ $\frac{1}{64}b^{10}$

c) $(-2m^2n^3)^2 : (mn)^3$ $4mn^3$

d) $(0{,}1p^2)^3 : (2p^3)^2$ $0{,}00025$

4 Determine:

a) o quadrado de $-1{,}2a^2b^5c^7$; $1{,}44a^4b^{10}c^{14}$

b) o cubo de $0{,}2b^2c^5$; $0{,}008b^6c^{15}$

c) a quarta potência de $-\frac{1}{2}x^2y$. $\frac{x^8y^4}{16}$

7 Polinômio

Observe as situações:

- Márcia faz salgados e doces para vender, por encomenda. Os salgados são vendidos a R\$ 0,45 a unidade e os doces a R\$ 0,35 a unidade. Quanto Márcia cobrará por uma encomenda de *x* salgados e *y* doces?

  Podemos representar o total arrecadado com a venda dos salgados pelo monômio 0,45*x* e o total arrecadado com a venda dos doces pelo monômio 0,35*y*.

ROSSHELEN/SHUTTERSTOCK

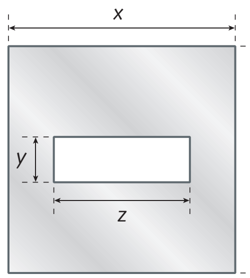
  Para representar o total arrecadado pelas vendas de salgados e doces, podemos usar a adição dos monômios, 0,45*x* + 0,35*y*.

  Portanto, a expressão algébrica que representa o total arrecadado com a venda desses alimentos é 0,45*x* + 0,35*y*.

- De uma chapa metálica quadrada foi retirada uma parte retangular, conforme a figura ao lado. Que expressão algébrica representa a área da parte restante da chapa?

  Representamos a área original da chapa pelo monômio $\boldsymbol{x^2}$ e a área retirada da chapa pelo monômio $\boldsymbol{yz}$.

  Para representar a área da parte restante da chapa, podemos usar a subtração dos monômios, $x^2 - yz$.



GUILHERME CASAGRANDI

Expressões algébricas formadas por um monômio ou pela adição e/ou subtração de monômios denominam-se **polinômios**.

São exemplos de polinômios:

- $5x + 8$ ← É um polinômio de **dois** termos, também chamado de **binômio**.
- $y^2 - 7y + 10$ ← É um polinômio de **três** termos, também chamado de **trinômio**.
- $a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + b^3$ ← É um polinômio de **quatro** termos.

Um polinômio cujos coeficientes são todos iguais a zero é denominado **polinômio nulo**. Veja:

$0x^3 + 0x^2 + 0x$

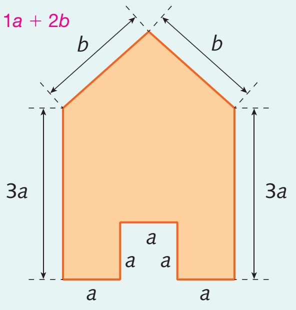
Um monômio é um polinômio de **um** termo.

ATIVIDADES

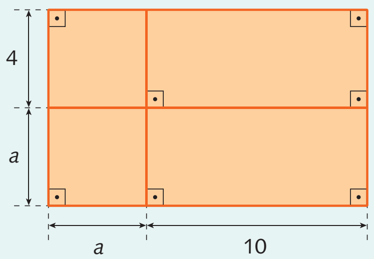
Faça as atividades no caderno.

1 Qual é o polinômio que representa o perímetro de cada figura abaixo?

a) $11a + 2b$



b)



$4a + 28$

GUILHERME CASAGRANDI

2 Classifique em monômio, binômio ou trinômio cada expressão algébrica abaixo.

a) $5x^2 - 6x + 9$ trinômio

b) $7b^2$ monômio

c) $y^3 + 5y$ binômio

d) $a^2 + 5$ binômio

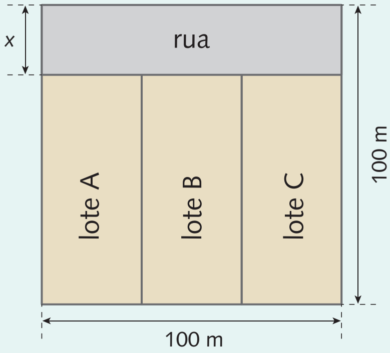
e) $x^2 - y^2$ binômio

f) a monômio

3 Foram colocadas x caixas de laranjas e y caixas de maçãs em uma embarcação. Determine o polinômio que representa o total de frutas colocadas na embarcação, sabendo que cada caixa de laranjas contém 120 unidades e cada caixa de maçãs, 80 unidades. $120x + 80y$

GEORGE TUTUMI

4 Na figura abaixo, os lotes A, B e C têm áreas iguais. Determine um polinômio que expresse a área de cada lote. $\frac{100(100 - x)}{3}$



GUILHERME CASAGRANDI

Grau de um polinômio

Vamos determinar o grau dos polinômios $x^4y - x^5y^3 + 3x^2yz$ e $2a^3 + 5a^2b^2 - 6ab$.

Inicialmente, verificamos o grau de cada termo. Veja:

x^4y	$-$	x^5y^3	$+$	$3x^2yz$	$2a^3$	$+$	$5a^2b^2$	$-$	$6ab$
↓		↓		↓	↓		↓		↓
5º grau (4 + 1)		**8º grau (5 + 3)**		**4º grau (2 + 1 + 1)**	**3º grau (3)**		**4º grau (2 + 2)**		**2º grau (1 + 1)**

O grau de um polinômio é dado pelo termo de maior grau.

Portanto, o polinômio $x^4y - x^5y^3 + 3x^2yz$ é do **8º grau** e o polinômio $2a^3 + 5a^2b^2 - 6ab$ é do **4º grau**.

Podemos estabelecer o grau de um polinômio em relação a uma determinada variável. Nesse caso, o grau do polinômio corresponde ao maior expoente com que a variável figura em um dos termos não nulos do polinômio.

Exemplos

- O polinômio $x^4 - 3x^2y^3 + 5x^3y$ é do **4º grau** em relação a x e do **3º grau** em relação a y.
- O polinômio $a^6b^4 + 10bc$ é do **6º grau** em relação a a, do **4º grau** em relação a b e do **1º grau** em relação a c.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o grau dos polinômios.

a) $5a^2 + b^3$ 3º grau

b) $4x^2 + 2x^2y^3 + 5y^4$ 5º grau

c) $5m^2 + 6mn + 4n^3$ 3º grau

d) $16ab^3 + 7a^2 + 5b^2$ 4º grau

e) $-7x^4y + x^2y - 2x^3y^4$ 7º grau

f) $x^4y^2 - 2xy^3$ 6º grau

g) $4a^2b^3 + 5a^5$ 5º grau

2 Determine o grau de cada polinômio abaixo em relação à variável x e à variável y, respectivamente.

a) $2x^2 + 5xy^3$ 2º grau; 3º grau

b) $x^5y - x^3y^4$ 5º grau; 4º grau

c) $2x^2y^2 - 5x^3y$ 3º grau; 2º grau

d) $ax^3 - bx^2 + 2abxy^2$ 3º grau; 2º grau

e) $3x^2y + 5xy^2 - y^4$ 2º grau; 4º grau

f) $x^2 + 2xy + y^3$ 2º grau; 3º grau

Polinômio reduzido

Considere o polinômio:

$$a^2 + 2ab + 6a^2 + 15ab - 5a^2 + 7b^2$$

Esse polinômio possui termos semelhantes que podem ser adicionados. Observe:

$$a^2 + 2ab + 6a^2 + 15ab - 5a^2 + 7b^2 =$$
$$= \underline{a^2 + 6a^2 - 5a^2} + \underline{2ab + 15ab} + 7b^2 =$$
$$= 2a^2 + 17ab + 7b^2$$

Dizemos que $2a^2 + 17ab + 7b^2$ é o polinômio reduzido de $a^2 + 2ab + 6a^2 + 15ab - 5a^2 + 7b^2$.

Outros exemplos:

- Vamos escrever o polinômio $5x - 3y - 8x + 10y - 10x$ na forma reduzida.

$$\begin{aligned} & 5x - 3y - 8x + 10y - 10x = \\ = \; & \underbrace{5x - 8x - 10x}_{-13x} - \underbrace{3y + 10y}_{7y} = \\ = \; & -13x + 7y \end{aligned}$$

O polinômio $-13x + 7y$ é o polinômio reduzido de $5x - 3y - 8x + 10y - 10x$.

- Vamos escrever na forma reduzida o polinômio $7a^2 - (15a^2 - 6b^2) + (6a - 7b) - (-a^2 + 2b^2)$.

As expressões $-(15a^2 - 6b^2)$ e $-(-a^2 + 2b^2)$ correspondem a $-1 \cdot (15a^2 - 6b^2)$ e $-1 \cdot (-a^2 + 2b^2)$. Ou seja:

$-1 \cdot (15a^2 - 6b^2) = -15a^2 + 6b^2$

$-1 \cdot (-a^2 + 2b^2) = a^2 - 2b^2$

Assim:

$$\begin{aligned} & 7a^2 - (15a^2 - 6b^2) + (6a - 7b) - (-a^2 + 2b^2) = \\ = \; & 7a^2 - 15a^2 + 6b^2 + 6a - 7b + a^2 - 2b^2 = \\ = \; & \underbrace{7a^2 - 15a^2 + a^2}_{-7a^2} + \underbrace{6b^2 - 2b^2}_{4b^2} + 6a - 7b = \\ = \; & -7a^2 + 4b^2 + 6a - 7b \end{aligned}$$

O polinômio $-7a^2 + 4b^2 + 6a - 7b$ é o polinômio reduzido de $7a^2 - (15a^2 - 6b^2) + (6a - 7b) - (-a^2 + 2b^2)$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva no caderno cada um dos polinômios abaixo na forma reduzida.

a) $7x - 5y + 12y - 5x + y$ $2x + 8y$

b) $3x - \frac{x}{2} + y + \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$ $\frac{17x}{6} + \frac{y}{2}$

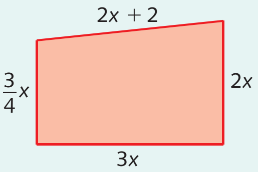
c) $\frac{3a^2}{5} + 7ab - a^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{a^2}{4} - ab$ $-\frac{3a^2}{20} + \frac{20}{3}ab$

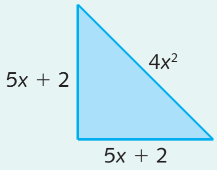
d) $7a - 6b - ab + 5a - 3b + 2ab$ $12a - 9b + ab$

e) $5a^2 + 7b^2 - 3a^2 - a^2 + 8b^2 + 2a^2$ $3a^2 + 15b^2$

f) $4x^2 + 5y + 8 - 6y - 5 + 11x^2 - 3$ $15x^2 - y$

2 Observe as figuras e responda às questões.





a) Qual é o polinômio que representa o perímetro de cada figura?

b) Qual é a forma reduzida desses polinômios?

3 Reduza os termos semelhantes e dê o grau dos polinômios a seguir.

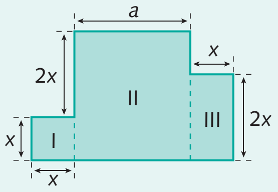
a) $3x + 4 - 5x^2 + 7x - 4x^3 + 8x^2 - 9 + 12x + 8x^3$ $4x^3 + 3x^2 + 22x - 5$; 3º grau

b) $x^4 + 3x^2 - 2x^3 + 2x - 1 + 4 - 3x - 3x^2 + 4x^3 - x^4 + 5x^3 - 2x$ $7x^3 - 3x + 3$; 3º grau

c) $x^2 - y^2 - 2x - 2y + 3 - x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 3 + x^5$ $x^5 + y^2 - 4y$; 5º grau

d) $3x^3 - x^2 + 3x - 1 - x^3 + x^2 - 3x - 1$ $2x^3 - 2$; 3º grau

4 Observe a figura abaixo formada por retângulos justapostos e responda às questões.



GUILHERME CASAGRANDI

a) Qual é o polinômio que representa a área de toda a figura? $x^2 + 3ax + 2x^2$

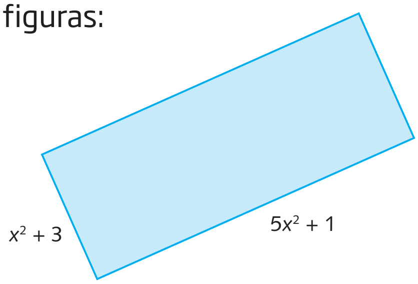
b) Qual é a forma reduzida desse polinômio? $3x^2 + 3ax$

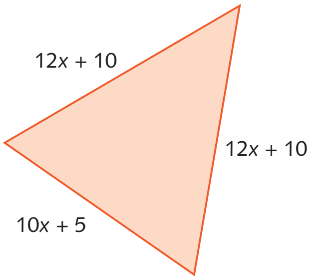
2. a) Quadrilátero: $\frac{3}{4}x + (2x + 2) + 2x + 3x$; triângulo: $(5x + 2) + (5x + 2) + 4x^2$

b) $\frac{31}{4}x + 2$ e $4x^2 + 10x + 4$

8 Adição de polinômios

Observe as figuras:





ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Sabendo que essas figuras representam um retângulo e um triângulo isósceles, como podemos determinar o perímetro de cada figura?

As medidas dos lados do retângulo são indicadas por $x^2 + 3$ e $5x^2 + 1$, desse modo, seu perímetro será:

$$x^2 + 3 + 5x^2 + 1 + x^2 + 3 + 5x^2 + 1$$

Vamos agrupar os termos semelhantes:

$$x^2 + 5x^2 + x^2 + 5x^2 + 3 + 1 + 3 + 1$$

E, em seguida, reduzimos os termos semelhantes:

$$12x^2 + 8$$

Logo, $12x^2 + 8$ representa o perímetro desse retângulo.

Agora, vamos determinar o perímetro do triângulo:

$$12x + 10 + 10x + 5 + 12x + 10$$

Agrupamos os termos semelhantes.

$$12x + 10x + 12x + 10 + 10 + 5$$

Reduzimos os termos semelhantes.

$$34x + 25$$

Assim, $34x + 25$ representa o perímetro do triângulo.

Quando adicionamos um polinômio a um outro polinômio e obtemos como resultado um polinômio nulo, dizemos que esses polinômios são **opostos**.

O polinômio $-x^2 + 5x - 4$ é oposto ao polinômio $x^2 - 5x + 4$. Veja:

$$-x^2 + 5x - 4 + x^2 - 5x + 4 = -x^2 + x^2 + 5x - 5x - 4 + 4 = 0$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue e reduza os termos semelhantes.

a) $(-3x^2 + 5x - 8) + (6x^2 - 4x - 3)$ $3x^2 + x - 11$

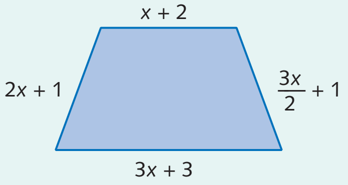
b) $(8ab - 7bc + 3ac) + (-5bc + 3ab - ac)$ $11ab - 12bc + 2ac$

c) $\left(-\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}\right) + \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{4}\right) + (2x + y)$ $\frac{7x}{10} + \frac{5y}{12}$

d) $\left(\frac{a}{2} + b - 6\right) + \left(\frac{2a}{3} + 2b - 5\right)$ $\frac{7a}{6} + 3b - 11$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

2 Escreva, no caderno, na forma reduzida, o polinômio que representa o perímetro da figura abaixo. $\frac{15x}{2} + 7$



GUILHERME CASAGRANDI

3 Em uma partida de tênis, Roberta deu x saques e acertou 45% deles. Luísa, sua adversária, deu y saques e acertou 60% menos 2. Nessas condições, determine o polinômio que representa a quantidade de saques que as duas acertaram juntas.
$0{,}45x + 0{,}6y - 2$

4 Dê exemplo de uma adição de dois polinômios do 2º grau cuja soma seja um polinômio do 1º grau. Resposta pessoal.
Exemplo: $(x^2 + 2x + 1) + (-x^2 + 5) = 2x + 6$

5 Sendo $A = a^3 - 2a^2 + 5$, $B = 2a^3 - 5a - 7$ e $C = a^3 - 2a^2 - a + 6$, determine:

a) $A + B$ $3a^3 - 2a^2 - 5a - 2$
b) $A + C$ $2a^3 - 4a^2 - a + 11$
c) $B + C$ $3a^3 - 2a^2 - 6a - 1$
d) $A + B + C$ $4a^3 - 4a^2 - 6a + 4$

6 Dado o polinômio $-x^3 + 2x^2 - 4x + 5$, responda às questões.

a) Qual é o oposto desse polinômio? $x^3 - 2x^2 + 4x - 5$
b) Qual é o resultado da adição desse polinômio com seu oposto? zero

9 Subtração de polinômios

Observe o exemplo.

Vamos determinar a diferença entre os polinômios: $5x^3 - 4x + 8$ e $2x^3 + 6x^2 - 2$

$(5x^3 - 4x + 8) - (2x^3 + 6x^2 - 2)$

Na subtração de polinômios, podemos adicionar o primeiro polinômio ao oposto do segundo.

$(5x^3 - 4x + 8) + (-2x^3 - 6x^2 + 2) = 5x^3 - 4x + 8 - 2x^3 - 6x^2 + 2$

Agora, agrupamos os termos semelhantes.

$5x^3 - 2x^3 - 6x^2 - 4x + 8 + 2$

Em seguida, reduzimos os termos semelhantes.

$3x^3 - 6x^2 - 4x + 10$

Portanto, $3x^3 - 6x^2 - 4x + 10$ representa a diferença dos polinômios $5x^3 - 4x + 8$ e $2x^3 + 6x^2 - 2$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue e reduza os termos semelhantes.

a) $(6a^2 - 7ab + 8b^2) - (8ab + 5a^2 - 7b^2)$
b) $(5x^3 - 4x^2 + 6x + 8) - (7x^3 + 8x^2 - 10x)$
c) $(5m - 2mn + 7n) - (2m - 8mn - 10n)$
d) $\left(\frac{x}{3} + \frac{xy}{2} - \frac{y}{5}\right) - \left(\frac{3y}{2} - \frac{2xy}{5} + \frac{x}{4}\right)$
e) $(5x^2 - 4x + 9) - (8x^2 - 6x + 3)$

2 Sendo $A = 6x^2 - 3x - 8$, $B = 5x^2 + 4x - 3$ e $C = x^2 - 10x$, determine:

a) $A - B$ $x^2 - 7x - 5$
b) $B - A$ $-x^2 + 7x + 5$
c) $A + B - C$ $10x^2 + 11x - 11$
d) $A - (B + C)$ $3x - 5$

3 Determine o polinômio que, adicionado ao polinômio $6a^2 - 7ab + 8b^2 - 5a^2b^2$, tem como resultado $2ab - a^2 + 2b^2 + 3a^2b^2$.
$-7a^2 - 6b^2 + 8a^2b^2 + 9ab$

a) $a^2 - 15ab + 15b^2$
b) $-2x^3 - 12x^2 + 16x + 8$
c) $3m + 6mn + 17n$
d) $\frac{1}{12}x + \frac{9}{10}xy - \frac{17}{10}y$
e) $-3x^2 + 2x + 6$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Subtraindo do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 4$ o seu oposto, que resultado obtemos? $2x^3 - 4x^2 - 2x + 8$

5 Sendo $A = a + b - c$, $B = a - b - c$ e $C = a - b + c$, determine:

a) $A - B$ $2b$

b) $C - A$ $-2b + 2c$

c) $A - B - C$ $3b - a - c$

d) $(A + B) - C$ $a + b - 3c$

e) $C - (A + B)$ $-a - b + 3c$

f) $B + (A - C)$ $a + b - 3c$

6 Sabendo que P_1 é perímetro da figura 1 e P_2 é o perímetro da figura 2, calcule $P_1 - P_2$. $6x + 13$

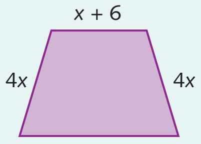


figura 1

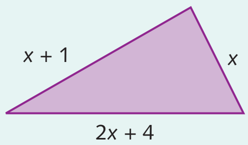


figura 2

GUILHERME CASAGRANDI

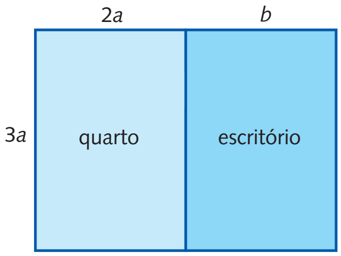
7 Sendo $A = x^2 + y^2 - 2xy$ e $B = 2x^2 - 3y^2 + xy$, determine o valor numérico de $A - B$ para $x = -2$ e $y = -1$. -6

10 Multiplicação de polinômios

Observe as situações:

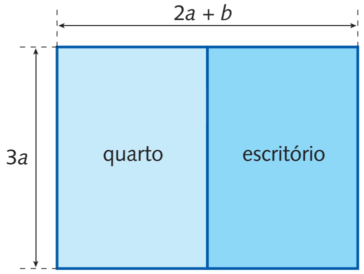
- Na casa de Pedro, o escritório fica ao lado do quarto, conforme a figura ao lado.

  Que expressão algébrica representa a área total desses dois ambientes?



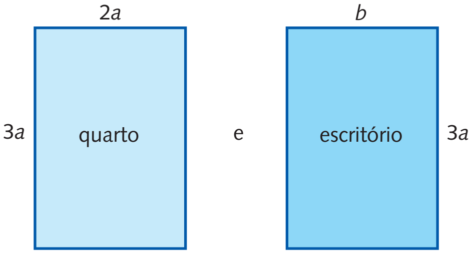
Podemos determinar essa expressão algébrica de dois modos:

I) Multiplicando as medidas das dimensões do ambiente total.



$$\underbrace{3a}_{\text{medida da largura}} \cdot \underbrace{(2a + b)}_{\text{medida do comprimento}} \quad \text{(I)}$$

II) Adicionando a área dos dois ambientes.



$$\underbrace{3a \cdot 2a}_{\text{área do quarto}} + \underbrace{3a \cdot b}_{\text{área do escritório}} \quad \text{(II)}$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

De (I) e (II), verificamos que $3a \cdot (2a + b) = 3a \cdot 2a + 3a \cdot b$, ou seja, $3a \cdot 2a + 3a \cdot b$ resulta da aplicação da propriedade distributiva em $3a \cdot (2a + b)$:

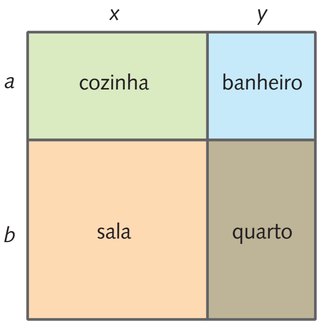
$$3a \cdot (2a + b) = 3a \cdot 2a + 3a \cdot b = 6a^2 + 3ab$$

Portanto, o polinômio $6a^2 + 3ab$ representa a área total desses dois ambientes.

Na multiplicação de um monômio por um polinômio, usamos a propriedade distributiva, multiplicando o monômio por todos os termos do polinômio e adicionando, em seguida, os resultados.

Outros exemplos:

- $5x \cdot (2x - 3) = 5x \cdot 2x + 5x \cdot (-3) = 10x^2 - 15x$
- $-x^2 \cdot (x^3 - 2x^2 + 1) = (-x^2 \cdot x^3) - x^2 \cdot (-2x^2) - x^2 \cdot 1 = -x^5 + 2x^4 - x^2$
- A figura abaixo mostra as dimensões do apartamento de Luís. Que expressão algébrica pode representar a área total do apartamento?

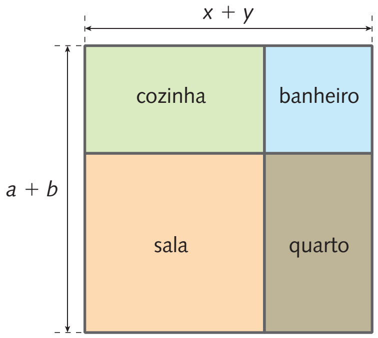


GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

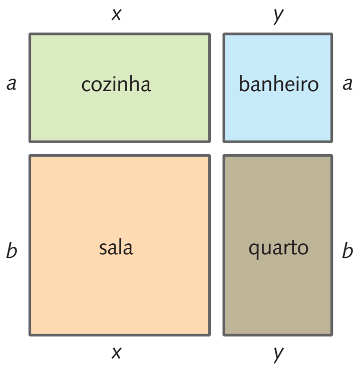
Podemos determinar essa expressão algébrica de dois modos:

I) Multiplicando as medidas das dimensões do espaço total.



$$\underbrace{(a + b)}_{\text{medida da largura}} \cdot \underbrace{(x + y)}_{\text{medida do comprimento}} \quad \text{(I)}$$

II) Adicionando as áreas dos quatro espaços.



$$\underbrace{ax}_{\text{área da cozinha}} + \underbrace{ay}_{\text{área do banheiro}} + \underbrace{bx}_{\text{área da sala}} + \underbrace{by}_{\text{área do quarto}} \quad \text{(II)}$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

De (I) e (II), verificamos que $(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$, ou seja, $ax + ay + bx + by$ resulta da aplicação da propriedade distributiva em $(a + b) \cdot (x + y)$:

$$(a + b) \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y = ax + ay + bx + by$$

Portanto, o polinômio $ax + ay + bx + by$ representa a área total do apartamento.

Na multiplicação de um polinômio por um polinômio, utilizamos a propriedade distributiva, multiplicando cada termo de um deles por todos os termos do outro e, em seguida, adicionamos os resultados.

Outros exemplos:

- $$\begin{aligned}(5x + 2) \cdot (3x - 1) &= 5x \cdot 3x + 5x \cdot (-1) + 2 \cdot 3x + 2 \cdot (-1) = \\ &= 15x^2 - 5x + 6x - 2 \\ &= 15x^2 + x - 2\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(x^2 - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) &= x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (-2x) + x^2 \cdot 1 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot (-2x) - 3 \cdot 1 = \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^2 + 6x - 3 = \\ &= x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3\end{aligned}$$

5. a) $x^3 + 7x^2 + 11x + 5$
b) $2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 4$
c) $2x^5 + 14x^4 + 18x^3 - 18x^2 - 44x - 20$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule os produtos.

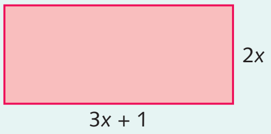
a) $5 \cdot (6x - 2)$ $30x - 10$

b) $m^2 \cdot (m - n)$ $m^3 - m^2n$

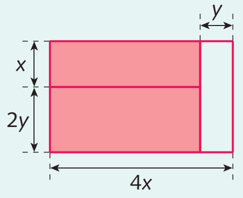
c) $(6a^2 + 10ab + b^2) \cdot \left(-\frac{3}{4}a\right)$ $-\frac{9a^3}{2} - \frac{15a^2b}{2} - \frac{3ab^2}{4}$

d) $\frac{a^2b}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{3} - \frac{a^2}{4}\right)$ $\frac{a^2b^3}{6} - \frac{a^4b}{8}$

2 Determine o polinômio que representa a área da figura abaixo. $6x^2 + 2x$



3 Qual é o polinômio que representa a área da região vermelha da figura abaixo?
$4x^2 + 7xy - 2y^2$



4 Efetue e reduza os termos semelhantes.

a) $(3x + 2) \cdot (x - 3)$ $3x^2 - 7x - 6$

b) $(3a^2 + 2a + 4) \cdot (-a - 3)$ $-3a^3 - 11a^2 - 10a - 12$

c) $(-2x + 5) \cdot (6x^2 + 4x + 3)$ $-12x^3 + 22x^2 + 14x + 15$

d) $(5x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 3)$ $5x^3 - 13x^2 - 7x + 3$

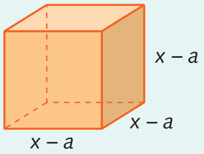
e) $(a + b) \cdot (a - b)$ $a^2 - b^2$

5 Sendo $A = x + 5$, $B = x^2 + 2x + 1$ e $C = 2x^2 - 4$, determine:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot C$ c) $A \cdot B \cdot C$

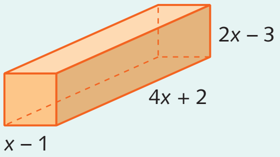
6 Determine o polinômio que representa o volume das figuras abaixo.

a)



$x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

b)



$8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$

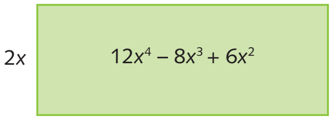
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

11 Divisão de polinômios

Observe a situação a seguir.

No retângulo abaixo foram indicadas as medidas da sua altura e da sua área por expressões algébricas. Veja:



LUIZ RUBIO

Área: $12x^4 - 8x^3 + 6x^2$

Medida da altura: $2x$

Podemos determinar a medida da base desse retângulo, dividindo o polinômio $12x^4 - 8x^3 + 6x^2$, que representa a área do retângulo, pelo monômio $2x$, que representa a medida da altura do retângulo.

$$(12x^4 - 8x^3 + 6x^2) : (2x) = \frac{12x^4}{2x} - \frac{8x^3}{2x} + \frac{6x^2}{2x} =$$

$$= 6x^{4-1} - 4x^{3-1} + 3x^{2-1} = 6x^3 - 4x^2 + 3x$$

Portanto, a medida da base desse retângulo pode ser indicada por $6x^3 - 4x^2 + 3x$.

O quociente de um polinômio por um monômio não nulo é obtido dividindo-se cada termo do polinômio pelo monômio e adicionando os novos termos.

Outros exemplos:

- $(6x^5 + 2x^3) : x = \frac{6x^5}{x} + \frac{2x^3}{x} = 6x^{5-1} + 2x^{3-1} = 6x^4 + 2x^2$
- $(24a^2b^3 - 18a^3b^4 - 6ab^5) : 3ab^3 = \frac{24a^2b^3}{3ab^3} - \frac{18a^3b^4}{3ab^3} - \frac{6ab^5}{3ab^3} =$

  $= 8a^{2-1}b^{3-3} - 6a^{3-1}b^{4-3} - 2a^{1-1}b^{5-3} = 8a - 6a^2b - 2b^2$
- $(4a^2b^3 - 2a^3b^4) : 6ab^2 = \frac{4a^2b^3}{6ab^2} - \frac{2a^3b^4}{6ab^2} = \frac{2}{3}a^{2-1}b^{3-2} - \frac{1}{3}a^{3-1}b^{4-2} = \frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}a^2b^2$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue as divisões.

a) $(10x^6 + 12x^5) : (2x^3)$ $5x^3 + 6x^2$

b) $(30a^2 + 60ab + 90b^2) : (30)$ $a^2 + 2ab + 3b^2$

c) $(-6ab + 9a^2b + 12ab^2) : (3ab)$ $-2 + 3a + 4b$

d) $\left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x\right) : \left(-\frac{2}{3}x\right)$ $-\frac{5}{4}x + \frac{9}{8}$

e) $(m^5 + m^3) : (-m^2)$ $-m^3 - m$

f) $(m^2n^3 + mn^4 + m^5n^2) : (-mn)$ $-mn^2 - n^3 - m^4n$

2 O produto de um monômio por um polinômio é $20a^2b^5 + 30a^3b^7$. Sendo o monômio $5a^2b^3$, determine o polinômio. $4b^2 + 6ab^4$

3 A área de um retângulo é representada por $b^2x^2 + 2bx$. Sendo bx a medida da altura, determine a medida da base do retângulo. $bx + 2$

4 Determine o quociente de $10x^2y^3 - 20x^3y^5 + 30x^4y^6$ pelos monômios:

a) $10xy$ b) $-20xy^3$ c) $5x^2y^2$ d) $-10x^2y$

4. a) $xy^2 - 2x^2y^4 + 3x^3y^5$ **b)** $-\frac{x}{2} + x^2y^2 - \frac{3x^3y^3}{2}$ **c)** $2y - 4xy^3 + 6x^2y^4$ **d)** $-y^2 + 2xy^4 - 3x^2y^5$

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

4. As sentenças **b** e **c** são falsas. Exemplo de correções:

b) O valor numérico da expressão algébrica $\frac{1}{2}x \cdot y^3$ é igual a 0, se $x = 0$ e $y = 2$.

c) O valor numérico da expressão algébrica $-5x^2 \cdot y$ é igual a -45, se $x = -3$ e $y = 1$.

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Escreva no caderno um monômio de grau 5, que tenha duas variáveis.
Resposta pessoal. Exemplo: $x^2 \cdot y^3$

2 O que podemos afirmar sobre dois polinômios que são opostos?
Que o resultado da adição entre eles será o polinômio nulo.

3 Na multiplicação de um monômio de grau 3 por um polinômio de grau 2, qual será o grau do polinômio resultante? Dê um exemplo. Exemplo: $x^3(x^2 - 1) = x^5 - x^3$ (5º grau)

4 Abaixo, temos duas sentenças verdadeiras e duas falsas. Identifique as sentenças falsas e corrija-as no caderno.

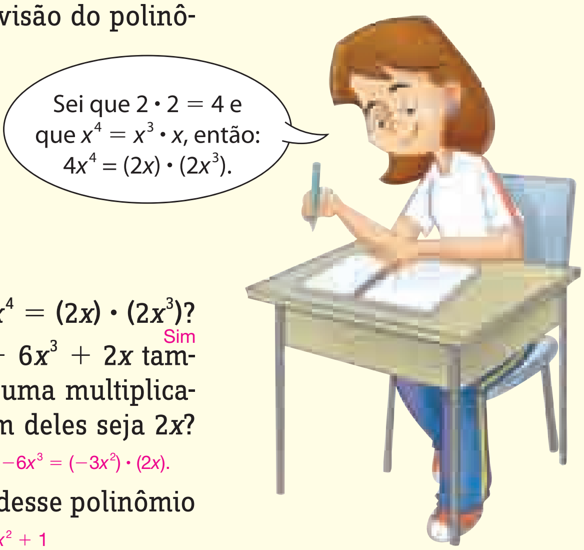
a) O valor numérico da expressão algébrica $x^3 \cdot y$ é igual a -2, se $x = -1$ e $y = 2$.

b) O valor numérico da expressão algébrica $\frac{1}{2}x \cdot y^3$ é igual a 4, se $x = 0$ e $y = 2$.

c) O valor numérico da expressão algébrica $-5x^2 \cdot y$ é igual a 45, se $x = -3$ e $y = 1$.

d) O valor numérico da expressão algébrica $(-5x)^2 \cdot y$ é igual a 300, se $x = 2$ e $y = 3$.

5 Veja como Renata iniciou o cálculo da divisão do polinômio $4x^4 - 6x^3 + 2x$ pelo monômio $2x$.



GEORGE TUTUMI

a) Renata está correta ao concluir que $4x^4 = (2x) \cdot (2x^3)$? Sim

b) Os outros termos do polinômio $4x^4 - 6x^3 + 2x$ também podem ser escritos por meio de uma multiplicação entre monômios, de modo que um deles seja $2x$? Verifique. Sim. $(-3) \cdot (2) = -6$ e $x^3 = x^2 \cdot x$, então: $-6x^3 = (-3x^2) \cdot (2x)$.

c) Determine o resultado entre a divisão desse polinômio por $2x$. Escreva uma conclusão. $2x^3 - 3x^2 + 1$

Aplicando

1 Escreva, no caderno, a expressão algébrica que representa:

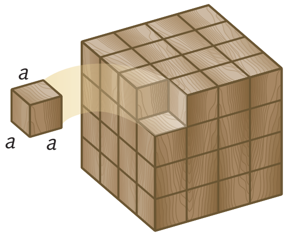
a) a soma da terça parte de k com o triplo da metade de p; $\frac{k}{3} + \frac{3p}{2}$

b) a soma do sêxtuplo de x com a terça parte de y; $6x + \frac{y}{3}$

c) 150% de x; $\frac{3}{2}x$

d) o produto do cubo do número a pela metade do número b. $a^3 \cdot \frac{b}{2}$

2 Determine a expressão algébrica que representa o volume do maior cubo representado abaixo. $64a^3$



GEORGE TUTUMI

3 Sendo $A = 2$, $B = -1$ e $C = 3$, determine o valor numérico da expressão $\frac{A^2 - 2B}{3C} + \frac{A}{6} + 3B$. -2

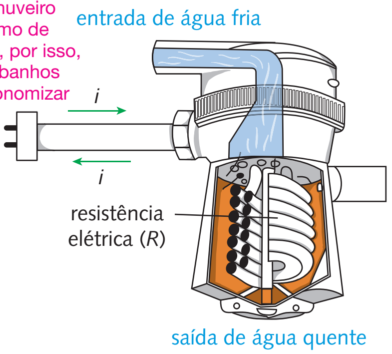
4 Determine o valor numérico da expressão $a^3 - 3a^2x^2y^2$, para $a = 10$, $x = 2$ e $y = 1$. -200

5 Dos números abaixo, apenas um satisfaz a igualdade $5x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Identifique-o. alternativa **d**

a) 0 b) 1 c) -2 d) -1

6 Um chuveiro elétrico transforma energia elétrica em energia térmica (calor). A potência (P), medida em watts, desenvolvida por um aparelho, é dada por $P = R \cdot i^2$, em que R, medida em ohms, é a resistência elétrica do chuveiro e i, medida em amperes, é a corrente elétrica. Calcule a potência do chuveiro para $R = 20$ e $i = 5$. 500 watts

Comente com os alunos que o chuveiro tem alto consumo de energia elétrica, por isso, recomenda-se banhos curtos para economizar energia.



7 Determine o grau de cada monômio abaixo.

a) $-3a^2b^3c^4$ 9º grau
b) $\frac{2}{7}x^3y^2$ 5º grau
c) $8m^2n^5$ 7º grau
d) $-5x^2yz$ 4º grau
e) 206 grau zero
f) $-3x^2$ 2º grau

8 Efetue e reduza os termos semelhantes.

a) $6a^2 - 3b^2 + 5a - 7a^2 + b^2 - 2a$ $-a^2 - 2b^2 + 3a$

b) $\frac{3x^2y}{5} - \frac{xy}{2} + 2x^2y + 2xy - \frac{3xy}{2}$ $\frac{13}{5}x^2y$

c) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{3x}{5}$ $\frac{11}{10}x$

d) $5a^2b - (2a^2b - 7a^2b) - a^2b$ $9a^2b$

e) $7x^2y - 3xy^2 + 5x^2y - xy^2$ $12x^2y - 4xy^2$

f) $-\left\{-\frac{3a}{4} - \left[5a - \left(a + \frac{a}{2}\right)\right]\right\}$ $\frac{17a}{4}$

9 Associe os pares de monômios semelhantes.
a e 7; b e 5; c e 6; d e 4; e e 2; f e 3; g e 1

a) $-x^{12}$	1) $-\frac{7}{5}xy^2$
b) $3y$	2) $-15xy$
c) $9x^3$	3) $\frac{7}{2}$
d) $-\sqrt{40}\,x^2$	4) $5x^2$
e) $7xy$	5) $\sqrt{16}\,y$
f) $-\frac{1}{4}$	6) $6x^3$
g) $\sqrt{2}\,xy^2$	7) $7x^{12}$

10 Efetue.

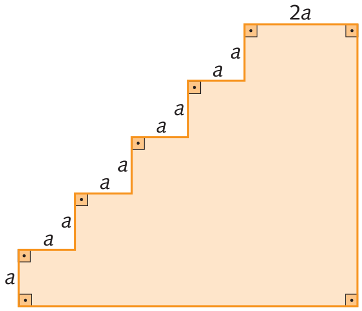
a) $(-a^3) \cdot (a^5)$ $-a^8$

b) $\left(\frac{4xy}{3}\right) \cdot \left(-\frac{xy^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{8x}{5}\right)$ $-\frac{16}{15}x^3y^3$

c) $(-3a^2c) \cdot (2ac) \cdot (-c)$ $+6a^3c^3$

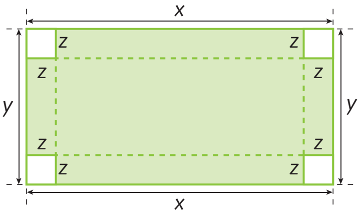
d) $\left(-\frac{3b}{4}\right) \cdot \left(\frac{8b^2}{9}\right)$ $-\frac{2}{3}b^3$

11 Dê a expressão algébrica que representa o perímetro da figura abaixo. $22a$



DESAFIO

José fez uma caixa com uma folha de cartolina. Ele cortou os quatro cantos e dobrou a cartolina nas linhas pontilhadas, montando sua caixa conforme a figura.



Dê o polinômio, em função de x, y e z, que representa o volume dessa caixa.
$xyz - 2xz^2 - 2yz^2 + 4z^3$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

12 Sendo $A = 5x^2 + 3x - 14$ e $B = 2x^2 + 5x + 11$, determine:

a) $A - B$ $3x^2 - 2x - 25$

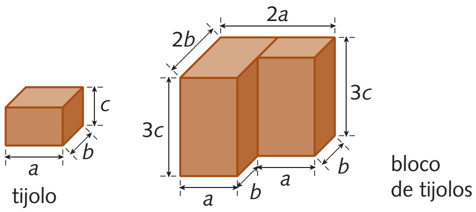
b) $B - A$ $-3x^2 + 2x + 25$

c) $2 \cdot (A + B)$ $14x^2 + 16x - 6$

13 Dados $A = 7x + 3$, $B = -4x + 3$, $C = 6x + 3$ e $D = 2x - 1$, calcule: $A - B + C - D$ $15x + 4$

14 Dado o polinômio $x^3 + (2 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 3m$, calcule seu valor para $x = m$. $2m^3 + 4m^2 + 6m$

15 Um bloco é formado por vários tijolos, conforme a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Determine:

a) a expressão algébrica que representa o volume do bloco; $9abc$

b) quantos tijolos foram utilizados na sua formação. 9 tijolos

16 Sendo $A = -2x + 5$, $B = 4 - 5x$ e $C = 4x - 1$, determine: $C^2 - 3A \cdot 2B$. $-44x^2 + 190x - 119$

17 O quociente da divisão de um polinômio A por x é $5x + 7$. Qual é o polinômio A? $5x^2 + 7x$

18 Efetue:

a) $(2x + 8) \cdot (4x + 1)$ $8x^2 + 34x + 8$

b) $(2x - 2) \cdot (x + 4)$ $2x^2 + 6x - 8$

c) $(x - y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$ $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$

d) $(x - 4) \cdot (x - 3)$ $x^2 - 7x + 12$

e) $(9x^6 - 12x^5 + 18x^3 - x^2) : (3x^2)$ $3x^4 - 4x^3 + 6x - \frac{1}{3}$

f) $(x^2 + x^3 + x^4) : (+x^2)$ $1 + x + x^2$

19 Determine o polinômio que, dividido por $2x^2$, tem por quociente $(x - 2)$. $2x^3 - 4x^2$

20 Substitua cada ■ por um polinômio nas igualdades.

a) $(y^4 + 8y^6) : y^3 = ■$ $y + 8y^3$

b) $■ : m^2 = m^5 + m^3 + m + 1$ $m^7 + m^5 + m^3 + m^2$

c) $(-x^4 + 6x^3 - 2x^2) : ■ = -\frac{x^3}{2} + 3x^2 - x$ $2x$

21 Escreva, no caderno, da forma mais simples possível, os polinômios abaixo.

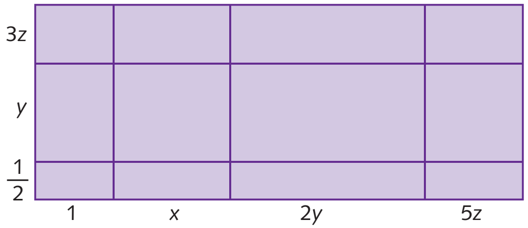
a) $(x - 5) \cdot (x - 6) - (x - 2) \cdot (x - 3)$ $-6x + 24$

b) $(x + 1) \cdot (x + 1) + (x + 1) \cdot (x - 1) + (-x + 1)$ $2x^2 + x + 1$

c) $(x^3 - y^3) \cdot (x + y) - (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)$ $-xy^3 + x^3y$

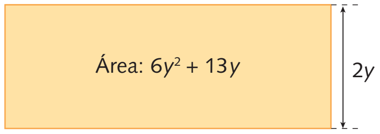
d) $-3b \cdot (a - b) - (a + 5) \cdot (b - 3)$ $3b^2 - 4ab + 3a - 5b + 15$

22 Identifique o polinômio que representa a área da figura abaixo.

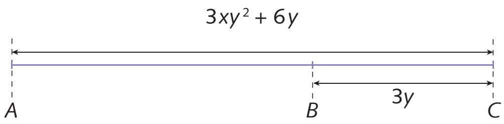


$xy + 3xz + \frac{x}{2} + 2y^2 + 11yz + 2y + 15z^2 + \frac{11z}{2} + \frac{1}{2}$

23 Identifique o polinômio que representa o comprimento do retângulo abaixo. $3y + \frac{13}{2}$



24 Observe a figura e determine o polinômio que representa a razão $\frac{AB}{BC}$. $xy + 1$

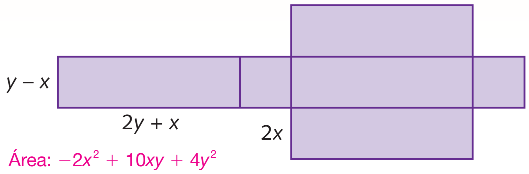


LUIZ RUBIO

FERNANDO JOSÉ FERREIRA

DESAFIO

Observe a planificação de uma caixa que tem forma de paralelepípedo.



LUIZ RUBIO

Área: $-2x^2 + 10xy + 4y^2$
Volume: $-2x^3 - 2x^2y + 4xy^2$

Determine o polinômio que representa a área dessa planificação e o polinômio que indica o volume dessa caixa.

4

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO


JOHANNES EISELE/AFP

A judoca brasileira Sarah Menezes (de azul) e a romena Alina Dumitru na final da disputa entre lutadoras com até 48 kg nos Jogos Olímpicos de 2012, em Londres, Inglaterra. A brasileira venceu a romena por um *waza-ari* e um *yuko*.

Neste capítulo, vamos trabalhar com produtos notáveis e fatoração. Inicie o estudo desse assunto com a apresentação da diferença entre dois quadrados na resolução do problema abaixo.

Sarah Menezes nos Jogos Olímpicos de 2012, em Londres, Inglaterra. Ela foi a primeira mulher brasileira a conquistar medalha de ouro no judô em Jogos Olímpicos.

FRANCK FIFE/AFP

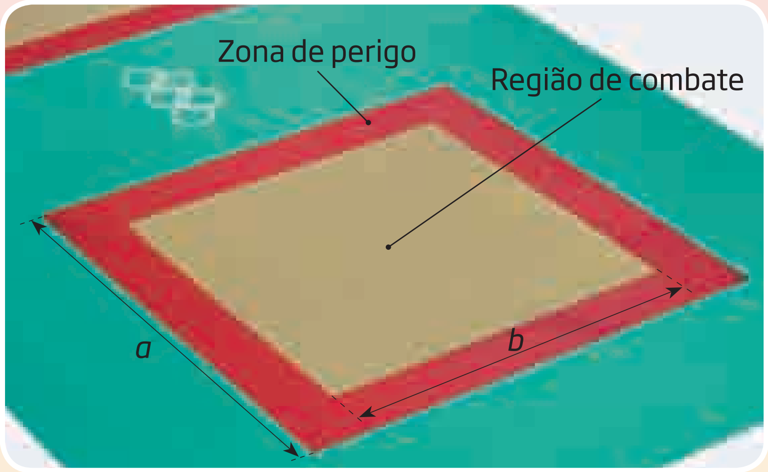
É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O judô foi desenvolvido no Japão pelo professor Jigoro Kano (1860-1938), por volta de 1882. A luta começou a ser praticada no Brasil pelos imigrantes japoneses, na década de 1920 e, em 1964, passou a fazer parte dos Jogos Olímpicos, nas Olimpíadas do Japão.

Em 1972, o judoca japonês naturalizado brasileiro Chiaki Ishii (1941-) conquistou a medalha de bronze, na categoria de meio-pesados, nos Jogos Olímpicos de Munique, na Alemanha. Desde então, os brasileiros conquistaram 19 medalhas nesse esporte. Foram 3 de ouro, 3 de prata e 13 bronze.

Nos Jogos Olímpicos de 2012, em Londres, os judocas brasileiros conquistaram 4 medalhas, uma das quais foi obtida pela piauiense Sarah Menezes.

O judô é disputado em um tatame constituído pela região de combate e pela zona de perigo.



ZUMA PRESS, INC./ALAMY/GLOW IMAGES

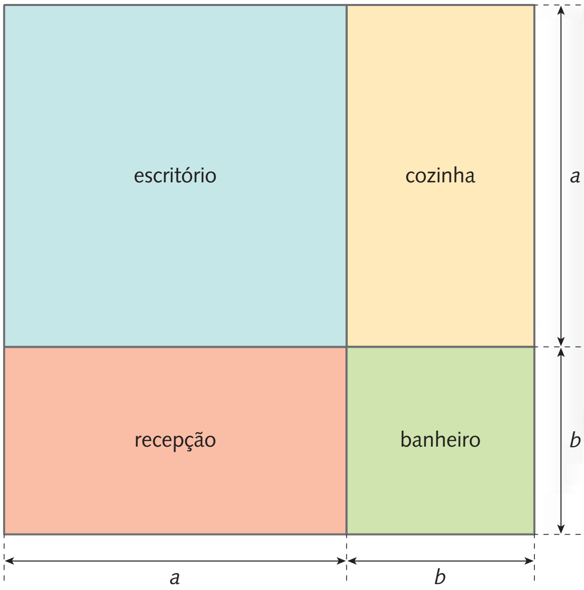
Sabendo que a região de combate tem a forma de um quadrado e que a zona de perigo e a região de combate juntas também têm forma de quadrado, determine, usando as medidas *a* e *b*, o polinômio que representa a área:

- da região de combate; b^2
- da zona de perigo. $a^2 - b^2$, que corresponde à diferença de dois quadrados

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

João está procurando nos classificados do jornal da cidade anúncios de venda de imóveis comerciais. Ele se interessou por um imóvel cuja planta está representada a seguir.



GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

Como já estudamos, é possível indicar a área de diferentes regiões por meio de monômios. Podemos indicar a área *A* desse imóvel de dois modos:

Multiplicando as medidas dos lados

Como o imóvel tem a forma de um quadrado de lados medindo $a + b$, então:
$A = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$

Adicionando as áreas de cada cômodo

A área do imóvel corresponde à área da recepção mais a área do escritório, mais a área do banheiro, mais a área da cozinha.

- Em seu caderno, indique a área de cada cômodo representado na planta acima por meio de um monômio. recepção: ab; escritório: a^2; banheiro: b^2; cozinha: ab
- Determine a área do imóvel adicionando as áreas de cada cômodo. $ab + a^2 + b^2 + ab = a^2 + b^2 + 2ab$
- Converse com o professor e os colegas sobre os dois modos utilizados para determinar a área do imóvel e escrevam uma conclusão. Espera-se que os alunos concluam que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Neste capítulo, vamos estudar os produtos notáveis que aparecem com frequência em problemas e apresentam padrões que facilitam os cálculos.

1 Produtos notáveis

No condomínio em que Daniel e Júlia moram há um mosaico formado por placas coloridas. Eles querem descobrir como determinar a quantidade de placas que formam o mosaico sem contá-las uma a uma.

Daniel fez algumas contas em uma folha de papel. Veja.

TIAGO SILVA

Para determinar o número de placas coloridas, Daniel determinou o número de placas amarelas, o número de placas verdes e o número de placas vermelhas e, depois, adicionou os valores encontrados. Veja o resultado que ele obteve:

$$(5 \times 5) + (3 \times 5) + (5 \times 3) + (3 \times 3) = 5^2 + 2 \times (5 \times 3) + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

Júlia, por sua vez, afirmou: "São 64 placas; basta determinar o quadrado de (5 + 3), ou seja, o quadrado de 8".

Os dois acertaram, pois:

$$(5 + 3)^2 = (5 + 3) \cdot (5 + 3)$$

$$(5 + 3)^2 = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3$$

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \cdot (5 \cdot 3) + 3^2$$

$$8^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

O produto (5 + 3) · (5 + 3), ou $(5 + 3)^2$, é chamado de **quadrado da soma de dois termos** e constitui um dos produtos notáveis.

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos, a e b, é indicado por $(a + b)^2$. Desenvolvendo esse produto, obtemos:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Lembre aos alunos que a multiplicação é comutativa e, por isso, $ab = ba$.

Ou seja:

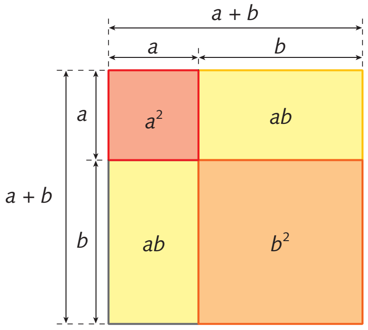
> O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto dos dois termos mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos

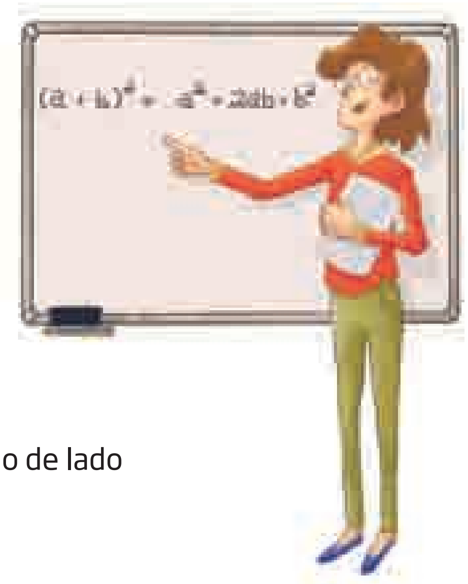
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $\left(\frac{a}{5} + 3b\right)^2 = \left(\frac{a}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{5} \cdot 3b + (3b)^2 = \frac{a^2}{25} + \frac{6ab}{5} + 9b^2$

Demonstração geométrica

Considere o quadrado de lado $a + b$:



GUILHERME CASAGRANDI



TIAGO SILVA

Determinando de duas formas a área A do quadrado de lado $a + b$ acima, temos:

- $A = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$
- $A = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Portanto, as expressões $(a + b)^2$ e $a^2 + 2ab + b^2$ representam a mesma área, justificando geometricamente a igualdade:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A expressão $a^2 + 2ab + b^2$ apresenta três termos e é denominada **trinômio quadrado perfeito**.

UM POUCO DE HISTÓRIA

ILUSTRAÇÕES: DIOGO SAITO

A Álgebra Geométrica grega é apresentada de forma muito interessante na obra *Os elementos*, de Euclides. No livro II dessa obra, encontramos o conceito de produtos notáveis e, na proposição 4, o seguinte texto:

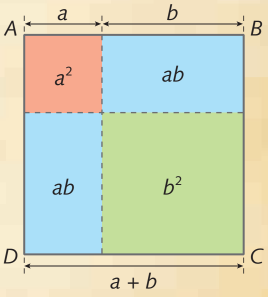
THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY, LONDRES

Representação de Euclides (325-265 a.C.), autor da obra *Os elementos*.

Comente com os alunos que a reta citada na proposição refere-se a um segmento de reta. Considerando a figura, podemos entender que o segmento de reta *AB* foi dividido em duas partes: uma de medida *a* e outra de medida *b*.

> Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda (1) é igual aos quadrados sobre as duas partes (2), junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm (3).

Nessa proposição vemos como os problemas que envolviam Álgebra eram concebidos e apresentados na Antiguidade. O uso de figuras era extremamente importante para o melhor entendimento dos textos. Na figura ao lado estão representados os itens 1, 2 e 3 dessa proposição de Euclides, sendo:



GUILHERME CASAGRANDI

(1) o quadrado *ABCD*;
(2) os quadrados de áreas a^2 e b^2;
(3) os dois retângulos de áreas *ab*.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

b) $4x^2 + 40x + 100$ **c)** $x^2y^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}$

1 Desenvolva algebricamente cada quadrado da soma de dois termos.

a) $(x + 1)^2$ $x^2 + 2x + 1$
b) $(2x + 10)^2$
c) $\left(xy + \frac{1}{3}\right)^2$
d) $(x + 5)^2$ $x^2 + 10x + 25$
e) $(x^5 + 2x^3)^2$ $x^{10} + 4x^8 + 4x^6$
f) $(6 + x)^2$ $36 + 12x + x^2$
g) $(2x + xy)^2$ $4x^2 + 4x^2y + x^2y^2$
h) $(x^2 + 1)^2$ $x^4 + 2x^2 + 1$
i) $(x + 2y)^2$ $x^2 + 4xy + 4y^2$
j) $\left(x^3 + \frac{1}{3}\right)^2$ $x^6 + \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{9}$

2 Simplifique as expressões.

a) $x \cdot (2x - 1) + x \cdot (1 - 3x)$ $-x^2$
b) $(a + 5) \cdot (a - 5) - (a + 5)^2$ $-10a - 50$
c) $y \cdot (y + 2) - 2y \cdot (3 - y)$ $3y^2 - 4y$
d) $(2 + x)^2 - (x + 2)^2$ 0

3 Dados os polinômios $A = 2x^2 + 3$ e $B = x^2 + 4$, determine:

a) A^2 $4x^4 + 12x^2 + 9$
b) B^2 $x^4 + 8x^2 + 16$
c) $(A + B)^2$ $9x^4 + 42x^2 + 49$

4. a) $(10 + 2)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2 = 144$
b) $(60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3721$
c) $(30 + 3)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 3 + 3^2 = 1089$
d) $(90 + 2)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 2 + 2^2 = 8464$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Veja como Pedro utilizou a ideia de produtos notáveis para calcular o quadrado de 41:

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 =$$
$$= 1600 + 80 + 1 = 1681$$

Agora, como Pedro, calcule os quadrados:

a) 12^2
b) 61^2
c) 33^2
d) 92^2

5 Sabendo que $a^2 + b^2 = 34$ e $(a + b)^2 = 64$, calcule o valor de $6ab$, sendo $a > 0$ e $b > 0$. 90

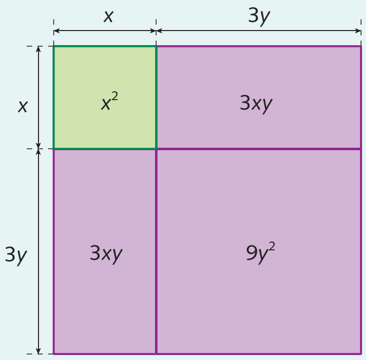
6 Simplifique as expressões.

a) $(x + 1) \cdot (x + 2) - 2(x + 3)^2 + (x + 2) \cdot (x + 3)$ $-4x - 10$

b) $(x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$ $x^4 + y^4$

c) $(x + 1) \cdot (x + 3) - 2(x + 2) \cdot (x + 3) + (x + 3)^2$ 0

7 Calcule $(x + 3y)^2$ utilizando áreas de quadrados e retângulos. $(x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$



GUILHERME CASAGRANDI

8 Determine os quadrados das somas.

a) $(a^4 + 5)^2$ $a^8 + 10a^4 + 25$

b) $\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b^2}{3}\right)^2$ $\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{ab^2}{3} + \dfrac{b^4}{9}$

9 Sendo $(x + y)^2 = 256$ e $x^2 + y^2 = 136$, determine xy. 60

Quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença de dois termos, *a* e *b*, é indicado por $(a - b)^2$. Desenvolvendo esse produto, obtemos:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$$

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Ou seja:

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto dos dois termos mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos

- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $\left(\dfrac{a}{3} - 2b\right)^2 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{a}{3} \cdot 2b + (2b)^2 = \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{4ab}{3} + 4b^2$

Demonstração geométrica

Considere um quadrado cujos lados medem *a* e outro cujos lados medem *b*:

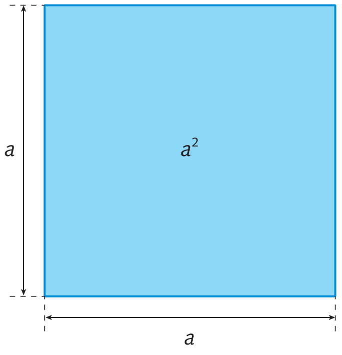


figura 1

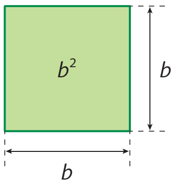


figura 2

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Sobrepondo esses quadrados, obtemos:

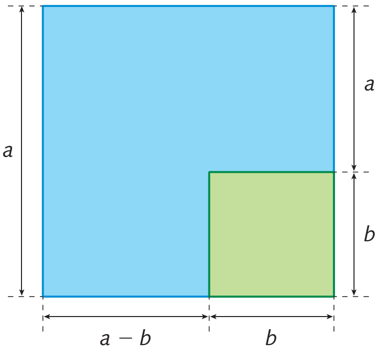


figura 3

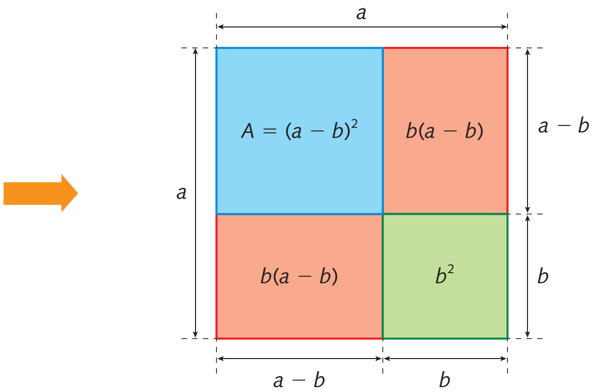


figura 4

Observe, na figura 4, que a área *A* do quadrado azul corresponde à área do quadrado (da figura 1) menos as áreas dos dois retângulos, menos a área do quadrado verde; ou $A = (a - b)^2$.

Assim, podemos escrever:

$A = a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2$ ou $A = (a - b)^2$

$A = a^2 - 2b(a - b) - b^2$

$A = a^2 - 2ba + 2b^2 - b^2$

$A = a^2 - 2ab + b^2$

Portanto, as expressões $(a - b)^2$ e $a^2 - 2ab + b^2$ representam a mesma área, justificando geometricamente a igualdade $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

A expressão $a^2 - 2ab + b^2$ também é denominada **trinômio quadrado perfeito**.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Desenvolva algebricamente cada quadrado da diferença de dois termos.

a) $(x - 3)^2$ $x^2 - 6x + 9$

b) $\left(\dfrac{x}{3} - 2\right)^2$ $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4x}{3} + 4$

c) $(9x^2 - 2)^2$ $81x^4 - 36x^2 + 4$

d) $(x^3 - y^3)^2$ $x^6 - 2x^3y^3 + y^6$

e) $(x^2 - y^2)^2$ $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

f) $(-x - y)^2$ $x^2 + 2xy + y^2$

g) $(xy - z)^2$ $x^2y^2 - 2xyz + z^2$

h) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}\right)^2$ $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9}$

2 Simplifique as expressões.

a) $[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)]^2$ $4x^2y^2$

b) $(x + y)^2 - (x - y)^2$ $4xy$

c) $(2x - 1)^2 - (x - 3)^2 + 5(2 - x^2)^2 - (3 - x)^2$
$5x^4 - 18x^2 + 8x + 3$

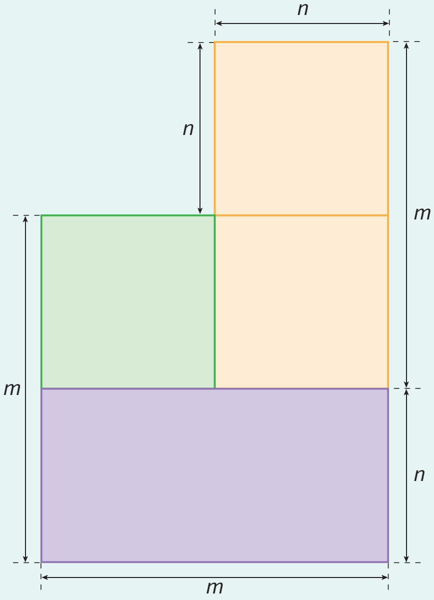
3 Veja como Ana utilizou a ideia de produtos notáveis para calcular o quadrado de 16:

$16^2 = (20 - 4)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 4 + 4^2 = 256$

Agora, como Ana, calcule os quadrados:

a) 17^2 b) 19^2 c) 14^2

4 Qual é o polinômio que representa a área do quadrado verde? $m^2 - 2mn + n^2$



LUIZ RUBIO

5 Simplifique as expressões.

a) $(-2a - 3b)^2 - (2a - 3b)^2$ $24ab$

b) $(x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$ $x^4 - 8x^2 + 16$

c) $(-x + 1)^2 + (-x - 1)^2$ $2 + 2x^2$

d) $3x(x - 1)^2 + 3x^2(1 - x)$ $-3x^2 + 3x$

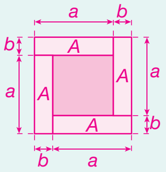
6 Sabendo que $(a - b)^2 = 16$ e $a^2 + b^2 = 106$, calcule o valor de $\frac{ab}{3}$, sendo $a > 0$ e $b > 0$.
15

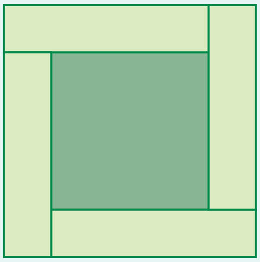
7 Sabendo que $a^2 + b^2 = 52$ e $ab = 24$, calcule o valor de $(a - b)^2$. 4

8 A figura a seguir foi utilizada por um professor, em sala de aula, para mostrar a igualdade:

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

Essa igualdade foi demonstrada geometricamente pelo matemático grego Euclides em sua obra *Os elementos*, livro II.





GUILHERME CASAGRANDI

a) Copie a figura no caderno e indique os segmentos que medem a e b.

b) Reúna-se com um colega e demonstrem que essa igualdade é verdadeira, usando as áreas dos retângulos e dos quadrados. Depois, apresentem a demonstração para o professor e os demais colegas da classe.

$(a + b)^2 = 4A + (a - b)^2$
$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$

3. a) $17^2 = (20 - 3)^2 = 400 - 2 \cdot 20 \cdot 3 + 9 = 289$
b) $19^2 = (20 - 1)^2 = 400 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1 = 361$
c) $14^2 = (20 - 6)^2 = 400 - 2 \cdot 20 \cdot 6 + 36 = 196$

Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença de dois termos, *a* e *b*, é indicado por $(a + b) \cdot (a - b)$. Desenvolvendo esse produto, obtemos:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2$$

$$\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Ou seja:

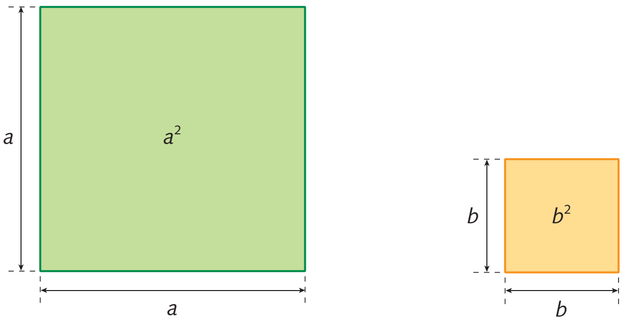
O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos

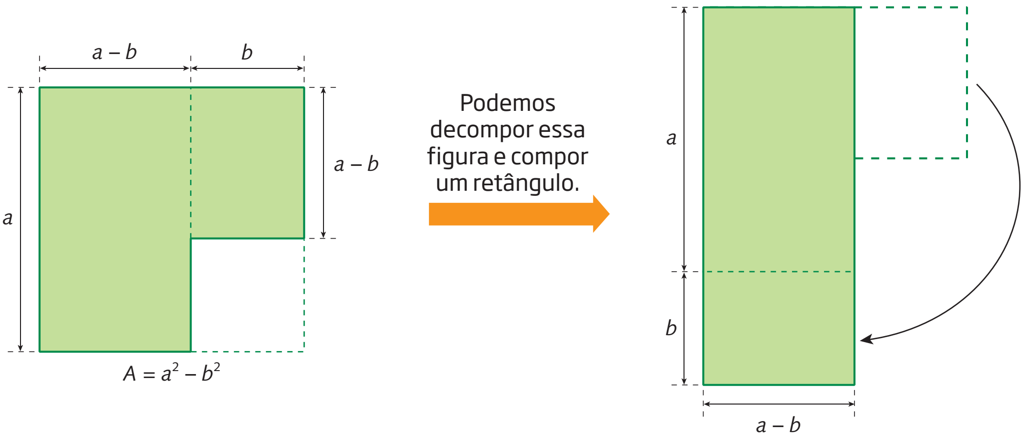
- $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$
- $(bx + 5) \cdot (bx - 5) = (bx)^2 - (5)^2 = b^2x^2 - 25$
- $\left(\frac{k^2}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{k^2}{3} - 1\right) = \left(\frac{k^2}{3}\right)^2 - (1)^2 = \frac{k^4}{9} - 1$

Demonstração geométrica

Considere os quadrados:



Retirando do quadrado maior uma superfície igual à do quadrado menor, obtemos uma figura com área A igual a $a^2 - b^2$:



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

No retângulo obtido, temos:

- medida da base: $a - b$
- medida da altura: $a + b$
- $A = (a - b) \cdot (a + b)$

Como as duas figuras têm mesma área, verificamos que: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Desenvolva algebricamente os produtos.

a) $(x+1)\cdot(x-1)$ x^2-1

b) $(3x+y)\cdot(3x-y)$ $9x^2-y^2$

c) $(x+5)\cdot(x-5)$ x^2-25

d) $(2x+5)\cdot(2x-5)$ $4x^2-25$

2 Simplifique a expressão algébrica $(x+1)^2+(x-1)^2+2(x+1)(x-1)$. $4x^2$

3 Determine os produtos.

a) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ $x^2-\dfrac{1}{x^2}$

b) $\left(x-\dfrac{y}{3}\right)\cdot\left(x+\dfrac{y}{3}\right)$ $x^2-\dfrac{y^2}{9}$

c) $(x^2+1)\cdot(x^2-1)$ x^4-1

d) $(xy^2-z^2)\cdot(xy^2+z^2)$ $x^2y^4-z^4$

4 Veja como Roberta calculou o produto de 41 por 39:

$41\cdot39=(40+1)\cdot(40-1)=40^2-1^2=1\,599$

Agora, calcule, como Roberta, os produtos:

a) $57\cdot63$ $(60-3)\cdot(60+3)=60^2-3^2=3\,591$

b) $52\cdot48$ $(50+2)\cdot(50-2)=50^2-2^2=2\,496$

c) $42\cdot34$ $(38+4)\cdot(38-4)=38^2-4^2=1\,428$

5 Sabendo que $a+b=13$ e $a^2-b^2=39$, reúna-se com um colega e determinem o valor de a. Depois, escrevam um texto explicando como vocês chegaram a esse valor. Apresentem o texto para o professor e os demais colegas da classe. 8

2 Fatoração

Podemos escrever o número 100 como o produto de dois ou mais números. Veja:

$100=4\cdot25$

$100=10\cdot10$

$100=2\cdot50$

$100=2\cdot2\cdot25$

$100=2\cdot5\cdot10$

$100=2\cdot2\cdot5\cdot5$

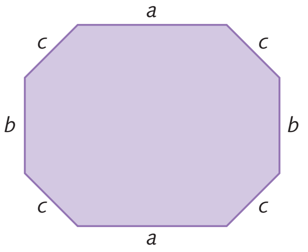
Nesses casos, escrevemos o número 100 de forma fatorada.

Fatorar um número é escrevê-lo como o produto de dois ou mais fatores.

Além de números, podemos fatorar polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios.

Exemplo

O polígono ao lado possui lados de medidas a, b e c.



LUIZ RUBIO

Seu perímetro pode ser representado por:

$a + a + b + b + c + c + c + c = 2a + 2b + 4c$

Podemos, também, escrever esse polinômio da seguinte forma:

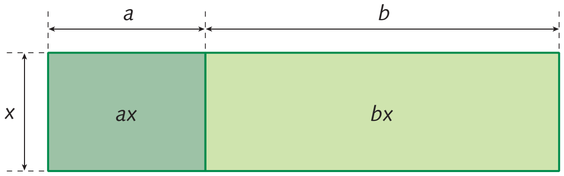
$2(a + b + 2c)$

O polinômio $2(a + b + 2c)$ é uma forma fatorada de $2a + 2b + 4c$.

Agora, vamos estudar alguns processos utilizados para fatorar uma expressão algébrica.

Fatoração com um fator comum em evidência

Observe a figura abaixo, formada por dois retângulos.



GUILHERME CASAGRANDI

A área total da figura pode ser obtida se adicionarmos as áreas dos retângulos que a compõem:

$$ax + bx$$

Também podemos determinar a área dessa figura calculando a área do retângulo de base $(a + b)$ e altura x:

$$x \cdot (a + b)$$

Assim:

$$\boxed{ax + bx = x(a + b)}$$

O polinômio $x(a + b)$ é uma forma fatorada do polinômio $ax + bx$. Nesse caso, colocamos o **fator comum** (x) em evidência, obtendo uma forma fatorada da expressão.

Exemplos

Fatorar os seguintes polinômios:

- $a^3 + 2a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fator comum}}}{a} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ a^3 : a}}{a^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ 2a : a}}{2})$
- $km + 2kn + k^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fator comum}}}{k} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ km : k}}{m} + \underset{\substack{\uparrow \\ 2kn : k}}{2n} + \underset{\substack{\uparrow \\ k^2 : k}}{k})$
- $12a^4b^6 - 20a^5b^8 + 8a^3b^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fator comum}}}{4a^3b^2} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ 12a^4b^6 : 4a^3b^2}}{3ab^4} - \underset{\substack{\uparrow \\ 20a^5b^8 : 4a^3b^2}}{5a^2b^6} + \underset{\substack{\uparrow \\ 8a^3b^2 : 4a^3b^2}}{2})$
- $(a + b) + (a + b)x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fator comum}}}{(a + b)} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ (a + b) : (a + b)}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ (a + b)x : (a + b)}}{x})$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva os números na forma fatorada.

Exemplos de resposta:

a) 36 $2^2 \cdot 3^2$

b) 450 $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

c) 120 $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

d) 500 $2^2 \cdot 5^3$

2 Colocando os fatores comuns em evidência, fatore:

a) $ax + ay$ $a(x + y)$

b) $16x^2 + 20y^2$ $4(4x^2 + 5y^2)$

c) $5x + 15y - 10z$ $5(x + 3y - 2z)$

d) $4x - 16$ $4(x - 4)$

e) $-5x^3y + 20x^2y^2$ $5x^2y(-x + 4y)$

3 Sabendo que $ab = 8$ e $a^2 + 5b = 24$, fatore o polinômio $a^3b + 5ab^2 - 4ab$ e determine seu valor numérico.

$ab(a^2 + 5b - 4)$; 160

4 Fatore as expressões.

a) $ax^3 + bx^2 - cx$ $x(ax^2 + bx - c)$

b) $12a^3x^2 + 6a^2x^3 - 8ax^4$ $2ax^2(6a^2 + 3ax - 4x^2)$

c) $\dfrac{ab}{8} + \dfrac{a^2b}{4} - \dfrac{ab^2}{2}$ $\dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{a}{2} - b\right)$

5 Escreva como produto:

a) $x^5 + x^4 - 2x^2$ $x^2(x^3 + x^2 - 2)$

b) $6x + 3xy + 12xyz$ $3x(2 + y + 4yz)$

c) $6x^2y - 18xy^3$ $6xy(x - 3y^2)$

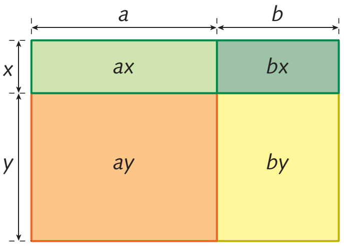
d) $27x^2 - 15x^4 + 36x^3$ $3x^2(9 - 5x^2 + 12x)$

e) $4x^4 + 6x^3 + 2x^2$ $2x^2(2x^2 + 3x + 1)$

f) $15x^7 - 3yx^4$ $3x^4(5x^3 - y)$

Fatoração por agrupamento

Observe a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

A área total da figura pode ser obtida se fizermos a adição das áreas dos retângulos menores:

$$ax + bx + ay + by$$

Ou também pode ser obtida pelo cálculo da área do retângulo de base $(a + b)$ e altura $(x + y)$:

$$(a + b) \cdot (x + y)$$

Assim:

$$\boxed{ax + bx + ay + by = (a + b) \cdot (x + y)}$$

Veja como podemos escrever $ax + bx + ay + by$ na forma $(a + b) \cdot (x + y)$ usando a fatoração:

$(ax + bx) + (ay + by)$ ⟶ Agrupamos os termos com fatores comuns.

$x(a + b) + y(a + b)$ ⟶ Colocamos o fator comum de cada grupo em evidência.

$(a + b) \cdot (x + y)$ ⟶ Colocamos o polinômio comum $(a + b)$ em evidência.

Peça aos alunos que agrupem os termos com fatores comuns de modo diferente do que fizemos. Eles devem fazer:
$(ax + ay) + (bx + by) =$
$= a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$
$= (x + y) \cdot (a + b)$

Portanto, $(a + b) \cdot (x + y)$ é uma forma fatorada do polinômio $ax + bx + ay + by$.

Exemplos

- $$\begin{aligned} 3a - 6y + ab - 2by &= 3a + ab - 6y - 2by = \\ &= a(3 + b) - 2y(3 + b) = \\ &= (3 + b) \cdot (a - 2y) \end{aligned}$$

Diga aos alunos que, nesse caso, a fatoração poderia ter sido feita na ordem em que os monômios foram apresentados, ou seja:
$3a - 6y + ab - 2by =$
$= 3 \cdot (a - 2y) + b \cdot (a - 2y) =$
$= (a - 2y) \cdot (3 + b)$

- $$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x &= x^3(x + 1) + x(x + 1) = \\ &= (x + 1) \cdot (x^3 + x) \end{aligned}$$

Diga aos alunos que esse polinômio não foi fatorado ao máximo, pois ainda é possível colocar o x em evidência no segundo fator. Ficaria assim:
$(x + 1) \cdot x \cdot (x^2 + 1)$

- $ax^2 - abx + b^2 - bx = ax(x-b) + b(b-x) =$
  $= ax(x-b) - b(x-b) =$
  $= (x-b) \cdot (ax-b)$

Chame a atenção dos alunos para o fato de os sinais terem sido trocados na parcela $+b(b-x)$, que é o mesmo que $-b(-b+x)$ ou $-b(x-b)$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Fatore as expressões por agrupamento.

a) $xy + x - 2y - 2$ $(y+1)(x-2)$

b) $6x + 6y + ax + ay$ $(x+y)(6+a)$

c) $2x - 2 + yx - y$ $(x-1)(2+y)$

d) $2a + 2b + ax + bx$ $(a+b)(2+x)$

2 Fatore as expressões.

a) $7x + 7y + bx + by$ $(x+y)(7+b)$

b) $ax - ay - bx + by$ $(x-y)(a-b)$

c) $6x^2 + 15x - 4xy - 10y$ $(2x+5)(3x-2y)$

d) $2ax - 2ay - 3bx + 3by$ $(x-y)(2a-3b)$

3 Transforme as expressões abaixo em produtos.

a) $3(x-1) + a(x-1) + a^2(x-1)$ $(x-1)(3+a+a^2)$

b) $ax + bx + ay + by + az + bz$ $(a+b)(x+y+z)$

c) $(x+y)^2 - 2(x+y)$ $(x+y)[(x+y)-2]$

d) $ax - a + \dfrac{mx}{3} - \dfrac{m}{3}$ $(x-1)\left(a+\dfrac{m}{3}\right)$

4 Agrupe os termos das expressões e fatore-as.

a) $ax - ay + x - y$ $(x-y)(a+1)$

b) $abx^2 + aby^2 + cx^2 + cy^2$ $(ab+c)(x^2+y^2)$

c) $x^4 + 9x^3 - 6x - 54$ $(x+9)(x^3-6)$

d) $ax - 2ay + 5bx - 10by + 11cx - 22cy$ $(x-2y)(a+5b+11c)$

Fatoração da diferença de dois quadrados

De um quadrado de lado de medida a, retirou-se um quadrado de lado de medida b, com $b < a$, obtendo a figura a seguir:

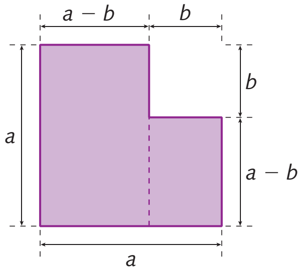


figura 1

Pergunte aos alunos se eles entenderam como obter a figura 1.

A área dessa figura é $a^2 - b^2$, que corresponde a uma diferença de dois quadrados.

Recortando a figura pelo pontilhado e juntando as duas partes, conforme indicado abaixo, formamos um retângulo (figura 3).

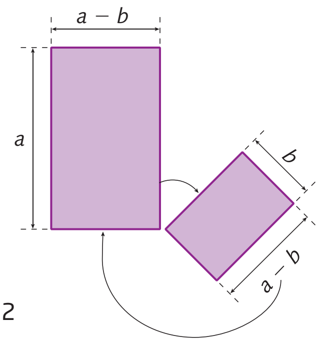


figura 2

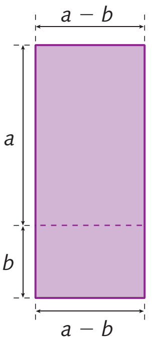


figura 3

A área da figura 1, expressa por $a^2 - b^2$, é igual à área da figura 3, que pode ser expressa por $(a+b) \cdot (a-b)$.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Assim, justificamos geometricamente a igualdade:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Pergunte aos alunos porque dizemos fatoração da diferença de dois quadrados. Eles devem observar $a^2 - b^2$ e associar com a diferença entre os quadrados de *a* e *b*.

Portanto, $(a + b) \cdot (a - b)$ é uma forma fatorada do polinômio $a^2 - b^2$.

Exemplos

- $\underset{\underset{(a)^2}{\downarrow}}{a^2} - \underset{\underset{(5)^2}{\downarrow}}{25} = (a + 5)(a - 5)$
- $\underset{\underset{(3ab)^2}{\downarrow}}{9a^2b^2} - \underset{\underset{(4x^2y^3)^2}{\downarrow}}{16x^4y^6} = (3ab + 4x^2y^3)(3ab - 4x^2y^3)$
- $\underset{\underset{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\downarrow}}{\dfrac{a^2}{4}} - \underset{\underset{\left(\frac{b}{4}\right)^2}{\downarrow}}{\dfrac{b^2}{16}} = \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{4}\right)\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{4}\right)$
- $\underset{\underset{(m^2)^2}{\downarrow}}{m^4} - \underset{\underset{(1)^2}{\downarrow}}{1} = (m^2 + 1)(\underset{\underset{(m)^2}{\downarrow}}{m^2} - \underset{\underset{(1)^2}{\downarrow}}{1}) = (m^2 + 1)(m + 1)(m - 1)$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Fatore as expressões abaixo.

a) $x^2 - 49$ $(x + 7)(x - 7)$

b) $9a^2 - 4b^2$ $(3a + 2b)(3a - 2b)$

c) $1 - x^2$ $(1 + x)(1 - x)$

d) $4x^2 - 25y^2$ $(2x + 5y)(2x - 5y)$

e) $4x^2 - 25$ $(2x + 5)(2x - 5)$

f) $x^2y^2 - 1$ $(xy + 1)(xy - 1)$

g) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{9}$ $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right)$

h) $x^2 - \dfrac{1}{x^4}$ $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)$

2 Decomponha as expressões em produtos de fatores.

a) $(x + y)^2 - 1$ $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $1 - 9a^2$ $(1 + 3a)(1 - 3a)$

c) $4x^2 - y^2$ $(2x + y)(2x - y)$

d) $x^2 - (y + 1)^2$ $(x + y + 1)(x - y - 1)$

3 Veja como Roberto calculou o produto de 21 por 19:

$21 \cdot 19 = (20 + 1) \cdot (20 - 1) = 20^2 - 1^2 =$
$= 400 - 1 = 399$

Agora, calcule, como Roberto:

a) $81 \cdot 79$ b) $42 \cdot 38$ c) $101 \cdot 99$

3. a) $(80 + 1) \cdot (80 - 1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399$
b) $(40 + 2) \cdot (40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$
c) $(100 + 1) \cdot (100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

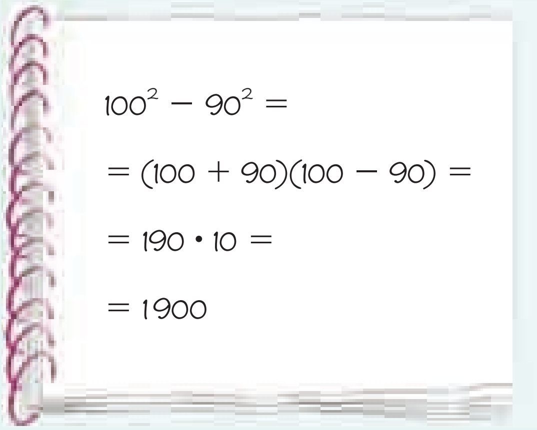
5. a) $(500 + 400)(500 - 400) = 900 \cdot 100 = 90000$
b) $(1000 + 900)(1000 - 900) = 1900 \cdot 100 = 190000$

4 Agrupe convenientemente os termos e fatore as expressões.

a) $a^3 + a^2 - 4a - 4$ $(a + 2)(a - 2)(a + 1)$

b) $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$ $(a + 1)(a - 1)(b + 1)(b - 1)$

5 Veja como Melissa calculou a diferença dos quadrados dos números 100 e 90:



$100^2 - 90^2 =$
$= (100 + 90)(100 - 90) =$
$= 190 \cdot 10 =$
$= 1900$

GEORGE TUTUMI

Agora, calcule:

a) $500^2 - 400^2$

b) $1000^2 - 900^2$

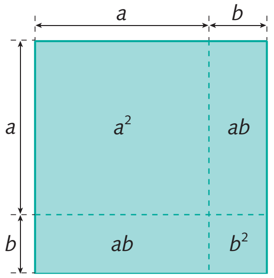
6 Demonstre, no caderno, que a soma de dois números inteiros e consecutivos é igual à diferença dos seus quadrados.

$n + n + 1 = 2n + 1$ e $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$
Exemplo: $4 + 5 = 9$ e $5^2 - 4^2 = 9$

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Pergunte aos alunos: “Quando um trinômio é denominado quadrado perfeito?”. Eles devem perceber que um trinômio é denominado quadrado perfeito quando puder ser fatorado como um quadrado da soma ou da diferença de dois termos.

Observe o quadrado de lado $a + b$.



GUILHERME CASAGRANDI

A área da figura pode ser indicada por:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$$

Observando a figura, verificamos que $a^2 + 2ab + b^2$ é igual a $(a + b)^2$.

Então:

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

Portanto, a forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$ é $(a + b)^2$.

Observação

Vimos em produtos notáveis que:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Então:

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Portanto, a forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$ é $(a - b)^2$.

Exemplos

- $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x \cdot 3) + 3^2 = (2x + 3)^2$
- $4m^2n^2 - 4mnc + c^2 = (2mn)^2 - 2 \cdot (2mn \cdot c) + c^2 = (2mn - c)^2$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Fatore os polinômios.

a) $x^2 + 6x + 9$ $(x + 3)^2$

b) $x^2 - 16x + 64$ $(x - 8)^2$

c) $9x^2 + 30xy + 25y^2$ $(3x + 5y)^2$

d) $x^2 - 2ax + a^2$ $(x - a)^2$

e) $1 + 9m^2 - 6m$ $(3m - 1)^2$

f) $\frac{1}{4}a^2 - 5ab + 25b^2$ $\left(\frac{1}{2}a - 5b\right)^2$

2 Quais dos polinômios abaixo são trinômios quadrados perfeitos? alternativas **a**, **c** e **d**

a) $a^2 + 6ab + 9b^2$

b) $a^2 + b + \frac{1}{4}$

c) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

d) $4x^2 - 4x + 1$

3 Escreva a forma fatorada dos polinômios.

a) $x^2 - 6x + 9$ $(x - 3)^2$

b) $1 - 6x + 9x^2$ $(1 - 3x)^2$

c) $x^2 - 10x + 25$ $(x - 5)^2$

d) $x^3 - 2x^2 + x$ $x(x - 1)^2$

e) $x^4 + 2x^3 + x^2$ $x^2(x + 1)^2$

f) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$ $\frac{1}{5}(x - 2)^2$

4 Escreva as expressões como um produto de polinômios.

a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ $(a + b + c)(a + b - c)$

b) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$

c) $(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1$

d) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - (c^4 - 2c^2d^2 + d^4)$

4. c) $(a^2 + b^2 - 1)(a^2 + b^2 - 1)$

d) $(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 + d^2)$

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(OBM) Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007$?

a) 2×20112007^2

b) 2×20112003^2

c) 2×20112007

d) 2×20112003

e) 2×20112011^2

Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote no caderno as que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal. • Se chamarmos o número 20112007 de *x*, como poderemos representar os números 20112011 e 20112003? $(x + 4)$ e $(x - 4)$, respectivamente.
Plano de resolução	• Reescreva a expressão numérica dada, considerando 20112007 igual a *x*. $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 16x$ • Desenvolva os produtos notáveis. $x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x = 2x^2 - 16x + 32 = 2 \cdot (x - 4)^2$
Resolução	• Junte-se a três colegas. • Mostre a eles seu plano de resolução e veja os deles. • Discutam as diferenças e as semelhanças entre os planos e escolham um para a execução do processo de resolução. Observação Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno. $2 \cdot (x - 4)^2 = 2 \cdot (20112007 - 4)^2 = 2 \cdot 20112003^2$
Verificação	• Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• Organizem a apresentação da resolução, explicitando cada etapa e justificando a escolha do número 20112007 como *x*. Espera-se que os alunos percebam que a diferença entre 20112007 e 20112003 é 4, a mesma diferença observada entre 20112011 e 20112007.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Quais foram os produtos notáveis estudados neste capítulo?
Foram estudados: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos.

2 Em seu caderno, copie a tabela e complete-a.

Produto notável	Nomenclatura	Desenvolvimento
$(a + b)^2$	Quadrado da soma de dois termos	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2$	Quadrado da diferença de dois termos	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \cdot (a - b)$	Produto da soma pela diferença de dois termos	$a^2 - b^2$

3 Em uma multiplicação, o que significam os termos *fator* e *produto*?
Na multiplicação, os fatores são os números (ou expressões algébricas) que estão sendo multiplicados; o produto é o resultado da multiplicação.

4 Paulo escreveu $(x + 4)^2 = x^2 + 16$, mas cometeu um erro ao fazer o produto notável. Corrija o que Paulo escreveu. $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

5 Nem todo trinômio (polinômio composto de três termos) é um quadrado perfeito. O que caracteriza um polinômio como quadrado perfeito?
Em um quadrado perfeito, os dois termos devem estar elevados ao quadrado e o terceiro deve ser o dobro do produto dos outros dois termos.

Aplicando

1 Simplifique as expressões.

a) $(x + 2)^2 + (x + 3)^2 + (x + 4)^2 + (x + 5)^2$ $4x^2 + 28x + 54$

b) $(2a + b)^2 - (a - b)^2$ $3a^2 + 6ab$

2 Considerando que $a^2 + b^2 = 34$ e $ab = 15$, calcule o valor de $\frac{(a + b)^2}{8}$. 8

3 Sendo $A = (x + 2)^2$, $B = (x + 3)(x - 3)$ e $C = (x - 1)^2$, determine $A + B + C$ de forma simplificada. $3x^2 + 2x - 4$

4 Responda às questões.

a) Que expressão algébrica devemos subtrair de $a^2 + b^2$ para obter o quadrado de $(a - b)$? $2ab$

b) Que expressão algébrica deve ser adicionada a $a^2 + 6a^2b^2 - 12a^2b$ para se obter o quadrado de $(2a - 3ab)$? $3a^2(1 + b^2)$

c) Qual é o binômio cujo quadrado é $a^4b^2 - 2a^2b + 1$? $a^2b - 1$

5 Dados $A = (2x - 1)$ e $B = (2x + 1)$, determine:

a) $A^2 - B^2$ $-8x$

b) $(A - B)^2$ 4

6 Sabendo que a é um número real diferente de zero e que $a + \frac{1}{a} = 3$, calcule o valor de $a^2 + \frac{1}{a^2}$. 7

7 Desenvolva as expressões a seguir.

a) $(x + 3)^2$ $x^2 + 6x + 9$

b) $(x + 5)(x + 3)$ $x^2 + 8x + 15$

c) $(x - 4)^2$ $x^2 - 8x + 16$

d) $(a - 3)(a - 4)$ $a^2 - 7a + 12$

e) $(x - 5)(x + 5)$ $x^2 - 25$

8 Mostre que a diferença entre os quadrados da soma e da diferença de dois números inteiros não nulos é sempre divisível por esses números e pelo número 4.
$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

9 Verifique que:

$$(4 + 3)^2 + (4 - 3)^2 = 2(4^2 + 3^2)$$
$$7^2 + 1^2 = 2(16 + 9)$$
$$49 + 1 = 2 \cdot 25$$
$$50 = 50$$

Agora, prove que $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ para quaisquer valores de a e b que você escolher.

$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + (a^2 - \cancel{2ab} + b^2) = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$

10 Qual é o número que, adicionado a $2\,089^2$, resulta em $2\,090^2$?

$2\,090^2 - 2\,089^2 = \underbrace{(2\,090 + 2\,089)}_{4\,179} \cdot \underbrace{(2\,090 - 2\,089)}_{1} = 4\,179$

11 Escolha dois números reais cuja diferença seja 8. Mostre que a diferença de seus quadrados é oito vezes a soma desses números. Justifique sua resposta.

Resposta pessoal. Veja: $a - b = 8$
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 8(a + b)$

12 A diferença entre os quadrados de dois números naturais consecutivos é 279. Quais são esses números?

139 e 140; basta fazer: $(x + 1)^2 - x^2 = 279$

13 Que polinômio se obtém efetuando $[2 + (a - b)] \cdot [2 - (a - b)]$? $4 - a^2 + 2ab - b^2$

14 Que monômio deve ser subtraído do trinômio $a^2 - 2ab + 4b^2$ para que ele seja o quadrado de $(a - 2b)$? $2ab$

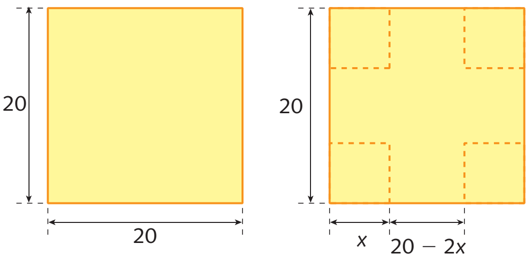
15 Sabendo que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 12$, determine $\frac{1}{x^2} + x^2$. 10

16 Sendo $S = \left(x + \sqrt{7}\right) \cdot \left(x - \sqrt{7}\right)$,
$P = (x - 3)^2 - 12$ e
$Q = (x + 5)(x - 2)(x - 1)$,
determine $Q - (S + P)$. $x^3 - 7x + 20$

17 Fatore as expressões.

a) $x^3 - x^2 - xy$ $x(x^2 - x - y)$
b) $a + b + (a + b)x$ $(a + b)(1 + x)$
c) $4x^2 - 12x + 9$ $(2x - 3)^2$
d) $36a^2 + 60ab + 25b^2$ $(6a + 5b)^2$
e) $x^2 - 6x - 16$ $(x - 8)(x + 2)$
f) $m^2 - 100$ $(m + 10)(m - 10)$
g) $ax - y - x + ay$ $(x + y)(a - 1)$

18 Ana tem uma folha de cartolina na forma de um quadrado cujos lados medem 20 cm. Cortando, em cada canto, um quadrado de lado x e dobrando as laterais, Ana obtém uma caixa.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

a) Que expressão algébrica representa o volume da caixa? $(20 - 2x)(20 - 2x) \cdot x$

b) Calcule o volume para $x = 1$ cm. 324 cm³

19 Reescreva no caderno a expressão: $25a^2 - ■ + 36b^2$, substituindo o ■ por um monômio, de modo que a expressão seja um trinômio quadrado perfeito. $60ab$

20 Para que o binômio $\left(16a^2 - 16a\sqrt{a}\right)$ se torne um trinômio quadrado perfeito, o que é necessário acrescentar a ele? $4a$

21 Sabendo que $a^2 + b^2 = 45$ e $ab = 18$, determine o valor de $(a + b)^2$.

$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{45} + \underbrace{2ab}_{2 \cdot 18} = 81$

22 Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$, com $x^2 - y^2 \neq 0$. $\dfrac{x + y}{x - y}$

b) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, com $x^2 - 1 \neq 0$. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

DESAFIO

A expressão $\dfrac{x^4}{y^6} + E + \dfrac{9}{k^2}$ representa um trinômio quadrado perfeito. Determine E.

$E = \dfrac{6x^2}{ky^3}$

23 Calcule o valor de $54\,321^2 - 54\,320^2$ sem efetuar as potências. 108 641

DESAFIO

É fácil verificar que o produto de dois números inteiros consecutivos é sempre par. Veja os exemplos:

- $2 \cdot 3 = 6$
- $9 \cdot 10 = 90$
- $-5 \cdot (-4) = 20$

Agora, explique por que a soma de um número com seu quadrado é sempre par.

$n^2 + n = \underline{n(n + 1)}$

O produto de dois números consecutivos é sempre par.

24 Indique, no caderno, as sentenças verdadeiras. alternativas **a**, **d** e **e**

a) $p^4 - \frac{1}{4}q^2 = \left(p^2 + \frac{q}{2}\right)\left(p^2 - \frac{q}{2}\right)$

b) $x^6y^6 + x^4y^4 + x^2y^2 = x^2y^2(x^4y^4 + x^2y^2)$

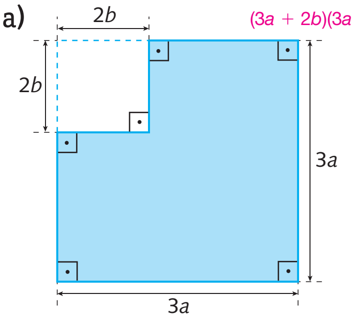
c) $k^2 + 10k + 25 = (k - 5)^2$

d) $16x^4y^6 + 16x^5y^5 + 4x^6y^4 =$
$= (4x^2y^3 + 2x^3y^2)^2$

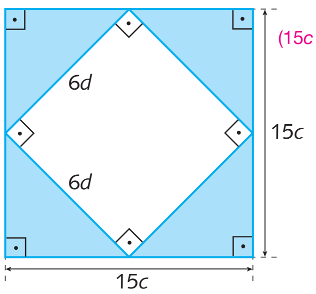
e) $100x^2 - 40xy + 4y^2 = (2y - 10x)^2$

25 Escreva o produto de polinômios que representa a área pintada de azul das figuras abaixo.

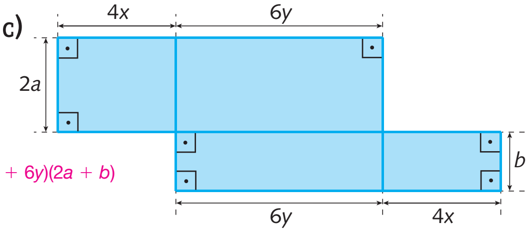
a) $(3a + 2b)(3a - 2b)$



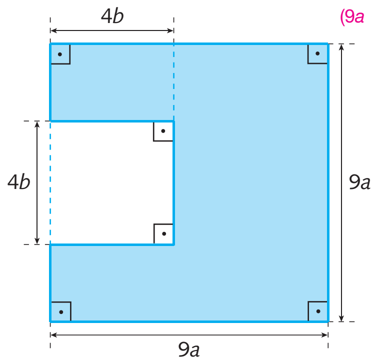
b) $(15c + 6d)(15c - 6d)$



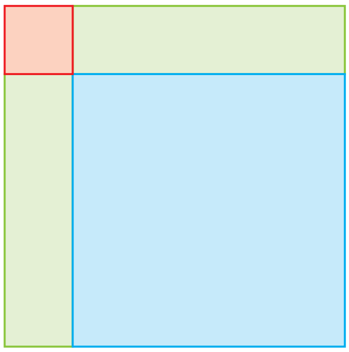
c) $(4x + 6y)(2a + b)$



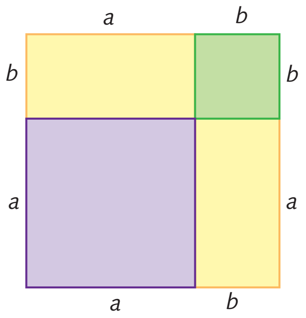
d) $(9a + 4b)(9a - 4b)$



26 Na figura abaixo, a soma das áreas dos dois retângulos verdes é igual a 32 cm² e a área do quadrado azul é igual a 64 cm². Qual é a área total da figura? 100 cm²



27 Sabe-se que a área do quadrado roxo é igual a 64 cm² e que o perímetro do quadrado de lado $a + b$ é igual a 44 cm. Qual é a área, em centímetro quadrado, do quadrado verde? 9 cm²



28 Escreva os polinômios a seguir como produto de três fatores.

a) $x^4 - 1$ $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

b) $81y^4 - 1$ $(9y^2 + 1)(3y + 1)(3y - 1)$

c) $x^{20} - 256$ $(x^{10} + 16)(x^5 + 4)(x^5 - 4)$

d) $r^4 - 4$ $(r^2 + 2)(r + \sqrt{2})(r - \sqrt{2})$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

CAPÍTULO

5 | RETAS E ÂNGULOS

USS Boxer LHD 4. Oceano Índico, 2011.


U.S. NAVY/MASS COMMUNICATION SPECIALIST 3RD CLASS TREVOR WELSH

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O *USS Boxer LHD 4* é um dos maiores porta-helicópteros do mundo, com 253,2 m de comprimento e 31,8 m de largura. Ele pode deslocar até 41 150 t.

Nesta foto, podemos observar, em destaque, na área de manobra dos helicópteros, a abertura de um ângulo formado por dois segmentos de reta.

- Localize o **segmento de reta $\overline{AB}$** na foto. Por que não podemos dizer que o destaque feito corresponde à reta $\overleftrightarrow{AB}$? Porque corresponde a uma parte de uma reta que se inicia no ponto *A* e termina no ponto *B*.
- Pela posição da foto, não é possível obter a medida do ângulo α com o uso de um transferidor. Entretanto, usando seus conhecimentos de Geometria, é possível identificar essa medida. O ângulo α, indicado na foto, mede aproximadamente quantos graus? aproximadamente 90°

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe os ângulos destacados em cada foto.

1

FOTO: MASUTI/SHUTTERSTOCK. ILUSTRAÇÃO: LUIZ RUBIO

O ângulo mostra a inclinação do avião em relação à pista do aeroporto.

2

FOTO: COSTAZZURRA/SHUTTERSTOCK. ILUSTRAÇÃO: LUIZ RUBIO

Um dos ângulos de uma das asas do avião em relação à fuselagem.

3

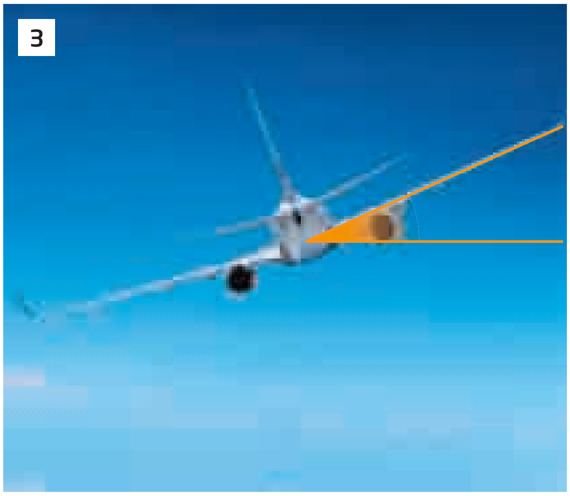


FOTO: R. GINO SANTA MARIA/SHUTTERSTOCK. ILUSTRAÇÃO: LUIZ RUBIO

O ângulo indica um giro do avião em relação à linha do horizonte.

- A linha do horizonte pode ser representada por qual tipo de linha? reta
- Entre os ângulos destacados, qual é o maior? o da foto 2
- Se na foto 3 o avião estivesse com as asas paralelas à linha do horizonte, qual seria a medida do ângulo destacado? 0°

Neste capítulo, vamos estudar as **retas** e os **ângulos**, retomando definições e relações já estudadas em outros anos e conhecendo as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

1 Retas

Entende-se por “ente primitivo” tudo aquilo que não pode ser definido. Na Geometria, há três conceitos primitivos: o ponto, a reta e o plano. Mesmo sem poder defini-los, podemos aplicá-los no estudo da Geometria.

Uma corda bem esticada passa a ideia de uma reta.

ALEX KOCH/ALAMY/GLOW IMAGES

Fita usada na prática do *slackline*.

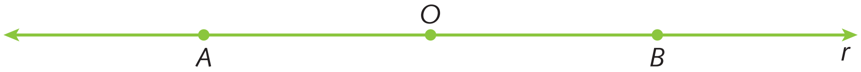
Observe a representação de uma reta *r* formada por infinitos pontos, entre os quais estão os pontos distintos *A* e *B*:

reta *r* ou $\overleftrightarrow{AB}$

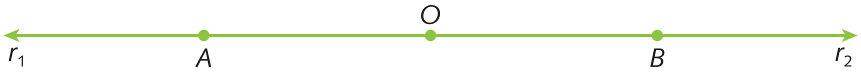
Os pontos *A* e *B* **pertencem** à reta *r*.

Partes de uma reta

Considere a reta *r* e os pontos *A*, *B* e *O* indicados:

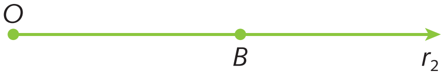


O ponto *O* divide a reta *r* em duas partes: r_1 e r_2, que passam pelos pontos *A* e *B*, respectivamente.



Chamamos r_1 e r_2 de **semirretas** e o ponto *O* de **origem das semirretas**. Assim, temos:

- Semirreta de origem *O* que passa pelo ponto *A*. Indica-se: $\overrightarrow{OA}$ (lemos: “semirreta *OA*”).



- Semirreta de origem *O* que passa pelo ponto *B*. Indica-se: $\overrightarrow{OB}$ (lemos: “semirreta *OB*”).

A reta *r* é chamada de **suporte** das semirretas.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Considere a reta *r* e os pontos *A* e *B*, distintos, pertencentes a *r*:

Chamamos de **segmento de reta** a parte da reta compreendida entre dois de seus pontos, incluindo esses pontos.

O segmento de reta limitado por *A* e *B* pode ser assim representado: $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$

Denominamos os pontos *A* e *B* de **extremidades** do segmento. A reta *r* é chamada de **reta suporte** do segmento.

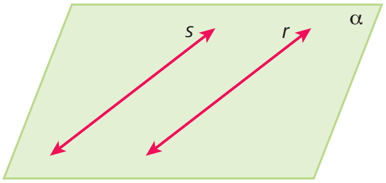
Posições relativas de duas retas em um plano

Duas ou mais retas contidas em um mesmo plano são chamadas de **coplanares**.

Duas retas coplanares podem ser classificadas em:

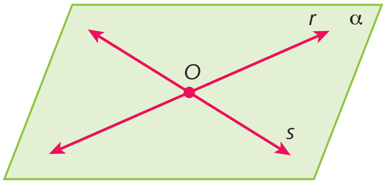
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

- **Retas paralelas** – quando não possuem pontos em comum.



Indica-se: $r \parallel s$

- **Retas concorrentes** – quando possuem um único ponto em comum.

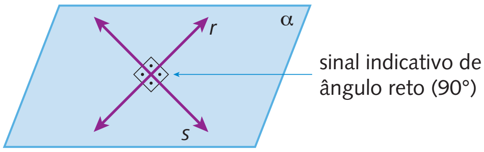


FILIPE FRAZAO/SHUTTERSTOCK

As linhas que separam as pistas dos automóveis, ônibus e bicicletas dão ideia de retas paralelas. Av. Paulista. São Paulo. 2013.

Observação

Retas concorrentes que formam quatro ângulos de 90° são chamadas **retas perpendiculares**.

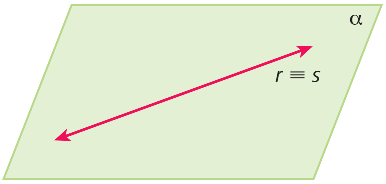


Indica-se: $r \perp s$

Lemos: "*r* é perpendicular a *s*".

Observações

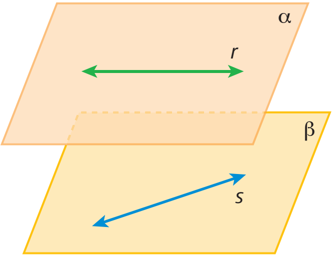
1 Denominamos **retas coincidentes** aquelas que possuem todos os pontos em comum.



Indica-se: $r \equiv s$

Pergunte aos alunos: “Retas reversas podem ser paralelas?” Eles devem entender que para duas retas serem paralelas elas devem ser coplanares, o que não ocorre com as retas reversas.

2 Denominamos **retas reversas** aquelas que não são coplanares.

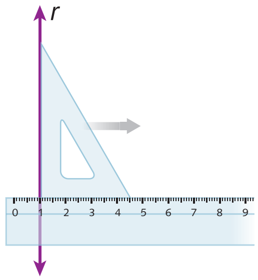


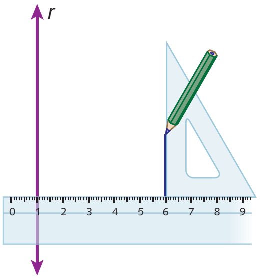
r e *s* são retas reversas.

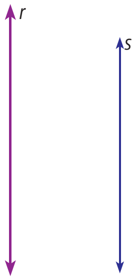
Retas reversas não têm ponto em comum.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

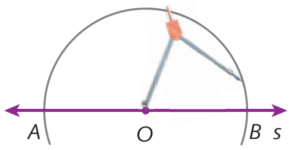
Construção de retas paralelas com régua e esquadro



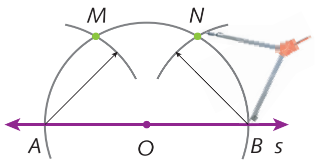




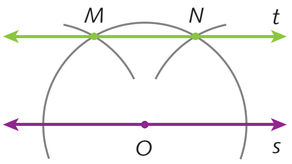
Construção de retas paralelas com compasso



1º) Centramos o compasso em *O* e traçamos um arco que intercepta *s* em *A* e *B*.



2º) Com centros em *A* e *B* e um mesmo raio, determinamos *M* e *N*.



3º) Traçamos $t \parallel s$ passando por *M* e *N*.

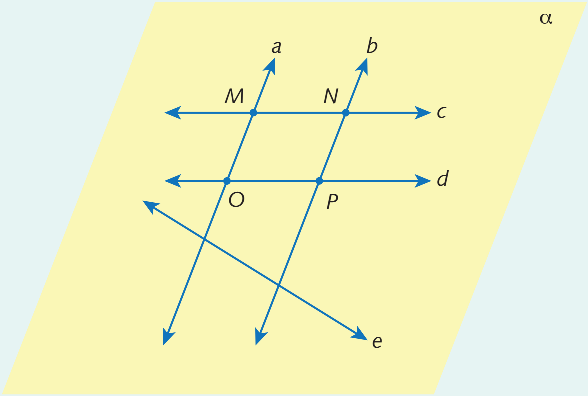
1. Exemplos de resposta:
Retas paralelas: *a* e *b*; *c* e *d*
Retas concorrentes: *a* e *c*; *b* e *d*

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Na figura abaixo as retas *a*, *b*, *c* e *d* são retas suportes dos lados do paralelogramo MNOP:

LUIZ RUBIO



Observe a figura e identifique em seu caderno:

a) dois pares de retas paralelas;

b) dois pares de retas concorrentes.

2 Identifique as sentenças verdadeiras. alternativas **a** e **c**

a) Dois pontos distintos de uma reta determinam um segmento de reta.

b) Duas retas que possuem um único ponto em comum são retas coincidentes.

c) Duas retas de um plano que não têm nenhum ponto em comum são retas paralelas.

d) Duas ou mais retas de um mesmo plano são retas reversas.

e) Retas paralelas podem ser retas reversas.

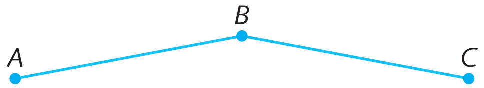
3 Desenhe uma reta *r* e um ponto *P* externo a essa reta. Com uma régua e um esquadro, trace uma reta *s* paralela a *r* pelo ponto *P*. Construção de figura.

4 Desenhe, no caderno, uma reta *r* e, com um compasso, trace uma reta *s* paralela a *r*.
Construção de figura.

2 Segmento de reta

Veja algumas relações entre dois segmentos de reta:

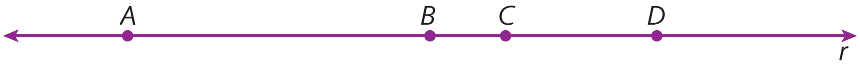
- Dois segmentos de reta são **consecutivos** se uma das extremidades de um deles é também extremidade do outro.



Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos, pois a extremidade *B* pertence a ambos.

- Dois segmentos são **colineares** se possuem a mesma reta suporte.

GUILHERME CASAGRANDI

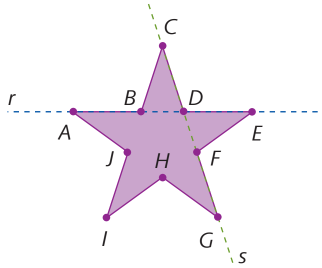


Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares, pois têm a mesma reta suporte *r*.

Na figura a seguir, podemos identificar vários segmentos de reta.

Exemplo

GUILHERME CASAGRANDI



O contorno dessa figura é formado por 10 segmentos de reta: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{JA}$.

Observe que:

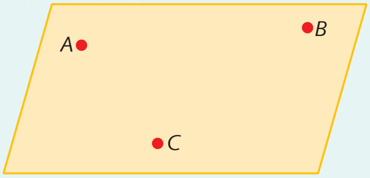
- Os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ são consecutivos, pois a extremidade *F* pertence a ambos os segmentos.
- Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são colineares, pois têm a mesma reta suporte *r*.
- Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{FG}$ são também colineares, pois têm a mesma reta suporte *s*.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

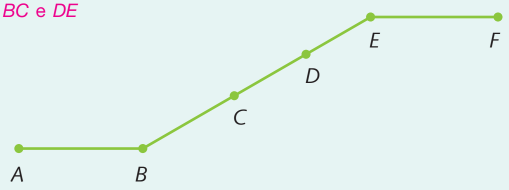
1 Desenhe, no caderno, a figura abaixo e trace semirretas que possuem origem em um destes pontos, passando por um dos outros pontos. Quantas semirretas podem ser traçadas? Identifique-as.

6; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$



2 Observe a figura e identifique dois segmentos colineares e não consecutivos.

$\overline{BC}$ e $\overline{DE}$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

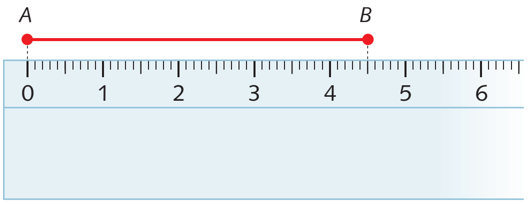
3 Desenhe uma linha poligonal formada por seis segmentos de reta não colineares.

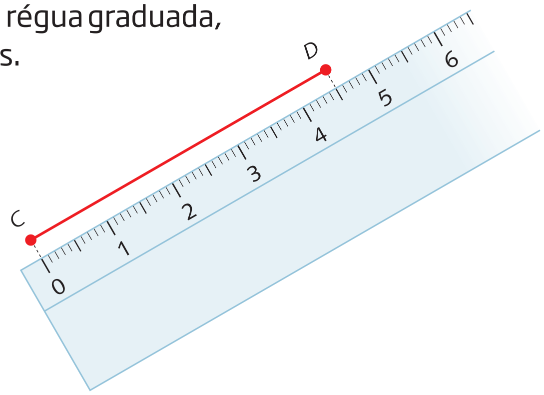
Construção de figura.

Segmentos congruentes

Considere os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Utilizando uma régua graduada, podemos determinar as medidas desses segmentos.

Observe:





GUILHERME CASAGRANDI

med($\overline{AB}$) = 4,5 cm

Lemos: "medida do segmento $\overline{AB}$".

med($\overline{CD}$) = 4,5 cm

Lemos: "medida do segmento $\overline{CD}$".

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma medida. Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são **congruentes**. Escrevemos:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ → Lemos: "o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$".

Dois segmentos que têm a mesma medida são chamados **congruentes**.

Observações

1 Podemos indicar a medida de um segmento $\overline{AB}$ por med($\overline{AB}$) ou simplesmente por AB.

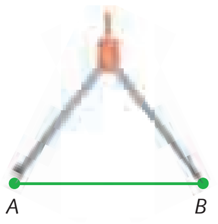
2 Denominamos **ponto médio** de um segmento $\overline{AB}$ o ponto M de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

GUILHERME CASAGRANDI

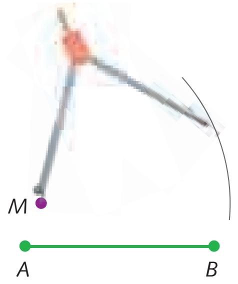
Construção de segmentos congruentes com o compasso

O compasso pode ser utilizado para verificar se dois segmentos são congruentes ou para construir um segmento congruente a outro segmento dado.

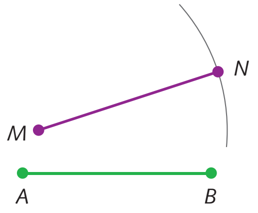
Observe a sequência para a construção do segmento de reta $\overline{MN}$, congruente ao segmento $\overline{AB}$.



1º) Dado um segmento $\overline{AB}$, fixamos a ponta-seca do compasso em A, levando a outra ponta até B.



2º) Fixamos o compasso em um ponto qualquer M e, com a abertura AB, traçamos um arco.



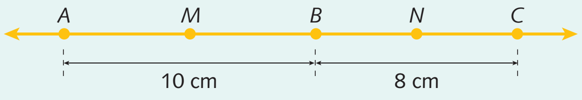
3º) Escolhemos um ponto qualquer desse arco; no caso, N.
Assim: $\overline{AB} \cong \overline{MN}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

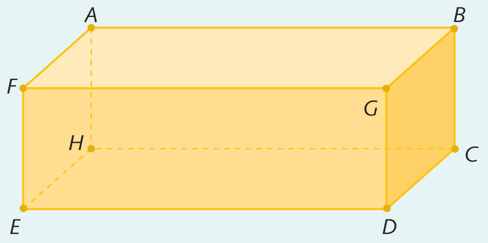
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Na figura ao lado, M é o ponto médio de $\overline{AB}$, e N é o ponto médio de $\overline{BC}$.
Se med($\overline{AB}$) = 10 cm e med($\overline{BC}$) = 8 cm, determine med($\overline{MN}$). 9 cm



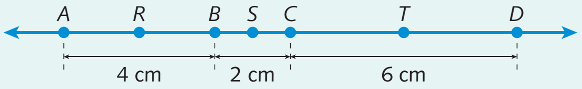
2 Observe o paralelepípedo representado ao lado. Identifique os segmentos congruentes ao segmento $\overline{AB}$. $\overline{HC}$, $\overline{FG}$ e $\overline{ED}$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Na figura abaixo, R, S e T são os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



GUILHERME CASAGRANDI

Determine:

a) a medida do segmento $\overline{RS}$; 3 cm

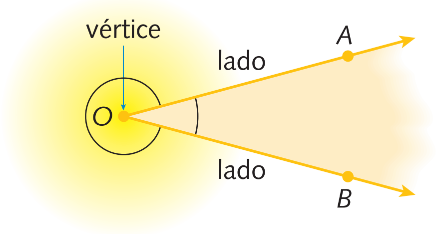
b) a medida do segmento $\overline{ST}$; 4 cm

c) a medida do segmento $\overline{SD}$; 7 cm

d) a medida do segmento $\overline{RD}$. 10 cm

3 Ângulo

Duas semirretas de mesma origem determinam no plano duas regiões, que, na figura abaixo, estão destacadas com cores diferentes.



GUILHERME CASAGRANDI

Denomina-se **ângulo** a união de duas semirretas que têm a mesma origem com uma das regiões do plano por elas limitada.

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ da figura acima determinam dois ângulos que podem ser indicados por: $A\hat{O}B$ (lemos: "ângulo AOB").

Classificação de ângulos

De acordo com sua medida, um ângulo pode ser classificado em:

- **Ângulo nulo**: é o ângulo que mede 0°.

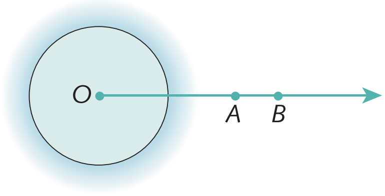
med($A\hat{O}B$) = 0°

LUIZ RUBIO

Observações

1 As semirretas que formam um ângulo nulo são coincidentes.

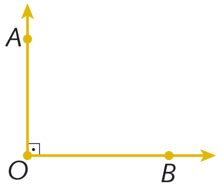
2 As mesmas semirretas que formam um ângulo nulo também formam um ângulo de uma volta, cuja medida é igual a 360°.



med($A\hat{O}B$) = 360°

LUIZ RUBIO

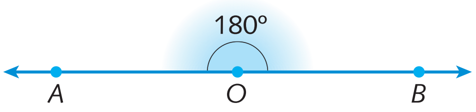
- **Ângulo reto** é todo aquele que mede 90°.



med($A\hat{O}B$) = 90°

GUILHERME CASAGRANDI

- **Ângulo raso** ou de **meia-volta** é todo aquele que mede 180°.



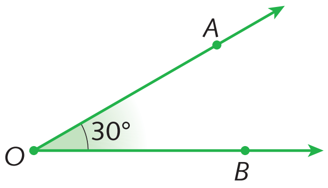
$\text{med}(A\widehat{O}B) = 180°$

Observação

As semirretas que formam um ângulo raso são opostas.

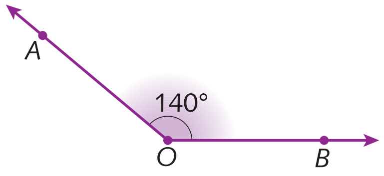
- **Ângulo agudo** é todo aquele cuja medida é menor que 90°.

Exemplo



- **Ângulo obtuso** é todo aquele cuja medida é maior que 90° e menor que 180°.

Exemplo



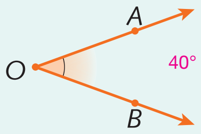
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

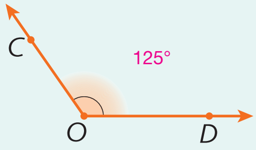
1 Com o auxílio de um transferidor, determine a medida dos ângulos abaixo.

a)



40°

b)



125°

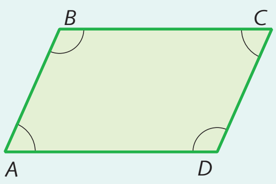
2 Utilizando régua e transferidor, desenhe no caderno ângulos com estas medidas:

a) 30° b) 120° c) 150° d) 240°

Construção de figuras.

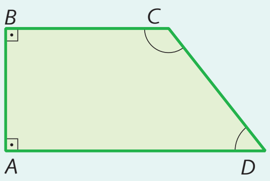
3 Classifique cada ângulo destacado nas figuras abaixo em agudo, reto ou obtuso.

a)



agudos: $\widehat{c}$, $\widehat{a}$
obtusos: $\widehat{b}$, $\widehat{d}$

b)

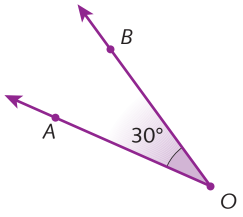


retos: $\widehat{a}$, $\widehat{b}$
agudo: $\widehat{d}$
obtuso: $\widehat{c}$

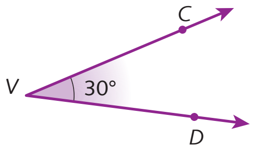
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Ângulos congruentes

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida.



med($A\widehat{O}B$) = 30°



med($C\widehat{V}D$) = 30°

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{V}D$ têm a mesma medida e, por isso, são denominados congruentes. Assim:

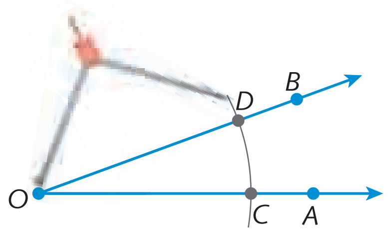
$A\widehat{O}B \cong C\widehat{V}D$ (Lemos: "$A\widehat{O}B$ é congruente a $C\widehat{V}D$")

Observação

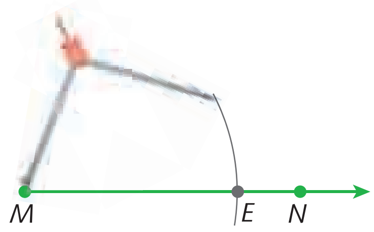
Dizer que dois ângulos são congruentes não é equivalente a dizer que são iguais. Por exemplo, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{V}D$, acima, são congruentes, mas não são iguais.

Construção geométrica de ângulos congruentes

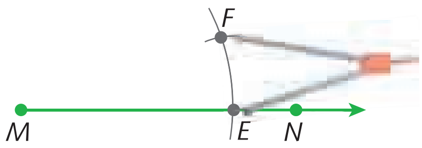
Acompanhe a construção de um ângulo congruente a $A\widehat{O}B$ sobre a semirreta suporte $\overrightarrow{MN}$.



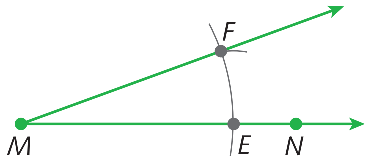
1º) No ângulo $A\widehat{O}B$, centramos o compasso em O e, com uma abertura qualquer, determinamos os pontos C e D sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.



2º) Na semirreta $\overrightarrow{MN}$, centramos o compasso em M e, com a abertura de medida OD, traçamos um arco e determinamos o ponto E sobre $\overrightarrow{MN}$.



3º) Centramos o compasso em E e, com a abertura de medida CD, determinamos F sobre o arco já traçado.



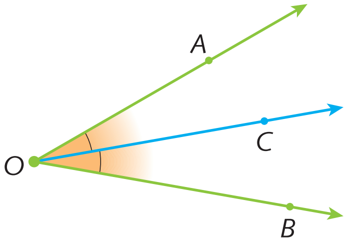
4º) Traçamos a semirreta $\overrightarrow{MF}$, determinando o ângulo $E\widehat{M}F \cong A\widehat{O}B$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Bissetriz de um ângulo

Na figura, a semirreta $\overrightarrow{OC}$, interna ao ângulo $A\hat{O}B$, tem origem no vértice do ângulo $A\hat{O}B$ e o divide em dois ângulos congruentes. Observe:

GUILHERME CASAGRANDI



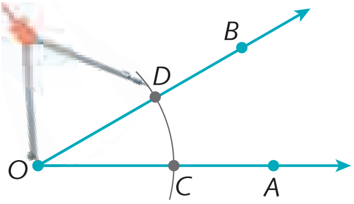
Como os ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são congruentes, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$.

A **bissetriz** de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo com origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes.

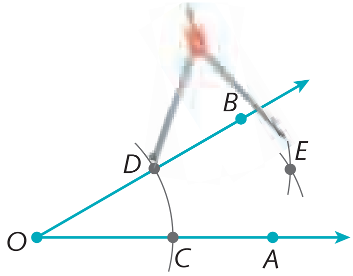
Construção geométrica da bissetriz de um ângulo

Acompanhe a determinação da bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

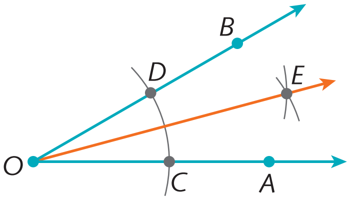
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI



1º) Dado um ângulo $A\hat{O}B$, centramos o compasso em *O* e, com uma abertura qualquer, determinamos os pontos *C* e *D* sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.



2º) Centramos o compasso em *C* e *D* e traçamos arcos que se cruzam, obtendo um ponto *E*.



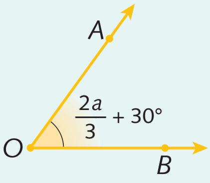
3º) Traçamos $\overrightarrow{OE}$, determinando, assim, a bissetriz de $A\hat{O}B$.

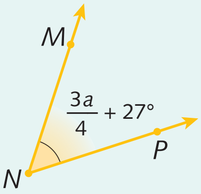
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

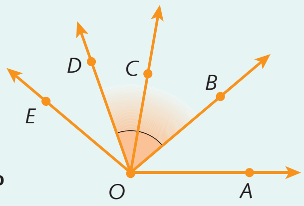
1 Determine o valor de a, sabendo que $A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$ são congruentes. $a = 36°$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI





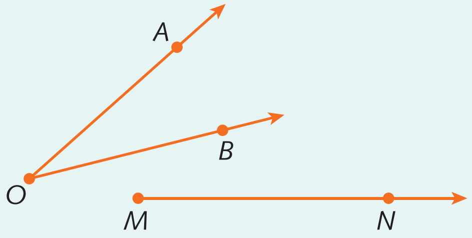
2 Na figura, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$, med($A\hat{O}C$) = 80° e med($C\hat{O}E$) = 60°. Determine med($B\hat{O}D$). 70°



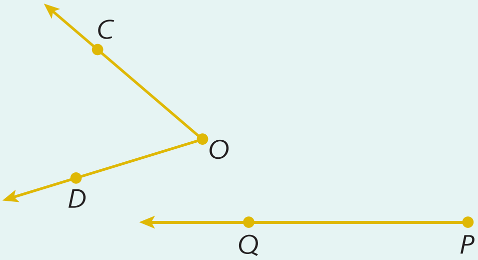
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

3 Copie, no caderno, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ e as semirretas $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{PQ}$. Em seguida, construa, com o auxílio de um compasso, ângulos congruentes a $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$, usando as semirretas suportes $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{PQ}$, respectivamente. Espera-se que os alunos usem o procedimento visto na página 101.

a)

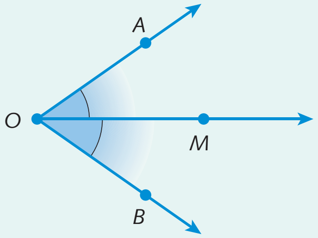


b)



Construção de figura.

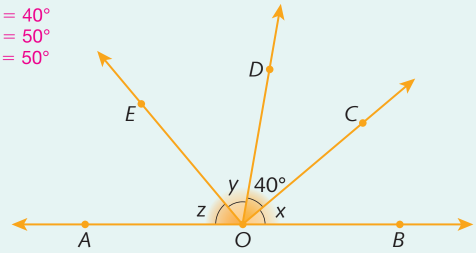
4 Na figura, $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz de $A\widehat{O}B$. Sendo med($B\widehat{O}M$) = 35°, determine med($A\widehat{O}B$). 70°



GUILHERME CASAGRANDI

5 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $B\widehat{O}D$ e $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz do ângulo $A\widehat{O}D$. Determine os valores de x, y e z.

x = 40°
y = 50°
z = 50°

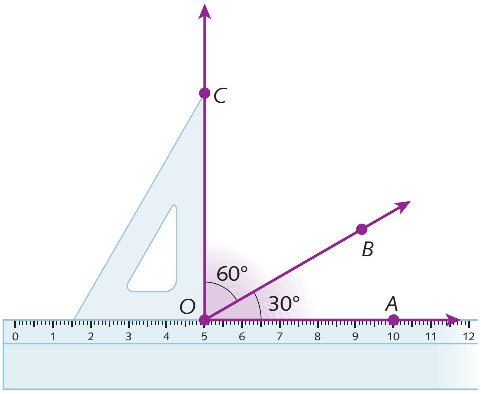


LUIZ RUBIO

Ângulos complementares

Observe os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ na figura a seguir e veja que a soma de suas medidas é igual a 90°.

GUILHERME CASAGRANDI



$$\text{med}(A\widehat{O}B) + \text{med}(B\widehat{O}C) = 90°$$

Os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ são **complementares**. Podemos dizer que $A\widehat{O}B$ é o complemento de $B\widehat{O}C$ e que $B\widehat{O}C$ é o complemento de $A\widehat{O}B$.

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90°.

Exemplos

- Determinar a medida do complemento do ângulo que mede 76°30′.

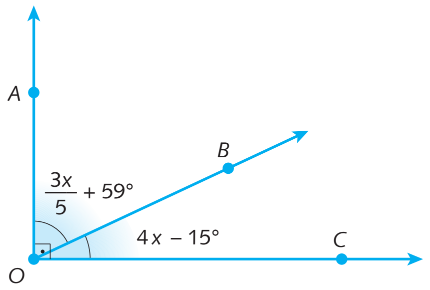
  O complemento de 76°30′ é dado por:

  $90° - 76°30' = 89°60' - 76°30' = 13°30'$

  Como 1° corresponde a 60′, podemos representar 90° por 89°60′.

  Portanto, a medida do complemento do ângulo de 76°30′ é 13°30′.

- Calcular o valor de x, em grau, que satisfaz as expressões indicadas na figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Como os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ são complementares, temos:

med($A\widehat{O}B$) + med($B\widehat{O}C$) = 90°

Assim:

$$\frac{3x}{5} + 59° + 4x - 15° = 90°$$

$$\frac{3x}{5} + 4x + 44° = 90°$$

$$\frac{3x}{5} + 4x = 90° - 44°$$

$$\frac{3x}{5} + 4x = 46°$$

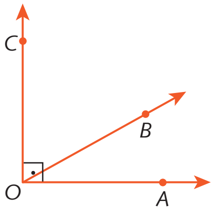
$$\frac{23x}{5} = 46°$$

$$23x = 230°$$

$$x = 10°$$

Portanto: $x = 10°$

Observação



LUIZ RUBIO

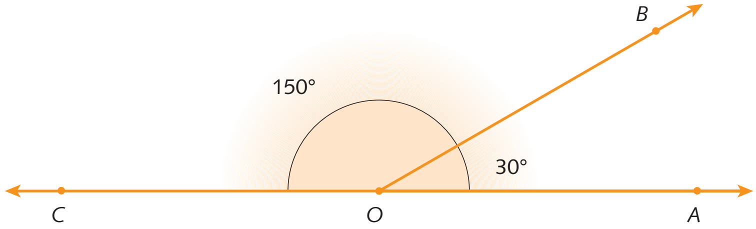
Como os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ têm um vértice e um lado em comum, sem pontos internos em comum, eles são denominados **ângulos adjacentes**.

Como a soma de suas medidas é 90°, esses ângulos são chamados de ângulos adjacentes complementares.

Ângulos suplementares

Observe os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ na figura abaixo. A soma de suas medidas é 180°.

$$\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = 180°$$



GUILHERME CASAGRANDI

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são **suplementares**. Podemos dizer que $A\hat{O}B$ é o suplemento de $B\hat{O}C$ e que $B\hat{O}C$ é o suplemento de $A\hat{O}B$.

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180°.

Exemplos

- Determinar a medida do suplemento do ângulo que mede 78°20′15″.

  Para obter o suplemento de 78°20′15″, fazemos:

  $$180° - 78°20'15'' = 179°59'60'' - 78°20'15'' = 101°39'45''$$

  Como 1° corresponde a 60′ e 1′ corresponde a 60″, podemos representar 180° por 179°59′60″.

  Portanto, a medida do suplemento do ângulo de 78°20′15″ é 101°39′45″.

- $\frac{2}{3}$ da medida do suplemento de um ângulo correspondem a 80°. Qual é a medida desse ângulo?

  Sendo x a medida do ângulo, a medida de seu suplemento é dado pela expressão $180° - x$. Observando os dados do problema, podemos escrever:

  $$\frac{2}{3} \cdot (180° - x) = 80°$$

  $$\frac{360° - 2x}{3} = 80°$$

  $$360° - 2x = 240°$$

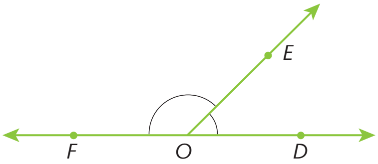
  $$-360° + 2x = -240°$$

  $$2x = 120°$$

  $$x = 60°$$

  Portanto, a medida do ângulo é 60°.

Observação



Os ângulos $D\widehat{O}E$ e $E\widehat{O}F$ são adjacentes, pois têm um vértice e um lado em comum, sem pontos internos em comum. Como a soma de suas medidas é 180°, esses ângulos são chamados de ângulos adjacentes suplementares.

LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a medida do complemento do ângulo de:

a) 70° 20°

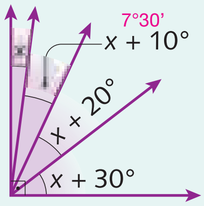
b) 37°40' 52°20'

c) 52°50' 37°10'

d) 65°12'30" 24°47'30"

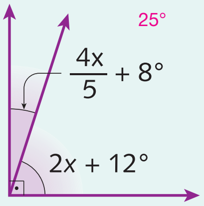
2 Calcule o valor de x, em grau, de acordo com as figuras abaixo.

a)



7°30'

b)



25°

3 Calcule mentalmente o complemento de 78° e o suplemento de 124°. 12° e 56°

4 Determine a medida do suplemento do ângulo de:

a) 37° 143°

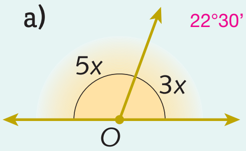
b) 68°38' 111°22'

c) 105°40' 74°20'

d) 155°18'35" 24°41'25"

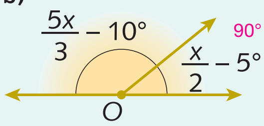
5 Calcule o valor de x, em grau, que satisfaz as informações das figuras abaixo.

a)



22°30'

b)



90°

6 A medida de um ângulo mais a metade da medida do seu complemento é igual a 75°. Quanto mede esse ângulo? 60°

7 Somando $\frac{2}{3}$ da medida de um ângulo com a medida do seu complemento, obtemos 74°. Quanto mede esse ângulo? 48°

8 Adicionando a medida do complemento de um ângulo com a medida do seu suplemento, obtemos 149°. Quanto mede esse ângulo? 60°30'

9 A medida do suplemento de um ângulo é igual ao triplo da medida do seu complemento. Quanto mede esse ângulo? 45°

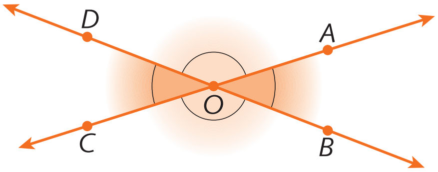
10 Adicionando a metade da medida do complemento de um ângulo à terça parte da medida do seu suplemento, obtemos 80°. Qual é a medida desse ângulo? 30°

11 Dois ângulos são suplementares. A medida do ângulo menor está para a medida do ângulo maior assim como 4 está para 5. Determine a medida desses ângulos. 80° e 100°

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Ângulos opostos pelo vértice

Observe as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, concorrentes entre si. Elas definem os ângulos: $A\widehat{O}B$, $C\widehat{O}D$, $A\widehat{O}D$ e $C\widehat{O}B$.

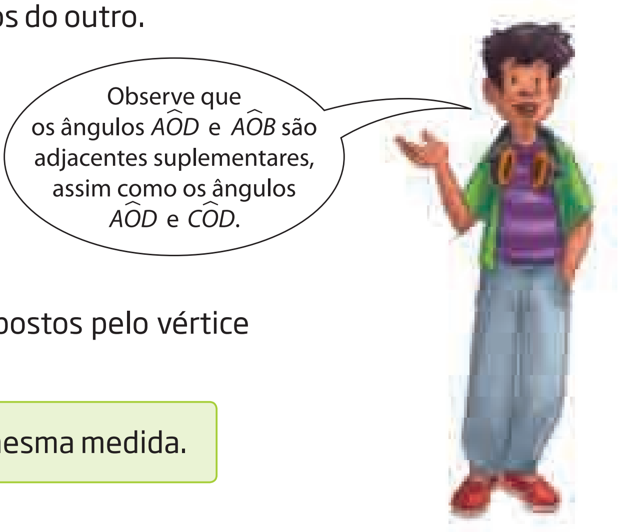


GUILHERME CASAGRANDI

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ têm o vértice O em comum e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, que formam o ângulo $A\hat{O}B$, são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, que formam o ângulo $C\hat{O}D$. Por isso, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são chamados **ângulos opostos pelo vértice** (**o.p.v.**).

Podemos dizer, também, que os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ têm o vértice O em comum e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OD}$, que formam o ângulo $A\hat{O}D$, são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OB}$ que formam o ângulo $B\hat{O}C$. Por isso, os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são chamados **ângulos opostos pelo vértice** (**o.p.v.**).

De maneira geral, podemos dizer que dois ângulos com vértice comum são o.p.v. quando os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro.



TIAGO SILVA

Observe que:

$$\text{med}(A\hat{O}D) + \text{med}(A\hat{O}B) = 180°$$

$$\text{med}(A\hat{O}D) + \text{med}(C\hat{O}D) = 180°$$

Então:

$$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(C\hat{O}D)$$

Assim, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, que são opostos pelo vértice (o.p.v), têm a mesma medida.

Dois ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Exemplo

- Vamos determinar x e y na figura abaixo.

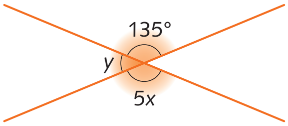
$5x = 135°$ ← ângulos o.p.v.

$$x = \frac{135°}{5} = 27°$$

Agora,

$y + 135° = 180°$ ← ângulos adjacentes suplementares

$$y = 180° - 135° = 45°$$



LUIZ RUBIO

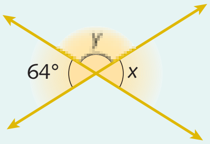
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine as medidas x e y, em grau, em cada figura.

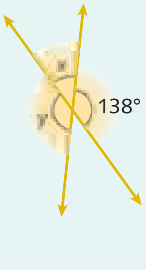
a)

$x = 64°$
$y = 116°$



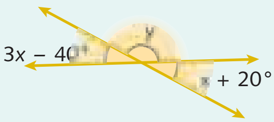
b)

$x = 42°$
$y = 138°$

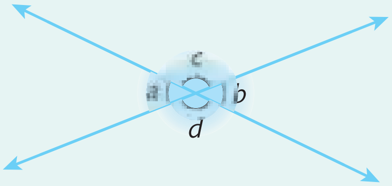


c)

$x = 30°$
$y = 130°$



2 Determine as medidas dos ângulos da figura, sabendo que $a = 6x + 5°$ e $b = 5x + 15°$. $a = b = 65°$
$c = d = 115°$

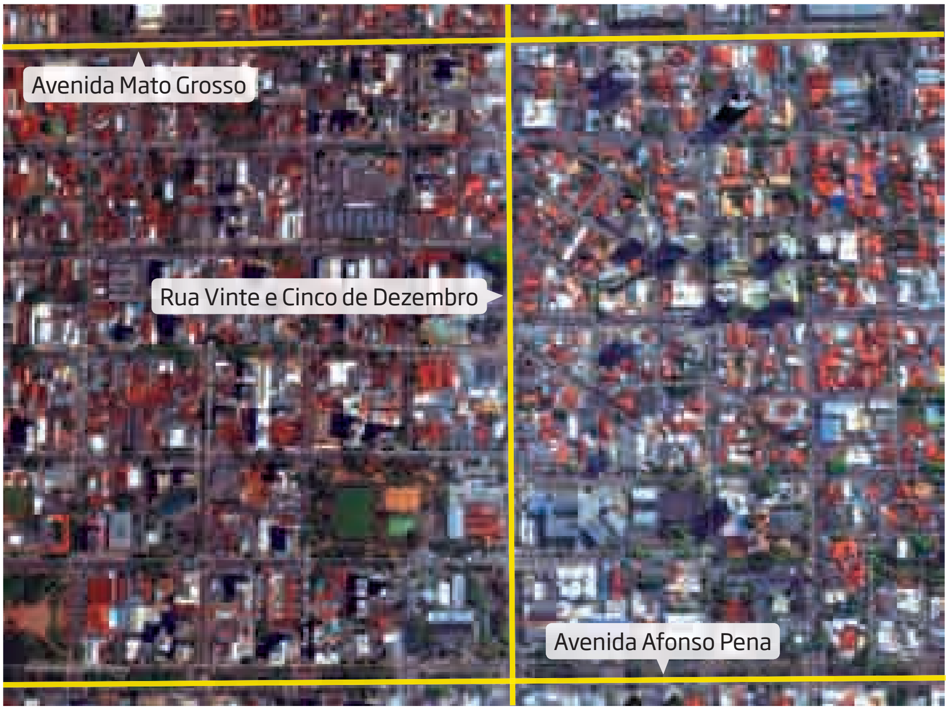


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

4 Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal

Ao observar o mapa de uma região, podemos perceber que as ruas e as avenidas possuem diversos formatos lineares. Em alguns deles é possível identificar linhas retas que podem ser paralelas ou concorrentes.

No mapa abaixo, vemos parte do centro de Campo Grande, capital de Mato Grosso do Sul.

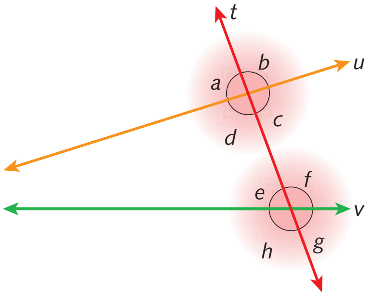


© 2015 DIGITAL GLOBE/2015 GOOGLE/GOOGLE EARTH PRO

Observe que as ruas destacadas lembram partes de uma reta. A Rua Vinte e Cinco de Dezembro é concorrente à Avenida Mato Grosso e à Avenida Afonso Pena. Por isso, podemos dizer que a Rua Vinte e Cinco de Dezembro é transversal às avenidas destacadas.

Denominamos **transversal** toda reta que corta duas ou mais retas em pontos distintos.

No encontro das duas retas com a transversal, ficam determinados oito ângulos com vértices nos pontos de intersecção. Veja um exemplo ao lado, em que *t* é transversal às retas *u* e *v*.

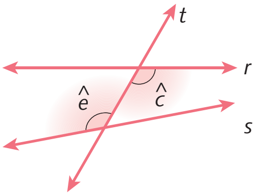


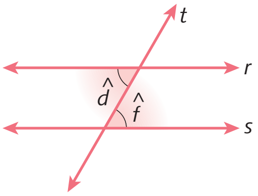
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

De acordo com a posição que ocupam, esses ângulos são classificados, dois a dois, com nomes especiais.

Ângulos alternos internos

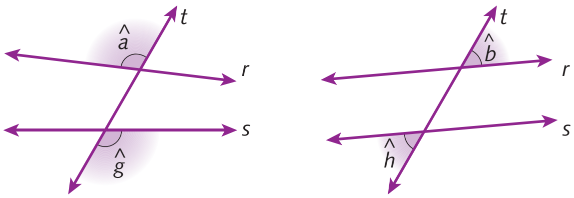
- $\hat{c}$ e $\hat{e}$
- $\hat{d}$ e $\hat{f}$





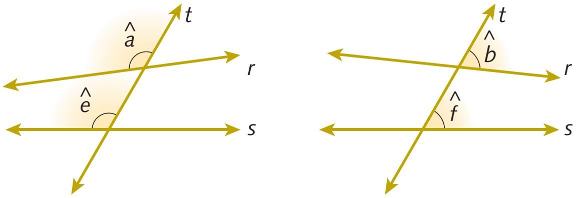
Ângulos alternos externos

- $\hat{a}$ e $\hat{g}$
- $\hat{b}$ e $\hat{h}$

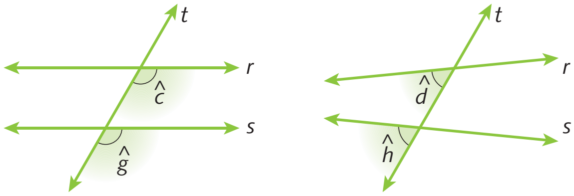


Ângulos correspondentes

- $\hat{a}$ e $\hat{e}$
- $\hat{b}$ e $\hat{f}$

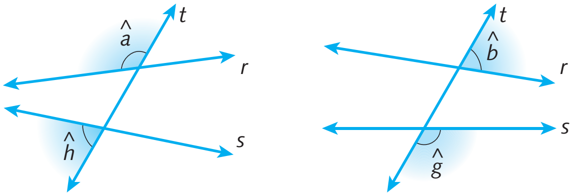


- $\hat{c}$ e $\hat{g}$
- $\hat{d}$ e $\hat{h}$



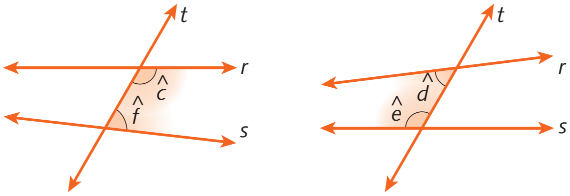
Ângulos colaterais externos

- $\hat{a}$ e $\hat{h}$
- $\hat{b}$ e $\hat{g}$



Ângulos colaterais internos

- $\hat{c}$ e $\hat{f}$
- $\hat{d}$ e $\hat{e}$

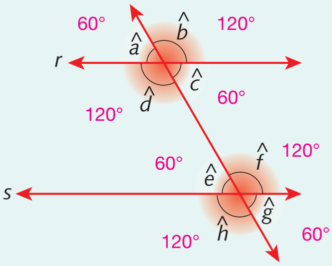


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos formados.



LUIZ RUBIO

Agora, responda às questões.

a) Quais deles têm a mesma medida? $a = c = e = g = 60°$ $b = d = f = h = 120°$

b) Neste caso, os ângulos correspondentes têm a mesma medida? Sim

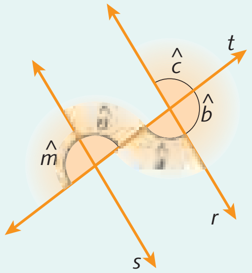
c) Neste caso, os ângulos alternos têm a mesma medida? Sim

d) Neste caso, qual é a relação entre os ângulos colaterais? são suplementares

e) Qual é a posição relativa entre as retas r e s? retas paralelas

Lembre-se:
Não escreva no livro!

2 Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas.



GUILHERME CASAGRANDI

Agora, identifique:

a) dois ângulos opostos pelo vértice; $\hat{c}$ e $\hat{a}$

b) dois ângulos alternos internos; $\hat{n}$ e $\hat{a}$

c) dois ângulos correspondentes; $\hat{c}$ e $\hat{n}$

d) dois ângulos colaterais externos; $\hat{c}$ e $\widehat{m}$

e) dois ângulos alternos externos. $\widehat{b}$ e $\widehat{m}$

3 Observe um detalhe de uma página do guia de ruas de Fortaleza.

GUILHERME CASAGRANDI

Considerando as ruas destacadas, qual é o nome da via transversal às ruas João Cordeiro e Ildefonso Albano?

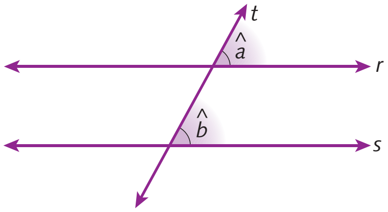
Av. Monsenhor Tabosa

Relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Ângulos correspondentes

Considere as retas *r* e *s* paralelas entre si e uma transversal *t* que as intercepta, conforme a figura abaixo.

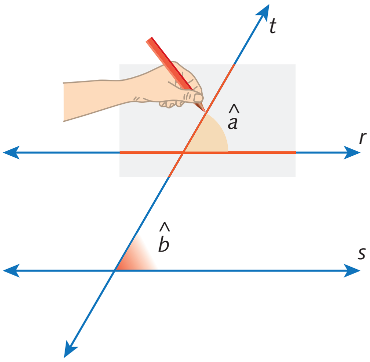
$r /\!/ s$
t: transversal



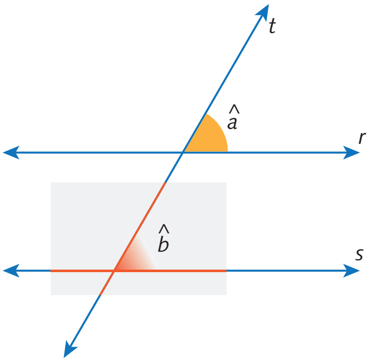
Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são correspondentes.

GUILHERME CASAGRANDI

Júlio usou um papel vegetal e fez um decalque do ângulo $\hat{a}$.



Depois, colocou o decalque sobre o ângulo $\hat{b}$ e percebeu que ambos possuem a mesma abertura.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

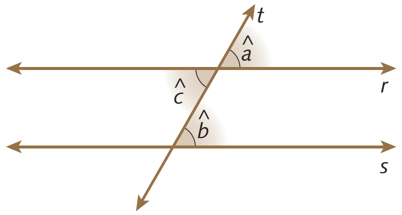
Com a sobreposicão é possível perceber que os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes.

Explique aos alunos que na situação acima, Júlio não fez uma demonstração, mas sim uma verificação.

Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos correspondentes, que são congruentes.

A recíproca também é verdadeira: se os ângulos correspondentes forem congruentes, as retas *r* e *s* serão **paralelas**.

Ângulos alternos internos



GUILHERME CASAGRANDI

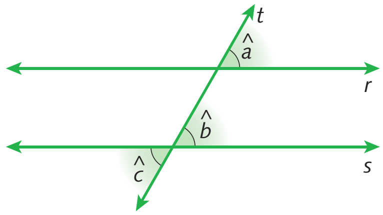
TIAGO SILVA

Sendo $r /\!/ s$, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos correspondentes.
- $\hat{c} \cong \hat{a}$, pois são ângulos o.p.v.

Logo, podemos afirmar que $\hat{c} \cong \hat{b}$.

Ângulos alternos externos



GUILHERME CASAGRANDI

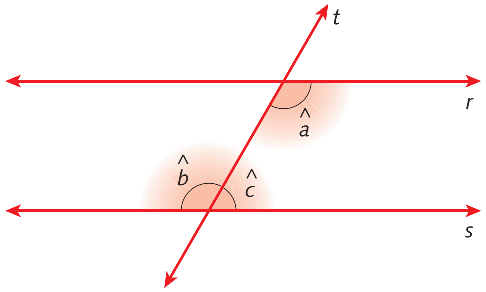
Sendo $r /\!/ s$, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos correspondentes.
- $\hat{c} \cong \hat{b}$, pois são ângulos o.p.v.

Logo, podemos afirmar que $\hat{c} \cong \hat{a}$.

Duas retas paralelas, interceptadas por uma transversal, determinam ângulos alternos (internos ou externos) que são congruentes.

Ângulos colaterais internos



GUILHERME CASAGRANDI

TIAGO SILVA

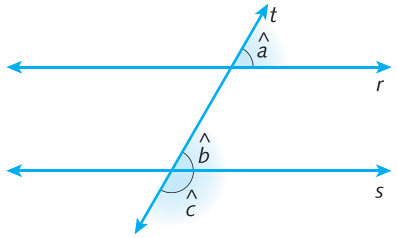
Sendo $r /\!/ s$, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos alternos internos.
- $\text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) = 180°$, pois são ângulos adjacentes suplementares.

Logo, podemos afirmar que $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{c}) = 180°$.

Ângulos colaterais externos

GUILHERME CASAGRANDI



Sendo $r \parallel s$, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos correspondentes.
- $\text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) = 180°$, pois são ângulos adjacentes suplementares.

Logo, podemos afirmar que $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{c}) = 180°$.

Duas retas paralelas, interceptadas por uma transversal, determinam ângulos colaterais (internos ou externos) que são suplementares.

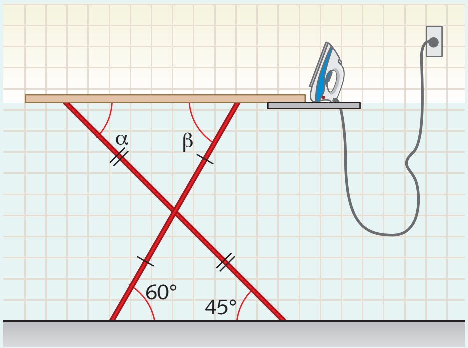
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Uma tábua de passar foi colocada sobre um piso horizontal. A tábua fica paralela ao plano do chão. Determine α e β.

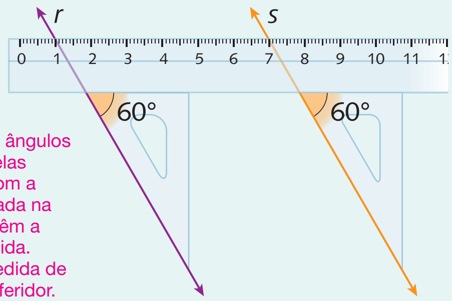
$\alpha = 45°$
$\beta = 60°$

GUILHERME CASAGRANDI



2 Podemos afirmar que as retas *r* e *s* são paralelas? Por quê?

GUILHERME CASAGRANDI

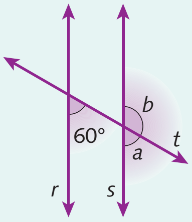


Sim, pois os ângulos formados pelas retas *r* e *s* com a régua colocada na transversal têm a mesma medida. Confira a medida de 60° no transferidor.

3 Sendo $r \parallel s$, determine *a* e *b*, em grau.

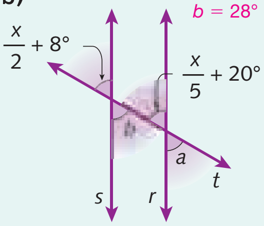
a)

$a = 60°$
$b = 120°$



b)

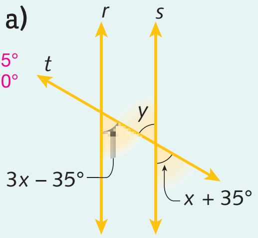
$a = 28°$
$b = 28°$



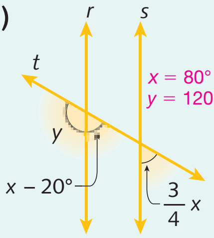
4 Sendo $r \parallel s$, determine *x* e *y*, em grau.

a)

$x = 35°$
$y = 70°$

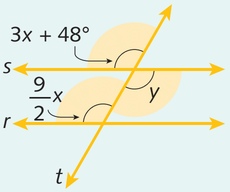


c)



$x = 80°$
$y = 120°$

b)



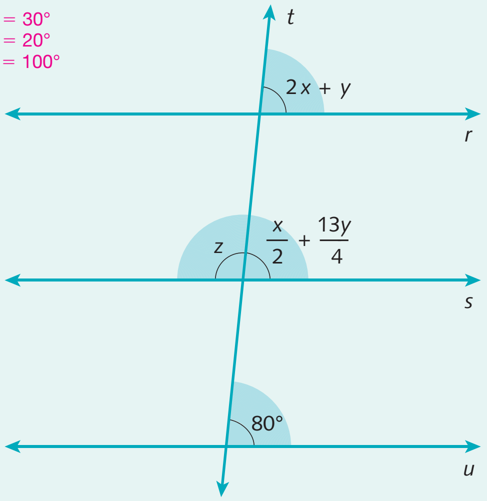
$x = 32°$
$y = 144°$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

5 Sendo $r \parallel s \parallel u$, determine x, y e z, em grau.

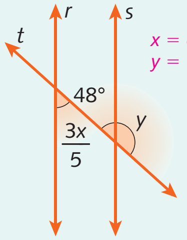
$x = 30°$
$y = 20°$
$z = 100°$



6 Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, formam dois ângulos correspondentes que medem, em grau, $2x + 30°$ e $3x - 20°$. Determine a medida desses ângulos. 130° e 130°

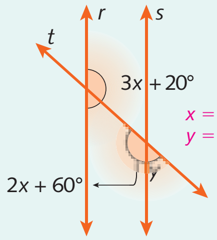
7 Sendo $r \parallel s$, determine x e y, em grau.

a)



$x = 80°$
$y = 132°$

b)



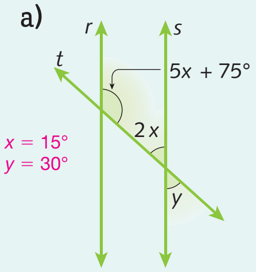
$x = 40°$
$y = 40°$

8 Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos alternos internos cujas medidas são $4x$ e $\frac{2x}{3} + 60°$. Determine x, em grau. 18°

9 Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, formam dois ângulos colaterais internos de medidas expressas, em grau, por $15x + 5°$ e $10x - 25°$. Determine x. 8°

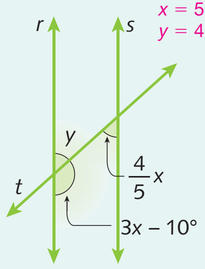
10 Sendo $r \parallel s$, determine x e y.

a)



$x = 15°$
$y = 30°$

b)

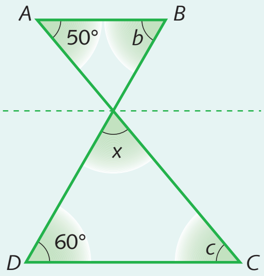


$x = 50°$
$y = 40°$

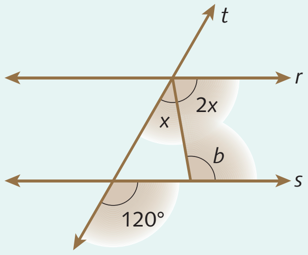
11 Duas retas paralelas são cortadas por uma terceira, de modo que as medidas de dois ângulos colaterais internos são dadas, em grau, pelas expressões $A = (10x + 20°)$ e $B = (6x - 20°)$. Calcule B, em grau. 47°30'

12 Na figura, sendo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, determine as medidas b, c e x, em grau.

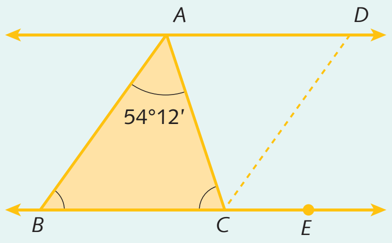
$b = 60°$
$c = 50°$
$x = 70°$



13 Na figura, sendo $r \parallel s$, determine o valor de b, em grau. $b = 100°$



14 Calcule a medida do ângulo $A\hat{B}C$ na figura, sabendo que $\overrightarrow{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}E$ e que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. 54°12'



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Anamorfose: uma perspectiva diferente

Criar imagens distorcidas que parecem reais sob determinados ângulos é uma representação chamada anamorfose. Produzidas há séculos por artistas como o italiano Leonardo da Vinci (1452-1519), as imagens anamórficas produzem impressionantes ilusões de ópticas e estão presentes em galerias de arte, na sinalização de trânsito, na publicidade, entre outras aplicações modernas.

A anamorfose do dia a dia

Representações com anamorfoses oblíquas são bastante usadas em anúncios publicitários expostos em campos de futebol. Colocadas geralmente no chão, próximas ao gol, elas são projetadas para representar objetos tridimensionais ao serem focalizadas pelas câmeras de TV. Além disso, essas representações são empregadas em sinalizações de trânsito, aplicadas no pavimento das ruas, para facilitar sua visualização pelos motoristas.

EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Sinalização anamórfica aplicada no Parque das Nações Indígenas, na cidade de Campo Grande (MS), 2012.

1

A arte anamórfica brinca com as regras do desenho de perspectiva, a técnica de desenhar as proporções e as distâncias dos objetos em relação a um ponto de vista.

FOTOS: SÉRGIO DOTTA

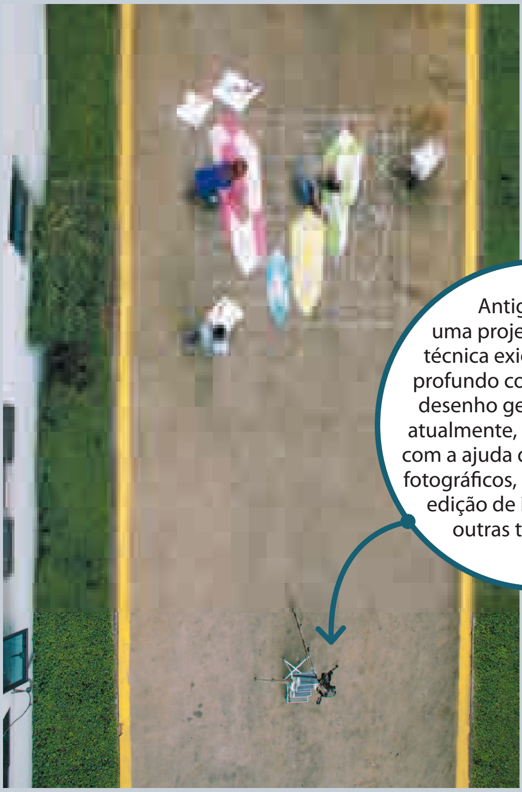
Nas artes visuais, o ponto de vista (PV) é o lugar de onde se vê algo. Observe a posição da câmera nesta foto; por meio dela, obteve-se a perspectiva registrada na foto abaixo.

2

Uma foto só tem duas dimensões, a horizontal e a vertical, mas com "dicas" visuais, como o tamanho aparentemente menor das coisas mais afastadas do PV, o cérebro produz a percepção de profundidade.

3

Para criar o efeito da anamorfose, desenhamos a imagem desejada, distorcendo-a geometricamente de modo que suas dimensões aumentem conforme aumenta a distância do PV.



Antigamente, uma projeção com essa técnica exigia dos artistas profundo conhecimento de desenho geométrico, mas, atualmente, podemos contar com a ajuda de equipamentos fotográficos, de programas de edição de imagem, entre outras tecnologias.

4

A distância, a altura e o ângulo do olhar do observador em relação ao plano do desenho são determinantes para que a distorção seja corretamente compensada.

5

Ao observar o desenho por cima, vemos que ele tem aparência disforme.

6

Do PV adequado, a anamorfose oblíqua embaralha a percepção de distâncias e a imagem parece saltar da superfície. A ilusão é mais intensa quando vista com um olho só ou por meio de uma câmera.

FOTOS: SÉRGIO DOTTA

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Reescreva as frases a seguir, substituindo cada ■ por uma das palavras do quadro abaixo:

congruentes	bissetriz	opostos pelo vértice	complementares	suplementares

a) Dois ângulos são ■ quando a soma de suas medidas é igual a 90°. complementares

b) Dois ângulos são ■ quando têm a mesma medida. congruentes

c) A ■ de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo com origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes. bissetriz

d) Dois ângulos são ■ quando a soma de suas medidas é igual a 180°. suplementares

e) Dois ângulos são ■ quando os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro. opostos pelo vértice

2 Retas concorrentes podem não ser perpendiculares?
Sim, apenas as retas concorrentes que se interceptam formando ângulos retos são perpendiculares.

3 É possível construir duas retas perpendiculares entre si com o uso de esquadros ou com o uso de régua e compasso. Escolha os instrumentos que preferir e desenhe em seu caderno as retas *u* e *v*, perpendiculares entre si. Depois, trace bissetrizes com o uso de um compasso e obtenha um ângulo de 22°30'. Após construir as retas perpendiculares, o aluno deve escolher um dos ângulos de 90° e traçar uma bissetriz desse ângulo, obtendo dois ângulos de 45°. Finalmente, o aluno deve traçar a bissetriz de um dos ângulos de 45°, obtendo dois ângulos de 22°30'.

Aplicando

1 Identifique as sentenças verdadeiras. alternativas **a** e **d**

a) Dois segmentos que têm a mesma reta suporte são colineares.

b) Se dois segmentos são colineares, também são consecutivos.

c) Dois pontos distintos determinam infinitas retas.

d) Por um ponto dado no plano passam infinitas retas.

2 Em uma reta, tomamos os pontos *A*, *B* e *C*, nessa ordem, com $AB = 8$ cm e $BC = 10$ cm. Sendo *P* o ponto médio de $\overline{AC}$, quanto mede $\overline{BP}$? 1 cm

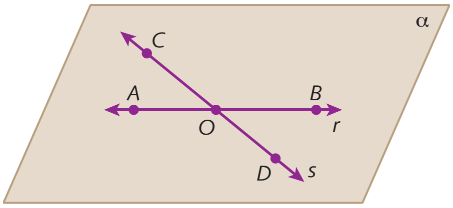
3 Sobre uma reta, marque os pontos *A*, *B* e *C*, nessa ordem, tais que $AB = 8$ cm e $BC = 12$ cm. Depois, responda:

a) Quanto mede o segmento $\overline{AC}$? 20 cm

b) Se *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$ e *N* é o ponto médio de $\overline{BC}$, calcule a medida do segmento $\overline{MN}$. 10 cm

4 Se $\overline{MA}$ e $\overline{BT}$ são congruentes e $BT = 9$ cm, qual é a medida do segmento $\overline{MA}$? 9 cm

5 Observe a figura abaixo e identifique as sentenças verdadeiras. alternativas **a**, **c**, **d**, **f** e **h**



GUILHERME CASAGRANDI

a) $\overrightarrow{OD}$ é uma semirreta.

b) $\overline{AO}$ e $\overline{CD}$ são segmentos colineares.

c) $\overleftrightarrow{AB}$ é uma reta.

d) $\overline{DO}$ é um segmento de reta.

e) *A*, *O* e *D* são pontos colineares.

f) $\overline{CO}$ e $\overline{OB}$ são segmentos consecutivos.

g) $\overline{AO}$ e $\overline{OD}$ são segmentos colineares.

h) $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

6 Um ângulo mede x graus. Escreva uma expressão algébrica que representa cada valor a seguir.

a) A medida do complemento de sua metade. $\left(90° - \frac{x}{2}\right)$

b) O triplo da medida do seu suplemento. $3 \cdot (180° - x)$

c) A quarta parte da medida do seu suplemento. $\left(\frac{180° - x}{4}\right)$

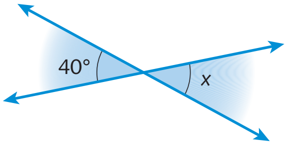
d) A medida do complemento do triplo do ângulo. $90° - 3x$

7 Determine a medida do complemento e a do suplemento do ângulo 68°46'24". 21°13'36"; 111°13'36"

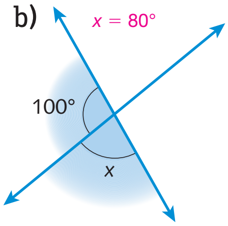
8 A medida de um ângulo excede a do seu complemento em 36°. Calcule a medida do ângulo. 63°

9 Em cada caso, determine a medida, em grau.

a) $x = 40°$

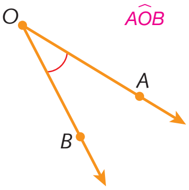


b) $x = 80°$

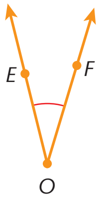


10 Determine, com o auxílio de um transferidor, os ângulos congruentes.

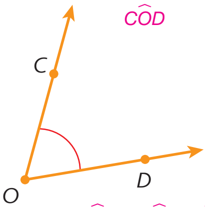
a) $\widehat{AOB}$



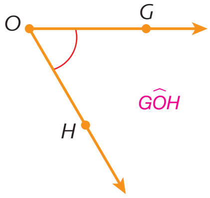
c) $\widehat{EOF}$



b) $\widehat{COD}$



d) $\widehat{GOH}$



congruentes: $\widehat{AOB}$ e $\widehat{EOF}$, $\widehat{COD}$ e $\widehat{GOH}$

11 A diferença entre as medidas de dois ângulos complementares é 10°. Quais são as medidas dos dois ângulos? 40° e 50°

12 Desenhe, em seu caderno, um triângulo qualquer. Em seguida, com o auxílio do compasso, determine as bissetrizes dos seus ângulos internos. O que você observou?
As bissetrizes encontram-se em um único ponto.

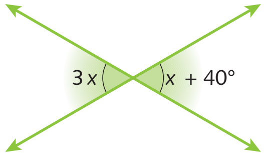
13 Observe as figuras abaixo e, com um transferidor, determine:

a) a medida do ângulo de inclinação da flecha em relação à horizontal; 40°

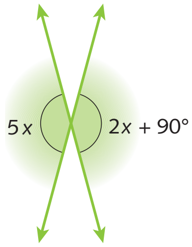
b) a medida do ângulo de visão indicado no teodolito. 25°

14 Calcule o valor de x, em grau, em cada figura abaixo.

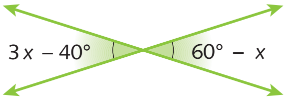
a) $x = 20°$



c) $x = 30°$

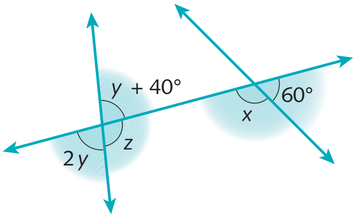


b) $x = 25°$



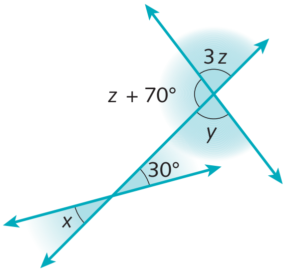
15 Em cada item, calcule os valores de x, y e z, em grau.

a)



$x = 120°$
$y = 40°$
$z = 100°$

b)

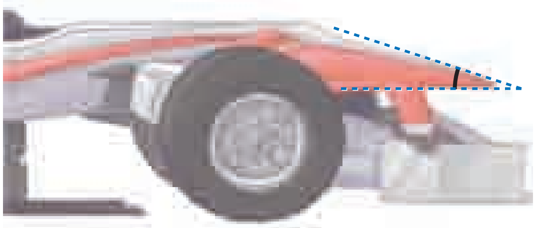


$x = 30°$
$y = 82{,}5°$
$z = 27{,}5°$

TIAGO SILVA

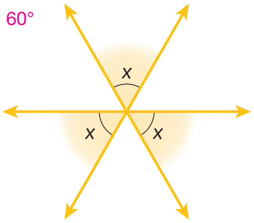
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

16 Com um transferidor, determine a medida do ângulo de inclinação do bico do carro de Fórmula 1 da ilustração. 18°

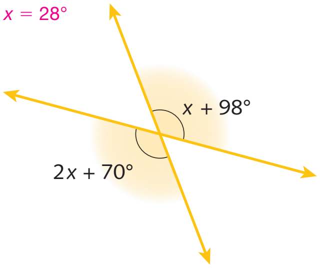


17 Calcule x, em grau, em cada item.

a) $x = 60°$



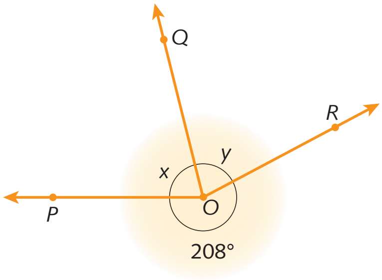
b) $x = 28°$



18 Determine a medida do complemento e do suplemento do ângulo de 37°12'34".

52°47'26"; 142°47'26"

19 Na figura, $\overrightarrow{OQ}$ é bissetriz de $P\widehat{O}R$. Calcule $\widehat{y}$, em grau. $y = 76°$



20 Um quarto da medida do suplemento de um ângulo, aumentado em 27°, é igual à medida do complemento do mesmo ângulo. Determine a medida desse ângulo. 24°

21 Qual é a medida do ângulo que, ao diminuir de sua medida a medida do seu complemento, temos como resultado a metade da medida do seu suplemento? 72°

22 Dois ângulos opostos pelo vértice medem, em grau, $4m - 20°$ e $3m + 10°$. Determine a soma das medidas desses ângulos. 200°

23 Determine um ângulo cuja medida é igual a $\frac{3}{2}$ da medida do seu suplemento. 108°

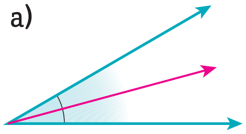
24 A medida de um ângulo corresponde à metade da medida do seu complemento. Qual é a medida do ângulo? 30°

25 Dois ângulos consecutivos são complementares. Determine a medida do ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos. 45°

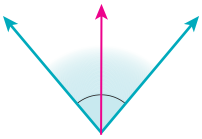
26 A medida de um ângulo é igual ao triplo da medida do suplemento do ângulo com o triplo da sua medida. Quanto mede o ângulo? 54°

27 Copie, no caderno, os ângulos abaixo e, com um compasso, desenhe sua bissetriz.

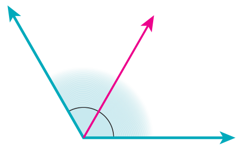
a)



c)



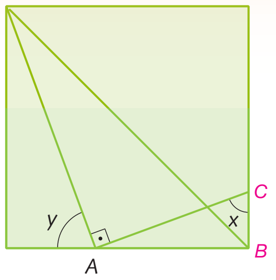
b)



28 As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de 38°. Um dos ângulos mede 41°. Quanto mede o outro? 35°

DESAFIO

Observe a figura.



A partir de um quadrado, construiu-se um ângulo reto em A. Mostre que os ângulos indicados por $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ possuem a mesma medida.

No triângulo retângulo ABC, temos:
$x + a + 90° = 180°$
$x + a = 90°$ (I)

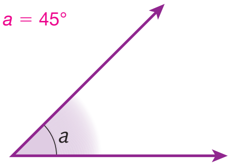
Ângulos com vértice no ponto A:
$y + a + 90° = 180°$
$y + a = 90°$ (II)
De (I) e (II) vem: $x + a = y + a$
$x = y$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

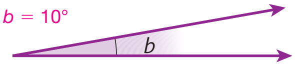
Lembre-se:
Não escreva no livro!

29 Usando um transferidor, determine a medida dos ângulos abaixo.

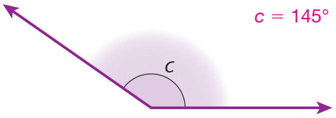
a) $a = 45°$



b) $b = 10°$

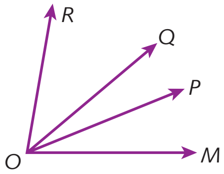


c) $c = 145°$



30 Dois ângulos adjacentes têm os lados exteriores contidos na mesma reta suporte. Um deles tem medida expressa, em grau, por $10x + 25°$, e o outro, por $5x + 35°$. Determine as medidas dos ângulos. 105° e 75°

31 Da figura, sabe-se que: med($M\widehat{O}R$) = 80°, med($M\widehat{O}P$) = 22° e $\overrightarrow{OQ}$ é a bissetriz de $M\widehat{O}R$. Determine a medida de $P\widehat{O}Q$. 18°

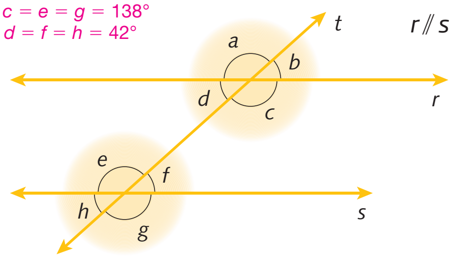


32 O triplo da medida do complemento de um ângulo é igual à terça parte da medida do seu suplemento. Quanto mede o ângulo? 78°45'

33 A medida do complemento do suplemento de um ângulo é igual a 32°50'. Quanto mede o ângulo? 122°50'

34 Sabendo que $a = 138°$, determine a medida de cada um dos ângulos apresentados na figura.

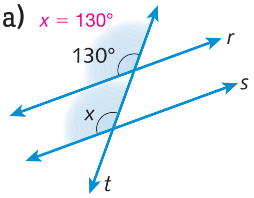
$a = c = e = g = 138°$
$b = d = f = h = 42°$



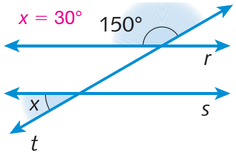
35 Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, formam ângulos colaterais externos tal que um deles mede $\frac{3}{5}$ do outro. Determine-os. 112°30' e 67°30'

36 Sendo $r \parallel s$, determine x, em grau.

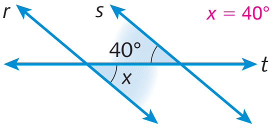
a) $x = 130°$



c) $x = 30°$

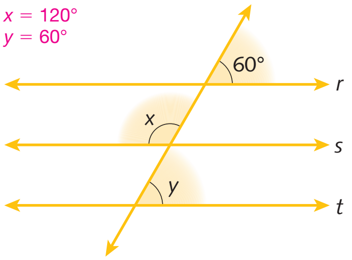


b) $x = 40°$

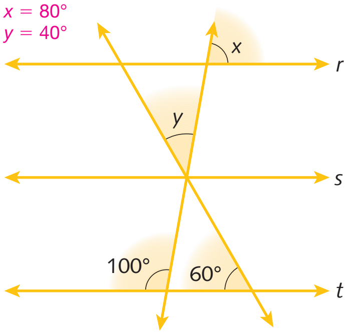


37 Sendo r, s e t retas paralelas, calcule as medidas dos ângulos $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$, em grau.

a) $x = 120°$
$y = 60°$



b) $x = 80°$
$y = 40°$



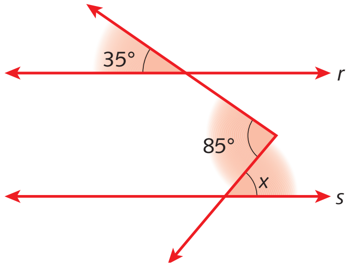
DESAFIO

Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando são 4 horas e 15 minutos? 37°30'

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

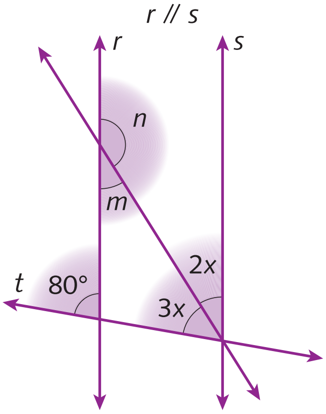
TIAGO SILVA

38 Na figura, sendo $r \parallel s$, quantos graus mede o ângulo $\widehat{x}$? $x = 50°$

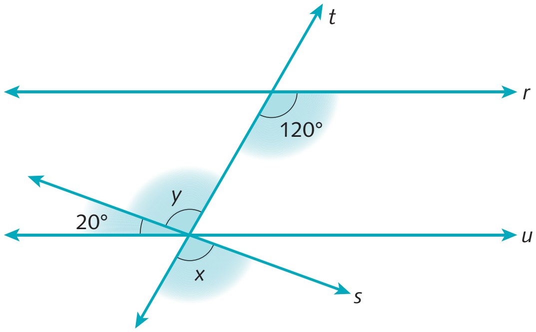


39 Determine m, n e x, em grau, na figura abaixo.

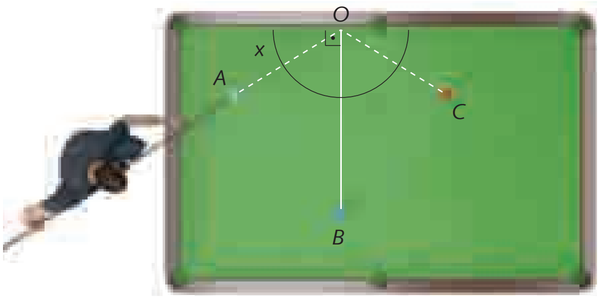
$x = 16°$
$m = 32°$
$n = 148°$



40 Considere as retas r, s, t e u, todas em um mesmo plano, com $r \parallel u$. Determine o valor de $2x + 3y$, em grau. 500°



41 Os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ da figura abaixo são congruentes.



Determine:

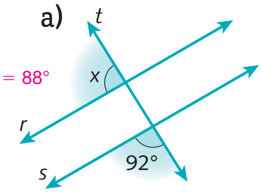
a) a expressão que representa a medida do ângulo $A\widehat{O}B$; $90° - x$

b) a expressão que representa a medida do ângulo $A\widehat{O}C$; $2 \cdot (90° - x) = 180° - 2x$

c) o valor de x, sabendo que a medida do ângulo $A\widehat{O}C$ é 140°. $x = 20°$

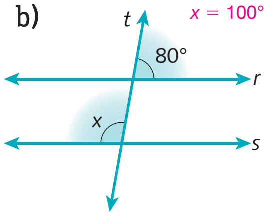
42 Sendo $r \parallel s$, determine x, em grau.

a)



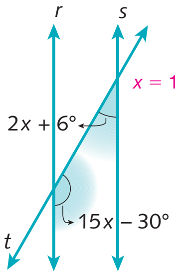
$x = 88°$

b)



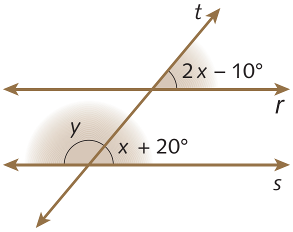
$x = 100°$

c)



$x = 12°$

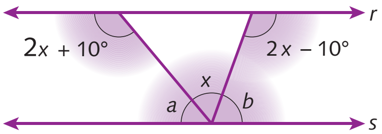
43 Na figura, sendo $r \parallel s$, qual é a medida do ângulo $\widehat{y}$, em grau? $y = 130°$



44 Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, formam ângulos alternos externos de medidas expressas por $10x + 5°$ e $89° + 2x$, respectivamente. Calcule a medida dos ângulos. 110°

45 Determine as medidas a, b e x, em grau, na figura, sendo $r \parallel s$.

$x = 60°$
$a = 50°$
$b = 70°$

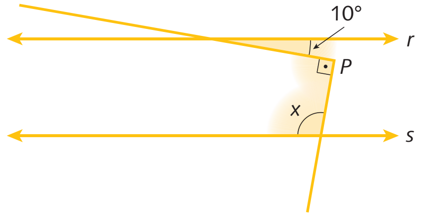


DESAFIO

Mostre que a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares é constante.
A medida do ângulo é sempre igual a 90°.

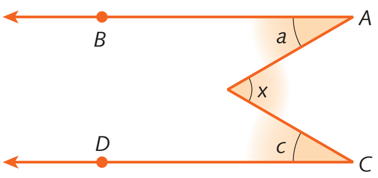
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

46 Na figura, $r \parallel s$. Determine a medida x, em grau. $x = 100°$



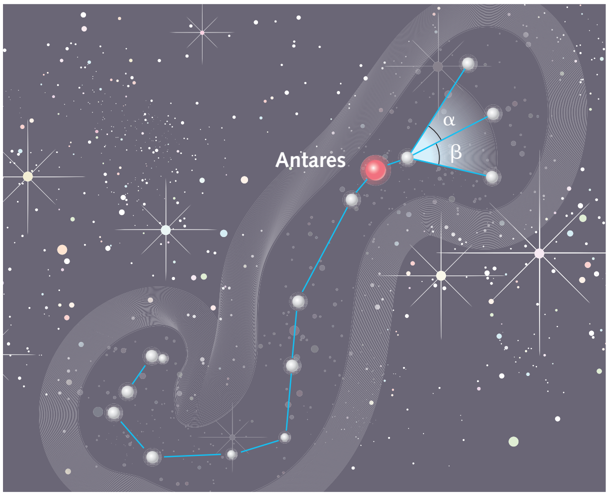
47 Na figura, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são paralelas. Determine x em função de a e c.

$x = a + c$



48 De todas as constelações, Escorpião é uma das que mais se destacam por sua extensão. Antares – estrela de primeira grandeza de cor avermelhada – é a principal estrela dessa constelação.

Constelação de Escorpião

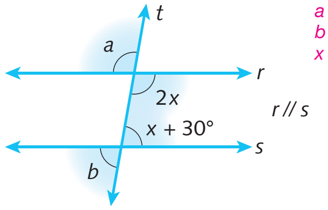


Quanto medem, em grau, os ângulos $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$? (Utilize um transferidor.)

$\alpha = 30°$
$\beta = 40°$

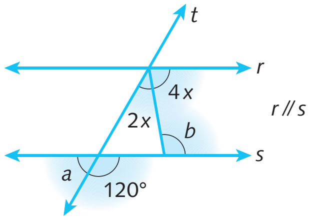
49 Determine os valores de a, b e x, em grau, em cada uma das figuras abaixo.

a)



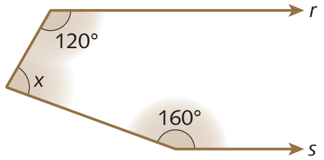
$a = 100°$
$b = 80°$
$x = 50°$

b)

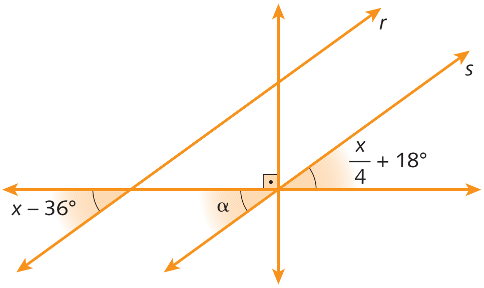


$a = 60°$
$x = 20°$
$b = 100°$

50 Sendo r e s paralelas, determine o valor de x, em grau. $x = 80°$



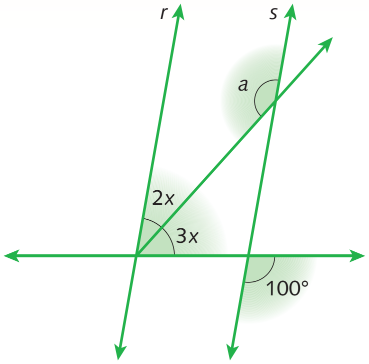
51 Na figura, sendo $r \parallel s$, determine a medida de $\hat{a}$, em grau. 36°



52 Duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal. A soma das medidas de todos os ângulos obtusos formados por essas retas é igual a 468°. Quanto mede cada ângulo agudo, em grau? 63°

DESAFIO

Na figura, sendo $r \parallel s$, determine, em grau, a medida de $\hat{a}$. 148°



GUILHERME CASAGRANDI

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO

6

POLÍGONOS E SIMETRIA

JONAS LINDSTRÖM/TRÄULLIT DEKOR

Peças coloridas utilizadas como revestimento de parede.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Um estúdio sueco criou um novo tipo de revestimento de parede que absorve ruídos. É feito de sobras de madeira, cimento e água. Observe atentamente a fotografia e responda:

- As peças desse revestimento têm forma de qual figura geométrica?

Hexágono. Comente com os alunos que nos hexágonos regulares os lados são congruentes e os ângulos internos medem 120°, que é divisor de 360°, o que permite que se encaixem perfeitamente. Por esse motivo, a forma hexagonal é muito utilizada no revestimento de pisos e paredes.

- Há peças com outras formas que são usadas em revestimentos de pisos e paredes porque se encaixam perfeitamente. Dê alguns exemplos dessas formas.

forma de quadrado, forma de retângulo, forma de triângulo equilátero.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

A palavra **polígono** vem da palavra grega *polygónón*, em que *poli* significa "vários" e *gonos* quer dizer "ângulos".

Observe a foto abaixo.

TISCHENKO IRINA/SHUTTERSTOCK

Em uma colmeia, a abelha rainha deposita um ovo em cada alvéolo – local onde todo o desenvolvimento ocorre, até o surgimento de uma abelha adulta. O alvéolo também é utilizado pelas abelhas como depósito de alimento (mel e pólen).

Esse formato dos alvéolos permite que uns se encaixem perfeitamente aos outros e que as abelhas possam usar a menor quantidade possível de cera para construir o favo.

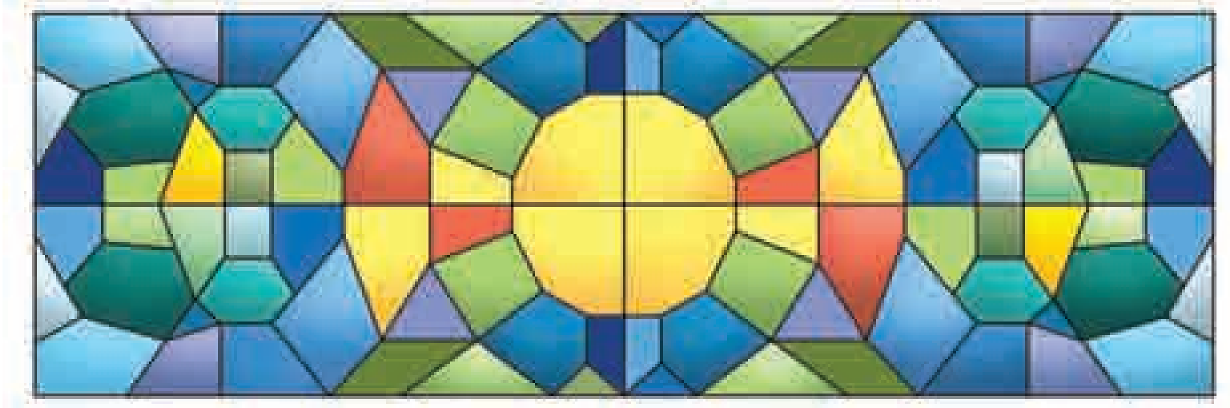
Responda às questões.

- Podemos dizer que a entrada da cavidade de um alvéolo tem a forma de que tipo de polígono? hexágono
- Quantos lados e quantos ângulos internos tem esse polígono? seis lados e seis ângulos internos
- Quantas diagonais tem esse polígono? 9 diagonais

Neste capítulo, vamos ampliar o estudo das figuras geométricas planas, dando atenção especial aos ângulos e às diagonais dos polígonos. Também estudaremos dois tipos de simetria.

1 Polígonos

O vitral ilustrado abaixo é composto por diversas peças coloridas com forma de figuras geométricas. Observe que o contorno de cada uma dessas figuras é definido apenas por segmentos de retas que formam uma linha poligonal fechada e simples.



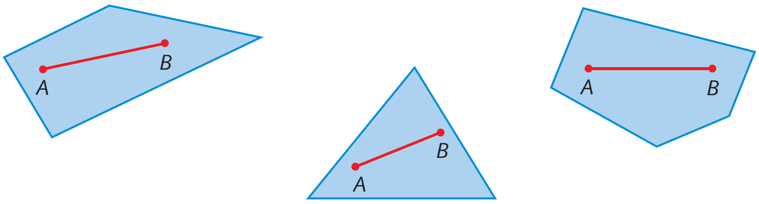
GEORGE TUTUMI

Uma linha poligonal fechada simples com sua região interna determina uma figura geométrica plana chamada **polígono**. Nesse vitral, todas as peças têm a forma de um polígono.

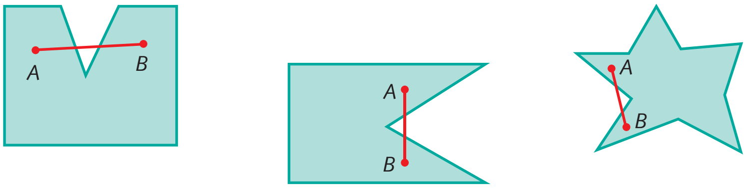
Polígono convexo e polígono não convexo

Um polígono pode ser classificado como convexo ou não convexo:

- Se unirmos dois pontos quaisquer da região interna de um polígono e obtivermos um segmento integralmente contido nessa região, o polígono será **convexo**. Veja alguns exemplos:



- Caso contrário, o polígono será **não convexo**. Por exemplo:



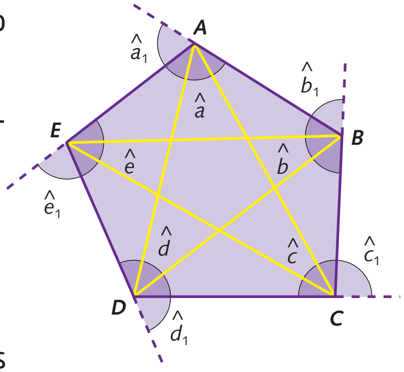
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Observação

Quando não houver especificação do tipo, o polígono considerado é convexo.

Elementos de um polígono

Podemos identificar os seguintes elementos no polígono *ABCDE* ao lado:



- **lados** – segmentos de reta que formam o contorno do polígono;

  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$

- **vértices** – pontos de encontro de dois lados consecutivos;

  A, B, C, D, E

- **diagonais** – segmentos de reta que unem dois vértices não consecutivos;

  $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$

- **ângulos internos** – ângulos formados por dois lados consecutivos;

  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}$

  Durante a obra, vamos observar que *a*, *b*, *c*, *d* e *e* correspondem às medidas dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, e $\hat{e}$.

- **ângulos externos** – ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado consecutivo a ele.

  $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{e}_1$

Classificação dos polígonos

Um polígono é classificado de acordo com o número de lados, que é igual ao número de ângulos internos. Observe o nome de alguns polígonos:

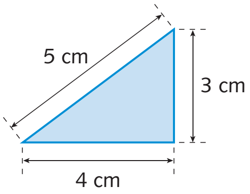
Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Perímetro de um polígono

Perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados.

Exemplo

GUILHERME CASAGRANDI



Perímetro: 3 + 4 + 5

Perímetro: 12

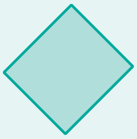
O perímetro do triângulo é 12 cm.

ATIVIDADES

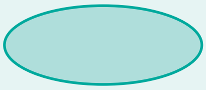
Faça as atividades no caderno.

1 Entre as figuras abaixo, determine as que são polígonos. alternativas **a**, **e**

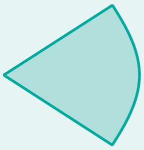
a)



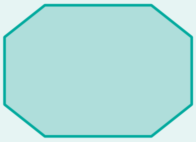
d)



b)

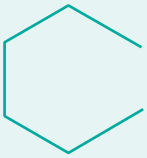


e)



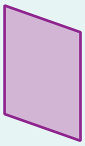
c)

f)



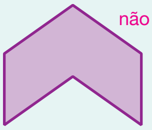
2 Classifique cada polígono em convexo ou não convexo.

a)



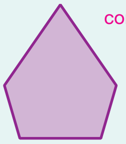
convexo

c)



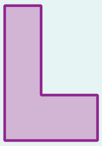
não convexo

b)



convexo

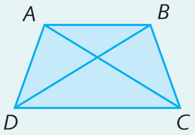
d)



não convexo

3 Nas figuras a seguir, nomeie o polígono e represente seus lados, seus vértices e suas diagonais.

a)



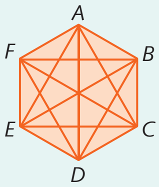
quadrilátero *ABCD*

lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$

vértices: *A*, *B*, *C*, *D*

diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$

b)



hexágono *ABCDEF*

lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$

vértices: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*

diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

4 Use uma régua e construa, em seu caderno, estes polígonos: Construção de figura.

a) pentágono *ABCDE*;

b) octógono *ABCDEFGH*;

c) quadrilátero *ABCD*.

5 Determine o perímetro de um hexágono regular cujos lados medem 12 cm. 72 cm

6 Responda às questões sobre um eneágono.

a) Quantos são seus ângulos internos? 9

b) Quantos são seus vértices? 9

7 O ângulo formado por dois lados consecutivos de um octógono mede 135°. Qual é a soma de todos os ângulos internos desse octógono, sendo todos eles congruentes?

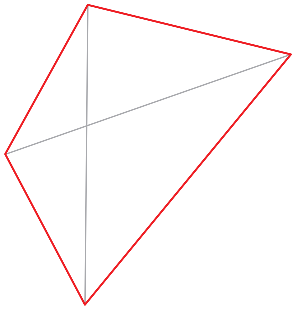
1 080°

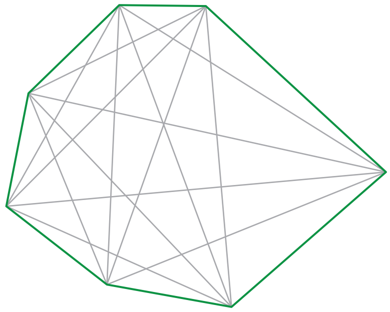
2 Diagonais de um polígono

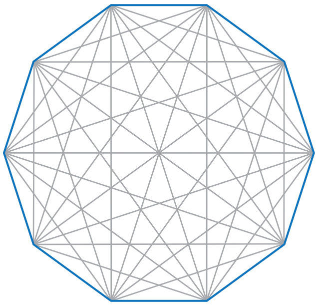
O número de diagonais de um polígono varia de acordo com o número de lados que ele possui.

Exemplos

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO


Um quadrilátero tem 2 diagonais.


Um heptágono tem 14 diagonais.

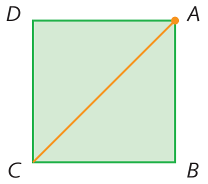

Um decágono tem 35 diagonais.

Analise os exemplos acima e verifique que o número de diagonais que partem de um único vértice não é o mesmo em cada caso:

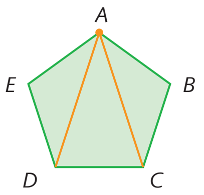
- quadrilátero: 1 diagonal em cada vértice;
- heptágono: 4 diagonais em cada vértice;
- decágono: 7 diagonais em cada vértice.

Podemos notar que o número de diagonais traçadas a partir de um único vértice é três unidades menor que o número de lados. Veja o número de diagonais que partem do vértice *A* em cada caso:

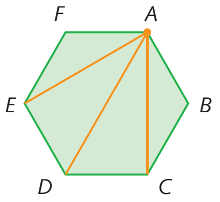
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI



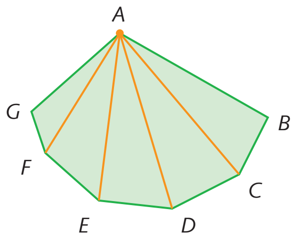
quatro lados
4 − 3 = **1**
uma diagonal



cinco lados
5 − 3 = **2**
duas diagonais



seis lados
6 − 3 = **3**
três diagonais



sete lados
7 − 3 = **4**
quatro diagonais

Assim, se um polígono tem *n* lados, podemos traçar ($n - 3$) diagonais partindo de cada vértice.

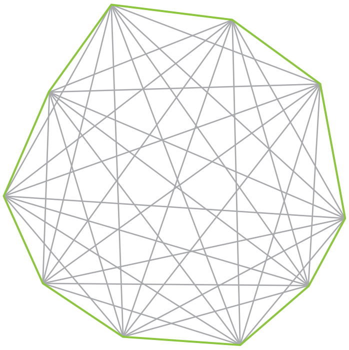
Como o polígono possui *n* vértices, podemos traçar $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Entretando, esse total resulta no dobro de diagonais, pois não está sendo considerado, por exemplo, que $\overline{AD}$ e $\overline{DA}$ são diagonais coincidentes em um polígono.

Logo, para determinar o número de diagonais (*d*) de um polígono de *n* lados, podemos utilizar a fórmula:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Exemplos


LUIZ RUBIO

- Determinar o número de diagonais de um decágono.

$n = 10$

$$d = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2} = 35$$

Logo, o decágono possui 35 diagonais.

- Determinar o polígono cujo número de diagonais é igual ao número de lados.

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$n^2 - 3n = 2n$$

$$n^2 = 5n$$

Como n representa o número de lados de um polígono, podemos considerar que $n \neq 0$. Logo, é possível dividir os dois membros por n. Assim:

$$\frac{n^2}{n} = \frac{5n}{n}$$

$n = 5$

Portanto, o polígono é o pentágono.

- Determinar o polígono que não possui diagonais.

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$0 = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$0 = n^2 - 3n$$

$$n^2 = 3n$$

Como n representa o número de lados de um polígono, podemos considerar que $n \neq 0$. Logo, é possível dividir os dois membros por n. Assim:

$$\frac{n^2}{n} = \frac{3n}{n}$$

$n = 3$

Portanto, o polígono que não possui diagonais é o triângulo.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o número de diagonais de um polígono de:

a) 5 lados; 5 diagonais

b) 9 lados; 27 diagonais

c) 15 lados; 90 diagonais

d) 20 lados. 170 diagonais

2 Quantas diagonais tem o dodecágono? 54 diagonais

3 Em um polígono, o número de diagonais é igual ao quádruplo do número de lados. Quantos lados tem o polígono? 11 lados

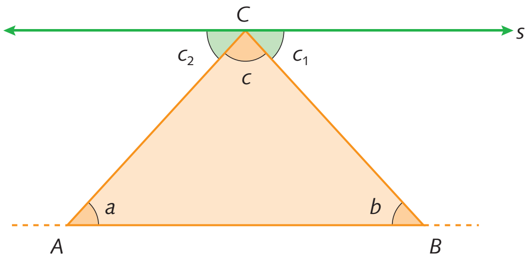
3 Ângulos internos e ângulos externos de um polígono

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono

Observe o triângulo *ABC*, cujos ângulos internos medem a, b e c.

Traçamos uma reta s, paralela à reta suporte do lado $\overline{AB}$, passando pelo vértice C.

GUILHERME CASAGRANDI



Nessa figura, podemos notar que:

(I) $c_1 = b$ ⟵ os ângulos são alternos internos

(II) $c_2 = a$ ⟵ os ângulos são alternos internos

(III) $c_2 + c_1 + c = 180°$

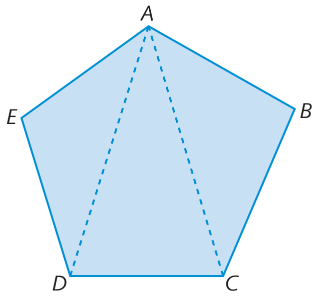
Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos: $a + b + c = 180°$

Então:

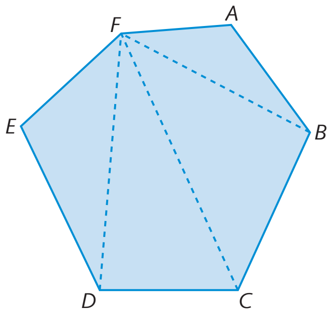
A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.

Agora, observe as figuras abaixo, em que cada polígono foi decomposto em triângulos a partir das diagonais que partem de um vértice.

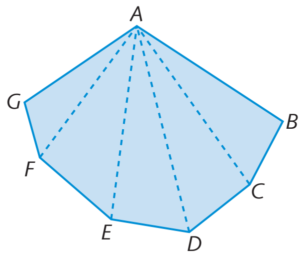
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI



O polígono de 5 lados ficou decomposto em 3 triângulos.



O polígono de 6 lados ficou decomposto em 4 triângulos.



O polígono de 7 lados ficou decomposto em 5 triângulos.

Note que o número de triângulos é duas unidades menor que o número de lados.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, podemos afirmar que a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados corresponde a:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Exemplos

- Determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono.

$n = 6$

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$S_i = (6 - 2) \cdot 180°$

$S_i = 4 \cdot 180°$

$S_i = 720°$

Logo, a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é 720°.

- A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 900°. Qual é esse polígono?

$S_i = 900°$

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$(n - 2) \cdot 180° = 900°$

$(n - 2) = \dfrac{900°}{180°}$

$n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7$

Logo, o polígono é um heptágono.

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

Verifique que cada ângulo interno e o seu externo correspondente são adjacentes suplementares.

Logo:

$a + a_1 = 180°$

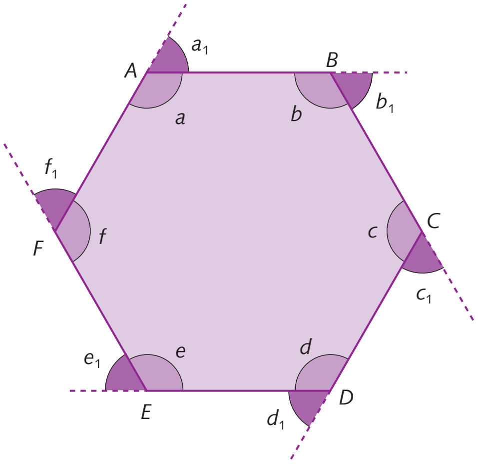
$b + b_1 = 180°$

$c + c_1 = 180°$

$d + d_1 = 180°$

$e + e_1 = 180°$

$f + f_1 = 180°$



GUILHERME CASAGRANDI

Efetuando a adição de todos os ângulos, temos:

$$\underbrace{a + b + c + d + e + f}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos } (S_i)} + \underbrace{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1}_{\text{soma das medidas dos ângulos externos } (S_e)} = \underbrace{6}_{\text{número de lados}} \cdot 180°$$

$$\underbrace{S_i}_{S_i = (n - 2) \cdot 180°,\ \text{e}\ n = 6} + S_e = 1080°$$

$(6 - 2) \cdot 180° + S_e = 1080°$

$4 \cdot 180° + S_e = 1080°$

$720° + S_e = 1080°$

$S_e = 1080° - 720°$

$S_e = 360°$

Logo, a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono é 360°.

De maneira geral, temos:

$$S_i + S_e = n \cdot 180°$$
$$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$$
$$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180°$$
$$S_e = \cancel{n \cdot 180°} - \cancel{n \cdot 180°} + 360°$$

$$\boxed{S_e = 360°}$$

GEORGE TUTUMI

Assim:

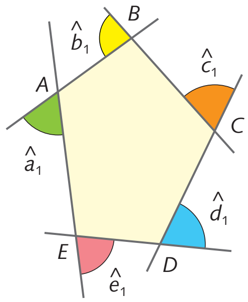
> Em qualquer polígono, a soma das medidas dos ângulos externos é 360°.

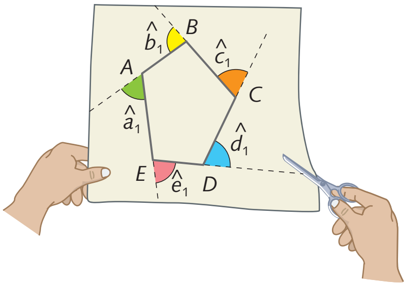
Lendo e aprendendo

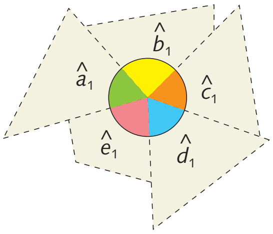
Soma das medidas dos ângulos externos

Em uma folha de papel, desenhe um polígono *ABCDE* e indique seus ângulos externos $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$ e $\hat{e}_1$.

Em seguida, recorte cada um dos ângulos e junte-os em torno de um dos vértices, de modo que se tornem adjacentes dois a dois.







Verifique que a soma das **medidas dos seus ângulos externos** é 360°.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Medida do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular

Um **polígono regular** possui lados e ângulos congruentes entre si.

Assim, em um polígono regular de *n* lados, representando a medida do ângulo interno por a_i e a medida do ângulo externo por a_e, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ ou } a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

$$a_e = \frac{S_e}{n} \text{ ou } a_e = \frac{360°}{n}$$

Exemplos

- Determinar a medida do ângulo interno e a do ângulo externo do decágono regular.

$$a_i = \frac{S_i}{n}$$

$$a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

$$a_i = \frac{(10 - 2) \cdot 180°}{10} = 144°$$

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{10} = 36°$$

Logo, a medida do ângulo interno é 144°, e a medida do ângulo externo é 36°.

- Determinar quantos lados tem um polígono regular cujo ângulo interno mede 108°.

$$a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

$$108° = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

$$108° \cdot n = 180° \cdot n - 360°$$

$$-72° \cdot n = -360°$$

$$72° \cdot n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{72°} = 5$$

Logo, o polígono tem 5 lados.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos abaixo.

a) Quadrilátero 360°

b) Eneágono 1 260°

c) Undecágono 1 620°

d) Icoságono 3 240°

2 Indique o nome dos polígonos cuja soma das medidas dos ângulos internos é:

a) 1080° octógono

b) 1980° polígono de 13 lados

c) 2340° pentadecágono

d) 1800° dodecágono

3 Determine as medidas dos ângulos internos e externos dos polígonos abaixo.

a) Quadrilátero regular $a_i = 90°$; $a_e = 90°$

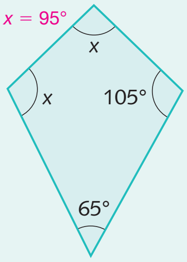
b) Octógono regular $a_i = 135°$; $a_e = 45°$

c) Eneágono regular $a_i = 140°$; $a_e = 40°$

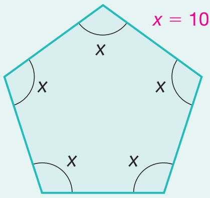
d) Icoságono regular $a_i = 162°$; $a_e = 18°$

4 Em cada caso, calcule o valor de x, em grau.

a) $x = 95°$



b) $x = 108°$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

5 Determine o polígono que tem as medidas dos ângulos internos e as medidas dos ângulos externos iguais. retângulo

6 Em um polígono regular, a medida do ângulo externo é 40°. Quantos lados tem o polígono? 9 lados

7 Em um polígono regular, $a_i - a_e = 60°$. Qual é esse polígono? hexágono

4 Simetria

Simetria axial

Reconhecemos a simetria **axial** pela presença de um eixo de simetria.

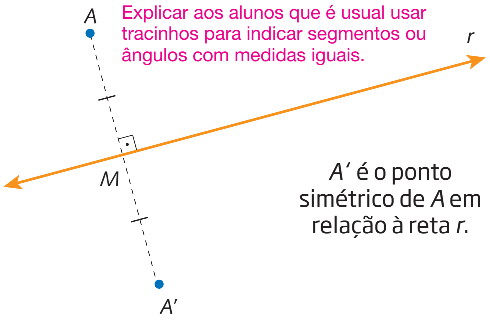
Vamos representar esse eixo pela reta *r*. Podemos determinar, em relação a esse eixo, a figura simétrica de um ponto, de um segmento de reta, de uma reta ou de uma figura plana qualquer.

Axial

Palavra derivada de *axis*, termo latino que significa “eixo”.

Simetria de um ponto

Dois pontos distintos *A* e *A′* são simétricos em relação a uma reta *r* se esta divide o segmento $\overline{AA'}$ perpendicularmente no seu ponto médio.



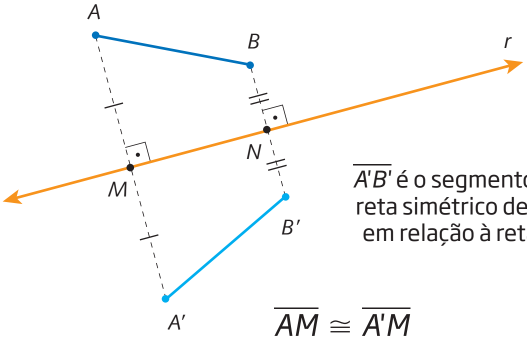
Explicar aos alunos que é usual usar tracinhos para indicar segmentos ou ângulos com medidas iguais.

A′ é o ponto simétrico de *A* em relação à reta *r*.

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$

Simetria de um segmento de reta

Na figura, note que os pontos *A′* e *B′* são, respectivamente, simétricos de *A* e *B*, em relação à reta *r*. Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são simétricos em relação à reta *r*.

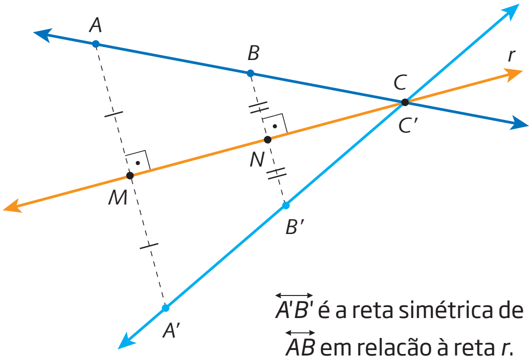


$\overline{A'B'}$ é o segmento de reta simétrico de $\overline{AB}$ em relação à reta *r*.

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$
$$\overline{BN} \cong \overline{B'N}$$

Simetria de uma reta

Os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados, assim como seus simétricos *A′*, *B′* e *C′* em relação à reta *r*.

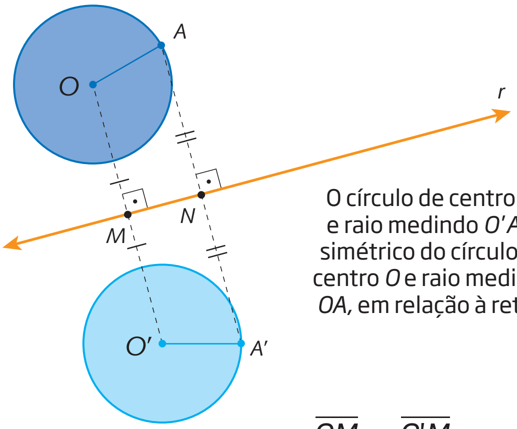


$\overleftrightarrow{A'B'}$ é a reta simétrica de $\overleftrightarrow{AB}$ em relação à reta *r*.

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$
$$\overline{BN} \cong \overline{B'N}$$

Simetria de um círculo

Os centros *O* e *O′* são simétricos em relação à reta *r*, e os círculos têm o mesmo raio.



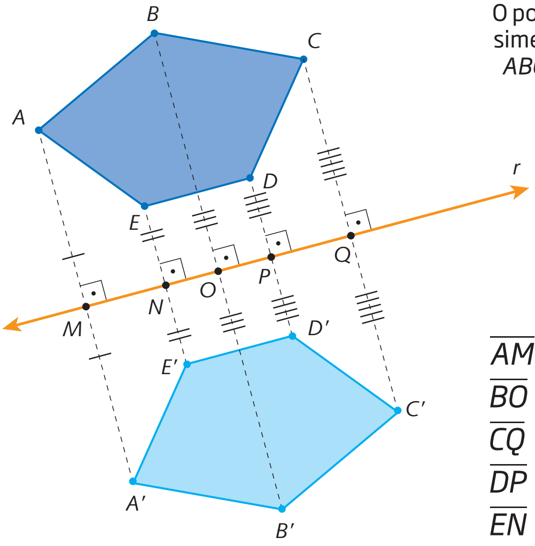
O círculo de centro *O′* e raio medindo *O′A′* é simétrico do círculo de centro *O* e raio medindo *OA*, em relação à reta *r*.

$$\overline{OM} \cong \overline{O'M}$$
$$\overline{AN} \cong \overline{A'N}$$
$$\overline{OA} \cong \overline{O'A'}$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Simetria de um polígono

Na figura, note que os pontos *A′*, *B′*, *C′*, *D′* e *E′* são, respectivamente, simétricos de *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, em relação à reta *r*. Dizemos que os polígonos *ABCDE* e *A′B′D′E′* são simétricos em relação à reta *r*.



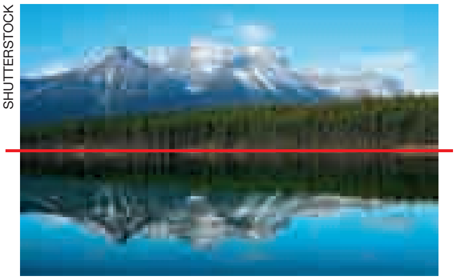
O polígono *A′B′C′D′E′* é simétrico do polígono *ABCDE* em relação à reta *r*.

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$
$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$
$$\overline{CQ} \cong \overline{C'Q}$$
$$\overline{DP} \cong \overline{D'P}$$
$$\overline{EN} \cong \overline{E'N}$$

Lendo e aprendendo

Uma imagem simétrica

Na foto abaixo, vemos o reflexo de uma paisagem na superfície de um lago. É possível identificar um eixo de simetria ou eixo de reflexão, pois a imagem refletida tem a mesma forma e o mesmo tamanho que a original, mas está invertida em relação a ela. Observe que, se essa foto fosse dobrada na linha do eixo de simetria, as partes correspondentes ficariam sobrepostas.

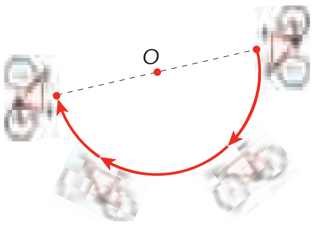


SERJIO74/
SHUTTERSTOCK

Simetria central

A simetria central é determinada em relação a um ponto denominado centro de simetria.

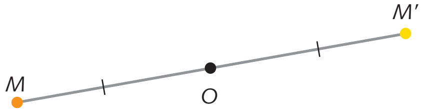
Duas figuras são simétricas em relação a um ponto quando, após um giro de meia-volta de uma delas em torno desse ponto, esta fica sobreposta à outra.



O ponto *O* é o centro de simetria.

Simetria de um ponto

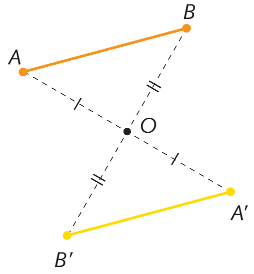
O simétrico de um ponto *M* em relação a um ponto *O* é o ponto *M'* tal que *O* é o ponto médio do segmento $\overline{MM'}$.



M' é simétrico de *M* em relação ao ponto *O*.

$$\overline{MO} \cong \overline{M'O}$$

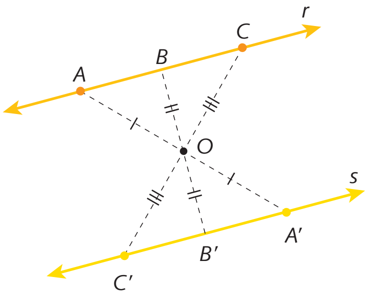
Simetria de um segmento de reta



$\overline{A'B'}$ é o segmento de reta simétrico de $\overline{AB}$ em relação ao ponto *O*.

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$
$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$

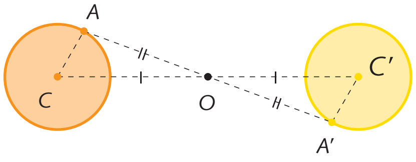
Simetria de uma reta



A reta *s* é simétrica da reta *r* em relação ao ponto *O*.

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$
$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$
$$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$$

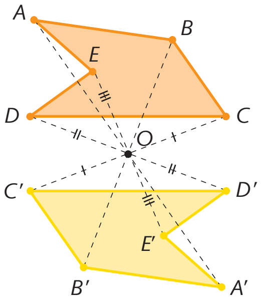
Simetria de um círculo



Os centros *C* e *C'* são simétricos em relação ao ponto *O*, e os círculos têm raio de mesma medida.

$$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$$
$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$

Simetria de um polígono



O polígono *A'B'C'D'E'* é simétrico do polígono *ABCDE* em relação ao ponto *O*.

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$
$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$
$$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$$
$$\overline{DO} \cong \overline{D'O}$$
$$\overline{EO} \cong \overline{E'O}$$

A simetria preserva a forma e o tamanho do polígono.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Os polígonos são figuras planas. Porém, no nosso cotidiano, podemos encontrar objetos que possuem vistas que lembram diversos polígonos, como a tela de um computador. Olhe ao seu redor, identifique e escreva em seu caderno cinco objetos cuja forma lembra figuras planas que vimos neste capítulo. Resposta pessoal.

2 A soma dos ângulos internos de um polígono está relacionada à sua decomposição em triângulos que possuem um mesmo vértice, conforme vimos na página 130. Copie em seu caderno os polígonos dessa página e os triângulos que foram indicados e pinte os ângulos internos de cada triângulo. Depois, observe bem o seu desenho e explique por que a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

3 Como você explicaria para um amigo que a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer é sempre 360°?

Resposta pessoal. O aluno pode recorrer à demonstração através da fórmula ou ao experimento com a folha de papel.

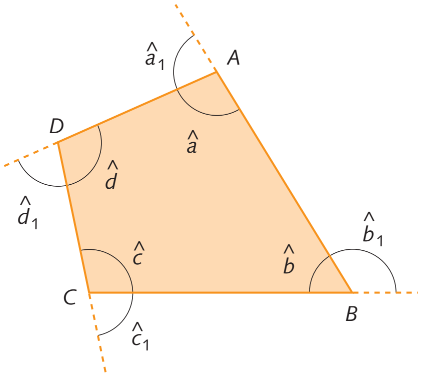
4 Você já deve ter observado a simetria axial em elementos da natureza. Observe algumas frutas, inteiras e partidas, flores, faces de animais e anote no seu caderno aquelas em que notar simetria. Resposta pessoal.

2. O número de triângulos formados na decomposição é duas unidades menor que o número de lados, pois do vértice escolhido não saem diagonais para os lados adjacentes. Ao pintar os ângulos internos de cada triângulo, é fácil perceber que todos os ângulos internos do polígono foram pintados. Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, multiplicamos o número de triângulos obtidos pela soma dos ângulos internos de cada um, pois assim teremos a soma de todos os ângulos internos do polígono.

Aplicando

1 Qual é o polígono que não tem diagonais? triângulo

2 Observe o polígono e, em seguida, identifique:



a) seus lados; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$

b) seus vértices; A, B, C, D

c) os ângulos internos; $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$

d) os ângulos externos; $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$

e) a soma das medidas dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{a}_1$; 180°

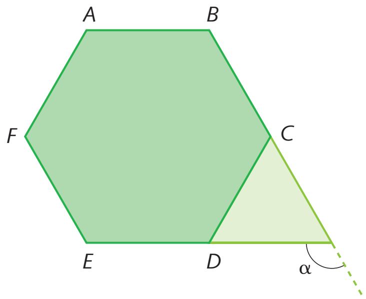
f) a soma das medidas dos ângulos $\hat{b}$ e $\hat{b}_1$. 180°

3 Determine o polígono no qual podemos traçar 12 diagonais a partir do mesmo vértice. pentadecágono

4 Calcule a medida do ângulo externo de um icoságono regular. 18°

5 Três polígonos convexos têm, respectivamente, n, $n + 1$ e $n + 2$ lados. A soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos é 2 700°. Calcule n. $n = 6$

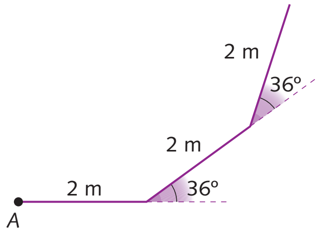
6 Determine a medida, em grau, do ângulo α, sabendo que $ABCDEF$ é um hexágono regular. $\alpha = 120°$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

7 A figura abaixo descreve o movimento de um robô.

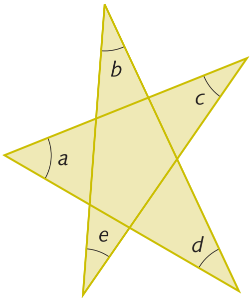


Partindo de A, ele sistematicamente avança 2 m e gira 36° para a esquerda, até retornar ao ponto A, fechando a trajetória. Responda às questões.

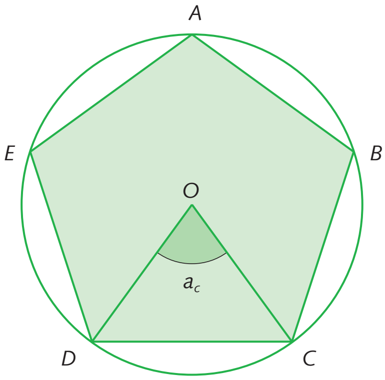
a) Qual é o polígono que essa trajetória limita? decágono regular

b) Quantos metros esse robô terá caminhado ao terminar a trajetória? 20 metros

8 Na figura, calcule a soma das medidas dos cinco ângulos indicados pelas letras $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$. 180°



9 Denominamos ângulo central de um polígono regular aquele cujo vértice é o centro da circunferência, que passa por todos os vértices do polígono, e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono. Observe a figura e responda: qual é a medida a_c do ângulo central $D\widehat{O}C$? 72°



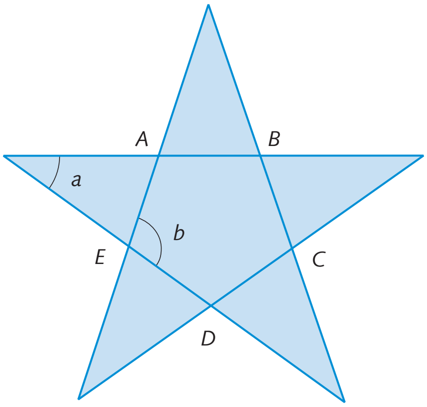
10 Determine a soma das medidas dos ângulos internos de um eneágono. 1 260°

11 Calcule quantas diagonais distintas podemos traçar no polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a 1 260°. 27 diagonais

12 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual à soma das medidas de 12 ângulos retos. Calcule n. $n = 8$

13 Qual é o polígono regular convexo em que a medida do ângulo interno é $\frac{7}{2}$ da medida do seu ângulo externo? eneágono

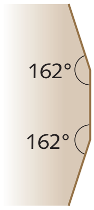
14 Na figura, $ABCDE$ é um pentágono regular. Determine a e b. $a = 36°$ $b = 108°$



15 Qual é o polígono convexo em que de cada vértice partem cinco diagonais? octógono

16 Quantos lados tem o polígono convexo em que a soma das medidas dos ângulos internos é o quíntuplo da soma das medidas dos ângulos externos? 12 lados

17 Temos, na figura, parte de um polígono regular. Que polígono é esse? Qual é a soma das medidas dos seus ângulos internos? icoságono regular; 3 240°



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

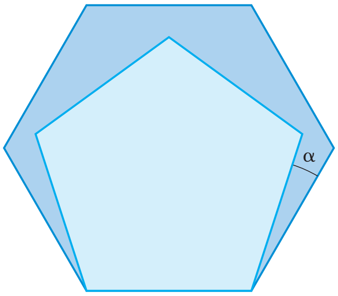
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

27. Como motivação, o professor poderá premiar os três melhores trabalhos.

18 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é igual a 1260°. Determine a medida do ângulo externo. 40°

19 Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo externo mede 15°? 24 lados

20 Determine α, em grau, sabendo que os polígonos da figura abaixo são regulares. 12°



GUILHERME CASAGRANDI

21 Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo cujo número de diagonais é igual ao número de lados? 108°

22 A medida de um ângulo interno de um polígono regular convexo é o triplo da medida de um de seus ângulos externos. Quantos lados tem o polígono? 8 lados

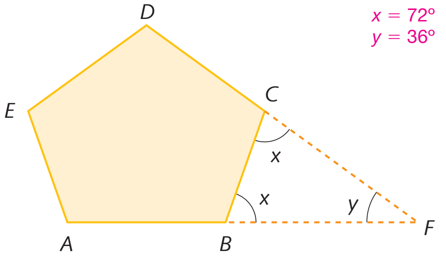
23 Qual é a medida do ângulo externo de um polígono regular que tem 5 diagonais? 72°

24 A razão entre as medidas dos ângulos externos de dois polígonos regulares convexos é 3, e a razão entre as medidas dos seus ângulos internos é $\frac{3}{5}$. Quantos lados tem cada um dos polígonos? 4 lados e 12 lados

DESAFIO

Calcule a medida do ângulo $\widehat{y}$ formado pelo prolongamento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ de um pentágono regular *ABCDE*. Determine também a medida de $\widehat{x}$.

$x = 72°$
$y = 36°$



GUILHERME CASAGRANDI

25 Determine o polígono regular em que a medida do ângulo interno é igual a $\frac{4}{3}$ da medida de um ângulo reto. hexágono

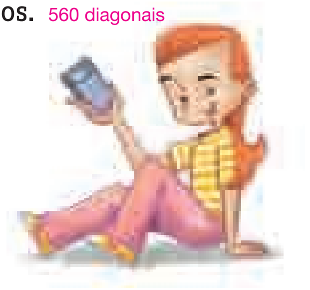
26 Determine o polígono cujo número de diagonais é seis vezes o número de lados. pentadecágono

27 Forme dupla com um colega e desenhem, em uma folha de papel, um octógono interno a uma circunferência de 4 cm de raio. Usem um transferidor e seus conhecimentos sobre ângulo central.

28 Usando uma calculadora, determine o número de diagonais de um polígono convexo de:

a) 28 lados; 350 diagonais

b) 35 lados. 560 diagonais



GEORGE TUTUMI

Nas questões 29 a 37 determine a única alternativa correta.

29 A diferença entre o número de lados de dois polígonos é 5, e a diferença entre os números de suas diagonais é 40. Qual é o polígono de maior número de lados? alternativa **d**

a) undecágono

b) icoságono

c) decágono

d) dodecágono

30 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de $k + 2$ lados é igual a: alternativa **a**

a) $k \cdot 180°$

b) 360°

c) $(k + 2) \cdot 180°$

d) $k \cdot 720°$

31 A medida do ângulo interno do polígono regular em que o número de diagonais excede em 3 o número de lados é: alternativa **e**

a) 60°

b) 72°

c) 108°

d) 150°

e) 120°

32 O ângulo interno de um polígono regular convexo mede 174°. O número de diagonais que passam pelo centro desse polígono é igual a: alternativa **e**

a) 48

b) 42

c) 54

d) 65

e) 30

33 A medida do ângulo interno de um polígono regular de 170 diagonais é igual a: alternativa **a**

a) 162°

b) 80°

c) 170°

d) 125°

e) 81°

34 O polígono convexo cujo número de diagonais é igual ao dobro do número de lados é o: alternativa **b**

a) octógono

b) heptágono

c) eneágono

d) icoságono

35 A diferença entre o número de diagonais de dois polígonos convexos é 18, e um deles tem três lados a mais que o outro. Esses polígonos são: alternativa **b**

a) octógono e pentágono

b) eneágono e hexágono

c) decágono e heptágono

d) undecágono e octógono

36 Se o número n de lados de um polígono é igual a $\frac{2}{3}$ do número de diagonais, então $n + 2$ é igual a: alternativa **c**

a) 6

b) 7

c) 8

d) 12

e) 20

37 De cada vértice do icoságono partem k diagonais, em que k é igual a: alternativa **a**

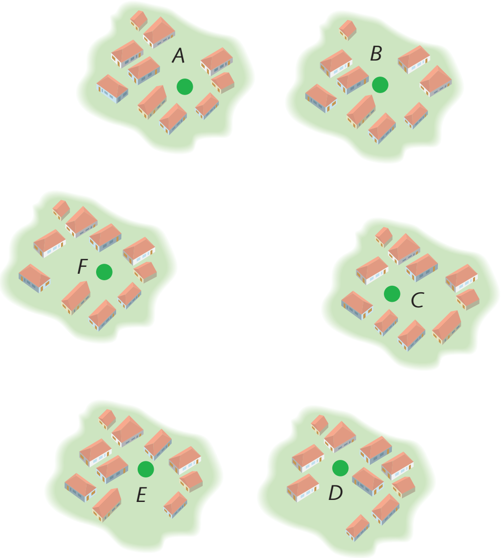
a) 17

b) 18

c) 19

d) 12

38 Na figura, temos a representação de seis cidades. Quantas estradas serão necessárias para ligar diretamente cada cidade com todas as outras?



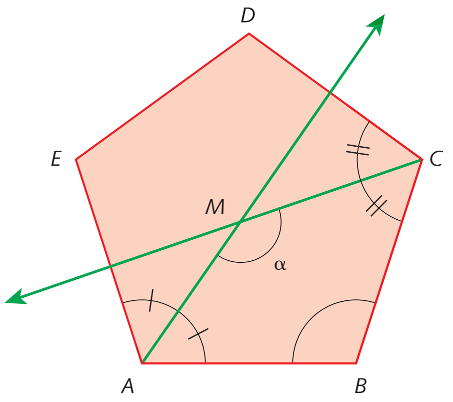
15 estradas. Sendo os pontos vértices de um hexágono, o número de estradas é dado por: (nº de lados) + (nº de diagonais)

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Utilize folhas de papel quadriculado para resolver as atividades a seguir.

DESAFIO

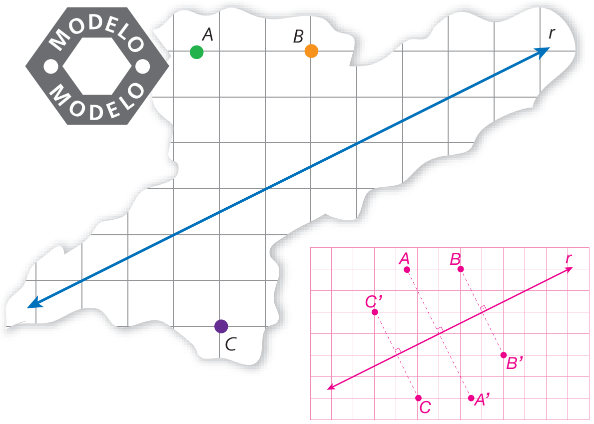
Calcule a medida α do ângulo formado pelas bissetrizes $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{CM}$ de um pentágono regular convexo $ABCDE$. 144°



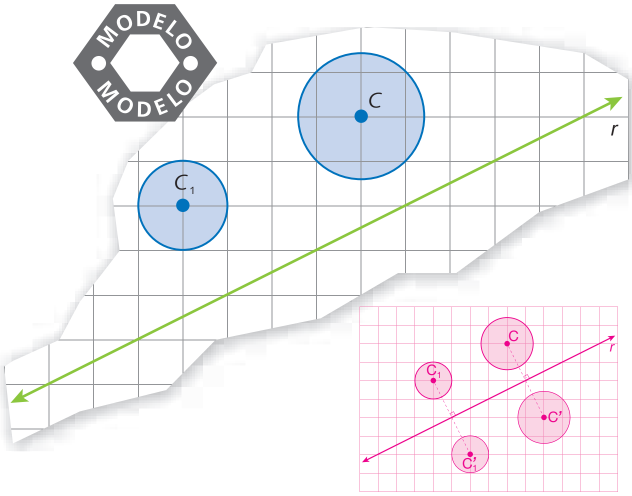
GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

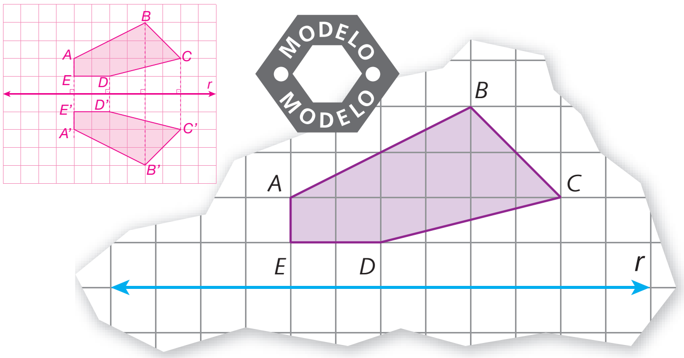
39 Em uma malha quadriculada, copie a figura abaixo. Depois, obtenha os pontos *A'*, *B'* e *C'* simétricos aos pontos *A*, *B* e *C* em relação à reta *r*.



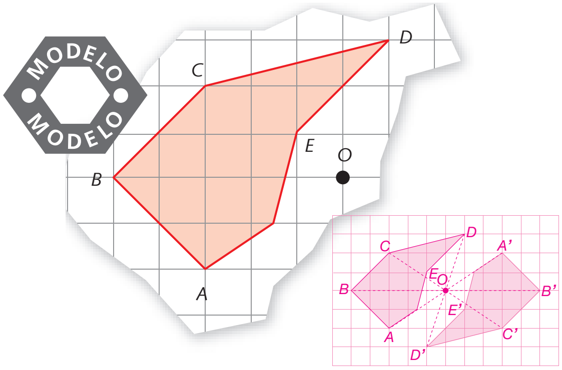
40 Em uma malha quadriculada, copie os círculos abaixo. Depois, construa o simétrico de cada círculo em relação à reta *r*.



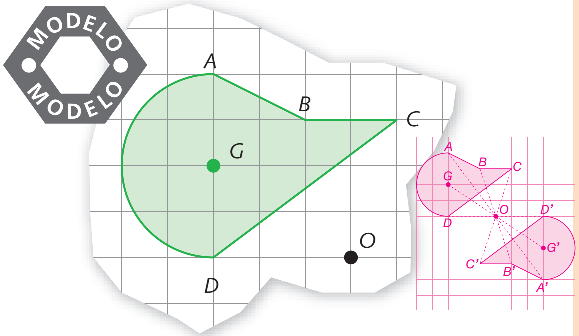
41 Em uma malha quadriculada, copie o polígono abaixo. Depois, construa o simétrico desse polígono em relação à reta *r*.



42 Em uma malha quadriculada, copie a figura abaixo. Depois, construa o polígono *A'B'C'D'E'F'* simétrico ao polígono *ABCDEF* em relação ao ponto *O*.



43 Em uma malha quadriculada, copie a figura abaixo. Depois, construa a simétrica dessa figura em relação ao ponto *O*.



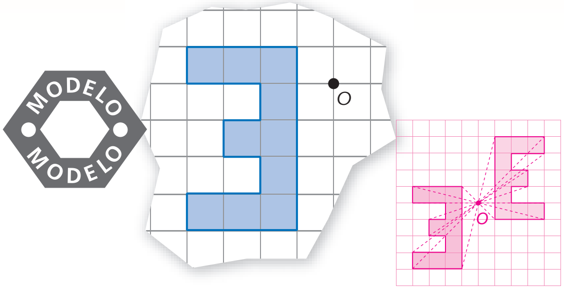
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

DESAFIO

Um polígono é regular. Três vértices consecutivos foram nomeados por *A*, *B* e *C*. As bissetrizes internas dos ângulos dos vértices *A* e *C* formam um ângulo de 72°. Quantos lados tem esse polígono? 10 lados

DESAFIO

Faça uma figura de cor vermelha simétrica à figura de cor azul em relação ao ponto *O*.



CAPÍTULO

7

FRAÇÕES ALGÉBRICAS E EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS


ADEK BERRY/AFP

O polo aquático é um esporte disputado em piscinas, por duas equipes com sete jogadores cada. O objetivo é colocar a bola no gol, que mede 3 m de largura por 0,9 m de altura.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Três grandes tubos de saída de água são utilizados para encher uma piscina. O primeiro tubo pode enchê-la, sozinho, em três horas; o segundo tubo, em seis horas; e o terceiro tubo, em x horas. Agora, responda:

- Em uma hora, que fração da piscina é enchida pelo primeiro tubo? E pelo segundo? E pelo terceiro? $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{x}$
- Em uma hora, os três tubos abertos, juntos, encherão que fração da piscina? $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{x}$

Neste capítulo, vamos trabalhar com frações algébricas e equações fracionárias e estudar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo as frações algébricas. Depois, vamos ver a resolução de equações fracionárias. O exercício da página de abertura deste capítulo apresenta as condições necessárias para a introdução do conceito de frações algébricas.

CATHERINE IVILL/MATTHEW ASHTON/AMA SPORTS PHOTO/CORBIS/LATINSTOCK

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe e resolva as situações a seguir.

- Diariamente, em seu restaurante, Andrea tem um gasto de x reais para preparar y refeições. O custo de cada refeição é dado pelo quociente do gasto x pela quantidade y, ou seja, é de $\frac{x}{y}$ reais, com $y \neq 0$. Sabendo que ela quer ter 560 reais de lucro por dia, quanto deve cobrar por refeição? $\frac{x + 560}{y}$

- Antônio distribuiu igualmente 100 bolinhos entre x meninas e y meninos. Que quantidade de bolinhos cada criança recebeu? $\frac{100}{x + y}$, com $x + y \neq 0$.

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

Nos dois casos, as situações podem ser representadas pelo quociente de dois polinômios, escrito na forma de fração, que chamamos de fração algébrica.

Neste capítulo, vamos estudar as frações algébricas e as equações fracionárias.

1 Frações algébricas

Em seu carro, Ivo fez o percurso de Juazeiro do Norte a Fortaleza, de aproximadamente 525 km, em 7 horas. A velocidade média de Ivo durante esse percurso pode ser calculada pela razão entre a distância percorrida e o tempo de deslocamento.

$$\frac{525\text{ km}}{7\text{ h}} = 75\text{ km/h}$$

Logo, a velocidade média de Ivo foi 75 km/h.

A velocidade média é dada pela razão entre a distância percorrida (d) e o tempo de deslocamento (t), ou seja, $\frac{d}{t}$.

Uma expressão algébrica como essa, que é apresentada na forma de fração com variável no denominador, é chamada de **fração algébrica**.


RENATO SOARES/PULSAR IMAGENS

Trecho da rodovia BR-116 em Fortaleza (CE), 2012.

Fração algébrica é o quociente de dois polinômios, escrito na forma fracionária, com uma ou mais variáveis no denominador.

Exemplos

- $\frac{17}{a^2 - b^2}$
- $\frac{2mn}{z + b}$
- $\frac{x}{2x - 3}$
- $\frac{x - y}{y^2 - 5y - 6}$

Cuidado!

Assim como nas frações numéricas, o denominador de uma fração algébrica não pode ser igual a zero, pois não existe divisão por zero. Do contrário, ela não representa um número real.

Exemplos

- A fração algébrica $\frac{1}{x - 3}$ é válida para qualquer número real, exceto para o número 3, que tornaria o denominador da fração igual a zero.

  Assim, na fração algébrica $\frac{1}{x - 3}$, temos $x \neq 3$.
- A fração algébrica $\frac{x + 1}{x^2 - 4}$ é válida para qualquer valor real, exceto 2 e -2, que tornariam o denominador da fração igual a zero.

  Assim, na fração algébrica $\frac{x + 1}{x^2 - 4}$, temos $x \neq -2$ e $x \neq 2$.

GEORGE TUTUMI

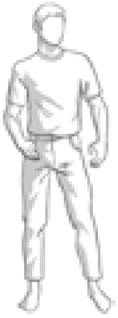
Lendo e aprendendo

Índice de Massa Corpórea (IMC)

A determinação do Índice de Massa Corpórea (IMC) é uma maneira bastante simples de avaliar se a massa de um indivíduo **adulto** é adequada à sua altura.

A fração algébrica utilizada para calcular esse índice é: $\frac{m}{h^2}$, em que *m* é a massa, em quilograma, e *h* é a medida da altura, em metro.

A Organização Mundial da Saúde (OMS) criou uma tabela que mostra a classificação da situação da pessoa de acordo com o seu IMC. Observe:



IMC	Classificação
até 18,4	Excesso de magreza
18,5-24,9	Peso normal
25-29,9	Acima do peso
30-34,9	Obesidade grau 1
35-39,9	Obesidade grau 2
40 em diante	Obesidade grau 3 ou mórbida

GEORGE TUTUMI

Por exemplo, se quisermos saber o IMC de uma pessoa adulta com 81 kg e 1,80 m, podemos fazer:

$$\text{IMC} = \frac{81}{(1{,}80)^2} = \frac{81}{3{,}24} = 25$$

De acordo com a escala acima, essa pessoa está acima do peso.

Para obter mais informações, consulte o *site*: <http://saude.terra.com.br/imc/>.
Acesso em: 20 maio 2015.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva a fração algébrica que representa cada situação:

a) Jorge dividiu igualmente *x* reais entre *a* meninos e *b* meninas. Qual é a quantia correspondente ao valor que cada criança recebeu? $\frac{x}{a + b}$

b) Quando dividimos um terreno retangular de *x* metros de comprimento e *y* metros de largura em *n* lotes iguais, qual é a área correspondente a cada lote? $\frac{x \cdot y}{n}$

2 Quais das expressões a seguir são frações algébricas? alternativas **b**, **c**, **e**, **g** e **h**

a) $\frac{2x}{3}$

b) $\frac{x - 1}{x + 1}$

c) $\frac{1}{x^2 - y^2}$

d) $\frac{x^2 - 2x + 1}{10}$

e) $\frac{15}{x}$

f) $\frac{2x - 4}{9}$

g) $\frac{15}{a - b}$

h) $\frac{5a}{3b}$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Calcule os valores de x para os quais as frações algébricas não representam números reais.

a) $\dfrac{3x-5}{x}$ $x = 0$

b) $\dfrac{x-5}{x-3}$ $x = 3$

c) $\dfrac{5}{(x+5)(x-4)}$ $x = -5$ e $x = 4$

d) $\dfrac{4}{x^2-9}$ $x = -3$ e $x = 3$

e) $\dfrac{3x}{2x-6}$ $x = 3$

f) $\dfrac{x+a}{x-a}$ $x = a$

4 Calcule, se possível, o valor numérico de cada fração algébrica da atividade anterior quando x vale 4.

a) $\frac{7}{4}$ **b)** -1 **c)** Não é possível. **d)** $\frac{4}{7}$ **e)** 6 **f)** $\frac{4+a}{4-a}$

5 As máquinas A e B são usadas em uma escavação. A máquina A leva seis horas a mais que a máquina B para realizar sozinha a escavação. Que fração da escavação as duas máquinas realizam em uma hora? $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6}$

6 Se a máquina B da atividade anterior leva 3 horas para efetuar a tarefa, que fração da escavação as duas máquinas realizam juntas em uma hora? $\frac{4}{9}$

7 Reúna-se com um colega para calcular:

a) o IMC de um adulto da família do outro; Resposta pessoal.

b) a massa de um adulto com 1,75 m para que ele tenha IMC igual a 24; 73,5 kg

c) a medida da altura de um adulto com 96 kg para que ele tenha IMC igual a 24. 2 m

2 Simplificação de fração algébrica

Para simplificar uma fração algébrica, podemos fatorar os seus termos, quando necessário, e dividir o numerador e o denominador por um divisor comum, diferente de zero, a fim de obter uma fração algébrica equivalente mais simples.

Exemplos

- Simplificar a fração algébrica $\dfrac{12ab^2c}{18ab^5}$

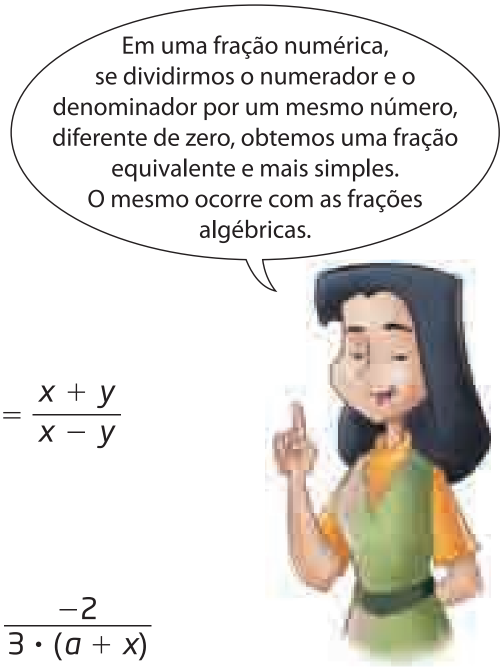
$$\frac{12ab^2c}{18ab^5} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot c}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{2c}{3b^3}$$

- Simplificar a fração algébrica $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{\cancel{(x+y)} \cdot (x+y)}{\cancel{(x+y)} \cdot (x-y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

- Simplificar a fração algébrica $\dfrac{4x-4a}{6a^2-6x^2}$

$$\frac{4x-4a}{6a^2-6x^2} = \frac{2 \cdot 2(x-a)}{2 \cdot 3(a^2-x^2)} = \frac{-2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(a-x)}}{\cancel{2} \cdot 3(a+x)\cancel{(a-x)}} = \frac{-2}{3 \cdot (a+x)}$$



GEORGE TUTUMI

ATIVIDADE

Faça a atividade no caderno.

1 Simplifique, se possível, as frações algébricas a seguir.

a) $\frac{20xy^2z}{25x^3z^2}$ $\frac{4y^2}{5x^2z}$

b) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ $\frac{x}{x - 1}$

c) $\frac{ax + bx - ay - by}{a^2 - b^2}$ $\frac{x - y}{a - b}$

d) $\frac{-4a^2b}{16ab^2c}$ $-\frac{a}{4bc}$

e) $\frac{(2a + 3b) \cdot (3a - b)}{(b - 3a) \cdot (3b - 2a)}$ $\frac{2a + 3b}{2a - 3b}$

f) $\frac{-72a^4b^3c^2}{9a^2b^2c^2}$ $-8a^2b$

g) $\frac{b - a}{a^2 - b^2}$ $-\frac{1}{a + b}$

h) $\frac{3m^2 - 3}{m + 1}$ $3(m - 1)$

i) $\frac{4 + 4a}{a^2 + 2a + 1}$ $\frac{4}{a + 1}$

j) $\frac{a^2 - 25}{4a + 20}$ $\frac{a - 5}{4}$

k) $\frac{5x + 35 + 7y + xy}{5 + y}$ $x + 7$

3 Redução de frações algébricas ao mesmo denominador

Redução de frações numéricas ao mesmo denominador

Para reduzir as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ ao mesmo denominador, devemos encontrar frações equivalentes às frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ que tenham o mesmo denominador. Esse denominador tem de ser múltiplo de 3 e de 5. Vamos considerar o número 15, que é o menor múltiplo comum (mmc) entre 3 e 5.

Devemos, então, obter o número que multiplicado pelo denominador de cada fração dê 15. Esse número pode ser obtido a partir da divisão de 15 pelo denominador.

Na primeira fração temos 15 : 3 = 5; então multiplicamos o numerador e o denominador por 5.

$$\underset{\times 5}{\overset{\times 5}{\frac{2}{3} = \frac{10}{15}}}$$

Na segunda fração temos 15 : 5 = 3; então multiplicamos o numerador e o denominador por 3.

$$\underset{\times 3}{\overset{\times 3}{\frac{4}{5} = \frac{12}{15}}}$$

Para encontrar o mmc de dois ou mais números naturais escritos na forma fatorada, podemos obter o produto dos fatores comuns e não comuns, cada um com seu maior expoente.

Assim, por exemplo, podemos obter o mmc dos números 150, 60 e 36 decompondo-os em fatores primos e calculando o produto.

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $\qquad$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Fatores comuns de maior expoente: 2^2 e 3^2

Fator não comum de maior expoente: 5^2

Logo, mmc (150, 60, 36) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$

Redução de frações algébricas ao mesmo denominador

O mesmo procedimento empregado nas frações numéricas é válido para a redução de frações algébricas ao mesmo denominador. Como exemplo, vamos reduzir ao mesmo denominador as frações algébricas abaixo.

- $\frac{5}{6ab}, \frac{3a}{3a^2b}$

Devemos encontrar frações equivalentes a $\frac{5}{6ab}$ e $\frac{3a}{3a^2b}$ que tenham o mesmo denominador. Para isso, devemos obter o mmc de $6ab$ e $3a^2b$.

O cálculo do mmc de polinômios é semelhante ao de números naturais. Para obter o mmc de dois ou mais polinômios fatorados, calculamos o produto dos fatores comuns e não comuns, cada um com seu maior expoente.

Assim, por exemplo, obtemos o mmc dos polinômios $6ab$ e $3a^2b$ fatorando-os e calculando o produto.

$6ab = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b$

$3a^2b = 3 \cdot a^2 \cdot b$

Fatores comuns de maior expoente: 3, a^2 e b

Fator não comum de maior expoente: 2

Logo, o mmc $(6ab, 3a^2b) = 3 \cdot \mathrm{a}^2 \cdot b \cdot 2 = 6a^2b$

Depois obtemos as frações equivalentes com denominador igual a $6a^2b$.

Como $6a^2b : 6ab = a$, multiplicamos o numerador e o denominador por a.

$$\frac{5}{6ab} \underset{\times a}{\overset{\times a}{=}} \frac{5a}{6a^2b}$$

Como $6a^2b : 3a^2b = 2$, multiplicamos o numerador e o denominador por 2.

$$\frac{3a}{3a^2b} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{6a}{6a^2b}$$

- $\frac{4x}{2x-2}, \frac{5y}{x^2-1}$

Devemos encontrar frações equivalentes a $\frac{4x}{2x-2}$ e $\frac{5y}{x^2-1}$ que tenham o mesmo denominador. Para isso, devemos obter o mmc de $2x - 2$ e $x^2 - 1$:

$2x - 2 = 2(x - 1)$ $\qquad$ $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

Fator comum de maior expoente: $(x - 1)$

Fatores não comuns de maior expoente: 2 e $(x + 1)$

Logo, o mmc $(2x - 2, x^2 - 1) = 2(x + 1)(x - 1)$

$2(x + 1)(x - 1) : 2(x - 1) = x + 1$ $\qquad$ $2(x + 1)(x - 1) : (x + 1)(x - 1) = 2$

Portanto:

$$\frac{4x}{2x-2} = \frac{4x}{2(x-1)} = \frac{4x \cdot (x+1)}{2(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{4x(x+1)}{2(x^2-1)}$$

$$\frac{5y}{x^2-1} = \frac{5y \cdot 2}{(x^2-1) \cdot 2} = \frac{10y}{2(x^2-1)}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o mmc dos polinômios.

a) $6a^2b^3$ e $4a^2b^6$ $12a^2b^6$

b) $72x^3y$ e $96y^2$ $288x^3y^2$

c) $14a^3b^3$, $49a^5c^4$ e $28a^2$ $196a^5b^3c^4$

d) $3x - 1$, $45x - 15$ $15(3x - 1)$

e) $x^2 - 4y^2$, $3x - 6y$, $x^2 - 2xy$ $3x(x + 2y)(x - 2y)$

2 Determine o valor numérico do mmc de $8xy - 16x$ e $(y - 2)^2$ para $x = 3$ e $y = 4$. 96

3 Determine o valor de mmc $(21ab + 63b, 7a^2 + 42a + 63)$ para $a = -2$ e $b = 1$. 21

4 A quantidade de figurinhas de Manuela é $5x$, a de Roberto é $3x$ e a de Virgínia é $2x$. O mmc entre essas quantidades de figurinhas é 300. Quantas figurinhas cada um tem?

JOSÉ LUÍS JUHAS

Manuela tem 50 figurinhas, Roberto tem 30 e Virgínia tem 20.

Alfredo: 80 anos; Bernardo: 40 anos; e Vitor: 20 anos.

5 Descubra a idade de cada um.

TIAGO SILVA

6 Reduza as frações algébricas ao mesmo denominador.

a) $\frac{3}{a}, \frac{6}{b}, \frac{7}{ab}$ $\frac{3b}{ab}, \frac{6a}{ab}, \frac{7}{ab}$

b) $\frac{5x}{y^2}, \frac{4}{xy}, \frac{10}{x^2y^2}$ $\frac{5x^3}{x^2y^2}, \frac{4xy}{x^2y^2}, \frac{10}{x^2y^2}$

c) $\frac{8}{a}, \frac{9a}{a-1}, \frac{5}{2a}$ $\frac{16(a-1)}{2a(a-1)}, \frac{18a^2}{2a(a-1)}, \frac{5(a-1)}{2a(a-1)}$

d) $\frac{2}{a^2-1}, \frac{5}{a+1}, \frac{a}{a-1}$ $\frac{2}{a^2-1}, \frac{5(a-1)}{a^2-1}, \frac{a(a+1)}{a^2-1}$

e) $\frac{2a}{a-b}, \frac{ab^2}{a^2-b^2}, \frac{b}{a+b}$ $\frac{2a(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{ab^2}{a^2-b^2}, \frac{b(a-b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2}{a+b}, \frac{-5}{a-b}$ $\frac{2(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{-5(a+b)}{a^2-b^2}$

4 Adição e subtração de frações algébricas

As operações com frações algébricas são efetuadas empregando os mesmos procedimentos utilizados nas operações com números racionais na forma de fração.

Como exemplo, vamos resolver estas adições algébricas:

- $\frac{2}{a}+\frac{5b}{a}+\frac{10}{a}$ ⟶ os denominadores são iguais

  $\frac{2}{a}+\frac{5b}{a}+\frac{10}{a}=\frac{2+5b+10}{a}=\frac{12+5b}{a}$ ⟶ conservamos o denominador comum e adicionamos os numeradores

- $\underbrace{\frac{2}{x}+\frac{10}{xy}-\frac{5}{y}}_{\text{mmc }(x,\, xy,\, y)\,=\,xy}$ ⟶ os denominadores são diferentes

  $$\frac{2}{x}+\frac{10}{xy}-\frac{5}{y}=\underbrace{\frac{2y}{xy}+\frac{10}{xy}-\frac{5x}{xy}}_{\text{reduzimos as frações ao mesmo denominador}}=\frac{2y+10-5x}{xy}$$

- $\frac{3a}{a+1}+\frac{5}{a^2-1}-\frac{a-4}{1-a}$

  $$\frac{3a}{a+1}+\frac{5}{(a+1)(a-1)}-\boxed{\frac{a-4}{1-a}}=$$

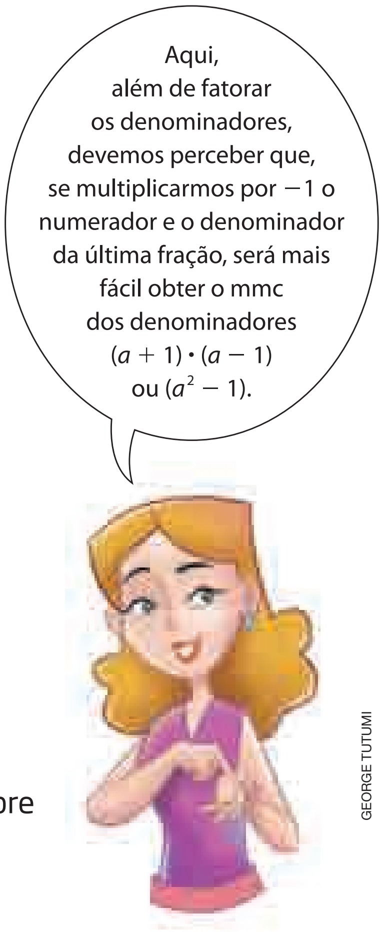
  $$\frac{(a-4)\cdot(-1)}{(1-a)\cdot(-1)}$$

  $$=\underbrace{\frac{3a}{a+1}+\frac{5}{(a+1)(a-1)}-\boxed{\frac{4-a}{a-1}}}_{\text{mmc }(a+1,\,(a+1)(a-1),\,a-1)\,=\,a^2-1}=$$

  $$=\frac{3a\cdot(a-1)}{a^2-1}+\frac{5}{a^2-1}-\frac{(4-a)\cdot(a+1)}{a^2-1}=$$

  $$=\frac{3a^2-3a}{a^2-1}+\frac{5}{a^2-1}-\frac{3a+4-a^2}{a^2-1}=$$

  $$=\frac{3a^2-3a+5-3a-4+a^2}{a^2-1}=\frac{4a^2-6a+1}{a^2-1}$$



GEORGE TUTUMI

Nas adições ou subtrações com frações algébricas, sempre que possível, devemos simplificar o resultado.

ATIVIDADE

Faça a atividade no caderno.

1 Efetue as operações, simplificando quando possível.

a) $\frac{5}{a} + \frac{7}{a} + \frac{2x}{a}$ $\frac{12 + 2x}{a}$

b) $\frac{4a - 1}{b - 2a} - \frac{2a}{4b - 8a}$ $\frac{7a - 2}{2(b - 2a)}$

c) $\frac{a}{a + 1} - \frac{a + 1}{a}$ $\frac{2a + 1}{a(a + 1)}$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $\frac{a + b}{ab}$

e) $\frac{4x^2}{xy + x^2} + \frac{y - 4x}{x + y}$ $\frac{y}{x + y}$

f) $\frac{18}{2m} + \frac{5}{6m} + \frac{6}{m}$ $\frac{95}{6m}$

g) $\frac{1 + y}{1 - y} - \frac{2 + y}{y - 1}$ $\frac{2y + 3}{1 - y}$

h) $\left(\frac{10}{a^2} + \frac{6}{a}\right) - \left(\frac{6}{a} + 4\right)$ $\frac{10 - 4a^2}{a^2}$

i) $\frac{x - 4}{2x} - \frac{2x + 5}{2x}$ $-\frac{x + 9}{2x}$

j) $\frac{b}{x + 1} - \frac{b}{x - 1}$ $\frac{-2b}{x^2 - 1}$

k) $\frac{x}{y + 1} - \frac{y}{y^2(y + 1)}$ $\frac{xy - 1}{y(y + 1)}$

l) $2 + \frac{x + y}{x - y}$ $\frac{3x - y}{x - y}$

5 Multiplicação de frações algébricas

Em uma gincana de Matemática, Beatriz propôs a Letícia a seguinte questão:

“Pense em um número inteiro diferente de zero e de 1. Multiplique o inverso desse número com a sua metade. O resultado é um número inteiro?”.

Número pensado: x

Inverso de x: $\frac{1}{x}$

Metade de x: $\frac{x}{2}$

Produto das expressões:

$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2}$

GEORGE TUTUMI

Para efetuar a multiplicação com frações algébricas, Letícia usou o mesmo procedimento da multiplicação de frações numéricas, ou seja, multiplicou os numeradores e depois os denominadores das frações, simplificando o que era possível.

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, Letícia respondeu que o resultado não é um número inteiro.

Vamos ver outras multiplicações com frações algébricas.

Exemplos

- $\frac{5a^2bc}{24b^2d^5} \cdot \frac{16d^2}{25a^2b}$

$$\frac{5a^2bc}{24b^2d^5} \cdot \frac{16d^2}{25a^2b} = \frac{{}^{1}\cancel{5} \cdot \cancel{a^2} \cdot \cancel{b} \cdot c}{{}_{3}\cancel{24} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot \cancel{d^2} \cdot d^3} \cdot \frac{{}^{2}\cancel{16}\cancel{d^2}}{{}_{5}\cancel{25}\cancel{a^2}b} = \frac{2c}{15b^2d^3}$$

- $\dfrac{4a-8}{b} \cdot \dfrac{a^3+2a^2}{a^2-4} \cdot \dfrac{1}{2a^3}$

$$\frac{4a-8}{b} \cdot \frac{a^3+2a^2}{a^2-4} \cdot \frac{1}{2a^3} = \frac{{}^{2}\cancel{4}\cancel{(a-2)}}{b} \cdot \frac{\cancel{a^2}\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)} \cdot \cancel{(a-2)}} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{2}\cancel{a^3}_{a}} = \frac{2}{ab}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue as operações.

a) $\dfrac{4x^2}{9y} \cdot \dfrac{3y^3}{20x^2}$ $\dfrac{y^2}{15}$

b) $\dfrac{3x^7}{a^5} \cdot \dfrac{16}{15x} \cdot \dfrac{a^2}{8x^4}$ $\dfrac{2x^2}{5a^3}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x} \cdot \dfrac{3x}{x+1}$ $3(x-1)$

d) $\dfrac{a}{9b^2} \cdot \dfrac{36b^5}{a^3}$ $\dfrac{4b^3}{a^2}$

e) $\dfrac{x+y}{8} \cdot \dfrac{16 \cdot (x-y)}{3x}$ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{3x}$

f) $\dfrac{3x-3y}{4} \cdot \dfrac{8x}{x^2-2xy+y^2}$ $\dfrac{6x}{x-y}$

g) $\dfrac{8a^3}{3bx^2} \cdot \dfrac{15b^2x}{4a^2}$ $\dfrac{10ab}{x}$

h) $\dfrac{6b^2}{(a+b)^2} \cdot \dfrac{a+b}{b}$ $\dfrac{6b}{a+b}$

i) $\dfrac{a^4-1}{a+1} \cdot \dfrac{a}{a^2+1}$ $a(a-1)$

j) $\dfrac{a^3}{y-1} \cdot \dfrac{5y-5}{a^5+a^3}$ $\dfrac{5}{a^2+1}$

2 Simplifique a expressão -1

$$\left(\frac{5}{x+2} - \frac{7}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{4} + \frac{x+2}{4}\right).$$

3 Encontre a fração algébrica que dividida por $\dfrac{y^2}{2x^2}$ resulta em $\dfrac{8x^3}{y^4}$. $\dfrac{4x}{y^2}$

6 Divisão de frações algébricas

Na gincana de Matemática, agora é a vez de Beatriz responder à questão de Letícia:

"Qual é o resultado da divisão $\left(1+\dfrac{1}{x}\right) : \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$?".

Beatriz lembrou-se da divisão de frações numéricas: dividimos duas frações multiplicando a primeira pelo inverso da segunda.

Para efetuar uma divisão com frações algébricas, Beatriz procedeu da mesma maneira, depois fatorou e simplificou as expressões possíveis. Veja:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right) : \left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} =$$

$$= \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{12}{5} : \frac{21}{35} = \frac{12}{5} \cdot \frac{35}{21} =$$

$$= \frac{2^2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{7}}{\cancel{3} \cdot \cancel{7}} = 4$$

GEORGE TUTUMI

Exemplos

- $\dfrac{2x}{3y} : \dfrac{8x}{9y^2} = \dfrac{2x}{3y} \cdot \dfrac{9y^2}{8x} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{x}}{\cancel{3} \cdot \cancel{y}} \cdot \dfrac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{y} \cdot y}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{x}} = \dfrac{3y}{4}$
- $\dfrac{a^2 - 1}{x^2 - y^2} : \dfrac{a^2 - 3a + 2}{3x + 3y} = \dfrac{a^2 - 1}{x^2 - y^2} \cdot \dfrac{3x + 3y}{a^2 - 3a + 2} =$

$$= \frac{(a + 1) \cdot \cancel{(a - 1)}}{\cancel{(x + y)} \cdot (x - y)} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{(x + y)}}{\cancel{(a - 1)} \cdot (a - 2)} = \frac{3 \cdot (a + 1)}{(x - y) \cdot (a - 2)}$$

ATIVIDADE

Faça a atividade no caderno.

1 Efetue as operações e simplifique as expressões.

a) $\dfrac{5a}{2b} : \dfrac{10a}{7b^2}$ $\dfrac{7b}{4}$

b) $\dfrac{\frac{x}{4}}{\frac{x^3}{16y}}$ $\dfrac{4y}{x^2}$

c) $\dfrac{9a^2b}{8ab^3} : \dfrac{3a^3}{16ab^2}$ $\dfrac{6}{a}$

d) $\dfrac{x + 2}{4y} : \dfrac{3x + 6}{8y^3}$ $\dfrac{2y^2}{3}$

e) $\dfrac{x^2 - b^2}{xb} : \dfrac{b - x}{x^4}$ $\dfrac{-x^3(x + b)}{b}$

f) $\dfrac{a + b}{(a - b)^2} : \dfrac{(a + b)^2}{a - b}$ $\dfrac{1}{a^2 - b^2}$

g) $\dfrac{y + 3xy}{x^2 - 4} : \dfrac{3x + 1}{x^2 + 2x}$ $\dfrac{yx}{x - 2}$

h) $\dfrac{1}{b^3} : \dfrac{a^2}{5b^5}$ $\dfrac{5b^2}{a^2}$

i) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 16} : \dfrac{x^2 - 3x}{xy - 4y}$ $\dfrac{y(x + 3)}{x(x + 4)}$

7 Equações fracionárias

Observe a situação a seguir.

Algumas pessoas estavam reunidas em um restaurante. A conta foi de R$ 240,00 e duas delas não pagaram, pois eram aniversariantes, o que acarretou um acréscimo de R$ 10,00 na conta de cada uma das pessoas que ficaram.

GEORGE TUTUMI

Analisando a situação anterior, temos estas representações:

- x ← número de pessoas
- $\frac{240}{x}$ ← quantia a ser paga por pessoa
- 10 ← acréscimo pago em razão das despesas dos aniversariantes
- $x - 2$ ← número correspondente às pessoas que pagaram a conta
- $\frac{240}{x - 2}$ ← quantia paga por pessoa, com acréscimo

Essa situação pode ser representada pela equação:

$$\boxed{\frac{240}{x} + 10 = \frac{240}{x - 2}}$$

Como curiosidade, comente o problema considerando, inicialmente, 8 pessoas no restaurante ($x = 8$).

Resolvendo a equação, podemos determinar o número de pessoas.

Na equação acima, encontramos duas frações algébricas: $\frac{240}{x}$ e $\frac{240}{x - 2}$. Trata-se, portanto, de uma **equação fracionária**.

> Uma equação é fracionária quando apresenta, em pelo menos um de seus termos, uma fração algébrica.

Exemplos

- $\frac{5}{x} + 8 = \frac{2}{3}$
- $\frac{6x}{x - 1} = 7 + \frac{1}{x}$

Proponha aos alunos que determinem para quais valores de x as equações apresentadas nos exemplos não estão definidas. Espera-se que eles respondam que a equação do primeiro exemplo não está definida para $x = 0$ e que a equação do segundo não está definida para $x = 0$ nem para $x = 1$.

Resolução de uma equação fracionária

Para resolver uma equação fracionária, reduzimos todos os seus termos ao mesmo denominador, se necessário, e aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades, que levam a equações equivalentes cada vez mais simples e permitem determinar as raízes da equação.

Para exemplificar, vamos resolver estas equações:

- $\frac{10}{x} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

A equação só está definida para $x \neq 0$.

$\frac{10}{x} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ← mmc (x, 4, 2) = $4x$

$\frac{40}{4x} + \frac{3x}{4x} = \frac{2x}{4x}$ ← reduzimos todos os termos ao mesmo denominador

$40 + 3x = 2x$ ← aplicamos o princípio multiplicativo das igualdades, multiplicando os 2 membros da equação por $4x$

$3x - 2x = -40$ ← aplicamos o princípio aditivo das igualdades, isolando a incógnita x

$x = -40$

Portanto, a raiz da equação é -40.

- $\dfrac{3a+2}{2a+1} + \dfrac{5}{4a^2-1} = \dfrac{3a+1}{2a-1}$

A equação só está definida para $2a + 1 \neq 0$, $4a^2 - 1 \neq 0$ e $2a - 1 \neq 0$, isto é, $a \neq -\dfrac{1}{2}$ e $a \neq \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{3a+2}{2a+1} + \frac{5}{4a^2-1} = \frac{3a+1}{2a-1}$$

← mmc $(2a + 1, 4a^2 - 1, 2a - 1) = 4a^2 - 1$, pois $4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$

$$\frac{(3a+2)\cdot(2a-1)}{4a^2-1} + \frac{5}{4a^2-1} = \frac{(3a+1)\cdot(2a+1)}{4a^2-1}$$

← reduzimos todos os termos ao mesmo denominador

$$(3a+2)(2a-1) + 5 = (3a+1)(2a+1)$$

← aplicamos o princípio multiplicativo das igualdades, multiplicando os 2 membros da equação por $4a^2 - 1$

$$6a^2 + \underline{4a - 3a} - \underline{2 + 5} = 6a^2 + \underline{2a + 3a} + 1$$

$$6a^2 + a + 3 = 6a^2 + 5a + 1$$

← aplicamos o princípio aditivo das igualdades, isolando a incógnita a

$$-4a = -2$$

$$4a = 2$$

$$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como $\dfrac{1}{2}$ não satisfaz a condição de existência, a equação não tem raiz.

Chame a atenção dos alunos para a importância de sempre verificar as condições de existência da equação antes de resolvê-la.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva as equações abaixo.

a) $\dfrac{9x - 48}{x} = 5$ $x = 12$

b) $\dfrac{2}{a} + \dfrac{9a - 8}{5a} = \dfrac{5a - 6}{a}$ $x = 2$

c) $\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{3x}{x + 2} = -2$ $x = \dfrac{4}{7}$

d) $\dfrac{15 - x}{x} = \dfrac{1}{2}$ $x = 10$

e) $\dfrac{x - 1}{x - 3} = \dfrac{x - 4}{x - 5}$ $x = 7$

f) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{x + 1}{6}$ $x = \dfrac{2}{7}$

g) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ não tem raiz

h) $\dfrac{3x - 8}{x - 2} - \dfrac{x - 2}{x + 2} = \dfrac{2x^2 - 6x + 44}{x^2 - 4}$ $x = 8$

i) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{6 - x}{3x - 3} = \dfrac{3}{x - 1}$ $x = 9$

j) $\dfrac{2}{2x - 2} + \dfrac{3x + 4}{x^2 - x} = -\dfrac{3}{x}$ $x = -\dfrac{1}{7}$

2 Foram igualmente divididas 660 cartas para serem entregues por x carteiros de uma agência dos Correios. Cada um deles recebeu $\dfrac{660}{x}$ cartas.

No dia seguinte, havia 396 cartas para distribuir; faltaram, porém, dois carteiros. Nesses dois dias, coincidentemente, o número de cartas que cada um dos carteiros recebeu foi igual. Quantos são os carteiros dessa agência? cinco carteiros

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

Agência dos Correios em casarão histórico no centro de Cambuí (MG), em 2012.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 No quadro abaixo, aparecem três conceitos estudados neste capítulo. Reescreva cada uma das frases a seguir, completando-as com o conceito adequado, a fim de torná-las verdadeiras.

fração algébrica	equação fracionária

a) Uma ■ apresenta, em pelo menos um de seus termos, uma fração algébrica. equação fracionária

b) ■ é o quociente de dois polinômios, escrito na forma fracionária, com uma ou mais variáveis no denominador. fração algébrica

c) Na simplificação de uma ■ devemos dividir os seus termos por um divisor comum, diferente de zero, a fim de obter uma fração equivalente mais simples. fração algébrica

2 Explique por que, em uma fração algébrica, o denominador deve ser sempre diferente de zero. Porque não existe divisão por zero.

3 Copie o quadro abaixo no caderno e complete-o com dicas sobre como resolver cada uma das operações com frações algébricas:

Adição e subtração	Multiplicação	Divisão

As operações com frações algébricas são efetuadas empregando os mesmos procedimentos usados nas operações com números racionais na forma de fração.

Para efetuar uma multiplicação com frações algébricas, inicialmente devemos fatorar os termos possíveis; em seguida, cancelamos os termos comuns e, finalmente, multiplicamos os numeradores e depois os denominadores das frações algébricas.

Para efetuar uma divisão com frações algébricas, é preciso multiplicar a primeira fração algébrica pela fração algébrica que representa o inverso da segunda.

Aplicando

1 Sabendo que x ventiladores iguais custam R$ 500,00, responda às questões.

GEORGE TUTUMI

a) Que fração algébrica representa o preço de um deles? $\frac{500}{x}$

b) Ana deu y reais na compra de um dos ventiladores. Que fração algébrica representa o troco dessa compra? $\frac{xy - 500}{x}$

2 Joana pagou 7 reais por x metros de tecido para fazer um vestido. Qual é a fração algébrica que representa o valor pago por metro de tecido? $\frac{7}{x}$

GALLO IMAGENS/GETTY IMAGES

7. $\{[(x+8)\cdot 3-4+x]:4+2\}-x=$
$=\{[3x+24-4+x]:4+2\}-x=$
$=\{[4x+20]:4+2\}-x=$
$=x+5+2-x=7$

8. O erro está na passagem da penúltima para a última linha. Como $a=b$, ao dividir os dois membros da penúltima linha por $(a-b)$, estamos efetuando uma divisão por zero, o que não é possível.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Uma moto percorre 250 km com x litros de combustível. Quantos quilômetros essa moto faz por litro de combustível? $\frac{250}{x}$


CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

4 Que valores x não pode assumir em cada fração algébrica a seguir?

a) $\dfrac{x-2}{5x-3}$ $x\neq\frac{3}{5}$

c) $\dfrac{3x+7}{2x+4}$ $x\neq-2$

b) $\dfrac{ax^2}{x-a}$ $x\neq a$

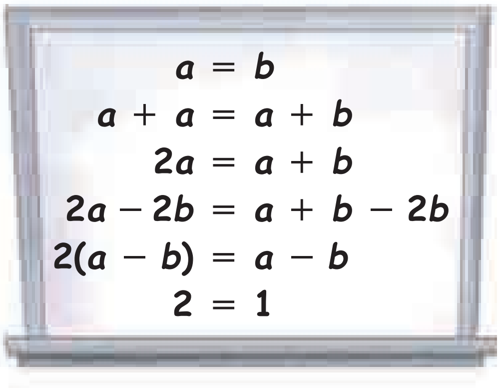
d) $\dfrac{x-3}{x^2-25}$ $x\neq-5$ ou $x\neq5$

5 Calcule o valor numérico da fração algébrica $\dfrac{3x-2y+z}{3x+y-2z}$, para $x=2$, $y=4$ e $z=-3$. $-\frac{5}{16}$

6 Efetue $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ e calcule o valor numérico para $x=4$. $-\frac{1}{9}$

7 Luísa pediu a Paulo que pensasse em um número e fizesse esta sequência de operações: some 8, multiplique por 3, subtraia 4, some com o número pensado, divida por 4, some 2 e subtraia o número pensado. Ao final, ela afirmou: você obteve 7. Como Luísa conseguiu adivinhar o resultado? Justifique.

8 Onde está o erro?


$a=b$
$a+a=a+b$
$2a=a+b$
$2a-2b=a+b-2b$
$2(a-b)=a-b$
$2=1$

GEORGE TUTUMI

9 Simplifique as frações algébricas.

a) $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$ $\frac{x+a}{x-a}$

b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}$ $\frac{x+1}{x}$

10 Determine o valor de y na expressão $y=\dfrac{9-x^2}{(3-x)^2}+\dfrac{(3+x)^2}{9-x^2}$, em que $x\neq3$ e $x\neq-3$. $y=\frac{2(3+x)}{3-x}$

11 Dadas as frações algébricas $A=\dfrac{2x+1}{x+1}$ e $B=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, determine $A-B$. $\frac{2x}{x+1}$

12 Responda às questões.

a) Que fração algébrica deve ser adicionada a $\dfrac{3}{x}$ para resultar na fração $\dfrac{8}{x}$? $\frac{5}{x}$

b) Que fração deve ser subtraída de $\dfrac{x+1}{x^2}$ para resultar na fração $\dfrac{1-x}{x^2}$? $\frac{2}{x}$

c) Que fração deve ser adicionada a $\dfrac{x-3}{xy}$ para resultar na fração $\dfrac{x^2-4x+1}{x^2y}$? $\frac{1-x}{x^2y}$

13 Qual dos cálculos abaixo está errado? Por quê? O **cálculo 1** está errado, porque o numerador da segunda fração tem de ser multiplicado por -1.

Cálculo 1: $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m-7}{m}=\dfrac{1-m-7}{m}$

Cálculo 2: $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m-7}{m}=\dfrac{1-m+7}{m}$

14 Se multiplicarmos a fração W pela fração $\dfrac{2x}{x+y}$, obteremos como resultado $\dfrac{2y}{3x^3}$. Determine a W. $\frac{y(x+y)}{3x^4}$

15 Simplifique a expressão

$$\left(\frac{5}{x+1}-\frac{6}{2x+2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{6}+\frac{3x+3}{9}\right)$$ 1

16 Determine o valor da expressão $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right):ab$ para $a^2+b^2=74$ e $2ab=70$. $\frac{74}{1225}$

17 Efetue e simplifique, se possível, a expressão:

$$\left(\frac{a}{b^2 - a^2} : \frac{1}{3b - 3a}\right) \cdot (3a + 3b)$$ 9a

18 Considerando $a = x + 1$ e $b = x - 1$, determine o mmc de $x^3 + x^2 - x - 1$ e $x^3 - x^2 - x + 1$ em função de a e b. a^2b^2

19 Resolva as equações fracionárias.

a) $\frac{x}{x - 1} = 1 - \frac{2}{x}$ $x = \frac{2}{3}$

b) $\frac{x + 3}{2} + \frac{x + 4}{3} + \frac{x + 5}{4} = 16$ $x = 11$

c) $\frac{x - 5}{6(x - 1)} + \frac{1}{9} = \frac{x - 3}{4(x - 1)}$ $x = 7$

d) $\frac{1 - x}{1 + x} + \frac{1 + x}{x - 1} + \frac{1}{1 - x^2} = 0$ $x = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2x + 6} + \frac{3}{9 - 3x} = \frac{7 - x}{9 - x^2}$ $x = -1$

20 Duas torneiras despejam água em um tanque, e uma válvula retira água desse mesmo tanque. Funcionando isoladas, as torneiras podem encher esse reservatório em duas e quatro horas, respectivamente, e a válvula pode esgotá-lo em três horas. Pergunta-se: abertas as torneiras e a válvula, simultaneamente, em quanto tempo o tanque ficará cheio? 2 horas e 24 minutos

21 Os 200 turistas da agência A foram distribuídos em x grupos. Os 300 turistas da agência B foram distribuídos em $x + 4$ grupos. Sabendo que o número de turistas em cada grupo é o mesmo, calcule o número de grupos da agência B. 12 grupos

22 Encontre a raiz das equações fracionárias.

a) $\frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x - 5}$ $x = -3$

b) $\frac{x - 1}{x - 3} - \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{11x + 8}{3x^2 - 27}$ $x = 8$

c) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{8}{x - 1}$ $x = -2$

d) $\frac{x}{x - 1} + 3 = \frac{1}{x - 1} - 1$ não tem raiz

e) $\frac{a - 2}{a + 3} = \frac{a + 5}{a - 4}$ $a = -\frac{1}{2}$

Pode-se multiplicar em cruz:
$(a - 2) \cdot (a - 4) =$
$= (a + 3) \cdot (a + 5)$

23 Uma expressão algébrica, quando dividida por x, dá o mesmo resultado que ao ser somada com x. Qual é essa expressão? Faça $\frac{E}{x} = E + x$ e ache $E = \frac{x^2}{1 - x}$.

24 Duas digitadoras, trabalhando juntas, fazem metade de certo trabalho em uma hora. Uma delas, sozinha, gastaria seis horas para efetuar todo o trabalho. Quantas horas levaria a outra para executar, sozinha, o mesmo trabalho? três horas

TIAGO SILVA

25 O denominador de uma fração corresponde ao triplo do numerador mais uma unidade. Adicionando oito unidades ao numerador e cinco ao denominador, obtemos uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$. Determine a fração. $\frac{2}{7}$

26 Próximo a uma piscina há duas torneiras. A primeira pode enchê-la, sozinha, em três horas. A segunda pode enchê-la, sozinha, em seis horas.

Considere que a piscina está vazia. Abrindo as duas torneiras simultaneamente, em quanto tempo é possível enchê-la? 2 horas

TIAGO SILVA

CAPÍTULO

8

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS


MARWAN NAAMANI/AFP

Neste capítulo, vamos trabalhar com sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e problemas com duas incógnitas. Os alunos estudarão os métodos da substituição e da adição e tomarão conhecimento da solução gráfica de uma equação e de sistemas de equações. O problema apresentado na abertura deste capítulo dará oportunidade ao professor para apresentar o conceito de sistemas de equações com duas incógnitas e um modo prático de resolvê-los.

Lewis Hamilton, piloto inglês de Fórmula 1 no Grande Prêmio de Abu Dhabi, corrida na qual conquistou o título de Bicampeão Mundial. Emirados Árabes Unidos, 2014.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Em 2014, o inglês Lewis Hamilton tornou-se bicampeão mundial de Fórmula 1. Nas 7 primeiras provas da temporada de 2014 em que pontuou, ele obteve 1º ou 2º lugar, totalizando 161 pontos. Vale lembrar que cada 1º lugar corresponde a 25 pontos e cada 2º lugar, a 18 pontos.

Considerando que nessas 7 corridas Hamilton obteve 1º lugar em *x* provas e 2º lugar em *y* provas, responda às questões.

- Qual é a equação que representa o total de corridas em que ele ficou em 1º ou em 2º lugar? $x + y = 7$
- Qual é a equação que representa o total de pontos obtidos por ele nessas 7 provas em que pontuou? $25x + 18y = 161$

Essas equações formam um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe a situação a seguir.

LÉO FANELLI

Considere:

x ⟵ número de vitórias do time verde

y ⟵ número de vitórias do time vermelho

Veja o sistema de equações que resolve esse problema:

Informação de Cássio

$$\underbrace{y-1}_{\text{Time vermelho cede uma vitória.}}=\underbrace{x+1}_{\text{Time verde recebe uma vitória.}}$$

Informação de Leonardo

$$\underbrace{y+1}_{\text{Time vermelho recebe uma vitória.}}=\overbrace{2}^{\text{Dobro}}\underbrace{(x-1)}_{\text{Time verde cede uma vitória.}}$$

- Que valores x e y podem assumir? Por quê? Qualquer valor natural, porque x e y correspondem ao número de vitórias do time verde e do time vermelho, respectivamente.
- Por tentativas, atribuindo valores a x e a y, determine a quantidade de vitórias de cada time. $x = 5$ e $y = 7$

Neste capítulo, vamos estudar a resolução de problemas envolvendo sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

1 Par ordenado

Você já jogou batalha-naval?

Inicialmente, cada jogador prepara a sua planilha desenhando, por exemplo, 5 hidroaviões, 4 submarinos, 3 cruzadores, 2 encouraçados e 1 porta-aviões.

Depois, é só seguir as regras do jogo:

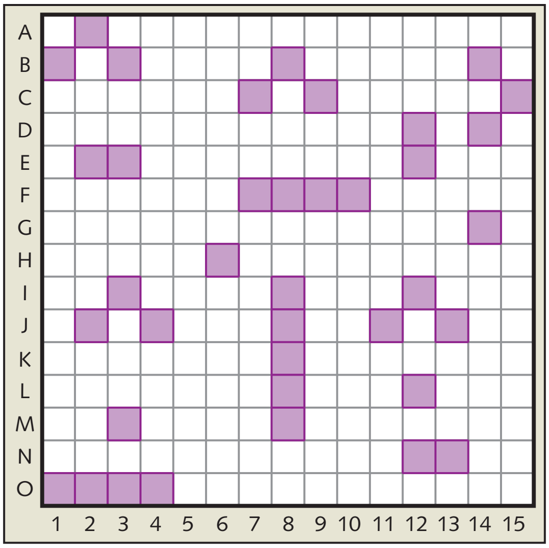
1º) Quem ataca deve disparar um tiro, indicando, para isso, as **coordenadas** do alvo, dando o **número da coluna** e a **letra da linha** que definem a posição.

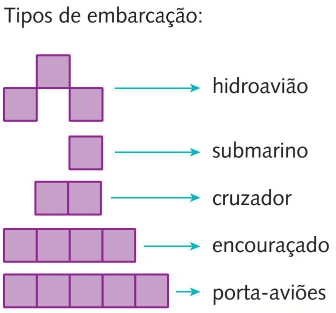
2º) Após cada tiro, quem é atacado deve avisar se o adversário acertou e, nesse caso, indicar o tipo de embarcação atingida e se foi afundada. Uma embarcação será afundada se todas as casas que a formam forem atingidas.

3º) A cada alvo acertado, o jogador marca no próprio esquema de jogo para informar o tipo de embarcação afundada.

O jogo termina quando um dos jogadores afunda todas as embarcações do oponente.

Veja um exemplo de esquema de jogo:





ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

Observe que, nesse jogo, indicamos um tiro pelas **coordenadas** do quadradinho a ser atingido. Por exemplo:

- (6, H) ⟶ um submarino é atingido
- (13, B) ⟶ o tiro cai na água
- (8, L) ⟶ parte do porta-aviões é atingida

Essa forma de localização é um exemplo do que chamamos **par ordenado**.

Muitas vezes, para localizar um ponto em um plano, utilizamos um par ordenado, que consiste em dois números escritos em certa ordem.

Exemplos

- $(\underbrace{3}_{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}, \underbrace{4}_{2^{\underline{o}}\text{ elemento}})$
- $\left(\underbrace{-2}_{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{2^{\underline{o}}\text{ elemento}}\right)$

Indicamos por (x, y) o par ordenado formado pelos elementos x e y, em que x é o primeiro elemento e y é o segundo.

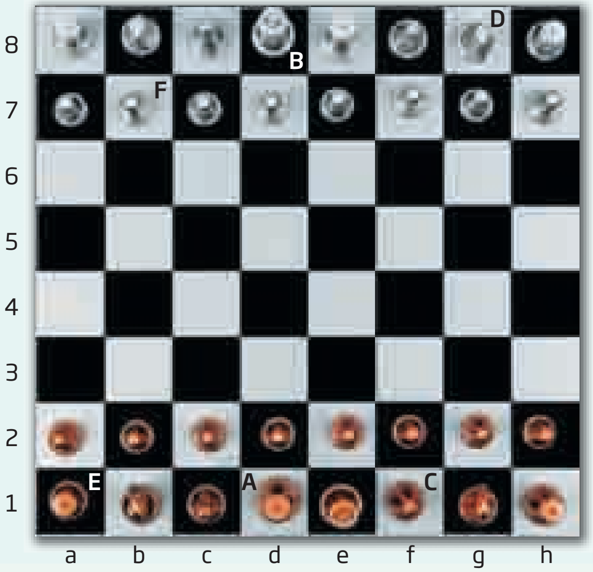
Observação

Dois pares ordenados (x, y) e (r, s) serão iguais se, e somente se, $x = r$ e $y = s$.

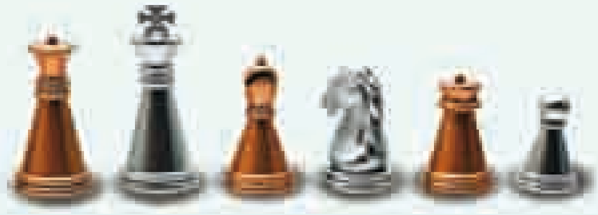
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe o tabuleiro de xadrez e determine a posição (letra, número) ocupada pelas peças indicadas abaixo.



CONSTANTINOS Z/SHUTTERSTOCK



VALZAN/SHUTTERSTOCK

A	B	C	D	E	F
(d, 1)	(d, 8)	(f, 1)	(g, 8)	(a, 1)	(b, 7)

2 Determine x e y para que cada uma das igualdades seja verdadeira.

a) $(x, y) = (8, -3)$ $x = 8; y = -3$

b) $(8, y + 5) = (x, 8)$ $x = 8; y = 3$

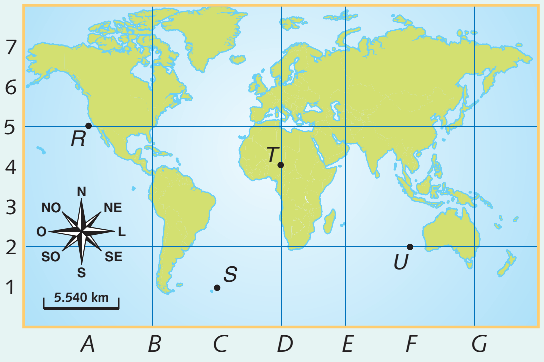
c) $(x, -2) = (8, y)$ $x = 8; y = -2$

d) $(x + 1, y + 1) = (8, 6)$ $x = 7; y = 5$

e) $(x, y + 2) = (5, 4)$ $x = 5; y = 2$

f) $(4, y + 7) = (x + 1, 6)$ $x = 3; y = -1$

3 Utilizando pares ordenados, identifique a localização dos pontos R, S, T e U no Planisfério. $R(A, 5)$; $S(C, 1)$; $T(D, 4)$; $U(F, 2)$



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Exiba o par ordenado correspondente a um ponto que está sobre o oceano Pacífico? (G, 4)

Lendo e aprendendo

O sistema GPS

Atualmente, qualquer pessoa pode se localizar no planeta com precisão nunca antes imaginada. Isso se tornou possível graças ao sofisticado Sistema de Posicionamento Global – em inglês, *Global Positioning System* (GPS). O GPS é um sistema de posicionamento geográfico que fornece as coordenadas de qualquer lugar na Terra, desde que se tenha um receptor de sinais de GPS.

Nesse sistema, uma posição sobre a Terra é determinada em relação ao Equador e ao Meridiano de Greenwich e é dada por três números: latitude, longitude e altitude.

O perfeito funcionamento do GPS é obtido por meio da utilização de 24 satélites artificiais que, dando uma volta em torno da Terra a cada 12 horas, enviam continuamente sinais de rádio. Existem ainda 4 satélites sobressalentes.

O GPS tem se tornado cada vez mais popular entre as pessoas que desejam se orientar em suas viagens.


KACZOR58/SHUTTERSTOCK

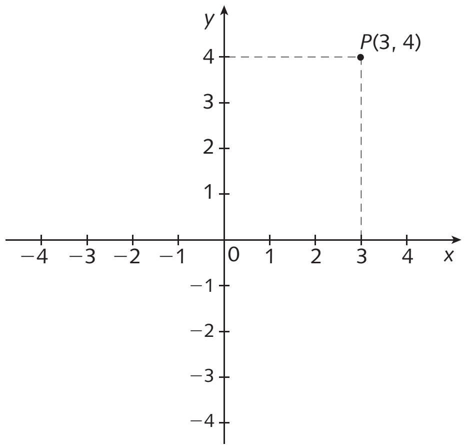
Receptor de sinais de GPS.


UNIVERSAL IMAGES GROUP/CONTRIBUTOR/GETTY IMAGES

Satélite artificial em órbita terrestre.

Representação geométrica de pares ordenados

Em um plano, traçamos duas retas com orientação crescente, *x* e *y*, perpendiculares entre si, para fazer a representação geométrica de pares ordenados. Observe a figura abaixo.



LUIZ RUBIO

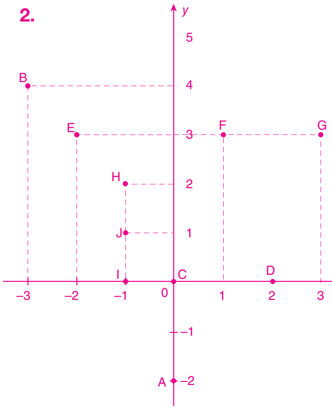
- A reta horizontal é o **eixo *x***.
- A reta vertical é o **eixo *y***.
- O ponto de intersecção entre essas duas retas é denominado **origem** e corresponde ao par ordenado (0, 0).
- O plano determinado por esses eixos é chamado de **plano cartesiano**.

Nessa representação, os pares ordenados são associados a pontos. Os elementos desses pares são chamados de **coordenadas cartesianas** dos pontos. Em cada par ordenado, o 1º elemento é a **abscissa** do ponto e o 2º elemento é a **ordenada** do ponto.

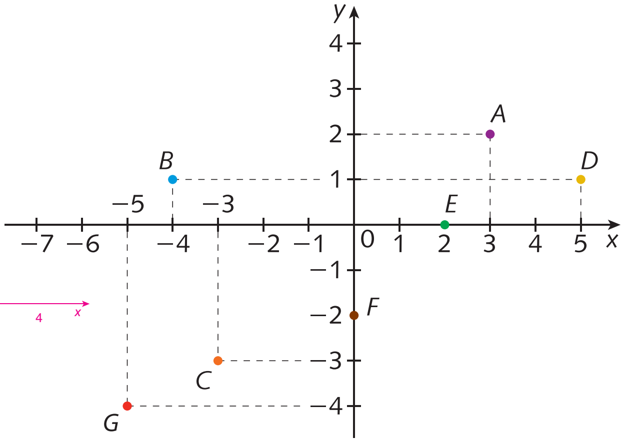
Exemplos

- $P(3, 4)$
  - → 4 é a ordenada do ponto *P*.
  - → 3 e 4 são as coordenadas do ponto *P*.
  - → 3 é a abscissa do ponto *P*.
- Representar os pares ordenados $A(3, 2)$; $B(-4, 1)$; $C(-3, -3)$; $D(5, 1)$; $E(2, 0)$; $F(0, -2)$; $G(-5, -4)$ no plano cartesiano.

2.



GUILHERME CASAGRANDI



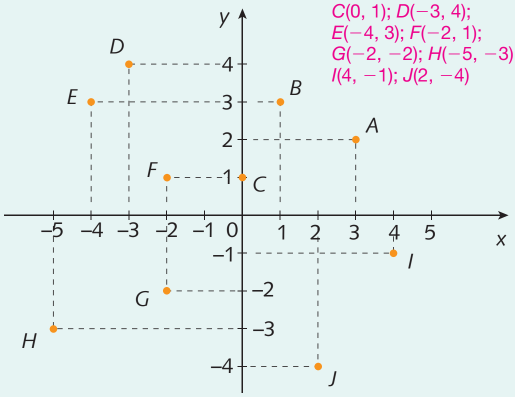
Comente com os alunos que cada par ordenado está associado a um único ponto do plano e que cada ponto do plano corresponde a um único par ordenado.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine as coordenadas de cada um dos pontos.

$A(3, 2)$; $B(1, 3)$; $C(0, 1)$; $D(-3, 4)$; $E(-4, 3)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, -2)$; $H(-5, -3)$; $I(4, -1)$; $J(2, -4)$



GUILHERME CASAGRANDI

2 Trace duas retas númericas x e y, perpendiculares entre si. Em seguida, represente os pares ordenados.

$A(0, -2)$
$B(-3, 4)$
$C(0, 0)$
$D(2, 0)$
$E(-2, 3)$
$F(1, 3)$
$G(3, 3)$
$H(-1, 2)$
$I(-1, 0)$
$J(-1, 1)$

3 Reúna-se com um colega e, para cada item, tracem duas retas numéricas perpendiculares entre si, determinando o plano cartesiano. Em seguida, representem cinco pontos cujos pares ordenados tenham:

Respostas pessoais.

a) coordenadas iguais;
b) coordenadas opostas;
c) abscissa x igual a 3;
d) abscissa x igual a -3;
e) ordenada y igual a 2;
f) ordenada y igual a -1.

4 Considerando as respostas dadas na atividade anterior, respondam às questões.

a) Em cada item, se unirmos os pontos, a linha formada dará ideia de uma reta? Sim.

b) Em relação ao eixo x, qual é a posição da reta dos pontos do item **c**? E da reta dos pontos do item **d**? Perpendicular; perpendicular

c) Em relação ao eixo x, qual é a posição da reta dos pontos do item **e**? E da reta dos pontos do item **f**? Paralela; paralela

2 Equação do 1º grau com duas incógnitas


GEORGE TUTUMI

Considere a situação a seguir.

Emília comprou uma caneta e dois lápis por R$ 10,00.

Indicando por x o preço de uma caneta e por y o preço de um lápis, podemos escrever:

$x + 2y = 10$

Temos, então, um exemplo de equação do 1º grau com duas incógnitas.

Denominamos **equação do 1º grau com duas incógnitas** (x e y) aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números reais, chamados coeficientes, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva uma equação que represente cada uma das situações a seguir.

a) O perímetro de um retângulo com lados de medidas x e y é 48 cm. $2x + 2y = 48$

b) O comprimento x de um retângulo excede sua largura y em 9 cm. $x - y = 9$

c) De um total de 20 tiros dados no tiro ao alvo, Julinho acertou x e errou y. $x + y = 20$

d) No tiro ao alvo, ganhando 5 pontos em cada um dos x tiros acertados e perdendo 3 pontos em cada um dos y tiros errados, Julinho fez 68 pontos. $5x - 3y = 68$

2 No sítio de Pedro há x galinhas e y porcos, em um total de 140 pés. Escreva uma equação que represente essa situação. $2x + 4y = 140$

Representação gráfica das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Observe a equação do 1º grau com duas incógnitas $x + 2y = 16$.

Em seguida, veja alguns possíveis valores de x e y.

Peça aos alunos que encontrem algumas soluções para a equação $x + 2y = 10$ da situação acima, em que x e y são os preços de uma caneta e de um lápis, respectivamente.

x	y	$x + 2y = 16$
0	8	$0 + 2 \cdot 8 = 16$
2	7	$2 + 2 \cdot 7 = 16$
4	6	$4 + 2 \cdot 6 = 16$
10	3	$10 + 2 \cdot 3 = 16$
16	0	$16 + 2 \cdot 0 = 16$

A equação $x + 2y = 16$ admite infinitas soluções.

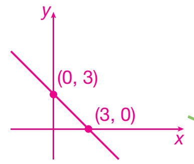
As soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas podem ser expressas por pares ordenados (*x*, *y*) e representadas graficamente no plano cartesiano.

Na equação $x + 2y = 16$, os pares ordenados (0, 8), (2, 7), (4, 6), (10, 3) e (16, 0) são algumas de suas soluções.

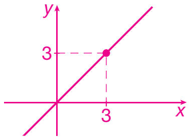
Observe a representação desses pares ordenados no plano cartesiano.

Note que os pontos estão alinhados – eles sugerem uma reta. No Ensino Médio, vamos demonstrar que o conjunto de todas as soluções de $x + 2y = 16$, em que *x* e *y* são números reais, é representado por uma reta.

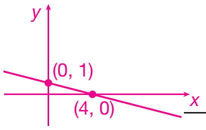
3. a)

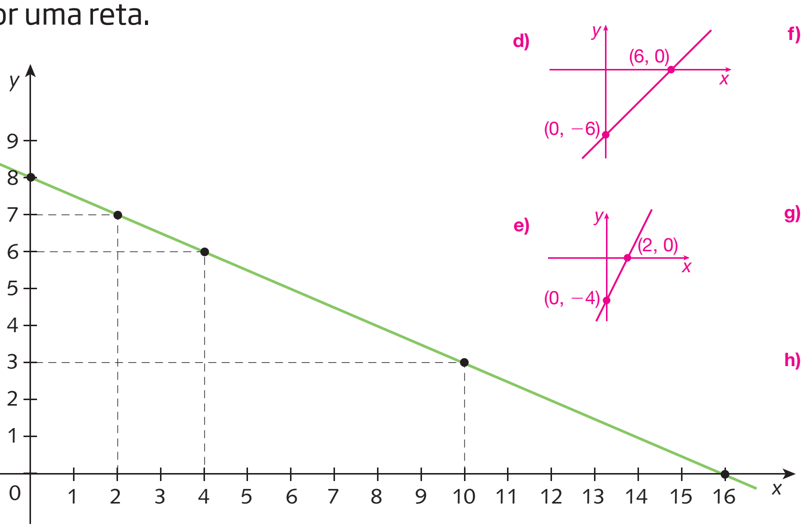


b)



c)

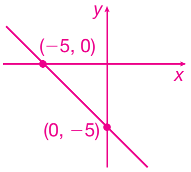




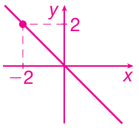
d)

e)

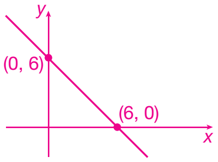
f)



g)



h)



LUIZ RUBIO

FERNANDO JOSÉ FERREIRA

O conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas números reais, é representado no plano cartesiano por uma reta.

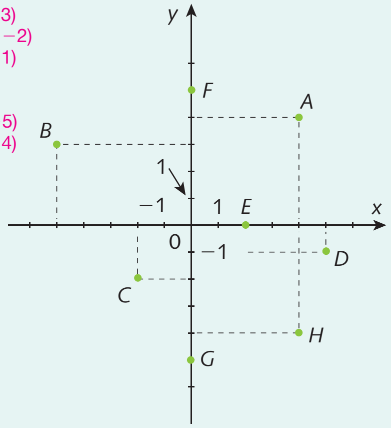
Comente com os alunos que dois pontos determinam uma única reta e que portanto, para representar graficamente as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas que assumem valores reais, basta encontrar dois pares ordenados que sejam soluções, representá-los no plano e traçar a reta que passa por esses pontos.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine as coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* indicados no plano cartesiano abaixo.

A(4, 4)
B(−5, 3)
C(−2, −2)
D(5, −1)
E(2, 0)
F(0, 5)
G(0, −5)
H(4, −4)



GUILHERME CASAGRANDI

2 Copie o plano cartesiano com aqueles cinco pontos cujos pares ordenados são soluções da equação $x + 2y = 16$ (ver acima). Depois, na equação, substitua *x* por cinco outros números e calcule os valores correspondentes de *y*. Localize no plano os pontos (*x*, *y*) obtidos. Os novos pontos estão alinhados com os pontos anteriores? Sim, estão alinhados.

3 Represente graficamente as soluções das equações. Respostas acima.

a) $x + y = 3$
b) $y = x$
c) $x + 4y = 4$
d) $x - y = 6$
e) $2x - y = 4$
f) $x + y = -5$
g) $x + y = 0$
h) $x + y = 6$

3

Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Considere a situação a seguir.

Um grupo de amigos foi a uma sorveteria e comprou sorvetes com uma ou duas bolas ao preço de R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Foram comprados 12 sorvetes, que custaram ao todo R$ 44,00. Quantos sorvetes com uma bola foram comprados? E com duas bolas?

GEORGE TUTUMI

Vamos indicar por x a quantidade de sorvetes com uma bola e por y a quantidade de sorvetes com duas bolas. Assim, podemos representar essa situação em linguagem algébrica da seguinte forma:

$x + y = 12$ ← "Foram comprados 12 sorvetes."

$3x + 5y = 44$ ← "Custaram ao todo R$ 44,00."

Temos, portanto, duas equações do 1º grau com as mesmas duas incógnitas, que formam um **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**.

Indicamos o sistema de equações assim:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$$

Para responder às perguntas do problema, é necessário resolver esse sistema de equações. A seguir você aprenderá a resolvê-lo.

4

Resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Considere a situação a seguir.

Jonas possui R$ 130,00 em cédulas de R$ 10,00 e R$ 20,00, em um total de 9 cédulas. Quantas cédulas de cada espécie possui Jonas?

Considerando x o número de cédulas de R$ 10,00 e y o número de cédulas de R$ 20,00, podemos escrever um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que represente essa situação:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 20y = 130 \end{cases}$$

A solução do sistema deve satisfazer as duas equações.

Na busca dessa solução podemos realizar tentativas, atribuindo valores a x e a y. Assim:

x	y	$x + y = 9$	$10x + 20y = 130$
2	7	$2 + 7 = 9$	$10 \cdot 2 + 20 \cdot 7 = 160$
3	6	$3 + 6 = 9$	$10 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 150$
4	5	$4 + 5 = 9$	$10 \cdot 4 + 20 \cdot 5 = 140$
5	4	$5 + 4 = 9$	$10 \cdot 5 + 20 \cdot 4 = 130$

Observe que $x = 5$ e $y = 4$, ou seja, o par ordenado (5, 4) é a solução do sistema, pois satisfaz as duas equações.

Resolvemos o sistema acima pelo **método da tentativa**. Vamos estudar agora os métodos da substituição e da adição para resolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Método da substituição

Considere o sistema: $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

Para resolvermos esse sistema pelo **método da substituição**, inicialmente escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Isolando x na primeira equação temos:

$$x = -5 + y$$

Em seguida, substituímos x por $-5 + y$ na segunda equação para obter uma equação com apenas a incógnita y.

$2x + 3y = 10$

$2(-5 + y) + 3y = 10$

$-10 + 2y + 3y = 10$

$5y = 20$, ou seja: $\mathbf{y = 4}$

Proponha as seguintes questões aos alunos: Você acha que há outras maneiras de resolver esse sistema sem substituir x pela expressão $-5 + y$? Se fosse escolhida a 2ª equação para isolar uma das incógnitas, o resultado seria o mesmo? Espera-se que os alunos percebam que é possível isolar y na primeira equação, substituir a expressão obtida na segunda e assim obter $x = -1$ e que, escolhendo a 2ª equação, o resultado também seria o mesmo. Se julgar conveniente, peça que resolvam o mesmo sistema escolhendo a 2ª equação para isolar uma das incógnitas.

Depois, substituímos o valor de y em uma das equações, determinando x:

$x = -5 + y$

$x = -5 + 4$, ou seja: $\mathbf{x = -1}$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (−1, 4).

Peça aos alunos que resolvam o sistema que soluciona o problema da sorveteria da página anterior. Espera-se que concluam que foram comprados 8 sorvetes de uma bola e 4 de duas.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva novamente o sistema dado acima, mas agora isolando a incógnita y na primeira equação. A solução também é o par ordenado (−1, 4)? Sim.

2 Resolva os sistemas de equações pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 26 \end{cases}$ (8, −10)

b) $\begin{cases} 3x - y = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ (−2, 5)

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ (1, 1)

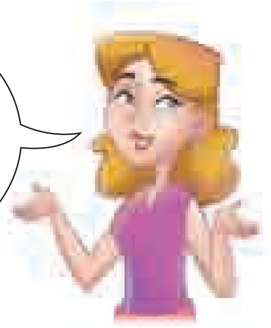
d) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ (3, 1)

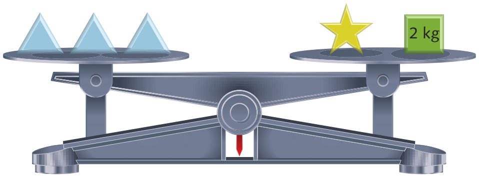
3 Releia a abertura deste capítulo. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações obtidas, descubra em quantas provas, das sete primeiras em que pontuou na temporada de 2014, Hamilton ganhou e em quantas ficou com o 2º lugar. Venceu 5 vezes e ficou em 2º lugar 2 vezes.

Método da adição

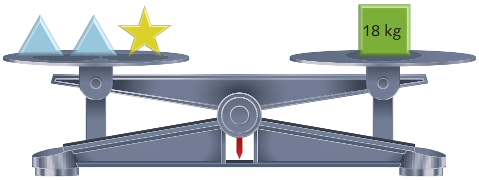
Assim como os dois pratos de uma balança, os dois membros de uma equação devem ser "equilibrados". A balança equilibrada simboliza uma igualdade.

Usaremos as balanças para ilustrar a resolução, pelo método da adição, de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas: nas ilustrações representadas por ▲ e ★ e, algebricamente, por *x* e *y*, respectivamente.


GEORGE TUTUMI

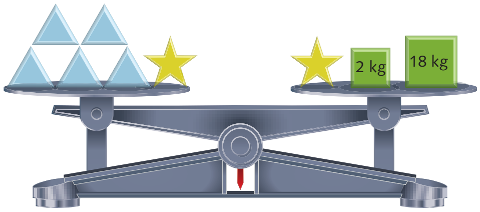


→ $3x = y + 2$

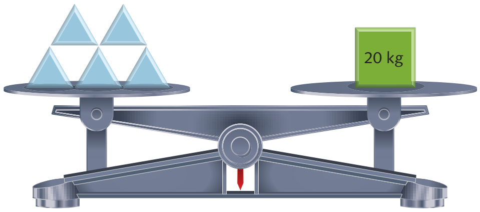


→ $2x + y = 18$

$$\begin{cases} 3x = y + 2 & \text{(I)} \\ 2x + y = 18 & \text{(II)} \end{cases}$$

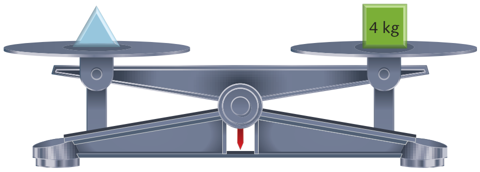


→ $5x + y = y + 2 + 18$ → Adicionamos membro a membro as duas equações, a incógnita *y* poderá ser eliminada



→ $5x = 20$

$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 20$ → Aplicamos o princípio multiplicativo das igualdades



→ $\mathbf{x = 4}$ → Obtemos o valor de *x*

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Substituindo o valor de *x* na equação (I) ou na equação (II), obtemos o valor de *y*.

$3x = y + 2$ (I)	$2x + y = 18$ (II)
$3 \cdot \mathbf{4} = y + 2$	$2 \cdot \mathbf{4} + y = 18$
$12 - 2 = y + 2 - 2$	$8 + y - 8 = 18 - 8$
$\mathbf{10 = y}$	$\mathbf{y = 10}$

Portanto, o par ordenado (4, 10) é solução do sistema.

Assim, ▲ vale 4 kg e ★ vale 10 kg.

Exemplos

- Resolver o sistema pelo método de adição:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Adicionando essas equações membro a membro, obtemos outra igualdade. Veja:

$$\begin{array}{r} x + \cancel{y} = 16 \\ + \quad x - \cancel{y} = 2 \\ \hline 2x + 0y = 18 \end{array}$$

Adicionando os termos opostos *y* e −*y*, a incógnita *y* é eliminada.

$2x = 18$

$x = \dfrac{18}{2}$

$x = 9$

Substituindo o valor de *x* em uma das equações, determinamos o valor de *y*:

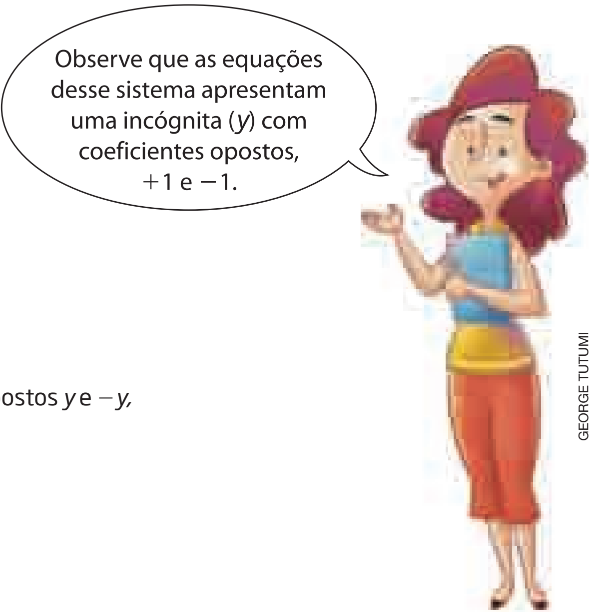
$x + y = 16$

$9 + y = 16$

$y = 16 - 9$

$y = 7$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (9, 7).



GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Resolver o sistema: $\begin{cases} x + 5y = -28 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$

Observe que nenhuma das incógnitas tem os coeficientes opostos.

Inicialmente, vamos escolher a incógnita *x* para "preparar" o sistema, aplicando o princípio multiplicativo.

Se achar necessário, explique aos alunos que "preparar" o sistema significa produzir novas equações, equivalentes às anteriores, com coeficientes opostos para uma incógnita.

Ao multiplicar todos os termos da primeira equação por (−2), obtemos uma equação equivalente a ela que, ao ser adicionada membro a membro com a segunda equação, fará com que a incógnita *x* seja eliminada. Veja:

$$\begin{cases} x + 5y = -28 \quad \cdot(-2) \\ 2x + 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 10y = 56 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$$

Chame a atenção dos alunos para o fato de que foi aplicado o princípio multiplicativo das igualdades na 1ª equação.

Depois de eliminar a incógnita *x*, determinamos o valor de *y*.

$$\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 10y = 56 \\ + \quad \cancel{2x} + 3y = -7 \\ \hline 0x - 7y = 49 \\ \boldsymbol{y = -7} \end{array}$$

Comente com os alunos que também é possível multiplicar ambos os membros das equações por outros números e obter, nas duas novas equações, coeficientes de *y* opostos. Se julgar conveniente, proponha aos alunos que encontrem um número pelo qual podemos multiplicar a 1ª equação e o número que devemos multiplicar a 2ª equação, de modo que os coeficientes de *y* em ambas sejam opostos. Uma possibilidade é multiplicar a 1ª equação por 3 e a 2ª equação por −5.

Substituindo o valor de *y* em uma das equações, determinamos o valor de *x*:

$x + 5y = -28$

$x + 5 \cdot (-7) = -28$

$x - 35 = -28$, ou seja: $\boldsymbol{x = 7}$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (7, −7).

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva os sistemas de equações abaixo utilizando o método da adição.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ (3, −1)

b) $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ (2, 3)

c) $\begin{cases} 4x - y = -4 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$ (5, 24)

d) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$

e) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ (1, 1)

f) $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ 4x - 2y = -1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

g) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

h) $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 3x - y = 14 \end{cases}$ $\left(\frac{41}{7}, \frac{25}{7}\right)$

i) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{8}y = \frac{1}{6} \end{cases}$ $\left(\frac{7}{16}, \frac{1}{6}\right)$

2 A soma de dois números é 320, e a diferença entre eles é 60. Determine esses números. 130 e 190

3 Em uma fazenda só há galinhas e vacas num total de 36 cabeças e 102 pés. Quantas galinhas há nessa fazenda? 21 galinhas

Lendo e aprendendo

Eureka!


TOMA

Arquimedes (287-212 a.C.), natural da cidade grega de Siracusa, foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos e certamente o maior da Antiguidade.

O experimento [...] de Arquimedes de Siracusa sobre a densidade relativa dos corpos é muito engenhoso. A história da sua descoberta foi relatada pelo arquiteto romano Vitrúvio no livro IX de *De arquitectura* e foi inventada simplesmente para ilustrar de modo impressionante uma descoberta científica. [...]

Segundo Vitrúvio, o rei Híeron II teria decidido, no momento da sua ascensão ao trono de Siracusa, comemorar o evento depositando em um templo uma coroa de ouro puro consagrada aos deuses. Fez então contato com um ourives e lhe entregou uma quantidade precisa de ouro. Na data prevista, o ourives levou ao rei uma coroa soberbamente cinzelada, cuja [massa] correspondia exatamente [à massa] do ouro que lhe fora dado.

Pouco tempo depois, vieram insinuar ao rei que o ourives roubara uma parte do ouro, substituindo-a, na coroa, por [uma massa] equivalente em prata. O rei Híeron, furioso, mas não sabendo como descobrir a verdade, pediu a Arquimedes que lhe fornecesse a prova da culpa ou da inocência do homem.

Preocupado com o assunto, Arquimedes dirigiu-se para as termas. Então, notou que, quanto mais afundava o corpo na banheira, mais água derramava para fora. Quando o seu corpo estava totalmente imerso, uma quantidade determinada de água tinha sido derramada. Impressionado com esse fenômeno, de aparência banal, descobriu a solução para o problema de Híeron e saiu do banho precipitando-se para casa completamente nu – pelo menos assim disse Vitrúvio – e gritando *Eureka!*, *Eureka!* – "Achei! Achei". A água derramada correspondia [à massa] em volume de água do seu corpo imerso: a sua quantidade era, pois, inversamente proporcional à densidade do seu corpo.

TOMA

Para resolver o dilema de Híeron, bastava então estudar o comportamento do ouro e da prata na água. Se uma coroa de ouro puro imersa em um recipiente deslocava uma quantidade de água diferente de uma coroa de prata com a mesma massa, imersa nas mesmas condições, é que o ouro e a prata tinham densidades diferentes; uma coroa feita de uma liga de ouro e prata teria então a sua densidade própria, diferente da densidade das duas outras coroas. Para verificar isso, bastava medir a quantidade de água que cada massa deslocava, e, se houvesse divergência, uma fraude eventual poderia ser desmascarada.

Arquimedes tomou então dois objetos [de mesma massa] que a coroa do ourives: um de ouro puro, o outro de prata pura. Em seguida, encheu um vaso com água até a borda e mergulhou o objeto de ouro puro e depois o de prata pura. [...] Enfim, mergulhou a coroa do ourives e descobriu que ela deslocava uma quantidade de água intermediária entre a quantidade de água deslocada pelo objeto de ouro puro e pelo de prata pura. Assim, obteve a prova de que a coroa fora feita de uma liga de ouro e prata.

A questão da densidade dos corpos, que foi perfeitamente percebida por Arquimedes, formula-se nos tempos modernos da seguinte maneira: a massa específica de um corpo é a relação da sua massa com o seu volume $\left(\frac{M}{V}\right)$, e sua densidade é a relação de sua massa específica com a da água, tomada em uma temperatura padrão de 4 °C.

[...]

Arquimedes, densidade e a origem do nome *Eureka!*
Disponível em: <www.obm.org.br>.
Acesso em: 2 abr. 2015.

TOMA

5 Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

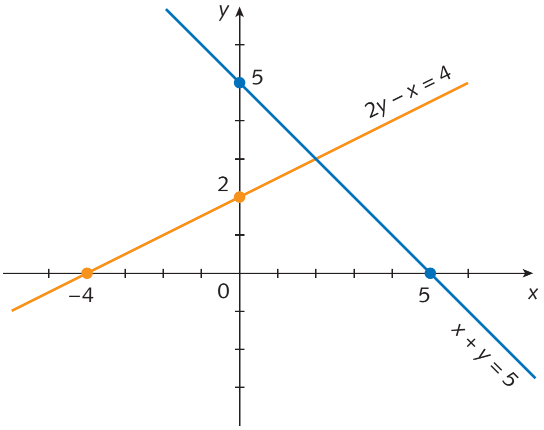
Resolvendo esse sistema por qualquer um dos métodos já estudados, encontramos como solução o par ordenado (2, 3).

Vamos agora obter graficamente a solução para esse sistema. Inicialmente, vamos determinar a solução gráfica de cada uma das equações que corresponde a uma reta.

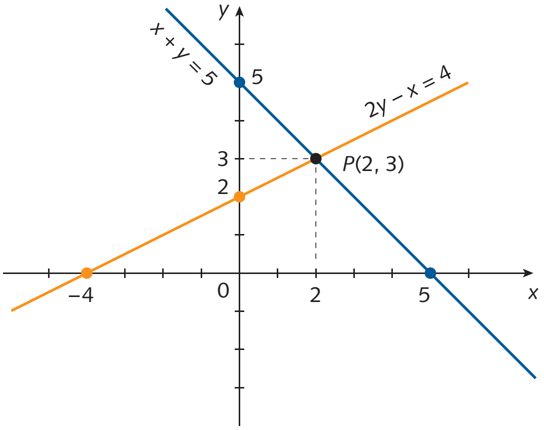
Para traçar uma reta, basta conhecer dois pontos distintos dela. Assim, atribuindo valores para x e determinando os valores correspondentes de y em cada equação, obtemos pontos que permitirão traçar duas retas. Cada uma dessas retas representa a solução de uma equação.

$x + y = 5$		
x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
5	0	(5, 0)

$2y - x = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
−4	0	(−4, 0)



As coordenadas do ponto de encontro das retas formam o par ordenado que é a solução do sistema. Nem sempre é possível obter essas coordenadas com precisão, mas podemos obter boas aproximações delas e depois verificá-las, substituindo-as nas equações. Para obter as coordenadas do ponto de encontro, traçamos, por ele, retas perpendiculares aos eixos.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Nesse caso, as retas são concorrentes e o par ordenado (2, 3) é a solução **única** do sistema. Assim, dizemos que o sistema é **possível e determinado**, pois tem **uma única solução**.

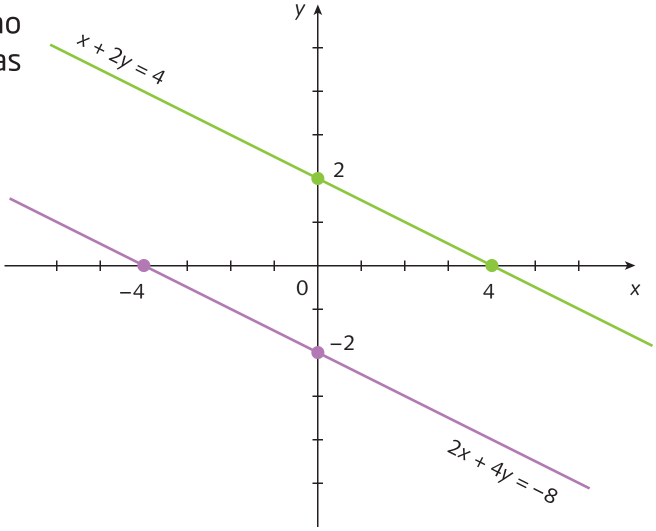
Exemplos

- Resolver o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = -8 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos no plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

$x + 2y = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
4	0	(4, 0)

$2x + 4y = -8$		
x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
-4	0	$(-4, 0)$



Em seguida, procuramos determinar o ponto em que as retas se encontram.

Observamos que as retas são **paralelas**, ou seja, não têm ponto comum. Logo, não é possível encontrar o par ordenado (x, y), que corresponde à solução do sistema.

Assim, o sistema é **impossível**, pois **não tem solução**.

Veja a resolução pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & \cdot(-2) \\ 2x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -2x - 4y = -8 \\ +2x + 4y = -8 \\ \hline 0x + 0y = -16 \end{array}$$

Na igualdade $0x + 0y = -16$ obtida, para quaisquer valores dados a x e a y temos uma sentença falsa, pois multiplicados por zero resultam em zero, e não em -16.

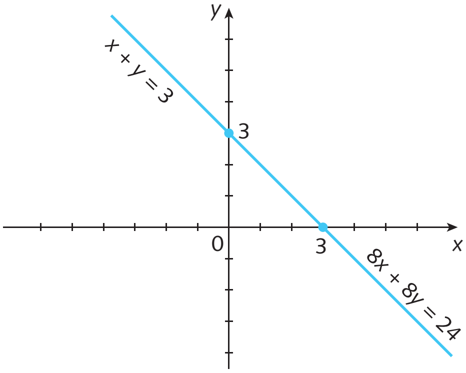
Portanto, o sistema é impossível, como já tínhamos visto na solução gráfica acima.

- Resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos no plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

$x + y = 3$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$8x + 8y = 24$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Em seguida, procuramos determinar os pontos de encontro das retas.

Observamos que as retas são **coincidentes**, ou seja, têm infinitos pontos comuns. Assim, o sistema é **possível e indeterminado**, pois tem **infinitas soluções**. Para obter qualquer uma dessas infinitas soluções, basta, em uma das equações, atribuir um valor para uma das incógnitas e calcular o valor correspondente da outra.

ATIVIDADE

Faça a atividade no caderno.

1 Represente graficamente as soluções dos sistemas. Em seguida, classifique cada um dos sistemas em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$ possível e indeterminado

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$ impossível

c) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ possível e indeterminado

d) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -4x - 2y = -8 \end{cases}$ possível e indeterminado

e) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ possível e determinado; (2, 4)

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$ impossível

g) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$ impossível

h) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

possível e determinado; (4, 2)

LÉO FANELLI

Lendo e aprendendo

O papiro de Rhind

O papiro de Rhind ou papiro Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., em que um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de Aritmética e Geometria. Trata-se de um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje. O texto está em hierático, uma versão da escrita com hieróglifos. Na solução dos problemas, encontramos equações cujas incógnitas são representadas por **íbis** (ave sagrada dos egípcios) cavando o solo.

O papiro de Rhind está no Museu Britânico, em Londres.

BRITISH MUSEUM, LONDRES

Fragmento do papiro de Rhind.

Íbis

Ave pernalta com pescoço longo e bico comprido e encurvado para baixo.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(OBM) Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso [massa]. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra? alternativa **d**

a) 200 g b) 208 g c) 256 g d) 272 g e) 280 g

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Se um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g, quanto pesarão dois pregos, seis parafusos e quatro ganchos? 48 g
- Com a informação obtida no item anterior, associada à informação dada no enunciado de que dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g, é possível encontrar a massa de um parafuso. Determine-a. 4 g

Plano de resolução

Seja x a massa do prego, y a massa do parafuso e z a massa do gancho.
Assim: $x + 3y + 2z = 24$, $2x + 5y + 4z = 44$ e $12x + 32y + 24z = P$

- Escreva três equações com as informações do enunciado.
- Multiplique a primeira equação por 12 e relacione-a com a terceira equação. Que conclusões você obteve?

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 24 \\ 12x + 32y + 24z = P \end{cases} \xrightarrow{\cdot(12)} \begin{array}{l} 12x + 36y + 24z = 288 \\ 12x + 32y + 24z = P \cdot (-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} \cancel{12x} + 36y + \cancel{24z} = 288 \\ -\cancel{12x} - 32y - \cancel{24z} = -P \\ \hline 4y \qquad = 288 - P \end{array}$$

Considerando a massa do parafuso, é possível responder à questão proposta.

Resolução

- Reúna-se com mais dois colegas.
- Mostre a eles seu plano de resolução e verifique se há ideias em comum entre vocês.
- Discutam quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um dos planos para a execução do processo de resolução.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Exemplo de resolução: Se a massa do parafuso é 4 g, temos:

$$\begin{aligned} 4y &= 288 - P \\ 4 \cdot 4 &= 288 - P \\ P &= 272 \end{aligned}$$

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Cada grupo deverá criar duas novas situações de compra na loja de ferragens, buscando sempre quantidades de pregos, parafusos e ganchos que sejam múltiplas das quantidades originais. Em seguida, deverão formular as equações e responder às perguntas formuladas. Essas novas situações devem ser apresentadas na forma de cartazes e explicadas para toda a turma.

Uma nova situação poderia ser, por exemplo: Qual é a massa de 7 pregos, 15 parafusos e 14 ganchos? Resposta: 144 g

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 O que é um par ordenado?
É um par de elementos, indicado por (x, y), em que há uma ordem: x é o primeiro valor e y é o segundo.

2 Uma equação do 1º grau com duas incógnitas admite infinitas soluções. Proponha três pares de soluções para a equação $2x - y = 4$. Exemplo de resposta: $(0, -4)$; $(2, 0)$; $(1, -2)$

3 Como podemos saber se um par ordenado é solução de determinada equação do 1º grau com duas incógnitas? Basta substituir os valores de x e y na equação e verificar se a sentença obtida é verdadeira.

4 Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas sempre pode ser resolvido pelo método da adição e também pelo da substituição? Como você decide o método que vai empregar na resolução? Sim; resposta pessoal.

5 Sobre a representação gráfica das soluções de um sistema de equações do 1º grau, copie as sentenças a seguir, completando com uma das opções dadas nos parênteses.

a) Se as retas que representam as soluções das equações são (concorrentes/paralelas/coincidentes), haverá uma única solução do sistema. Assim, o sistema é (possível e determinado/possível e indeterminado/impossível). concorrentes; possível e determinado

b) Se as retas que representam as soluções das equações são coincidentes, haverá (uma única solução/infinitas soluções) do sistema. Assim, o sistema é (possível e determinado/possível e indeterminado/impossível). infinitas soluções; possível e indeterminado

c) Se as retas que representam as soluções das equações são (concorrentes/paralelas/coincidentes), (não haverá/haverá) solução. Assim, o sistema é impossível.
paralelas; Não haverá.

Aplicando

1 Para cada item, desenhe um plano cartesiano e nele marque cinco pontos de coordenadas (x, y), de maneira que: Respostas pessoais

a) y seja o dobro de x;

b) y seja a metade de x;

c) y seja o oposto de x;

d) y seja o oposto do dobro de x;

e) y seja a soma de x com 2;

f) y seja a soma de x com 3;

g) y seja a soma de x com 4.

2 A soma de dois números é 115 e a diferença entre eles é 41. Determine-os. 78 e 37

3 A soma de dois números é 163. O quociente do maior número pelo menor é 5 e o resto é 7. Determine-os 137 e 26
Sugestão: $x + y = 163$, $y = 5x + 7$

4 O par ordenado (x, y) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

Resolva-o e, depois, encontre o valor de:

a) $x^2 - y^2$ 800

b) $x \cdot y$ 300

c) $x^2 + y^2$ 1 000

d) $\frac{x}{y}$ 3

5 O par ordenado (x, y) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ 5x + y = 1 \end{cases}$$

Determine a alternativa correta. alternativa **c**

a) $x = 4y$

b) $x : y = -4$

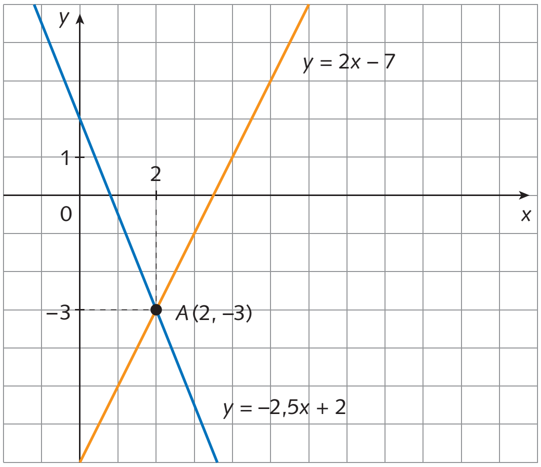
c) $x \cdot y = -4$

d) $x = -4y$

6 Hoje, Ronaldo tem o dobro menos quatro anos da idade de Pedro. Há dez anos, a idade de Ronaldo era o triplo da idade de Pedro. Quantos anos eles têm hoje?
Ronaldo tem 28 anos e Pedro, 16 anos.

7 A soma de dois números é 43, e um deles excede o outro em cinco unidades. Quais são esses números? 19 e 24

8 Observe a figura, que representa a solução gráfica de um sistema, e responda às questões.



GUILHERME CASAGRANDI

a) Quais são as duas equações desse sistema? $y = 2x - 7$; $y = -2{,}5x + 2$

b) Qual é o par ordenado que é solução desse sistema? $(2, -3)$

c) Qual é o valor de x que torna verdadeira a igualdade $2x - 7 = -2{,}5x + 2$? $x = 2$

9 Resolva os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas utilizando o método da substituição.

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $(6, 1)$

b) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ $(1, -2)$

c) $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ 4y = 8 \end{cases}$ $(2, 2)$

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$ $(14, -14)$

10 Em um estacionamento, há automóveis e bicicletas, no total de 32 veículos e 88 pneus. Determine o número de veículos de cada tipo. 20 bicicletas e 12 automóveis.

11 Se $3a + 8b = 45$ e $5a + 6b = 53$, determine o valor de $a - b$. 4

12 Em um circo havia dois valores de ingresso: um para os adultos e outro para as crianças. Um grupo de seis crianças e um adulto pagou R\$ 71,00 pelos ingressos. Outro grupo, de sete crianças e quatro adultos, pagou R\$ 131,00. Qual era o preço de cada ingresso? criança: R\$ 9,00; adulto: R\$ 17,00

13 Utilizando o método da adição, resolva cada um dos sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{cases}$ $(14, 6)$

b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = -25 \end{cases}$ $(-5, 5)$

c) $\begin{cases} x + 4y = -1 \\ x - 15y = -20 \end{cases}$ $(-5, 1)$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 26 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ $(1, 8)$

14 A diferença entre dois números é 72, e o quociente entre eles é 5. Quais são esses números? 18 e 90

15 O perímetro de um retângulo é 200 cm. Sabendo que a medida de um de seus lados excede a medida do outro lado em 30 cm, determine as dimensões desse retângulo.
35 cm e 65 cm

16 Júlio comprou um terreno de 264 hectares de área. Ele o desmembrou em duas partes, de modo que uma, destinada à criação de aves, representasse $\frac{3}{8}$ da área da parte restante. Calcule a área, em hectare, da parte reservada ao aviário. 72 hectares

17 Em um estacionamento há 45 veículos, alguns de quatro rodas e outros de duas. Calcule o número de veículos de quatro rodas, sabendo que o total de rodas é 160.
35 veículos

18 Determine dois números cuja diferença é $\frac{11}{3}$, sabendo que a soma do dobro do maior número com o triplo do menor é $\frac{17}{3}$. $\frac{10}{3}$ e $-\frac{1}{3}$

19 Em um caderno estão desenhados triângulos e quadrados, totalizando 35 figuras e 125 lados. Calcule o número de quadrados.
20 quadrados

Lembre-se:
Não escreva no livro!

20 Determine o par (x, y) de números reais que é solução de cada sistema abaixo.

a) $\begin{cases} y = 5 + 3x \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$ (−1, 2)

b) $\begin{cases} x = 2y + 7 \\ x + y = -5 \end{cases}$ (−1, − 4)

c) $\begin{cases} 1{,}3x - 0{,}8y = 0{,}35 \\ 0{,}2x + 0{,}35y = 1 \end{cases}$ (1,5; 2)

d) $\begin{cases} x - 4y = -3 \\ (6 + y) \cdot (5 + x) = 70 + xy \end{cases}$ (5; 2)

21 Julinho está brincando de tiro ao alvo. A cada tiro que acerta no alvo, ele ganha cinco pontos e, a cada tiro errado, perde três pontos. Ele já deu 20 tiros e ganhou 68 pontos. Quantos tiros Julinho acertou até agora? 16 tiros

22 A diferença entre as idades de Fábio e Moisés é 27 anos. Fábio tem o sêxtuplo da idade de Moisés menos três anos. Qual é a idade de cada um? Fábio: 33 anos; Moisés: 6 anos

23 Resolva graficamente os sistemas a seguir e classifique-os em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$ (−1, 2); possível e determinado

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 6x + 15y = 24 \end{cases}$ possível e indeterminado

c) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 6 \end{cases}$ impossível

d) $\begin{cases} 3x + (y - 2) = 20 \\ (x - 5) + y = 5 \end{cases}$ (6, 4); possível e determinado

e) $\begin{cases} 5x + 6y = 30 \\ 10x + 12y = 60 \end{cases}$ possível e indeterminado

f) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{4y}{3} = 2 \end{cases}$ impossível

24 A soma de dois números é 195. A divisão do maior pelo menor tem quociente 12 e resto zero. Determine-os. 15 e 180

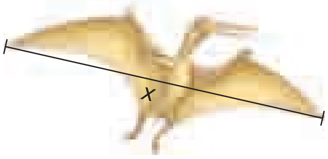
25 Em uma bolsa, há R$ 640,00 em cédulas de R$ 10,00 e R$ 50,00. Sabendo que o total de cédulas é 24, determine o número de cédulas de cada espécie.
10 cédulas de R$ 50,00; 14 cédulas de R$ 10,00

26 Resolva mentalmente os sistemas de equações abaixo.

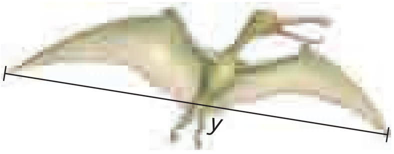
a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (6, 4)

b) $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{cases}$ (20, 10)

27 Para determinar a envergadura dos animais pré-históricos ilustrados abaixo, o professor Hugo chegou às seguintes equações matemáticas: $x + y = 5{,}96$ e $2x + 4y = 12{,}84$.



O corpo do *Pterodactylus* era coberto por um pelo fino.



O *Cearadactylus* voava sobre o mar e capturava peixes com seus longos dentes curvados.

GEORGE TUTUMI

Determine a medida das envergaduras (x e y) desses animais, sabendo que a unidade utilizada pelo professor Hugo foi o metro. $x = 5{,}5$ m, $y = 0{,}46$ m

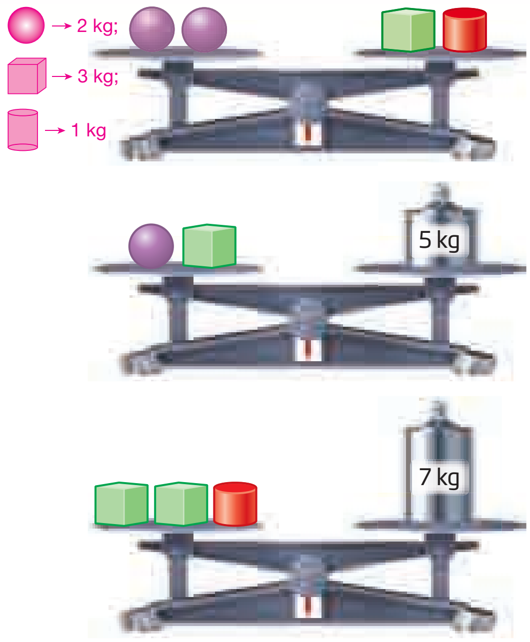
28 A soma de dois números é 81, e o menor é $\dfrac{2}{7}$ do maior. Quais são esses números? 18 e 63

29 Tenho avestruzes e coelhos, em um total de 35 cabeças e 110 pés. Calcule o número de avestruzes e de coelhos.
15 avestruzes e 20 coelhos

CRÉDITOS DAS FOTOS -AVESTRUZ: AARON AMAT/SHUTTERSTOCK; COELHO: JOSHUA LEWIS/SHUTTERSTOCK

DESAFIO

Observe as três balanças a seguir e determine a massa de ●, 🟩 e 🟥.



30 A soma de dois números inteiros é 683. Na divisão do maior pelo menor, obtêm-se quociente e resto iguais a 5. Qual é o menor dos números? 113

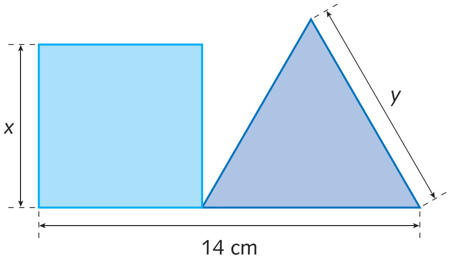
31 Represente em um plano cartesiano no caderno os pontos correspondentes a alguns pares ordenados que são solução de cada uma das equações. Construção de gráfico.

a) $x + y = 3$

b) $x - 2y = -4$

32 Lana possui notas de R\$ 5,00 e R\$ 10,00. São 20 notas que totalizam R\$ 140,00. Há quantas notas de cada valor?
12 notas de R\$ 5,00; 8 notas de R\$ 10,00

33 O quadrado e o triângulo equilátero abaixo têm o mesmo perímetro. Determine x e y.
$x = 6$ cm; $y = 8$ cm



34 As idades de João e Nicole somam 45 anos. Há cinco anos, a idade de João era quatro vezes a de Nicole. Que idade têm, agora, João e Nicole? João: 33 anos; Nicole: 12 anos

35 Uma sacola contém bolas brancas e vermelhas. O número total de bolas é 65, e o número de bolas brancas é igual a $\frac{5}{8}$ do número de bolas vermelhas. Determine o número de bolas brancas. 25 bolas brancas

36 Sabendo que a medida da altura do foguete A é $\frac{8}{9}$ da medida da altura do foguete B e que a soma dessas medidas é 102 m, determine-as. medida da altura do foguete A = 48 m; medida da altura do foguete B = 54 m

37 Duas caixas contêm, conjuntamente, 84 chocolates. Se fossem tirados quatro chocolates de uma das caixas e colocados na outra, ambas ficariam com o mesmo número de chocolates. Quantos chocolates contém cada uma das caixas? 46 e 38 chocolates

38 O perímetro de um retângulo é 36 cm. Se a um dos lados for adicionado 1 cm e, do outro lado, forem subtraídos 2 cm, a figura obtida será um quadrado. Calcule as dimensões do retângulo. 7,5 cm; 10,5 cm

39 Um mensageiro foi de A a B de bicicleta, com velocidade de 10 km/h, e voltou de B a A, a pé, fazendo 4 km/h. Calcule a distância AB, sabendo que o tempo total de ida e de volta foi de sete horas. 20 km

40 Uma pilha de 40 tábuas tem 1,7 m de altura e é formada por tábuas de 2 cm e de 5 cm de espessura. Quantas são as tábuas de 2 cm? 10 tábuas

41 O número 38 é dividido em duas parcelas. A maior parcela, dividida pela menor, dá quociente 4 e resto 3. Determine o produto das duas parcelas. 217

42 Um baleiro vende dois tipos de balas: b_1 e b_2. Três balas do tipo b_1 custam R$ 0,10, e a unidade da bala b_2 custa R$ 0,15. No final de um dia de trabalho, o baleiro vendeu 127 balas e arrecadou R$ 5,75. Quantas balas b_1 foram vendidas? 114 balas

43 Ana e Clara têm, juntas, 16 anos. Daqui a um ano, Ana terá o dobro da idade de Clara. Qual é a idade de cada uma?
Ana: 11 anos; Clara: 5 anos

44 Comprei 10 frangos e 15 perus por R$ 800,00. Determine o preço de cada ave, sabendo que um frango e um peru custam juntos R$ 60,00. frango: R$ 20,00; peru: R$ 40,00

45 Dois tanques contêm juntos 900 ℓ de óleo. Se passarmos 100 ℓ do primeiro tanque para o segundo, este ficará com o dobro do número de litros do primeiro. Quantos litros contém o segundo tanque? 500 ℓ

46 Paulo doou parte de sua biblioteca. Deu a metade dos seus livros a um amigo, um quarto do restante a outro e ainda sobraram 60 livros. Quantos livros ele possuía?
160 livros


LÉO FANELLI

47 As idades atuais de duas pessoas estão entre si como 3 para 4. Há dez anos essa relação era de 2 para 3. Qual é a idade de cada pessoa? 30 anos e 40 anos

48 Em um cesto há abacaxis, laranjas e bananas, no total de 96 frutas. O número de abacaxis é o triplo do número de laranjas, e o número de bananas é igual ao número de laranjas e abacaxis juntos. Quantas frutas há de cada tipo?
12 laranjas, 36 abacaxis e 48 bananas


JUNIOR ROZZO

49 Determine dois números, sabendo que o dobro da sua diferença é 4 e o quádruplo do inverso de sua soma é 2. 2 e 0

DESAFIO

Tenho duas vezes a idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que tenho, a soma de nossas idades será 45 anos. Quantos anos tenho? 20 anos

50 **(EPCar-MG)** Sr. Luiz pretende dividir a quantia *x* reais entre seus netos. Observou que se der 50 reais para cada um lhe faltarão 50 reais e se der 40 reais para cada um lhe sobrarão 40 reais. Com base nisso, é correto afirmar que: alternativa **a**

a) Sr. Luiz possui menos de 500 reais para dividir entre seus netos.

b) Sr. Luiz tem mais de 10 netos.

c) Se um dos netos do Sr. Luiz não quiser o dinheiro, os demais receberão menos de 45 reais cada um.

d) É possível que o Sr. Luiz divida a quantia *x* em partes iguais entre todos os seus netos, de forma que não lhe sobre nenhum centavo.

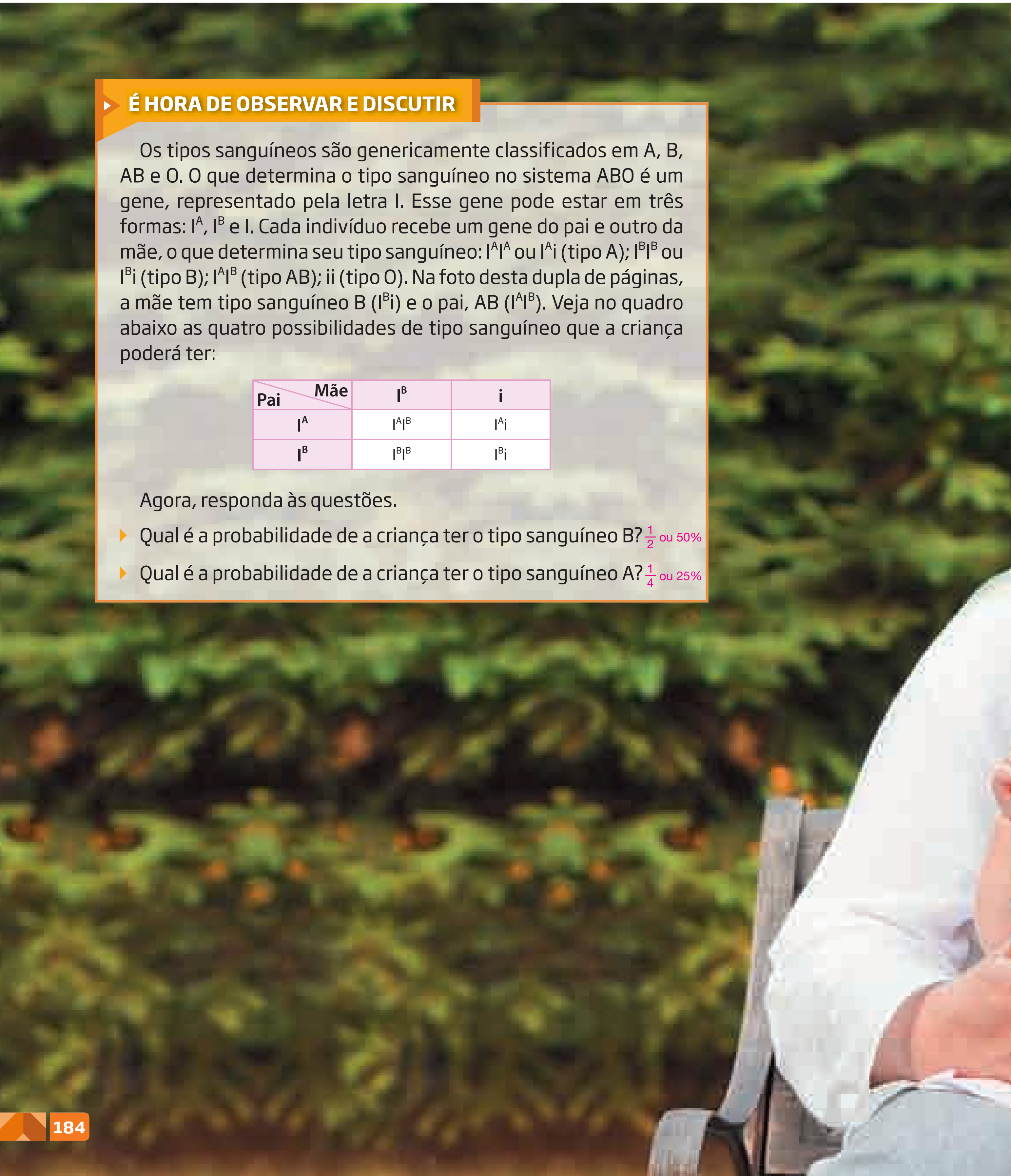
Desafio $\begin{cases} x = 2[y - (x - y)] \\ [x + (x - y)] + [y + (x - y)] = 45 \end{cases}$

x ← minha idade atual
y ← tua idade atual
$(x - y)$ ← diferença entre nossas idades, em qualquer época

CAPÍTULO

9

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE



É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Os tipos sanguíneos são genericamente classificados em A, B, AB e O. O que determina o tipo sanguíneo no sistema ABO é um gene, representado pela letra I. Esse gene pode estar em três formas: I^A, I^B e I. Cada indivíduo recebe um gene do pai e outro da mãe, o que determina seu tipo sanguíneo: I^AI^A ou I^Ai (tipo A); I^BI^B ou I^Bi (tipo B); I^AI^B (tipo AB); ii (tipo O). Na foto desta dupla de páginas, a mãe tem tipo sanguíneo B (I^Bi) e o pai, AB (I^AI^B). Veja no quadro abaixo as quatro possibilidades de tipo sanguíneo que a criança poderá ter:

Mãe / Pai	I^B	i
I^A	I^AI^B	I^Ai
I^B	I^BI^B	I^Bi

Agora, responda às questões.

- Qual é a probabilidade de a criança ter o tipo sanguíneo B? $\frac{1}{2}$ ou 50%
- Qual é a probabilidade de a criança ter o tipo sanguíneo A? $\frac{1}{4}$ ou 25%

Neste capítulo, vamos aprofundar o estudo de Estatística e Probabilidade. Vamos apresentar os conceitos de população, amostra, rol, espaço amostral e experimento aleatório.

Em seguida, vamos fazer uma revisão de gráficos de segmentos e de barras verticais e horizontais, além de iniciar o estudo do gráfico de setores.

REB IMAGES/BLEND IMAGES/GETTY IMAGES

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Considere a situação a seguir.

Lucas ganhou um jogo de tabuleiro com raias. Além do tabuleiro, acompanham o jogo 11 cavalos numerados de 2 a 12 e dois dados.

De acordo com a regra desse jogo, cada jogador escolhe de 2 a 5 cavalos, dependendo da quantidade de participantes. Depois, cada um deve lançar, na sua vez, os dados, e o cavalo cujo número é igual à soma dos pontos obtidos nos dados deve avançar uma casa. Ganha o jogo o participante que escolheu o cavalo que ultrapassar em primeiro lugar a linha de chegada. Caso o cavalo vencedor não tenha sido escolhido, o jogo deve ser reiniciado.

ÂNGELO SHUMAN

- Por que os cavalos foram numerados de 2 a 12? Por que não existe o cavalo de número 1 nesse jogo? Porque essas são as possíveis somas de pontos ao lançar dois dados. Não existe cavalo de número 1 porque a soma dos pontos de dois dados é no mínimo igual a 2 (1 + 1).
- Copie o quadro abaixo e complete com a soma das faces dos dados.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

MODELO

MODELO

Espera-se que os alunos percebam que os cavalos 6, 7 e 8 possuem maior probabilidade de ganhar o jogo, uma vez que há mais possibilidades de a soma dos pontos ser 7, 6 ou 8 após o lançamento de dois dados. Além disso, os cavalos de números 2 e 12 são os que possuem a menor probabilidade de vencer, pois há somente uma possibilidade de a soma ser 2 (1 + 1) ou 12 (6 + 6).

- Se você fosse jogar esse jogo, que cavalos escolheria? E quais não escolheria? Justifique sua resposta.
- Após algumas partidas, sempre que possível, Lucas escolheu o cavalo 7. Por que Lucas preferiu esse cavalo? Porque é o cavalo que tem maior probabilidade de vencer.

Neste capítulo, vamos ampliar os estudos sobre Estatística e Probabilidade.

1 Estatística

Ao fazer uma pesquisa que envolve a opinião ou os hábitos das pessoas, obtemos os chamados **dados** (informações) referentes aos elementos da pesquisa. As conclusões de uma pesquisa podem ser traduzidas em resultados numéricos.

Observe o exemplo a seguir:

A **Estatística** é a parte da Matemática que fornece métodos para coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados oriundos de estudos ou experimentos realizados em qualquer área do conhecimento.

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

O processo estatístico constitui-se de:

1º) formulação da pergunta que vai gerar os dados;

2º) coleta de dados necessários à pesquisa;

3º) apuração dos dados – soma e processamento dos dados obtidos, de acordo com o critério escolhido;

4º) apresentação dos dados por meio de tabelas e gráficos;

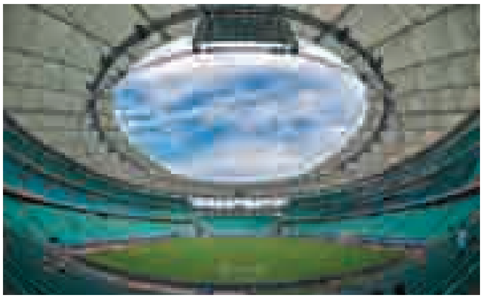
5º) análise dos resultados.

População e amostra

Suponha que estejamos interessados em conhecer a opinião dos torcedores sobre a segurança do principal estádio de uma cidade. Para isso, o objeto do nosso estudo são os torcedores que frequentam o estádio.

Essa é a **população** ou o **universo estatístico**.

Logicamente, não conseguiríamos ouvir todos os torcedores; seria uma operação difícil, de alto custo e muito lenta. Recorremos, então, a uma **amostra** – ou seja, uma parte do universo estatístico – que possa dar uma ideia da opinião de todos os indivíduos da população.



ROBERTO MAYA/MEXSPORT/FOTOARENA/FOLHAPRESS

Arena Fonte Nova, Salvador, BA, 2014.

Nesse caso, um grupo de torcedores – homens e mulheres de várias idades – pode servir de amostra.

Observações

1 A qualidade das questões elaboradas para a pesquisa são de fundamental importância para a credibilidade do resultado da pesquisa.

2 O tamanho da amostra e os critérios de escolha dos seus elementos devem ser estudados atentamente para que a pesquisa seja bem-sucedida.

Variáveis

Em uma pesquisa, cada característica estudada é denominada **variável**.

Na pesquisa sobre a opinião dos torcedores a respeito da segurança do estádio, podemos adotar algumas variáveis, como sexo, idade, quantidade de vezes que o torcedor vai ao estádio por mês, entre outras.

Nessa pesquisa, masculino e feminino são os resultados possíveis para sexo, e os resultados possíveis para idade podem ser expressos por números naturais.

As variáveis podem ser classificadas em:

- **qualitativa** – quando o valor da variável é expresso por um atributo. Por exemplo, sexo masculino ou sexo feminino;
- **quantitativa** – quando o valor da variável é expresso por números. Por exemplo, idade e quantidade de vezes que o torcedor vai ao estádio por mês.

Rol

Chama-se **rol** toda sequência de dados numéricos dispostos em ordem crescente ou decrescente, podendo ocorrer repetição de números iguais.

Exemplo

As notas em Geografia dos alunos de uma turma foram:
6, 3, 8, 4, 5, 7, 6, 9 e 10

Apresentando esses dados em rol, temos:

(3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9 e 10)

ou

(10, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 4 e 3)

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

Distribuição de frequência

Observe a medida da altura dos 32 alunos de uma turma de Ensino Médio, em centímetro:

150	164	172	149	174	182	158	155
156	142	176	168	161	158	184	157
180	165	147	152	148	177	166	163
150	172	186	145	162	167	156	178

Apresentando os dados em rol, temos:

142	145	147	148	149	150	150	152
155	156	156	157	158	158	161	162
163	164	165	166	167	168	172	172
174	176	177	178	180	182	184	186

Nessa pesquisa, a variável em questão é a altura dos 32 alunos de uma turma de Ensino Médio.

Observe que, quando organizamos esses dados em rol, fica mais fácil identificarmos o menor valor, que é 142 centímetros, e o maior valor, que é 186 centímetros. Também é possível verificar que há 28 valores diferentes: 142, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 156, 157, 158, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 172, 174, 176, 177, 178, 180, 182, 184 e 186. Podemos agrupar esses dados em classes preestabelecidas. É conveniente que essas classes tenham mesma amplitude, ou seja, mesmo "tamanho". Trabalharemos, nesse exemplo, com cinco classes. Veja a seguir duas formas de representar as classes.

$140 \leqslant x < 150$		$140 \vdash\!\!\relbar\!\!\relbar 150$
$150 \leqslant x < 160$		$150 \vdash\!\!\relbar\!\!\relbar 160$
$160 \leqslant x < 170$	ou	$160 \vdash\!\!\relbar\!\!\relbar 170$
$170 \leqslant x < 180$		$170 \vdash\!\!\relbar\!\!\relbar 180$
$180 \leqslant x < 190$		$180 \vdash\!\!\relbar\!\!\relbar 190$

Comente com os alunos que, caso as classes tenham tamanho desigual, a comparação entre as frequências de cada uma fica prejudicada, uma vez que uma frequência maior em uma classe pode ser fruto apenas do "tamanho" da mesma, e não da característica pesquisada. Por outro lado, classes de tamanho desigual podem ser convenientes para representar valores nas extremidades da tabela.
Comente também que a opção de qual extremo incluir pode ser arbitrária, mas o importante é indicar claramente quais são os valores que estão sendo contados em cada classe.

Observe a tabela de distribuição de frequência da variável altura nesta turma do Ensino Médio:

Distribuição de frequência das alturas dos 32 alunos	
Altura *x* (em centímetro)	**Frequência**
$140 \leqslant x < 150$	5
$150 \leqslant x < 160$	9
$160 \leqslant x < 170$	8
$170 \leqslant x < 180$	6
$180 \leqslant x < 190$	4

Dados obtidos pela turma do Ensino Médio.

GEORGE TUTUMI

Na tabela de distribuição de frequência das alturas dos 32 alunos, temos, por exemplo, na classe $140 \leqslant x < 150$ uma frequência igual a 5, que corresponde às medidas: 142 cm, 145 cm, 147 cm, 148 cm e 149 cm. A contagem de frequência é indicada também nas demais classes.

Observações

1 A soma de todas as frequências ($5 + 9 + 8 + 6 + 4 = 32$) é chamada **frequência total** (**F_t**).

2 Dividindo a frequência (F) de uma classe pela frequência total (F_t), obtemos um número chamado **frequência relativa** do intervalo.

Assim, na situação anterior, a frequência relativa da classe de $160 \leqslant x < 170$ é:

$$\frac{F}{F_t} = \frac{8}{32} = 0{,}25 \text{ ou } 25\%$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Classifique as variáveis abaixo em quantitativa ou qualitativa.

a) idade quantitativa

b) nota quantitativa

c) esporte preferido qualitativa

d) salário quantitativa

e) cor dos olhos qualitativa

2 Os dados abaixo correspondem à massa, em quilograma, de 20 alunos. Observe:

87	85,5	72	54	68,3
73,4	92,3	56	75	66
52	86	70,9	65	52,7
60,1	56,4	52	90	71

a) Copie a tabela abaixo no caderno, substituindo corretamente cada ▬ pelos valores correspondentes.

Distribuição de frequência da massa dos alunos		
Classe	**Frequência**	**Frequência relativa**
50 ⊢ 60	6	$\frac{6}{20}$ = 0,30 ou 30%
60 ⊢ 70	4 ▬	▬ 20%
70 ⊢ 80	5	▬ 25%
80 ⊢ 90	3 ▬	▬ 15%
90 ⊢ 100	2	▬ 10%
Frequência total	20	100%

b) Qual é a soma das frequências relativas de todas as classes? 100%

2 Gráficos de segmentos e de barras

Em Estatística, o gráfico tem como principal função apresentar os dados de uma pesquisa. A representação gráfica deve ser simples, clara e com informações verdadeiras.

Vamos relembrar os tipos de gráfico que já estudamos.

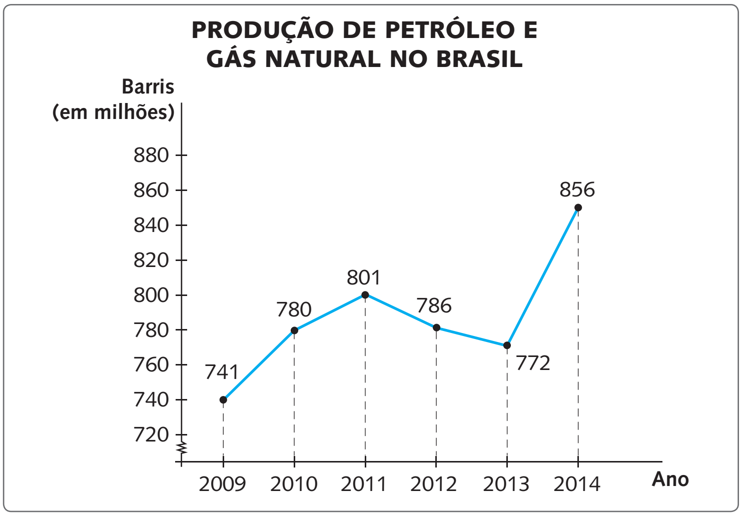
Observe a tabela a seguir, que mostra os dados da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) sobre a produção de petróleo e gás natural, no Brasil, de 2009 a 2014.

Produção de petróleo e gás natural no Brasil	
Ano	**Produção (em milhões de barris)**
2009	741
2010	780
2011	801
2012	786
2013	772
2014	856

Disponível em: <http://www.anp.gov.br/?pg=17019&m=&t1=&t2=&t3=&t4=&ar=&ps=&1427722793544>. Acesso em: 23 maio 2015.

Representando os dados da tabela por gráficos de segmentos e de barras (horizontal e vertical), temos:

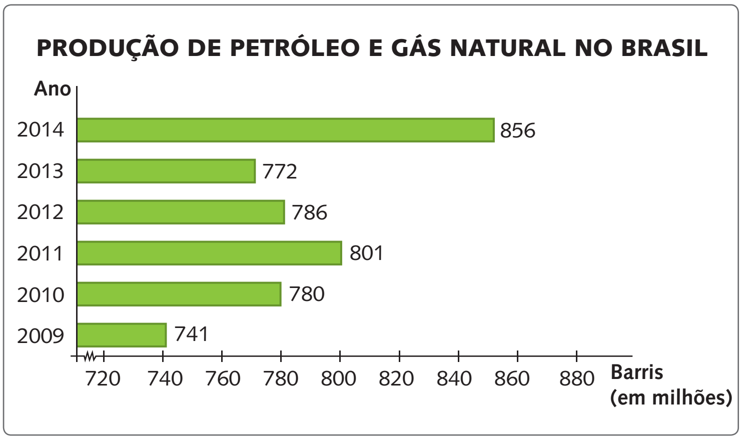
Gráfico de segmentos



O símbolo ⟿ que você vê em um dos eixos de cada gráfico serve para indicar que, no trecho de zero a 720 milhões, a escala adotada (de 20 em 20 milhões) não está sendo usada.

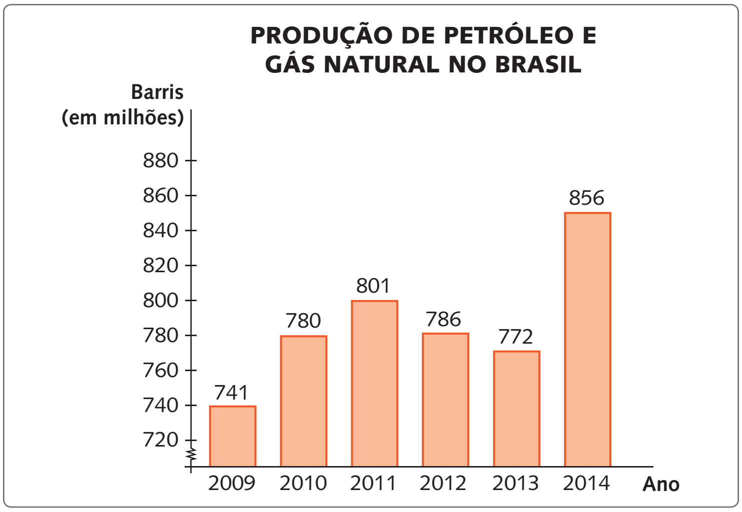
Disponível em: <http://www.anp.gov.br/?pg=17019&m=&t1=&t2=&t3=&t4=&ar=&ps=&1427722793544>. Acesso em: 23 maio 2015.

Gráfico de barras horizontais



Disponível em: <http://www.anp.gov.br/?pg=17019&m=&t1=&t2=&t3=&t4=&ar=&ps=&1427722793544>. Acesso em: 23 maio 2015.

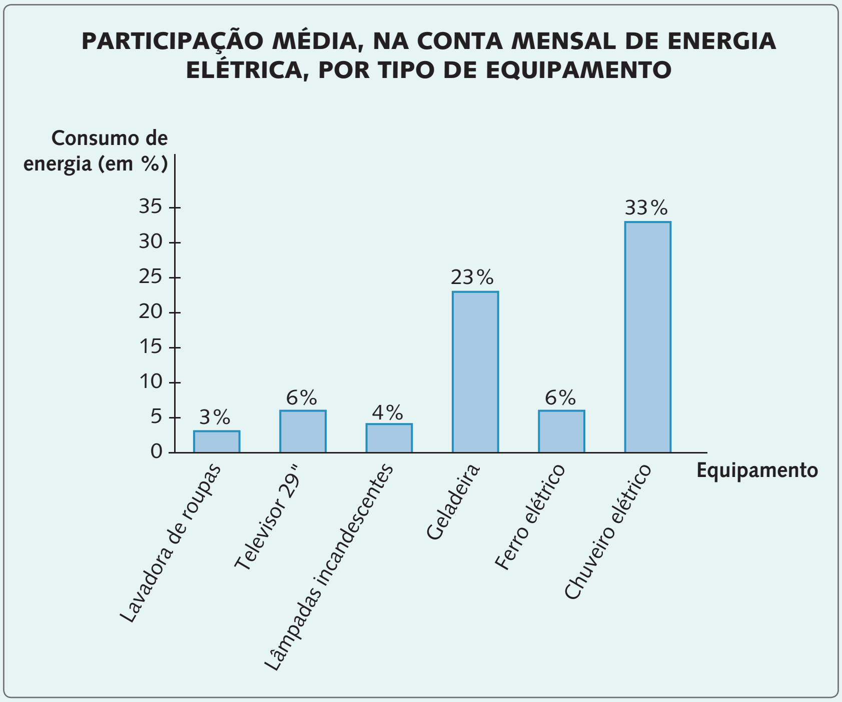
Gráfico de barras verticais



Disponível em: <http://www.anp.gov.br/?pg=17019&m=&t1=&t2=&t3=&t4=&ar=&ps=&1427722793544>. Acesso em: 23 maio 2015.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

1 Observe o gráfico e responda às questões.

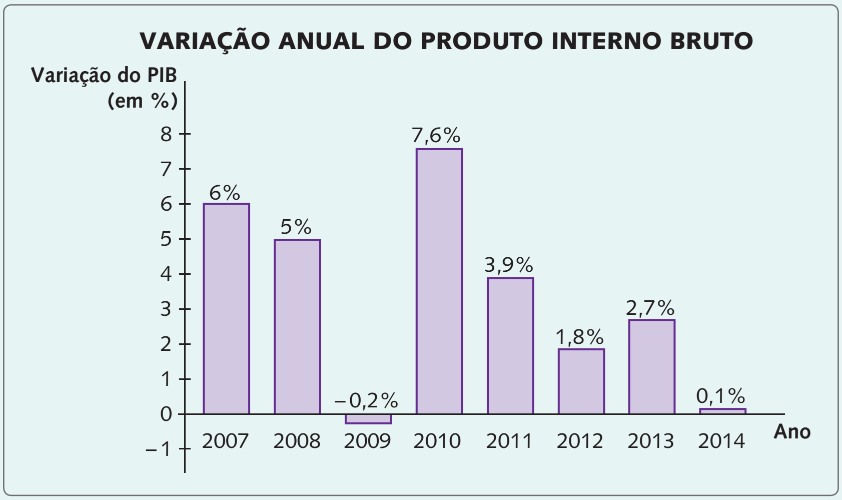


Disponível em: <http://www.cpfl.com.br/energias-sustentaveis/eficiencia-energetica/legislacao/download-manual-pee-aneel/Documents/Cartilha.pdf>. Acesso em: 23 maio 2015.

a) Que tipo de gráfico é esse? A que assunto se refere? Gráfico de barras verticais. Esse gráfico se refere à participação média na conta mensal de energia elétrica de equipamentos como lavadora de roupas, televisor 29", lâmpadas incandescentes etc.

b) Que equipamento tem maior consumo de energia? chuveiro elétrico

2 O gráfico abaixo apresenta a variação anual do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil de 2007 a 2014. Observe atentamente o gráfico e responda às questões.



Dados obtidos em: <https://www1.fazenda.gov.br/spe/publicacoes/conjuntura/atividade_economica/2015/2015_03/IE%202015%2003%2027%20PIB%204%C2%BA%20trimestre%202014-.pdf> Acesso em: 23 maio 2015.

a) Que tipo de gráfico foi utilizado para a apresentação da variação anual do PIB? gráfico de barras verticais

b) A maior taxa de variação anual do PIB ocorreu em que ano? 2010

c) A menor taxa de variação anual do PIB ocorreu em que ano? 2009

d) Construa no caderno um gráfico de segmentos que apresente os mesmos dados desse gráfico. Construção de gráfico.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

3 Uma escola tem 400 alunos matriculados no ensino do 1º ao 6º ano. Na tabela a seguir, vemos a distribuição desses alunos em cada ano escolar.

Distribuição de frequência dos alunos de acordo com o ano escolar						
Ano	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Frequência	64	68	70	75	65	58

Represente, por meio de um gráfico de barras horizontais, essa distribuição de frequências. Resposta pessoal.

4 Observe a foto e o gráfico abaixo.

DEAGOSTINI/PUBBLI AER FOTO/CONTRIBUTOR/GETTY IMAGES

Região desmatada ao longo do Rio Jari, que deságua no Rio Amazonas. Foto de 2014.

LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: <http://www.obt.inpe.br/prodes/index.php> Acesso em: 23 maio 2015.

Agora, responda às questões.

a) Em que ano ocorreu o menor desmatamento na Amazônia, nesse período? 2012

b) Em que ano ocorreu o maior desmatamento na Amazônia? A quantos quilômetros quadrados, aproximadamente, corresponde a área desmatada nesse ano? 2005; 19 014 km²

c) De 2011 a 2012, qual foi, em quilômetro quadrado, a redução da área desmatada na Amazônia? 1 847 km²

3 Gráfico de setores

Observe o exemplo a seguir.

- A companhia elétrica de um município fez um levantamento sobre o consumo médio diário de energia em quilowatts (kW), segundo as diferentes categorias de consumo. Veja os dados na tabela ao lado.

Consumo médio diário de energia elétrica

Categorias	Consumo médio diário
Residencial	240 000 kW
Comercial	288 000 kW
Industrial	384 000 kW
Outros	48 000 kW

Dados obtidos pela companhia elétrica.

TEBNAD/SHUTTERSTOCK

Linhas de transmissão.

Vamos construir um gráfico de setores com os dados dessa tabela. O gráfico de setores (ou gráfico circular) é utilizado para representar graficamente partes de um total (a unidade). O total é representado por um círculo dividido em setores, que são as partes.

Inicialmente, determinamos o total, que, nesse caso, corresponde ao consumo médio diário de todas as categorias.

240 000 + 288 000 + 384 000 + 48 000 = 960 000 (960 000 kW)

Depois, determinamos a porcentagem (%) correspondente ao consumo médio diário de cada uma das categorias.

Residencial: $\frac{240\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{960\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = 0{,}25 = 25\%$

Industrial: $\frac{384\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{960\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = 0{,}40 = 40\%$

Comercial: $\frac{288\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{960\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = 0{,}30 = 30\%$

Outros: $\frac{48\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{960\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = 0{,}05 = 5\%$

A seguir, calculamos o ângulo correspondente a cada setor, sabendo que o ângulo central total correspondente ao círculo mede 360°.

Residencial: 25% de 360° são 90°

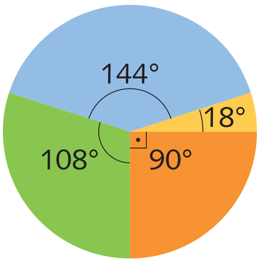
Industrial: 40% de 360° são 144°

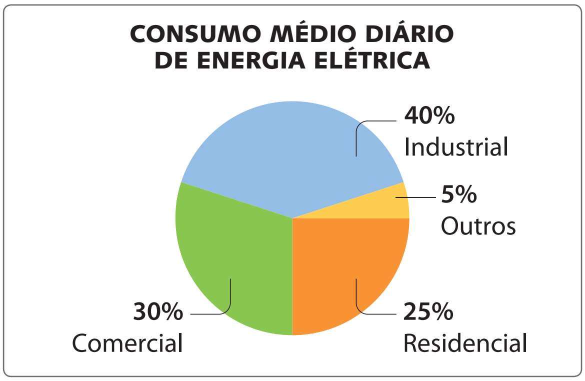
Comercial: 30% de 360° são 108°

Outros: 5% de 360° são 18°

Finalmente, construímos um círculo de raio qualquer. Com o auxílio de um transferidor, dividimos esse círculo de acordo com os ângulos obtidos anteriormente.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

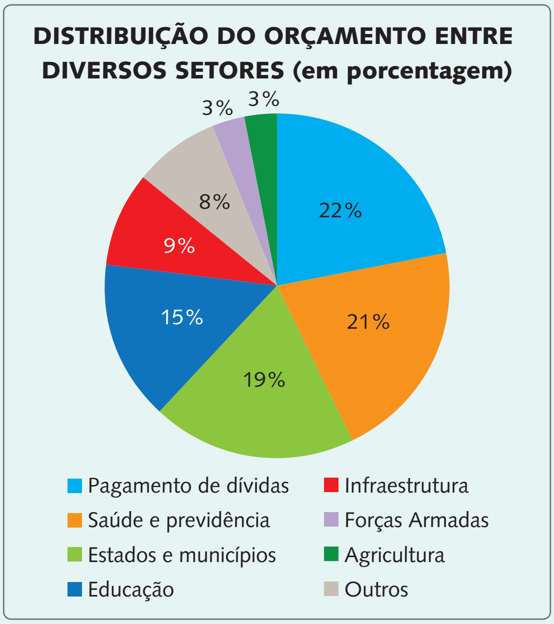




Dados obtidos pela companhia elétrica.

Faça as atividades no caderno.

1 Observe o gráfico a seguir, que mostra a distribuição dos gastos públicos de determinado país.



DISTRIBUIÇÃO DO ORÇAMENTO ENTRE DIVERSOS SETORES (em porcentagem)

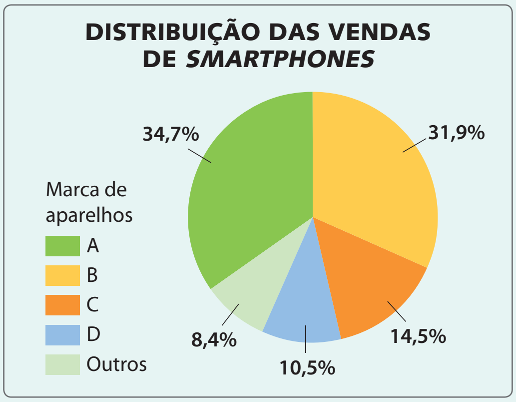
Dados fictícios.

LUIZ RUBIO

a) Que porcentagem do orçamento é gasto com saúde e previdência? 21%

b) Supondo que o orçamento desse país seja de 32 bilhões de dólares, quanto é o gasto com agricultura?
0,96 bilhão de dólares ou 960 milhões de dólares

2 Nos últimos anos, a venda de *smartphones*, aparelhos de celular com características de computadores, aumentou no Brasil. Veja no gráfico abaixo a distribuição das vendas de uma rede de lojas de acordo com a marca dos aparelhos.



DISTRIBUIÇÃO DAS VENDAS DE *SMARTPHONES*

Dados fictícios.

GUILHERME CASAGRANDI

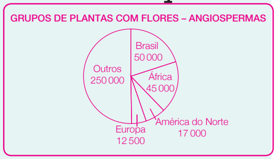
b) Sim; $\frac{1}{3}$ corresponde aproximadamente a 33,3%.

a) Em uma venda de 100 mil *smartphones*, quantos aparelhos eram da marca A? 34 700 aparelhos

b) Podemos afirmar que a venda dos aparelhos da marca A corresponde a mais de $\frac{1}{3}$ das vendas? Justifique sua resposta.

3 Leia o texto a seguir.

3. c)



GRUPOS DE PLANTAS COM FLORES – ANGIOSPERMAS

FERNANDO JOSÉ FERREIRA

Dados obtidos em: <http://teen.ibge.gov.br/mao-na-roda/flora-brasileira/especies-de-plantas>. Acesso em: 23 maio 2015.

> As plantas com flores, conhecidas como angiospermas, formam o principal e mais importante grupo de plantas terrestres. No mundo, estima-se que o número total está próximo de 250.000 espécies. No Brasil, calcula-se existir cerca de 50.000, ou seja, 20% do total de espécie no mundo.

Grupo de plantas com flores – Angiospermas	
Local	**Número de espécies**
Mundo	250 000
Brasil	50 000
África	45 000
América do Norte	17 000
Europa	12 500

Disponível em: <http://teen.ibge.gov.br/mao-na-roda/flora-brasileira/especies-de-plantas>. Acesso em: 23 maio 2015.

a) Quantas espécies de angiospermas há no Brasil, na África, na América do Norte e na Europa juntos? Esse valor corresponde ao total estimado para o mundo? 124 500 espécies; não

b) Existem espécies de angiospermas em outros locais que não foram citados na tabela? Converse com o professor e os colegas sobre isso. Sim

c) Represente em um gráfico de setores a distribuição da quantidade de espécies de angiospermas de acordo com as diferentes regiões do mundo.

4 Os 120 alunos do 8º ano de uma escola foram avaliados em Matemática, e suas notas estão representadas na tabela de distribuição de frequências abaixo.

Nota	4	5	6	7	8	9
Frequência	10	14	16	40	30	10

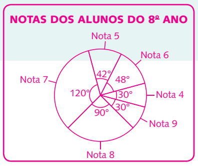
Dados obtidos pela escola.

Represente essa distribuição de frequências em um gráfico de setores e, depois, responda às questões.

a) Qual é a medida do ângulo correspondente ao setor usado para representar o número de alunos que tiraram nota 8? 90°

b) E qual é a medida do ângulo para representar os alunos que tiraram nota 5? 42°

4.



Dados obtidos pela escola.

LUIZ RUBIO

4 Cartograma e pictograma

Cartograma

Cartograma é o mapa ou o quadro em que, por meio de pontos, figuras e linhas previamente convencionados, representam-se a área de ocorrência, a importância, a movimentação e a evolução de um fenômeno.

Esse gráfico é empregado quando o objetivo é representar os dados estatísticos diretamente relacionados com áreas geográficas ou políticas.

Diversos exemplos podem ser vistos nos livros didáticos de Geografia, nos quais são apresentados mapas que, por meio de **cores**, **áreas pontilhadas** ou **tracejadas**, transmitem várias informações ao aluno.

Exemplo

BRASIL – DENSIDADE DEMOGRÁFICA

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

FERREIRA, Graça Maria Lemos. *Moderno atlas geográfico*. 5. ed. rev. e ampl. São Paulo: Moderna, 2011. p. 28.

Pictograma

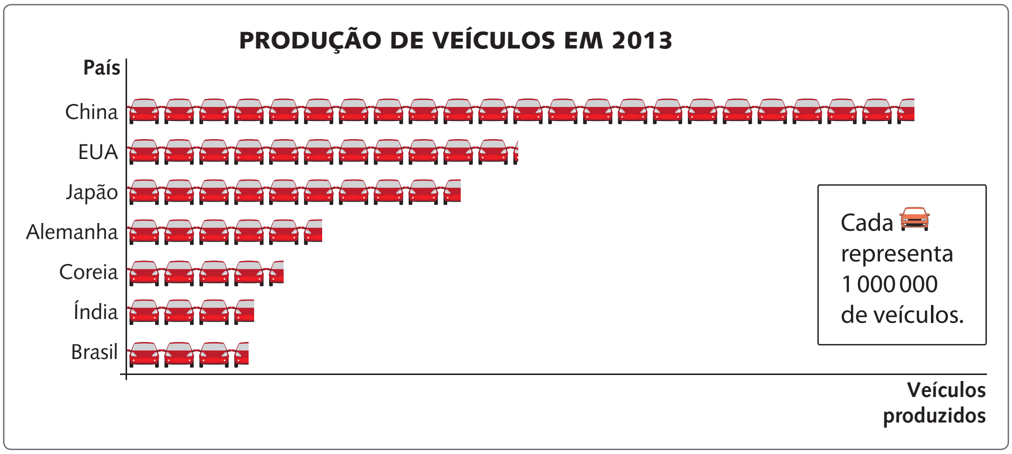
Pictograma é uma forma de representação gráfica em que se utilizam figuras relacionadas ao assunto em estudo para representar quantidades. Constitui um dos processos que transmite com mais facilidade os dados, por sua forma atraente e sugestiva.

Exemplo

Produção de veículos em 2013

País	Veículos produzidos
China	22 117 000
EUA	11 046 000
Japão	9 630 000
Alemanha	5 718 000
Coreia	4 521 000
Índia	3 881 000
Brasil	3 712 000

Disponível em: <http://www.virapagina.com.br/anfavea2015/#147/z>. Acesso em: 23 maio 2015.



Disponível em: <http://www.virapagina.com.br/anfavea2015/#147/z>. Acesso em: 23 maio 2015.

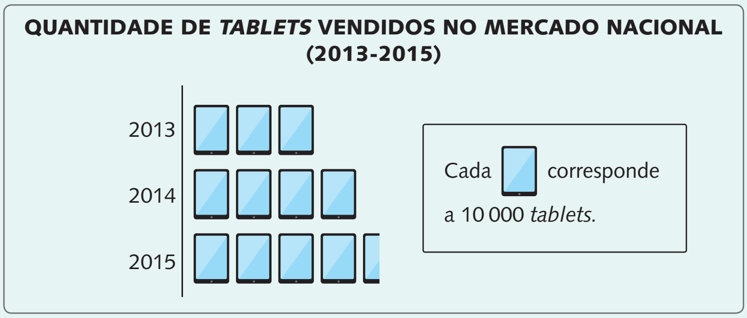
LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe o gráfico pictórico ao lado e determine a quantidade de *tablets* vendidos no mercado nacional, por uma distribuidora, em 2013, 2014 e 2015.

2013 → 30 000 *tablets*
2014 → 40 000 *tablets*
2015 → 45 000 *tablets*



Dados fictícios.

GUILHERME CASAGRANDI

2 Pesquise um cartograma em atlas, em enciclopédias ou em *sites* e apresente-o para a classe. Resposta pessoal.

3 O gráfico pictórico abaixo corresponde à produção de lavadoras de uma fábrica, em 2013, 2014 e 2015. Determine:

a) a quantidade de lavadoras produzidas em 2013 e em 2014; 12 500; 20 000

b) o percentual de crescimento da produção de 2015 em relação ao ano anterior. 50%

GUILHERME CASAGRANDI

Dados fictícios.

4 Segundo a ONU (Organização das Nações Unidas), 110 litros de água por dia é suficiente para atender às necessidades básicas de uma pessoa. Veja como consumimos água em algumas atividades do dia a dia.

Banho: Um banho de chuveiro elétrico com duração de dois minutos e com a válvula aberta parcialmente consome uma média de 12 litros de água.

Beber água: Médicos recomendam o consumo diário de cerca de dois litros de água, já que o corpo perde aproximadamente essa quantidade por meio da respiração, da urina e do suor.

Descarga: Dar duas descargas por dia em um sanitário com caixa acoplada consome 12 litros de água.

Escovar os dentes: Uma torneira aberta por cinco segundos em três ocasiões ao dia gasta cerca de 3 litros de água.

a) Construa, em seu caderno, um pictograma com a distribuição da quantidade de água gasta por você com as atividades indicadas acima. Considere o tempo que você gasta em cada atividade para determinar a quantidade de água gasta. Resposta pessoal.

b) Apresente seu pictograma para o professor e os colegas da classe e converse sobre que atitudes devemos tomar para economizar água e sobre a importância dessa economia. Resposta pessoal.

5 Probabilidade

Todo experimento cujo resultado depende do acaso é chamado **experimento aleatório**.

Mesmo repetidos várias vezes em condições semelhantes, os experimentos aleatórios apresentam resultados imprevisíveis, ou seja, que não podem ser previstos com certeza.

Exemplos

- lançamento de um dado
- lançamento de dois dados
- lançamento de uma moeda
- sorteio de uma bola numerada em uma urna
- Sorteio do ganhador de um prêmio.

Ao lançar um dado, por exemplo, temos seis resultados possíveis: faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Denominamos **espaço amostral**, representado por ***S***, o conjunto dos resultados possíveis.

Então, no experimento aleatório do lançamento de um dado, temos como espaço amostral:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Veja outros exemplos de espaço amostral:

- $S = \{\text{cara, coroa}\}$ ← Conjunto que representa o espaço amostral do lançamento de uma moeda.
- $S = \{(\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\underline{o}}\text{ lançamento}}}{\text{cara}}, \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\underline{o}}\text{ lançamento}}}{\text{cara}}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$ ← Conjunto que representa o espaço amostral de dois lançamentos sucessivos de uma moeda.

Qualquer conjunto de resultados possíveis do espaço amostral de um experimento aleatório é denominado **evento**. Vamos representá-lo por ***E***.

No caso do lançamento de um dado, temos alguns exemplos de eventos:

- obter no lançamento uma face ímpar ⟶ $E = \{1, 3, 5\}$
- obter no lançamento uma face menor que 4 ⟶ $E = \{1, 2, 3\}$
- obter no lançamento a face 5 ⟶ $E = \{5\}$

Probabilidade

No lançamento de um dado, temos um experimento aleatório com o espaço amostral S, sendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Devido às características físicas de um dado, todas as faces têm a mesma chance de ficar voltada para cima, ou seja, cada elemento do espaço amostral S tem a mesma chance de ocorrer. Nesse caso, temos um **espaço amostral equiprovável**.

Seja E o evento de um experimento aleatório com um espaço amostral equiprovável S. Para encontrar a medida de a chance desse evento ocorrer, calculamos sua **probabilidade**.

A probabilidade de um evento E, em um espaço amostral S, é uma razão dada por:

$$\overset{\text{probabilidade do evento } E}{P(E)} = \frac{\overset{\text{número de elementos de } E}{n(E)}}{\underset{\text{número de elementos de } S}{n(S)}}$$

Exemplos

- No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de obter, na face voltada para cima, um número menor que 4?

  O espaço amostral S é: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(S) = 6$

  O evento E desejado é: $E = \{\text{face menor que } 4\} = \{1, 2, 3\}$ e $n(E) = 3$

  Logo: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}50$ ou $P(E) = 50\%$

- Uma urna contém exatamente 1 000 cupons, numerados de 1 a 1 000. Ao retirar um cupom dessa urna, qual é a probabilidade de obter um número menor que 40?

  O espaço amostral S é: $S = \{1, 2, 3, 4, ..., 999, 1\,000\}$ e $n(S) = 1\,000$

O evento E desejado é: $E = \{1, 2, 3, 4, ..., 38, 39\}$ e $n(E) = 39$

Logo: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{39}{1000} = 0{,}039$ ou $3{,}9\%$

- No lançamento de duas moedas sucessivamente, qual é a probabilidade de obter, nas faces voltadas para cima, pelo menos uma "coroa"?

  O espaço amostral S é: $S = \{$(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)$\}$ e $n(S) = 4$

  O evento E desejado é:

  $E = \{$pelo menos uma face "coroa"$\} = \{$(cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)$\}$ e $n(E) = 3$

  Logo: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ ou 75%

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 No lançamento de duas moedas simultaneamente, qual é a probabilidade de obter, nas faces voltadas para cima, pelo menos uma "cara"? $\frac{3}{4}$ ou 75%

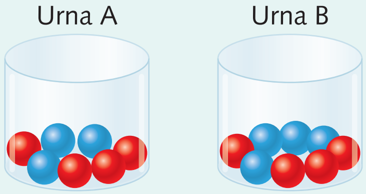
2 Uma urna contém exatamente 500 etiquetas numeradas de 1 a 500. Ao retirar uma etiqueta dessa urna, qual é a probabilidade de obter um número menor que 21? $\frac{1}{25}$ ou 4%

3 No lançamento de dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 6? $\frac{5}{36}$

4 No lançamento simultâneo de um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de obter "cara" na moeda e face 6 no dado? $\frac{1}{12}$

5 No lançamento de duas moedas simultaneamente, qual é a probabilidade de obter uma "cara" e uma "coroa"? $\frac{1}{2}$

6 Em qual destas urnas a probabilidade de tirar uma bola vermelha é maior? Justifique sua resposta.



A probabilidade de tirar uma bola vermelha é maior se for da urna A. A probabilidade de tirar uma bola vermelha da urna A é $\frac{4}{7}$ e de tirar da urna B é $\frac{4}{8}$ $\left(\frac{4}{7} > \frac{4}{8}\right)$.

7 Ao lançar um dado 10 vezes, obtivemos na face voltada para cima os números: 1, 4, 3, 2, 5, 1, 6, 2, 5 e 4. Se lançarmos o dado mais uma vez, que número obteremos? Nada podemos dizer, pois esse experimento é aleatório, ou seja, não é possível prever o resultado.

8 Forme dupla com um colega e, então, resolvam e discutam a questão abaixo. Depois, ouçam atentamente os comentários do professor sobre a atividade.

Um dado foi lançado 1000 vezes. Observem quantas vezes foi obtida cada uma das faces.

Face / Frequência	1	2	3	4	5	6
Absoluta	164	168	166	162	172	168
Relativa	■ 0,164	■ 0,168	■ 0,166	■ 0,162	■ 0,172	■ 0,168

Agora é com vocês!

a) Copiem a tabela acima no caderno, substituindo cada ■ pela frequência relativa correspondente. Qual é a soma das frequências absolutas? E a das frequências relativas? 1 000; 1

b) Parece razoável dizer que o espaço amostral desse lançamento de dado é equiprovável? Justifiquem a resposta. Sim, pois as frequências apresentam valores bem próximos.

GUILHERME CASAGRANDI

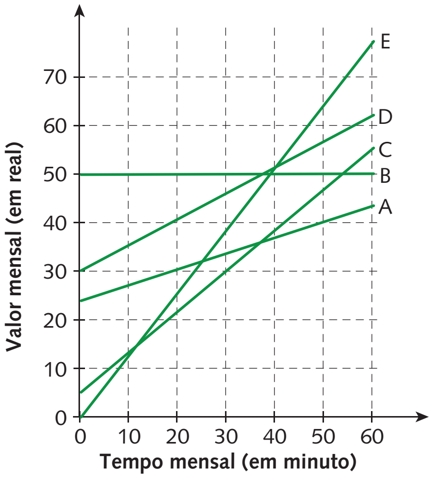
Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Enem) No Brasil, há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E



LUIZ RUBIO

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote as que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Há um único plano no qual não é possível gastar R$ 30,00. Que plano é esse? O plano B.
- Observando o gráfico, qual é o tempo mensal, em minutos, pelo plano A, em que se gasta R$ 30,00? O tempo mensal é de 20 minutos.

Plano de resolução

- Qual é o plano mais vantajoso para o usuário que pretende ter um uso mensal de 60 minutos? O plano A.
- Analise os planos C, D e E, com relação ao gasto de R$ 30,00 por mês, e escreva uma conclusão. No plano C, com R$ 30,00 o tempo mensal de chamadas é igual a 30 minutos; o plano D cobra do usuário R$ 30,00 para que ele comece a usar o plano, ou seja, 0 minuto mensal; finalmente, o plano E disponibiliza pouco mais de 20 minutos para o valor de R$ 30,00.

Resolução

- Reúna-se com um colega.
- Mostre a eles seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês.
- Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um dos planos para a execução do processo de resolução. O plano mais vantajoso é o C.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Pesquisem no *site* da Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) os direitos e as garantias dos usuários de telefonia. Para isso, poderão consultar o *site* <http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalInternet.do> (acesso em: 11 mar. 2015).

Organize os temas pesquisados e faça uma exposição dos trabalhos para a comunidade escolar.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Neste capítulo, você viu que o processo estatístico é constituído de cinco etapas. Essas etapas estão desorganizadas. Reescreva cada uma das etapas no caderno, colocando-as em ordem.

Etapas do processo estatístico

3º) Apuração dos dados de acordo com o critério escolhido.

1º) Elaboração da pergunta geradora dos dados.

2º) Coleta dos dados.

4º) Apresentação dos dados por meio de tabelas e gráficos.

5º) Análise dos resultados.

2 Qual é a função da amostra em uma pesquisa estatística? A amostra representa parte de uma população, de modo que o resultado apurado seja representativo dessa população.

3 Em sua opinião, as pesquisas estatísticas podem influenciar a decisão das pessoas? Resposta pessoal.

4 Classifique as variáveis a seguir em qualitativa ou quantitativa.

a) idade
c) estado civil
e) massa
b) altura
d) sexo
f) nacionalidade

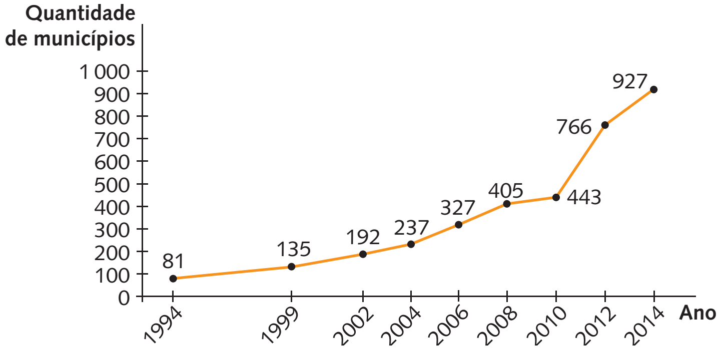
4. a) quantitativa
b) quantitativa
c) qualitativa
d) qualitativa
e) quantitativa
f) qualitativa

5 Para fazer um sorteio, a professora escreveu, em pedaços de papéis iguais, o nome de cada aluno uma única vez. O sorteio de um aluno dessa classe é um evento com espaço amostral equiprovável? Explique. Sim, pois cada aluno tem a mesma probabilidade de ser sorteado, ou seja, cada elemento do espaço amostral *S* tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Aplicando

1 Em 2014, somente 17% dos municípios brasileiros tinham coleta seletiva de lixo. Apesar de esse número ainda ser pequeno, ele veio aumentando ao longo dos anos, como podemos verificar no gráfico ao lado.

MUNICÍPIOS COM COLETA SELETIVA NO BRASIL



LUIZ RUBIO

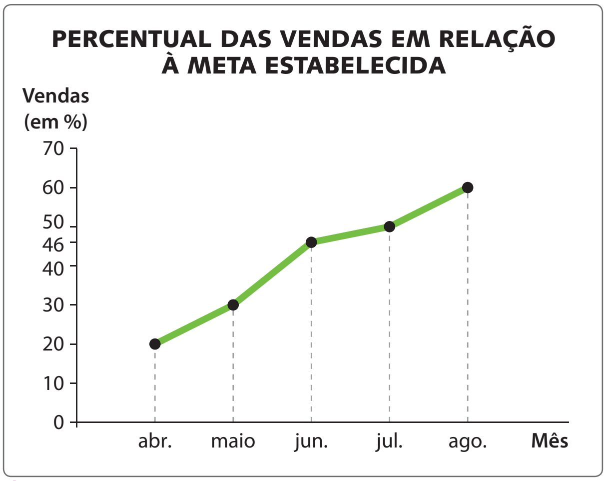
Disponível em: <http://cempre.org.br/ciclosoft/id/2>. Acesso em: 23 maio 2015.

a) De acordo com o gráfico, quantos municípios tinham coleta seletiva em 1994? De quanto foi o aumento depois de 10 anos? E depois de 20 anos? 81 municípios; o aumento foi de 156 municípios em 10 anos; o aumento foi de 846 municípios em 20 anos

b) Se em 2014 somente 17% dos municípios brasileiros tinham coleta seletiva, qual era a porcentagem de municípios com coleta seletiva em 2008? aproximadamente 7,5%

c) Podemos afirmar que de 2010 a 2014 o aumento no número de municípios com coleta seletiva foi de mais de 100%? Justifique sua resposta. Sim, pois de 2010 a 2014 o aumento foi de 484 municípios, o que corresponde a um aumento de 109% de 443 municípios.

2 Uma empresa estabeleceu uma meta de 2 mil unidades mensais vendidas. No gráfico a seguir, vemos o percentual da meta de vendas que foi atingido em cada mês.


PERCENTUAL DAS VENDAS EM RELAÇÃO À META ESTABELECIDA

Dados obtidos pela empresa.

c) Espera-se que os alunos respondam que sim, porque o percentual de vendas dessa empresa foi aumentando com o passar do tempo.

a) Qual foi o percentual, em relação à meta de vendas, atingido no mês de junho? 46%

b) Determine quantas unidades foram vendidas no mês de abril. 400 unidades

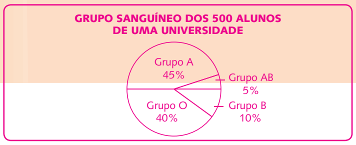
c) Podemos afirmar que com o passar do tempo as vendas dessa empresa foram melhorando? Justifique sua resposta.

3 Luís está brincando com seu dominó de 28 peças. Qual é a probabilidade de, ao retirar aleatoriamente uma peça, ele obter “seis duplo”? Colocando o “seis duplo” na mesa, qual é a probabilidade de a próxima pedra retirada aleatoriamente ser encaixável no “seis duplo”?


SUNSHINE PICS/SHUTTERSTOCK

$P(\text{seis duplo}) = \frac{1}{28}$ $P(\text{encaixe}) = \frac{2}{9}$

4.



GUILHERME CASAGRANDI

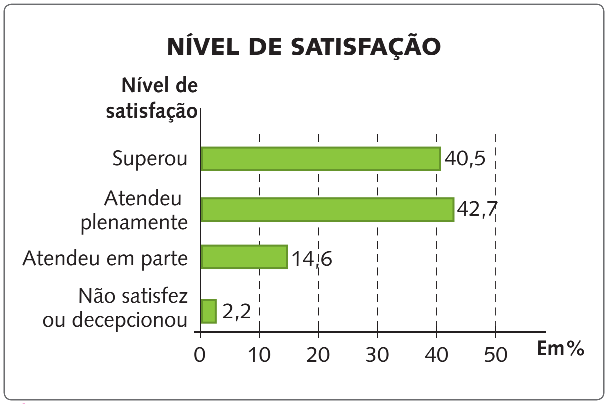
Dados obtidos pela universidade.

4 Foi feito um estudo do grupo sanguíneo dos 500 alunos de uma universidade. O resultado obtido foi o seguinte:

Grupo sanguíneo	A	B	AB	O
Frequência	45%	10%	5%	40%

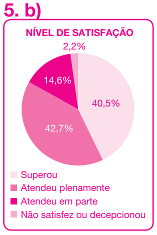
Represente esses dados em um gráfico de setores.

5 Em 2014 foi realizada a Copa do Mundo de futebol no Brasil. Veja o nível de satisfação dos turistas que visitaram o Brasil para participar desse evento.


NÍVEL DE SATISFAÇÃO

LUIZ RUBIO

5. b)



LUIZ RUBIO

Disponível em: <http://www.dadosefatos.turismo.gov.br/export/sites/default/dadosefatos/outros_estudos/downloads_outrosestudos/Estudo_da_Demanda_Internacional_-_Brasil_-_Copa_2014_1.pdf>. Acesso em: 23 maio 2015.

a) Com base nos dados do gráfico, o que podemos afirmar sobre a satisfação dos turistas? A maioria respondeu “atendeu plenamente”.

b) Represente no caderno esses dados em um gráfico de setores.

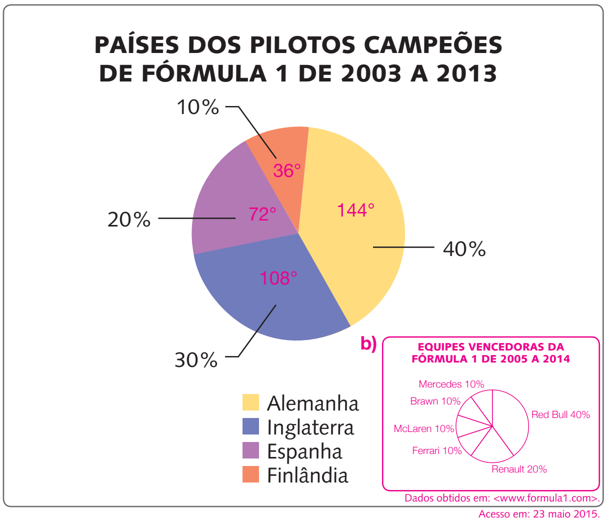
DESAFIO

Lançando dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos em pelo menos um dos dados? $\frac{11}{36}$

6 Observe, na tabela abaixo, os campeões mundiais de Fórmula 1 de 2005 a 2014.

Campeões da Fórmula 1		
Ano	**Piloto (país)**	**Equipe**
2005	Fernando Alonso	Renault
2006	Fernando Alonso	Renault
2007	Kimi Räikkönen	Ferrari
2008	Lewis Hamilton	McLaren
2009	Jenson Button	Brawn
2010	Sebastian Vettel	Red Bull
2011	Sebastian Vettel	Red Bull
2012	Sebastian Vettel	Red Bull
2013	Sebastian Vettel	Red Bull
2014	Lewis Hamilton	Mercedes

Dados obtidos em: <http://noticias.bol.uol.com.br/ultimas-noticias/esporte/2015/03/12/ultimos-vinte-campeoes-mundiais-da-formula-1-pilotos-e-contrutores.htm>. Acesso em: 23 maio 2015.


PAÍSES DOS PILOTOS CAMPEÕES DE FÓRMULA 1 DE 2003 A 2013

Dados obtidos em: <www.formula1.com>. Acesso em: 23 maio 2015.

Dados obtidos em: <http://noticias.bol.uol.com.br/ultimas-noticias/esporte/2015/03/12/ultimos-vinte-campeoes-mundiais-da-formula-1-pilotos-e-contrutores.htm>. Acesso em: 23 maio 2015.

a) Calcule o ângulo correspondente à representação de cada país no gráfico.

b) Construa no caderno um gráfico de setores representando as equipes vencedoras da Fórmula 1 de 2005 a 2014.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

7 **(Enem)** José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é: alternativa **d**

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

DESAFIO

No lançamento de três dados simultaneamente, qual é a probabilidade de obtermos números iguais de pontos nos três dados? $\frac{1}{36}$

8 Uma urna tem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Ao retirar uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de:

a) o número sorteado ser ímpar? $\frac{1}{2}$

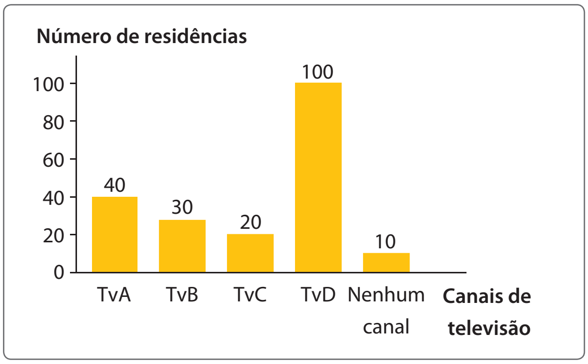
b) o número sorteado estar entre 7 e 11? $\frac{3}{20}$

c) o número sorteado ser um múltiplo de 4? $\frac{1}{4}$

d) o número sorteado ser par e múltiplo de 5? $\frac{1}{10}$

9 Uma universidade tem 10 000 alunos dos quais 800 não praticam nenhum tipo de esporte. Suponha que um aluno seja escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de esse aluno praticar algum esporte? $\frac{23}{25}$

10 **(Enem)** Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20 h e 21 h, durante determinada noite. Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

I. A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TvB é **aproximadamente** igual a:

a) 15% c) 22% e) 30%
b) 20% d) 27% alternativa **a**

II. O número de residências atingidas nessa pesquisa foi **aproximadamente**:

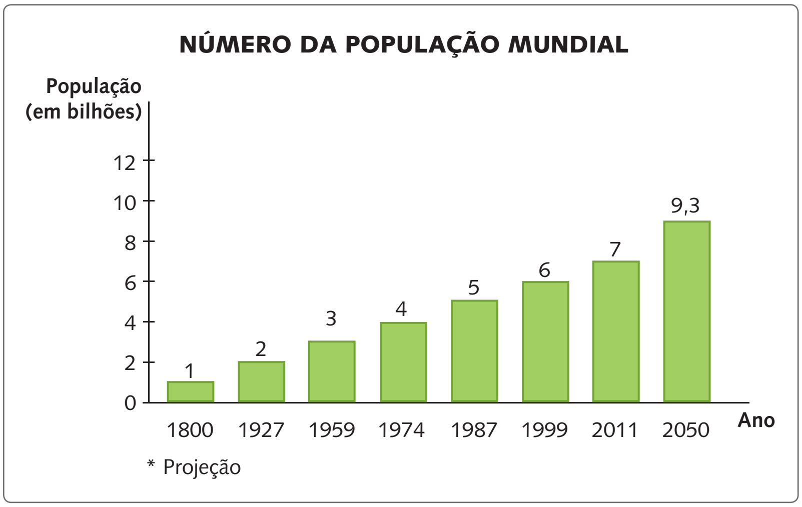
a) 100 c) 150 e) 220
b) 135 d) 200 alternativa **d**

DESAFIO

Pedro lançou dois dados simultaneamente e adicionou os resultados obtidos. A probabilidade maior é de obter soma 11 ou 12? Justifique sua resposta.
11 (5 + 6 ou 6 + 5; portanto, 2 possibilidades em 36); já 12 (6 + 6) só tem uma possibilidade em 36.

11 De acordo com as previsões dos especialistas da Organização das Nações Unidas (ONU), a população do planeta Terra chegará a 9,3 bilhões de pessoas em 2050.

Observe a evolução da população mundial desde 1800 no gráfico a seguir.



LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: <http://noticias.terra.com.br/mundo/onu-divulga-projecao-sobre-populacao-mundial-veja-numeros,ce08df4cd85ea310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html>. Acesso em: 23 maio 2015.

a) Quantos habitantes havia no mundo em 1974? E em 1999? 4 bilhões e 6 bilhões, respectivamente

b) Quantos anos se passaram para que a população mundial passasse de 3 bilhões de habitantes para 7 bilhões? Passaram-se 52 anos.

c) A Ásia concentrava cerca de 60% da população mundial em 2011. De quanto era a população desse continente em 2011? Se essa porcentagem se mantiver para 2050, aproximadamente quantos habitantes haverá na Ásia nesse ano? 4,2 bilhões em 2011; 5,5 bilhões em 2050

d) Em 2011, a China era o país mais populoso, com 1,35 bilhão de habitantes. Que porcentagem da população mundial morava na China em 2011? aproximadamente 19,30%

CAPÍTULO

10 TRIÂNGULOS

Vista lateral do estádio Arena Castelão. Fortaleza, CE, 2013.

EVARISTO SA/AFP

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O contorno do estádio Arena Castelão é marcado pela presença de imponentes pilares metálicos que, entre outras, têm a função de sustentar estruturas, nas quais estão acopladas as telhas da cobertura do estádio. O revestimento inovador dessas telhas suporta o forte sol do Nordeste, na medida em que permite menos absorção de calor e maior circulação de ar dentro do estádio, proporcionando, assim, uma sensação térmica mais agradável aos torcedores.

Na foto, é possível notar que nos pilares metálicos há diversas partes com forma de triângulos.

- Quantos lados, ângulos internos e diagonais tem um triângulo? 3, 3, nenhuma
- Você sabe por que os triângulos são muito utilizados em várias estruturas de construções e torres? Explique. Exemplo de explicação: porque o triângulo é um polígono rígido, ou seja, não se deforma, não se move.

Neste capítulo, vamos trabalhar a classificação dos triângulos, as cevianas notáveis, os casos de congruência e as construções geométricas do triângulo. Será feito, também, um estudo sobre os triângulos isósceles e retângulo. Com base na foto da abertura do capítulo, o professor poderá mostrar a importância do uso dos triângulos nas estruturas metálicas em geral.

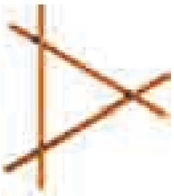
RUBENS CHAVES/FOLHAPRESS

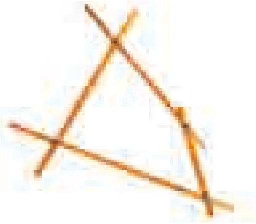
Vista aérea do estádio Arena Castelão. Fortaleza, CE, 2013.

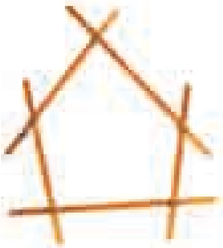
TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

Observe as figuras abaixo. Elas ilustram estruturas de varetas fixadas com pinos.

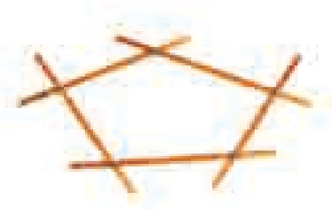






LUIZ RUBIO

Verifique que, exercida certa pressão nessas estruturas, a que tem forma de triângulo é indeformável, mas as que têm forma de quadrilátero e de pentágono podem se deformar e adquirir formas variadas. Veja:



A "rigidez" dos triângulos é responsável por sua frequente utilização nas construções e em estruturas, como pontes e torres. Veja um exemplo na foto abaixo.

SOPHIE JAMES/SHUTTERSTOCK

A ponte da Baía de Sydney, na Austrália, liga o centro financeiro da cidade à costa norte, residencial e comercial.

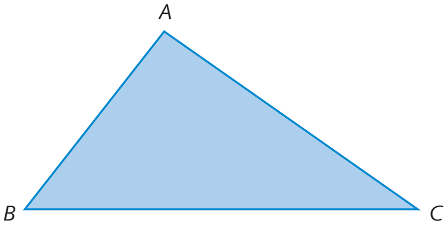
- Como poderíamos transformar as estruturas com forma de quadrilátero ou de pentágono em estruturas rígidas? Para fixar as estruturas do quadrilátero e do pentágono, é preciso decompor esses polígonos em triângulos, firmando suas diagonais.

Neste capítulo, vamos estudar os polígonos de três lados, ou seja, os **triângulos**.

1 Triângulo

Triângulo é o polígono de três lados.

Notação: $\triangle ABC$



GUILHERME CASAGRANDI

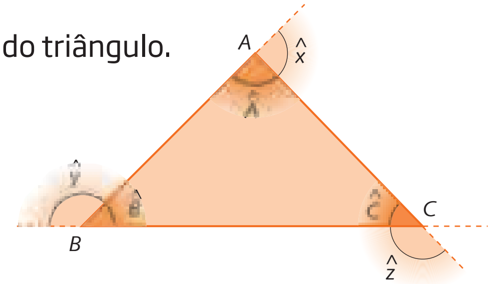
REPINA VALERIYA/SHUTTERSTOCK

Nesta embarcação as velas têm forma de triângulo.

Principais elementos de um triângulo

Na figura ao lado, destacamos alguns elementos do triângulo.

- Vértices: A, B e C
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$
- Ângulos internos: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$
- Ângulos externos: $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ e $\widehat{z}$



GUILHERME CASAGRANDI

Observações

1 Podemos representar os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ por $B\widehat{A}C$, $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$, respectivamente.

2 Na figura, os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, opostos aos vértices C, B e A.

3 O triângulo não possui diagonais.

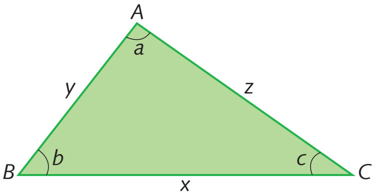
4 Cada ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente.

$$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{x}) = 180°$$

$$\text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{y}) = 180°$$

$$\text{med}(\widehat{C}) + \text{med}(\widehat{z}) = 180°$$

5 Considerando o $\triangle ABC$ abaixo, veja como podemos indicar as medidas dos seus lados e dos seus ângulos internos.



med $\widehat{A} = a$

med $\widehat{B} = b$

med $\widehat{C} = c$

med $\overline{AB} = AB = y$

med $\overline{AC} = AC = z$

med $\overline{BC} = BC = x$

6 O perímetro de um triângulo é a soma das medidas de seus lados.

No triângulo ABC acima, temos:

Perímetro $\triangle ABC$: $AB + AC + BC$

Construindo triângulos

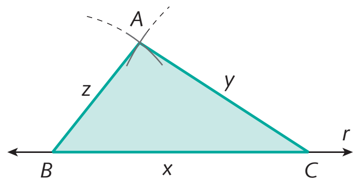
Agora, vamos aprender a construir triângulos com o uso de régua e compasso. Observe os casos a seguir.

1º caso

Sendo conhecidos os três lados, vamos tentar construir um triângulo.

GEORGE TUTUMI

Vamos observar a figura e acompanhar a sequência de procedimentos.



GUILHERME CASAGRANDI

Espera-se que o aluno reflita antes de ler o boxe "Cuidado!", abaixo.

Sequência:

1º) Traçamos uma reta suporte *r*.

2º) Sobre essa reta, traçamos o segmento de medida *x*, assinalando os vértices *B* e *C*.

3º) Com centro em *B* e raio de medida *z*, traçamos um arco de circunferência.

4º) Com centro em *C* e raio de medida *y*, traçamos outro arco de circunferência.

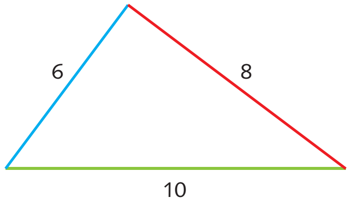
5º) Na intersecção dos dois arcos, assinalamos o vértice *A*.

6º) Traçamos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ unindo os respectivos vértices.

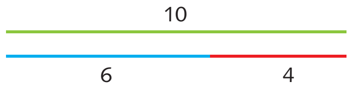
Cuidado!

Nem sempre é possível construir um triângulo.
Observe os exemplos a seguir.

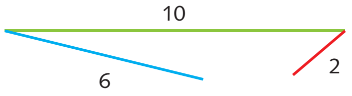
- Medida dos lados: 10, 8 e 6
  É possível.



- Medida dos lados: 10, 6 e 4
  Não é possível.



- Medida dos lados: 10, 6 e 2
  Não é possível.



GUILHERME CASAGRANDI

Para ser possível construir um triângulo, é necessário que a medida do lado maior seja menor que a soma das medidas dos outros dois lados. Generalizando, temos a **desigualdade triangular**, cuja demonstração deverá ocorrer no Ensino Médio:

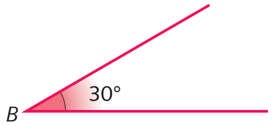
"Em um triângulo, a medida de qualquer um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois lados".

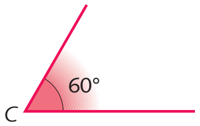
2º caso

Sendo conhecidos dois ângulos e o lado compreendido entre eles, vamos construir um triângulo.

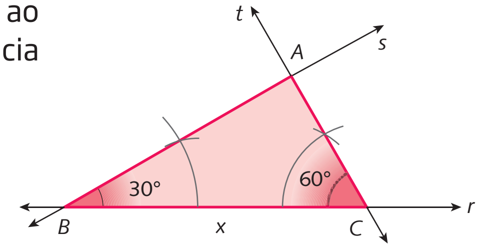
GEORGE TUTUMI

GUILHERME CASAGRANDI





Vamos observar a figura ao lado e acompanhar a sequência de procedimentos.



Para construir um ângulo usando apenas régua e compasso, a turma poderá fazer uma revisão da construção geométrica de ângulos congruentes na página 101 do capítulo 5.

Espera-se que os alunos reflitam e concluam que a soma das medidas dos ângulos dados não pode ser igual ou maior do que 180º.

Sequência:

1º) Traçamos uma reta suporte *r*.

2º) Sobre essa reta, traçamos o segmento de medida *x*, assinalando os vértices *B* e *C*.

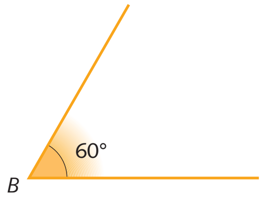
3º) Sobre o vértice *B*, construímos o ângulo $\widehat{B}$, determinando a reta *s*.

4º) Sobre o vértice *C*, construímos o ângulo $\widehat{C}$, determinando a reta *t*.

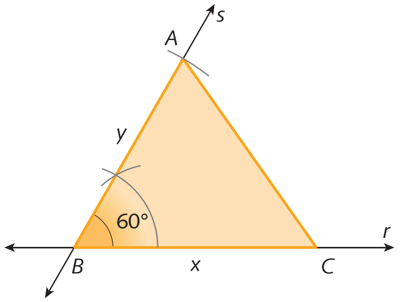
5º) Na intersecção das retas *s* e *t*, encontramos o vértice *A*.

3º caso

Sendo conhecidos dois lados e o ângulo formado por esses lados, vamos construir um triângulo. São dados:



Vamos observar a figura e acompanhar a sequência de procedimentos.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Sequência:

1º) Traçamos a reta suporte *r*.

2º) Sobre essa reta, traçamos o segmento de medida *x*, assinalando os vértices *B* e *C*.

3º) Sobre o vértice *B*, construímos o ângulo $\widehat{B}$, determinando a reta *s*.

4º) Com centro em *B* e raio de medida *y*, determinamos o vértice *A* sobre *s*.

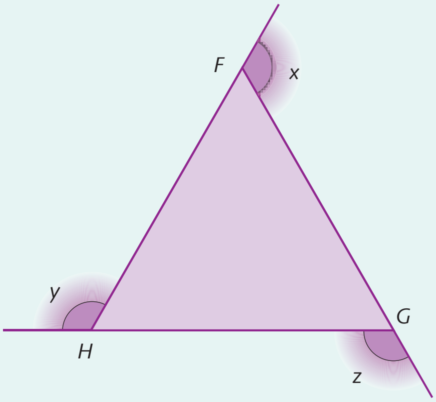
5º) Traçamos o lado $\overline{AC}$ unindo os respectivos vértices.

Atividades **4**, **6** e **7**:
Peça aos alunos para copiarem os segmentos e ângulos no caderno antes de fazerem a construção com régua e compasso.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe a figura abaixo.



No caderno, escreva:

a) os vértices do triângulo; F, G e H

b) os lados do triângulo; $\overline{FH}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HG}$

c) os ângulos internos do triângulo; $\hat{F}$, $\hat{G}$ e $\hat{H}$

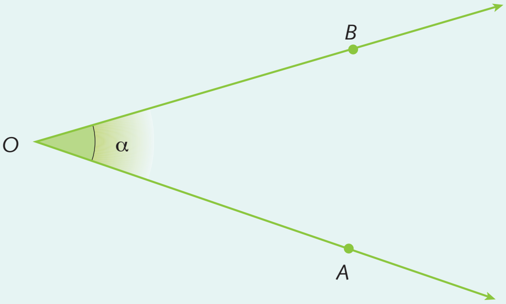
d) os ângulos externos do triângulo; $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$

e) o lado oposto ao ângulo $\hat{F}$. $\overline{HG}$

2 Determine o perímetro de um triângulo com lados cujas medidas são 5 cm, 6 cm e 7 cm. 18 cm

3 Desenhe um triângulo cujos lados meçam 6 cm, 9 cm e 12 cm. Construção de figura.

4 Com régua e compasso, reproduza o ângulo $A\hat{O}B$. Construção de figura.



5 Em cada caso, analise se é possível construir um triângulo com lado $\overline{BC}$ de 5 cm e com as medidas dos ângulos indicadas.

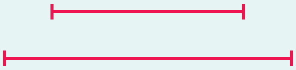
a) $\text{med}(\hat{B}) = 110° \text{ e } \text{med}(\hat{C}) = 50°$ sim

b) $\text{med}(\hat{B}) = 110° \text{ e } \text{med}(\hat{C}) = 70°$ não

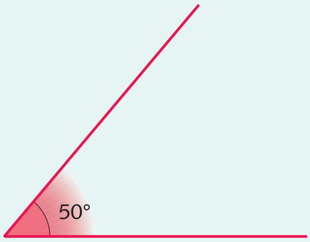
c) $\text{med}(\hat{B}) = 110° \text{ e } \text{med}(\hat{C}) = 90°$ não

6 Utilizando régua e compasso, construa no caderno um triângulo, sendo conhecidos dois lados e o ângulo formado por esses lados. Construção de figura.

Dois lados:

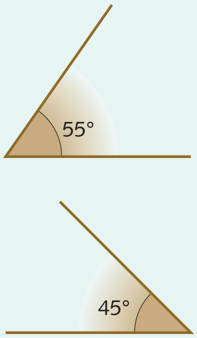


Ângulo formado pelos lados dados:



7 Utilizando régua e compasso, construa um triângulo, sendo conhecidos dois ângulos e o lado compreendido entre eles. Construção de figura.

Dois ângulos:



Lado compreendido entre os ângulos dados:

8 Em cada caso, analise se é possível construir um triângulo com as medidas dos lados indicadas.

a) 6, 10 e 18 não

b) 3, 10 e 7 não

c) 8, 4 e 6 sim

d) 3, 4 e 5 sim

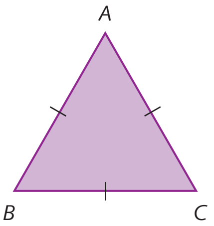
9 Um triângulo possui dois lados que medem 11 cm e 6 cm. Quais são as medidas possíveis para o terceiro lado desse triângulo? 5 cm < medida do 3º lado < 17 cm

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

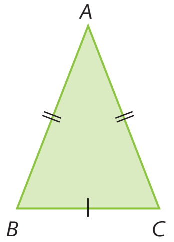
2 Classificação de triângulos

Podemos classificar os triângulos quanto às medidas dos lados e dos ângulos.

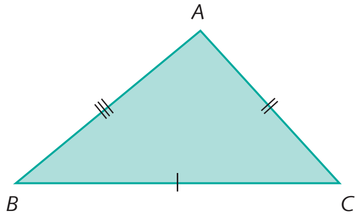
Quanto às medidas dos lados



equilátero



isósceles



escaleno

GUILHERME CASAGRANDI

- **Equilátero**: os três lados são congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$$

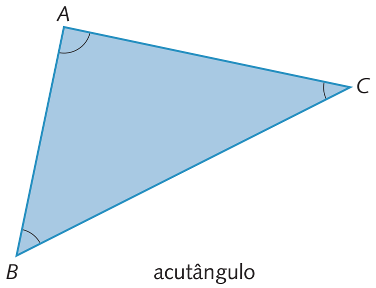
- **Isósceles**: pelo menos dois lados são congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$

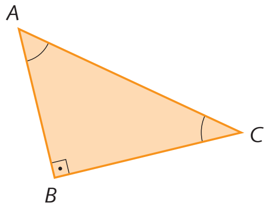
  No triângulo isósceles acima:
  - $\overline{BC}$ é a base;
  - $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos da base;
  - $\widehat{A}$ é o ângulo do vértice oposto à base.
- **Escaleno**: não tem lados congruentes.

LEO FANELLI

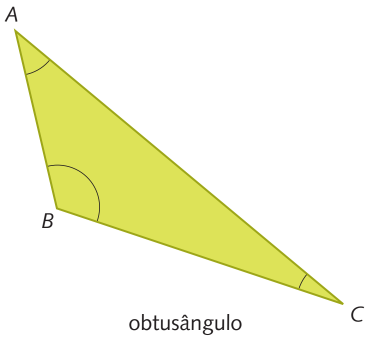
Quanto às medidas dos ângulos



acutângulo



retângulo



obtusângulo

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

- **Acutângulo**: os três ângulos internos são agudos.
  $\text{med}(\widehat{A}) < 90°$, $\text{med}(\widehat{B}) < 90°$ e $\text{med}(\widehat{C}) < 90°$
- **Retângulo**: tem um ângulo interno reto e dois ângulos internos agudos.
  $\text{med}(\widehat{B}) = 90°$, $\text{med}(\widehat{C}) < 90°$ e $\text{med}(\widehat{A}) < 90°$
- **Obtusângulo**: tem um ângulo interno obtuso e dois ângulos internos agudos.
  $\text{med}(\widehat{B}) > 90°$, $\text{med}(\widehat{A}) < 90°$ e $\text{med}(\widehat{C}) < 90°$

Observações

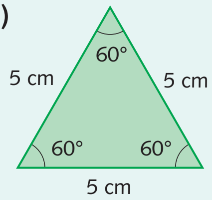
1. No triângulo isósceles, chamamos de base o lado de medida diferente.
2. Em um triângulo retângulo, denomina-se **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo reto. Os demais lados chamam-se **catetos**.
3. O triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

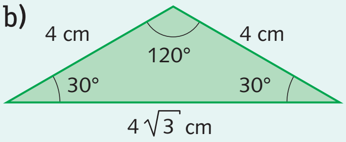
1 Classifique os triângulos abaixo quanto às medidas dos lados e dos ângulos.

a)



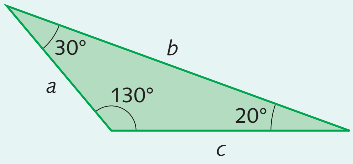
equilátero e acutângulo

b)



isósceles e obtusângulo

c)



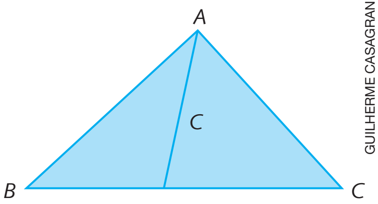
escaleno e obtusângulo

2 Em um triângulo retângulo, qual é o maior lado: um dos catetos ou a hipotenusa? hipotenusa

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

3 Cevianas notáveis

Denomina-se **ceviana** qualquer segmento com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.



GUILHERME CASAGRANDI

C: ceviana relativa ao lado $\overline{BC}$.

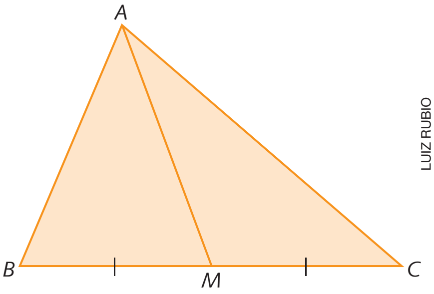
Vamos agora estudar algumas cevianas especiais.

Mediana de um triângulo

Mediana de um triângulo é uma ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.

No triângulo ao lado, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$; logo, $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ têm medidas iguais.

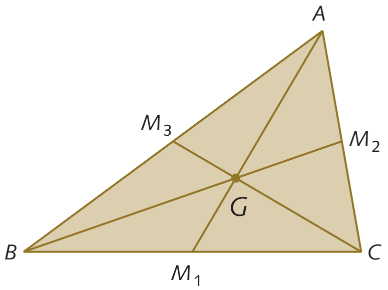
Em um triângulo, podemos traçar três medianas.



LUIZ RUBIO

Em qualquer triângulo, as três medianas se cruzam em um ponto, denominado **baricentro** (G).

O ponto G é o baricentro do $\triangle ABC$ e divide as medianas na razão de 1 para 2, ou seja: $\frac{M_1G}{AG} = \frac{M_2G}{BG} = \frac{M_3G}{CG} = \frac{1}{2}$



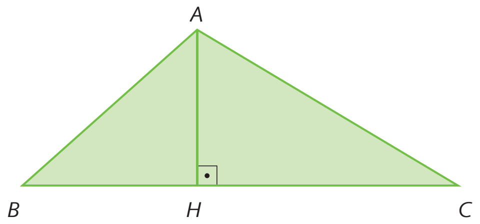
GUILHERME CASAGRANDI

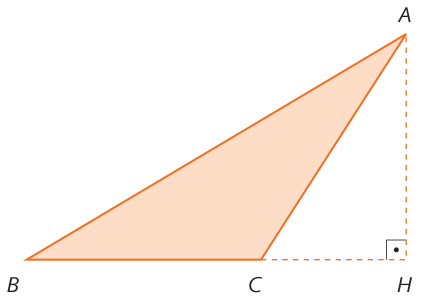
Observação

O baricentro de um corpo qualquer é considerado seu **centro de gravidade** (ou centro de massa). Isso quer dizer que, se apoiarmos um corpo em seu baricentro, ele ficará em equilíbrio.

Altura de um triângulo

Altura de um triângulo é uma ceviana perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo.



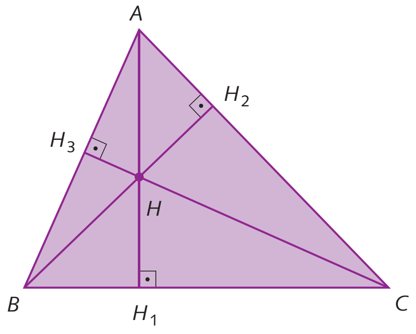


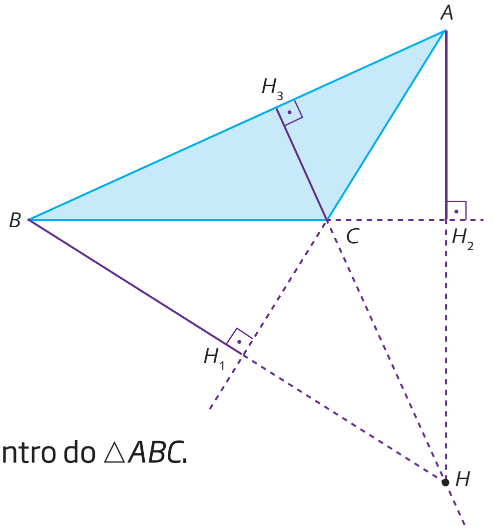
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Nos dois triângulos acima, $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Em um triângulo, podem ser traçadas três alturas.

Em qualquer triângulo, as retas suportes das três alturas se cruzam em um ponto, denominado **ortocentro** (H).





ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Nos dois triângulos acima, o ponto H é o ortocentro do $\triangle ABC$.

Observações

1 No triângulo **acutângulo**, o ortocentro é **interno** ao triângulo.

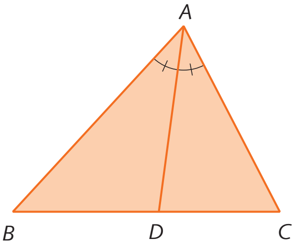
2 No triângulo **retângulo**, o ortocentro é o **vértice** do ângulo reto.

3 No triângulo **obtusângulo**, o ortocentro é **externo** ao triângulo.

Bissetriz de um triângulo

Bissetriz interna de um triângulo é uma ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes.

Diga aos alunos que ângulos marcados com a mesma quantidade de tracinhos são congruentes.



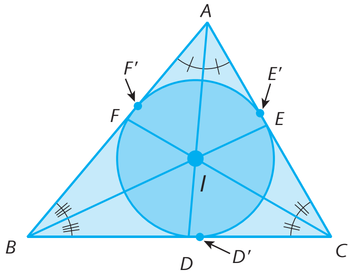
No triângulo ao lado, $\overline{AD}$ é a bissetriz interna relativa ao ângulo $B\hat{A}C$.

Os alunos podem fazer uma revisão da construção geométrica da bissetriz de um ângulo na página 102 do capítulo 5.

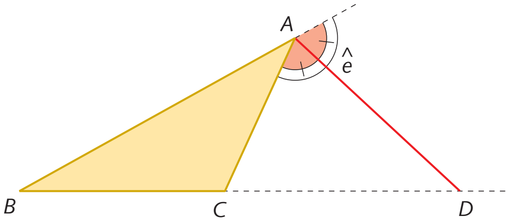
Em um triângulo, podem ser traçadas três bissetrizes internas.

Em qualquer triângulo, as três bissetrizes se cruzam em um ponto, denominado **incentro** (I), que é o centro da circunferência inscrita no triângulo, isto é, aquela que toca cada lado do triângulo em um único ponto; no exemplo, nos pontos D', E' e F'.

Explique aos alunos que uma circunferência está inscrita em um polígono convexo quando cada um dos lados do polígono tem apenas um ponto em comum com a circunferência.



Bissetriz externa de um triângulo é uma ceviana que divide um ângulo externo em dois ângulos congruentes.

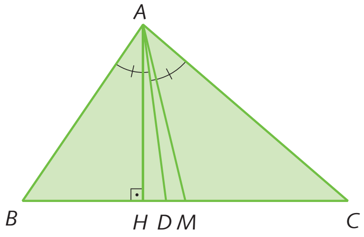


No triângulo ao lado, $\overline{AD}$ é a bissetriz externa relativa ao ângulo externo $\hat{e}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Observações

1 Em um triângulo, a altura, a bissetriz e a mediana relativas a um mesmo lado partem de um único vértice. Todo triângulo tem três medianas, três alturas e três bissetrizes internas.



$\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

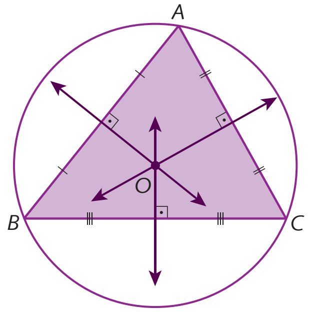
$\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$.

$\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

2 Denomina-se **mediatriz de um segmento** a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular à sua reta suporte. Cada lado de um triângulo tem uma mediatriz.

3 As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto – chamado **circuncentro** (O) – que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é, aquela que passa por todos os vértices do triângulo.

4 O ortocentro, o incentro, o baricentro e o circuncentro são chamados de **pontos notáveis** de um triângulo.

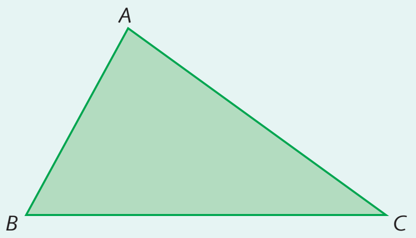


Explique aos alunos que uma circunferência está circunscrita a um polígono quando todos os vértices do polígono estão contidos na circunferência.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Construa, com régua e compasso, o triângulo abaixo, trace suas medianas e determine seu baricentro. Construção de figura.



2 Com régua e compasso, construa um triângulo cujos lados medem 6 cm, 5 cm e 8 cm. Em seguida, trace suas bissetrizes e determine seu incentro. Construção de figura.

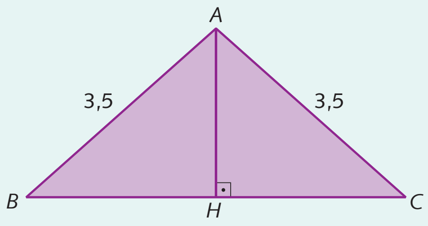
3 Desenhe um triângulo cujos lados medem 7 cm, 4 cm e 6 cm. Em seguida, determine o encontro das alturas desse triângulo (ortocentro). Construção de figura.

4 Desenhe um triângulo cujos lados medem 6 cm, 7 cm e 8 cm e a seguir: Construção de figura.

a) trace as mediatrizes dos seus lados, determinando o circuncentro do triângulo. Depois, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência que circunscreve esse triângulo;

b) trace as bissetrizes dos seus ângulos, determinando o incentro do triângulo. Então, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência inscrita nesse triângulo. Construção de figura.

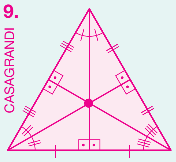
5 No triângulo ABC abaixo, $\overline{AH}$ corresponde à altura, à mediana ou à bissetriz em relação ao lado $\overline{BC}$? à altura, à mediana e à bissetriz



6 Com régua e compasso, construa um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. Depois, com o auxílio de um transferidor, determine a medida maior desses ângulos. Sem traçar mais nenhuma linha, descubra qual é o ortocentro desse triângulo.

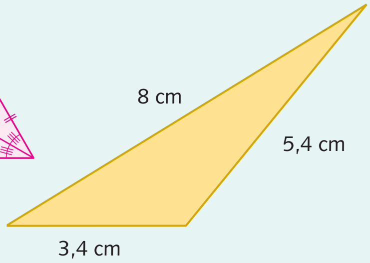
90°; o ortocentro desse triângulo é vértice do ângulo reto.

7 Construa um triângulo com as medidas indicadas na figura abaixo e determine seu circuncentro. Construção de figura.

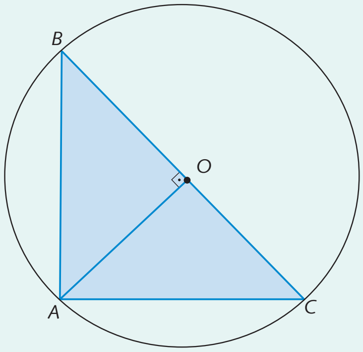


9.

GUILHERME CASAGRANDI



8 Observe a figura abaixo.



O triângulo ABC é um triângulo retângulo em A e isósceles. O ponto O é o seu circuncentro, ou seja, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Se a altura relativa à hipotenusa BC mede 9,3 cm, qual é a medida da hipotenusa? 18,6 cm

9 Desenhe no caderno um triângulo qualquer. Em seguida, com régua e compasso, em ângulos de um mesmo vértice do triângulo, construa uma bissetriz interna e uma bissetriz externa. Elas formam um ângulo reto? sim

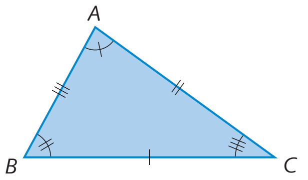
10 Forme dupla com um colega e desenhem, em uma folha de papel, um triângulo equilátero com 10 cm de lado. Em seguida, determinem o ortocentro, o incentro, o circuncentro e o baricentro desse triângulo. Todos esses pontos coincidem.

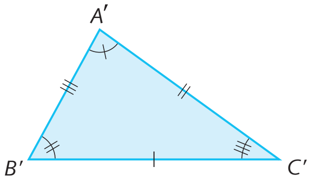
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

4 Casos de congruência de triângulos

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Observe os triângulos abaixo.



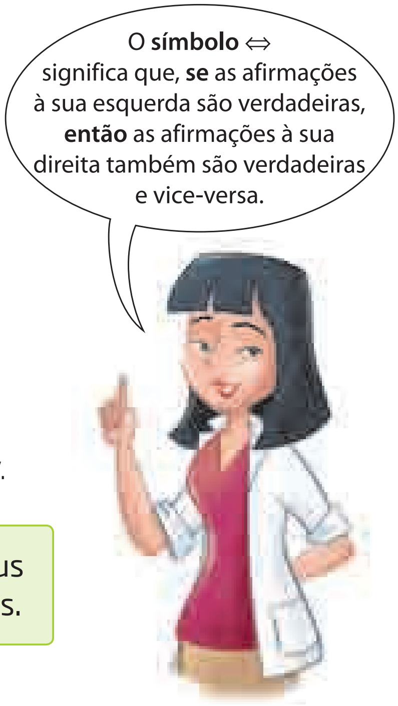


Note que esses triângulos têm três pares de lados congruentes e três pares de ângulos congruentes. Se os recortássemos, poderíamos sobrepor um ao outro sem sobras ou faltas. Nesse caso, dizemos que esses triângulos são **triângulos congruentes**. Em linguagem matemática, escrevemos:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} & & \widehat{A} \cong \widehat{A'} & & \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} & \text{e} & \widehat{B} \cong \widehat{B'} & \Leftrightarrow & \underline{\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} & & \widehat{C} \cong \widehat{C'} & & \end{array}$$

Lemos: "equivale a"

Lemos: "o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *A'B'C'*".



GEORGE TUTUMI

Dois triângulos são congruentes quando seus lados e seus ângulos correspondentes são respectivamente congruentes.

Propriedades

- Todo triângulo é congruente a si mesmo.
  Reflexiva: $\triangle ABC \cong \triangle ABC$
- Se um triângulo *ABC* é congruente a um triângulo *A'B'C'*, então o triângulo *A'B'C'* é congruente ao triângulo *ABC*.
  Simétrica: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$
- Se um triângulo *ABC* é congruente a um triângulo *DEF*, e o triângulo *DEF* é congruente a um triângulo *A'B'C'*, então o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *A'B'C'*.
  Transitiva: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ e $\triangle DEF \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Observação

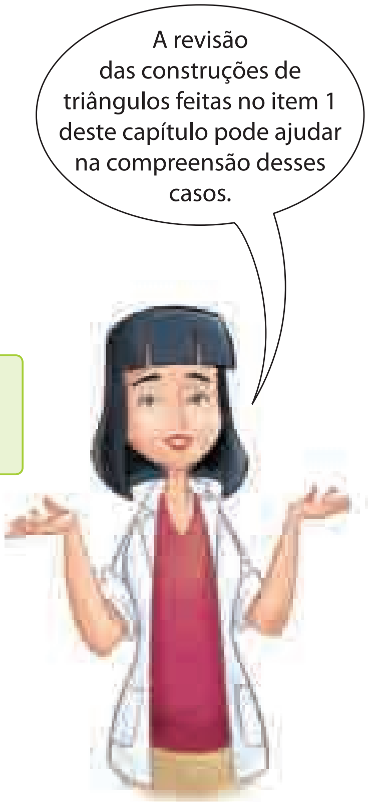
Veja um exemplo da aplicação dessas três propriedades na relação de igualdade.

- Reflexiva: a altura de Ana é igual à altura da própria Ana.
- Simétrica: dizer que a altura de Ana é igual à altura de Naia equivale a dizer que a altura de Naia é igual à altura de Ana.
- Transitiva: se a altura de Ana é igual à altura de Naia e a altura de Naia é igual à altura de Célia, então a altura de Ana é igual à altura de Célia.

Casos de congruência

Podemos concluir que dois triângulos são congruentes mesmo sem conhecer as medidas de todos os lados e ângulos.

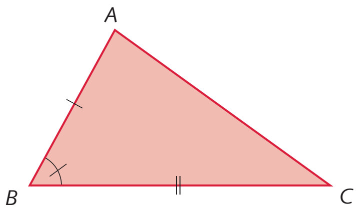
A seguir, vamos analisar os casos de congruência de triângulos.

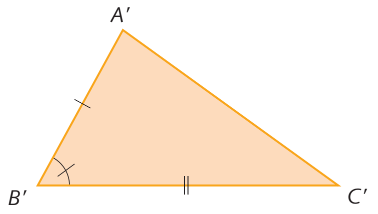


1º caso: LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Dois triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI





Em linguagem matemática, temos:

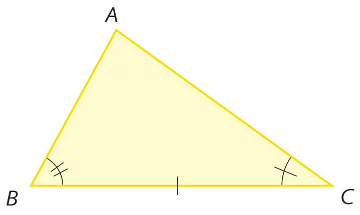
$$\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \widehat{B} \cong \widehat{B'}\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

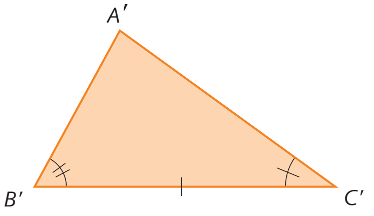
↑ Lemos: "implica".

2º caso: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

Dois triângulos que possuem um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI





Em linguagem matemática, temos:

$$\begin{array}{l}\widehat{B} \cong \widehat{B'}\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\\ \widehat{C} \cong \widehat{C'}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

3º caso: LLL (Lado-Lado-Lado)

Dois triângulos que possuem os três lados respectivamente congruentes são congruentes.

Em linguagem matemática, temos:

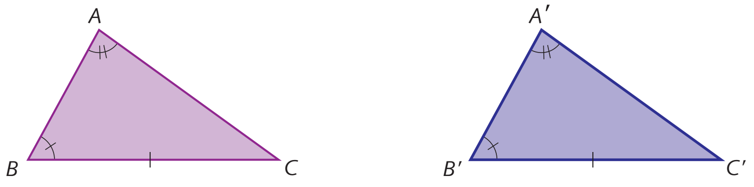
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

4º caso: LAA$_o$ (Lado-Ângulo-Ângulo oposto)

Dois triângulos que possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.

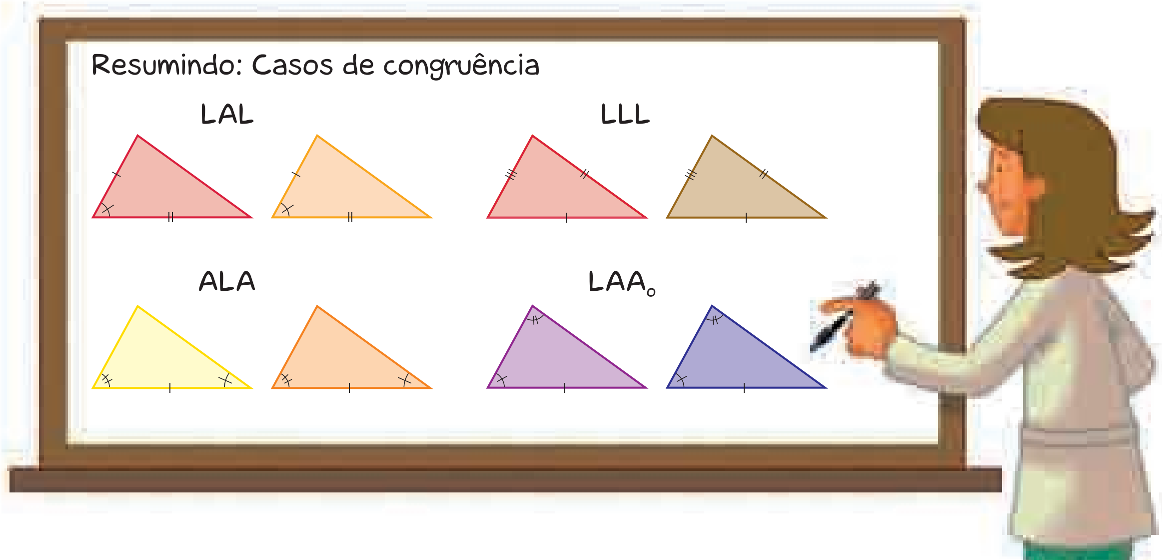


Em linguagem matemática, temos:

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\widehat{B} \cong \widehat{B'} \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

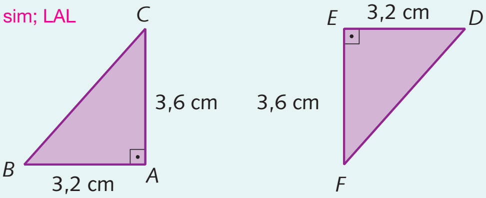
LÉO FANELLI

ATIVIDADES

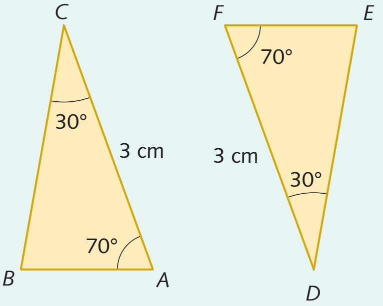
Faça as atividades no caderno.

1 Em cada item, verifique se os triângulos são congruentes e, em caso afirmativo, indique o caso correspondente.

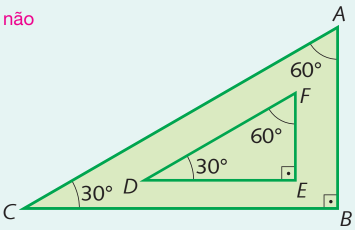
a) sim; LAL



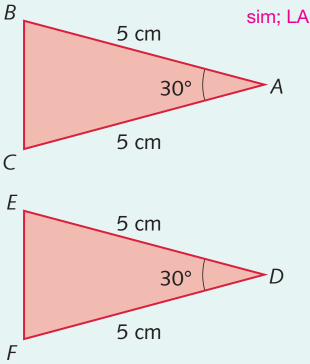
b) sim; ALA



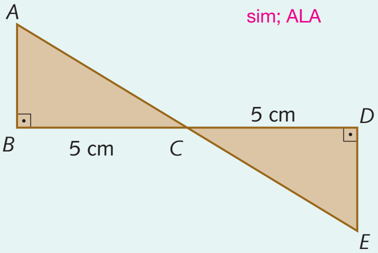
c) não



d) sim; LAL

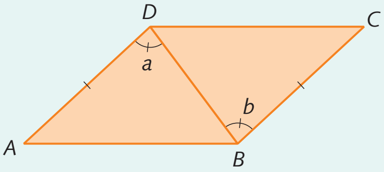


e) sim; ALA

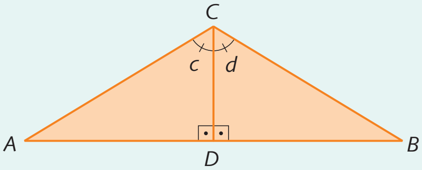


2 Prove a congruência dos triângulos abaixo, aplicando o caso correspondente.

a) $\triangle ADB$ e $\triangle CBD$ $\triangle ADB \cong \triangle CBD$ (caso LAL)

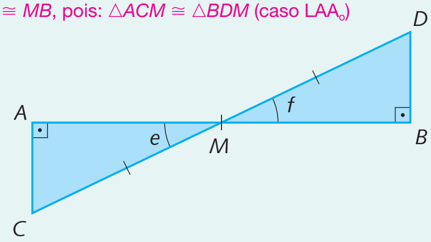


b) $\triangle CAD$ e $\triangle CBD$ $\triangle CAD \cong \triangle CBD$ (caso ALA)



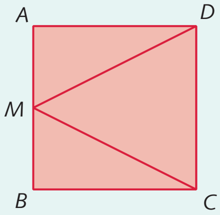
3 Na figura, demonstre que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$, pois: $\triangle ACM \cong \triangle BDM$ (caso LAA$_o$)

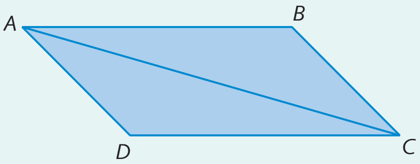


4 No quadrado $ABCD$, M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Prove que $\overline{MC} \cong \overline{MD}$.

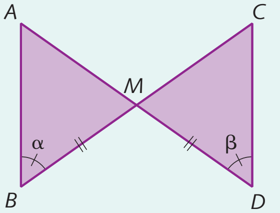
$\overline{MC} \cong \overline{MD}$, pois: $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (caso LAL)



5 No paralelogramo $ABCD$, prove que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (caso ALA)



6 Prove a congruência dos triângulos na figura abaixo. $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (caso ALA)



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

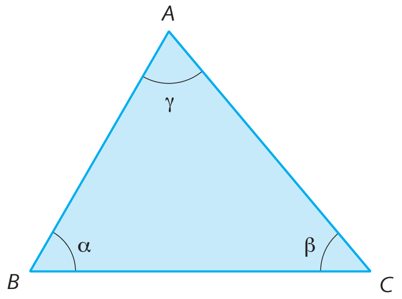
5 Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Os alunos poderão fazer uma revisão da demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na página 130 do capítulo 6.

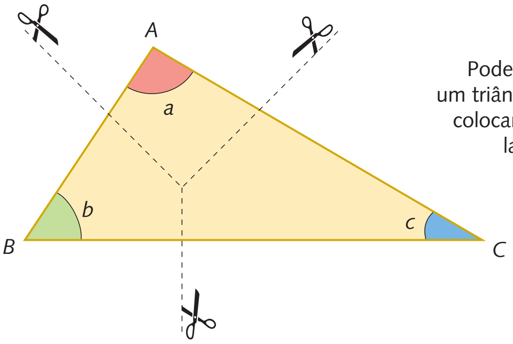
Teorema angular de Tales

Você já estudou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

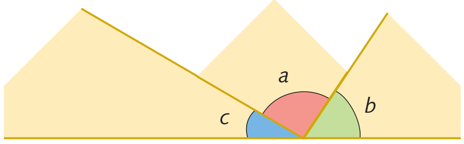
Esse teorema pode ser facilmente verificado por meio de um processo prático com o auxílio de uma tesoura.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



Podemos desenhar um triângulo, recortá-lo e colocar os três ângulos lado a lado.



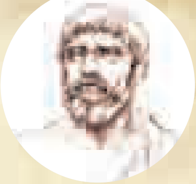
Verifique que: $a + b + c = 180°$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

UM POUCO DE HISTÓRIA

DIOGO SAITO

Tales de Mileto (624-548 a.C.)


TOMA

Matemático e astrônomo grego nascido em Mileto, Tales foi um dos *sete sábios da Grécia*. Criador da Geometria dedutiva, estudou Geometria no Egito, onde mediu a altura das pirâmides pela sombra por elas projetada.

Primeira Olimpíada, em Olímpia — 776 a.C.

Fundação da cidade de Roma — 753 a.C.

Abolição da escravidão por dívidas, em Atenas — 594 a.C.


CARMEN RUIZ/SHUTTERSTOCK

Discóbolo, estátua de atleta lançador de disco esculpida por Míron no século V a.C. Símbolo dos Jogos Olímpicos da Antiguidade.


CYRIL BANA/AUTHOR'S IMAGE/GLOW IMAGES

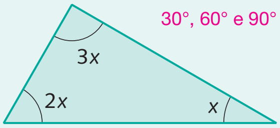
Local da fundação de Roma no monte Palatino. Foto de 2007.

ATIVIDADES

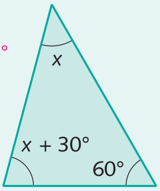
Faça as atividades no caderno.

1 Calcule, em grau, as medidas dos ângulos dos triângulos abaixo.

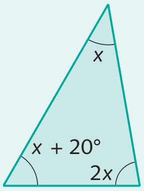
a) 30°, 60° e 90°



b) 45°, 60° e 75°



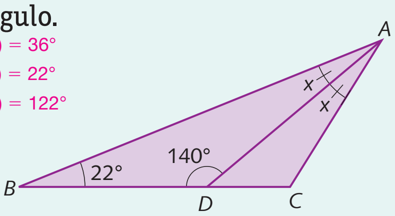
c) 40°, 60° e 80°



2 As medidas dos ângulos internos de um triângulo são expressas em grau por: $x - 10°$, $3x + 18°$ e $6x + 12°$. Determine suas medidas. 6°, 66° e 108°

3 No triângulo ABC, o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 22° e a bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$ forma com o lado BD um ângulo de 140°. Determine as medidas, em grau, dos ângulos desse triângulo.

med($\widehat{A}$) = 36°
med($\widehat{B}$) = 22°
med($\widehat{C}$) = 122°



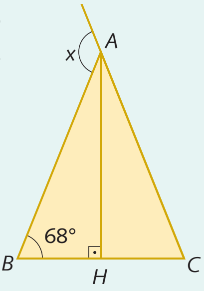
4 As medidas dos ângulos de um triângulo são expressas, em grau, por: $3x$, $4x + 15°$ e $6x - 30°$. Qual é a medida do maior dos ângulos? 75°

5 Em um triângulo ABC, a medida do ângulo $\widehat{B}$ é o triplo da medida do ângulo $\widehat{A}$, e a medida do ângulo $\widehat{C}$ é o dobro da medida do ângulo $\widehat{B}$. Calcule as medidas, em grau, dos ângulos do triângulo.

med($\widehat{A}$) = 18°; med($\widehat{B}$) = 54°; med($\widehat{C}$) = 108°

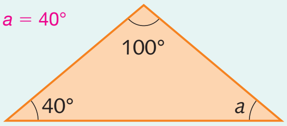
6 Na figura, $\overline{AH}$ é a altura e a bissetriz, relativa ao lado $\overline{BC}$, do triângulo ABC. Determine a medida do ângulo $\widehat{x}$.

x = 136°

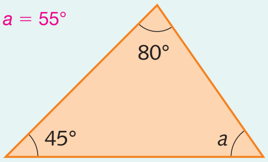


7 Calcule a medida do ângulo $\hat{a}$ nas figuras abaixo.

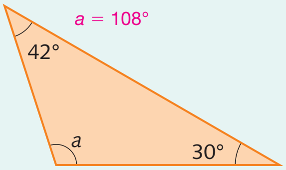
a) a = 40°



b) a = 55°

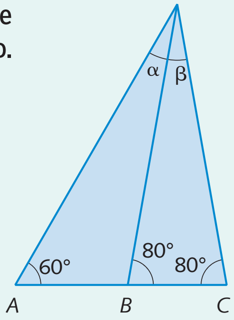


c) a = 108°



8 Calcule os valores de α e β na figura ao lado.

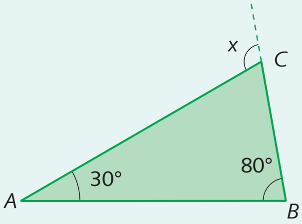
$\alpha = \beta = 20°$



9 Determine x, y, z e w, em grau, nos triângulos abaixo.

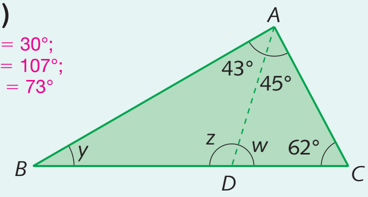
a)

x = 110°



b)

y = 30°;
z = 107°;
w = 73°



10 É possível construir um triângulo que tenha dois ângulos obtusos? Justifique sua resposta.

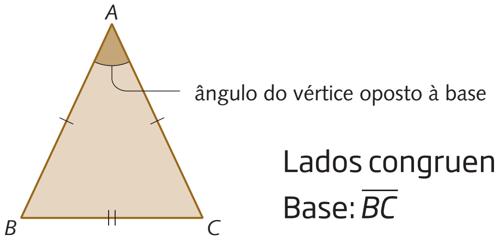
Não, pois a soma de dois ângulos obtusos é maior que 180°.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

6 Propriedades dos triângulos isósceles

GUILHERME CASAGRANDI

Observe o triângulo isósceles *ABC* de base *BC*.

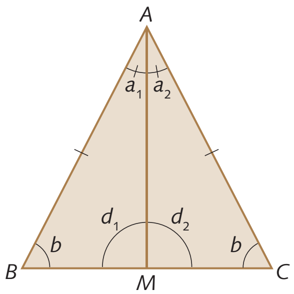


Lados congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Base: $\overline{BC}$

Agora, traçamos a bissetriz de $B\widehat{A}C$, determinando o ponto *M*. O ângulo $B\widehat{A}C$ ficou dividido em dois ângulos congruentes de medidas a_1 e a_2. Com vértice em *M*, ficam determinados os ângulos de medidas d_1 e d_2.

LUIZ RUBIO



Nos triângulos *ABM* e *ACM*, temos:

- $\overline{AM}$ é um lado comum aos dois triângulos. (L)
- $a_1 = a_2$ porque $\overline{AM}$ é bissetriz de $\widehat{A}$. (A)
- $AB = AC$, pois o triângulo *ABC* é isósceles. (L)

Portanto, os triângulos são congruentes pelo caso LAL, sendo med($\widehat{B}$) = med($\widehat{C}$).

Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Como os triângulos *ABM* e *ACM* são congruentes, temos:

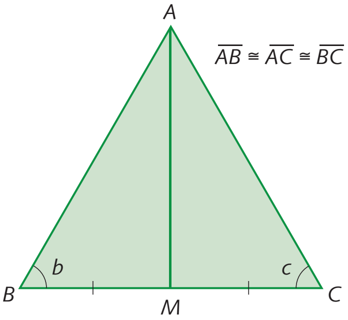
- $BM = MC$, ou seja, o ponto *M* é o ponto médio de $\overline{BC}$.
  Portanto, a bissetriz $\overline{AM}$ é também a mediana relativa à base.
- $d_1 = d_2$
  Como d_1 e d_2 são medidas iguais e somam 180°, pois são medidas de ângulos suplementares, temos que $d_1 = d_2 = 90°$.

Portanto, $\overline{AM}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{AM}$ é altura relativa a $\overline{BC}$.

Em qualquer triângulo isósceles, a mediana relativa à base e a altura relativa à base coincidem com a bissetriz do ângulo do vértice oposto à base.

Triângulos equiláteros

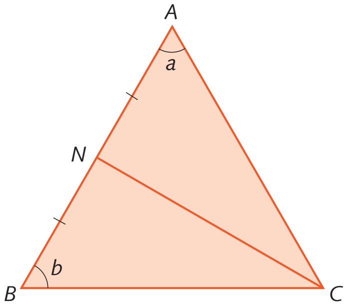
Os triângulos equiláteros são também isósceles, pois apresentam dois lados congruentes. Observe o triângulo ABC equilátero e a mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$.



Nos triângulos ABM e ACM, temos:

- $\overline{AM}$ é um lado comum aos dois triângulos. (L)
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$, pois M é o ponto médio de $\overline{BC}$. (L)
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, pois o triângulo ABC é equilátero. (L)

Portanto, os triângulos ABM e ACM são congruentes pelo caso LLL, sendo med($\widehat{B}$) $=$ med($\widehat{C}$). Agora, vamos traçar a mediana $\overline{CN}$ relativa ao lado $\overline{AB}$.



Nos triângulos CNA e CNB, temos:

- $\overline{CN}$ é um lado comum aos dois triângulos. (L)
- $\overline{AN} \cong \overline{BN}$, pois N é o ponto médio de $\overline{AB}$. (L)
- $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, pois o triângulo ABC é equilátero. (L)

Portanto, os triângulos CNA e CNB são congruentes pelo caso LLL, sendo med($\widehat{A}$) $=$ med($\widehat{B}$).
Se med($\widehat{B}$) $=$ med($\widehat{C}$) e med($\widehat{A}$) $=$ med($\widehat{B}$), então med($\widehat{A}$) $=$ med($\widehat{C}$).
Logo: med($\widehat{A}$) $=$ med($\widehat{B}$) $=$ med($\widehat{C}$).
Como med($\widehat{A}$) $+$ med($\widehat{B}$) $+$ med($\widehat{C}$) $= 180°$ e suas medidas são iguais:
med($\widehat{A}$) $=$ med($\widehat{B}$) $=$ med($\widehat{C}$)$= 60°$.

Em qualquer triângulo equilátero, os três ângulos internos são congruentes, cada um medindo 60°.

Observações

Valem as propriedades recíprocas:

- Um triângulo que tem dois ângulos congruentes é um triângulo isósceles.
- Um triângulo em que a altura, a mediana e a bissetriz relativas a um lado coincidem é um triângulo isósceles cuja base é esse lado.
- Todo triângulo equiângulo é um triângulo equilátero.

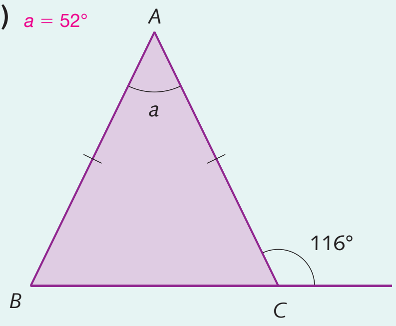
ILUSTRAÇÕES LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

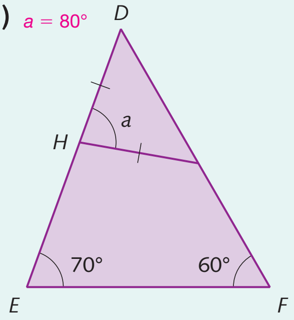
Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor de *a* em cada caso.

a) *a* = 52°

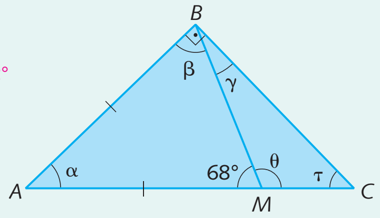


b) *a* = 80°

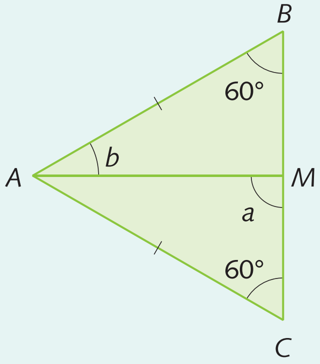


2 Determine a medida de cada um dos ângulos na figura abaixo.

$\beta = 68°$
$\alpha = 44°$
$\gamma = 22°$
$\theta = 112°$
$\tau = 46°$

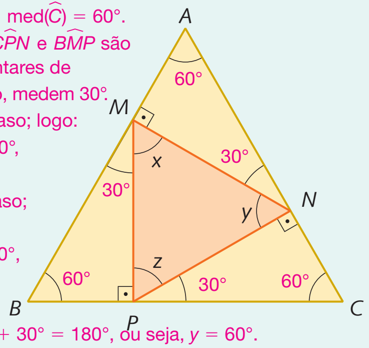


3 Considerando que o triângulo *ABC* da figura abaixo é isósceles de base $\overline{BC}$ e que $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, calcule *a* e *b*. *a* = 90° *b* = 30°



4 Na figura abaixo, o △*ABC* é equilátero, e *x*, *y* e *z* são medidas dos ângulos indicados. Observe atentamente e prove que o △*MNP* também é equilátero.

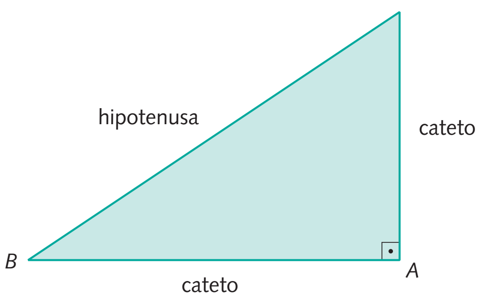
O triângulo *ABC* é equilátero; logo, é equiângulo, isto é, $\text{med}(\widehat{A}) = \text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{C}) = 60°$.
Os ângulos $A\widehat{N}M$, $C\widehat{P}N$ e $B\widehat{M}P$ são ângulos complementares de ângulos de 60°; logo, medem 30°.
$A\widehat{M}B$ é um ângulo raso; logo:
$90° + x + 30° = 180°$,
ou seja, $x = 60°$.
$B\widehat{P}C$ é um ângulo raso;
logo:
$90° + z + 30° = 180°$,
ou seja, $z = 60°$.
$C\widehat{N}A$ é um ângulo raso; logo: $90° + y + 30° = 180°$, ou seja, $y = 60°$.
Como $x = y = z = 60°$, o triângulo *MNP* é um triângulo equiângulo; portanto, é um triângulo equilátero.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

7 Propriedades dos triângulos retângulos

São várias as propriedades dos triângulos retângulos. Vamos analisar algumas delas.

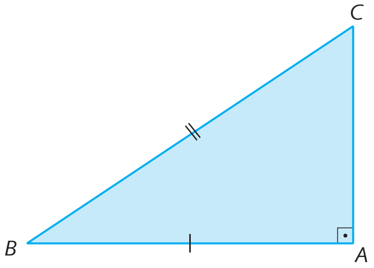


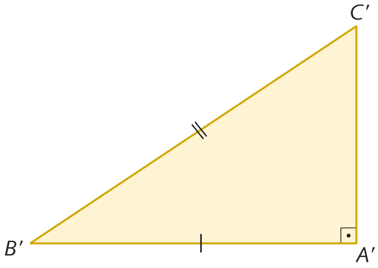
GUILHERME CASAGRANDI

LÉO FANELLI

1ª propriedade

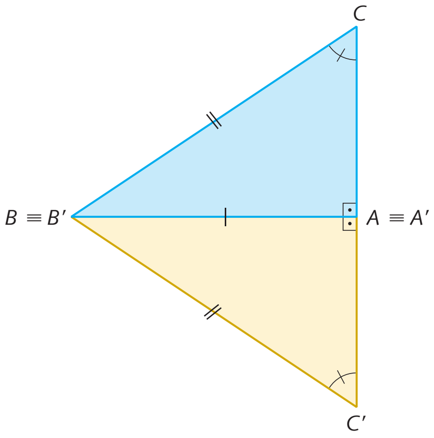
Considere os triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$.





$\text{med}(\widehat{A}) = \text{med}(\widehat{A'}) = 90°$
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Justapomos ao $\triangle ABC$ o $\triangle A'B'C'$, formando o $\triangle CBC'$, que é isósceles ($BC = B'C'$).
Veja:

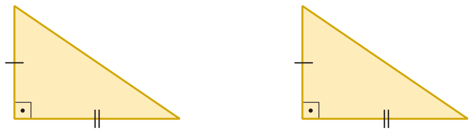


$\overline{BA}$ e $\overline{B'A'}$ são lados coincidentes. (L)
Sendo o $\triangle CBC'$ isósceles, temos: $\text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{C'})$ (A)
$B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$, pois são ângulos retos. (A)
Portanto, pelo caso LAA_o, temos: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

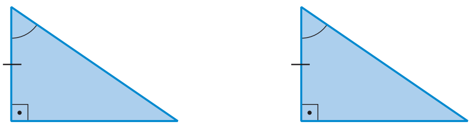
Dois triângulos retângulos que possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes são congruentes.

Podemos verificar ainda que, para dois triângulos retângulos serem congruentes, basta que sejam, respectivamente, congruentes:

- os dois catetos (caso LAL);



- um cateto e o ângulo agudo adjacente (caso ALA);



- um cateto e o ângulo agudo oposto (caso LAA_o);

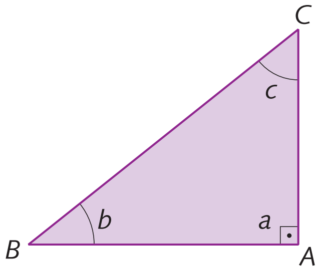
- um ângulo agudo e a hipotenusa (caso LAA_o).

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

2ª propriedade

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em *A*:

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI



$\text{med}(\widehat{A}) = a, \text{med}(\widehat{B}) = b, \text{med}(\widehat{C}) = c$

Veja:

$a + b + c = 180°$ ← Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

$a = 90°$ ← $\triangle ABC$ é retângulo em *A*.

Assim: $90° + b + c = 180°$

$b + c = 90°$

Portanto, $\widehat{b}$ e $\widehat{c}$ são ângulos complementares.

Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

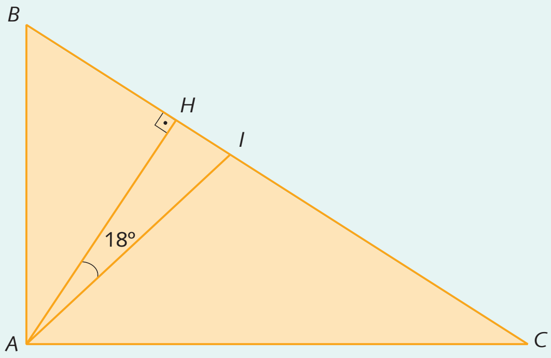
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Em um triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede $\frac{2}{3}$ do outro. Calcule as medidas desses ângulos. 36° e 54°

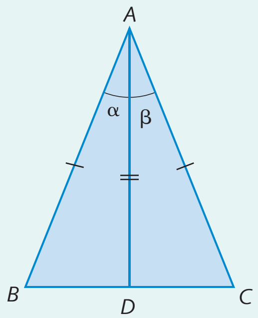
2 Em um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, a altura $\overline{AH}$ forma com a bissetriz $\overline{AI}$ um ângulo de 18°. Determine as medidas dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. $\text{med}(\widehat{B}) = 63°$; $\text{med}(\widehat{C}) = 27°$

FERNANDO JOSÉ FERREIRA



3 Na figura, sendo $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$, demonstre a congruência dos triângulos *ABD* e *ACD*.

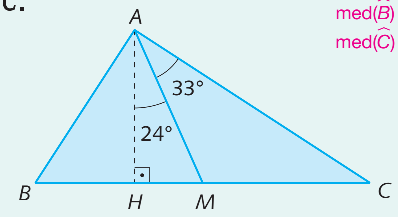
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$, $\overline{AD}$ é lado comum aos triângulos *ABD* e *ACD*; portanto pelo caso LAL, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$



GUILHERME CASAGRANDI

4 No triângulo retângulo *ABC*, a altura $\overline{AH}$ forma com a mediana $\overline{AM}$ um ângulo de 24°. Determine as medidas dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

$\text{med}(\widehat{B}) = 57°$; $\text{med}(\widehat{C}) = 33°$



GUILHERME CASAGRANDI

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Os triângulos podem ser classificados em relação às medidas dos lados e em relação às medidas dos ângulos internos. Dessa maneira, é possível afirmar que existe um triângulo equilátero acutângulo. Com base nessas considerações, responda às questões.

a) É possível que exista um triângulo isósceles retângulo? Sim

b) É possível que exista um triângulo equilátero obtusângulo? Não

2 Neste capítulo você estudou os pontos notáveis do triângulo, que formam a sigla BICO: o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro. O circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo. Relacione, no seu caderno, cada ponto notável à ceviana correspondente. baricentro – mediana; incentro – bissetriz; ortocentro – altura

3 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? alternativas **a** e **b**

a) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

b) Todo triângulo equilátero é também isósceles.

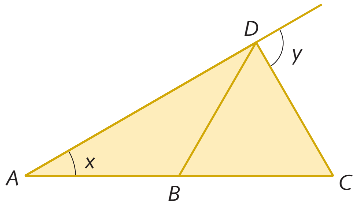
c) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são suplementares.

d) Existem 3 casos de congruência de triângulos: LAL, ALA e LLL.

4 O triângulo é a única figura geométrica rígida. Por esse motivo, é bastante usada na engenharia civil e na arquitetura. Observe ao seu redor e escreva exemplos de estruturas compostas por triângulos. Resposta pessoal. Algumas respostas possíveis: as antenas de celular, as torres de transmissão de energia, as estruturas de telhados etc.

Aplicando

1 Na figura, $AB = BD = CD$. No caderno, indique a alternativa correta. alternativa **a**



a) $y = 3x$

b) $x = y$

c) $y = 2x$

d) $3x = 2y$

e) $x + y = 180°$

2 Em um triângulo, dois ângulos externos medem 110° e 120°. Os ângulos internos desse triângulo medirão, em grau: alternativa **c**

a) 30°, 60° e 90°

b) 80°, 70° e 30°

c) 50°, 60° e 70°

d) 30°, 110° e 40°

e) 50°, 50° e 80°

3 Podemos construir um triângulo de lados 5,5 m, 3 m e 1,5 m? Justifique sua resposta. não, pois: $5{,}5 > 3 + 1{,}5$

4 Denomina-se incentro o ponto comum: alternativa **e**

a) às alturas do triângulo;

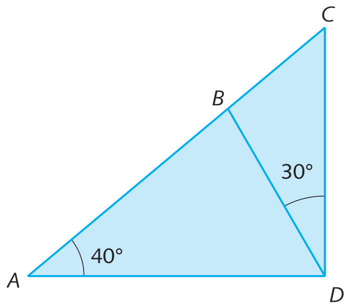
b) às mediatrizes dos lados do triângulo;

c) às medianas do triângulo;

d) aos três lados do triângulo;

e) às bissetrizes do triângulo.

5 Na figura, o ângulo $A\widehat{D}C$ é reto. A medida do ângulo $C\widehat{B}D$ é: alternativa **b**



a) 95°

b) 100°

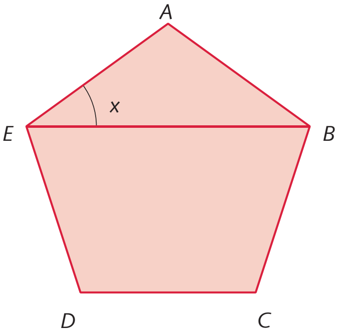
c) 105°

d) 110°

e) 120°

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

6 O pentágono da figura é regular. Nessas condições, o valor de x, em grau, é:
alternativa **d**



a) 72°
b) 48°
c) 38°
d) 36°
e) 40°

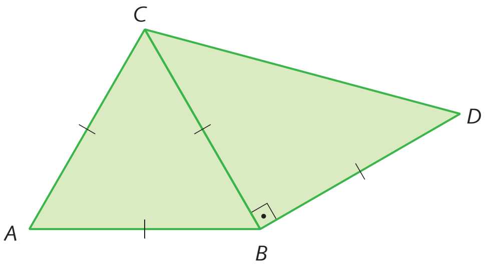
7 Determine as sentenças verdadeiras.
alternativas **a** e **c**

a) Sendo congruentes os catetos de dois triângulos retângulos, podemos afirmar que os triângulos são congruentes.

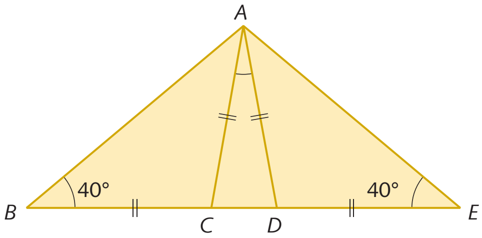
b) Sendo congruentes todos os ângulos de dois triângulos, podemos afirmar que os triângulos são congruentes.

c) Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, o ângulo oposto e um ângulo adjacente respectivamente congruentes.

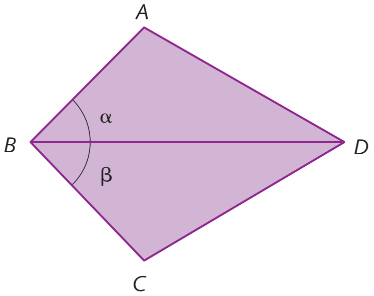
8 Qual é a medida do ângulo $A\hat{C}D$?
$60° + 45° = 105°$



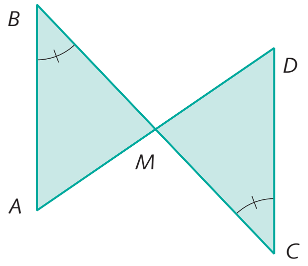
9 Determine a medida de $C\hat{A}D$ na figura abaixo. 20°



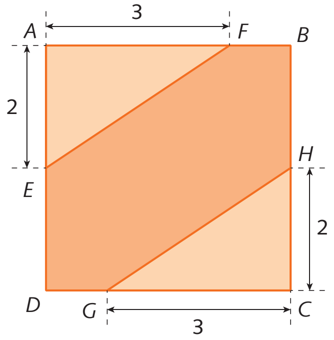
10 Sabendo que $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, prove que $\hat{A} \cong \hat{C}$. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (caso LAL); portanto: $\hat{A} \cong \hat{C}$



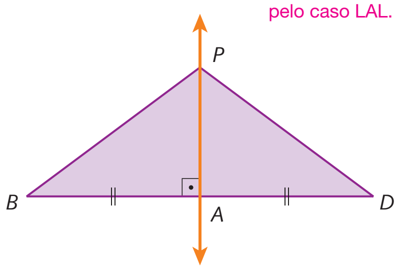
11 Sabendo que $\overline{CM} \cong \overline{MB}$ e $\hat{B} \cong \hat{C}$, prove que $\overline{AM} \cong \overline{MD}$. $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ (caso ALA), portanto: $\overline{AM} \cong \overline{MD}$



12 Observe o quadrado $ABCD$ e os triângulos AEF e GHC na figura. Podemos afirmar que os dois triângulos são congruentes? Justifique sua resposta. sim, pelo caso LAL



13 Mostre que todo ponto pertencente à mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento. Basta provar que $\triangle ABP \cong \triangle ADP$ pelo caso LAL.

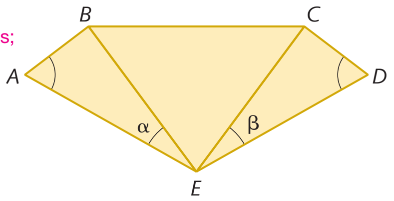


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

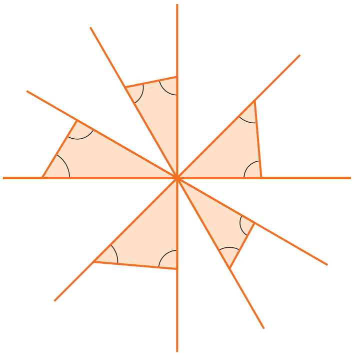
14 Demonstre a congruência das medianas traçadas a partir dos vértices da base de um triângulo isósceles.

15 Demonstre que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, sendo $\triangle BCE$ isósceles, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$.

$BE = CE$, pois $\triangle BCE$ é isósceles; $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ (caso LAA_o)



16 Reúna-se com um colega e observem a figura a seguir.



Agora, respondam: qual é a soma das medidas dos ângulos destacados da figura?

$180 \cdot 5 - 180° = 720°$

17 **(EPCar-MG)** Samuel possui 12 palitos iguais e resolveu formar um único triângulo por vez, usando os 12 palitos sem parti-los.

Ele verificou que é possível formar x triângulos retângulos, y triângulos isósceles, z triângulos equiláteros e w triângulos escalenos.

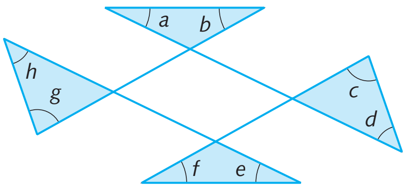
A soma $x + y + z + w$ é igual a: alternativa **d**

a) 7
b) 6
c) 4
d) 5

18 Reúna-se com um colega, leiam e resolvam a questão.

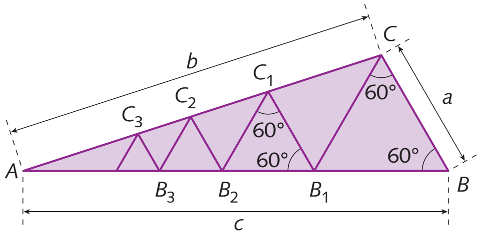
Na figura abaixo, calculem: $S = 360°$

$S = a + b + c + d + e + f + g + h$



19 Reúna-se com um colega, leiam e resolvam a questão.

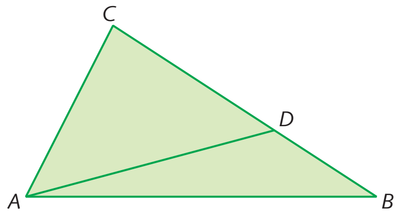
Dado o triângulo ABC, construímos a poligonal $L = BCB_1C_1B_2C_2B_3C_3...$.



A medida do comprimento de L é: alternativa **a**

a) $2c$
b) $a + b + c$
c) $2(a + b)$
d) $2(a + c)$
e) $\frac{a + b}{2} + c$

20 No triângulo ABC, sabe-se que: $AC = CD$ e med($C\widehat{A}B$) − med($A\widehat{B}C$) = 30°. Portanto, a medida do ângulo $B\widehat{A}D$ é igual a: alternativa **b**

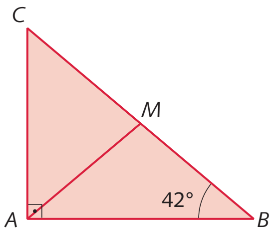


a) 30°
b) 15°
c) 20°
d) 22°30'
e) 45°

21 No triângulo ABC, retângulo em A, sendo med($\widehat{B}$) = 50°, o ângulo formado pela altura e pela mediana traçadas a partir do vértice $\widehat{A}$ mede: alternativa **e**

a) 40°
b) 45°
c) 20°
d) 25°
e) 10°

22 No triângulo retângulo ABC, sabe-se que med($\widehat{B}$) = 42° e que $\overline{AM}$ é a mediana relativa à hipotenusa. Determine a medida do ângulo $C\widehat{M}A$. 84°



14. Seja $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{BC}$, M ponto médio de $\overline{AB}$ e N ponto médio de $\overline{AC}$.
$\triangle AMC \cong \triangle ANB$ (caso LAL); portanto: $\overline{BN} \cong \overline{CM}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO

11 QUADRILÁTEROS

MARC TURCAN/SHUTTERSTOCK

Vista aérea da cidade do Rio de Janeiro com a Baía de Guanabara ao fundo (RJ).

Neste capítulo, vamos trabalhar com quadriláteros — conceito, elementos e um estudo sobre os quadriláteros notáveis: o paralelogramo e o trapézio. Vamos apresentar de forma detalhada as principais propriedades dos paralelogramos e dos trapézios. A página de abertura dá oportunidade para o professor introduzir o conceito de quadrilátero e citar exemplos práticos vistos no dia a dia.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

A região Sudeste do Brasil é composta de quatro estados: São Paulo, Minas Gerais, Espírito Santo e Rio de Janeiro. Observe, no mapa, o quadrilátero cujos vértices correspondem às cidades de São Paulo, Belo Horizonte, Vitória e Rio de Janeiro, capitais dos estados dessa região, respectivamente.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Agora, responda às questões.

- O que é um quadrilátero? É um polígono de quatro lados.
- Cite alguns tipos de quadriláteros. Os paralelogramos (entre eles, o retângulo e o losango) e os trapézios.

TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

Figuras com a forma de quadriláteros são utilizadas com muita frequência no dia a dia.

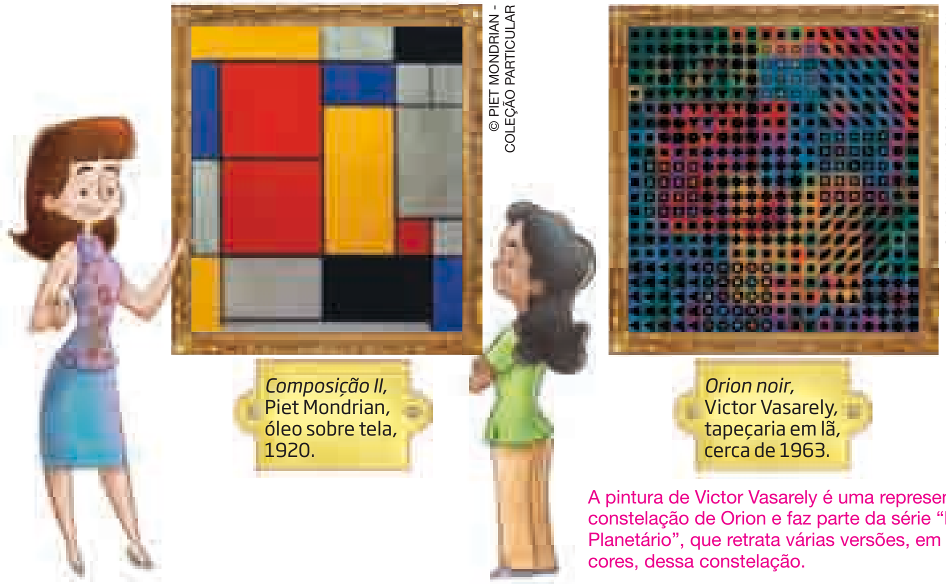

MARAZE/SHUTTERSTOCK


NATALT/SHUTTERSTOCK


CASSANDRA CURY/PULSAR IMAGENS

Instituto Histórico e Geográfico do Cariri Paraibano. São João do Cariri, PB, 2014.

Veja abaixo as obras de arte dos pintores holandês Piet Mondrian e húngaro Victor Vasarely.


GEORGE TUTUMI

© PIET MONDRIAN - COLEÇÃO PARTICULAR

Composição II, Piet Mondrian, óleo sobre tela, 1920.

© VASALERY, VICTOR/AUTVIS, BRASIL, 2015 - NATIONAL GALLERY OF VICTORIA, MELBOURNE, AUSTRALIA

Orion noir, Victor Vasarely, tapeçaria em lã, cerca de 1963.

A pintura de Victor Vasarely é uma representação da constelação de Orion e faz parte da série "Folclore Planetário", que retrata várias versões, em diferentes cores, dessa constelação.

- De acordo com o que aprendeu nos anos anteriores, que quadriláteros você identifica nos quadros acima? quadrados, retângulos e losangos

Neste capítulo, vamos aprofundar o estudo dos **quadriláteros**.

1 Quadriláteros

Já vimos que a rigidez do triângulo pode ser muito útil em nossa vida.

MARK SYKES/JAI/CORBIS/LATINSTOCK

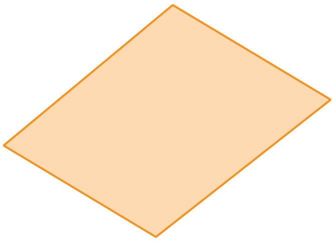
A estrutura de uma cobertura precisa ser rígida. Na foto: cobertura de estação de trem em Londres, Inglaterra, 2012.

A não rigidez, ou seja, a mobilidade observada em outros polígonos, também pode ser igualmente útil.

JUNIOR ROZZO

Um varal de roupas precisa encolher-se e estender-se.

Agora, observe a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

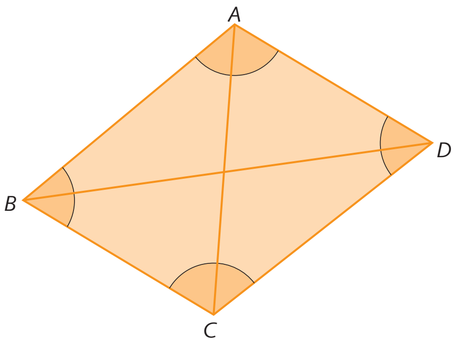
GEORGE TUTUMI

Essa figura é chamada quadrilátero.

Quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Elementos de um quadrilátero

Observe o quadrilátero *ABCD*.



GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

Os elementos do quadrilátero *ABCD* são:

- Vértices: *A*, *B*, *C* e *D*
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
- Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$
- Ângulos internos: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$

Em um quadrilátero, dois lados ou dois ângulos não consecutivos são chamados **opostos**. Então, no quadrilátero *ABCD* acima:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$ são pares de lados opostos;
- $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são pares de ângulos opostos.

Observações

1 Podemos representar os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ por $D\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$, respectivamente.

2 Todo quadrilátero tem apenas duas diagonais.

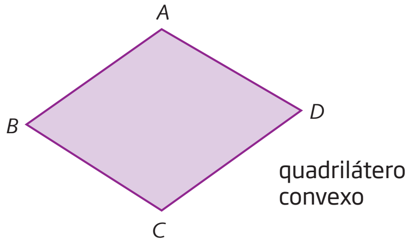
3 O perímetro de um quadrilátero é a soma das medidas de seus lados. No quadrilátero *ABCD* acima, temos:
Perímetro $(ABCD) = AB + BC + CD + DA$

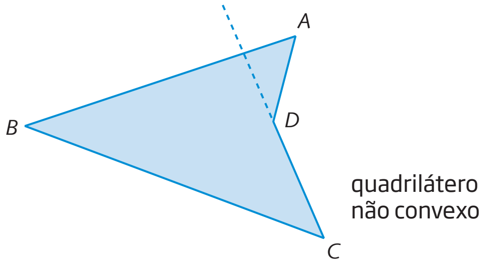
Convexidade

Os quadriláteros podem ser convexos ou não convexos.

Um quadrilátero é **convexo** quando a reta que une dois vértices consecutivos quaisquer não cruza o lado formado pelos dois outros vértices, e a medida de qualquer ângulo interno é menor que 180°.

Neste momento, poderão ser revistas as propriedades dos polígonos convexos (a partir da página 125).



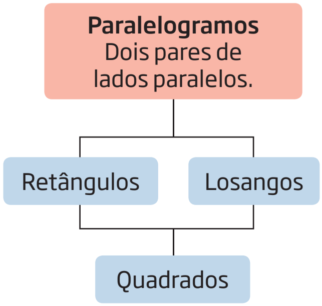


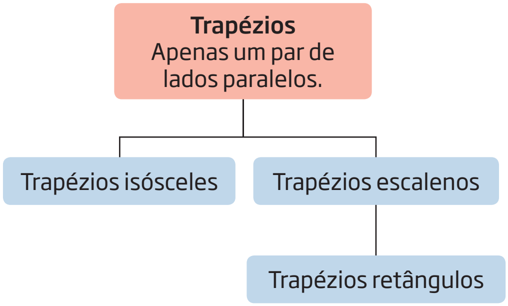
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Vamos estudar apenas os **quadriláteros convexos**, especialmente os **paralelogramos** e os **trapézios**.

Classificação

Os paralelogramos podem ser classificados em: retângulos, losangos e quadrados. E os trapézios podem ser classificados em: trapézios retângulos, trapézios isósceles e trapézios escalenos.



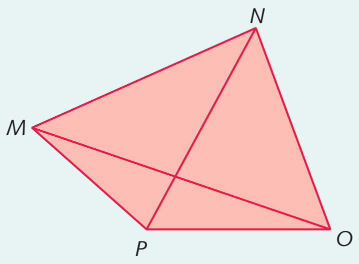


As características de cada quadrilátero serão abordadas adiante.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe o quadrilátero *MNOP* abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Agora, no caderno, identifique:

a) os vértices; *M*, *N*, *O* e *P*

b) os lados; $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$ e $\overline{MP}$

c) o lado oposto ao lado $\overline{MP}$; $\overline{NO}$

d) as diagonais; $\overline{MO}$ e $\overline{PN}$

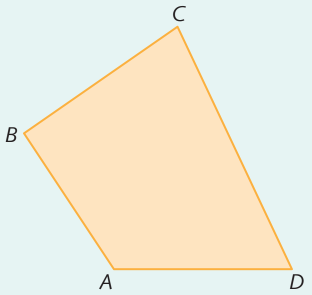
e) o ângulo oposto ao ângulo $\widehat{P}$. $\widehat{N}$ ou $M\widehat{N}O$

2 O perímetro do polígono representado na atividade anterior é 26 cm. Calcule a medida de $\overline{MP}$, sendo $MN = 8$ cm, $NO = 7$ cm e $OP = 6$ cm. 5 cm

3 Desenhe dois quadriláteros côncavos e dois quadriláteros convexos. Resposta pessoal.

4 Reúna-se com um colega, leiam, discutam e resolvam a questão a seguir.

Em um sítio há um curral com a forma de um quadrilátero convexo *ABCD*, cujas medidas dos lados são $AB = 15$ m, $BC = 15$ m, $CD = 25{,}5$ m e $DA = 17{,}5$ m. Com uma cerca em uma das diagonais para separar equinos de bovinos, o sitiante quer dividi-lo em dois currais triangulares.



LUIZ RUBIO

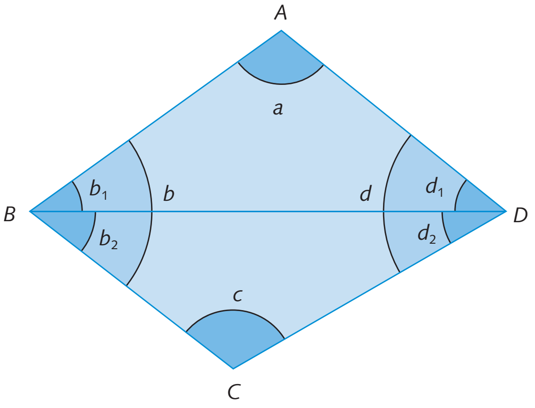
Em número inteiro:

a) qual pode ser a maior medida da cerca que vai de *B* até *D*? 32 m

b) qual pode ser a maior medida da cerca que vai de *A* até *C*? 29 m

2 Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo

Traçando a diagonal $\overline{BD}$ no quadrilátero *ABCD*, são formados os triângulos *ABD* e *BCD*.



GUILHERME CASAGRANDI

No triângulo *ABD*, temos:

$$a + b_1 + d_1 = 180° \ \text{(I)}$$

No triângulo *BCD*, temos:

$$c + b_2 + d_2 = 180° \ \text{(II)}$$

Adicionando (I) e (II), obtemos:

$$a + b_1 + d_1 + c + b_2 + d_2 = 180° + 180°$$

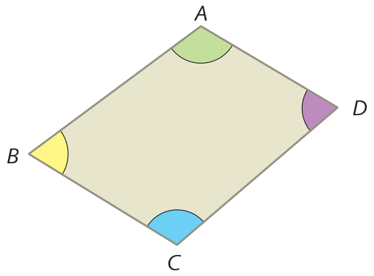
$$a + \underbrace{b_1 + b_2}_{b} + c + \underbrace{d_1 + d_2}_{d} = 360°$$

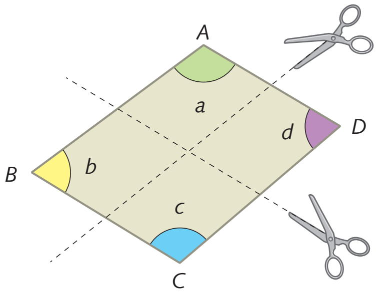
$$a + b + c + d = 360°$$

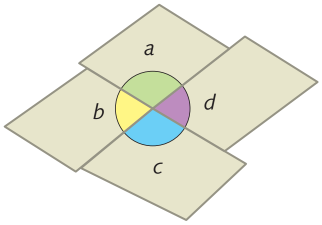
Então:

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°.

Com o auxílio de uma tesoura, você poderá verificar essa relação depois de desenhar um quadrilátero, marcar seus ângulos e recortá-lo, como mostra a figura.







$a + b + c + d = 360°$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

1 Já conhecemos uma fórmula geral para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer polígono convexo:

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$, em que n é o número de lados do polígono.

Como, no caso dos quadriláteros, $n = 4$, temos:

$$S_i = (4 - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$$

2 A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer é 360°.

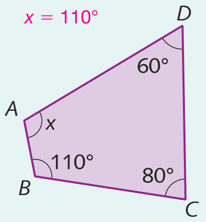
$$S_e = 360°$$

ATIVIDADES

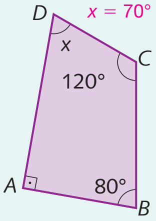
Faça as atividades no caderno.

1 Em cada caso, determine o valor de x, em grau, indicado nos quadriláteros.

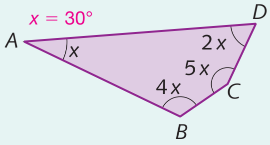
a) $x = 110°$



c) $x = 70°$



b) $x = 30°$



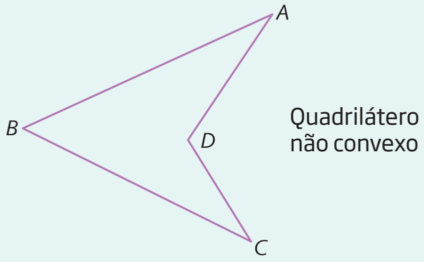
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

2 Um quadrilátero é tal que um ângulo interno tem 10° a menos do que o seu consecutivo, que tem 10° a menos do que o seu consecutivo, que tem 10° a menos do que o seu consecutivo. Quanto mede cada ângulo desse quadrilátero? 75°, 85°, 95° e 105°

3 Sabendo que os ângulos internos de um quadrilátero convexo medem, em grau, x, $2x$, $3x$ e $4x$, determine essas medidas.
36°, 72°, 108° e 144°

4 Em um quadrilátero, os ângulos internos medem, em grau, $x + 20°$, $x + 40°$, $x + 50°$ e $x - 10°$. Calcule as medidas dos ângulos desse quadrilátero. 85°, 105°, 115° e 55°

5 Considere um quadrilátero não convexo $ABCD$. Mostre que a soma das medidas dos ângulos internos, tal como para os quadriláteros convexos, também é igual a 360°.
Traçar diagonal BD. $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 180° + 180° = 360°$

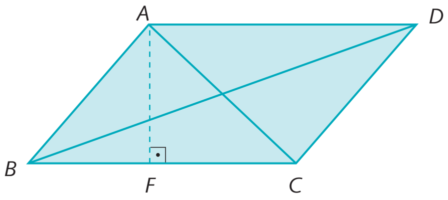


LUIZ RUBIO

3 Paralelogramos

Paralelogramo é o quadrilátero convexo que tem os lados opostos paralelos.

Veja o quadrilátero $ADCB$.



GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

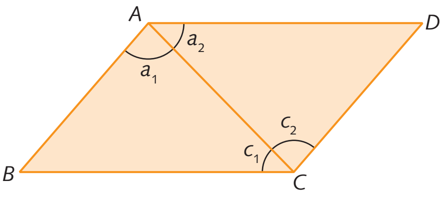
No paralelogramo $ADCB$, temos:

- Os lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. Em linguagem matemática: $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$
- Os lados opostos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ são paralelos. Em linguagem matemática: $\overline{AD} /\!/ \overline{CB}$
- Qualquer lado pode ser considerado base do paralelogramo.
- O segmento $\overline{AF}$ é uma altura relativa à base $\overline{BC}$.

- Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são as diagonais do paralelogramo.
- Os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são opostos.
- Os ângulos $B\hat{A}D$ e $D\hat{C}B$ são opostos.
- A soma das medidas dos ângulos internos é 360°.

Algumas propriedades do paralelogramo

Considere o paralelogramo *ADCB*. Traçando a diagonal $\overline{AC}$ nesse paralelogramo, obtemos os triângulos *ADC* e *CBA*.



GUILHERME CASAGRANDI

Comparando esses triângulos, podemos observar que:

- $a_1 = c_2$: Ângulos alternos internos formados por paralelas têm a mesma medida. (A)
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$: Lado comum. (L)
- $a_2 = c_1$: Ângulos alternos internos formados por paralelas têm a mesma medida. (A)

Assim, pelo caso de congruência ALA podemos concluir que os triângulos *ADC* e *CBA* são congruentes.

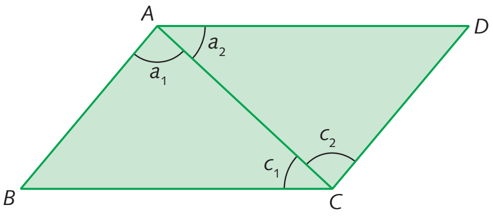
De maneira análoga, traçando a diagonal $\overline{BD}$, podemos concluir que os triângulos *BAD* e *DCB* são congruentes.

Cada diagonal do paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes.

Das congruências acima, também podemos concluir que: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{DA} \cong \overline{BC}$.

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Considere o paralelogramo *ADCB*. Traçando a diagonal $\overline{AC}$ nesse paralelogramo, obtemos os triângulos *CDA* e *ABC*.



GUILHERME CASAGRANDI

Já vimos que a diagonal $\overline{AC}$ divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes, ou seja, que $A\hat{B}C \cong C\hat{D}A$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

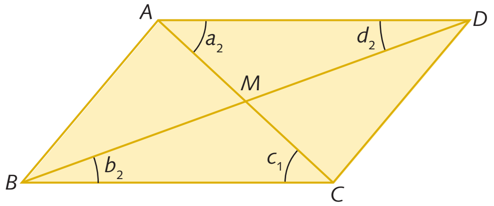
Vimos também que $a_1 = c_2$ e $a_2 = c_1$. Adicionando membro a membro, temos:

$a_1 + a_2 = c_1 + c_2$, ou seja, med($\widehat{A}$) = med($\widehat{C}$).

Portanto, $B\widehat{A}D \cong D\widehat{C}B$.

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Considere o paralelogramo *ADCB*. Ao traçar as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ desse paralelogramo, que se encontram no ponto *M*, obtemos os triângulos *AMD* e *CMB*.



GUILHERME CASAGRANDI

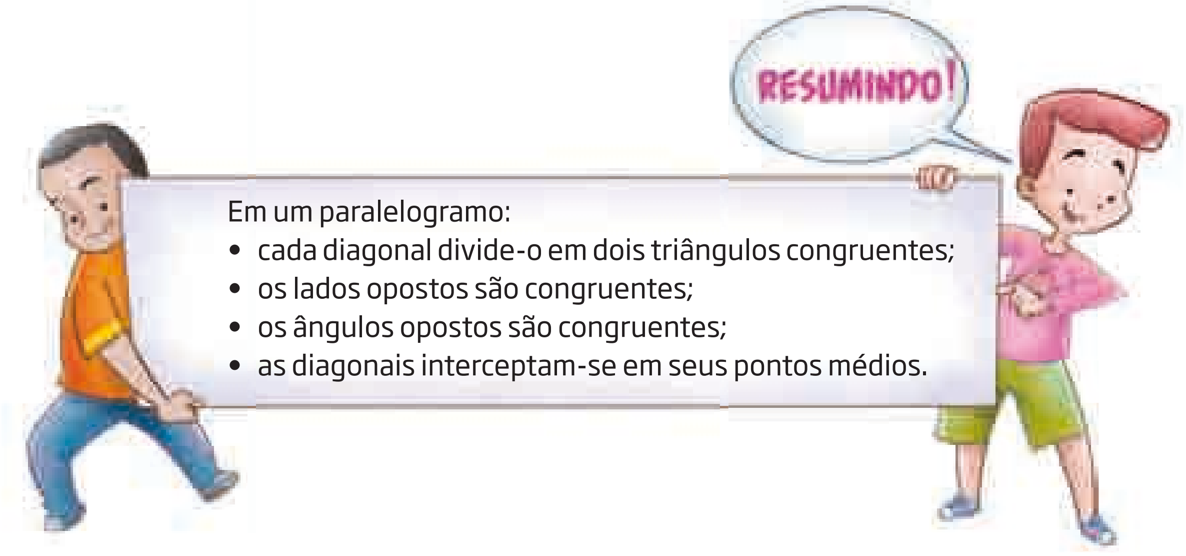
Comparando esses triângulos, podemos observar que:

- $a_2 = c_1$: Ângulos alternos internos têm medidas iguais. (A)
- $\overline{AD} \cong \overline{CB}$: Lados opostos de um paralelogramo são congruentes. (L)
- $b_2 = d_2$: Ângulos alternos internos têm medidas iguais. (A)

Assim, pelo caso de congruência ALA podemos concluir que os triângulos *AMD* e *CMB* são congruentes.

Portanto, $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ e $\overline{BM} \cong \overline{DM}$, já que são lados correspondentes em triângulos congruentes. Isso significa que *M* é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$.

As diagonais de um paralelogramo se cruzam nos respectivos pontos médios.



Em um paralelogramo:
- cada diagonal divide-o em dois triângulos congruentes;
- os lados opostos são congruentes;
- os ângulos opostos são congruentes;
- as diagonais interceptam-se em seus pontos médios.

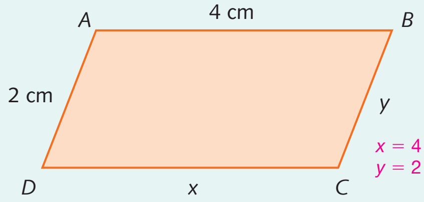
GEORGE TUTUMI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

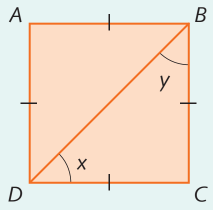
1 Em cada caso, determine x e y.

a)



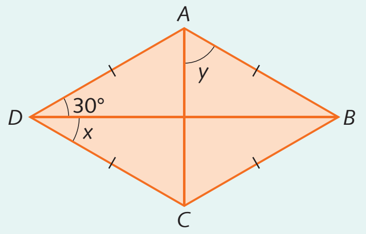
$x = 4$ cm, $y = 2$ cm

b)



$x = y = 45°$

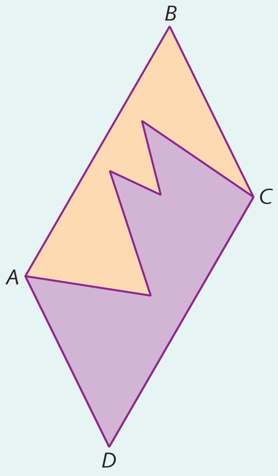
c)



$x = 30°$
$y = 60°$

2 Construa um paralelogramo $ABCD$ tal que: $BC = 8$ cm, $AB = 4$ cm e med$(A\widehat{B}C) = 60°$. Construção de figura.

3 Observe o paralelogramo $ABCD$.



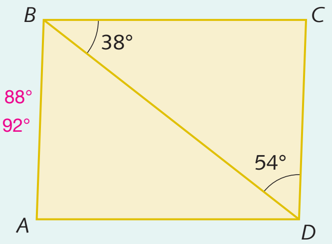
Qual das duas superfícies coloridas possui o maior perímetro? Os perímetros são iguais.

4 O perímetro de um paralelogramo é igual a 66 cm. Calcule as medidas dos seus lados, sabendo que a diferença entre elas é de 14 cm. 23,5 cm; 23,5 cm; 9,5 cm e 9,5 cm

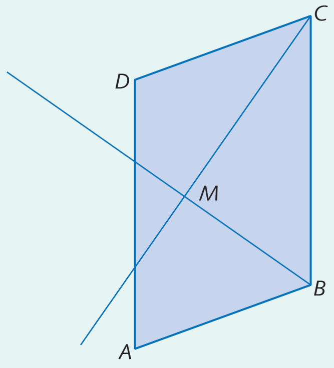
5 Um ângulo externo de um paralelogramo mede 64°. Faça um esboço da figura e calcule as medidas dos ângulos internos.
116°, 116°, 64° e 64°

6 No paralelogramo $ABCD$, a diagonal $\overline{BD}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 38° e, com o lado $\overline{CD}$, um ângulo de 54°. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

med$(\widehat{C})$ = med$(\widehat{A})$ = 88°
med$(\widehat{B})$ = med$(\widehat{D})$ = 92°



7 No paralelogramo, temos: med$(\widehat{C}) = 70°$, $\overrightarrow{CM}$ é bissetriz do ângulo $D\widehat{C}B$, e $\overrightarrow{BM}$ é bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$. Calcule a medida do ângulo $B\widehat{M}C$. 90°



8 A diferença entre as medidas de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 80°. Quais são as medidas dos ângulos desse quadrilátero, em grau?
50°, 50°, 130° e 130°

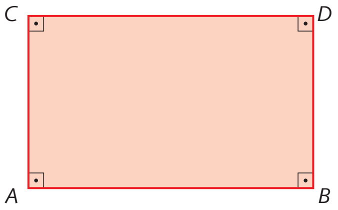
9 Desenhe um paralelogramo $ABCD$. Depois, construa as bissetrizes dos ângulos internos de $ABCD$. Essas bissetrizes se encontram em quatro pontos, vértices de um quadrilátero $EFGH$. Quais são as medidas dos ângulos internos desse quadrilátero?
Todos medem 90°.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Alguns paralelogramos podem ser classificados em retângulos, losangos ou quadrados por apresentarem propriedades particulares. A seguir, vamos estudar essas propriedades.

Retângulo

Retângulo é o paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos.



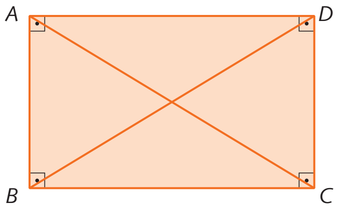
GUILHERME CASAGRANDI

$$\text{med}(\widehat{A}) = \text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{D}) = 90°$$

Propriedade do retângulo

Como o retângulo é um paralelogramo, são válidas as seguintes propriedades:

- Os lados opostos são congruentes.
- Cada diagonal divide-o em dois triângulos congruentes.
- Os ângulos opostos são congruentes.
- As diagonais se cruzam nos respectivos pontos médios.



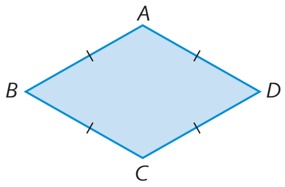
GUILHERME CASAGRANDI

Além dessas propriedades, podemos afirmar que:

Em todo retângulo, as diagonais são congruentes.

Losango

Losango é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.



GUILHERME CASAGRANDI

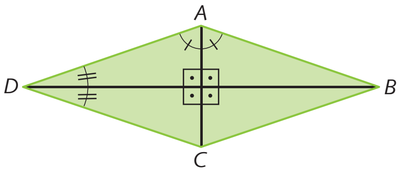
$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

GEORGE TUTUMI

Propriedade do losango

Como o losango é um paralelogramo, valem, para ele, as propriedades dos paralelogramos.

Além dessas propriedades, podemos afirmar que:

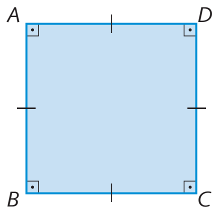


LUIZ RUBIO

Em todo losango, as diagonais são perpendiculares entre si e coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos.

Quadrado

Quadrado é o paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos e os quatro lados congruentes.



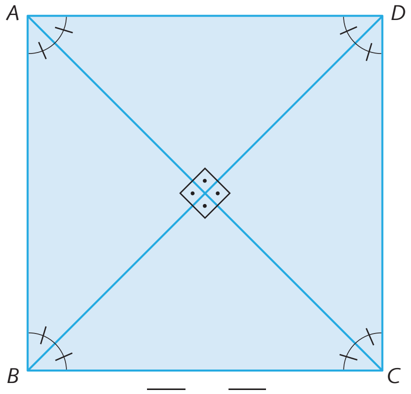
GUILHERME CASAGRANDI

$$\text{med}(\widehat{A}) = \text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{D}) = 90°$$
$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

Como o quadrado é um paralelogramo e um caso particular de retângulo e de losango, valem as seguintes propriedades:

- As diagonais são congruentes.
- As diagonais são perpendiculares entre si.
- As diagonais se cruzam nos respectivos pontos médios.
- As diagonais correspondem às bissetrizes dos ângulos internos.

Resumindo: todas as propriedades dos retângulos e dos losangos valem para os quadrados.



$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

LUIZ RUBIO

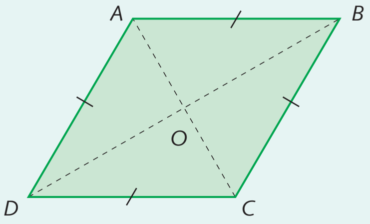
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Quais das sentenças a seguir são verdadeiras? alternativas **a**, **b**, **c**, **d** e **f**

a) Todo quadrado é um losango.
b) Existem retângulos que são losangos.
c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
d) Todo quadrado é um retângulo.
e) Um losango pode não ser um paralelogramo.
f) Em um losango, os quatro lados são congruentes.

2 Observe o losango e identifique as afirmativas verdadeiras. alternativas **a**, **b**, **c**, **d** e **f**



GUILHERME CASAGRANDI

a) med($B\widehat{O}C$) = 90°
b) med($D\widehat{A}C$) = med($B\widehat{C}A$)
c) $AO = OC$
d) $BO = OD$
e) $AC = BD$
f) $\triangle ABC$ é isósceles.

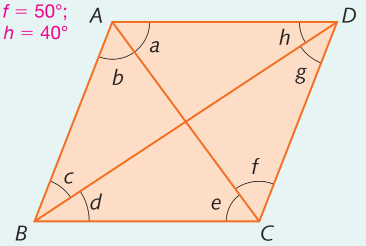
8. $\text{med}(D\widehat{C}B) = 180° - \alpha \Rightarrow \text{med}(D\widehat{C}A) = \frac{180 - \alpha}{2}$

$\beta + 90° + \text{med}(D\widehat{C}A) = 180°$

$\beta = 180° - 90° - \frac{180° - \alpha}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$

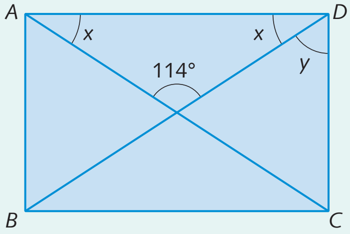
3 Sabendo que o ângulo $B\widehat{A}D$ mede 100°, calcule, em grau, as medidas indicadas pelas letras no losango *ABCD*.

$a = b = e = f = 50°$;
$c = d = g = h = 40°$



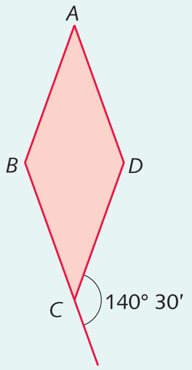
4 As diagonais de um retângulo formam um ângulo de 114°. Calcule as medidas, em grau, dos ângulos que essas diagonais formam com os lados do retângulo.

$x = 33°$; $y = 57°$



5 Um ângulo externo de um losango mede 140° 30′. Qual é a medida, em grau, do maior de seus ângulos internos?

$\text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{D}) = 140°\ 30'$

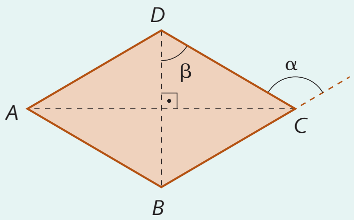


6 A bissetriz de um ângulo obtuso de um losango forma, com um dos lados, um ângulo de 64°. Calcule a medida, em grau, de cada ângulo desse losango.

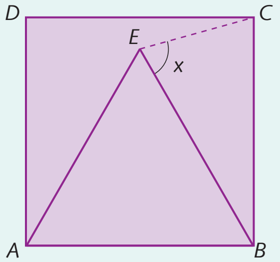
128°, 128°, 52° e 52°

7 Uma diagonal de um losango forma com um lado um ângulo de 36°. Calcule, em grau, as medidas dos ângulos desse losango. 72°, 72°, 108° e 108°

8 No losango abaixo, mostre que $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

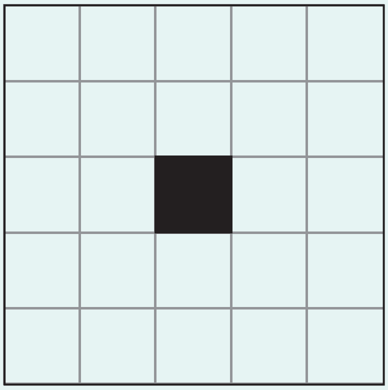


9 Na figura abaixo, temos um quadrado *ABCD* e um triângulo equilátero *ABE*. Sabendo que o triângulo *BEC* é isósceles, calcule a medida do ângulo $B\widehat{E}C$. 75°



10 Reúna-se com um colega e resolvam a questão a seguir.

(FGV-SP) Uma malha quadrada 5 × 5 contém 1 quadrado preto e 24 quadrados brancos, todos idênticos, conforme indica a figura.



De todas as malhas quadradas de tamanho 1 × 1 até 5 × 5 que podem ser formadas a partir da malha anterior, o total das que contêm o quadrado preto é: alternativa **e**

a) 12
b) 13
c) 15
d) 17
e) 19

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

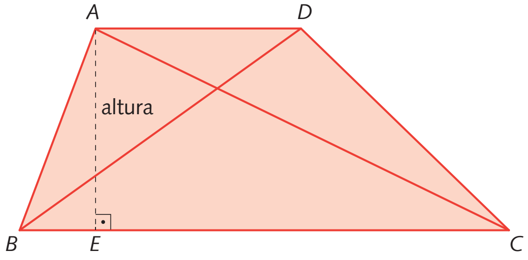
LUIZ RUBIO

4 Trapézios

Trapézio é todo quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

Observe, abaixo, o trapézio *ABCD*.

LUIZ RUBIO



$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Nele, temos:

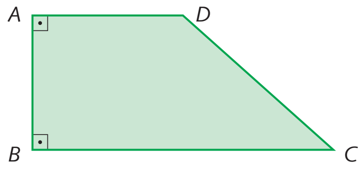
- Base maior: $\overline{BC}$
- Base menor: $\overline{AD}$
- Altura do trapézio: qualquer segmento com extremidades nas duas bases e perpendicular a elas; por exemplo, $\overline{AE}$
- Pares de ângulos suplementares: $A\widehat{B}C$ e $B\widehat{A}D$
- Pares de ângulos suplementares: $A\widehat{D}C$ e $D\widehat{C}B$
- Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

Os trapézios são classificados em trapézio retângulo, trapézio isósceles e trapézio escaleno. A seguir, vamos ver suas particularidades.

Trapézio retângulo

Trapézio retângulo é aquele que tem dois ângulos retos.

GUILHERME CASAGRANDI



$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$\text{med}(\widehat{A}) = \text{med}(\widehat{B}) = 90°$

$\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{BC}$. Em linguagem matemática: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{AD}$. Em linguagem matemática: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

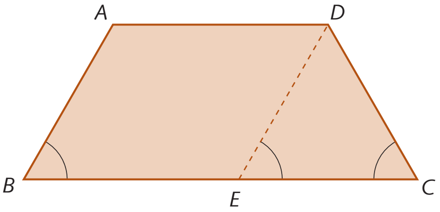
Trapézio isósceles

Trapézio isósceles é aquele que tem os lados não paralelos congruentes.

Propriedade do trapézio isósceles

Considere o trapézio isósceles *ABCD* ao lado.

Traçando pelo vértice *D* uma reta paralela a $\overline{AB}$, determinamos o ponto *E* na base maior e obtemos o triângulo *DEC* e o paralelogramo *ADEB*.



$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (trapézio isósceles)

GUILHERME CASAGRANDI

Veja que:

- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$: Lados opostos de um paralelogramo.
- $\overline{AB} \cong \overline{DC}$: Trapézio isósceles.

Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, concluímos que $\overline{DE} \cong \overline{DC}$ e o triângulo *EDC* é isósceles.

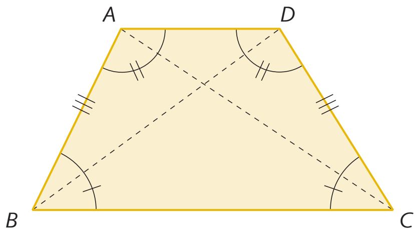
Temos ainda que:

- $D\widehat{C}E \cong D\widehat{E}C$: Ângulos da base do triângulo isósceles.
- $A\widehat{B}E \cong D\widehat{E}C$: Ângulos correspondentes.

Como $D\widehat{C}E \cong D\widehat{E}C$ e $A\widehat{B}E \cong D\widehat{E}C$, concluímos que $D\widehat{C}E \cong A\widehat{B}E$, ou seja, os ângulos adjacentes à base maior são congruentes.

$B\widehat{A}D$ e $C\widehat{D}A$ são ângulos colaterais internos, respectivamente, a $A\widehat{B}E$ e $D\widehat{C}E$. Como $A\widehat{B}E \cong D\widehat{C}E$, seus suplementares são congruentes, ou seja, $B\widehat{A}D \cong C\widehat{D}A$. Portanto, os ângulos adjacentes à base menor são congruentes.

Se um trapézio é isósceles, os ângulos adjacentes a uma das bases são congruentes.

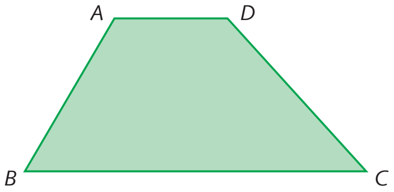


GUILHERME CASAGRANDI

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$
med($\widehat{A}$) = med($\widehat{D}$)
med($\widehat{B}$) = med($\widehat{C}$)
$\overline{AC} \cong \overline{DB}$ (As diagonais são congruentes.)

Trapézio escaleno

Trapézio escaleno é aquele em que os lados não paralelos não são congruentes.



GUILHERME CASAGRANDI

$\overline{AB}$ não é congruente a $\overline{DC}$.

Observação

Todo trapézio retângulo é escaleno.

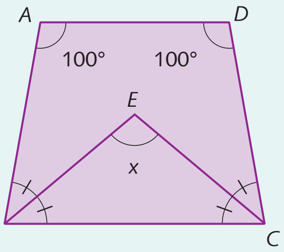
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Em um trapézio isósceles, um dos ângulos externos mede 100°40'. Calcule as medidas dos ângulos internos do trapézio. 100°40', 100°40', 79°20' e 79°20'

2 Em um trapézio isósceles, a soma das medidas dos ângulos obtusos é 250°. Quanto medem os ângulos agudos? 55° e 55°

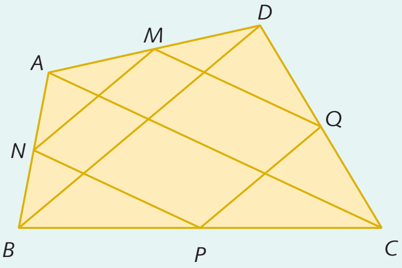
3 Um dos ângulos obtusos de um trapézio isósceles mede 100°. Calcule, em grau, a medida x do ângulo $\widehat{E}$ formado pelas bissetrizes dos ângulos internos da base maior. $x = 100°$



4 Reúna-se com um colega e determinem as medidas dos lados do quadrilátero $MNPQ$, sabendo que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medem 14 cm e 12 cm, respectivamente que M, N, P e Q são os pontos médios do quadrilátero e que formam um paralelogramo.

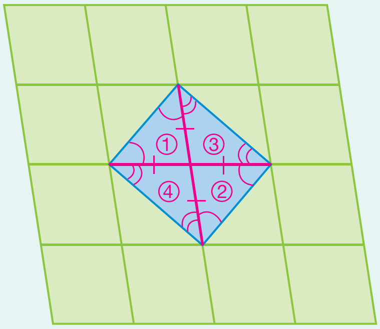
$MN = PQ = \frac{BD}{2} = 6$ cm

$NP = MQ = \frac{AC}{2} = 7$ cm



5 Reúna-se com um colega e resolvam as questões a seguir.

a) O quadrilátero da figura abaixo é formado por losangos idênticos. O quadrilátero azul, no centro, é um retângulo. Justifiquem essa afirmação.



Traçando as diagonais do quadrilátero azul, obtemos 2 pares de triângulos isósceles congruentes (1 e 2; 3 e 4).
Como todos os ângulos do quadrilátero têm a mesma medida, cada um mede:
$\frac{360°}{4} = 90°$
Portanto, o quadrilátero azul é um retângulo.

b) Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz do ângulo agudo do trapézio um ângulo de 110°. Determinem a medida do suplemento do maior ângulo do trapézio. 50°

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

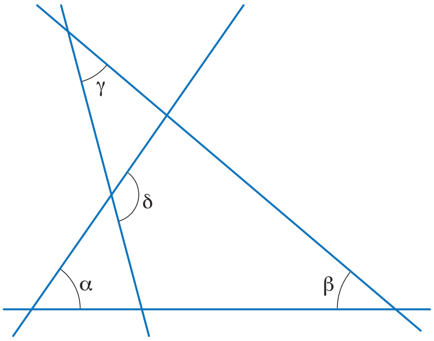
Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Canguru) Vários ângulos são formados por quatro retas, conforme indicado na figura.

Sabe-se que $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ e $\gamma = 35°$. Qual é o valor de δ? alternativa **e**

a) 100°
c) 120°
e) 130°
b) 105°
d) 125°



LUIZ RUBIO

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote as que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Na figura há triângulos com dois ângulos dados? Se sim, podemos determinar a medida do terceiro ângulo? Sim, o triângulo formado pelos ângulos α e β, e o formado pelos ângulos β e γ. Os terceiros ângulos medem 85° e 105°, respectivamente.

Plano de resolução

- Conhecidos os três ângulos do enunciado e os ângulos calculados anteriormente, qual é o procedimento para encontrar o valor do ângulo δ? Analisando o quadrilátero formado pelos dois ângulos calculados, β e δ.
- Que conceito sobre triângulos e quadriláteros é fundamental para a resolução deste problema? A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.
- Determinar o valor de δ. $\delta = 130°$

Resolução

- Reúna-se com um colega.
- Mostre a ele seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês.
- Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um dos planos para a execução do processo de resolução.

  Observação

  Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Elaborem uma síntese, por meio de cartazes, sobre triângulos e quadriláteros.

  Triângulos: classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e quanto às medidas dos ângulos; pontos notáveis; casos de congruência; soma das medidas dos ângulos internos.

  Quadriláteros: classificação e elementos de paralelogramos e trapézios; soma das medidas dos ângulos internos; propriedades dos paralelogramos, dos retângulos, dos losangos e dos quadrados; propriedades dos trapézios.

  Esses cartazes podem ficar expostos para eventuais consultas na sala de aula.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Os quadriláteros podem sempre ser subdivididos em dois triângulos, traçando-se uma de suas diagonais. Considerando essa situação, responda: qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero? 360°

2 Copie e complete a frase usando as palavras do quadro a seguir.

quadriláteros	trapézios	paralelos	um	dois

Os quadriláteros foram classificados com relação à quantidade de pares de lados ■. Assim, paralelogramos são ■ que possuem ■ pares de lados paralelos. Os ■ possuem apenas ■ par de lados paralelos. paralelos; quadriláteros; dois; trapézios; um.

3 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? alternativas **b** e **c**

a) Todo retângulo é também um quadrado.

b) Todo quadrado é também um losango.

c) Um trapézio retângulo possui dois ângulos retos.

d) Todo paralelogramo possui duas ou mais diagonais.

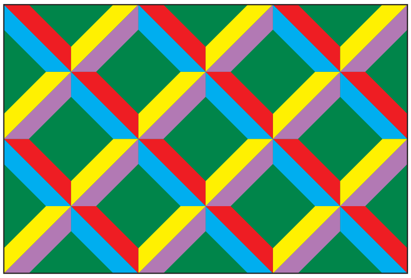
4 Os quadriláteros estão presentes nas vistas frontal, lateral e superior de diversos objetos de nosso cotidiano. Dê alguns exemplos. Resposta pessoal. Alguns exemplos possíveis: janelas; portas; tabuleiros de jogos; tela de *notebook* e de celular; capa de livro etc.

Aplicando

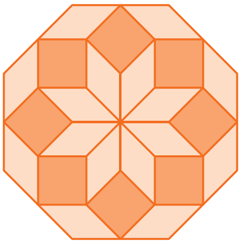
1 As medidas dos ângulos de um quadrilátero são indicadas por a, b, c e d. Sabendo que $b = 2a$, $c = 2b$ e $d = a + c$, determine as medidas a, b, c e d, em grau. $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 120°$ e $d = 150°$

2 Em um quadrilátero convexo $ABCD$, a medida do ângulo $\widehat{A}$ é o dobro da medida do ângulo $\widehat{B}$, e esta é a terça parte da medida do ângulo $\widehat{C}$. Sendo $\widehat{D}$ o ângulo correspondente à metade das somas das medidas de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, calcule as medidas dos quatro ângulos, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$, em grau. 96°, 48°, 144° e 72°

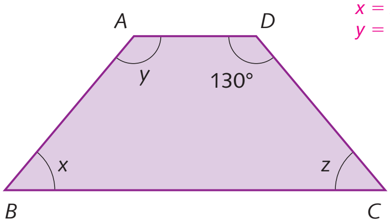
3 Observe a figura. Quantos trapézios de cada cor podem ser vistos neste mosaico?
São 48 trapézios, sendo 12 azuis, 12 amarelos, 12 vermelhos e 12 lilases.



4 O octógono abaixo é formado por 8 quadrados e 16 losangos. Qual é o perímetro da figura, sabendo que o perímetro de cada losango é 3,6 cm? 14,4 cm



5 Calcule x, y e z no trapézio isósceles abaixo.
$x = z = 50°$;
$y = 130°$



6 Dois ângulos opostos de um paralelogramo são expressos por $3x + 16°$ e $4x - 15°$. Quanto medem os ângulos, em grau? 109° e 109°

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

20. No paralelogramo *ABCD*, $\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{B}) = 180°$
Traçando as bissetrizes de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ obtemos o ponto *E* na intersecção.
No $\triangle ABE$ temos:
$$\frac{\text{med}(\widehat{A})}{2} + \frac{\text{med}(\widehat{B})}{2} + \text{med}(A\widehat{E}B) = 180°$$
Portanto, $A\widehat{E}B$ mede 90°.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

7 Um ângulo de um paralelogramo mede 48°36'58". Qual é o valor do seu ângulo obtuso? 131°23'02"

8 A diferença entre as medidas de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 108°. Calcule as medidas desses ângulos, em grau. 144° e 36°

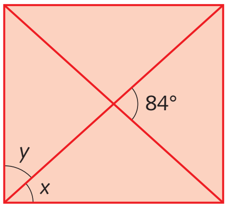
9 A bissetriz de um ângulo agudo de um losango forma 25° com um dos lados. Quanto medem os ângulos do losango? 50°, 130°, 50° e 130°

10 Em um trapézio isósceles, as bases medem 25 cm e 5 cm, respectivamente, e o perímetro é 64 cm. Quanto mede cada um dos outros lados? 17 cm

11 O ângulo obtuso de um trapézio retângulo mede 133°. Qual é a medida do ângulo agudo desse trapézio? 47°

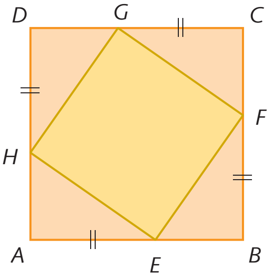
12 Em um trapézio isósceles, uma altura forma, com um dos lados congruentes, um ângulo de 35°. Calcule as medidas dos ângulos do trapézio. 125°, 125°, 55° e 55°

13 A figura a seguir é um retângulo. Nessas condições, determine as medidas *x* e *y* indicadas. $x = 42°$; $y = 48°$

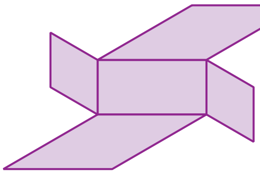


14 O perímetro de um paralelogramo é igual a 84 cm, e a soma das medidas dos lados menores é igual a $\frac{2}{5}$ da soma das medidas dos lados maiores. Calcule, em centímetro, a medida dos lados maiores. 30 cm

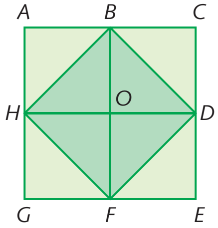
15 Observe o quadrado *ABCD* e mostre que *EFGH* também é um quadrado, sendo $AE = BF = CG = DH$.



16 A figura é composta de quatro losangos ao redor de um retângulo. Sabendo que o retângulo tem 2 cm por 1 cm, determine o perímetro da figura. (3 + 6 + 3 + 6) cm = 18 cm



17 Na figura, *ABOH*, *BCDO*, *ODEF* e *HOFG* são quadrados. Podemos afirmar que *DBHF* é um quadrado? Justifique sua resposta.



Sim, pois os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes.

Nas questões 18 e 19, determine, no caderno, a única alternativa correta.

18 Os pontos médios dos lados de um trapézio isósceles são os vértices de um: alternativa **b**

a) trapézio;
b) losango;
c) quadrado;
d) retângulo.

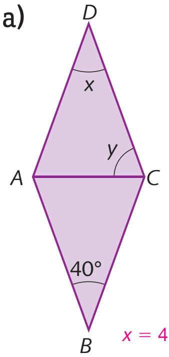
19 A diferença entre as medidas do maior e do menor ângulo de um trapézio retângulo é 18°. O ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos de sua base maior tem como valor: alternativa **c**

a) 120°
b) 146°20'
c) 94°30'
d) 85°30'

20 Mostre que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.

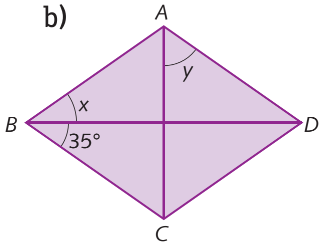
21 Nos losangos abaixo, calcule *x* e *y*, em grau.

a)



$x = 40°$; $y = 70°$

b)



$x = 35°$; $y = 55°$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO

12 CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

NELSON ALMEIDA/AFP

Neste capítulo, vamos estudar os principais elementos da circunferência e do círculo. Serão estudadas as posições de um ponto e de uma reta em relação à circunferência e ainda as posições relativas de duas circunferências.
Serão apresentados os conceitos de segmentos tangentes, de arco da circunferência, de ângulo central e de ângulo inscrito.
Pode-se utilizar a foto de abertura do capítulo para discutir o conceito de circunferência e a relação entre a medida do diâmetro e a medida do raio.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Há bicicletas de diferentes tipos, tamanhos e modelos. O modelo abaixo, por exemplo, não tem raios, corrente e eixos e seu aspecto é bastante simples e leve.

BRADFORD WAUGH DESIGN

Observe a imagem dessa bicicleta e responda às questões.

- Os pneus dessa bicicleta lembram qual figura geométrica plana? A circunferência.
- O segmento $\overline{AB}$ representa o diâmetro do pneu dianteiro e o segmento $\overline{AO}$, o raio do pneu dianteiro, que mede 30 cm. Com base nessa informação, determine a medida do diâmetro desse pneu e responda: qual é a relação entre a medida do diâmetro e a do raio? 60 cm; medida do raio $= \frac{\text{medida do diâmetro}}{2}$ ou medida do diâmetro $= 2 \cdot$ medida do raio

Ciclistas na X Copa América, no Autódromo de Interlagos, em São Paulo (SP), 2010.

TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

As figuras de forma circular fazem parte do nosso cotidiano: pratos, rodas, volantes de automóveis, bússolas, CDs, DVDs, roldanas etc.

1

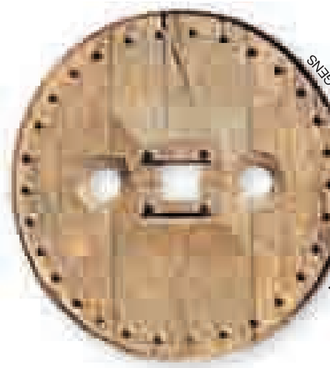
2

3

4

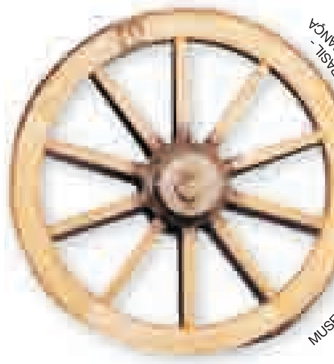
FOTOS: 1. ANDREW SCHERBACKOV/SHUTTERSTOCK; 2. UBIE PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 3. FENG YU/ SHUTTERSTOCK; 4. NIKOLAY KULESHIN/SHUTTERSTOCK

A roda foi uma das primeiras invenções do ser humano. Na Antiguidade era comum o uso de toras de madeira para facilitar o transporte de objetos pesados. Com o tempo, vieram os veículos com rodas puxados por animais. À medida que a técnica foi se aprimorando, as rodas tornaram-se mais leves e eficientes.



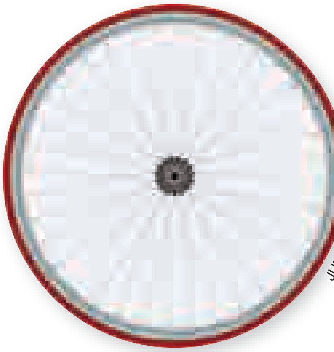
MARCELO SPATAFORA/PULSAR IMAGENS

Roda de madeira.



BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL - MUSEE ARCHEOLOGIQUE, CHATILLON SUR SEINE, FRANÇA

Roda de madeira com raios de madeira.



JULES2000/SHUTTERSTOCK

Roda de bicicleta com raios e aros feitos de alumínio.

O fascínio exercido pelas **formas circulares** levou o ser humano a estudar e desenvolver formas práticas para seu uso. Ao longo do tempo, essas formas passaram a ser estudadas pela Geometria, pela Física e pela Engenharia.

- Observe a imagem e responda:

SIMA/SHUTTERSTOCK

O anel tem 0,75 cm de raio externo e deseja-se guardá-lo em uma caixa com base quadrada e altura igual à altura do anel. Qual deve ser a medida mínima da largura dessa caixa? 1,5 cm

Neste capítulo, vamos ampliar os conhecimentos sobre circunferência e círculo.

1 Circunferência e círculo

Circunferência

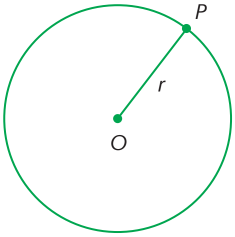
Circunferência é uma linha plana fechada cujos pontos estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano chamado **centro**.

Veja alguns elementos da circunferência.

O: centro da circunferência (ponto fixo);

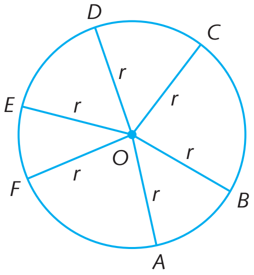
P: um dos pontos que estão a uma distância fixa do centro da circunferência;

$\overline{OP}$: raio (de medida r) da circunferência.



Podemos observar as seguintes características dos raios das circunferências:

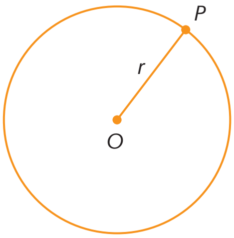
- raio é o segmento de reta que possui uma extremidade no centro e a outra em qualquer ponto da circunferência;
- em uma circunferência, podemos traçar infinitos raios e todos serão congruentes;



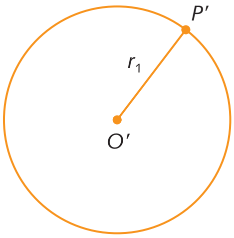
$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = ... = r$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

- duas circunferências são congruentes quando os raios têm a mesma medida.



$$r = r_1$$



$OP = r$ $\qquad$ $O'P' = r_1$

Observação

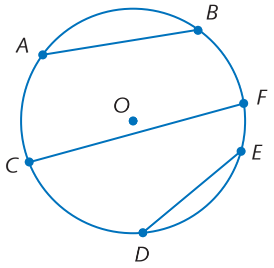
Para traçar uma circunferência com mais precisão, utilizamos o compasso. O ponto de apoio da ponta-seca do compasso é o centro da circunferência, e a abertura do compasso corresponde à medida do raio dela.

Corda e diâmetro de uma circunferência

A corda e o diâmetro são dois importantes elementos relativos a uma circunferência.

Corda é o segmento com extremidades em dois pontos distintos da circunferência.

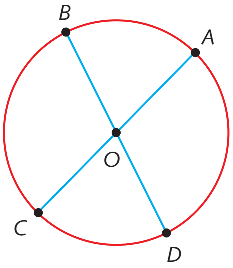
$\overline{AB}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são cordas.



O diâmetro é um caso particular de corda, pois sempre passa pelo centro da circunferência.

Diâmetro é o segmento com extremidades em dois pontos distintos de uma circunferência, passando sempre pelo centro.

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros.

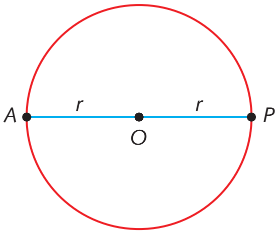


Observe na circunferência ao lado que:

$\overline{AO}$ ⟵ raio (de medida r)

$\overline{OP}$ ⟵ raio (de medida r)

$\overline{AP}$ ⟵ diâmetro (de medida D)



Assim, verificamos que:

$\text{med}(\overline{AP}) = \text{med}(\overline{AO}) + \text{med}(\overline{OP})$

$D = r + r$

$D = 2r$

Logo, a medida do diâmetro (D) é igual ao dobro da medida do raio (r).

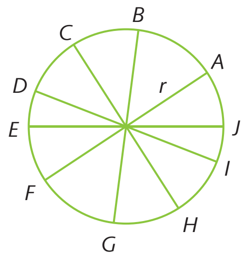
Observações

1 O diâmetro é a maior corda da circunferência.

2 Em uma circunferência, podemos traçar infinitos diâmetros e todos serão congruentes.

Na figura ao lado, temos:

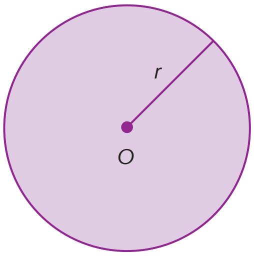
$AF = BG = CH = DI = EJ = ... = 2r$



Círculo

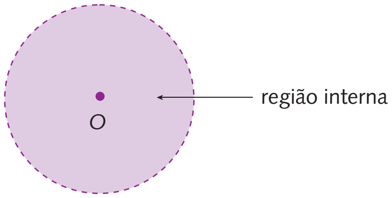
O **círculo** é a região do plano formada por uma circunferência e sua região interna.

Círculo de centro *O* e raio de medida *r*:



Observações

1 A região interna de uma circunferência é a região do plano limitada por ela.



2 No estudo do círculo, usamos as denominações **centro**, **raio** e **diâmetro** de forma semelhante à utilizada para a circunferência.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Na figura ao lado, o mostrador do relógio lembra um círculo, e o seu contorno, uma circunferência. Sabe-se que a medida do diâmetro desse relógio é 40 cm.

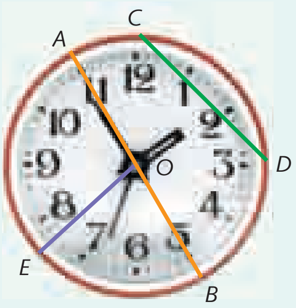
a) Determine a medida do raio desse relógio. 20 cm

b) Identifique duas cordas na figura. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

c) Identifique um diâmetro na figura. $\overline{AB}$

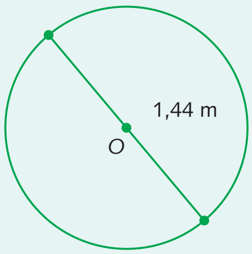
d) Identifique um segmento que corresponde ao raio da figura.

Exemplo de resposta: $\overline{OE}$



DIMEDROL68/SHUTTERSTOCK

2 Em uma circunferência, a medida do diâmetro é 1,44 m. Quanto mede o raio dessa circunferência? 0,72 m



3 Copie cada item no caderno, substituindo cada ■ por uma palavra correspondente, tornando a sentença verdadeira.

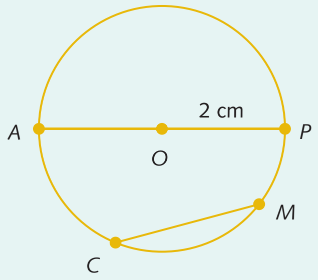
a) ■ é o segmento que une o centro a qualquer ponto da circunferência. raio

b) Em uma circunferência podemos traçar infinitos ■. Todos eles são ■. diâmetros ou raios; congruentes

c) Duas circunferências são ■ quando os raios têm a mesma medida. congruentes

d) A maior corda da circunferência é o ■. diâmetro

4 Observe a figura e responda às questões.



a) Qual é a medida de $\overline{OP}$? 2 cm

b) Qual é a medida de $\overline{AP}$? 4 cm

c) A medida de $\overline{CM}$ é maior ou menor que 4 cm? Justifique sua resposta. Menor, pois $\overline{CM}$ não é diâmetro da circunferência, que é a maior corda e mede 4 cm.

5 Determine:

a) o diâmetro de uma circunferência cujo raio mede 4,5 cm; 9 cm

b) o raio de uma circunferência cujo diâmetro mede 17 cm. 8,5 cm

6 Qual é o diâmetro do círculo que tem raio com medida igual a:

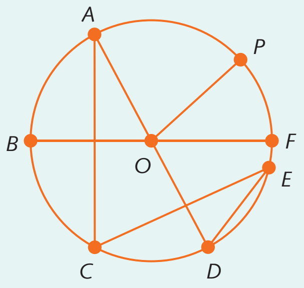
a) 5 m? 10 m

b) 30 m? 60 m

c) 3,5 m? 7 m

d) 0,75 m? 1,5 m

7 Observe a figura e responda às questões.



a) Quais são os segmentos que representam os raios? $\overline{OP}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OF}$

b) Quais são os segmentos que representam as cordas? $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$

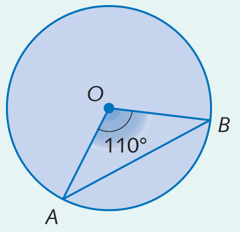
c) Quais são os segmentos que representam os diâmetros? $\overline{AD}$, $\overline{BF}$

d) Qual é o centro da circunferência? O

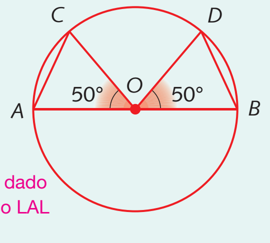
8 Em uma circunferência, a medida do raio é 3,75 cm. Quanto mede o diâmetro dessa circunferência? 7,5 cm

9 Com um compasso, trace no caderno uma circunferência de centro O cujo raio $\overline{OP}$ tenha 1,5 cm. Em seguida, determine a medida do diâmetro $\overline{AP}$. Construção de figura; 3,0 cm

10 Considere o círculo de centro O e classifique o triângulo AOB quanto aos lados. Depois, determine quanto medem os ângulos $O\widehat{A}B$ e $O\widehat{B}A$. isósceles; med($O\widehat{A}B$) = 35°; med($O\widehat{B}A$) = 35°



11 Considerando a circunferência de centro O, mostre que as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes.

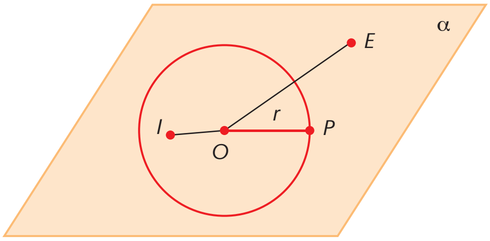


$\overline{OC} \cong \overline{OD}$ → raio
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ → raio
$A\widehat{O}C \cong B\widehat{O}D$ → ângulo dado
$\triangle AOC \cong \triangle BOD$ → caso LAL
Logo: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

2 Posições de um ponto em relação a uma circunferência

Observe a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

A circunferência está contida no plano α, e os pontos *P*, *E* e *I* desse plano são, respectivamente, pertencente, externo e interno à circunferência.

Dizemos que:

- considerando um ponto *P* e uma circunferência de centro *O*, se a distância entre *O* e *P* for igual à medida do raio (***OP*** = ***r***), o ponto *P* **pertence** à circunferência;
- considerando um ponto *E* e uma circunferência de centro *O*, se a distância entre *O* e *E* for maior que a medida do raio (***OE*** > ***r***), o ponto *E* é **externo** à circunferência;
- considerando um ponto *I* e uma circunferência de centro *O*, se a distância entre *O* e *I* for menor que a medida do raio (***OI*** < ***r***), o ponto *I* é **interno** à circunferência.

ATIVIDADES

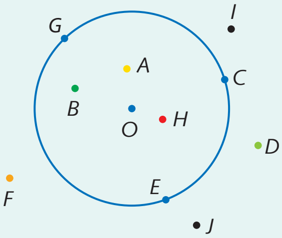
Faça as atividades no caderno.

1 Observe os pontos da figura ao lado e indique:

a) os pontos que pertencem à circunferência; G, C, E

b) os pontos que são externos à circunferência; F, I, D, J

c) os pontos que são internos à circunferência. B, A, H, O



GUILHERME CASAGRANDI

2 Desenhe, no caderno, uma circunferência com:

Construção de figura.

a) medida do raio igual a 2 cm;

b) centro *O*;

c) pontos (*A*, *B* e *C*) pertencentes à circunferência;

d) pontos (*D*, *E* e *F*) externos à circunferência;

e) pontos (*G*, *H*, *I* e *J*) internos à circunferência.

3 Com uma régua, meça os raios r_1 e r_2 das circunferências C_1 e C_2, copie a figura ao lado no caderno e, em seguida, faça o que se pede.

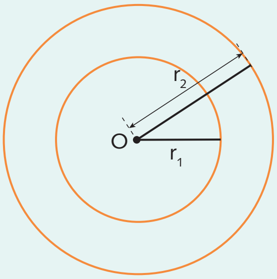
a) Desenhe os pontos *A*, *B* e *C*, externos à C_2.

b) Desenhe os pontos *D*, *E* e *F*, externos à C_1 e internos à C_2.

c) Desenhe os pontos *A*, *B* e *C*, internos à C_1.

d) Todos os pontos de C_1 são internos à C_2? sim

e) Todos os pontos de C_2 são internos à C_1? não



FERNANDO JOSÉ FERREIRA

3 Posições de uma reta em relação a uma circunferência

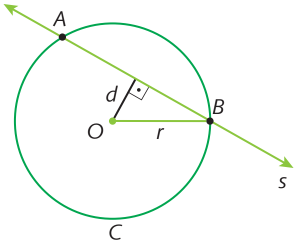
Em relação à circunferência, uma reta pode ser: secante, tangente ou externa. A seguir, vamos estudar cada uma dessas possibilidades.

Reta secante

Uma reta é secante a uma circunferência quando corta a circunferência em dois pontos distintos.

A palavra **secante** vem de *seccionar*, que significa "cortar".

Na figura abaixo, a reta *s* é secante à circunferência *C*.



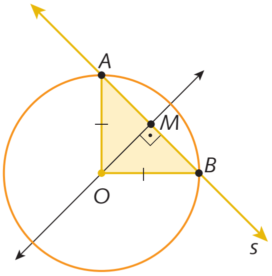
Observe que a distância (*d*), do centro (*O*) à reta, é menor que a medida do raio (*r*): $\boldsymbol{d < r}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Propriedade em relação à reta secante

Toda reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma secante, passa pelo ponto médio da corda determinada por essa secante.

Vamos demonstrar essa propriedade:



Considere $\overline{AB} \perp \overline{OM}$ e o triângulo isósceles *AOB*.

$\overline{OM}$ é a altura do $\triangle AOB$ relativa ao lado $\overline{AB}$. Como o $\triangle AOB$ é isósceles, $\overline{OM}$ também é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$. Logo, *M* é o ponto médio desse lado.

Portanto, $\overleftrightarrow{OM}$ passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.

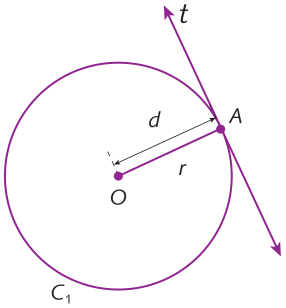
Reta tangente

Uma reta é tangente a uma circunferência quando tem apenas um ponto em comum com ela.

A palavra **tangente** vem de *tanger*, que significa "tocar".

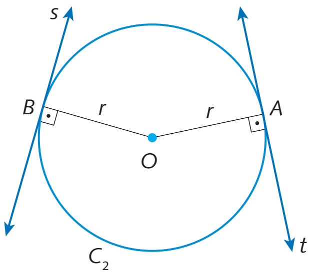
Na figura ao lado, a reta *t* é tangente à circunferência C_1, e *A* é denominado **ponto de tangência** ("ponto de contato").

Observe que a distância (*d*) do centro (*O*) à reta *t* é igual à medida do raio: $\boldsymbol{d = r}$.



Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio dessa circunferência que tem extremidade no ponto de tangência.

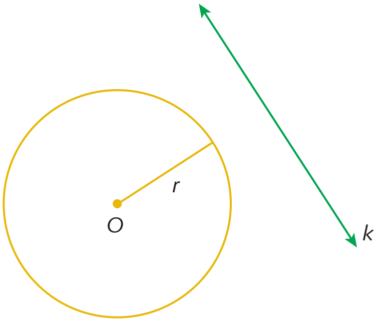
Na figura ao lado, as retas *s* e *t* são tangentes à circunferência C_2.



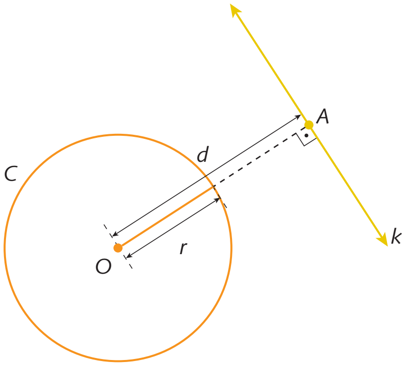
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Reta externa

Uma reta é externa a uma circunferência quando não tem nenhum ponto em comum com ela.

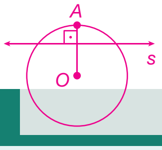


Observe na figura abaixo que a reta *k* é externa à circunferência *C*.

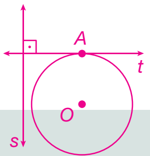


Note que a distância (*d*) de uma reta externa ao centro (*O*) de uma circunferência é maior que seu raio: $\boldsymbol{d > r}$.

3. Não. Por exemplo, na figura ao lado a reta *s* é perpendicular ao raio $\overline{OA}$, mas não é tangente à circunferência.



4. Não. Por exemplo, a reta *s* forma 90° com a reta *t*, tangente à circunferência, porém *s* não passa pelo centro *O* dessa circunferência.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Represente, em seu caderno, um ponto *P* que dista 10 cm do centro *O* de uma circunferência de raio 5 cm. Depois, trace uma reta passando por *P* que seja:

a) tangente à circunferência;

b) secante à circunferência;

c) externa à circunferência.

Construção de figura.

2 Sendo *d* a distância de uma reta *t* ao centro de uma circunferência, qual é a posição de *t* em relação a essa circunferência quando:

a) $d = 8$; $r = 7$? externa

b) $d = 6$; $r = 9$? secante

c) $d = 10$; $r = 10$? tangente

3 Em uma circunferência qualquer, toda reta perpendicular a um dos raios é tangente a essa circunferência? Justifique sua resposta.

4 Toda reta que forma 90° com outra reta, que seja tangente a uma circunferência, passa pelo centro dessa circunferência? Justifique sua resposta.

5 Sabendo que o raio de uma circunferência mede 10 cm, responda: a que distância *d* do centro deveriam estar *r* e *s*, paralelas, para que fossem, respectivamente, tangente e externa à circunferência?

A distância de uma das retas ao centro deve ser igual a 10 cm e a distância da outra reta ao centro deve ser maior que 10 cm.

4 Posições relativas de duas circunferências

De acordo com a posição relativa que apresentam, duas circunferências podem ser: secantes, tangentes exteriores, tangentes interiores, externas e internas.

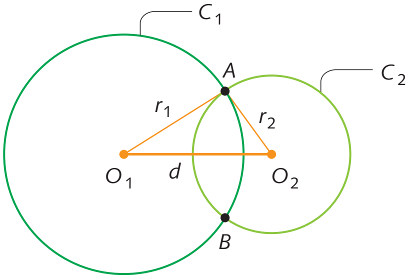
Para facilitar nosso estudo, vamos adotar estas notações:

- r_1: medida do raio da circunferência C_1;
- r_2: medida do raio da circunferência C_2;
- d: distância entre os centros O_1 e O_2;
- O_1: centro da circunferência C_1;
- O_2: centro da circunferência C_2.
- $r_1 > r_2$

Circunferências secantes

Duas circunferências são secantes quando têm dois pontos em comum.

A distância entre os centros das duas circunferências secantes é dada pela desigualdade:



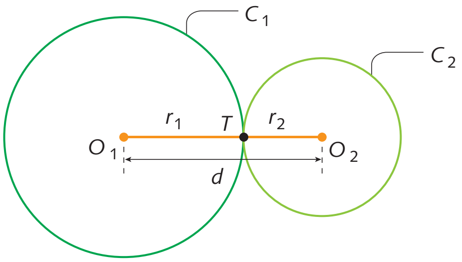
$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$$

GUILHERME CASAGRANDI

Circunferências tangentes exteriores

Duas circunferências são tangentes exteriores quando têm apenas um ponto comum e suas regiões internas não têm pontos comuns.

A distância entre os centros das duas circunferências tangentes exteriores é igual à soma das medidas dos raios dessas circunferências.



$d = r_1 + r_2$

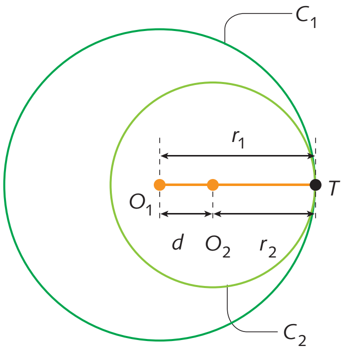
T: ponto de tangência

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Circunferências tangentes interiores

Duas circunferências são tangentes interiores quando têm apenas um ponto comum e uma é interna à outra.

A distância entre os centros das duas circunferências tangentes interiores é igual à diferença das medidas dos raios dessas circunferências.



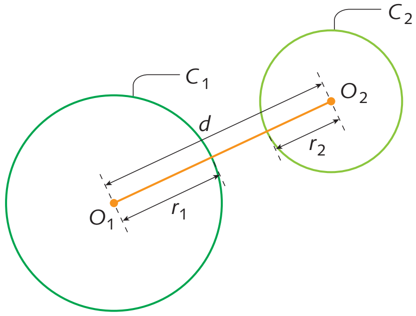
$d = r_1 - r_2$

T: ponto de tangência

Circunferências externas

Duas circunferências são externas quando não têm ponto comum e suas regiões internas não têm pontos comuns.

A distância entre os centros das duas circunferências externas é maior que a soma das medidas dos raios dessas circunferências.

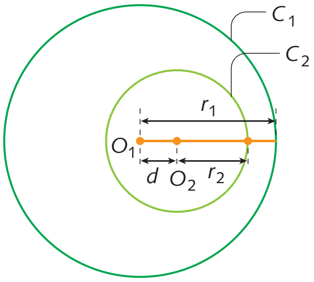


$$d > r_1 + r_2$$

Circunferências internas

Duas circunferências são internas quando não têm ponto comum e uma é interna à outra.

A distância entre os centros das duas circunferências internas é menor que a diferença das medidas dos raios dessas circunferências.

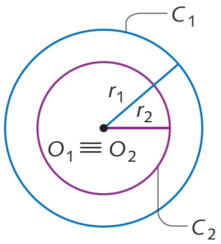


$$d < r_1 - r_2$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

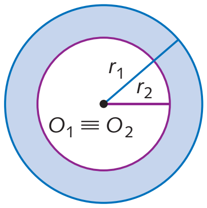
Observações

1 Quando duas ou mais circunferências têm o mesmo centro e uma é interna à outra, são denominadas **circunferências concêntricas**.

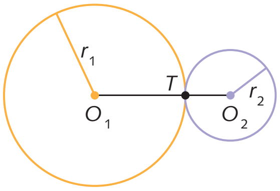


Lembre aos alunos que o sinal ≡ indica que os pontos O_1 e O_2 são **coincidentes**.

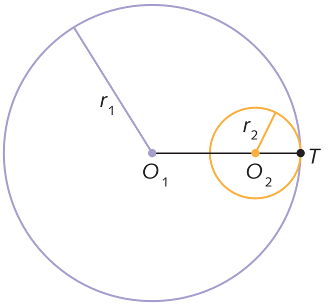
2 Denomina-se **coroa circular** a região do plano limitada por duas circunferências concêntricas de raios não congruentes.



3 No caso das circunferências tangentes exteriores e interiores, os centros O_1 e O_2 e o ponto de tangência T estão sempre alinhados.



Circunferências tangentes exteriores



Circunferências tangentes interiores

LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Sendo r_1 e r_2 as medidas dos raios de duas circunferências C_1 e C_2, respectivamente, e d a distância entre os centros, determine as posições relativas em cada caso.

a) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 10$ cm; externas

b) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm e $d = 2$ cm; tangentes interiores

c) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 7$ cm e $d = 10$ cm; tangentes exteriores

d) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 10$ cm e $d = 4$ cm; internas

e) $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 8$ cm; secantes

f) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 9$ cm. secantes

2 Determine a relação entre as distâncias dos centros (d) e os raios de duas circunferências (r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$) que são:

a) tangentes exteriores; $d = r_1 + r_2$

b) secantes; $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

c) externas; $d > r_1 + r_2$

d) concêntricas. $d = 0$

3 São dadas duas circunferências de raios $r_1 = 13$ cm e $r_2 = 7$ cm. Sendo d a distância entre os centros dessas circunferências, qual é o valor de d para que essas circunferências sejam tangentes interiores?

6 cm

TIAGO SILVA

4 Identifique as afirmativas verdadeiras.

a) Duas circunferências, cuja distância entre os centros é nula, são ditas concêntricas.

b) Duas circunferências de raios r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$, são secantes quando: $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

c) Duas circunferências são tangentes quando possuem dois pontos comuns.

d) Duas circunferências de raios r_1 e r_2 são externas quando: $d > r_1 + r_2$

alternativas **a**, **b** e **d**

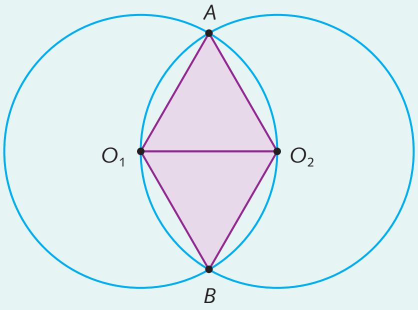
5 As circunferências da figura, de centros O_1 e O_2, têm raios medindo 2 cm. Responda:

a) Quais são as medidas de $\overline{AO_1}$ e $\overline{BO_2}$? 2 cm e 2 cm

b) Quanto mede cada lado do triângulo AO_1O_2? 2 cm

c) Qual é a medida do ângulo $O_1\widehat{A}O_2$? 60°

d) Qual é o nome do quadrilátero AO_2BO_1? losango

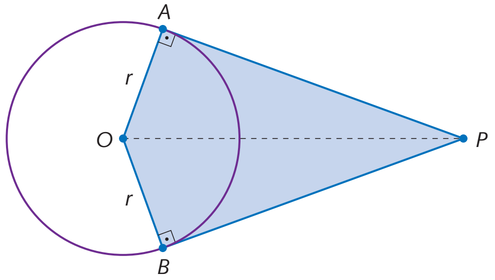


GUILHERME CASAGRANDI

5 Segmentos tangentes

Observe a figura abaixo.

GUILHERME CASAGRANDI



O ponto P é externo à circunferência de raio (r) e centro (O), e os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência.

Analisando os triângulos retângulos OAP e OBP, temos:

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ⟵ raios da circunferência

$\overline{OP} \cong \overline{OP}$ ⟵ lado comum

$\text{med}(O\widehat{A}P) = \text{med}(O\widehat{B}P) = 90°$

Pelo caso de congruência do triângulo retângulo, temos:

$\triangle OAP \cong \triangle OBP$

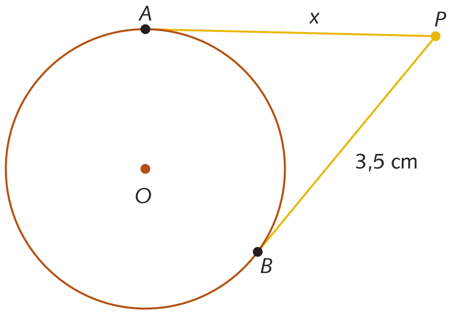
Portanto, $PA \cong PB$.

> Os segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são congruentes.

Exemplos

Determinar o valor de x nas figuras a seguir.

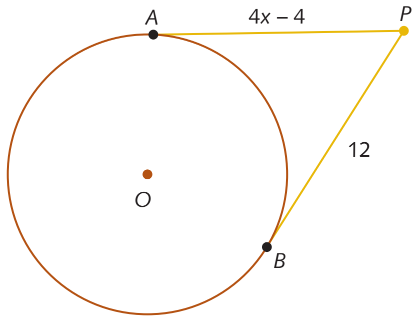
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI



Temos: $\text{med}(\overline{PA}) = \text{med}(\overline{PB})$

Logo:

$x = 3{,}5$ cm



Temos: $\text{med}(\overline{PA}) = \text{med}(\overline{PB})$

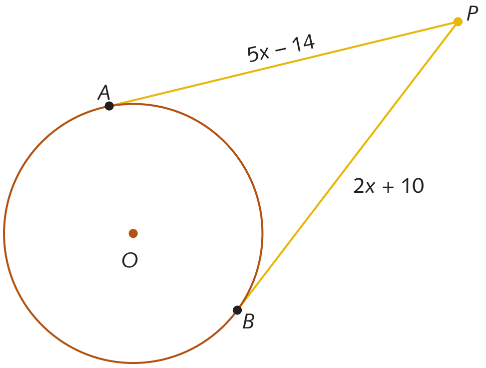
Logo:

$4x - 4 = 12$

$4x = 12 + 4$

$4x = 16$

$x = 4$



Temos: med($\overline{PA}$) = med($\overline{PB}$)

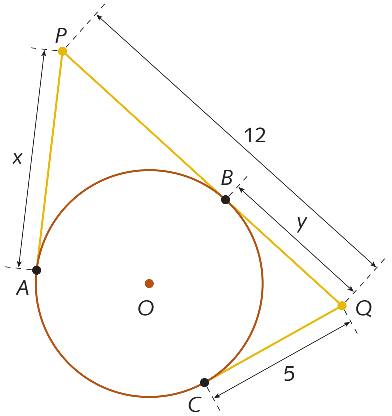
Logo:

$5x - 14 = 2x + 10$

$5x - 2x = 10 + 14$

$3x = 24$

$x = 8$



Como med($\overline{PA}$) = med($\overline{PB}$), temos:

med($\overline{PB}$) = x

Como med($\overline{QB}$) = med($\overline{QC}$), temos: $y = 5$

Assim: med($\overline{PQ}$) = med($\overline{PB}$) + med($\overline{QB}$)

$12 = x + 5$

$x = 7$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

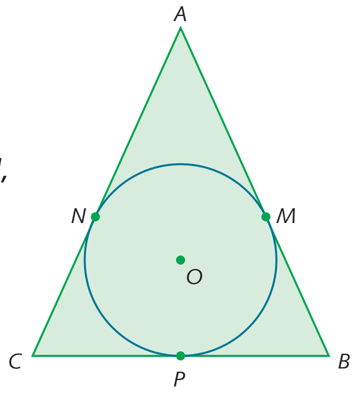
Polígonos circunscritos a uma circunferência

Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Triângulo circunscrito

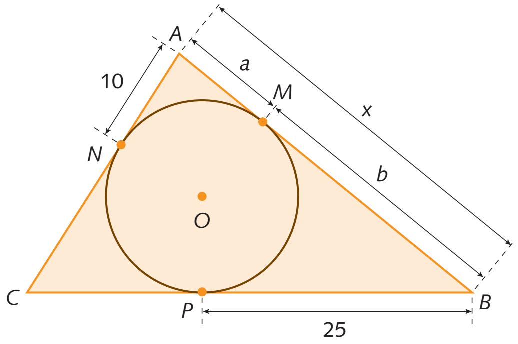
Observe a figura ao lado.

O $\triangle ABC$ está circunscrito à circunferência, e os pontos M, N e P são os pontos de tangência.



Exemplo

Determinar o valor de x.



Como med($\overline{AM}$) = a e med($\overline{MB}$) = b, temos:

med($\overline{AN}$) = med($\overline{AM}$) e med($\overline{MB}$) = med($\overline{BP}$)

Então: $a = 10$ e $b = 25$

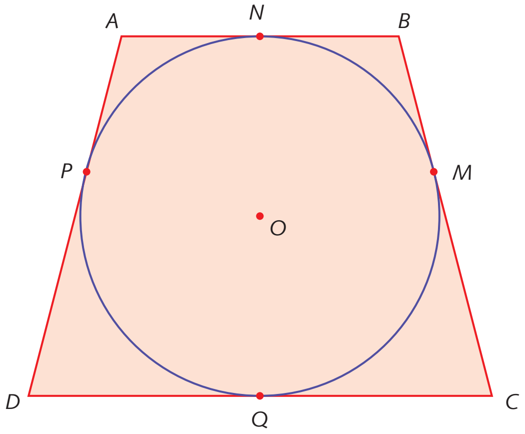
Sendo med($\overline{AB}$) = med($\overline{AM}$) + med($\overline{MB}$), temos:

$x = 10 + 25$

$x = 35$

Quadrilátero circunscrito

Observe a figura abaixo.



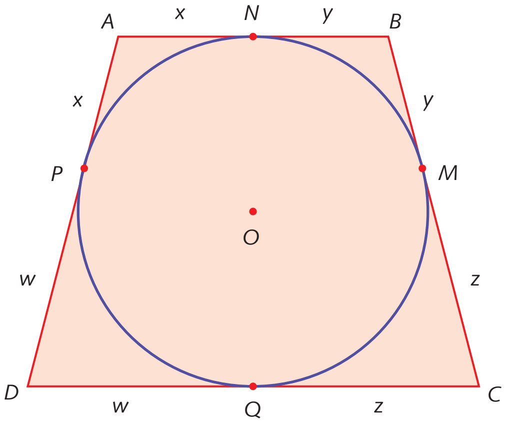
GUILHERME CASAGRANDI

O quadrilátero *ABCD* está circunscrito à circunferência.

A seguir, vamos demonstrar que a soma das medidas de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência é igual à soma das medidas dos outros dois.

Demonstração

Considere as medidas x, y, z e w indicadas na figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como $\text{med}(\overline{AN}) = \text{med}(\overline{AP}) = x$, $\text{med}(\overline{BM}) = \text{med}(\overline{BN}) = y$, $\text{med}(\overline{CQ}) = \text{med}(\overline{CM}) = z$ e $\text{med}(\overline{DP}) = \text{med}(\overline{DQ}) = w$, temos:

$\text{med}(\overline{AB}) + \text{med}(\overline{CD}) = x + y + z + w$

$\text{med}(\overline{AD}) + \text{med}(\overline{BC}) = x + w + y + z$

Logo: $\text{med}(\overline{AB}) + \text{med}(\overline{CD}) = \text{med}(\overline{AD}) + \text{med}(\overline{BC})$

Observações

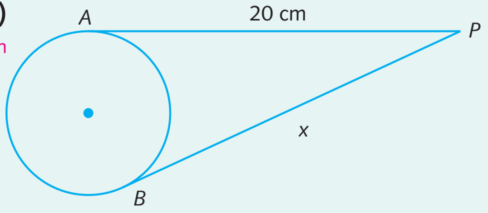
1. A recíproca é verdadeira: se, em um quadrilátero, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois, o quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.
2. Podemos dizer que os polígonos estão **circunscritos** às circunferências ou que as circunferências estão **inscritas** nos polígonos.

ATIVIDADES

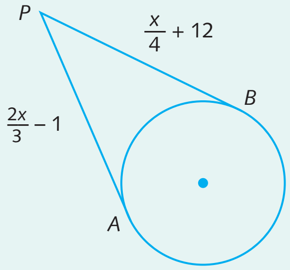
Faça as atividades no caderno.

1 Determine x, sabendo que os segmentos são tangentes às circunferências.

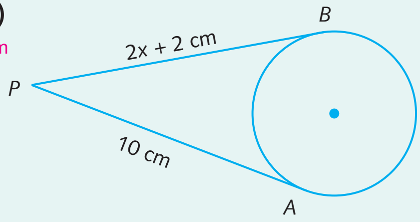
a) x = 20 cm



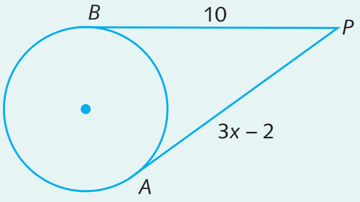
b) x = 31,2



c) x = 4 cm

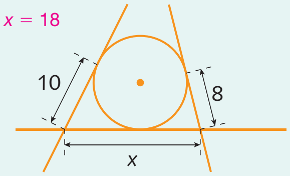


d) x = 4

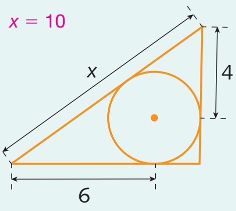


2 Determine x nos casos a seguir.

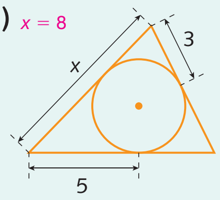
a) x = 18



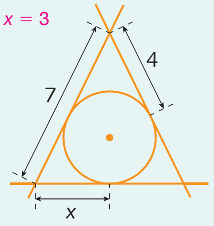
c) x = 10



b) x = 8

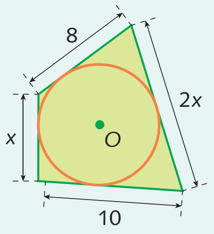


d) x = 3

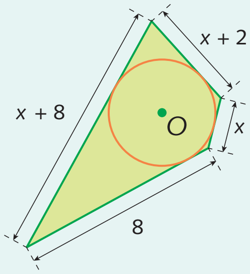


3 Determine o valor de x.

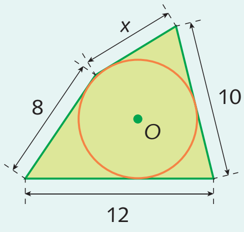
a) x = 6



b) x = 2

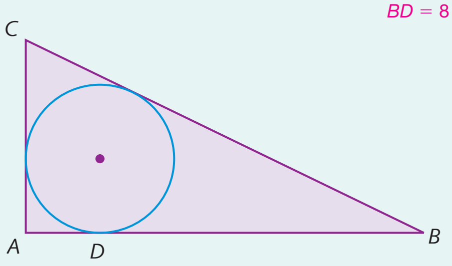


c) x = 6

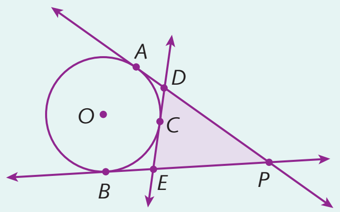


4 O ponto D é o ponto de tangência da circunferência inscrita com o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC. Sabendo que AC = 6 cm, AB = 10 cm e BC = 12 cm, determine BD.

BD = 8 cm



5 Na figura, $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são tangentes à circunferência. Calcule o perímetro do triângulo PDE, sendo PA = 8 cm. 16 cm

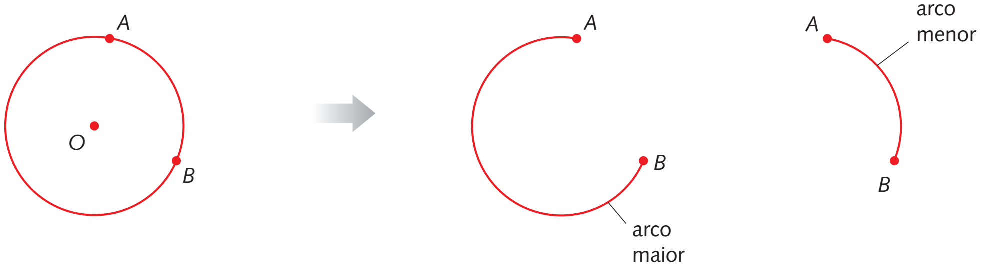


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

6 Arco de circunferência e ângulo central

Arco de circunferência

A parte da circunferência compreendida entre dois de seus pontos é denominada **arco de circunferência**.



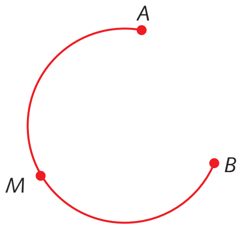
Notação: $\overset{\frown}{AB}$

Lemos: "arco *AB*".

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Chamamos os pontos *A* e *B* de **extremos** do arco $\overset{\frown}{AB}$.

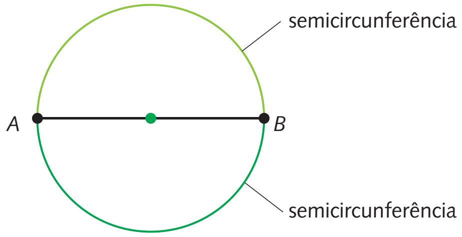
Para distinguir o arco menor do arco maior, indicamos $\overset{\frown}{AB}$ para o menor e utilizamos mais um ponto da circunferência para o maior.



Notação: $\overset{\frown}{AMB}$

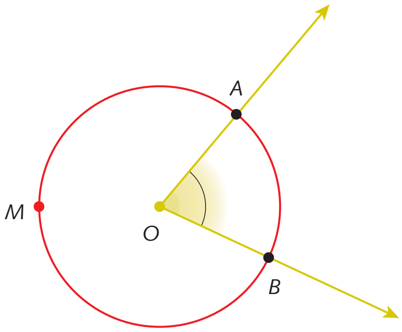
Notação: $\overset{\frown}{AB}$

Quando os extremos *A* e *B* coincidem com as extremidades de um diâmetro, cada um dos ângulos formados é denominado **semicircunferência**.



Ângulo central

O ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**.



Verificamos, na figura, que $A\hat{O}B$ é um ângulo central, e $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente. Define-se que a medida do ângulo central é igual à medida desse arco.

Assim:

$$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(\overset{\frown}{AB})$$

Exemplos

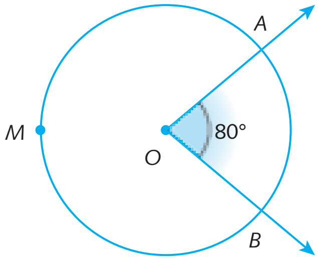
- Determinar a medida de $\overset{\frown}{AMB}$.

  Como $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 80°$, temos:

  $\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 360° - \text{med}(\overset{\frown}{AB})$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 360° - 80°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 280°$



- Determinar as medidas de $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AMD}$.

  $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 60°$ e $\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 50°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) + \text{med}(\overset{\frown}{BC})$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = 60° + 50°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = 110°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = \text{med}(\overset{\frown}{AC}) + \text{med}(\overset{\frown}{CD})$

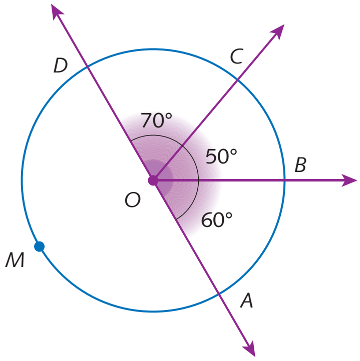
  $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = 110° + 70°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = 180°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AMD}) = 360° - \text{med}(\overset{\frown}{AD})$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AMD}) = 360° - 180°$

  $\text{med}(\overset{\frown}{AMD}) = 180°$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

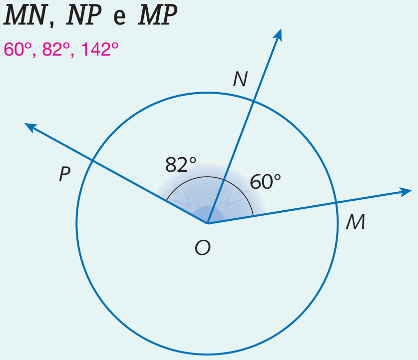
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Dadas as figuras abaixo, determine as medidas dos arcos:

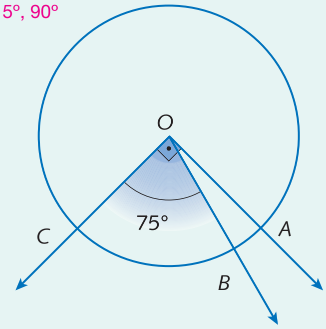
a) $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{NP}$ e $\overset{\frown}{MP}$

60°, 82°, 142°



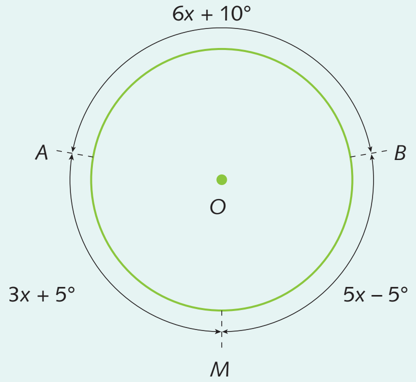
b) $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$

75°, 15°, 90°



2 Quantos graus mede o arco $\overset{\frown}{AMB}$ da figura?

200°



3 Em uma circunferência, os arcos $\overset{\frown}{MN}$ e $\overset{\frown}{MAN}$ formam o giro de uma volta. Determine o valor de x quando:

a) $\text{med}(\overset{\frown}{MAN}) = 3x$ e $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = x + 30°$

82,5°

b) $\text{med}(\overset{\frown}{MAN}) = x + 120°$ e $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = x$

120°

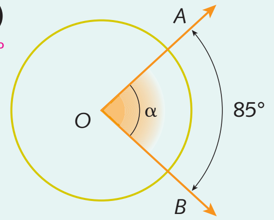
c) $\text{med}(\overset{\frown}{MAN}) = 2x + 80°$ e $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = \dfrac{3x}{2}$

80°

4 Calcule o valor de α.

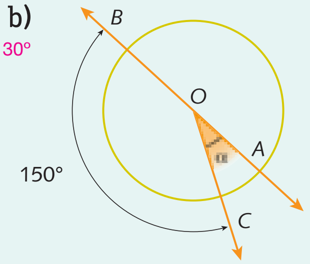
a)

85°



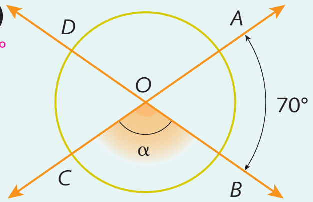
b)

30°



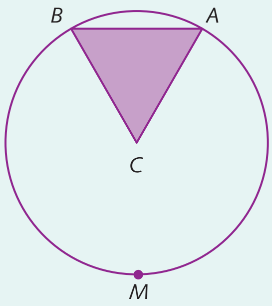
c)

110°

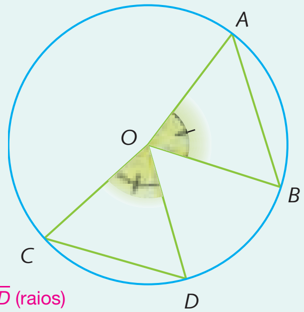


5 Na figura, o triângulo ABC é equilátero. Qual é a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ assinalado?

60°



6 Prove que, em uma circunferência, ângulos centrais congruentes determinam cordas congruentes.



$A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios)

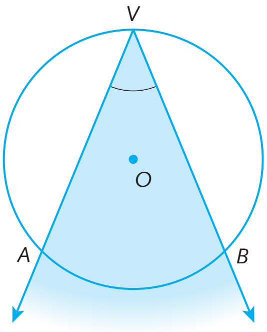
Logo, $\triangle AOB \cong \triangle COD$, pelo caso LAL.

Assim: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Ângulo inscrito

Ângulo inscrito a uma circunferência é todo ângulo cujo vértice é um ponto da circunferência e cujos lados são secantes a essa circunferência.



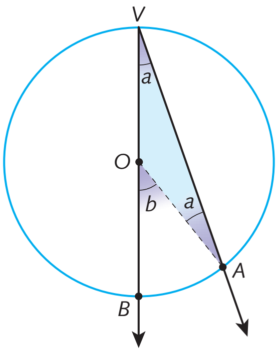
$A\widehat{V}B$ é um ângulo inscrito que determina o arco $\overset{\frown}{AB}$ na circunferência.

GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Podemos estabelecer uma relação entre a medida do ângulo inscrito e a do arco da circunferência por ele determinado.

Na figura abaixo, $A\widehat{V}B$ é um ângulo inscrito e $\overline{VB}$ é um diâmetro da circunferência.



LUIZ RUBIO

Seja a a medida do ângulo inscrito $A\widehat{V}B$ e b a medida do ângulo central $A\widehat{O}B$.

Como $\overline{OV}$ e $\overline{OA}$ são raios da circunferência, o triângulo AOV é isósceles. Assim, os ângulos da base do triângulo AOV são congruentes: med($O\widehat{V}A$) = med($O\widehat{A}V$) = a.

No triângulo AOV, temos:

$a + a = b$

$2a = b$

$a = \dfrac{b}{2}$

Assim: med($A\widehat{V}B$) $= \dfrac{\text{med}\,(A\widehat{O}B)}{2}$

Portanto: med($A\widehat{V}B$) $= \dfrac{\text{med}\,(\overset{\frown}{AB})}{2}$

A medida do ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do arco que ele determina na circunferência.

Exemplos

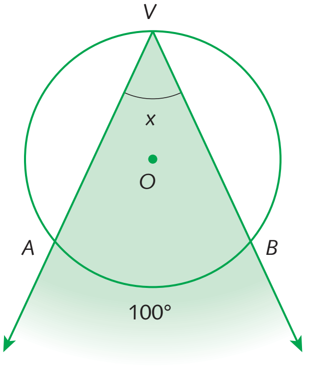
- Determinar o valor de *x* na figura ao lado.

Como $\text{med}(A\widehat{V}B) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, temos:

$$\text{med}(A\widehat{V}B) = \frac{100°}{2}$$

$$\text{med}(A\widehat{V}B) = 50°$$

Portanto: $x = \text{med}(A\widehat{V}B) = 50°$



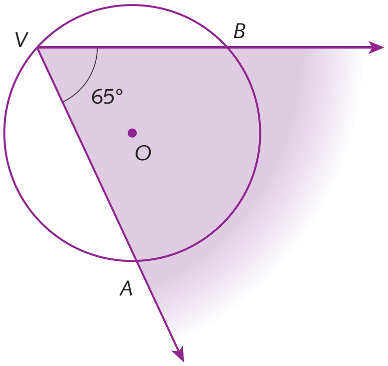
- Determinar a medida de $\overset{\frown}{AB}$.

Como $\text{med}(A\widehat{V}B) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, temos:

$$65° = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 65° \cdot 2$$

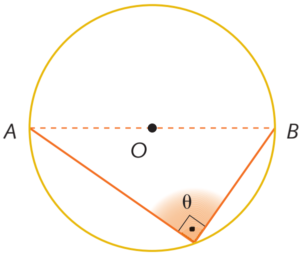
$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 130°$$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

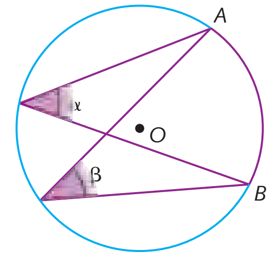
Observações

1 O ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.



$$\theta = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

2 Ângulos inscritos que determinam o mesmo arco são congruentes.



$$\alpha = \beta = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

TIAGO SILVA

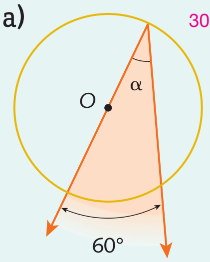
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

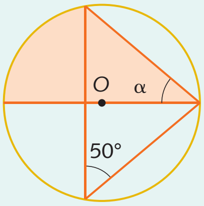
Faça as atividades no caderno.

1 Encontre o valor de α, em grau, em cada figura.

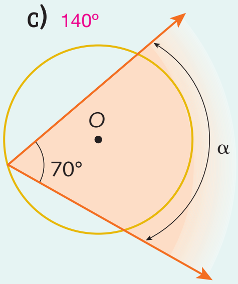
a) 30°



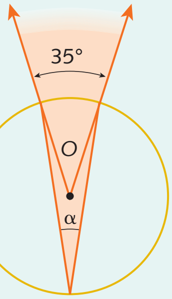
b) 40°



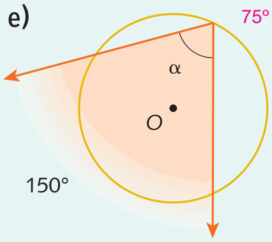
c) 140°



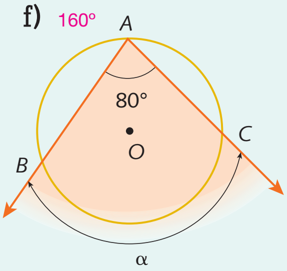
d) 17° 30'



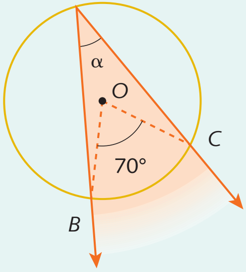
e) 75°



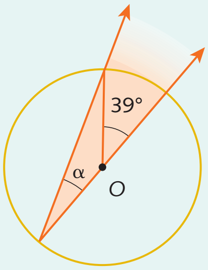
f) 160°



g) 35°

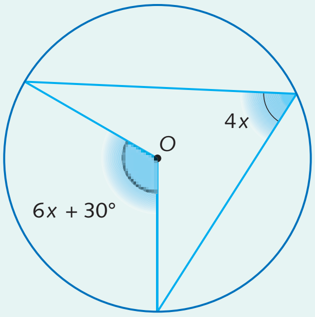


h) 19° 30'



2 Um triângulo ABC está inscrito em um círculo, e o arco $\overset{\frown}{AC}$ mede 100°. Calcule a medida do ângulo $C\hat{A}B$, sabendo que a medida do ângulo $B\hat{C}A$ é 60°. 70°

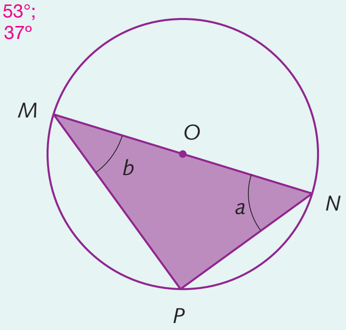
3 Calcule a medida, em grau, dos ângulos assinalados. 60° e 120°



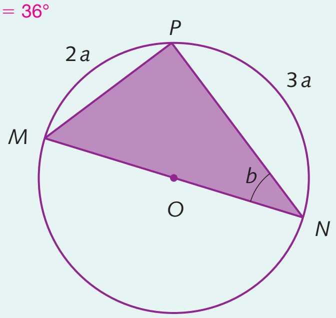
4 Determine a e b, em grau, nas figuras abaixo.

a) $a + 2b = 127°$

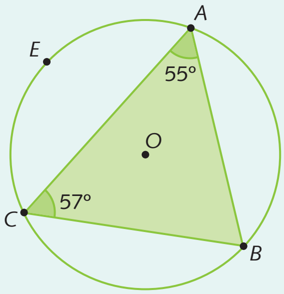
$a = 53°$;
$b = 37°$



b) $a = b = 36°$



5 Sabendo que $\overrightarrow{BE}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, determine a medida do arco $\overset{\frown}{ECB}$. 178°



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

LUIZ RUBIO

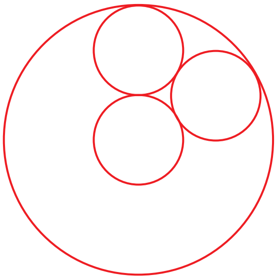
Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(Obmep) Desenhe duas circunferências de mesmo centro, uma de raio medindo 1 cm e a outra de raio medindo 3 cm. Na região exterior à circunferência de 1 cm de raio e interior à de 3 cm de raio, desenhe circunferências que sejam, simultaneamente, tangentes às duas circunferências, como mostrado na figura dada.

a) Qual deve ser o raio dessas circunferências?

b) Qual é o número máximo dessas circunferências que podem ser desenhadas, sem que elas se sobreponham?



LUIZ RUBIO

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote no caderno as que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Copie a figura em seu caderno e analise-a considerando as duas circunferências desenhadas inicialmente (concêntricas). Depois, determine os raios das circunferências tangentes. $r = 1$ cm
- Una os centros das circunferências menores. Que figura geométrica você obtém? Justifique. Um triângulo equilátero, pois os lados têm 2 cm.

Plano de resolução

- Quais são as medidas dos ângulos internos da figura encontrada no item anterior? 60°

Resolução

- Junte-se a dois colegas.
- Comparem os planos de resolução e verifiquem se eles contêm ideias comuns.
- Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um deles para a execução do processo de resolução. É possível desenhar, no máximo, 6 circunferências.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Apresentem a figura dada no problema e sua solução, construídas com régua e compasso, em uma folha de papel sulfite.

As construções geométricas com régua e compasso complementam o estudo da Geometria e suas propriedades.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Qual é a diferença entre circunferência e círculo? Circunferência é uma linha plana fechada cujos pontos estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano chamado centro. O círculo é a região do plano formada pela circunferência e sua região interna.

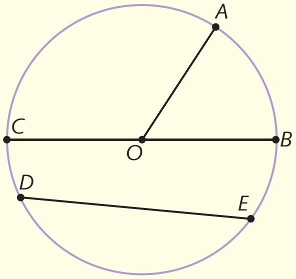
2 Observe a figura e escreva, no caderno, o nome de cada elemento indicado.

a) O centro

b) $\overline{AO}$ raio

c) $\overline{BC}$ diâmetro

d) $\overline{DE}$ corda



3 No caderno, copie e substitua cada ■ pelas palavras correspondentes, de modo a tornar as sentenças verdadeiras.

a) Se a distância entre o centro de uma circunferência e uma reta for igual ao raio, então, esta reta é ■ à circunferência. tangente

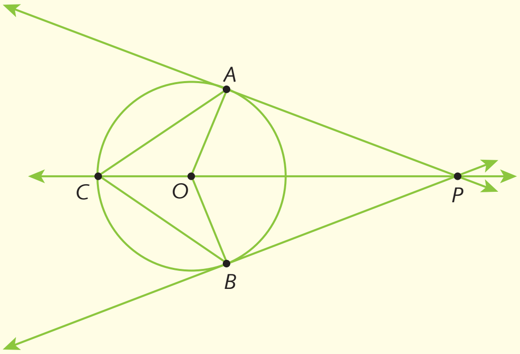
b) Se a distância entre o centro de uma circunferência e uma reta for maior que o raio, então, esta reta é ■ à circunferência. externa

c) Se a distância entre o centro de uma circunferência e uma reta for menor que o raio, então, esta reta é ■ à circunferência. secante

4 Desenhe, no seu caderno, duas circunferências secantes usando compasso. Anote as medidas dos raios e analise a distância entre os centros dessas circunferências. Resposta pessoal.

5 Sabendo que as retas PA e PB são tangentes à circunferência, demonstre, em seu caderno, que os arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BC}$ são congruentes.

Espera-se que os alunos percebam que os triângulos PAO e PBO são semelhantes pelo caso LLL, desse modo, os ângulos $A\widehat{O}P$ e $B\widehat{O}P$ são congruentes, assim como os arcos determinados por eles. Como a reta $\overleftrightarrow{PC}$ divide a circunferência em duas semicircunferências, temos que os arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BC}$ são congruentes.



6 Qual é a relação entre as medidas de um ângulo inscrito em uma circunferência e de um ângulo central, se ambos definem um mesmo arco de circunferência?
A medida do ângulo inscrito corresponde à metade da medida do ângulo central.

Aplicando

1 A medida do raio de uma circunferência é dada pela expressão $r = \frac{5x}{2} - 3$. Se o diâmetro mede 18 cm, qual é o valor de x? 4,8 cm

2 Determine o perímetro do quadrado $ABCD$, sabendo que no lado $\overline{AB}$ há um ponto E que é o ponto de tangência desse lado com a circunferência inscrita ao quadrado e que $AE = 8$ cm. 64 cm

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Desafio: Sendo t e r retas tangentes à circunferência, temos que med$(A\widehat{M}C) = 90°$ e med$(M\widehat{N}P) = 90°$.
Como $\overrightarrow{MP}$ é bissetriz de $A\widehat{M}C$, então med$(P\widehat{M}N) = 90° : 2 = 45°$.
Do $\triangle MNP$, temos: med$(M\widehat{N}P)$ + med$(P\widehat{M}N)$ + med$(M\widehat{P}N) = 180° \Rightarrow 90° + 45°$ + med$(M\widehat{P}N) = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ med$(M\widehat{P}N) = 180° - 135° \Rightarrow$ med$(M\widehat{P}N) = 45°$

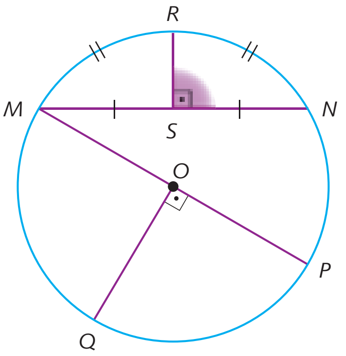
Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Com base na figura abaixo, responda:

a) Quais são os segmentos que indicam raios? $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OM}$

b) Quais são os segmentos que representam cordas? $\overline{MN}$, $\overline{MP}$

c) Qual segmento indica o diâmetro? $\overline{MP}$



GUILHERME CASAGRANDI

4 O centro de uma circunferência de raio R é O, e A, B e C são pontos quaisquer do plano em que está contida a circunferência. Se as relações med$(\overline{OA}) > R$, med$(\overline{OB}) < R$ e med$(\overline{OC}) = R$ estão satisfeitas, especifique o ponto externo, o ponto da circunferência e o ponto interno.
A é externo, *B* é interno e *C* é o ponto da circunferência.

5 Se a distância de um ponto exterior ao ponto mais afastado de uma circunferência vale 30 cm e a medida do raio é igual a 12 cm, qual é a distância desse ponto à circunferência? 6 cm

6 A distância entre os centros de duas circunferências secantes é de 8 cm. Se a medida do raio da circunferência menor é 5 cm, calcule os valores inteiros positivos, em centímetro, que o raio da circunferência maior pode assumir.
6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm e 12 cm

7 A distância de uma reta ao centro de uma circunferência de 10 cm de raio é dada por $d = \frac{5x}{8}$. Sabendo que a reta é tangente à circunferência, determine x. $x = 16$ cm

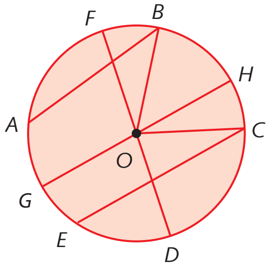
TIAGO SILVA

8 Observe o círculo e responda.

a) Que segmentos são raios? $\overline{OB}$, $\overline{OH}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OG}$, $\overline{OF}$

b) Que segmentos são diâmetros? $\overline{FD}$, $\overline{GH}$

c) Que segmentos são cordas? $\overline{AB}$, $\overline{EC}$, $\overline{FD}$, $\overline{GH}$

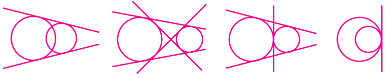


GUILHERME CASAGRANDI

9 Qual é a distância e a posição de um ponto em relação a uma circunferência de 30 cm de diâmetro, se esse ponto dista 8 cm do centro dessa circunferência? 7 cm; interno

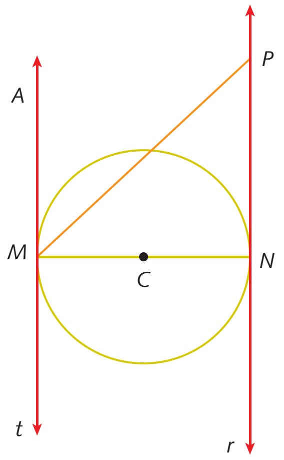
10 Três círculos de raios 5 m, 7 m e 10 m são tangentes entre si, dois a dois, externamente. Determine as medidas dos lados do triângulo cujos vértices são os centros desses círculos. 12 m, 15 m e 17 m

11 Determine quantas retas tangentes comuns podem ser traçadas: a duas circunferências secantes; a duas circunferências externas; a duas circunferências tangentes exteriores; a duas circunferências tangentes interiores.
2, 4, 3 e 1



DESAFIO

Considere a figura abaixo. Mostre que, se t e r são tangentes à circunferência de centro C e diâmetro $\overline{MN}$, e $\overrightarrow{MP}$ é bissetriz de $A\widehat{M}C$, então med$(M\widehat{P}N) = 45°$.



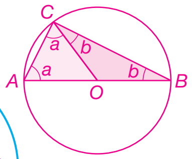
GUILHERME CASAGRANDI

12 Usando régua e compasso, construa, no caderno, um triângulo:

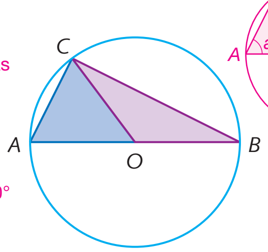
a) de lados 7 cm, 6 cm e 5 cm e a circunferência circunscrita a ele;
Lembre-se de determinar o circuncentro (encontro das mediatrizes do triângulo).

b) de lados 8 cm, 6 cm e 6 cm e a circunferência inscrita a ele.
Lembre-se de determinar o incentro (encontro das bissetrizes do triângulo).

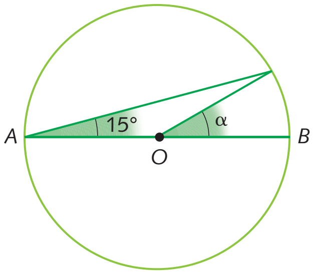
13 Prove que, para qualquer ponto C de uma circunferência, excetuando-se A e B, temos med($A\widehat{C}B$) $= 90°$.



$\triangle AOC$ e $\triangle COB$ são isósceles; os ângulos das suas bases são a e b.
A soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$ é:
$a + (a + b) + b = 180°$
Portanto: $2a + 2b = 180°$
$a + b = 90°$



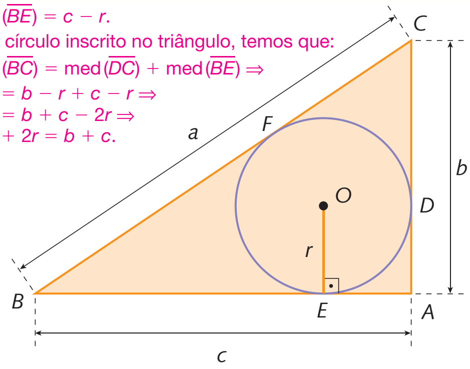
14 Calcule o valor de α em grau. 30°



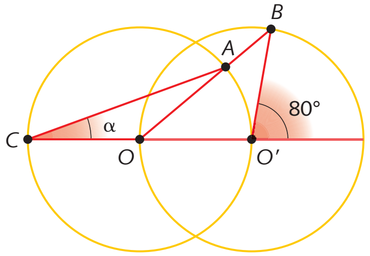
DESAFIO

Na figura, os lados do triângulo retângulo BAC tangenciam a circunferência. Prove que: $b + c = a + 2r$.

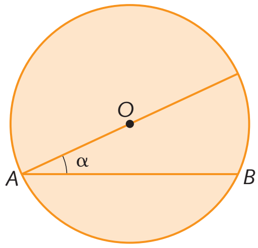
Temos que med($\overline{BC}$) $= a$, med($\overline{DC}$) $= b - r$ e med($\overline{BE}$) $= c - r$.
Pelo círculo inscrito no triângulo, temos que:
med($\overline{BC}$) = med($\overline{DC}$) + med($\overline{BE}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow a = b - r + c - r \Rightarrow$
$\Rightarrow a = b + c - 2r \Rightarrow$
$\Rightarrow a + 2r = b + c$.



15 Determine a medida do ângulo α. 20°

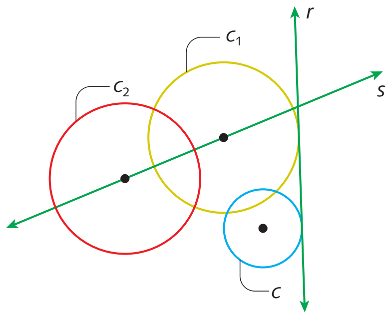


16 Em um círculo de centro O está inscrito o ângulo α, conforme a figura abaixo. Sabendo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 130°, determine a medida de α, em grau. 25°



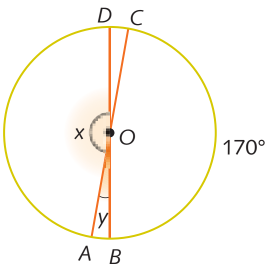
17 Com base na figura, determine as posições relativas de:

a) r e c; tangentes
b) c_1 e c_2; secantes
c) c e c_1; secantes
d) s e c_2; secantes
e) s e c_1; secantes
f) r e c_1. tangentes



18 Calcule o valor de x e y, em grau.

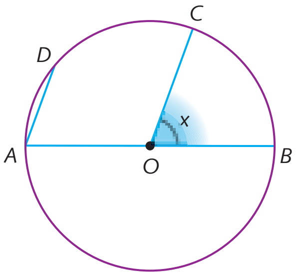
$x = 170°$
$y = 10°$



19 Determine a medida do raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm, respectivamente, e hipotenusa 13 cm. 2 cm

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

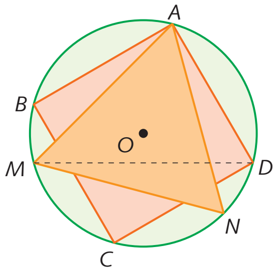
20 Na figura, a circunferência tem centro O e diâmetro $\overline{AB}$. Sabe-se que $\overline{AD} /\!/ \overline{OC}$ e que o arco $\overset{\frown}{DC}$ mede 70°. Determine a medida do ângulo $C\hat{O}B$, em grau. 70°



21 Duas circunferências são tangentes interiormente. A distância entre os centros é igual a 18 cm, e a soma das medidas de seus raios, 30 cm. Qual é a medida do raio da circunferência maior? 24 cm

22 A medida de um arco é igual a $\frac{2}{3}$ da circunferência. Qual é a medida do ângulo central correspondente a esse arco? 240°

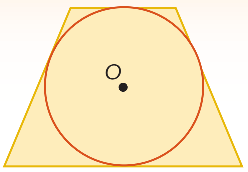
23 Na figura, $ABCD$ é um quadrado e AMN é um triângulo equilátero. Os dois estão inscritos em um mesmo círculo. Determine a medida dos ângulos $B\hat{A}M$ e $M\hat{D}C$. 15°, 30°



24 Em uma circunferência, está inscrito um triângulo ABC. Sabendo que seu lado $\overline{BC}$ tem a mesma medida que o raio da circunferência, responda: quanto mede, em grau, o ângulo $B\hat{A}C$? 30°

DESAFIO

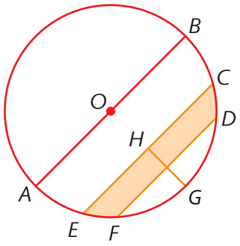
Mostre que o perímetro de todo trapézio circunscrito a um círculo é igual ao quádruplo da média aritmética das medidas das bases desse trapézio.



Veja a demonstração no *Suplemento com orientações para o professor*.

25 Classifique os elementos indicados na circunferência abaixo.

a) $\overline{AB}$ diâmetro
b) $\overline{EC}$ corda
c) $\overset{\frown}{BC}$ arco
d) $\overline{OA}$ raio

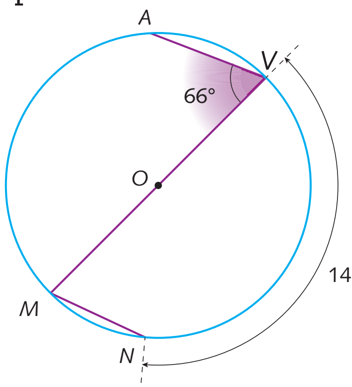


26 A distância de uma reta t ao centro de uma circunferência de 8 cm de diâmetro é dada por $\left(\frac{2x}{5} + 3\right)$ cm. Estabeleça os valores de x para que a reta e a circunferência sejam:

a) tangentes; $x = 2{,}5$ cm   c) externas. $x > 2{,}5$ cm
b) secantes; $x < 2{,}5$ cm

27 Determine a medida do raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm. 1 cm

28 Observe a figura abaixo e depois calcule o que se pede.



a) med($\overset{\frown}{AM}$); 132°   b) med($V\hat{M}N$). 70°

29 Qual é a medida de um ângulo central correspondente a um giro de $\frac{3}{8}$ de volta? 135°

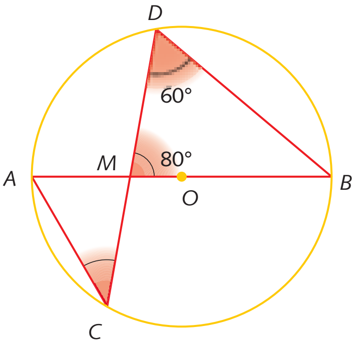
30 Trace, no caderno, um triângulo ABC, tal que $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm e $AC = 6$ cm. Em seguida: Construção de figura.

a) trace a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{AB}$;
b) trace a mediana do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$;
c) trace as mediatrizes de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto O;
d) trace a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$.

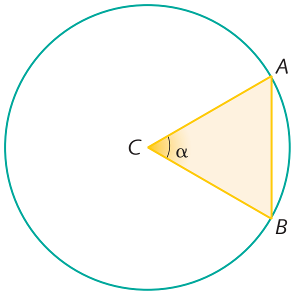
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

31 Os pontos A, B, C e D estão situados sobre uma circunferência. Sabendo que med($M\widehat{D}B$) $= 60°$ e med($B\widehat{M}D$) $= 80°$, determine a medida do ângulo $A\widehat{C}D$. 40°

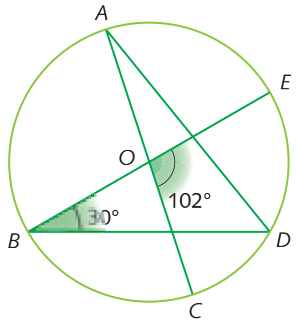


32 Sabendo que a corda $\overline{AB}$ da figura é um lado de um triângulo equilátero ABC, interno à circunferência de centro em C, determine a medida do ângulo α. 60°

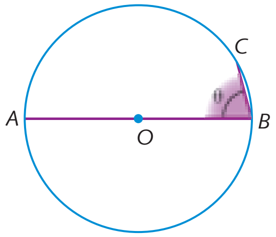


33 Dois segmentos tangentes a uma circunferência são traçados de um ponto exterior T e interceptam a circunferência nos pontos A e B, respectivamente, formando o ângulo $A\widehat{T}B$ que mede 54°. Pelo ponto A, traça-se uma corda $\overline{AC}$, paralela ao segmento tangente $\overline{TB}$. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABC. 54°, 63°, 63°

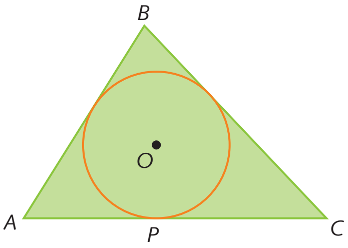
34 Determine a medida do ângulo $C\widehat{A}D$. 21°



35 Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência e $\theta = 75°$. Determine a medida do menor arco da circunferência que liga B a C.
30°



36 Sendo P o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC com o lado $\overline{AC}$; $AB = 7$ cm; $BC = 6$ cm e $AC = 8$ cm, determine a medida de $\overline{AP}$.
4,5 cm



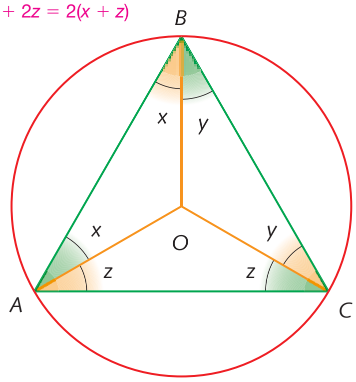
37 Forme dupla com um colega e tracem, em uma folha de papel, duas circunferências secantes de centros O_1 e O_2 e raios de medidas 5 cm e 10 cm, respectivamente. Em seguida, determinem a distância entre os pontos O_1 e O_2. Essa distância deve ser maior que 5 cm e menor que 15 cm? Por quê? Sim, pois nas circunferências secantes temos: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

DESAFIO

Observe a figura e responda às questões.

a) Qual é o valor de $x + y + z$?
$2x + 2y + 2z = 180° \Rightarrow x + y + z = 90°$

b) Podemos afirmar que med($B\widehat{O}C$) $= 2(x + z)$?
sim, pois: med($B\widehat{O}C$) $+ 2y = 180° \Rightarrow$ med($B\widehat{O}C$) $= 180 - 2y =$
$= 2x + 2z = 2(x + z)$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

RESPOSTAS

Capítulo 1

Página 14

1 **a)** 0, 5, 14, 57
b) $-100, -18, -8, -1, 0, 5, 14, 57$
c) sim

2 alternativa **b**

3 **a)** 1, 3, 5, 7 e 9
b) $-4, -3, -2$ e -1
c) Exemplo de resposta: -21, -22 e -23
d) 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

4 **a)** 101
b) -29
c) $n + 1$
d) $n - 1$

5 R$ 1 350,00

6 **a)** Há sete números inteiros: $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ e 2
b) o número zero

7 **a)** 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0, -10, -20, ...
b) 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, ...
c) 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, ...
d) 100, 10, 1

- Sequências dos itens **b**, **c** e **d**.
- A sequência do item **d** é finita porque a divisão de 1 por 10 não resulta em um número inteiro.

Página 17

1 alternativas **a** e **d**

3 **a)** 1,2
b) 1,57
c) $2,\overline{3}$
d) $1,\overline{18}$
e) $-0,375$
f) $-0,\overline{16}$
g) $0,0\overline{18}$
h) $-0,75$

- $\frac{7}{3}$; $\frac{13}{11}$; $-\frac{15}{90}$; $\frac{1}{55}$

4 **a)** 7
b) 3
c) 5
d) 32

5 **a)** 8 meses; $\frac{8}{12}$
b) R$ 1 676,33

6 **a)** não; exemplo de explicação: a pessoa se esqueceu de apertar a tecla · para indicar 329,18
b) R$ 2 560,29

Página 19

1 **a)** $\frac{8}{9}$
b) $\frac{312}{99}$
c) $\frac{47}{900}$
d) $\frac{7}{999}$
e) $\frac{223}{90}$
f) $\frac{13}{90}$

2 **a)** 5,777...
b) 8,333...
c) 0,8222...
d) 2,0555...

3 **a)** 1,0555...
b) 0,1666...

4 **a)** 0,8888...
b) 0,8888...
c) 0,8888...
d) 0,272727...
e) 0,272727...
f) 0,272727...

Página 21

1 alternativas **b**, **d**, **f** e **j**

2 **a)** 3,15
b) $-0,32$
c) 2,45
d) 0,32

3 **a)** 3,16228
b) 3,16049
c) 3,14286
d) 3,14159
e) 3,14626
f) 3,14159

- $\frac{355}{113}$ e $\frac{13\sqrt{146}}{50}$

5 **a)** sim
b) aproximadamente 1,61; sim

6 $-1,2; 0,5; \frac{4}{3}; \sqrt{3}; 2\sqrt{2}; \frac{10}{3}$

7 **a)** 30 cm
b) 188,4 cm

8 500 voltas

Página 23

1 **a)** $\frac{40}{5}$
b) $-35; \frac{40}{5}$
c) 1,222, 0,444...; $\frac{1}{7}$; $\frac{40}{5}$; -35
d) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π
e) Todos são reais.

2 **a)** Exemplo de resposta: 2,1
b) Exemplo de resposta: π
c) Não existe.

3 todos

4 **a)** -14, -13 e -12
b) Exemplo de resposta: $-\frac{7}{10}$, $-\frac{6}{10}$, $-\frac{55}{100}$
c) Exemplo de resposta: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

5 alternativas **a**, **c**, **d** e **g**

Página 25 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

3 Exemplo de resposta:
$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

4 Sim, observe:
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

5 alternativa **b**

6 **a)** $\frac{212}{495}$
b) $\frac{10\,223}{3\,000}$
c) $\frac{60}{11}$
d) $\frac{8}{495}$

7 $\frac{4}{5}$

8 **a)** 0,075
b) $2,0\overline{5}$
c) 0,6
d) $0,038\overline{3}$
e) 0,0375
f) 0,4

9 alternativa **c**

Capítulo 2

Página 31

1 **a)** 16
b) 8
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{125}$
e) -64
f) 1 000
g) 100
h) $\frac{49}{9}$
i) $\frac{1}{1\,000}$
j) $\frac{4}{9}$
k) 0
l) $\frac{4}{121}$

2 **a)** 1
b) 5
c) 43

3 Não, pois $(-9)^2 = 81$ e $-9^2 = -81$.

4 $A = 35\frac{5}{16}$ é maior que $B = 21\frac{34}{225}$.

5 720 m

Página 33

1 **a)** 2^{18}
b) 2^6
c) 2^3
d) 10^5
e) 3^{-12}
f) 6^2
g) 6^3
h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$
i) 7^5
j) 10^0

2 a) 64 d) $\frac{1}{64}$
b) 784 e) $\frac{1}{64}$
c) 2 401 f) $-\frac{1}{243}$

3 $\frac{14}{15}$

4 a) 764 d) 9
b) 2 e) 512
c) $-\frac{37}{12}$

5 alternativa **a**

Página 38

1 a) 9 f) $\frac{8}{13}$
b) 0 g) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{2}{5}$ h) 15
d) 12 i) 0,7
e) 1

2 a) 35 c) 81
b) 49 d) 80

3 a) 1,2 c) 8,5
b) 3,6 d) 6,3

4 10

5 7

6 a) 225 b) 576

Página 39

1 a) 6,3 d) 11,8
b) 8,0 e) 28,2
c) 9,2 f) 32,4

2 a) 5,47 d) 7,12
b) 2,93 e) 12,24
c) 9,74 f) 9,28

3 a) 3,1 b) 3,9

4 6,1

5 $\frac{4}{5} < \sqrt{4} < \sqrt{8} < \frac{7}{2}$

6 $\sqrt{60}$ cm ou aproximadamente 7,75 cm

Página 40 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 a) $\frac{15}{16}$ d) 24
b) $\frac{2}{33}$ e) $\frac{65}{100}$
c) $\frac{32}{10}$ f) 75

2 a) 21 952 c) 2,48832
b) 15 625 d) 0,064

3 1 500

4 a) 5 b) 4 c) $\frac{65}{6}$

5 a) 8,66 c) 1,88
b) 2,64 d) 22,36

6 a) m^{33} b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{11}$

7 a) 32 vezes b) 2^{12}

8 alternativa **d**

9 4

10 412,09

11 a) 9 801 c) 1 296
b) 106 d) 42

13 81 colares

14 2^{48}

15 144 placas

Capítulo 3

Página 46

1 a) $4\,\ell$ c) $3x + 3$
b) $2x + 2y$ d) $2b + 2h$

2 a) $12x$
b) $\frac{y}{365}$

3 a) ℓ^2 b) $\frac{D \cdot d}{2}$ c) $b \cdot h$

4 a) a^3 b) $c \cdot \ell \cdot h$

5 a) $3x + x^2$ e) $x^2 + y^2$
b) $\frac{y}{3}$ f) $4y - \frac{y}{3}$
c) xy g) $\frac{25}{100}m$
d) $\sqrt{k}$, com $k \geqslant 0$

Página 49

1 a) 13 e) 4
b) -6 f) 4
c) $-\frac{91}{4}$ g) 4
d) 5 h) -13

2 150 cm³

3 $2\,710\,\ell$

4 a) 2 964
b) 24 820

Página 51

1 a) $\frac{1}{5}, a^3b^4$ e) $\frac{1}{5}, a^2 \cdot b^3 \cdot c^4$
b) $-1, a^2bc^3$ f) $1, xyz$
c) $\frac{3}{2}, x^3$ g) $-1, xy$
d) $-5\sqrt{3}, mn^2$ h) $\frac{4\pi}{3}, r^3$

2 alternativas **a**, **d**, **e**, **f**, **g**, **i**, **k** e **l**

3 a) ab
b) $6y$
c) $8a^2$

Página 52

1 alternativas **a**, **c**, e **g**

2 a) 1º grau g) 3º grau
b) 5º grau h) 3º grau
c) 3º grau i) 3º grau
d) 7º grau j) 4º grau
e) 4º grau k) grau zero
f) grau zero l) 2º grau

3 Exemplo de reposta: $5a^5b^7c^9$

4 a) 1º grau c) 1º grau
b) 3º grau d) 1º grau

5 Exemplo de reposta: $2ab$ e $\frac{1}{2}ab$

6 a) x: 3º grau; y: 4º grau; z: 5º grau
b) x: 4º grau; z: 2º grau
c) x: 1º grau; y: 3º grau; z: 2º grau

Página 54

1 a) $3ab$; $7ab$
b) $10ab$
c) 275

2 a) $6x$ d) 0
b) $\frac{40}{3}x^2$ e) $-17x^4y^3$
c) $10xy$ f) $-\frac{7}{4}x^2y$

3 $8abc$

4 $\frac{83}{36}$

5 a) $6x^3 - x^2 - 5x + 6$
b) $\frac{13}{12}xy - \frac{3}{2}xz$
c) $3mn + 5m^2$
d) $-3a^6 - 4a^3$

6 $A_1 = \frac{x^2}{2}$;
$A_6 = x^2$; $A_7 = x^2$

Página 55

1 a) x^{15} c) $-14x^3y^2$
b) $-24x^2$ d) $-8a^2b^3c$

2 a) $4k^2$ b) $18xy$

3 a) $6x^2yz$ b) 432

4 a) x^{19}
b) $2ykxz$
c) $\frac{2}{7}a^2b^2c^3$
d) $18x^5y^6$
e) $0{,}00008a^4b^5$
f) $24m^3n^2p^2$

5 $6x^3y^4$

6 Exemplo de resposta: $2p^2$ e $3pq$

7 **a)** $5xy$; $10xy$
b) $20xy$

Página 56

1 **a)** $4x^4$
b) $4a^3b^2$
c) $5ac^5$
d) $-2y$
e) $-3xz$
f) $+0{,}8xy^2$
g) $-\frac{1}{5}bm$
h) -5
i) $6x^2$
j) $5x$

2 **a)** $-\frac{10}{3}xy^2$
b) $\frac{3ab^2}{2}$
c) $-\frac{3}{8}xy^2$

3 **a)** $5a^3b$
b) x^2y
c) $-2x^{10}$

Página 57

1 **a)** x^{12}
b) $8m^{15}$
c) $\frac{81a^{24}}{625}$
d) 1
e) $\frac{c^{12}d^9}{8}$
f) $0{,}01a^4b^6c^8$
g) $x^{30}y^{20}$
h) $-x^5y^1$
i) $1024x^{30}y^{20}$
j) $\frac{16}{81}a^4b^8$

2 $6x^3$

3 **a)** $-800x^2$
b) $\frac{1}{64}b^{10}$
c) $4mn^3$
d) 0,00025

4 **a)** $1{,}44a^4b^{10}c^{14}$
b) $0{,}008b^6c^{15}$
c) $\frac{x^8y^4}{16}$

Página 58

1 **a)** $11a + 2b$
b) $4a + 28$

2 **a)** trinômio
b) monômio
c) binômio
d) binômio
e) binômio
f) monômio

3 $120x + 80y$

4 $\frac{100(100 - x)}{3}$

Página 59

1 **a)** 3º grau
b) 5º grau
c) 3º grau
d) 4º grau
e) 7º grau
f) 6º grau
g) 5º grau

2 **a)** 2º grau; 3º grau
b) 5º grau; 4º grau
c) 3º grau; 2º grau
d) 3º grau; 2º grau
e) 2º grau; 4º grau
f) 2º grau; 3º grau

Página 60

1 **a)** $2x + 8y$
b) $\frac{17x}{6} + \frac{y}{2}$
c) $-\frac{3a^2}{20} + \frac{20}{3}ab$
d) $12a - 9b + ab$
e) $3a^2 + 15b^2$
f) $15x^2 - y$

2 **a)** Quadrilátero:
$\frac{3x}{4} + (2x + 2) + 2x + 3x$;
triângulo: $(5x + 2) + (5x + 2) + 4x^2$
b) $\frac{31x}{4} + 2$ e $4x^2 + 10x + 4$

3 **a)** $4x^3 + 3x^2 + 22x - 5$; 3º grau
b) $7x^3 - 3x + 3$; 3º grau
c) $x^5 + y^2 - 4y$; 5º grau
d) $2x^3 - 2$; 3º grau

4 **a)** $x^2 + 3ax + 2x^2$
b) $3x^2 + 3ax$

Página 61

1 **a)** $3x^2 + x - 11$
b) $11ab - 12bc + 2ac$
c) $\frac{7x}{10} + \frac{5y}{12}$
d) $\frac{7a}{6} + 3b - 11$

2 $\frac{15x}{2} + 7$

3 $0{,}45x + 0{,}6y - 2$

4 Exemplo de resposta:
$(x^2 + 2x + 1) + (-x^2 + 5) = 2x + 6$

5 **a)** $3a^3 - 2a^2 - 5a - 2$
b) $2a^3 - 4a^2 - a + 11$
c) $3a^3 - 2a^2 - 6a - 1$
d) $4a^3 - 4a^2 - 6a + 4$

6 **a)** $x^3 - 2x^2 + 4x - 5$
b) zero

Página 62

1 **a)** $a^2 - 15ab + 15b^2$
b) $-2x^3 - 12x^2 + 16x + 8$
c) $3m + 6mn + 17n$
d) $\frac{1}{12}x + \frac{9}{10}xy - \frac{17}{10}y$
e) $-3x^2 + 2x + 6$

2 **a)** $x^2 - 7x - 5$
b) $-x^2 + 7x + 5$
c) $10x^2 + 11x - 11$
d) $3x - 5$

3 $-7a^2 - 6b^2 + 8a^2b^2 + 9ab$

4 $2x^3 - 4x^2 - 2x + 8$

5 **a)** $2b$
b) $-2b + 2c$
c) $3b - a - c$
d) $a + b - 3c$

6 $6x + 13$

7 -6

Página 65

1 **a)** $30x - 10$
b) $m^3 - m^2n$
c) $-\frac{9a^3}{2} - \frac{15a^2b}{2} - \frac{3ab^2}{4}$
d) $\frac{a^2b^3}{6} - \frac{a^4b}{8}$

2 $6x^2 + 2x$

3 $4x^2 + 7xy - 2y^2$

4 **a)** $3x^2 - 7x - 6$
b) $-3a^3 - 11a^2 - 10a - 12$
c) $-12x^3 + 22x^2 + 14x + 15$
d) $5x^3 - 13x^2 - 7x + 3$
e) $a^2 - b^2$

5 **a)** $x^3 + 7x^2 + 11x + 5$
b) $2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 4$
c) $2x^5 + 14x^4 +$
$+ 18x^3 - 18x^2 - 44x - 20$

6 **a)** $x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$
b) $8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$

Página 66

1 **a)** $5x^3 + 6x^2$
b) $a^2 + 2ab + 3b^2$
c) $-2 + 3a + 4b$
d) $-\frac{5}{4}x + \frac{9}{8}$
e) $-m^3 - m$
f) $-mn^2 - n^3 - m^4n$

2 $4b^2 + 6ab^4$

3 $bx + 2$

4 **a)** $xy^2 - 2x^2y^4 + 3x^3y^5$
b) $-\frac{x}{2} + x^2y^2 - \frac{3x^3y^3}{2}$
c) $2y - 4xy^3 + 6x^2y^4$
d) $-y^2 + 2xy^4 - 3x^2y^5$

Página 67 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** $\frac{k}{3} + \frac{3p}{2}$
b) $6x + \frac{y}{3}$
c) $\frac{3}{2}x$
d) $a^3 \cdot \frac{b}{2}$

2 $64a^3$

3 -2

4 -200

5 alternativa **d**

6 500 watts

7 **a)** 9º grau
b) 5º grau
c) 7º grau
d) 4º grau
e) grau zero
f) 2º grau

8 **a)** $-a^2 - 2b^2 + 3a$
b) $\frac{13}{5}x^2y$
c) $\frac{11}{10}x$
d) $9a^2b$
e) $12x^2y - 4xy^2$
f) $\frac{17a}{4}$

9 *a* e 7; *b* e 5; *c* e 6; *d* e 4; *e* e 2; *f* e 3; *g* e 1

10 **a)** $-a^8$ **c)** $+6a^3c^3$
b) $-\frac{16}{15}x^3y^3$ **d)** $-\frac{2}{3}b^3$

11 $22a$

Desafio: $xyz - 2xz^2 - 2yz^2 + 4z^3$

12 **a)** $3x^2 - 2x - 25$
b) $-3x^2 + 2x + 25$
c) $14x^2 + 16x - 6$

13 $15x + 4$

14 $2m^3 + 4m^2 + 6m$

15 **a)** $9abc$ **b)** 9 tijolos

16 $-44x^2 + 190x - 119$

17 $5x^2 + 7x$

18 **a)** $8x^2 + 34x + 8$
b) $2x^2 + 6x - 8$
c) $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$
d) $x^2 - 7x + 12$
e) $3x^4 - 4x^3 + 6x - \frac{1}{3}$
f) $1 + x + x^2$

19 $2x^3 - 4x^2$

20 **a)** $y + 8y^3$
b) $m^7 + m^5 + m^3 + m^2$
c) $2x$

21 **a)** $-6x + 24$
b) $2x^2 + x + 1$
c) $-xy^3 + x^3y$
d) $3b^2 - 4ab + 3a - 5b + 15$

22 $xy + 3xz + \frac{x}{2} + 2y^2 + 11yz + 2y +$
$+ 15z^2 + \frac{11z}{2} + \frac{1}{2}$

23 $3y + \frac{13}{2}$

24 $xy + 1$

Desafio: Área: $-2x^2 + 10xy + 4y^2$
Volume: $-2x^3 - 2x^2y + 4xy^2$

Capítulo 4

Página 75

1 **a)** $x^2 + 2x + 1$
b) $4x^2 + 40x + 100$
c) $x^2y^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}$
d) $x^2 + 10x + 25$
e) $x^{10} + 4x^8 + 4x^6$
f) $36 + 12x + x^2$
g) $4x^2 + 4x^2y + x^2y^2$
h) $x^4 + 2x^2 + 1$
i) $x^2 + 4xy + 4y^2$
j) $x^6 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{9}$

2 **a)** $-x^2$
b) $-10a - 50$
c) $3y^2 - 4y$
d) 0

3 **a)** $4x^4 + 12x^2 + 9$
b) $x^4 + 8x^2 + 16$
c) $9x^4 + 42x^2 + 49$

4 **a)** 144
b) 3721
c) 1089
d) 8464

5 90

6 **a)** $-4x - 10$
b) $x^4 + y^4$
c) 0

7 $x^2 + 6xy + 9y^2$

8 **a)** $a^8 + 10a^4 + 25$
b) $\frac{a^2}{4} + \frac{ab^2}{3} + \frac{b^4}{9}$

9 60

Página 77

1 **a)** $x^2 - 6x + 9$
b) $\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{3} + 4$
c) $81x^4 - 36x^2 + 4$
d) $x^6 - 2x^3y^3 + y^6$
e) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
f) $x^2 + 2xy + y^2$
g) $x^2y^2 - 2xyz + z^2$
h) $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$

2 **a)** $4x^2y^2$
b) $4xy$
c) $5x^4 - 18x^2 + 8x + 3$

3 **a)** 289
b) 361
c) 196

4 $m^2 - 2mn + n^2$

5 **a)** $24ab$
b) $x^4 - 8x^2 + 16$
c) $2 + 2x^2$
d) $-3x^2 + 3x$

6 15

7 4

Página 80

1 **a)** $x^2 - 1$
b) $9x^2 - y^2$
c) $x^2 - 25$
d) $4x^2 - 25$

2 $4x^2$

3 **a)** $x^2 - \frac{1}{x^2}$
b) $x^2 - \frac{y^2}{9}$
c) $x^4 - 1$
d) $x^2y^4 - z^4$

4 **a)** 3591 **b)** 2496 **c)** 1428

5 8

Página 82

1 Exemplo de resposta:
a) $2^2 \cdot 3^2$
b) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
c) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$
d) $2^2 \cdot 5^3$

2 **a)** $a(x + y)$
b) $4(4x^2 + 5y^2)$
c) $5(x + 3y - 2z)$
d) $4(x - 4)$
e) $5x^2y(-x + 4y)$

3 $ab(a^2 + 5b - 4)$; 160

4 **a)** $x(ax^2 + bx - c)$
b) $2ax^2(6a^2 + 3ax - 4x^2)$
c) $\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} - b\right)$

5 **a)** $x^2(x^3 + x^2 - 2)$
b) $3x(2 + y + 4yz)$
c) $6xy(x - 3y^2)$
d) $3x^2(9 - 5x^2 + 12x)$
e) $2x^2(2x^2 + 3x + 1)$
f) $3x^4(5x^3 - y)$

Página 83

1 **a)** $(y + 1)(x - 2)$
b) $(x + y)(6 + a)$
c) $(x - 1)(2 + y)$
d) $(a + b)(2 + x)$

2 **a)** $(x + y)(7 + b)$
b) $(x - y)(a - b)$
c) $(2x + 5)(3x - 2y)$
d) $(x - y)(2a - 3b)$

3 **a)** $(x - 1)(3 + a + a^2)$
b) $(a + b)(x + y + z)$
c) $(x + y)[(x + y) - 2]$
d) $(x - 1)\left(a + \frac{m}{3}\right)$

4 **a)** $(x - y)(a + 1)$
b) $(ab + c)(x^2 + y^2)$
c) $(x + 9)(x^3 - 6)$
d) $(x - 2y)(a + 5b + 11c)$

Página 84

1 **a)** $(x+7)(x-7)$

b) $(3a+2b)(3a-2b)$

c) $(1+x)(1-x)$

d) $(2x+5y)(2x-5y)$

e) $(2x+5)(2x-5)$

f) $(xy+1)(xy-1)$

g) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)$

h) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x^2}\right)$

2 **a)** $(x+y+1)(x+y-1)$

b) $(1+3a)(1-3a)$

c) $(2x+y)(2x-y)$

d) $(x+y+1)(x-y-1)$

3 **a)** 6 399

b) 1 596

c) 9 999

4 **a)** $(a+2)(a-2)(a+1)$

b) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$

5 **a)** 90 000

b) 190 000

6 $n+n+1=2n+1$ e

$(n+1)^2-n^2=2n+1$

Exemplo: $4+5=9$ e $5^2-4^2=9$

Página 85

1 **a)** $(x+3)^2$

b) $(x-8)^2$

c) $(3x+5y)^2$

d) $(x-a)^2$

e) $(3m-1)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}a-5b\right)^2$

2 alternativas **a**, **c** e **d**

3 **a)** $(x-3)^2$

b) $(1-3x)^2$

c) $(x-5)^2$

d) $x(x-1)^2$

e) $x^2(x+1)^2$

f) $\frac{1}{5}(x-2)^2$

4 **a)** $(a+b+c)(a+b-c)$

b) $(a+b)^2(a-b)^2$

c) $(a^2+b^2-1)(a^2+b^2-1)$

d) $(a^2+b^2+c^2-d^2)(a^2+b^2-c^2+d^2)$

Página 87 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** $4x^2+28x+54$

b) $3a^2+6ab$

2 8

3 $3x^2+2x-4$

4 **a)** $2ab$

b) $3a^2(1+b^2)$

c) a^2b-1

5 **a)** $-8x$ **b)** 4

6 7

7 **a)** x^2+6x+9

b) $x^2+8x+15$

c) $x^2-8x+16$

d) $a^2-7a+12$

e) x^2-25

8 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

10 4 179

12 139 e 140

13 $4-a^2+2ab-b^2$

14 $2ab$

15 10

16 $x^3-7x+20$

17 **a)** $x(x^2-x-y)$

b) $(a+b)(1+x)$

c) $(2x-3)^2$

d) $(6a+5b)^2$

e) $(x-8)(x+2)$

f) $(m+10)(m-10)$

g) $(x+y)(a-1)$

18 **a)** $(20-2x)(20-2x)\cdot x$

b) 324 cm^3

19 $60ab$

20 $4a$

21 81

22 **a)** $\frac{x+y}{x-y}$ **b)** $\frac{x^2+x+1}{x+1}$

Desafio: $E=\frac{6x^2}{ky^3}$

23 108 641

Desafio: $n^2+n=\underbrace{n(n+1)}_{\text{O produto de dois números é sempre par.}}$

24 alternativas **a**, **d** e **e**

25 **a)** $(3a+2b)(3a-2b)$

b) $(15c+6d)(15c-6d)$

c) $(4x+6y)(2a+b)$

d) $(9a+4b)(9a-4b)$

26 100 cm^2

27 9 cm^2

28 **a)** $(x^2+1)(x+1)(x-1)$

b) $(9y^2+1)(3y+1)(3y-1)$

c) $(x^{10}+16)(x^5+4)(x^5-4)$

d) $(r^2+2)(r+\sqrt{2})(r-\sqrt{2})$

Capítulo 5

Página 96

1 Exemplos de resposta:

Retas paralelas: a e b; c e d

Retas concorrentes: a e c; b e d

2 alternativas **a** e **c**

Página 97

1 6; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$

2 $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$

Página 98

1 9 cm

2 $\overline{HC}$, $\overline{FG}$ e $\overline{ED}$

3 **a)** 3 cm **c)** 7 cm

b) 4 cm **d)** 10 cm

Página 100

1 **a)** 40°

b) 125°

3 **a)** agudos: $\hat{a}$, $\hat{c}$; obtusos: $\hat{b}$, $\hat{d}$

b) agudo: $\hat{d}$; retos: $\hat{a}$, $\hat{b}$; obtuso: $\hat{c}$

Página 102

1 $a=36^\circ$

2 70°

4 70°

5 $x=40^\circ$; $y=50^\circ$; $z=50^\circ$

Página 106

1 **a)** 20° **c)** 37°10′

b) 52°20′ **d)** 24°47′30″

2 **a)** 7°30′

b) 25°

3 12° e 56°

4 **a)** 143° **c)** 74°20′

b) 111°22′ **d)** 24°41′25″

5 **a)** 22°30′

b) 90°

6 60°

7 48°

8 60°30′

9 45°

10 30°

11 80° e 100°

Página 107

1 **a)** $x=64^\circ$; $y=116^\circ$

b) $x=42^\circ$; $y=138^\circ$

c) $x=30^\circ$; $y=130^\circ$

2 $a=b=65^\circ$; $c=d=115^\circ$

Página 109

1 **a)** $\hat{a}=\hat{c}=\hat{e}=\hat{g}=60^\circ$

$\hat{b}=\hat{d}=\hat{f}=\hat{h}=120^\circ$

b) sim

c) sim

d) são suplementares

e) retas paralelas

2 **a)** $\hat{c}$ e $\hat{a}$
b) $\hat{n}$ e $\hat{a}$
c) $\hat{c}$ e $\hat{n}$
d) $\hat{c}$ e $\widehat{m}$
e) $\hat{b}$ e $\widehat{m}$

3 Av. Monsenhor Tabosa

Página 112

1 $\alpha = 45^\circ$
$\beta = 60^\circ$

2 Sim, pois os ângulos formados pelas retas *r* e *s* com a régua colocada na transversal têm a mesma medida.

3 **a)** $a = 60^\circ$; $b = 120^\circ$
b) $a = 28^\circ$; $b = 28^\circ$

4 **a)** $x = 35^\circ$; $y = 70^\circ$
b) $x = 32^\circ$; $y = 144^\circ$
c) $x = 80^\circ$; $y = 120^\circ$

5 $x = 30^\circ$; $y = 20^\circ$; $z = 100^\circ$

6 130° e 130°

7 **a)** $x = 80^\circ$; $y = 132^\circ$
b) $x = 40^\circ$; $y = 40^\circ$

8 18°

9 8°

10 **a)** $x = 15^\circ$; $y = 30^\circ$
b) $x = 50^\circ$; $y = 40^\circ$

11 47°30′

12 $b = 60^\circ$; $c = 50^\circ$; $x = 70^\circ$

13 $b = 100^\circ$

14 54°12′

Página 116 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 alternativas **a** e **d**

2 1 cm

3 **a)** 20 cm
b) 10 cm

4 9 cm

5 alternativas **a**, **c**, **d**, **f** e **h**

6 **a)** $\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right)$
b) $3 \cdot (180^\circ - x)$
c) $\frac{(180^\circ - x)}{4}$
d) $90^\circ - 3x$

7 21°13′36″; 111°13′36″

8 63°

9 **a)** $x = 40^\circ$
b) $x = 80^\circ$

10 **a)** $A\widehat{O}B$ **c)** $E\widehat{O}F$
b) $C\widehat{O}D$ **d)** $G\widehat{O}H$
congruentes: $A\widehat{O}B$ e $E\widehat{O}F$, $C\widehat{O}D$ e $G\widehat{O}H$

11 40° e 50°

12 As bissetrizes encontram-se em um único ponto.

13 **a)** 40°
b) 25°

14 **a)** $x = 20^\circ$
b) $x = 25^\circ$
c) $x = 30^\circ$

15 **a)** $x = 120^\circ$; $y = 40^\circ$; $z = 100^\circ$
b) $x = 30^\circ$; $y = 82{,}5^\circ$; $z = 27{,}5^\circ$

16 18°

17 **a)** $x = 60^\circ$ **b)** $x = 28^\circ$

18 52°47′26″; 142°47′26″

19 $y = 76^\circ$

20 24°

21 72°

22 200°

23 108°

24 30°

25 45°

26 54°

28 35°

29 **a)** $a = 45^\circ$ **c)** $c = 145^\circ$
b) $b = 10^\circ$

30 105° e 75°

31 18°

32 78°45′

33 122°50′

34 $a = c = e = g = 138^\circ$;
$b = d = f = h = 42^\circ$

35 112°30′ e 67°30′

36 **a)** $x = 130^\circ$
b) $x = 40^\circ$
c) $x = 30^\circ$

37 **a)** $x = 120^\circ$; $y = 60^\circ$
b) $x = 80^\circ$; $y = 40^\circ$

Desafio: 37°30′

38 $x = 50^\circ$

39 $x = 16^\circ$; $m = 32^\circ$; $n = 148^\circ$

40 500°

41 **a)** $90^\circ - x$
b) $2 \cdot (90^\circ - x) = 180^\circ - 2x$
c) $x = 20^\circ$

42 **a)** $x = 88^\circ$
b) $x = 100^\circ$
c) $x = 12^\circ$

43 $y = 130^\circ$

44 110°

45 $x = 60^\circ$; $a = 50^\circ$; $b = 70^\circ$

Desafio: A medida do ângulo é sempre igual a 90°

46 $x = 100^\circ$

47 $x = a + c$

48 $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 40^\circ$

49 **a)** $a = 100^\circ$; $b = 80^\circ$; $x = 50^\circ$
b) $a = 60^\circ$; $b = 100^\circ$; $x = 20^\circ$

50 $x = 80^\circ$

51 36°

52 63°

Desafio: 148°

Capítulo 6

Página 127

1 alternativas **a** e **e**

2 **a)** convexo **c)** não convexo
b) convexo **d)** não convexo

3 **a)** quadrilátero *ABCD*; lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$; vértices: *A*, *B*, *C*, *D*; diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$
b) hexágono *ABCDEF*; lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$; vértices: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$

5 72 cm

6 **a)** 9 **b)** 9

7 1 080°

Página 129

1 **a)** 5 diagonais
b) 27 diagonais
c) 90 diagonais
d) 170 diagonais

2 54 diagonais

3 11 lados

Página 133

1 **a)** 360° **c)** 1 620°
b) 1 260° **d)** 3 240°

2 **a)** octógono
b) polígono de 13 lados
c) pentadecágono
d) dodecágono

3 **a)** $a_i = 90^\circ$; $a_e = 90^\circ$
b) $a_i = 135^\circ$; $a_e = 45^\circ$
c) $a_i = 140^\circ$; $a_e = 40^\circ$
d) $a_i = 162^\circ$; $a_e = 18^\circ$

4 **a)** $x = 95^\circ$ **b)** $x = 108^\circ$

5 retângulo

6 9 lados

7 hexágono

Página 137 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 triângulo

2 **a)** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$
b) *A*, *B*, *C*, *D*
c) $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$
d) $\widehat{a_1}$, $\widehat{b_1}$, $\widehat{c_1}$, $\widehat{d_1}$
e) 180°
f) 180°

3 pentadecágono

4 18°

5 $n = 6$

6 $\alpha = 120°$

7 **a)** decágono regular
b) 20 metros

8 180°

9 72°

10 1 260°

11 27 diagonais

12 $n = 8$

13 eneágono

14 $a = 36°$; $b = 108°$

15 octógono

16 12 lados

17 icoságono regular; 3 240°

18 40°

19 24 lados

20 12°

21 108°

22 8 lados

23 72°

24 4 lados e 12 lados

Desafio: $x = 72°$; $y = 36°$

25 hexágono

26 pentadecágono

28 **a)** 350 diagonais
b) 560 diagonais

29 alternativa **d**

30 alternativa **a**

31 alternativa **e**

32 alternativa **e**

33 alternativa **a**

34 alternativa **b**

35 alternativa **b**

36 alternativa **c**

37 alternativa **a**

38 15 estradas

Desafio: 144°

Desafio: 10 lados

Capítulo 7

Página 146

1 **a)** $\frac{x}{a + b}$
b) $\frac{x \cdot y}{n}$

2 alternativas **b**, **c**, **e**, **g** e **h**

3 **a)** $x = 0$
b) $x = 3$
c) $x = -5$ e $x = 4$
d) $x = -3$ e $x = 3$
e) $x = 3$
f) $x = a$

4 **a)** $\frac{7}{4}$
b) -1
c) Não é possível.
d) $\frac{4}{7}$
e) 6
f) $\frac{4 + a}{4 - a}$

5 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 6}$

6 $\frac{4}{9}$

7 **b)** 73,5 kg
c) 2 m

Página 148

1 **a)** $\frac{4y^2}{5x^2z}$
b) $\frac{x}{x - 1}$
c) $\frac{x - y}{a - b}$
d) $-\frac{a}{4bc}$
e) $\frac{2a + 3b}{2a - 3b}$
f) $-8a^2b$
g) $-\frac{1}{a + b}$
h) $3(m - 1)$
i) $\frac{4}{a + 1}$
j) $\frac{a - 5}{4}$
k) $x + 7$

Página 150

1 **a)** $12a^2b^6$
b) $288x^3y^2$
c) $196a^5b^3c^4$
d) $15(3x - 1)$
e) $3x(x + 2y)(x - 2y)$

2 96

3 21

4 Manuela tem 50 figurinhas, Roberto tem 30 e Virgínia tem 20.

5 Alfredo: 80 anos;
Bernardo: 40 anos;
Vitor: 20 anos

6 **a)** $\frac{3b}{ab}, \frac{6a}{ab}, \frac{7}{ab}$
b) $\frac{5x^3}{x^2y^2}, \frac{4xy}{x^2y^2}, \frac{10}{x^2y^2}$
c) $\frac{16(a - 1)}{2a(a - 1)}, \frac{18a^2}{2a(a - 1)}, \frac{5(a - 1)}{2a(a - 1)}$
d) $\frac{2}{a^2 - 1}, \frac{5(a - 1)}{a^2 - 1}, \frac{a(a + 1)}{a^2 - 1}$
e) $\frac{2a(a + b)}{a^2 - b^2}, \frac{ab^2}{a^2 - b^2}, \frac{b(a - b)}{a^2 - b^2}$
f) $\frac{2(a - b)}{a^2 - b^2}, \frac{-5(a + b)}{a^2 - b^2}$

Página 152

1 **a)** $\frac{12 + 2x}{a}$
b) $\frac{7a - 2}{2(b - 2a)}$
c) $\frac{2a + 1}{a(a + 1)}$
d) $\frac{a + b}{ab}$
e) $\frac{y}{x + y}$
f) $\frac{95}{6m}$
g) $\frac{2y + 3}{1 - y}$
h) $\frac{10 - 4a^2}{a^2}$
i) $-\frac{x + 9}{2x}$
j) $\frac{-2b}{x^2 - 1}$
k) $\frac{xy - 1}{y(y + 1)}$
l) $\frac{3x - y}{x - y}$

Página 153

1 **a)** $\frac{y^2}{15}$
b) $\frac{2x^2}{5a^3}$
c) $3(x - 1)$
d) $\frac{4b^3}{a^2}$
e) $\frac{2(x^2 - y^2)}{3x}$
f) $\frac{6x}{x - y}$
g) $\frac{10ab}{x}$
h) $\frac{6b}{a + b}$
i) $a(a - 1)$
j) $\frac{5}{a^2 + 1}$

2 -1

3 $\frac{4x}{y^2}$

Página 154

1 **a)** $\frac{7b}{4}$
b) $\frac{4y}{x^2}$
c) $\frac{6}{a}$
d) $\frac{2y^2}{3}$
e) $-\frac{x^3(x + b)}{b}$
f) $\frac{1}{a^2 - b^2}$
g) $\frac{yx}{x - 2}$
h) $\frac{5b^2}{a^2}$
i) $\frac{y(x + 3)}{x(x + 4)}$

Página 156

1 **a)** $x = 12$
b) $x = 2$
c) $x = \frac{4}{7}$
d) $x = 10$
e) $x = 7$
f) $x = \frac{2}{7}$
g) Não tem raiz.
h) $x = 8$
i) $x = 9$
j) $x = -\frac{1}{7}$

2 cinco carteiros

Página 157 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** $\frac{500}{x}$
b) $\frac{xy - 500}{x}$

2 $\frac{7}{x}$

3 $\frac{250}{x}$

4 **a)** $x \neq \frac{3}{5}$
b) $x \neq a$
c) $x \neq -2$
d) $x \neq -5$ ou $x \neq 5$

5 $-\frac{5}{16}$

6 $-\frac{1}{9}$

7 $\{[(x + 8) \cdot 3 - 4 + x] : 4 + 2\} - x$

8 O erro está na passagem da penúltima para a última linha. Como $a = b$, ao dividir os dois membros da penúltima linha por $(a - b)$, estamos efetuando uma divisão por zero, o que não é possível.

9 **a)** $\frac{x + a}{x - a}$ **b)** $\frac{x + 1}{x}$

10 $y = \frac{2(3 + x)}{3 - x}$

11 $\frac{2x}{x + 1}$

12 **a)** $\frac{5}{x}$ **b)** $\frac{2}{x}$ **c)** $\frac{1 - x}{x^2 y}$

13 O cálculo **1** está errado, porque o numerador da segunda fração tem de ser multiplicado por -1.

14 $\frac{y(x + y)}{3x^4}$

15 1

16 $\frac{74}{1225}$

17 $9a$

18 a^2b^2

19 **a)** $x = \frac{2}{3}$ **c)** $x = 7$ **e)** $x = -1$
b) $x = 11$ **d)** $x = \frac{1}{4}$

20 2 horas e 24 minutos

21 12 grupos

22 **a)** $x = -3$ **d)** não tem raiz
b) $x = 8$ **e)** $a = -\frac{1}{2}$
c) $x = -2$

23 $\frac{x^2}{1 - x}$

24 três horas

25 $\frac{2}{7}$

26 2 horas

Capítulo 8

Página 164

1 A: (d, 1) D: (g, 8)
B: (d, 8) E: (a, 1)
C: (f, 1) F: (b, 7)

2 **a)** $x = 8; y = -3$
b) $x = 8; y = 3$
c) $x = 8; y = -2$
d) $x = 7; y = 5$
e) $x = 5; y = 2$
f) $x = 3; y = -1$

3 $R(A, 5)$; $S(C, 1)$; $T(D, 4)$ e $U(F, 2)$
- $(G, 4)$

Página 166

1 $A(3, 2)$; $B(1, 3)$; $C(0, 1)$; $D(-3, 4)$; $E(-4, 3)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, -2)$; $H(-5, -3)$; $I(4, -1)$; $J(2, -4)$

4 **a)** sim
b) perpendicular; perpendicular
c) paralela; paralela

Página 167

1 **a)** $2x + 2y = 48$
b) $x - 2y = 9$
c) $x + y = 20$
d) $5x + 4y = 68$

2 $2x + 4y = 140$

Página 168

1 $A(4, 4)$, $B(-5, 3)$, $C(-2, -2)$, $D(5, -1)$, $E(2, 0)$, $F(0, 5)$, $G(0, -5)$ e $H(4, -4)$

2 Sim, estão alinhados.

Página 170

1 sim

2 **a)** $(8, -10)$
b) $(-2, 5)$
c) $(1, 1)$
d) $(3, 1)$

3 Venceu 5 vezes e ficou em 2º lugar 2 vezes.

Página 173

1 **a)** $(3, -1)$ **f)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
b) $(2, 3)$ **g)** $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$
c) $(5, 24)$ **h)** $\left(\frac{41}{7}, \frac{25}{7}\right)$
d) $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **i)** $\left(\frac{7}{16}, \frac{1}{6}\right)$
e) $(1, 1)$

2 130 e 190

3 21 galinhas

Página 177

1 **a)** possível e indeterminado
b) impossível
c) possível e indeterminado
d) possível e indeterminado
e) possível e determinado; (2, 4)
f) impossível
g) impossível
h) possível e determinado; (4, 2)

Página 179 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

2 78 e 37

3 137 e 26

4 **a)** 800 **b)** 300 **c)** 1 000 **d)** 3

5 alternativa **c**

6 Ronaldo tem 28 anos e Pedro tem 16 anos.

7 19 e 24

8 **a)** $y = 2x - 7$; $y = -2{,}5x + 2$
b) $(2, -3)$
c) $x = 2$

9 **a)** $(6, 1)$
b) $(1, -2)$
c) $(2, 2)$
d) $(14, -14)$

10 20 bicicletas e 12 automóveis

11 4

12 criança: R$ 9,00;
adulto: R$ 17,00

13 **a)** $(14, 6)$ **c)** $(-5, 1)$
b) $(-5, 5)$ **d)** $(1, 8)$

14 18 e 90

15 35 cm e 65 cm

16 72 hectares

17 35 veículos

18 $\frac{10}{3}$ e $-\frac{1}{3}$

19 20 quadrados

20 **a)** $(-1, 2)$
b) $(-1, 4)$
c) $(1{,}5; 2)$
d) $(5, 2)$

21 16 tiros

22 Fábio: 33 anos; Moisés: 6 anos

23 **a)** $(-1, 2)$; possível e determinado
b) possível e indeterminado
c) impossível
d) $(6, 4)$; possível e determinado
e) possível e indeterminado
f) impossível

24 15 e 180

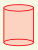
25 10 cédulas de R$ 50,00;
14 cédulas de R$ 10,00

26 **a)** $(6, 4)$ **b)** $(20, 10)$

27 $x = 5{,}5$ m, $y = 0{,}46$ m

28 18 e 63

29 15 avestruzes e 20 coelhos

Desafio:  → 2 kg;
 → 3 kg;
 → 1 kg

30 113

32 12 notas de R$ 5,00;
8 notas de R$ 10,00

33 $x = 6$ cm; $y = 8$ cm

34 João: 33 anos; Nicole: 12 anos

35 25 bolas brancas

36 medida da altura do foguete $A = 48$ m;
medida da altura do foguete $B = 54$ m

37 46 e 38 chocolates

38 10,5 cm; largura: 7,5 cm

39 20 km

40 10 tábuas

41 217

42 114 balas

43 Ana: 11 anos; Clara: 5 anos

44 frango: R$ 20,00; peru: R$ 40,00

45 500 ℓ

46 160 livros

47 30 anos e 40 anos

48 12 laranjas, 36 abacaxis e 48 bananas

49 2 e 0

Desafio: 20 anos

50 alternativa **a**

Capítulo 9

Página 190

1 **a)** quantitativa
b) quantitativa
c) qualitativa
d) quantitativa
e) qualitativa

2 **b)** 100%

Página 192

1 **a)** Gráfico de barras verticais. Esse gráfico refere-se à participação média, na conta mensal de energia elétrica de equipamentos como lavadora de roupas, televisor 29", lâmpadas incandescentes etc.
b) chuveiro elétrico

2 **a)** gráfico de barras verticais
b) 2010
c) 2009

4 **a)** 2012
b) 2005; 19 014 km^2
c) 1 847 km^2

Página 195

1 **a)** 21%
b) 0,96 bilhão de dólares ou 960 milhões de dólares

2 **a)** 34 700 aparelhos
b) Sim; $\frac{1}{3}$ corresponde aproximadamente a 33,3%.

3 **a)** 124 500 espécies; não
b) sim

4 **a)** 90° **b)** 42°

Página 197

1 2013: 30 000 *tablets*;
2014: 40 000 *tablets*;
2015: 45 000 *tablets*

3 **a)** 12 500; 20 000
2012: 20 000 lavadoras
b) 50%

Página 200

1 $\frac{3}{4}$ ou 75%

2 $\frac{1}{25}$ ou 4%

3 $\frac{5}{36}$

4 $\frac{1}{12}$

5 $\frac{1}{2}$

6 A probabilidade de tirar uma bola vermelha é maior se for da urna A. A probabilidade de tirar uma bola vermelha da urna A é $\frac{4}{7}$ e de tirar da urna B é $\frac{4}{8}$ $\left(\frac{4}{7} > \frac{4}{8}\right)$.

7 Nada podemos dizer, pois esse experimento é aleatório, ou seja, não é possível prever o resultado.

8 **a)** 1 000; 1
b) Sim, pois as frequências apresentam valores bem próximos.

Página 202 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** 81 municípios; o aumento foi de 156 municípios em 10 anos; o aumento foi de 846 municípios em 20 anos
b) aproximadamente 7,5%
c) Sim, pois de 2010 a 2014 o aumento foi de 484 municípios, o que corresponde a um aumento de 109% de 443 municípios.

2 **a)** 46%
b) 400 unidades

3 $P(\text{seis duplo}) = \frac{1}{28}$;
$P(\text{encaixe}) = \frac{2}{9}$

5 **a)** A maioria respondeu "atendeu plenamente".

Desafio: $\frac{11}{36}$

6 **a)** Alemanha: 144°; Inglaterra: 108°; Espanha: 72°; Finlândia: 36°

7 alternativa **d**

Desafio: $\frac{1}{36}$

8 **a)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{20}$ **d)** $\frac{1}{10}$

9 $\frac{23}{25}$

10 I: alternativa **a**; II: alternativa **d**

Desafio: 11 (5 + 6 ou 6 + 5; portanto, 2 possibilidades em 36; já 12 (6 + 6) só tem uma possibilidade em 36.

11 **a)** 4 bilhões e 6 bilhões, respectivamente
b) Passaram-se 52 anos.
c) 4,2 bilhões em 2011;
5,5 bilhões em 2050
d) aproximadamente 19,30%

Capítulo 10

Página 212

1 **a)** F, G e H **d)** $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ e $\widehat{z}$
b) $\overline{FH}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HG}$ **e)** $\overline{HG}$
c) $\widehat{F}$, $\widehat{G}$ e $\widehat{H}$

2 18 cm

5 **a)** sim **b)** não **c)** não

8 **a)** não **c)** sim
b) não **d)** sim

9 5 cm < medida do 3º lado < 17 cm

Página 214

1 **a)** equilátero e acutângulo
b) isósceles e obtusângulo
c) escaleno e obtusângulo

2 hipotenusa

Página 217

5 à altura, à mediana e à bissetriz

6 90°; o ortocentro desse triângulo é vértice do ângulo reto.

8 18,6 cm

9 sim

10 Todos esses pontos coincidem.

Página 221

1 **a)** sim; LAL
b) sim; ALA
c) não
d) sim; LAL
e) sim; ALA

2 **a)** $\triangle ADB \cong \triangle CBD$ (caso LAL)
b) $\triangle CAD \cong \triangle CBD$ (caso ALA)

3 $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, pois $\triangle ACM \cong \triangle BDM$ (caso LAA$_o$)

4 $\overline{MC} \cong \overline{MD}$, pois $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (caso LAL)

5 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (caso ALA)

6 $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (caso ALA)

Página 223

1 **a)** 30°, 60° e 90°
  b) 45°, 60° e 75°
  c) 40°, 60° e 80°

2 6°, 66° e 108°

3 $\text{med}(\widehat{A}) = 36°$; $\text{med}(\widehat{B}) = 22°$; $\text{med}(\widehat{C}) = 122°$

4 75°

5 $\text{med}(\widehat{A}) = 18°$; $\text{med}(\widehat{B}) = 54°$; $\text{med}(\widehat{C}) = 108°$

6 $x = 136°$

7 **a)** $a = 40°$
  b) $a = 55°$
  c) $a = 108°$

8 $\alpha = \beta = 20°$

9 **a)** $x = 110°$
  b) $y = 30°$; $z = 107°$; $w = 73°$

10 Não, pois a soma de dois ângulos obtusos é maior que 180°.

Página 226

1 **a)** $a = 52°$
  b) $a = 80°$

2 $\alpha = 44°$; $\beta = 68°$; $\gamma = 22°$; $\theta = 112°$; $\tau = 46°$

3 $a = 90°$; $b = 30°$

Página 228

1 36° e 54°

2 $\text{med}(\widehat{B}) = 63°$; $\text{med}(\widehat{C}) = 27°$

4 $\text{med}(\widehat{B}) = 57°$; $\text{med}(\widehat{C}) = 33°$

Página 229 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 alternativa **a**

2 alternativa **c**

3 não, pois: $5{,}5 > 3 + 1{,}5$

4 alternativa **e**

5 alternativa **b**

6 alternativa **d**

7 alternativa **a** e **c**

8 105°

9 20°

10 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (caso LAL), portanto, $\widehat{A} \cong \widehat{C}$

11 $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ (caso ALA), portanto, $\overline{AM} \cong \overline{MD}$

12 sim, pelo caso LAL

13 Basta provar que $\triangle ABP \cong \triangle ADP$ pelo caso LAL.

14 Seja $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{BC}$, M ponto médio de $\overline{AB}$ e N ponto médio de $\overline{AC}$.
  $\triangle AMC \cong \triangle ANB$ (caso LAL), portanto, $\overline{BM} \cong \overline{CM}$

15 $BE = CE$, pois $\triangle BCE$ é isósceles; $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ (caso LAA_o)

16 720°

17 alternativa **d**

18 $S = 360°$

19 alternativa **a**

20 alternativa **b**

21 alternativa **e**

22 84°

Capítulo 11

Página 237

1 **a)** M, N, O e P
  b) $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{OP}$ e $\overline{MP}$
  c) $\overline{NO}$
  d) $\overline{MO}$ e $\overline{PN}$
  e) $\widehat{N}$ ou $M\widehat{N}O$

2 5 cm

4 **a)** 32 m **b)** 29 m

Página 239

1 **a)** $x = 110°$
  b) $x = 30°$
  c) $x = 70°$

2 75°, 85°, 95° e 105°

3 36°, 72°, 108° e 144°

4 85°, 105°, 115° e 55°

5 Traçar diagonal BD. $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 180° + 180° = 360°$

Página 242

1 **a)** $x = 4$ cm; $y = 2$ cm
  b) $x = y = 45°$
  c) $x = 30°$; $y = 60°$

3 Os perímetros são iguais.

4 23,5 cm; 23,5 cm; 9,5 cm e 9,5 cm

5 116°, 116°, 64° e 64°

6 $\text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{A}) = 88°$; $\text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{D}) = 92°$

7 90°

8 50°, 50°, 130° e 130°

9 Todos medem 90°.

Página 244

1 alternativas **a**, **b**, **c**, **d** e **f**

2 alternativas **a**, **b**, **c**, **d** e **f**

3 $a = b = e = f = 50°$; $c = d = g = h = 40°$

4 $x = 33°$; $y = 57°$

5 $\text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{D}) = 140°30'$

6 128°, 128°, 52° e 52°

7 72°, 72°, 108° e 108°

9 75°

10 alternativa **e**

Página 248

1 100°40'; 100°40'; 79°20' e 79°20'

2 55° e 55°

3 $x = 100°$

4 $MN = PQ = 6$ cm; $NP = MQ = 7$ cm

5 **b)** 50°

Página 250 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 120°$ e $d = 150°$

2 96°, 48°, 144° e 72°

3 São 48 trapézios, sendo 12 azuis, 12 amarelos, 12 vermelhos e 12 lilases.

4 14,4 cm

5 $x = z = 50°$; $y = 130°$

6 109° e 109°

7 131°23'02"

8 144° e 36°

9 50°, 130°, 50° e 130°

10 17 cm

11 47°

12 125°, 125°, 55° e 55°

13 $x = 42°$; $y = 48°$

14 30 cm

16 18 cm

17 Sim, pois os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes.

18 alternativa **b**

19 alternativa **c**

21 **a)** $x = 40°$; $y = 70°$
  b) $x = 35°$; $y = 55°$

Capítulo 12

Página 257

1 **a)** 20 cm
  b) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$
  c) $\overline{AB}$
  d) Exemplo de resposta: $\overline{OE}$

2 0,72 m

3 **a)** raio
  b) diâmetros ou raios; congruentes
  c) congruentes
  d) diâmetro

4 **a)** 2 cm
b) 4 cm
c) Menor, pois $\overline{CM}$ não é diâmetro da circunferência, que é a maior corda e mede 4 cm.

5 **a)** 9 cm **b)** 8,5 cm

6 **a)** 10 m **c)** 7 m
b) 60 m **d)** 1,5 m

7 **a)** $\overline{OP}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OF}$
b) $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$
c) $\overline{AD}$, $\overline{BF}$
d) O

8 7,5 cm

9 3,0 cm

10 isósceles; med($O\hat{A}B$) = 35°;
med($O\hat{B}A$) = 35°

11 $\overline{OC} \cong \overline{OD} \rightarrow$ raio
$\overline{OA} \cong \overline{OB} \rightarrow$ raio
$A\hat{O}C \cong B\hat{O}D \rightarrow$ ângulo dado
$\triangle AOC \cong \triangle BOD \rightarrow$ caso LAL
Logo: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Página 259

1 **a)** G, C, E
b) F, I, D, J
c) B, A, H, O

3 **d)** sim **e)** não

Página 262

2 **a)** externa
b) secante
c) tangente

5 A distância de uma das retas ao centro deve ser igual a 10 cm e a distância da outra reta ao centro deve ser maior que 10 cm.

Página 265

1 **a)** externas
b) tangentes interiores
c) tangentes exteriores
d) internas
e) secantes
f) secantes

2 **a)** $d = r_1 + r_2$
b) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$
c) $d > r_1 + r_2$
d) $d = 0$

3 6 cm

4 alternativas **a**, **b** e **d**

5 **a)** 2 cm e 2 cm
b) 2 cm
c) 60°
d) losango

Página 269

1 **a)** $x = 20$ cm **c)** $x = 4$ cm
b) $x = 31{,}2$ **d)** $x = 4$

2 **a)** $x = 18$ **c)** $x = 10$
b) $x = 8$ **d)** $x = 3$

3 **a)** $x = 6$
b) $x = 2$
c) $x = 6$

4 $BD = 8$ cm

5 16 cm

Página 272

1 **a)** 60°, 82°, 142°
b) 75°, 15°, 90°

2 200°

3 **a)** 82,5°
b) 120°
c) 80°

4 **a)** 85°
b) 30°
c) 110°

5 60°

6 $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$
$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios)
Logo, $\triangle AOB \cong \triangle COD$, pelo caso LAL
Assim: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Página 275

1 **a)** 30° **e)** 75°
b) 40° **f)** 160°
c) 140° **g)** 35°
d) 17°30′ **h)** 19°30′

2 70°

3 60° e 120°

4 **a)** $a = 53°$; $b = 37°$
b) $a = b = 36°$

5 178°

Página 277 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 4,8 cm

2 64 cm

3 **a)** $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OM}$ **c)** $\overline{MP}$
b) $\overline{MN}$, $\overline{MP}$

4 A é externo, B é interno e C é o ponto da circunferência.

5 6 cm

6 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm e 12 cm

7 $x = 16$ cm

8 **a)** $\overline{OB}$, $\overline{OH}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OG}$, $\overline{OF}$
b) $\overline{FD}$, $\overline{GH}$
c) $\overline{AB}$, $\overline{EC}$, $\overline{FD}$, $\overline{GH}$

9 7 cm; interno

10 12 m, 15 m e 17 m

11 2, 4, 3 e 1

14 30°

15 20°

16 25°

17 **a)** tangentes **d)** secantes
b) secantes **e)** secantes
c) secantes **f)** tangentes

18 $x = 170°$; $y = 10°$

19 2 cm

20 70°

21 24 cm

22 240°

23 15°, 30°

24 30°

25 **a)** diâmetro **c)** arco
b) corda **d)** raio

26 **a)** $x = 2{,}5$
b) $x < 2{,}5$
c) $x > 2{,}5$

27 1 cm

28 **a)** 132°
b) 70°

29 135°

31 40°

32 60°

33 54°, 63°, 63°

34 21°

35 30°

36 4,5 cm

37 Sim, pois nas circunferências secantes temos: $|r_1 - r_2| < d_1 < r_1 + r_2$

Desafio: **a)** $x + y + z = 90°$
b) sim, pois:
med($B\hat{O}C$) + $2y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ med($B\hat{O}C$) = $2(x + z)$

A profecia

Egidio Trambaiolli Neto
São Paulo: FTD, 1996.
64 páginas

Nesse interessante livro, o autor narra a história de quatro amigos que deverão enfrentar um grande desafio: a queda de um asteroide que ameaça extinguir a vida no planeta Terra. Será que eles conseguirão usar seus conhecimentos matemáticos e salvar o planeta? O livro traz um suplemento com atividades.

REPRODUÇÃO

Geometria na Amazônia

Ernesto Rosa Neto
São Paulo: Ática, 2002.
112 páginas

Nesse livro, o autor narra as aventuras vividas por André e Isabela na Amazônia. Nessa viagem, eles embarcaram no monomotor pilotado por Turuna e mal imaginavam o que os aguardava. Eles fazem novos amigos, os irumuaras, e aprendem muito com eles. O livro também apresenta várias atividades.

REPRODUÇÃO

Matemática e *origami*: trabalhando frações

Eliane Moreira da Costa
Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
40 páginas

A autora relaciona, de forma prática e interessante, frações e *origami*, a maravilhosa arte da dobradura praticada no Japão. Acompanhar as transformações do papel em objetos e formas é a proposta desse livro. As atividades apresentadas enriquecem os conhecimentos matemáticos e divertem.

REPRODUÇÃO

BIBLIOGRAFIA

Almanaque Abril 2013: Brasil. São Paulo: Abril, 2013.

Asger Aaboe. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Bernard H. Gundlach. *Números e numerais*. São Paulo: Atual, 2005. (Tópicos de história da Matemática para uso em sala)

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brian Bolt. *Actividades matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991.

Carl Benjamim Boyer. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 2012.

Constance Kamii. *Reinventando a Aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1995.

Delia Lerner Zunino. *A Matemática na escola*: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 2003.

Dicionário Enciclopédico Tudo. São Paulo: Nova Cultural, 1979.

Dione Lucchesi de Carvalho. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2009.

Elon Lages Lima. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

Ernesto Rosa Neto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 2010.

George Polya. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Georges Ifrah. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

______. *Os números*: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1998.

Howard Eves. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

Luiz Márcio Imenes. *A numeração indo-arábica*. São Paulo: Scipione, 1990. (Coleção Vivendo a Matemática)

Luiz Roberto Dante. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

Luzia Faraco Ramos. *O que fazer primeiro?* São Paulo: Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática)

Malba Tahan. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

______. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2012.

______. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

Maria Cristina S. A. Maranhão. *Matemática*. São Paulo: Cortez, 1994.

Marilia Centurión. *Conteúdo e metodologia da Matemática*: números e operações. São Paulo: Scipione, 1998.

Martin Gardner. *Matemática, magia e mistério*. Trad. Jorge Lima. Lisboa: Gradiva, 1991.

Milton Zaro. *Matemática experimental*. São Paulo: Ática, 1996.

Oscar Guelli. *Contando a história da Matemática*. São Paulo: Ática, 1999.

Paul Karlson. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

Pierre Berloquin. *100 jogos geométricos*. Lisboa: Gradiva, 2005.

Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática.

Rômulo C. Lins; Joaquim Gimenez. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LISTA DE SIGLAS

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

EPCar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar – Minas Gerais

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática

Canguru: Associação Canguru sem Fronteiras

Suplemento com orientações para o professor

8º ano

Sumário

Orientações gerais

Orientações para o desenvolvimento dos capítulos

Orientações gerais

APRESENTAÇÃO

Professor

Esta coleção tem como objetivo principal servir de apoio didático para suas aulas. No Guia Didático (Manual do Professor) você encontra algumas reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática na Escola Básica.

Observe que falamos de "ensino e de aprendizagem", separadamente, sem o hífen muitas vezes utilizado: ensino-aprendizagem. Entendemos que são processos que se articulam, mas são distintos – processo de ensino + processo de aprendizagem. O ensino pode ocorrer sem que ocorra a aprendizagem e a aprendizagem pode ocorrer sem que ocorra o ensino. Na escola, buscamos sempre que esses dois processos andem juntos, se completem, e esse pressuposto guia a organização desta coleção. Lembramos você, professor, que a escolha do livro didático é muito importante, e que deve ser feita sempre a partir do conhecimento de sua realidade escolar. E já que escolheu trabalhar com esta coleção, queremos ajudá-lo a atingir seus objetivos didáticos, valorizando sua autonomia didática na organização e gestão de suas aulas.

Com isso, o papel do professor – seu papel – é de fundamental importância. E nosso papel, oferecendo esta coleção como ferramenta de trabalho, é fomentar situações que lhe permitam sempre enriquecer suas aulas e, em consequência, favorecer as condições de aprendizagem dos seus alunos.

Neste guia trataremos de aspectos da abordagem dos conteúdos, do uso de calculadoras e *softwares*, mas também do uso de materiais concretos, sempre no intuito de enriquecer a gama de materiais didáticos disponíveis. Um tópico importante para reflexão é a avaliação da aprendizagem: vamos articular os objetivos gerais da aprendizagem com a ideia de avaliação e os possíveis instrumentos a serem utilizados. Apresentaremos também sugestões de leituras que permitirão a você, professor, aprofundar-se em suas reflexões.

O professor é o grande mediador na relação entre o aluno e a Matemática escolar: ele planeja, organiza, elabora as situações de aprendizagem, faz a gestão dessas situações, sempre buscando que seus alunos construam conhecimentos que lhes ajudarão em situações presentes e futuras, tanto no âmbito escolar como em suas vidas fora dos muros da escola. Não podemos esquecer também que o objetivo da aprendizagem escolar é a formação humana integral e que por esse motivo é necessário também levar em consideração a vida pessoal e profissional dos alunos. Ferreira (2006)[1] defende que a escola deve promover o desenvolvimento humano, conectando todos os conhecimentos, sejam de ordem cotidiana, sejam de ordem científica. Na organização desta coleção, tanto na parte destinada ao aluno como na parte específica para o professor, assumimos também essa defesa.

Para construir este Guia Didático, visando auxiliar na utilização desta coleção, baseamo-nos nos princípios da Educação Matemática, que é uma área que estuda os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, ou seja, partimos da compreensão de que a Matemática feita pelos matemáticos é diferente da matemática a ser trabalhada na escola.

---

[1] FERREIRA, L. R. Matemática Escolar: conceitos do cotidiano na vida profissional. In: *ZETETIKÉ*, v. 14, n. 26. jul./dez. FE/Unicamp. 2006.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012)[2], os estudos feitos no campo da Educação Matemática têm como perspectiva "o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor" (p. 4). Nesse sentido, esta coleção visa tal formação e considera que não se pode confundir a aplicação de algoritmos com o fazer matemático, pois a Matemática vai muito além. Dessa forma, apresentamos a Matemática escolar de forma que o aluno possa crescer em sua aprendizagem, aprender a pensar matematicamente, resolver problemas diversos, mas sempre no espectro da Matemática escolar.

Neste guia, convidamos você a refletir conosco sobre o "como trabalhar" com os conteúdos da Matemática escolar selecionados para cada ano das séries finais do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS GERAIS DA COLEÇÃO

Ao escolhermos e organizarmos os conteúdos a serem abordados ao longo dos quatro anos desse ciclo escolar, tivemos a preocupação de proporcionar aos alunos as melhores condições para construção dos conhecimentos matemáticos esperados para essa faixa de escolaridade. Pautamo-nos nos objetivos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998)[3], que pode ser consultado a qualquer momento por todos os que se interessam e se preocupam com o ensino e a aprendizagem nessa área do saber.

Dentre os objetivos gerais para o Ensino Fundamental, anunciados nos PCN, destacamos três deles:

- utilizar as diferentes linguagens – verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar as produções culturais e usufruir delas, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Fundamentados nesses objetivos (sem esquecer os demais, logicamente) e nos anunciados para cada ciclo do Ensino Fundamental, adotamos nesta coleção, o objetivo principal de desenvolver as competências necessárias para a aprendizagem da Matemática e para a formação integral do aluno, tal como abordamos na apresentação da obra. Para isso, buscamos construir elementos que permitam desenvolver o pensamento e o raciocínio matemático, construindo habilidades para a resolução de problemas, para a comunicação matemática e para a análise críticas de situações diversas do cotidiano.

ORGANIZAÇÃO

Esta coleção é organizada em quatro volumes, que são dispostos em capítulos e tópicos. O tema do capítulo, apresentado em página dupla, permite ao professor provocar questionamentos sobre o que será desenvolvido, por meio de associações com situações da realidade.

---

[2] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª. edição revisada. Campinas: Editores Associados, 2012.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

A abertura de cada capítulo sempre traz uma proposta de questionamento no quadro "É hora de observar e discutir". Em seguida, o capítulo apresenta a seção "Trocando ideias", na qual o tema é abordado por meio de exemplos de aplicação, com contextos de situações da realidade como também da própria matemática.

Essa forma de primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado permite ao professor inserir atividades diversas a cada capítulo: pesquisas, jogos, entre outras opções. É também uma oportunidade para desencadear um debate com os alunos, visando identificar os conhecimentos prévios para que estes sejam o ponto de partida para a construção de novos saberes.

Um exemplo é a abordagem das operações com números naturais: os alunos já possuem algum conhecimento construído ao longo dos anos anteriores e, retomá-los, permite ao professor fazer um trabalho mais significativo para o aluno.

Após a abertura e a seção "Trocando ideias", seguem os tópicos, que desenvolverão o conteúdo organizado de forma que o aluno aprenda paulatinamente. O número de tópicos varia a cada capítulo. Nesses tópicos são apresentados definições, propriedades, exemplos e situações que permitem maior detalhamento, para em seguida propor as atividades a serem resolvidas pelos alunos. Em alguns tópicos, são apresentadas também as seções "Lendo e aprendendo" e "Um pouco de história", com o objetivo de enriquecer a aprendizagem.

Os capítulos são finalizados com atividades que permitem ao aluno um aprofundamento – "Trabalhando os conhecimentos adquiridos". A seção "Resolvendo em equipe" traz um problema a ser resolvido pelos alunos organizados em grupos, com orientação para as etapas de resolução: interpretação e identificação de dados, plano de resolução, resolução, verificação, apresentação.

O trabalho em equipe é muito importante sob diversos pontos de vista: permite ao aluno aprender pela troca com os colegas; explicitar seus conhecimentos e dúvidas, facilitando a ação do professor, validar o raciocínio construído por meio do diálogo com os colegas da equipe. Além disso, saber trabalhar em equipe é uma competência exigida nas mais diversas profissões de diferentes áreas.

O uso de tecnologias é uma prerrogativa do professor e uma realidade no mundo de hoje. Algumas atividades propostas na coleção orientam para o uso de calculadoras. É importante que os alunos se apropriem de seu uso, utilizando-as como ferramenta para descoberta de estratégias na resolução das atividades propostas – estratégias distintas daquelas apresentadas na coleção. Valoriza-se assim também o desenvolvimento da criatividade, entre outras habilidades e competências visadas ao longo da vida escolar do aluno.

MATEMÁTICA ESCOLAR

Usualmente lemos ou escutamos frases como "aprender matemática é importante para o desenvolvimento do raciocínio", e outras com os mesmos pressupostos. Realmente, essa é uma verdade, que, para ser compreendida, precisa ser mais bem analisada. Em pesquisa realizada, Maciel (2009)[4] comprova a importância da Matemática na formação do cidadão. A autora afirma:

> *Desse estudo concluiu-se que o ensino da Matemática é um dos elementos fundamentais para a formação social e intelectual do aluno, fazendo deste um ser humano dotado de conhecimento, possuidor da capacidade de evoluir culturalmente, se tratando de um cidadão apto e preparado para lidar com as mudanças da sociedade. Assim sendo imprescindível o desenvolvimento da autonomia, da criticidade, da criatividade e da capacidade de argumentação, assim se comprovou a importância do ensino da Matemática como componente curricular. (p. 1)*

---

[4] MACIEL, M. V. A importância do ensino da Matemática na formação do cidadão. In: *Revista da Graduação*. EdiPUCRS. 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/6058>. Acesso em: maio 2015.

A Matemática escolar difere da Matemática acadêmica pelo grau de profundidade da abordagem: a Matemática feita pelos matemáticos tem características que não se adequam às atividades para descoberta e aprendizagem. O conhecimento matemático passa, assim, por transformações que resultam em um conjunto de saberes escolares, acessíveis aos alunos. É o que Chevallard (1991)[5] chama de transposição didática: toda transformação sofrida por um saber para que este se adapte a uma instituição (nesse caso, a escola).

Tais transformações são demandadas e trabalhadas pelos que concebem currículos e propostas curriculares, pelas instituições de ensino, pelos autores de livros didáticos, pela sociedade, pelos pais etc. Os resultados são apresentados nas propostas curriculares, nos livros didáticos, e são trabalhados pelos professores em sua sala de aula, completando o ciclo de transformações: de saber científico a saber ensinado.

Os conteúdos abordados nesta coleção encaixam-se nessa perspectiva: fazem parte do conjunto de conteúdos da Matemática escolar, da Matemática a ser aprendida pelos alunos durante sua escolaridade, sem perder de vista o saber de referência, ou seja, a Matemática em sua dimensão de saber científico.

APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A Matemática trabalhada no Ensino Fundamental não tem um fim em si mesma: além de aprofundar e sistematizar aprendizagens anteriores, abre também as portas para novas aprendizagens, considerando as diversas áreas do saber, contribuindo para o desenvolvimento intelectual do aluno. O conhecimento matemático é, assim, o objeto de estudo nas aulas de Matemática, para que possa ser a ferramenta de trabalho tanto na resolução de problemas matemáticos como na construção de novos conhecimentos oriundos tanto da ciência como do cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil 1998) afirmam que "a seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos" (p. 49). Consideram-se aqui conceitos, procedimentos e atitudes.

Nesta coleção, a seleção dos conteúdos foi feita nessa perspectiva, e as abordagens propostas pressupõem desenvolvimento de atitudes importantes na formação do aluno. Escolhemos abordar conceitos e procedimentos (seleção e abordagem) tanto como forma de aprofundamento, de revisita aos conhecimentos prévios dos alunos, como iniciando a construção de novos conhecimentos a serem consolidados em anos posteriores de escolaridade.

O professor pode acrescentar atividades, questionamentos, de modo a atender as especificidades de suas turmas: o livro didático nunca pode ser uma amarra para o professor, deve ser um facilitador de seu trabalho. O Guia Didático traz diversas sugestões que o professor poderá ou não utilizar, sempre a partir do conhecimento de seus alunos e do currículo da escola. A busca é e será sempre por um aprendizado não mecanizado, um aprendizado que permita a construção de significados e, portanto, de articulações entre conteúdos, áreas da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

---

5 CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 1 – Números naturais e sistemas de numeração Sistemas de numeração Sistema de numeração decimal Os números naturais Igualdade e desigualdade A reta numérica e os números naturais Leitura e escrita de um número natural	**Capítulo 1 –** Números inteiros Números inteiros Reta numérica Módulo de um número inteiro Números opostos ou simétricos Comparação de números inteiros Adição de números inteiros Subtração de números inteiros Multiplicação de números inteiros Divisão exata de números inteiros Potenciação em que a base é um número inteiro Raiz quadrada exata de números inteiros Expressões numéricas	**Capítulo 1 –** Números reais Números naturais, números inteiros e números racionais Números irracionais Números reais	**Capítulo 1 –** Potenciação e radicais Potência de um número real com expoente inteiro Raiz enésima de um número real Simplificação de radicais Radicais semelhantes Adição e subtração de radicais Multiplicação de radicais Divisão de radicais Potenciação e radiciação de radicais
Capítulo 2 – Operações com números naturais Adição com números naturais Algumas propriedades da adição Subtração com números naturais Relação fundamental da subtração Expressões numéricas com adições e subtrações Multiplicação com números naturais Algumas propriedades da multiplicação Divisão exata com números naturais Expressões numéricas com as quatro operações Divisão não exata	**Capítulo 2 –** Números racionais Números racionais Representação dos números racionais na reta numérica Módulo de um número racional Oposto de um número racional Comparação de números racionais Adição e subtração de números racionais Multiplicação de números racionais Divisão de números racionais Potenciação de números racionais Raiz quadrada de números racionais Expressões numéricas	**Capítulo 2 –** Potenciação e radiciação de números reais Potenciação Radiciação	**Capítulo 2 –** Equações do 2º grau Equação do 2º grau com uma incógnita Raiz de uma equação do 2º grau Resolução de equações do 2º grau Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau Resolução de problemas Sistemas de equações

🟨 Números e operações
🟧 Álgebra
🟦 Geometria
🟩 Tratamento da informação
🟪 Grandezas e medidas

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 3 – Outras operações com números naturais Potenciação com números naturais Propriedades da potenciação Radiciação de números naturais Expressões numéricas com números naturais	**Capítulo 3 –** Expressões algébricas e sentenças matemáticas Expressões algébricas Valor numérico de uma expressão algébrica Termos algébricos Sentenças matemáticas	**Capítulo 3 –** Monômios e polinômios Expressões algébricas Monômio Adição e subtração de monômios Multiplicação de monômios Divisão de monômios Potenciação de monômios Polinômio Adição de polinômios Subtração de polinômios Multiplicação de polinômios Divisão de polinômios	**Capítulo 3 –** Função afim Ideia de função Representação gráfica de uma função Função afim
Capítulo 4 – Figuras geométricas espaciais Sólidos geométricos Poliedros Corpos redondos Planificação da superfície de sólidos geométricos Vistas	**Capítulo 4 –** Equações do 1º grau com uma incógnita Equações Raiz de uma equação Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita Resolução de problemas	**Capítulo 4 –** Produtos notáveis e fatoração Produtos notáveis Fatoração	**Capítulo 4 –** Funções quadráticas Função quadrática Gráfico de uma função quadrática Ponto de mínimo e ponto de máximo de uma função quadrática
Capítulo 5 – Múltiplos e divisores Múltiplos de um número natural Divisores de um número natural Critérios de divisibilidade Número 1, números primos e números compostos Decomposição em fatores primos Máximo divisor comum (mdc) Mínimo múltiplo comum (mmc)	**Capítulo 5 –** Inequações do 1º grau com uma incógnita Desigualdades Inequações equivalentes Resolução de uma inequação do 1º grau	**Capítulo 5 –** Retas e ângulos Retas Segmento de reta Ângulo Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	**Capítulo 5 –** Estatística e probabilidade Processo estatístico Construção de gráficos Determinação de parâmetros Probabilidade

🟨 Números e operações

🟧 Álgebra

🟦 Geometria

🟩 Tratamento da informação

🟪 Grandezas e medidas

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 6 – Frações A ideia de número fracionário Leitura de frações Comparando frações com o inteiro Número misto Frações equivalentes Simplificação de frações Comparação de frações Fração de uma quantidade Adição e subtração de frações Multiplicação de frações Divisão de frações Potenciação e raiz quadrada de frações Expressões numéricas	**Capítulo 6 –** Ângulos O ângulo e seus elementos Medida de ângulo Transformação de unidades Operações com medidas de ângulos Ângulos congruentes Ângulos adjacentes Bissetriz de um ângulo Ângulos complementares Ângulos suplementares Ângulos opostos pelo vértice	**Capítulo 6 –** Polígonos e simetria Polígonos Diagonais de um polígono Ângulos internos e ângulos externos de um polígono Simetria	**Capítulo 6 –** Segmentos proporcionais e semelhança Razão entre segmentos e segmentos proporcionais Teorema de Tales Teorema da bissetriz interna Semelhança Triângulos semelhantes Homotetia
Capítulo 7 – Números decimais Décimos, centésimos e milésimos Leitura dos números decimais Comparação de números decimais Adição e subtração com números decimais Multiplicação com números decimais Divisão com números decimais Decimais exatos e dízimas periódicas Expressões numéricas com números decimais	**Capítulo 7 –** Razão Razão Razão entre grandezas de mesma natureza Razão entre grandezas de naturezas diferentes	**Capítulo 7 –** Frações algébricas e equações fracionárias Frações algébricas Simplificação de fração algébrica Redução de frações algébricas ao mesmo denominador Adição e subtração de frações algébricas Multiplicação de frações algébricas Divisão de frações algébricas Equações fracionárias	**Capítulo 7 –** Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas Projeções ortogonais Triângulo retângulo Teorema de Pitágoras e aplicações Razões trigonométricas no triângulo retângulo As razões trigonométricas de 30°, 45° e 60° Tabela de razões trigonométricas Resolução de problemas
Capítulo 8 – Porcentagem, possibilidades e Estatística Porcentagem Cálculo do número de possibilidades Estatística	**Capítulo 8 –** Probabilidade e Estatística O que é probabilidade? Cálculo de probabilidades Estatística Média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda	**Capítulo 8 –** Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas Par ordenado Equação do 1º grau com duas incógnitas Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas Resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas	**Capítulo 8 –** Circunferência, arcos e relações métricas O comprimento da circunferência Medida de um arco de circunferência Relações métricas em uma circunferência

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 9 – Figuras geométricas planas Representação de ponto, reta e plano Semirreta e segmento de reta Ângulos Posições entre duas retas no plano Polígonos Triângulos Quadriláteros Circunferência e círculo	**Capítulo 9 –** Proporção Proporção Propriedade fundamental das proporções Sequências de números diretamente proporcionais Sequências de números inversamente proporcionais	**Capítulo 9 –** Estatística e probabilidade Estatística Gráficos de segmentos e de barras Gráfico de setores Cartograma e pictograma Probabilidade	**Capítulo 9 –** Polígonos regulares Polígonos Polígonos regulares Relações métricas nos polígonos regulares
Capítulo 10 – Medidas de comprimento e de tempo Metro Conversão de unidades Perímetro de um polígono Horas, minutos e segundos	**Capítulo 10 –** Grandezas e regra de três Grandezas proporcionais Regra de três simples Regra de três composta	**Capítulo 10 –** Triângulos Triângulo Classificação de triângulos Cevianas notáveis Casos de congruência de triângulos Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo Propriedades dos triângulos isósceles Propriedades dos triângulos retângulos	**Capítulo 10 –** Área de figuras planas Área Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo Área do triângulo Área do trapézio e do losango Área de um polígono regular Área do círculo
Capítulo 11 – Medidas de superfície e de volume Metro quadrado Área do retângulo e área do quadrado Metro cúbico Volume do paralelepípedo e do cubo	**Capítulo 11 –** Porcentagem e juro simples Porcentagem Cálculo de acréscimos e descontos Juro simples	**Capítulo 11 –** Quadriláteros Quadriláteros Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo Paralelogramos Trapézios	**Capítulo 11 –** Matemática comercial e financeira Operações sobre mercadorias Juro simples Juro composto
Capítulo 12 – Medidas de capacidade e de massa Litro Quilograma		**Capítulo 12 –** Circunferência e círculo Circunferência e círculo Posições de um ponto em relação a uma circunferência Posições de uma reta em relação a uma circunferência Posições relativas de duas circunferências Segmentos tangentes Arco de circunferência e ângulo central Ângulo inscrito	

🟨 Números e operações
🟧 Álgebra
🟦 Geometria
🟩 Tratamento da informação
🟪 Grandezas e medidas

No que se refere aos conteúdos relacionados ao bloco de conhecimentos **Números e Operações**, espera-se que o aluno perceba seus diferentes usos e significados ao longo de sua escolaridade, ampliando o conhecimento construído em anos anteriores. As operações e suas propriedades são trabalhadas de forma gradativa, a cada conjunto numérico abordado: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

A apresentação dos conteúdos se inicia sobre a abordagem dos sistemas de numeração, para depois apresentar o sistema de numeração decimal e o conjunto dos números naturais. A partir daí, apresentam-se os demais conteúdos, sistematicamente e sem que cada tópico ou capítulo esgote o conteúdo. O objetivo principal é a atribuição de significados: o cálculo é importante, mas a compreensão dos resultados obtidos na resolução de um problema, ou mesmo ao final de um procedimento, deve ser a meta principal do processo de ensino e de aprendizagem.

Os PCN de Matemática para o terceiro e quarto ciclos (Brasil, 1998), orientam para que

> *O trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações. (p. 95-96)*

Nossa opção pela atribuição de significados se reflete não apenas ao longo dos capítulos, mas também nas orientações didáticas presentes na parte específica deste manual.

O campo da **Álgebra** é abordado a partir do volume destinado ao 7º ano, buscando uma articulação com o campo de Números e Operações: inicia-se com as expressões algébricas. Ao longo dos quatro anos finais do Ensino Fundamental, a Álgebra caracteriza-se como um espaço bastante significativo para o desenvolvimento dos processos de abstração e de generalização, o que é assinalado nos PCN.

Nesse aspecto, destaca-se a importância de que o ensino dos conteúdos desse bloco não se limite à repetição de algoritmos. É necessário que o aluno desenvolva ferramentas para resolver problemas: os exercícios de fixação são importantes, mas não devem se constituir em abordagem principal.

A formalização excessiva também é evitada ao longo desta coleção: a construção dos conhecimentos se faz paulatinamente. Assim, os primeiros contatos com a Álgebra acontecem no 7º ano (nesta coleção) e, assim como para os demais blocos de conteúdo, os temas não se esgotam, de forma a contribuir com o amadurecimento dos alunos para que, ao terem contato com a formalização, possam atribuir significados a ela.

Os PCN apresentam (p. 116) uma síntese com os significados da Álgebra a serem desenvolvidos nos ciclos finais do Ensino Fundamental:

Álgebra no Ensino Fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funcões	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variações de grandezas	Resoluções de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

A percepção de padrões contribui bastante para a compreensão dos procedimentos, por exemplo, para a operação entre monômios, entre polinômios, para o desenvolvimento de expressões algébricas, para o trabalho com as funções: a introdução das letras como variável, como incógnita ou como símbolo pode ser trabalhada a partir da observação de padrões, antes que se apresentem os algoritmos.

A utilização de calculadoras, planilhas e *softwares* para o ensino da Matemática também favorece a construção de significados: a construção de gráficos, por exemplo, pode ser extremamente favorecida pelo uso de ambiente computacional.

O papel da **Geometria** é fundamental na construção do conhecimento matemático pelo aluno. O conhecimento nessa área é trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade, e se aprofunda no Ensino Fundamental II, em uma articulação desejável entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial. A utilização de *softwares* e de materiais concretos permite facilitar a compreensão pelo recurso da visualização, da manipulação das figuras geométricas, permite avançar no estudo do espaço, das formas, das grandezas relacionadas e suas medidas. As construções com régua e compasso ampliam e aprofundam as relações construídas pelos alunos.

Nesse contexto se insere a abordagem das transformações geométricas, do estudo das vistas e da percepção espacial, dos deslocamentos no plano e sistema cartesiano. A resolução de problemas é um cenário potencial para essa abordagem. Os primeiros passos na argumentação e na demonstração são dados também nesse cenário da Geometria. No entanto, deve-se evitar ainda nessa fase de escolaridade o excesso de formalização: a construção do pensamento geométrico é um processo não linear, que está em constante crescimento ao longo da vida escolar do aluno.

O campo designado por **Tratamento da Informação** é bastante propício ao desenvolvimento de atividades lúdicas e de atividades que trabalhem profundamente com a criticidade dos alunos: são trabalhadas no Ensino Fundamental algumas ferramentas que auxiliam na compreensão de notícias, de dados fornecidos pelas diversas mídias, de dados referentes à vida cotidiana pessoal do aluno e da família. Amplia-se, assim, um cenário de construção da cidadania.

A coleta de dados e sua organização em gráficos e tabelas são uma etapa anunciada pelas pesquisas na área como fundamental para que os alunos aprendam a mobilizar correta e adequadamente seus conhecimentos para análise estatística desses dados coletados. O objetivo será sempre responder a um questionamento por meio da análise desses dados.

Aprofunda-se também a discussão que permite distinguir o aleatório do determinístico. Nesse sentido, o estudo da probabilidade por meio de experimentações e simulações é bastante favorecido. O professor tem a possibilidade de utilizar tanto materiais concretos (jogos ou mesmo materiais construídos com os alunos, que possam ser utilizados para realização de sorteios aleatórios e simulações) como *softwares* livres (por exemplo, o GeoGebra). O objetivo deve ser a construção de estimativas plausíveis para resultados de experimentos aleatórios.

A leitura estatística e probabilística dos fatos que nos cercam fornece importantes elementos para decisões no campo pessoal, nutricional, de investimentos, de segurança, de confiabilidade em processos de qualidade, em processos de pesquisa de opinião, entre muitas outras. A percepção e a apreensão da variação dos dados coletados nos diversos contextos que se quer analisar são objetivos centrais no estudo dos conteúdos ligados ao Tratamento da Informação.

Os conteúdos relacionados ao campo das **Grandezas e Medidas** podem ser abordados em articulação com os demais campos da Matemática escolar. Contextos ligados ao cotidiano do aluno fornecem elementos para que o professor possa trabalhar tais conteúdos em sala de aula, sem desvincular a Matemática da realidade do aluno. A compreensão das diversas grandezas e das medidas que se associam, destacando a discussão sobre as mudanças de unidades e os efeitos de tais mudanças na análise dos resultados observados na resolução das atividades propostas, é fundamental para a aprendizagem conceitual da Matemática. Nesse sentido, destaca-se o papel do trabalho com os instrumentos de medida.

Os PCN destacam o importante papel do estudo das Grandezas e Medidas, uma vez que favorece articulações "intra" e "extra" Matemática. Destacam sua utilização em contextos diversos e que permitirão que sejam retomados, discutidos e ampliados procedimentos de medidas, discutindo a comparação com padrões determinados – geométricos ou não:

> *(...) Além disso, como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais (utilização de bússolas e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas etc.). As medidas também são necessárias para melhor compreensão de fenômenos sociais e políticos, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos Temas Transversais. (p. 128)*

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A abordagem de episódios da História da Matemática permite aos alunos a percepção de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada. Ela se desenvolveu ao longo do tempo e ainda está em desenvolvimento. Pequenos textos que trazem informações sobre fatos e pessoas ligadas ao seu desenvolvimento permitem ao professor promover discussões e sugerir pesquisas aos alunos, com objetivo de ampliar os horizontes da aprendizagem matemática.

Por exemplo, no estudo de conteúdos da Geometria, o desenvolvimento de pesquisas que permitam conhecer elementos sobre sua história, sobre os locais nos quais a Geometria se desenvolveu, sobre as características sociais, geográficas, pode contribuir para a compreensão do contexto no qual o objeto matemático em estudo se desenvolveu.

A aprendizagem matemática tem, assim, como ferramenta didática disponível, a história da Matemática, junto à resolução de problemas à modelagem. Não cabe ao livro didático fazer um estudo aprofundado da história, mas sim promover elementos que servirão como ponto de partida para complementação e aprofundamento dos conteúdos abordados.

AS TECNOLOGIAS E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A utilização das diversas tecnologias de aprendizagem na aula de Matemática permite uma expansão das oportunidades de construção de conhecimento. Particularmente citando a calculadora e os *softwares* para aprendizagem da Matemática, que permitem a ampliação na busca de novas estratégias para resolução de problemas.

> *A utilização e a exploração de aplicativos e/ou softwares computacionais em Matemática podem desafiar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos, conduzindo-o a uma mudança de paradigma com relação ao estudo, na qual as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas passem a ser objeto de estudo. (AGUIAR, 2008, p. 64)*[6]

A prontidão para a atuação profissional compreende o conhecimento de diversas tecnologias e linguagens, e a escola é um dos ambientes mais propícios para a construção de tal conhecimento. Não cabe ao Ensino Fundamental o preparo de mão de obra especializada, como podemos encontrar nos PCN. No entanto, "é papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola

---

[6] AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. In: *VÉRTICES*, v. 10, n. 1/3, jan./dez. 2008. Disponível em: <www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/outros/Aguiar_Rosane.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

e sociedade, conhecimento e trabalho, e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres". (p. 27).

AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

A avaliação é um momento fundamental no processo de ensino. Ela é um instrumento norteador do trabalho docente: "O que avaliar? Como avaliar?".

Esses questionamentos permitem ao professor identificar possíveis dificuldades dos alunos, podendo construir atividades para sua superação. A avaliação permite rever e redesenhar os caminhos para que a aprendizagem seja alcançada: e não vamos confundir a atribuição de uma nota com o acompanhamento do processo de aprendizagem visado.

Faz-se necessário o conhecimento dos alunos, de suas características relativas à aprendizagem matemática. É preciso identificar elementos que permitam ao professor estabelecer e reavaliar metas, processos, planejar atividades adequadas para a introdução, para o aprofundamento e para a avaliação da aprendizagem desses alunos. Cada um deles tem seu próprio ritmo que deve ser considerado: o tempo didático e o tempo cronológico não correm da mesma forma, o que muitas vezes explica dificuldades detectadas.

Não se trata de individualizar o ensino, mas de buscar as melhores formas de fazer a gestão das situações de aprendizagem e, em paralelo, das situações de avaliação. Estas acontecem continuamente, a cada aula, a cada momento.

Vários são os instrumentos que permitem ao professor obter as informações necessárias para o melhor planejamento, assim como atender à necessidade de quantificação da aprendizagem: atribuir uma nota ou um conceito. Destaca-se a importância da utilização de vários instrumentos simultaneamente, de forma a melhorar as oportunidades para que o aluno mostre efetivamente o que aprendeu (ou não aprendeu e precisa ser retomado pelo professor). Por exemplo: provas, relatórios, autoavaliação, trabalhos em equipe etc.

Cabe ao professor, a partir do conhecimento de suas turmas, escolher os instrumentos mais adequados aos objetivos fixados em seu plano de ensino. Algumas dessas medidas são subjetivas, mas os critérios a serem utilizados devem ser explicitados aos alunos.

Busca-se assim "uma proposta de avaliação flexível, contínua e formativa, identificando os principais problemas que interferem na obtenção de resultados, despertando o interesse dos alunos em relação à aplicação prática dos conhecimentos matemáticos adquiridos, bem como interpretar as informações coletadas na pesquisa de campo". (OLIVEIRA, 2012, p. 2)[7]

Destaca-se a necessidade de não limitar a avaliação aos aspectos cognitivos, uma vez que a formação do aluno deve ser a mais completa: aspectos comportamentais, atitudinais, também são considerados. Lembramos que um objetivo a ser fixado é o de uma educação democrática, inclusiva, e a avaliação tem papel fundamental nesse processo.

Para a elaboração do plano de avaliação, deve-se considerar os objetivos anunciados para cada unidade e o objetivo geral do ensino da Matemática em cada um dos níveis de escolaridade. Uma listagem desses objetivos permite sua operacionalização e, a partir daí, escolhem-se os melhores instrumentos.

---

[7] OLIVEIRA J. C. G. *Os novos paradigmas para uma avaliação do ensino matemático*. Disponível em: <www.uems.br/eventos/semana2012/arquivos/49_2012-09-28_15-29-18.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

Veja a seguir uma sugestão de listagem, que considera não apenas os aspectos cognitivos específicos, mas também os atitudinais. Observe que a construção da autonomia é um objetivo perene, que acompanha toda a formação do aluno.

Meu aluno é capaz de:

- "enfrentar" a resolução do problema;
- entender o contexto das atividades propostas;
- compreender o texto das atividades propostas;
- explicitar o problema com suas palavras;
- selecionar dados da questão de forma autônoma;
- fazer uso adequado de calculadora e outros materiais de forma a buscar soluções para o que é proposto de forma autônoma;
- resolver o problema;
- verificar se a solução é adequada;
- trabalhar em grupo de forma colaborativa;
- trabalhar individualmente com autonomia;
- utilizar corretamente a linguagem matemática.

É importante também lembrar que uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais auxilia na listagem dos objetivos tanto cognitivos como atitudinais.

FORMAÇÃO DO PROFESSOR — SUGESTÕES DE LEITURA E *SITES*

A. Sugestões de leitura:

BARBEIRO, Eulália da Conceição. *A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita: uma análise dos erros e das dificuldades de alunos de 7º ano de escolaridade*. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8318/1/ulfpie043292_tm.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

BERNAL, Márcia Maria. *Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/86993/205628.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 maio 2015.

BORRALHO, A.; BARBOSA, Elsa. *Pensamento algébrico e exploração de padrões*. Disponível em: <www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______. CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. *Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra*. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

BRANCO, Neusa Cristina Vicente. *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Disponível em: <repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

CAMPOS, Tania M. M.; SOUZA, Vera Helena G. de. *Resolução de desigualdades com uma incógnita: uma análise de erros*. Disponível em: <www.fisem.org/www/union/revistas/2008/14/Union_014_007.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

COLLARES, Bruno Marques; LIMA, Diego Fontoura. *Por que inverter o sinal da desigualdade em uma inequação?* Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE38.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. *O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do GeoGebra: um estudo com professores de Matemática*. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p246/23464>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______. *Desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica*. Disponível em: <www.redalyc.org/pdf/2912/291222099009.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

DAMBROS, Vanessa de Fátima Custódio; ARAÚJO, Viviane Raupp Nunes de. *O ensino de equações do primeiro grau: a busca pela superação da tricotomia entre aritmética, álgebra e geometria*. Disponível em: <www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2010/Educacao_em_Ciencias_e_Matematica/Trabalho/08_00_14_O_ENSINO_DE_EQUACOES_DO_PRIMEIRO_GRAU__A_BUSCA_PELA_SUPERACAO_DA_TRICOTOMIA_ENTRE_ARITMETICA,_ALGEBRA_E_GEOMETRIA.PDF>. Acesso em: 29 maio 2015.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. *Pensamento aritmético e pensamento algébrico no Ensino Fundamental*. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_Groenwald_Claudia.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

HUMMES, Viviane Beatriz; NOTARE, Marcia Rodrigues. *Aprendizagem significativa de equações do 1º grau: um estudo de caso com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental*. Disponível em: <file:///C:/Users/User/Downloads/420-2348-1-PB.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

JÚNIOR, Dárcio Costa Nogueira. *Ensino de razão e proporção na perspectiva curricular da rede*. Disponível em: <www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T8_CC1664.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

LIMA, Duílio Tavares de. *Fichas temáticas: resolvendo equações do 1º grau*. Disponível em: <www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20130919095224.pdf?PHPSESSID=5b59a548f19a92caf50a35dc8b2fb0d4>. Acesso em: 29 maio 2015.

LOPES, Celi Aparecida Espasadin. *A probabilidade e a estatística no currículo de Matemática do Ensino Fundamental Brasileiro***.** Disponível em: <www.ime.unicamp.br/lem/publica/ce_lopes/prob_est.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______; MEIRELLES, Elaine. *Estocástica nas séries iniciais*. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MAGALHÃES, Adil Ferreira. *Uma sequência de atividades para ensinar (e aprender) inequações*. Disponível em: <www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2013/Adil%20Ferreira.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MALAGUTI, Pedro Luiz; BALDIN, Yuriko. *Os números inteiros no Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MANGILI, Leonardo Milioli. *Os jogos e os números inteiros*. Disponível em: <www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000031/00003194.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MARTINI, Grasiela. *Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros*. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29143/000775907.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 maio 2015.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. *Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações*. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.021>. Acesso em: 29 maio 2015.

MEGID, M. A. B. A. Construindo Matemática na Sala de Aula: uma Experiência com os Números Inteiros. In: FIORENTINI, D. & MIORIM, M. A. (Org.) *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp – Cempem, 2001, p. 144-187.

MENEGAT, Maristela Ferrari. *Uma nova forma de ensinar razão e proporcionalidade*. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31572/000783440.pdf?...1>. Acesso em: 29 maio 2015.

MIYASAKI, Dirce Mayumi. *Modelagem matemática e educação ambiental: possibilidades para o Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/359-4.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

NETO, Francisco Tavares da Rocha. *Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/1440/1/2010_dis_ftrneto.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa.; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Álgebra e pensamento algébrico através da resolução de problemas*. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1318.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

POMMER, Wagner M. *Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em $\mathbb{Z}$*. Disponível em: <www.uems.br/eventos/encontromatematica/arquivos/44_2012-08-26_18-35-53.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SCHMITIZ, Ilda; SCHNEIDER, Deborah Sandra Leal Guimarães. *A leitura de mundo através da estocástica: um olhar crítico da realidade, através da mídia e das tecnologias*. Disponível em: <www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_ilda_schmitz.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SILVA, Ana Claudia da. *Dificuldades de aprendizagem na resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau*. Disponível em: <www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12008/AnaClaudiadaSilvaPetronilo.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SILVA, Maria José Ferreira da. *As concepções de números fracionários*. Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/def_mat_concepfracoes1.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______; ALMOULOUD, Saddo Ag. *As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte – todo*. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2105/1830>. Acesso em: 29 maio 2015.

SOUZA, Leandro de Oliveira; LOPES, Celi Aparecida Espasadin. *O ensino de estocástica por meio de simulação virtual*. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1021.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

B. *Sites*

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>.
- Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): <http://www.sbm.org.br/>.
- Portal do Professor – MEC: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>.
- Centro de Referência em Educação Mário Covas: <www.crmariocovas.sp.gov.br/>.

C. Laboratórios de Educação Matemática (fonte: <www.leoakio.com/laboratorio-de-matematica.html>.)

- UFRJ - LIMC - Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências: <http://limc.ufrj.br/>.
- UFF - Conteúdos Digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática e Estatística: <www.uff.br/cdme>.
- UFF - LEG - Laboratório de Ensino de Geometria: <www.uff.br/leg/>.

- UFF - LABEM - Laboratório de Educação Matemática: <www.uff.br/labem/>.
- UFSC - LEMAT - Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias: <http://mtm.ufsc.br/lemat/Lemat.html>.
- Unesp LEM - Laboratório de Ensino de Matemática - Rio Claro: <www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp/lem/>.
- Unesp/IBILCE - Laboratório de Matemática - Ribeirão Preto: <www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/>.
- USP - LEM - Laboratório de Ensino de Matemática: <www.ime.usp.br/lem/>.
- Feusp - Laboratório de Matemática: <www2.fe.usp.br/~labmat/>.
- UFU - LeMat - Laboratório de Matemática: <www.matematica.facip.ufu.br/laboratorio.html>.
- UFG - LEMAT – Laboratório de Educação Matemática: <www.mat.ufg.br/lemat/>.
- FURB - LMF - Laboratório de Matemática: <www.furb.br/lmf>.
- Unijuí - RS - Laboratório Virtual de Matemática: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/>.
- UFPE - PE - Laboratório de Ensino da Matemática: <www.dmat.ufpe.br/extensao/sala_de_jogos.htm>.

Além desses *links*, diversas revistas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática são disponíveis para acesso livre, *on-line*. Por exemplo, no Portal do Professor, o *link* <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/materiais.html> permite acessar artigos, livros, periódicos, entre outros recursos. Basta buscar por publicações relativas à Matemática: na busca pela ferramenta de pesquisa no- *site* você terá como resultado diversos *links* para ajudá-lo com materiais, leituras etc.

No *site* da SBEM, você tem acesso à *Educação Matemática em Revista* <www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr>, contendo artigos destinados ao professor que ensina Matemática nos diversos níveis de escolaridade. Também tem acesso ao anúncio dos eventos organizados.

No *site* da SBM, você tem acesso ao *link* para a *Revista do Professor de Matemática* <www.rpm.org.br/>, para a revista *Professor de Matemática OnLine* <http://pmo.sbm.org.br/pmo-h.html> e outras publicações.

D. Programas de Pós-graduação *Stricto Sensu* (Mestrado e Doutorado): com essa lista, o professor pode se informar sobre possibilidades de mestrado e/ou doutorado em áreas afins ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

A lista com os programas recomendados e reconhecidos pela CAPES pode ser encontrada no *site* <http://conteudoweb.capes.gov.br/conteudoweb/ProjetoRelacaoCursosServlet?acao=pesquisarIes&codigoArea=90200000&descricaoArea=&descricaoAreaConhecimento=ENSINO&descricaoAreaAvaliacao=ENSINO#>.

PROGRAMA	IES	UF
CIÊNCIA TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO	CEFET/RJ	RJ
CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO	IFSUL	RS
DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS	UFPA	PA
DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	UNESP/BAU	SP
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES	UESB	BA

PROGRAMA	IES	UF
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	UFSC	SC
EDUCAÇÃO E SAÚDE NA INFÂNCIA E ADOLESCÊNCIA	UNIFESP	SP
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS	UESC	BA
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFES	ES
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA	UFPR	PR
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFG	GO
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFPE	PE
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFRRJ	RJ
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	PUC/RS	RS
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - UFMT - UFPA - UEA	UFMT	MT
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS	UFPA	PA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UESC	BA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFJF	MG
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFOP	MG
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFMS	MS
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	USS	RJ
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UNESP/RC	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	PUC/SP	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UNIBAN	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA	UFSM	RS
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	UFPE	PE
EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA	UEM	PR
EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFG	GO
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UEPB	PB
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UEL	PR
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAC	AC
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAL	AL
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAM	AM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFC	CE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFCE	CE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFMA	MA
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFU	MG
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UEPB	PB
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	CEFET/RJ	RJ
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFRN	RN
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFPEL	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UCS	RS

PROGRAMA	IES	UF
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	FUPF	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	ULBRA	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNIFRA	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	FUFSE	SE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNICSUL	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFSP	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	UNIVATES	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	UFSCAR	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	UFRN	RN
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	UNICENTRO	PR
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	FURB	SC
ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRJ	RJ
ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRGS	RS
ENSINO EM EDUCAÇÃO BÁSICA	UERJ	RJ
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFES	ES
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFG	GO
ENSINO TECNOLÓGICO	IFAM	AM
ENSINO, HISTÓRIA E FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFABC	SP
FORMAÇÃO CIENTÍFICA, EDUCACIONAL E TECNOLÓGICA	UTFPR	PR
FORMAÇÃO DOCENTE INTERDISCIPLINAR	UNESPAR	PR
MULTIUNIDADES EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNICAMP	SP
PRÁTICAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA	CPII	RJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNIFRA	RS

Além desses, temos hoje no Brasil um mestrado profissional oferecido pela Sociedade Brasileira de Matemática, modalidade semipresencial.

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT): www.profmat-sbm.org.br/	SBM	RJ

Outra possibilidade de formação para o professor de Matemática vem nos cursos de especialização, com pelo menos 360 horas, e que podem ser desenvolvidos presencialmente ou em modalidade a distância (mas com avaliações presenciais, de acordo com a legislação brasileira). Você pode buscar os cursos oferecidos em sua região. A informação é facilmente obtida na internet.

Orientações para o desenvolvimento dos capítulos

CAPÍTULO 1

Números reais

Conteúdos abordados

Números naturais, números inteiros e números racionais (representação decimal e obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica); números irracionais; números reais

Objetivos

- Ampliar e consolidar os significados dos números naturais, inteiros e racionais.
- Identificar uma dízima periódica e obter sua fração geratriz.
- Compreender a noção de número irracional, refletir a respeito das propriedades do conjunto dos números irracionais, saber diferenciar um número irracional dos demais já estudados e mobilizar tais conhecimentos para a resolução de problemas.
- Compreender a ideia de conjunto dos números reais como sendo o resultado da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e mobilizar os conhecimentos construídos para a resolução de problemas.

Orientações

Explore com cuidado a revisão proposta no livro sobre os números naturais, inteiros e racionais. A fim de que ampliem o conceito que já têm de número, você pode explorar seus diferentes usos em contextos sociais.

A situação apresentada nas páginas de abertura do capítulo (**páginas 10** e **11**) possibilita a introdução da ideia do número π (pi) como a razão aproximada entre o comprimento de uma circunferência (pneus de bicicleta) e a medida de seu diâmetro (diâmetros externos dos pneus). Você pode propor aos alunos que meçam o comprimento e o diâmetro da circunferência de alguns objetos circulares (ver exemplos abaixo) e que depois dividam para observar que essa razão é sempre um valor próximo de 3,14, independentemente da circunferência considerada.

ACERVO DO BANCO CENTRAL DO BRASIL

H.KAN/SHUTTERSTOCK

NIKOLAY KULESHIN/SHUTTERSTOCK

A atividade 2 da **página 14** permite aos alunos refletir sobre propriedades que valem em determinado conjunto, mas que não valem em outro. Você pode ampliar essa atividade reproduzindo as afirmações a seguir na lousa e solicitando que identifiquem quais delas são verdadeiras e quais são falsas. Para as frases que são falsas, pode-se incentivá-los a apresentar um contraexemplo.

- Todo número inteiro tem antecessor e sucessor. *Resposta*: verdadeira
- A diferença entre dois números naturais é sempre um número natural. *Resposta*: falsa (contraexemplo $1 - 2 = -1$, e -1 não é um número natural)
- Há sempre um número racional entre dois números naturais. *Resposta*: verdadeira
- Existe número inteiro que não é natural. *Resposta*: verdadeira
- Não existem dois números inteiros cujo produto é um número natural. *Resposta*: falsa (-1 e -2 são números inteiros e $(-1) \cdot (-2) = 2$, que é um número natural)
- Existe número racional que não é inteiro. *Resposta*: verdadeira

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 15**) trata da relação entre Matemática e Música por meio do instrumento conhecido como "monocórdio de Pitágoras". É importante que os alunos observem que cada nota musical está associada a um número racional e reflitam sobre a possibilidade de os números estarem presentes onde eles menos esperam.

Observe a seguir uma ilustração da descoberta de Pitágoras a respeito das proporções das consonâncias musicais presentes na obra *Theorica musicae* (1492), de autoria de Franchinus Gafurius, e também a capa da primeira obra de Descartes, *Compendium musicae*, escrita com o objetivo de descrever as proporções matemáticas presentes em vibrações harmônicas de cordas de instrumentos musicais:

INDIANA UNIVERSITY, ESTADOS UNIDOS

Xilogravura mostra Pitágoras com sinos, uma espécie de gaita de vidro, um monocórdio e um órgão.

RENATI
DES-CARTES
MUSICÆ
COMPENDIUM

PETRUCCI MUSIC LIBRARY

Capa da obra *Compendium musicae*, de Descartes.

Ao trabalhar a representação decimal dos números racionais, é importante que fique claro para os alunos que tal representação será finita ou infinita periódica. Pode-se comentar com eles a possibilidade de decidir se a representação decimal de uma fração será finita ou infinita periódica, sem ter que efetuar a divisão.

- A representação decimal de uma fração será finita quando for possível obter uma fração equivalente à fração original cujo denominador seja uma potência de 10. Por exemplo, a representação decimal das frações $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$ e $\frac{7}{20}$ é finita, pois:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25; \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0{,}04 \text{ e } \frac{7}{200} = \frac{35}{1000} = 0{,}035$$

- A representação decimal de uma fração será infinita e periódica quando não for possível obter uma fração equivalente à fração original cujo denominador seja uma potência de 10. Por exemplo, a representação decimal das frações $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{7}{11}$ é infinita e periódica. Você pode, nesse caso, propor aos alunos que tentem encontrar uma fração equivalente a essas cujo denominador seja uma potência de 10 para que percebam que isso não é possível.

Outra caracterização para esse critério é a seguinte:

- Se, ao decompor em fatores primos o denominador da fração, comparecerem somente potências de 2, de 5 ou de ambas, então a representação decimal da fração será finita.
- Se, ao decompor em fatores primos o denominador da fração, comparecer alguma potência com base diferente de 2 ou de 5, então a representação decimal da fração será infinita e periódica.

Você pode também ampliar a atividade 1 da **página 17** reproduzindo as afirmações a seguir na lousa e solicitando aos alunos que identifiquem quais delas são verdadeiras e quais são falsas.

- Todo número natural é racional. *Resposta*: verdadeira
- Entre dois números inteiros, sempre existe um número racional. *Resposta*: verdadeira
- Entre dois números naturais, não há um número racional. *Resposta*: falsa
- A diferença de dois números racionais pode não ser um número racional. *Resposta*: falsa
- Uma dízima periódica não é um número racional. *Resposta*: falsa
- O número $\frac{2}{17}$ tem representação decimal infinita e não periódica. *Resposta*: falsa

A atividade 5 da **página 17** permite aos alunos entrar em contato com uma ideia que eles deverão compreender bem em sua vida fora da escola (como é feito o cálculo do décimo terceiro salário). Sempre que possível, proponha situações envolvendo aspectos da educação financeira, pois, se bem escolhidas e exploradas, podem contribuir significativamente para a formação do aluno como cidadão.

O processo de obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica deve ser trabalhado de forma cuidadosa para que os alunos possam compreender o significado do que está sendo feito, e não apenas memorizar um processo que pode não fazer sentido para eles.

A atividade 2 da **página 19** explora o cálculo mental envolvendo números decimais. Pode-se sempre propor atividades dessa mesma natureza, pois isso poderá contribuir para que os alunos, aos poucos, ampliem seu repertório de estratégias de cálculo envolvendo esses números.

A atividade 4 da **página 19** também é importante, por levar os alunos a estabelecer conjecturas e a discutir Matemática por meio da observação de regularidades.

Há muito tempo, ficou claro para os matemáticos que as frações não eram suficientes para medir todas as grandezas, mesmo que fossem positivas. Assim, já na Antiguidade grega ficou comprovado que, por exemplo, o lado de um quadrado é incomensurável com sua diagonal, ou seja, que não existe um segmento, por menor que seja, que possa servir de unidade de medida comum ao lado e à diagonal de um mesmo quadrado de maneira que ambos sejam múltiplos inteiros dessa unidade. Tal constatação, ao longo da História, acabou por provocar a introdução dos números irracionais e a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. Se necessário, pode-se propor aos alunos que façam uma pesquisa a respeito da descoberta da existência de segmentos incomensuráveis e da crise que esse fato gerou na Matemática na Antiguidade. Pode-se orientá-los a buscar, principalmente, a contribuição de Eudoxo para a superação de tal crise e explorar a relação entre os segmentos incomensuráveis e os números irracionais.

Ao introduzir a noção de número irracional, fique atento para salientar aos alunos a diferença entre uma aproximação de um número irracional, digamos $\sqrt{2}$, dada por uma calculadora, e o próprio número $\sqrt{2}$. É fundamental oferecer aos alunos um esclarecimento a respeito desse aspecto para que eles não confundam o número $\sqrt{2}$ com uma de suas aproximações racionais, como, por exemplo, 1,414 ou 1,414214. Pesquisas mostram que é comum o aluno não diferenciar um número irracional de uma aproximação racional para ele. As atividades 2 e 3 da **página 21** podem auxiliar nessa discussão.

Aproveitando a seção *Lendo e aprendendo* (**página 21**) sobre o número π (pi), é possível solicitar aos alunos que, em duplas, façam uma pesquisa a respeito do histórico desse número, visando aprofundar as informações trazidas pelo livro e perceber que vários conceitos matemáticos se desenvolveram ao longo do processo de busca pelo valor exato de π (enquanto se pensava que isso era possível) e de aproximações mais precisas.

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 22**) sobre o número de ouro também pode ser aproveitada para aprofundar o que é trazido pelo livro. Pode-se pedir aos alunos que façam uma pesquisa e tragam fotos de obras de arte, construções ou de elementos da natureza nas quais a razão áurea esteja presente. De posse dessas fotos, pode-se propor aos alunos que atribuam uma legenda explicativa para elas e que organizem na escola uma pequena exposição, a fim de que os resultados obtidos sejam compartilhados com colegas e professores. Essa é uma atividade que pode ser realizada em parceria com o professor responsável pela disciplina de Arte.

A imagem a seguir é um exemplo de utilização de retângulos áureos (um retângulo *ABCD* é chamado áureo se possuir a seguinte propriedade: se extrairmos um quadrado *ABFE*, o retângulo *CDEF* será semelhante ao primeiro retângulo dado) em uma das obras mais famosas de Leonardo da Vinci.

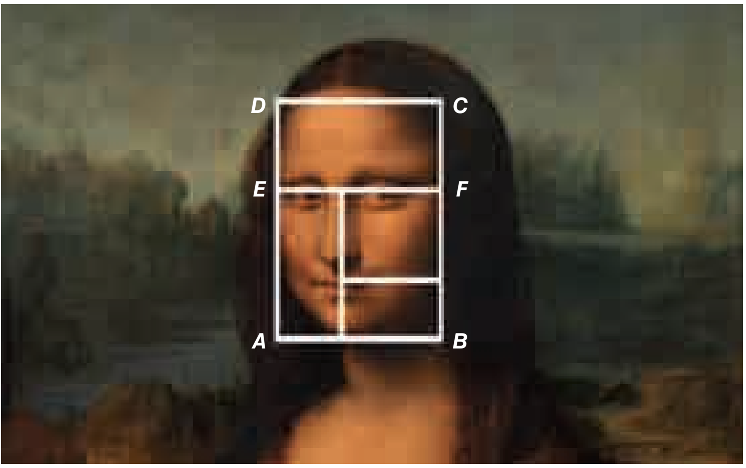


FOTO: LEONARDO DA VINCI - MUSEU DO LOUVRE, PARIS. ILUSTRAÇÃO: LUIZ RUBIO

Retângulos áureos representados em parte da obra *Mona Lisa* (A Gioconda) (1503-1506), de Leonardo da Vinci. Óleo sobre madeira, 77 cm × 53 cm.

É importante comentar com os alunos que existem infinitos números irracionais, assim como existem infinitos números naturais, inteiros e racionais para que rompam com uma eventual concepção errônea de que existe apenas um punhado de números irracionais. Para ajudá-los a se convencerem de tal fato, proponha que escrevam no caderno exemplos de números irracionais, tais como 0, 1011011101111..., 0,1234567890070007... etc.

A situação apresentada na seção *Resolvendo em equipe* (**página 24**) trata do cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC) e do Índice de Adiposidade Corporal (IAC). É possível aproveitar esse momento e conscientizá-los da importância de se ter uma alimentação saudável, bem como de se obter hábitos de exercícios físicos, com orientação de um profissional, a fim de prevenir a obesidade e suas consequências. Essa é uma atividade que pode ser realizada em parceira com o professor responsável pela disciplina de Educação Física.

A atividade 3 do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**página 25**) estimula os alunos a dar um contraexemplo de uma afirmação que, em geral, eles consideram verdadeira. É possível ampliar essa atividade propondo que deem exemplos de dois números irracionais não necessariamente diferentes, cujo produto é um número racional. Um exemplo de resposta seria considerar os números irracionais $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, cujo produto é -3, que é um número racional. Outra possibilidade é solicitar que deem um exemplo de um número irracional e de um número racional cujo produto não seja irracional; nesse caso, espera-se que eles percebam que qualquer número irracional multiplicado por zero é zero.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 2

Potenciação e radiciação de números reais

Conteúdos abordados

Potenciação e suas propriedades: o caso em que a base é um número real e o expoente é um número inteiro; radiciação (raiz quadrada exata e aproximada)

Objetivos

- Ampliar e sistematizar os casos de potenciação de base real e expoente inteiro.
- Revisar conceitos e propriedades referentes à radiciação e compreender quando o resultado da raiz quadrada de um número é natural, racional, irracional ou inexistente no conjunto dos números reais.

Orientações

A situação apresentada nas páginas de abertura desse capítulo (**páginas 26** e **27**) oferece uma oportunidade para que se discuta a quantidade processada de petróleo na plataforma P-55, no Campo Roncador (Bacia de Campos). Pode-se chamar a atenção deles para que percebam que a notação científica é útil para expressar números muito grandes, como é o caso do número 180 000, que corresponde à quantidade de barris de petróleo processados diariamente.

A seção *Trocando ideias* (**página 28**), cujo contexto é o revestimento de pisos, contribui para que você faça um levantamento do conhecimento prévio dos alunos no que tange a raiz quadrada de um número natural. Por meio dessa sondagem inicial, você poderá planejar as estratégias a serem adotadas, o tipo de situação a ser privilegiada e as maneiras de avaliar os conhecimentos a serem construídos ao longo do capítulo. Esteja atento para que a abordagem proposta seja sempre desafiadora para os alunos.

Após o trabalho com as propriedades de potência, você pode justificar aos alunos o porquê de todo número não nulo elevado a zero ser igual a 1. Para tanto, basta considerar que podemos escrever uma potência com expoente igual a zero como uma potência de mesma base e expoente igual a 1 − 1, e daí utilizar a 2ª propriedade estudada para verificar que o resultado é 1. Utilizando a linguagem matemática temos:

Seja a um número real qualquer diferente de zero, assim:

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

É possível também justificar a 2ª propriedade a partir da primeira e do conceito de potência com expoente inteiro negativo. Veja:

Seja a um número real qualquer diferente de zero e m e n números inteiros. Assim:

$$a^m : a^n \underset{\underset{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}{\uparrow}}{=} a^m \cdot a^{-n} \underset{\underset{\text{Pela 1ª propriedade}}{\uparrow}}{=} a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Tais justificativas podem ser oferecidas aos alunos, assim que se perceber que eles amadureceram seus conhecimentos sobre as propriedades de potência. Isso também poderá ajudá-los a se convencerem da validade dessas propriedades e da relação que estabelecem com as demais.

Você pode dedicar atenção especial à seção *Lendo e aprendendo* (**páginas 34** e **35**), que trata da datação de um ser por meio do carbono-14. Pode-se comentar com os alunos que em diversas experiências científicas é preciso trabalhar com números muito grandes (como a quantidade de átomos) ou ainda muito próximos de zero (como o tamanho de uma célula), por isso a ideia de potenciação e suas propriedades é bastante utilizada. Nessa seção é explorada de maneira intuitiva a noção de função exponencial e seu gráfico (quando a base é um número entre 0 e 1). Esse primeiro contato poderá auxiliá-los no trabalho mais aprofundado com funções exponenciais que será desenvolvido no Ensino Médio.

Outra possibilidade para dar mais significado à ideia de potência e suas propriedades é trabalhar com juros compostos, que são os mais empregados em nosso cotidiano. Segue uma sugestão de atividade, em grupo, envolvendo esse conceito e que pode ser trabalhada com os alunos no momento em que você julgar oportuno, após introduzir o conceito de montante.

- Um capital de R$ 100,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês, isto é, renderá, a cada mês, juro de 2% calculado sempre sobre o montante disponível no mês anterior.

a) Qual o montante disponível para o investidor sacar depois de um mês de aplicação? Quanto de juro o capital rendeu nesse período? *Respostas*: R$ 102,00; R$ 2,00.

b) Qual o montante disponível para o investidor sacar depois de dois meses de aplicação? Quanto de juro o capital rendeu nesse período? *Respostas*: R$ 104,04; R$ 4,04.

c) Qual o montante disponível para o investidor sacar depois de três meses de aplicação? Quanto de juro o capital rendeu nesse período? *Respostas*: R$ 106,12; R$ 6,12 (respostas aproximadas).

Comente com os alunos que, tal como no caso do carbono 14, aqui também podemos obter os valores pedidos por meio da expressão com variável na expoente:

$M = C(1 + i)^t$, em que M é o montante, C o capital, t o tempo de aplicação e i a taxa (:100).

Esta atividade se insere como retomada do conceito de porcentagem, estudado no último capítulo do 7º ano, e como antecipação informal do conceito de juro composto, a ser trabalhado no 9º ano.

O objetivo dessa atividade é exemplificar aos alunos uma expressão geral após observar as regularidades presentes nos cálculos que estão sendo realizados.

Situações envolvendo o crescimento populacional de uma cidade também são possibilidades a serem consideradas para dar significado ao conceito de potenciação. Segue outra sugestão de problema que pode ser proposto:

- Uma cidade, em 2013, tinha 34.000 habitantes. A partir dessa data, passou a crescer em média 2% ao ano. Qual era, aproximadamente, a população dessa cidade em 2016? *Resposta*: Aproximadamente 36.081 habitantes.

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 31**) trabalha com a unidade de medida de armazenamento de dados: o *byte*. Pode-se ampliar a proposta dessa seção e trabalhar com a equivalência entre outras unidades de medida de armazenamento de dados que são múltiplos do *byte*. Tais medidas foram se tornando necessárias à medida que a capacidade de armazenamento e de processamento dos computadores cresceu com a evolução tecnológica. Um *kilobyte*, por exemplo, corresponde a 1.024 (2^{10}) bytes. A tabela a seguir apresenta algumas unidades de medida de armazenamento de dados usadas pelos sistemas computacionais contemporâneos.

Se julgar conveniente, você pode reproduzir o quadro abaixo na lousa com algumas células em branco e pedir aos alunos que as completem.

Unidade		**Em *bytes***	**Em KB**	**Em MB**	**Em GB**	**Em TB**
Byte (B)	–	1	2^{-10}	2^{-20}	2^{-30}	2^{-40}
Kilobyte (KB)	1.024 *byte*	2^{10}	1	2^{-10}	2^{-20}	2^{-30}
Megabyte (MB)	1.024 KB	2^{20}	2^{10}	1	2^{-10}	2^{-20}
Gigabyte (GB)	1.024 MB	2^{30}	2^{20}	2^{10}	1	2^{-10}
Terabyte (TB)	1.024 GB	2^{40}	2^{30}	2^{20}	2^{10}	1

Ao trabalhar o cálculo de raízes quadradas de números decimais que têm raiz exata você pode incentivar os alunos a decompor o número em fatores primos ou, caso o número não seja inteiro, que eles obtenham, antes de calcular a raiz quadrada, a forma fracionária. Ambas as estratégias não só retomam os conteúdos que já foram trabalhados como também facilitam os cálculos de extração da raiz quadrada. Atividades como a de número 3 da **página 38** podem ser utilizadas para trabalhar com esse aspecto.

No cálculo de raízes quadradas aproximadas é fundamental que os alunos conheçam os quadrados perfeitos ou a raiz quadrada exata de alguns números (mesmo que não sejam quadrados perfeitos) para realizar as aproximações. Convém incentivá-los a utilizar a calculadora para dar mais significado a esses cálculos.

Há um método chamado dicotomia que permite calcular a raiz quadrada aproximada de um número real. Se necessário, pode-se propor aos alunos que, em grupos, pesquisem esse método e depois compartilhem com os demais colegas o que entenderam dele.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 3

Monômios e polinômios

Conteúdos abordados

Expressões algébricas (a noção de expressão algébrica e valor numérico de uma expressão algébrica); monômio (noção de monômio, monômios semelhantes e grau de um monômio); adição e subtração de monômios; multiplicação de monômios; divisão de monômios; potenciação de monômios; polinômio (a noção de polinômio, grau de um polinômio e polinômio reduzido); adição de polinômios; subtração de polinômios; multiplicação de polinômios; divisão de polinômios

Objetivos

- Revisar as noções de expressões algébricas e valor de uma expressão algébrica.
- Identificar situações envolvendo expressões algébricas.
- Compreender o que é um monômio e realizar operações (adições, subtrações, multiplicações, divisões e potenciações) envolvendo monômios.
- Compreender o que é polinômio e realizar operações (adições, subtrações, multiplicações e divisões) envolvendo polinômios.
- Mobilizar os conceitos construídos para a resolução de problemas.

Orientações

A seção *Trocando ideias* (**página 44**), no início do capítulo, retoma algumas noções a respeito de expressões algébricas já exploradas no 7º ano. A partir da investigação dos conhecimentos que já são de domínio dos alunos, você deverá planejar a abordagem que fará para a temática a ser discutida neste capítulo, os tipos de situações a serem propostas, as necessidades de complementações do material e as maneiras como os conhecimentos construídos poderão ser avaliados.

A seção *Um pouco de história* (**página 46**) trata da introdução dos símbolos atualmente empregados no decorrer da história da Álgebra. A imagem ao lado traz a capa da obra *In Artem Analyticem Isagoge*, de François Viète, considerado o mais antigo trabalho sobre álgebra simbólica. Nela, apresenta-se um simbolismo algébrico do uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. A utilização das últimas letras do alfabeto para as incógnitas e das primeiras para as constantes foi introduzida posteriormente por Descartes. Anteriormente a Viète, não era comum o uso de letras ou símbolos diferentes para representar uma quantidade.

IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DE FRANCE, PARIS

Capa da obra *In Artem Analyticem Isagoge* (1591), de François Viète.

Além das situações indicadas nesse primeiro tópico, estimule os alunos a buscar outras nas quais seja necessário recorrer às expressões algébricas para interpretá-las do ponto de vista matemático. É importante que o ensino de Álgebra não fique restrito ao cálculo de expressões algébricas descontextualizadas e que incorpore o trabalho com generalizações e a resolução de problemas que envolvem números desconhecidos.

A atividade 5 da **página 47** envolve a conversão entre registros na língua materna e algébricos. Tal mobilização de registros contribui para que os alunos apreendam os conceitos envolvidos. Pode-se, sempre que possível, propor atividades dessa natureza; neste capítulo sugerimos a atividade 3 da **página 62** do tópico 8 e a atividade 1 do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 67** a **69**).

A ideia da obtenção do valor numérico de uma expressão algébrica pode ser aproveitada para discutir a diferença entre a natureza das letras em uma expressão algébrica (variáveis) e as letras em uma equação (incógnitas). Pode-se aproveitar a oportunidade para explicar as diferenças entre os conceitos de expressão algébrica e equação e entre variável e incógnita.

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 48**) explora o conceito de densidade de um corpo, que já foi tratado no capítulo 7 do 7º ano. Esse pode ser o momento propício para firmar uma parceria com o professor de Ciências e propor aos alunos que pesquisem a origem da ideia de densidade e a contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento desse conceito. É importante que eles percebam que um conceito, seja ele matemático ou não, é resultado de muitas experiências e estudos.

A imagem ao lado ilustra um dos momentos da lenda que poderiam ter dado origem à noção de densidade: de acordo com ela, Arquimedes teria descoberto o que hoje chamamos de "Princípio de Arquimedes" durante uma investigação do material empregado na confecção de uma coroa, uma vez que o rei estava em dúvida se ela era toda feita de ouro ou não. Se julgar conveniente, você pode pedir aos alunos que pesquisem sobre essa lenda e que construam, em grupos, uma história em quadrinhos que a retrate. Esse pode ser o momento propício para trabalhar em conjunto com o professor de Língua Portuguesa e Arte.

NEW YORK UNIVERSITY, ESTADOS UNIDOS

O filósofo grego Arquimedes em sua banheira.

Se houver laboratório na escola, pode-se com o professor de Ciências auxiliar os alunos na realização de experimentos visando medir a densidade de alguns materiais.

Ao apresentar a ideia de monômio por meio das situações propostas no livro, peça aos alunos que busquem outras que sejam de conhecimento deles e que também envolvam monômios em suas interpretações matemáticas.

Outro aspecto importante é que os alunos compreendam bem a noção de monômios semelhantes, pois ela será fundamental para que possam operar adequadamente com monômios e polinômios. Caso perceba que eles estejam com dificuldade, você pode retomar os conceitos já trabalhados.

Ao trabalhar com a atividade 6 da **página 54**, você pode levar um tangram para a sala de aula, a fim de que os alunos que nunca tiveram contato com ele possam conhecer e ter a oportunidade de manipular de suas peças para formar figuras.

Durante o trabalho com as operações envolvendo monômios e polinômios, pode-se incentivá-los a utilizar seus conhecimentos a respeito das operações com números. Você pode ampliar as atividades do capítulo propondo outras envolvendo figuras geométricas para que os alunos percebam que os conceitos geométricos e algébricos podem ser mobilizados para a resolução de diversas situações-problema.

Sempre que necessário, pode-se propor aos alunos que compartilhem suas estratégias e respostas das atividades propostas. Essa troca é interessante para ampliarem o repertório de estratégias de cálculo com letras.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 4

Produtos notáveis e fatoração

Conteúdos abordados

Produtos notáveis (quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos); fatoração (fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados, trinômio quadrado perfeito)

Objetivos

- Compreender, geométrica e algebricamente, os principais casos de produtos notáveis: o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos.
- Compreender, geométrica e algebricamente, os principais casos de fatoração: fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados e fatoração do trinômio quadrado perfeito.
- Mobilizar os conhecimentos construídos para a resolução de problemas.

Orientações

Ao trabalhar com produtos notáveis e fatoração, é importante não enfatizar a memorização dos diferentes casos presentes em cada uma dessas ideias pelos alunos. Pode-se dar destaque à compreensão e ao objetivo de estudar e dominar os diferentes tipos de produtos notáveis e de fatoração, como a simplificação de cálculos e de expressões algébricas. É importante que os alunos percebam e entendam como chegar a cada um dos produtos notáveis e a cada um dos casos de fatoração estudados. Com o tempo, a memorização será consequência da constante mobilização dessas ideias, e não resultado de um processo visando especificamente decorá-las.

Antes da abordagem algébrica de cada um dos casos de produtos notáveis e de fatoração, promova experimentos a partir da manipulação de figuras geométricas construídas com cartolina, por exemplo, para que os alunos possam percebê-los. Assim, você pode incentivá-los a observar, por meio dessas manipulações, os padrões presentes para então obter uma regra geral escrita por meio da linguagem algébrica. Uma abordagem com essa orientação tem mais chances de contribuir para a compreensão dos alunos do que a simples apresentação das demonstrações geométricas trazidas pelo livro.

Há na internet diversos jogos que você pode utilizar em sala de aula. Eles servirão de ferramenta auxiliar para que os alunos se familiarizem com os casos de produtos notáveis e fatorações estudados. Veja a seguir um desses jogos: o Fatonômio (disponível em: www.sistemas.ufrn.br/shared/verArquivo?idArquivo=1551677&key=ff3d1370e177c2397e68cc22f39a3f1e. Acesso em: 15 maio 2015). Tal jogo funciona de acordo com as seguintes regras:

1º) Faça um monte com as cartas viradas para baixo.

2º) Disponha na mesa as fichas viradas para cima.

3º) Entre os jogadores, um será o juiz. Ele retirará uma carta e pedirá aos colegas que fatorem o polinômio pedido na carta retirada. O primeiro a encontrar a resposta da fatoração fica com a ficha que tem a resposta correspondente. Ganha o jogo quem conseguir a maior quantidade de fichas.

Você pode reproduzir as cartas e a ficha em número suficiente para que os alunos possam jogar em grupo. Esse pode ser o momento oportuno para avaliar o que apreenderam e sanar as possíveis dúvidas que tiverem. Se for conveniente, pode-se propor aos alunos que criem suas próprias cartas e fichas.

Para cada uma das atividades propostas, pode-se solicitar que os alunos interpretem as expressões algébricas geometricamente e as desenvolvam ou as fatorem com base nos aspectos geométricos percebidos. Essa tarefa possibilita a mobilização entre os registros algébrico e figural, o que pode ser de grande valia para o aprendizado dos alunos e para a percepção deles de que os conceitos apreendidos no capítulo não estão desvinculados do que estudaram até então.

Ao trabalhar a seção *Um pouco de história* (**página 75**), referente à Álgebra Geométrica grega, pode-se comentar que os gregos, na Antiguidade, faziam uso de procedimentos algébricos e geométricos exatamente iguais aos de hoje. É importante destacar que o uso da maioria desses procedimentos foi atribuído aos pitagóricos e está registrado na obra *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria, na forma de representações geométricas.

A atividade 4 da **página 76**, a atividade 3 da **página 78**, a atividade 4 da **página 80**, a atividade 5 da **página 84** e a atividade 10 do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 87** a **89**) mostram como os produtos notáveis podem ser usados para simplificar cálculos que envolvem apenas números. Você pode, sempre que achar necessário, incentivar os alunos a utilizar o que aprenderam sobre produtos notáveis para efetuar cálculos numéricos.

É importante, conforme demonstram pesquisas realizadas por educadores matemáticos, que, desde o Ensino Fundamental, os alunos sejam estimulados a trabalhar com noções referentes à argumentação e prova, bem como possam trocar ideias a respeito de demonstrações matemáticas com o professor e os colegas. Este capítulo oferece a possibilidade de enfatizar esses aspectos. Assim, pode-se valorizar e incentivar os alunos a buscar diferentes estratégias para realizar as demonstrações pedidas. Cabe comentar também que um exemplo ou um caso particular não é suficiente para demonstrar propriedades gerais, mas que, se o objetivo for constatar que alguma afirmação é falsa, um exemplo (contraexemplo) pode ser suficiente.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 5

Retas e ângulos

Conteúdos abordados

Retas (partes de uma reta e posições relativas de duas retas em um plano); segmento de reta (segmentos congruentes); ângulo (classificação de ângulos, ângulos congruentes, bissetriz interna de um ângulo, ângulos complementares, ângulos suplementares e ângulos opostos pelo vértice); ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal (ângulos correspondentes, alternos e colaterais)

Objetivos

- Reconhecer as partes de uma reta e a posição relativa de duas retas em um plano.
- Construir retas paralelas usando régua e esquadro, ou régua e compasso.
- Identificar segmentos congruentes e reconhecer segmentos consecutivos, colineares e adjacentes.
- Construir segmentos congruentes usando régua e compasso.
- Compreender o conceito de ângulo e classificá-lo segundo sua medida.
- Identificar e construir ângulos congruentes a um ângulo dado.
- Compreender o conceito de bissetriz de um ângulo e construí-la com régua e compasso.
- Identificar ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice.
- Identificar e relacionar os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

Antes de iniciar o capítulo, você pode retomar com os alunos os conceitos de reta e ângulo trabalhados no 7º ano e propor uma atividade diagnóstica a fim de averiguar o que eles apreenderam sobre esses conteúdos no ano anterior e para levantar o conhecimento prévio deles a respeito dos conteúdos que serão trabalhados no capítulo.

Compreender o conceito de ângulo é fundamental, pois é por meio dele que os alunos vão distinguir um retângulo de um paralelogramo não retângulo ou, ainda, um losango não quadrado de um quadrado. A seção *Trocando ideias* (**página 92**) explora algumas ideias relacionadas ao conceito de ângulo, como a de inclinação, giro e abertura. Você pode ampliar a proposta das atividades da seção e trabalhar também com as ideias de direção e rotação, seja por meio de materiais manipulativos, seja com imagens de elementos presentes no cotidiano.

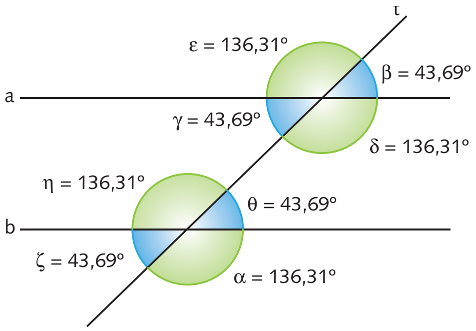
Para o desenvolvimento deste capítulo, é importante que sempre estejam disponíveis réguas, transferidores, esquadros e compassos em número suficiente, pois são propostas diversas atividades utilizando esses materiais. É importante também justificar as construções realizadas à luz dos conceitos trabalhados, pois isso poderá ajudá-los a atribuir mais significado aos procedimentos que devem ser seguidos em cada uma das construções.

É importante orientar os alunos a tomar cuidado para que o compasso esteja com a ponta adequada. A ponta do grafite deve estar paralela à ponta-seca, com o chanfro para fora. O chanfro, por sua vez, pode ser feito com uma lixa de unhas. Esse cuidado garante um traçado mais eficiente, minimizando as dificuldades apresentadas pelos alunos no uso desse material.

As nomenclaturas trabalhadas no capítulo ajudam apenas na comunicação, não havendo, portanto, a necessidade de os alunos as memorizarem. A apropriação de termos se dará de maneira natural, conforme os alunos forem lidando com eles nas atividades desenvolvidas em sala de aula.

A construção da bissetriz de um ângulo, a de retas paralelas e de retas perpendiculares e a do ponto médio de um segmento são exemplos de atividades que podem ser realizadas também com o auxílio do *software* Geogebra. O maior comprometimento dos alunos com as tarefas propostas e a melhor compreensão dos conceitos trabalhados são alguns dos benefícios oriundos do uso do computador em sala de aula. O trabalho com o *software* ajuda também no entendimento de como os conceitos trabalhados se articulam nas construções utilizando régua, esquadro e compasso.

Por exemplo, considere as propriedades dos ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal. Ao traçar no Geogebra as duas retas paralelas e uma reta *t*, transversal e verificar o que ocorre com os ângulos formados quando essa reta *t* é movimentada, os faz visualizar sem dificuldade que os ângulos correspondentes, assim como os alternos (internos e externos), são congruentes e que os ângulos colaterais (internos e externos) são suplementares. Verificar propriedades matemáticas por meio da experimentação ou simulação contribui para que os alunos se convençam da validade das mesmas.



LUIZ RUBIO

A atividade 3 da **página 110** trabalha com o detalhe de uma página de um guia de ruas. Atividades como essa buscam aproximar os conceitos estudados da realidade dos alunos e podem ser propostas com maior frequência. Você pode, por exemplo, solicitar aos alunos que tragam fotos de jornais, revistas ou da internet que lembrem a noção de retas reversas. Nesse caso, fotos de viadutos sobre ruas ou sobre trilhos de trem atendem a essa demanda.

Na seção *Lendo e aprendendo* (**páginas 114** e **115**) é explorada a noção de anamorfose. Se julgar conveniente, você pode propor uma parceria com o professor de Arte ou Geografia para trabalhar com atividades ou elaborar um projeto relacionado ao tema.

O desafio proposto na **página 119** do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* permite que sejam relacionadas as noções de proporcionalidade e medida de ângulos. Você pode ampliar a proposta desse desafio e solicitar aos alunos que encontrem outras medidas de ângulos entre os ponteiros de um relógio em determinada hora, ou ainda, que listem os horários nos quais, por exemplo, os ponteiros formam um ângulo reto ou um ângulo raso.

Ao trabalhar com as atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 116** a **121**), é possível incentivar os alunos a sempre identificar quais conceitos foram mobilizados para a resolução de cada uma das atividades. Você pode propor também que compartilhem suas respostas e estratégias com os colegas, para que percebam que não há uma única maneira de resolver as atividades propostas e também para que possam ampliar o repertório.

CAPÍTULO 6

Polígonos e simetria

Conteúdos abordados

Polígonos (a noção de polígono, polígono convexo e polígono não convexo, elementos de um polígono, classificação de polígonos e perímetro de um polígono); diagonais de um polígono; ângulos internos e ângulos externos de um polígono (soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono, medida do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular); simetria (simetria axial e central)

Objetivos

- Compreender o conceito de polígono, e entender e diferenciar um polígono convexo de um polígono não convexo.
- Identificar os elementos de um polígono (lados, vértices, diagonais, ângulos internos, ângulos externos).
- Classificar um polígono quanto ao número de lados.
- Compreender como calcular a medida do perímetro de um polígono.
- Entender como determinar o número de diagonais de um polígono e mobilizar tal conhecimento para a resolução de problemas.
- Compreender como determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono e também a soma das medidas de seus ângulos externos.
- Entender como determinar a medida dos ângulos interno e externo de um polígono regular.
- Compreender a noção de simetria axial e saber como obter o simétrico de um ponto, de um segmento de reta, de uma reta, de um círculo e de um polígono em relação ao eixo de simetria.
- Compreender a noção de simetria central e saber como obter o simétrico de um ponto, de um segmento de reta, de uma reta, de um círculo e de um polígono após um giro de meia-volta em torno de um ponto.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para a resolução de situações-problema.

Orientações

Você pode iniciar o capítulo levantando os conhecimentos dos alunos a respeito da noção de polígono. A partir de tais conhecimentos, planeje a abordagem a ser realizada, de forma que ela seja sempre desafiadora para a turma. Conforme já destacado diversas vezes, esses conhecimentos servirão de base para o desenvolvimento de atividades a serem propostas e de avaliações que visam analisar os conhecimentos que, de fato, estão sendo construídos por meio das discussões realizadas no capítulo.

A situação apresentada nas páginas de abertura deste capítulo (**páginas 122** e **123**) oferece uma oportunidade para que se discuta a função de polígonos nas construções presentes em nosso cotidiano. Você pode propor aos alunos que pesquisem em revistas, jornais ou na internet fotografias de objetos ou construções em que haja elementos que lembrem polígonos e que compartilhem com os colegas para que eles possam identificá-los. As imagens a seguir mostram exemplos da presença de polígonos na arquitetura.


A'LYA/SHUTTERSTOCK

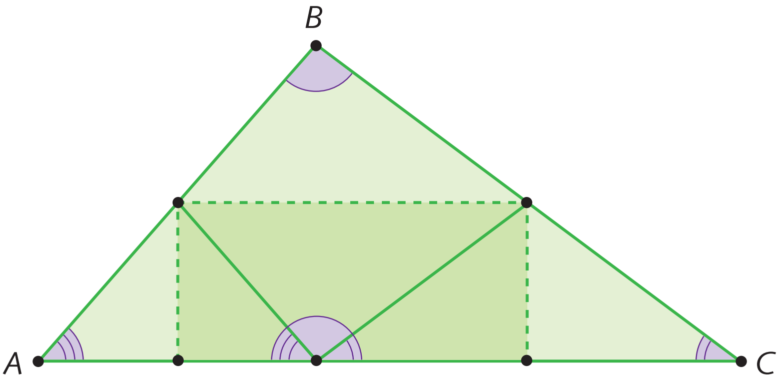
Pedras sextavadas ao ar livre.


STAFF/AFP

O Pentágono é a sede do Departamento de Defesa dos Estados Unidos.

Todos os conceitos apresentados ao longo do capítulo podem ser trabalhados de maneira investigativa, por meio do *software* Geogebra, que permite uma abordagem dinâmica da Geometria. Caso a escola disponha de um laboratório de informática, você pode preparar atividades para que os próprios alunos, por meio da interação com o *software*, possam construir os conhecimentos, os quais você irá formalizar posteriormente. Assim, em vez de dizer diretamente aos alunos: "Se um polígono tem *n* lados, então podemos traçar, a partir de cada vértice, $(n - 3)$ diagonais...", pode-se propor que cheguem a essa conclusão por meio da observação de regularidades ao utilizarem o Geogebra. Uma aula pautada no uso de ferramentas tecnológicas deve proporcionar aos alunos a chance de serem os protagonistas de seu processo de aprendizagem.

É possível convencer os alunos de que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° solicitando a eles que recortem uma superfície triangular e que a dobrem como sugere a figura a seguir.



LUIZ RUBIO

Ao fazer isso, espera-se que os alunos percebam que é possível construir um ângulo raso (de 180°) justapondo os ângulos internos do triângulo. Com isso eles podem verificar experimentalmente que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180° e que, como podem proceder da mesma forma com qualquer triângulo, eles também podem concluir que essa é uma propriedade válida para todos.

Com essa ideia amadurecida, em vez de apresentar diretamente a decomposição de polígonos em triângulos e então obter a expressão que permite determinar a soma das medidas de seus ângulos internos, é interessante que, por meio de atividades e questionamentos adequados, os alunos sejam levados, a perceber por si mesmos essa possibilidade de decomposição e, a partir de tal ideia, chegar à expressão visada.

Também o fato de que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono é igual a 360° pode ser percebido pelos alunos por meio de investigações realizadas com o auxílio do *software* Geogebra. Até mesmo a verificação de que cada ângulo interno e seu externo correspondente são adjacentes suplementares, indicada no livro, pode ser facilitada pela utilização do *software*.

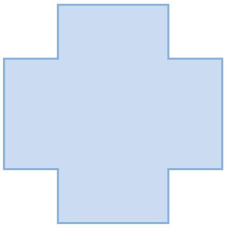
No momento em que essa questão for colocada, os alunos saberão como determinar a soma das medidas dos ângulos internos e também a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados. Assim, em vez de apresentar diretamente o resultado visado, você pode pedir para que eles mesmos obtenham, a partir dos conhecimentos já construídos, as expressões que permitem obter a medida de cada ângulo externo e de cada ângulo interno de um polígono regular de *n* lados.

O conceito de simetria é trabalho no tópico 4. Tal conceito está presente não só na Matemática como em vários outros campos do conhecimento, por exemplo, na Cristalografia (ciência que classifica e descreve os cristais, sua estrutura, suas formas e as leis que presidem seu processo de formação), na Biologia e em estudos sobre estruturas moleculares em Química.

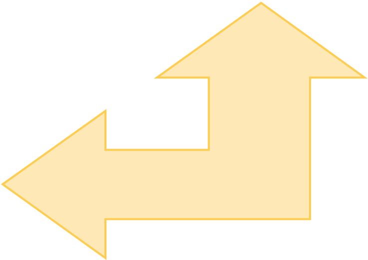
O ensino de simetria se justifica, entre outras coisas, em razão do dinamismo que imprime à Geometria, porque desenvolve nos alunos a capacidade de observação de movimentos realizados com figuras geométricas em seu cotidiano e por ser um conceito muito utilizado em outros campos científicos e na própria Matemática. Nesta última, pode-se ressaltar o uso de simetria no conceito de números simétricos ou opostos, no estudo de gráficos de algumas funções, nas relações de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, etc.

Antes de abordar a ideia de simetria axial, pode-se trabalhar intuitivamente essa noção por meio de dobraduras. Você pode, por exemplo, solicitar aos alunos que analisem algumas figuras recortadas em papel sulfite ou cartolina para que verifiquem se há uma forma de dobrá-las de modo que as partes dobradas coincidam. Ao final da atividade, os alunos devem perceber a impossibilidade de fazer tal dobradura em algumas figuras. As figuras para as quais essa dobradura é possível são chamadas de figuras com simetria, e a reta que "passa" pelo vinco da dobradura é o eixo de simetria.

Exemplo de figura com simetria



Exemplo de figura que não possui simetria



LUIZ RUBIO

Após executar essa atividade, os alunos poderão abstrair com mais facilidade como se obtém uma figura simétrica à figura original, em relação ao eixo de simetria, imaginando que tal eixo corresponde ao vinco das dobras que realizaram na atividade. É importante também que notem que a simetria preserva distâncias, ou seja, um segmento e seu simétrico têm o mesmo comprimento assim como têm o mesmo comprimento os raios do círculo e de seu simétrico. Você pode também chamar a atenção deles para que observem que, quando duas figuras são simétricas em relação a um eixo, as distâncias de cada ponto e de seu simétrico em relação ao eixo são iguais, o segmento que tem como extremidades um ponto e seu simétrico é perpendicular ao eixo de simetria . Os alunos devem observar também que a simetria preserva os ângulos, ou seja, as medidas dos ângulos da figura original se mantêm na figura simétrica.

O trabalho com a simetria pode-se pautar na utilização das construções geométricas com régua e compasso ou no uso do *software* Geogebra, que oferece ferramentas específicas para o trabalho com a simetria central e com a simetria axial.

Pode-se propor aos alunos que obtenham as imagens simétricas de pontos, de segmentos de reta, de retas, de círculos e de polígonos usando tais ferramentas. É de grande valia que comparem a posição da figura simétrica com a figura original.

Você pode também propor atividades utilizando malhas quadriculadas em que os alunos obtenham as imagens simétricas de pontos, segmentos de reta, retas, círculos e polígonos.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 7

Frações algébricas e equações fracionárias

Conteúdos abordados

Frações algébricas; simplificação de frações algébricas; redução de frações algébricas ao mesmo denominador; adição e subtração de frações algébricas; multiplicação e divisão de frações algébricas; equações fracionárias (resolução de equações fracionárias)

Objetivos

- Compreender o conceito de frações algébricas e operar com elas.
- Identificar equações fracionárias e compreender como resolvê-las.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

Ao tratar de frações algébricas e equações fracionárias, é importante chamar a atenção dos alunos para os valores que não podem ser assumidos pelas variáveis, pois fazem que o denominador se anule, tornando a divisão indefinida.

Outro ponto importante é chamar a atenção para que percebam que operamos com as frações algébricas da mesma forma que operamos com frações numéricas. Uma observação importante é que, quando trabalhamos apenas com números (adição ou subtração de frações com denominadores diferentes), podemos encontrar um denominador comum (não é necessário ser o menor múltiplo) para fazer os cálculos e simplificar a fração no final. Já no caso das frações algébricas é interessante encontrar o mínimo múltiplo comum de polinômios, pois isso facilita os cálculos.

Neste capítulo, espera-se que os alunos adquiram habilidade no procedimento com expressões e equações algébricas. Em razão disso, a obra oferece, com alguma ênfase, atividades que requerem manipulação algébrica. Você pode propor outras que incentivem a reflexão e levem os alunos a perceber o uso dessas expressões, assim como ocorre na seção *Trocando ideias* (**página 144**), na atividade 5 da **página 147**, na atividade 2 da **página 156**, e nas atividades 3, 7, 20, 21, 25 e 26 do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 157** a **159**).

O uso de jogos também pode incentivar a maior participação dos alunos e constituir mais uma oportunidade lúdica para eles se apropriarem do tema. Estão disponíveis na internet alguns jogos que você pode analisar e adaptar para utilização em sala de aula. Um desses jogos se encontra disponível em <http://www.unifal-mg.edu.br/matematica/files/file/PIBID/Material%20Didatico-2014/Fra%C3%A7%C3%B5es%20alg%C3%A9bricas_Plano%20de%20Ensino.pdf>. Acesso em 8 jun. 2015.

Você pode chamar a atenção dos alunos para que percebam que as técnicas de fatoração de expressões algébricas podem ser úteis para a resolução das questões propostas neste capítulo.

Para que os alunos compreendam a divisão com frações algébricas trabalhada no tópico 6, é importante fazer uma analogia com a divisão de dois números fracionários.

Ao trabalhar com as equações fracionárias, você pode chamar a atenção dos alunos para a importância de sempre verificar os valores que a incógnita pode assumir, pois pode acontecer de uma de suas raízes coincidir com o número que torna o denominador da fração algébrica igual a 0, e, nesse caso, devemos desconsiderá-la. O exemplo da **página 156** ilustra esse fato.

Caso a equação fracionária tenha se originado de uma situação-problema, pode-se incentivar os alunos a sempre verificar se a raiz de tal equação satisfaz as exigências do problema proposto.

CAPÍTULO 8

Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Conteúdos abordados

Par ordenado (representação geométrica de pares ordenados); equação do 1º grau com duas incógnitas e representação gráfica das suas soluções; sistema de equações lineares com duas incógnitas; resolução de sistemas lineares de duas equações (por tentativa e erro, método da substituição e método da adição); solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Objetivos

- Compreender a ideia de par ordenado.
- Identificar uma equação do 1º grau com duas incógnitas e compreender a representação gráfica de suas soluções.
- Compreender a ideia de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas e compreender como resolvê-lo por tentativa e erro, método da substituição, método da adição e por representação gráfica.
- Resolver situações-problema que envolvem sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Orientações

A situação apresentada nas páginas de abertura desse capítulo (**páginas 160** e **161**) oferece a oportunidade para que você retome o conceito de equação estudado no 7º ano. É importante que os alunos percebam que, nesse caso, as equações que traduzem a situação-problema têm mais de uma incógnita e que, para determinar a quantidade de corridas em que Hamilton obteve o 1º lugar e a quantidade em que ele obteve o 2º, é necessário encontrar os valores de x e y, que satisfazem ambas as equações encontradas. Vale lembrar que x e y só podem assumir valores naturais, pois se referem ao número de corridas em que Hamilton obteve o 1º e o 2º lugar, respectivamente. Você pode ampliar a proposta da seção *É hora de observar e discutir* e solicitar aos alunos que, por tentativa e erro, encontrem os valores de x e y e concluam que Hamilton ficou em 1º lugar em 5 corridas e em 2º lugar em 2 corridas. Depois de encontrada a solução, pode-se incentivá-los a retomar o problema original e verificar se a resposta faz sentido para a situação.

Resolver um sistema por tentativa e erro é uma estratégia pouco econômica, mas pode constituir uma experiência significativa para os alunos, pois eles poderão valorizar os métodos da substituição e da adição, que serão estudadas mais adiante. Esse é o objetivo das questões propostas na seção *Trocando ideias* (**página 162**).

Ao trabalhar com as equações do 1º grau com duas incógnitas, você pode comentar com os alunos que esse tipo de equação, quando desvinculado de um contexto, tem infinitas soluções, uma vez que, para cada valor atribuído a uma das incógnitas (podemos atribuir um número infinito de valores), encontramos um valor correspondente para a segunda incógnita. O fato de a reta ser a representante do conjunto de todas as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas reforça a ideia de que essas equações têm infinitas soluções, uma vez que uma reta tem infinitos pontos.

Ao tratar da resolução de sistemas lineares de duas equações, pode-se estimular os alunos a dar um palpite inicial sobre os valores das incógnitas, pois isso vai ajudá-los a aguçar o senso crítico e a sentir a necessidade de validar as soluções encontradas. Se julgar conveniente, você pode mesclar as atividades com algumas situações-problema presentes no *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 179** a **183**), pois isso poderá dar mais significado aos cálculos que os alunos vão efetuar.

Outra ideia que incentiva a maior participação dos alunos e ajuda a desenvolver a criatividade é pedir que inventem um problema que pode ser traduzido por determinada equação do 1º grau com duas incógnitas ou um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas. Esse também pode ser o momento oportuno para que você avalie se os alunos sabem diferenciar os conceitos de equação e sistema de equações.

No tópico 5, é trabalhada a solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Essa ampliação do estudo dos sistemas enriquece o repertório dos alunos, uma vez que podem, a partir da posição relativa das retas que representam as soluções de cada uma das equações do sistema, determinar o número de soluções do mesmo. Assim, se as retas são paralelas, o sistema não tem solução; se as retas são concorrentes, as coordenadas do ponto de intersecção são a solução; se as retas forem coincidentes, o sistema terá infinitas soluções. Tal fato está evidenciado em cada um dos exemplos desse tópico.

O *software* Geogebra permite que sejam resolvidos graficamente sistemas de equações diversos, especialmente sistemas de duas equações do 1º com duas incógnitas. Sempre que necessário, após os alunos resolverem alguns sistemas, você pode pedir a eles que utilizem o *software* para verificar suas respostas.

Pesquisadores em Educação Matemática enfatizam que o aluno alcança a apreensão conceitual quando lhe é exigida a coordenação de diferentes registros, como, por exemplo, o registro algébrico, registro gráfico, registro figural, registro em língua materna etc. Isso se dá porque cada um desses registros caracteriza o conceito matemático de uma maneira e todas as maneiras se complementam. Resolver uma situação-problema e recorrer aos gráficos para a resolução de sistemas são atividades que contribuem para essa mobilização. As atividades 8 e 23 do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos*, por exemplo, trazem contribuições nesse sentido.

Se julgar conveniente, você pode propor aos alunos que, após resolverem as atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos,* compartilhem suas estratégias e respostas com os demais colegas. Esse pode ser o momento propício para que você avalie o que os alunos apreenderam e os pontos em que apresentaram dificuldade.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 9

Estatística e probabilidade

Conteúdos abordados

Estatística (população e amostra, variáveis, rol, distribuição de frequência); gráficos de segmentos e de barras; gráfico de setores; cartograma e pictograma; probabilidade

Objetivos

- Compreender as noções de população, amostra, rol e distribuição de frequência e como esses conceitos são mobilizados para a realização de uma pesquisa.
- Analisar quais são os cuidados a serem tomados durante a escolha de uma amostra para realizar um estudo estatístico.
- Distinguir variáveis quantitativas de variáveis qualitativas.
- Compreender como, a partir de um rol, construir uma tabela de distribuição de frequências e mobilizar esse conhecimento para a resolução de problemas.
- Ler, interpretar e construir gráficos de segmentos e de barras (horizontais e verticais).
- Ler, interpretar e construir gráficos de setores.
- Compreender as noções de cartograma e pictograma.
- Ampliar e consolidar o conceito de probabilidade.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

A situação apresentada nas páginas de abertura deste capítulo (**páginas 184** e **185**) oferece uma oportunidade para que você discuta com os alunos o significado do conceito de probabilidade e em que situações do nosso dia a dia estão presentes o cálculo de probabilidades e o tratamento estatístico de informações. Se julgar conveniente, firme uma parceria com o professor de Ciências e proponha uma atividade interdisciplinar envolvendo a noção e o cálculo de probabilidades em experiências desenvolvidas em laboratório.

Pode-se propor uma atividade diagnóstica a fim de levantar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a leitura e interpretação de gráficos e os cuidados que devem ser tomados na realização de pesquisas estatísticas. Isso poderá lhe dar subsídios para conduzir as aulas e propor atividades que extrapolem as oferecidas no livro.

Após esses momentos iniciais, realizados com o objetivo de retomar o que os alunos já conhecem a respeito de Probabilidade e Estatística, é interessante, para dar início ao estudo da temática, que os alunos organizem um banco de dados sobre determinado tema. Para isso, cada aluno pode, por exemplo, entrevistar as pessoas que moram na mesma casa que ele e anotar a idade de cada morador e seu estilo musical favorito. A ideia é que os alunos reúnam os dados coletados de modo a obter um banco de dados maior. Pode-se organizar os dados em uma tabela e fixá-la em uma das paredes da sala. A intenção é que, conforme se avança no estudo dos tópicos do capítulo, esses dados sejam tratados coletivamente e se transformem em informações significativas. É importante que os alunos vivenciem experiências de coleta, organização e interpretação de dados, pois isso poderá contribuir para que atribuam significado aos conceitos que serão estudados no capítulo.

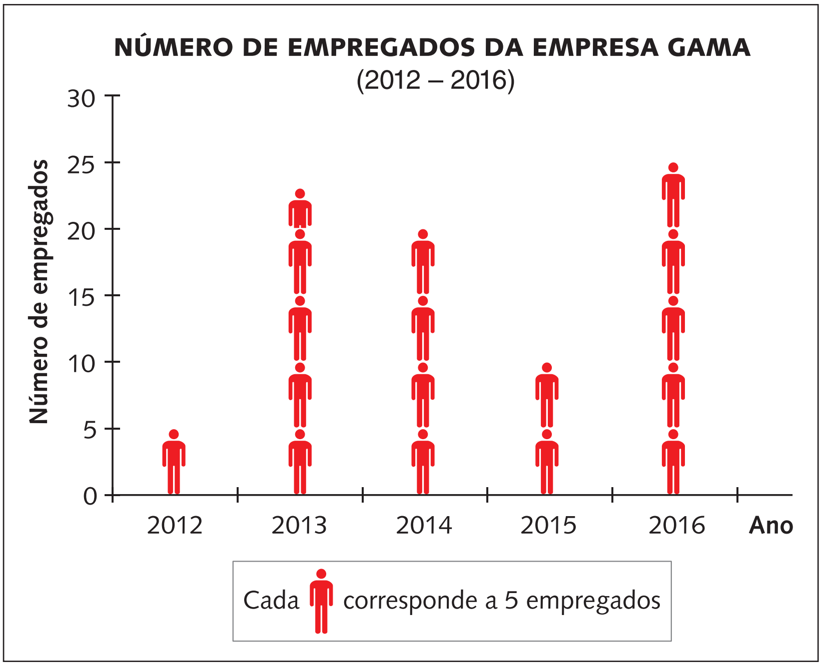
Ao trabalhar com a noção de frequência relativa, você pode aproveitar para retomar aspectos relativos à noção de porcentagem e à representação de frações, na forma decimal. Você pode também solicitar aos alunos que apresentem em rol os dados coletados pela turma e que, em seguida, organizem esses dados em uma tabela de distribuição de frequências.

Os dados estatísticos podem ser organizados de diversas formas. É possível que os alunos já tenham repertório para ler, interpretar e construir alguns gráficos, por isso é importante que nesse momento eles analisem que tipo de gráfico é mais conveniente para representar determinada informação. Ao trabalhar com gráficos de segmentos e de barras (verticais e horizontais), é possível discutir com os alunos quais tipos de situação podem ser mais bem representadas por esses tipos de gráfico e falar sobre as possíveis vantagens e desvantagens de utilizar cada um deles em determinado contexto. Para enriquecer essa discussão, você pode propor que eles busquem em jornais, revistas ou na internet notícias que façam uso de cada um desses tipos de gráficos, que os interpretem e que procurem refletir a respeito da conveniência ou não da forma de representação escolhida em cada situação.

Essa análise é importante, pois, quando tiverem de optar pela organização de dados em um tipo de gráfico, os alunos deverão saber que características são relevantes para então optar por um ou por outro. Após essa discussão, espera-se que percebam, por exemplo, que os gráficos de segmentos são frequentemente usados para a apresentação de dados que variam ao longo de determinado período de tempo, ou para identificar tendências de aumento ou decréscimo dos dados apresentados. É importante que eles sejam estimulados a identificar os intervalos de crescimento, de decréscimo ou de constância da variável representada ao trabalhar com esse tipo de gráfico.

Antes de trabalhar a construção de gráficos de setores, é útil retomar as ideias de medidas de ângulos e proporcionalidade. Para a construção e interpretação de um gráfico de setores, é importante que os alunos tenham alguns referenciais, como 50% (metade do círculo) e 25% (metade da metade). Isso facilita a identificação de valores sem necessidade de realizar cálculos exatos.

Ao introduzir as ideias de cartograma e pictograma, pode-se solicitar aos alunos que busquem exemplos desses tipos de representação. Segue um exemplo de pictograma.



Dados fictícios.

LUIZ RUBIO

A interpretação dos pictogramas e dos cartogramas também deve ser suficientemente explorada em sala de aula, e os exemplos trazidos pelos alunos podem contribuir para a realização de atividades relacionadas ao assunto.

O estudo da probabilidade é importante, uma vez que os conhecimentos probabilísticos podem auxiliar os alunos a compreender fenômenos de chance ou aleatórios, bem como a interpretar diferentes informações probabilísticas que fazem parte de seu cotidiano, como, por exemplo, previsões meteorológicas ou financeiras, riscos de ocorrência de uma doença etc. É importante que os alunos vivenciem, por exemplo, experiências relacionadas a lançamentos sucessivos de moedas ou dados ou relacionadas a sorteios, pois isso poderá contribuir para que compreendam fenômenos aleatórios e atribuam significado ao conceito de probabilidade.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 10

Triângulos

Conteúdos abordados

Triângulo (principais elementos de um triângulo e construção de triângulos com régua e compasso); classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e quanto às medidas dos ângulos; cevianas notáveis (mediana, altura e bissetriz); pontos notáveis de um triângulo (baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro); casos de congruência de triângulos (LAL, ALA, LLL e LAA_o); soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo (teorema angular de Tales); propriedades dos triângulos isósceles; propriedades dos triângulos retângulos

Objetivos

- Identificar os principais elementos de um triângulo (vértices, lados, ângulos internos e ângulos externos).
- Construir triângulos com o auxílio de régua e compasso.
- Classificar triângulos quanto às medidas de seus lados e quanto às medidas de seus ângulos internos.
- Identificar alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo.
- Compreender as propriedades dos pontos notáveis de um triângulo (baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro).
- Resolver situações-problema que envolvam a obtenção de cevianas e dos pontos notáveis de um triângulo.
- Compreender o conceito de congruência de triângulos e reconhecer triângulos congruentes segundo um dos casos: LAL, ALA, LLL e LAA_o.
- Compreender o porquê de a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo ser igual a 180°.
- Compreender algumas propriedades especiais observadas nos triângulos isósceles e nos triângulos equiláteros.
- Compreender algumas propriedades especiais dos triângulos retângulos.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

Antes de iniciar a discussão da situação de abertura do capítulo (**páginas 206** e **207**), você pode fazer uma busca (ou mesmo pedir aos alunos que façam) por imagens de estruturas em que se percebe a utilização de triângulos, como as que se seguem.

DOUGLAS LUZZ

Biblioteca do Centro Universitário do Triângulo (Unitri), em Uberlândia, MG, 2008.

LÍVIA STUMPF/AG. RBS/FOLHAPRESS

Terminal de ônibus Triângulo, em Porto Alegre, RS, 2013.

MAURICIO SIMONETTI/PULSAR IMAGENS

Plataforma de embarque e desembarque da estação Barra Funda do metrô, em São Paulo, SP, 2012.

DAVID HUGHES/SHUTTERSTOCK

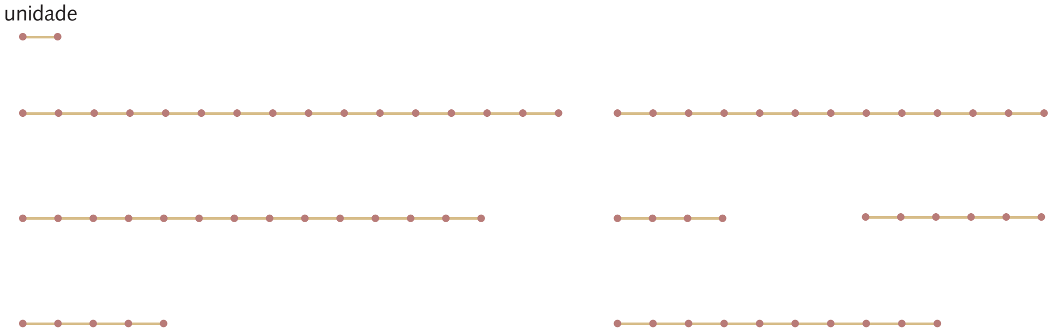
Porteira em zona rural.

Pode-se mostrar essas imagens aos alunos e questioná-los a respeito do porquê da presença tão constante de triângulos em estruturas arquitetônicas. Esse pode ser o momento adequado para comentar sobre a “rigidez” dos triângulos. É importante que os alunos compreendam que é impossível alterar os ângulos internos de um triângulo mantendo as medidas de seus lados fixas, mas que o mesmo não ocorre com os demais polígonos. Você pode propor a eles que construam alguns polígonos, entre eles triângulos, usando canudinhos ou varetas para que se convençam disso.

Ao trabalhar a situação-problema apresentada nas páginas de abertura deste capítulo (**páginas 206** e **207**) e a seção *Trocando ideias* (**página 208**), você pode investigar o que os alunos já conhecem a respeito dos triângulos para, então, com base no conhecimento prévio deles, planejar a abordagem que fará a respeito dos conteúdos a serem estudados no capítulo.

É interessante que os próprios alunos construam a ideia de que, para construir um triângulo, é necessário que a medida do lado maior seja menor que a soma das medidas dos outros dois lados. A atividade a seguir pode ser proposta para que eles cheguem a essa conclusão além de reafirmar a chamada feita na seção *Cuidado!* da **página 210**.

- Utilizando um palito de fósforo como unidade, construa varetas com comprimento 3, 4, 5, 9, 12, 13 e 15, conforme mostram as ilustrações a seguir:



LUIZ RUBIO

a) Utilizando três varetas de cada vez, construa triângulos.

b) Determine as medidas dos lados dos triângulos que você formou. *Resposta*: É possível construir triângulos com as seguintes medidas: 15, 13 e 12; 15, 13 e 9; 15, 13 e 5; 15, 13 e 4; 15, 13 e 3; 15, 12 e 9; 15, 12 e 5; 15, 12 e 4; 13, 12 e 9; 13, 12 e 5; 13, 12 e 4; 13, 12 e 3; 13, 9 e 5; 12, 9 e 5; 12, 9 e 4; 5, 4 e 3.

c) Sempre que você manipulou três das varetas foi possível construir um triângulo? *Resposta*: não

d) Dê um exemplo de três medidas de varetas que não permitiram a formação de um triângulo. *Exemplo de resposta*: varetas de comprimento 12, 5 e 3.

e) Escreva o que precisa acontecer para que exista um triângulo. *Resposta*: Espera-se que os alunos percebam que para construir um triângulo é necessário que a medida do lado maior seja menor que a soma das medidas dos outros dois.

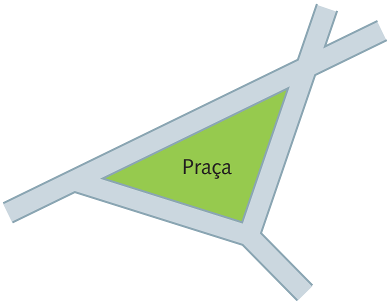
f) É possível construir um triângulo *ABC* em que: *BC* = 7 cm, *AB* = 3 cm, *AC* = 2 cm? Por quê? *Resposta*: Não, porque a medida do maior lado (7 cm) é maior que a soma das medidas dos outros dois (5 cm).

Além de utilizar régua e compasso, explore a construção de triângulos considerando cada um dos casos analisados pelo livro com o auxílio do *software* Geogebra. É importante que os alunos saibam trabalhar e realizar construções geométricas tanto com os instrumentos euclidianos (régua não graduada e compasso) quanto com os *softwares* que permitem uma abordagem dinâmica da Geometria.

O *software* Geogebra pode ser utilizado também para explorar os pontos notáveis de um triângulo (baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro) e suas propriedades, que devem ser percebidas pelos próprios alunos antes de serem formalizadas. Caso a escola disponha de um laboratório de informática, você pode pedir aos alunos que, com o auxílio do *software*, determinem os pontos notáveis de diferentes triângulos e investiguem a propriedade de cada um. Espera-se que observem que: o incentro é ponto equidistante dos lados do triângulo; o circuncentro é o ponto equidistante dos vértices do triângulo; o baricentro divide as medianas na razão de 2 para 1; e o ortocentro pode ser interno, coincidir com um dos vértices ou ser externo ao triângulo, caso o triângulo seja acutângulo, retângulo ou obtusângulo, respectivamente.

Seguem algumas sugestões de problemas que podem ser propostos aos alunos e que envolvem os pontos notáveis de um triângulo:

- Três casas foram construídas em uma região plana. Sabendo que as casas não são colineares e que elas devem ser iluminadas por um único poste localizado a uma mesma distância do portão das casas, utilize seus conhecimentos de Geometria para fazer uma ilustração da situação descrita, indicando onde deve ser colocado esse poste. Justifique seu raciocínio.
- A prefeitura de uma cidade mandou colocar, na praça principal da localidade, uma estátua em homenagem a um morador ilustre. Indique, na planta a seguir, onde a estátua deve ser colocada, sabendo que ela deve estar localizada a uma mesma distância das três ruas que determinam a praça. Explique qual foi o raciocínio que você adotou.



LUIZ RUBIO

Espera-se que os alunos, no primeiro problema, percebam que o poste deve estar localizado no circuncentro do triângulo cujos vértices correspondem ao portão de cada uma das casas. Já no segundo problema, espera-se que os alunos percebam que a posição da estátua deve coincidir com o incentro do triângulo cujos vértices correspondem às intersecções entre as ruas.

A atividade 10 da **página 217** pode ser explorada com o auxílio do Geogebra para que os alunos desconfiem que a conclusão obtida pode ser válida para qualquer triângulo equilátero, e não apenas para o triângulo equilátero construído.

Ao trabalhar com os casos de congruência de triângulos, você pode comentar com os alunos que o modo usual de representar que dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes ($ABC \cong A'B'C'$) indica que o vértice A corresponde ao vértice A', o vértice B corresponde ao vértice B' e o vértice C corresponde ao vértice C'.

A organização das ideias e a utilização correta da linguagem matemática são aspectos importantes de enfatizar durante o ensino da Matemática, e questões envolvendo demonstrações são especialmente indicadas para o desenvolvimento desses tipos de habilidade. As atividades 2, 3, 4, 5 e 6 da **página 221**, a atividade 4 da **página 226**, a atividade 3 da **página 228** e as atividades 10, 11, 12, 13, 14 e 15 do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 229** e **231**) incentivam os alunos a argumentarem. Esse pode ser o momento oportuno para você observar e trabalhar as dificuldades apresentadas por eles no que tange tanto aos conceitos trabalhados quanto à maneira de expressarem suas ideias.

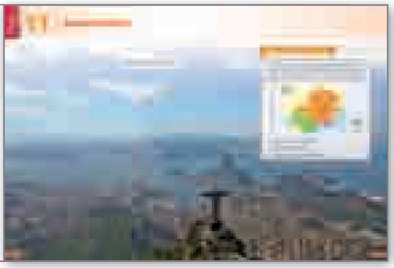
A fim de ampliar as informações sobre Tales de Mileto, presentes na seção *Um Pouco de História* (**página 222**), você pode solicitar aos alunos que façam uma pesquisa a respeito das principais contribuições do matemático grego para o desenvolvimento da Matemática, em especial da Geometria. Você pode inclusive firmar uma parceria com o professor de História para trabalhar o contexto histórico em que os matemáticos gregos, como Tales, desenvolviam seus trabalhos em Matemática ou Astronomia.

Ao trabalhar com as propriedades dos triângulos isósceles e retângulos, é possível, por meio de observações e experimentações (com o Geogebra, por exemplo), que os alunos reconheçam as propriedades particulares desses triângulos. Você pode recorrer também à ideia de simetria axial para justificar algumas dessas propriedades.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 11

Quadriláteros



Conteúdos abordados

Quadriláteros (elementos, convexidade e classificação); soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo; paralelogramos (propriedades, retângulo, losango e quadrado); trapézios (trapézio retângulo, isósceles e escaleno)

Objetivos

- Identificar os elementos de um quadrilátero.
- Reconhecer quadriláteros côncavos e convexos.
- Compreender o conceito de paralelogramo e suas propriedades fundamentais.
- Reconhecer como paralelogramos o retângulo, o losango e o quadrado e distinguir esses quadriláteros.
- Compreender o conceito de trapézio e suas propriedades fundamentais.
- Reconhecer trapézios isósceles, escaleno e retângulo.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

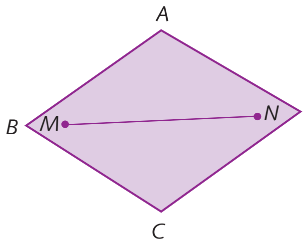
A situação apresentada nas páginas de abertura deste capítulo (**páginas 232** e **233**) oferece uma oportunidade para que você trabalhe com os alunos a leitura de mapas. Você pode propor as seguintes questões: Sobre o que é o mapa? Qual de vocês mora ou já morou em algum desses estados? Quais são as outras regiões do Brasil? Esse pode ser o momento oportuno para promover uma atividade interdisciplinar com o professor de Geografia sobre as regiões brasileiras e a leitura de mapas. Podem-se aproveitar as questões propostas para fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos.

Na seção *Trocando ideias* (**página 234**) são explorados elementos presentes no cotidiano e que lembram quadriláteros. Você pode pedir para que observem o ambiente da sala de aula e que identifiquem partes de objetos que lembrem quadriláteros. Ainda nessa seção, exploram-se algumas obras de arte em que estão presentes quadriláteros. Se julgar necessário, você pode, em parceria com o professor de Arte, pedir aos alunos que pesquisem outras obras de arte, como, por exemplo, a dos brasileiros Hélio Oiticica, Amilcar de Castro, Lygia Clark e Lygia Pape em que compareçam, entre outras figuras, os quadriláteros.

É importante que, no decorrer dos estudos sobre quadriláteros, sua representação seja feita em diferentes posições para evitar que o aluno construa mentalmente uma imagem particular do que seja um quadrilátero.

A comparação entre a rigidez do triângulo e a mobilidade do quadrilátero é muito interessante, e você pode explorá-la usando material concreto, como varetas e canudos, presos por barbante.

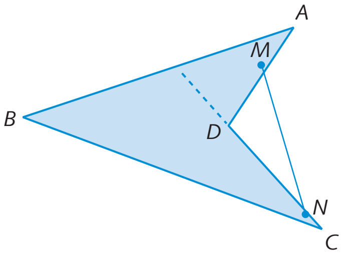
Para que os alunos diferenciem um quadrilátero convexo de outro não convexo, você pode comentar que um quadrilátero é convexo se, e somente se, todo segmento de reta com extremidades no quadrilátero só tem pontos do quadrilátero. Por exemplo, o quadrilátero abaixo é convexo porque todo segmento de reta que for escolhido (desde que suas extremidades pertençam ao quadrilátero) só tem pontos do mesmo quadrilátero.



LUIZ RUBIO

quadrilátero convexo

Já um quadrilátero é não convexo quando existe pelo menos um segmento de reta com extremidades no quadrilátero que contém pontos que não pertencem ao mesmo quadrilátero.



LUIZ RUBIO

quadrilátero não convexo

Atividades cuja proposta é mostrar ou justificar certas propriedades devem ser incentivadas. A argumentação e a demonstração são aspectos fundamentais da Matemática, não somente para explicar um resultado, mas como descoberta e invenção de novos resultados. Para tal, o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica (por exemplo, o Geogebra) propicia a investigação e a produção de conjecturas, aspectos fundamentais para que os alunos desenvolvam a competência de demonstrar. A procura de padrões e generalizações possibilita novas descobertas e se torna um desafio intelectual prazeroso para muitos alunos.

Para que os alunos se convençam de que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, é importante que eles experimentem a maneira indicada na **página 238**.

Você pode chamar a atenção dos alunos para o fato de que um quadrado é também um losango, uma vez que tem todos os lados com medidas iguais, e também é um retângulo, pois cada um de seus ângulos internos mede 90°.

Para ampliar a proposta das atividades, você pode pedir aos alunos que construam retângulos e quadrados usando régua e esquadro, ou régua e compasso. Essa é uma forma de articular o conceito de retas paralelas e perpendiculares, estudado anteriormente, com os conceitos desse capítulo.

É possível também propor aos alunos que construam mosaicos utilizando os quadriláteros estudados no capítulo. Em seguida, pode-se propor que construam um mural, para que suas produções sejam expostas na escola. Essa atividade pode ser realizada com a colaboração do professor de Arte.

As atividades do item *Revisitando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 250** e **251**) possibilitam que você avalie o que os alunos apreenderam e identifique as dificuldades enfrentadas. Se julgar necessário, retome algum conceito trabalhado.

CAPÍTULO 12

Circunferência e círculo

Conteúdos abordados

Circunferência e círculo (noções circunferência e de círculo, elementos da circunferência, corda e diâmetro de uma circunferência); posições de um ponto em relação a uma circunferência; posições de uma reta em relação a uma circunferência (reta secante, reta tangente e reta externa); posições relativas de duas circunferências (circunferências secantes, tangentes exteriores, tangentes interiores, externas, internas); segmentos tangentes (polígonos circunscritos a uma circunferência); arco de circunferência e ângulo central; ângulo inscrito

Objetivos

- Distinguir circunferência de círculo e identificar os elementos principais de ambos.
- Identificar a posição de uma circunferência em relação a um ponto, a uma reta e a outra circunferência e compreender as especificidades observadas em cada uma dessas posições.
- Compreender as propriedades satisfeitas por segmentos tangentes a uma circunferência.
- Compreender a noção de polígono circunscrito a uma circunferência.
- Compreender o conceito de arco de circunferência, a noção de ângulo central e como determinar a medida de tal ângulo.
- Compreender o conceito de ângulo inscrito a uma circunferência, como determinar a medida de tal ângulo e algumas propriedades válidas para ângulos inscritos particulares.

Orientações

A situação apresentada nas páginas de abertura deste capítulo (**páginas 252** e **253**) oferece uma oportunidade para que você faça um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos conceitos de circunferência e círculo. Você pode, por exemplo, pedir a eles que tentem explicar, como souberem, o que é uma circunferência e o que é um círculo.

Na seção *Trocando ideias* (**página 254**), comenta-se que a roda foi uma das grandes criações do ser humano. Com base nisso, pode-se pedir aos alunos que façam uma pesquisa a respeito da invenção da roda, das consequências e da importância de tal evento.

Ao trabalhar os conceitos de corda, raio e diâmetro de circunferências e círculos, você pode reproduzir na lousa as seguintes afirmações para que os alunos julguem quais são verdadeiras e quais são falsas.

- O diâmetro é uma corda. *Resposta*: verdadeira
- O comprimento do raio corresponde ao dobro do comprimento do diâmetro. *Resposta*: falsa
- O raio é uma corda. *Resposta*: falsa
- Não existe corda que passe pelo centro de um círculo. *Resposta*: falsa

A posição de uma circunferência em relação a um ponto, a uma reta e a outra circunferência pode ser obtida e explorada pelos alunos com o auxílio, por exemplo, do Geogebra. É possível que, por meio da interação com o *software,* os alunos percebam as relações entre o raio da circunferência e a distância dessa mesma circunferência ao ponto, à reta ou a outra circunferência.

A observação apresentada na **página 265** (no caso das circunferências tangentes exteriores e interiores, os centros O_1 e O_2 e o ponto de tangência T estão sempre alinhados) também pode ser percebida pelos alunos por meio de investigações realizadas com o Geogebra.

Antes de enunciar e demonstrar a propriedade de que os segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são congruentes, você pode propor uma atividade, utilizando o Geogebra, para que os próprios alunos a conjecturem. Segue um exemplo de como você pode conduzir tal atividade.

Trace uma circunferência e um ponto P em sua região exterior. Em seguida, faça o que se pede.

- Por P, construa as duas tangentes à circunferência e chame os pontos de tangência de Q e R.
- Relacione as medidas de $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$.
- Movimente o ponto P e verifique se a relação continua válida.

Os alunos costumam atribuir significado à demonstração de uma propriedade matemática quando estão convencidos de sua validade e, por esse motivo, atividades preliminares que estimulem a observação e a experimentação são de grande valia.

Ao trabalhar com as noções de arco de circunferência e ângulo central, é possível chamar a atenção dos alunos para o fato de que, se um arco tem medida igual a $x°$, o arco complementar terá medida igual a $360° - x°$. Para ampliar a proposta das atividades desse tópico, você pode propor a seguinte atividade aos alunos.

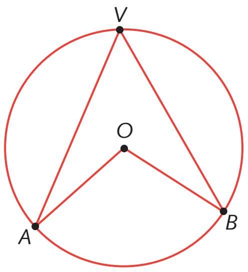
Determine a medida do arco tal que seu comprimento corresponda:

- à metade do comprimento da circunferência. *Resposta*: 180°
- à um quarto do comprimento da circunferência. *Resposta*: 90°
- à um terço do comprimento da circunferência. *Resposta*: 120°

É interessante mostrar aos alunos que tal atividade também pode ser resolvida utilizando a regra de três simples.

Pode-se propor que, no Geogebra, os alunos descubram a relação entre a medida do ângulo inscrito na circunferência e a do ângulo central correspondentes ao mesmo arco. Segue um exemplo de como você pode conduzir tal atividade.

Construa, utilizando o Geogebra, a figura a seguir, em que o ponto O é o centro e os pontos A, B e V são pontos sobre a circunferência. Em seguida, faça o que se pede.



LUIZ RUBIO

- Meça os dois ângulos, $A\hat{V}B$ e $A\hat{O}B$, e determine a razão entre os valores encontrados.
- Movimente o ponto A ou B sobre a circunferência. O que você pode observar? *Resposta*: Espera-se que os alunos percebam que a medida de $\overset{\frown}{AB}$ mantém-se o dobro da medida de $\overset{\frown}{AVB}$.

- Movimente o ponto *V*, no arco $\overset{\frown}{AVB}$, sem movimentar os pontos *A* e *B*. O que ocorre com a medida do ângulo $A\hat{V}B$? *Resposta*: A medida de $A\hat{V}B$ mantém-se constante.
- Qual a relação entre a medida de um ângulo inscrito e a medida do ângulo central correspondentes ao mesmo arco de uma semicircunferência? *Resposta*: A medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito correspondente.

O fato de que ângulos inscritos que determinam o mesmo arco na circunferência são congruentes também pode ser percebido por meio de investigações realizadas no Geogebra. Segue um exemplo de como você pode conduzir tal atividade.

Trace uma circunferência e determine o arco de extremos *A* e *B* sobre ela. Em seguida, faça o que se pede.

- Nessa circunferência, construa dois ângulos inscritos distintos, com vértices *E* e *F*, respectivamente, correspondentes ao arco $\overset{\frown}{AB}$.
- Meça os ângulos construídos. Altere o arco, movimentando o ponto *A* ou o ponto *B*. Em seguida, movimente os pontos *E* e *F*. O que você pode observar? *Resposta*: Os ângulos $A\hat{E}B$ e $A\hat{F}B$ são congruentes e se mantêm congruentes.

O boxe *Desafio* da **página 280** do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* solicita aos alunos que mostrem que o perímetro de todo trapézio circunscrito a um círculo é igual ao quádruplo da média aritmética das medidas das bases desse trapézio. Para que mostrem esse resultado é útil recordar a propriedade trabalhada na **página 268**: a soma das medidas de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência é igual à soma das medidas dos outros dois.

Dessa forma, se denotarmos por *x* e *y* as medidas das bases do trapézio e por *w* e *z* as medidas dos lados não paralelos, temos que o perímetro do trapézio é dado por:

$x + y + z + w$

Como $x + y = w + z$, temos que o perímetro será:

$$2 \cdot (x + y) = 4 \cdot \left(\frac{x + y}{2}\right)$$

Portanto, o perímetro do trapézio circunscrito a um círculo é igual ao quádruplo da média aritmética das medidas das bases desse trapézio.

Espaço para anotações do professor