Ênio Silveira

MATEMÁTICA
COMPREENSÃO E PRÁTICA

9º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular: MATEMÁTICA

MODERNA

Ênio Silveira
Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular. Autor de obras didáticas de Matemática.

MATEMÁTICA
COMPREENSÃO E PRÁTICA

9º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

3ª edição
São Paulo, 2015

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay
Edição de texto: Luana Fernandes de Souza, Maria Cecília da Silva Veridiano,
Dario Martins de Oliveira, Maria Aiko Nishijima, Zuleide Maria Vilela da Motta Talarico
Assistência editorial: Izabel Batista Bueno, Roberto Paulo de Jesus Silva
Gerência de *design* e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Coordenação de *design* e projeto gráfico: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Aurélio Camilo, Daniel Messias
Capa: Daniel Messias
Foto: Foto 360° do *Empire State*, New York, 2012.
© Randy Scott Slavin
Coordenação de arte: Patricia Costa, Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: William Taciro, Mauro César Brosso, Alexandre Santana de Paula
Ilustrações de vinhetas: Daniel Messias
Coordenação de revisão: Adriana Bairrada
Revisão: Cecília Setsuko Oku, Fernanda Marcelino, Leandra Trindade, Rita de Cássia Sam,
Thiago Dias, Vânia Cobiaco
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Maria Mendonça
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Bureau São Paulo, Fabio N. Precendo, Marina M. Buzzinaro,
Resolução Arte e Imagem
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira,Hélio P. de Souza Filho,
Marcio H. Kamoto, Rubens M. Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Matemática : compreensão e prática / Ênio
Silveira. — 3. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02026 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2015
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro aluno,

Ideias, por mais brilhantes e elaboradas que sejam, só adquirem um sentido maior quando encontram aplicação no dia a dia.

A Matemática jamais deve ser vista como problema, mas sim como solução. Ela nos conduz por caminhos aparentemente tortuosos ou inacessíveis, abrindo atalhos, encurtando distâncias e superando obstáculos cotidianos ou científicos.

Com as situações apresentadas neste livro, você adquirirá conhecimentos que ajudarão no desenvolvimento da sua formação escolar, pessoal e profissional. Em cada página estudada, tarefa resolvida ou atividade solucionada, você perceberá que a Matemática é uma ferramenta poderosa que pode te ajudar a resolver muitos problemas.

O autor

Aos meus pais,
Isaías, Maria Amélia (*in memoriam*)

ESTRUTURA DE CAPÍTULO

Cada volume está dividido em capítulos, organizados de acordo com esta estrutura:

PÁGINAS DE ABERTURA

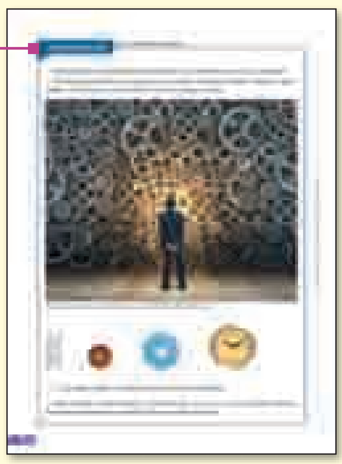
O conteúdo do capítulo é explorado inicialmente em duas páginas de abertura, compostas de uma imagem e o boxe "É hora de observar e discutir".

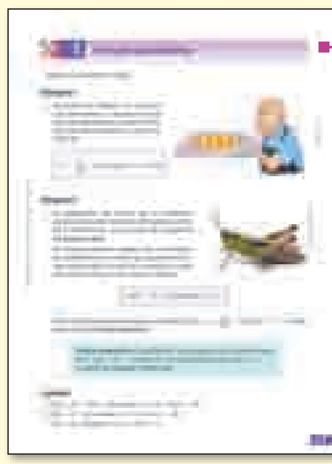
É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Composto de um texto que explora a imagem da abertura e atividades que incentivarão você a refletir sobre o conteúdo que será trabalhado, considerando o conhecimento obtido em capítulos ou em anos anteriores.

TROCANDO IDEIAS

Situação introdutória sobre o conteúdo abordado no capítulo.



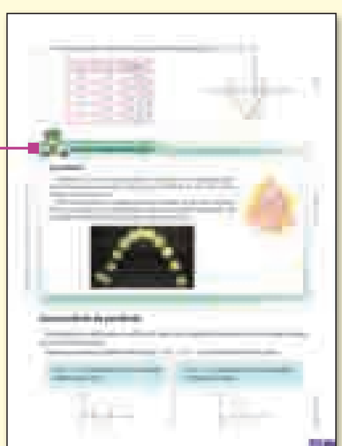


APRESENTAÇÃO DOS CONTEÚDOS

O conteúdo é apresentado de forma clara e direta.

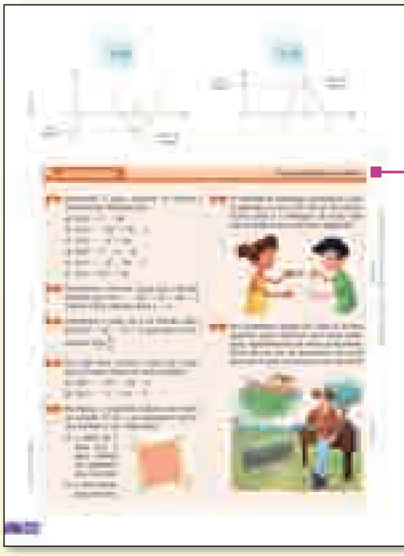
LENDO E APRENDENDO

Texto que explica e enriquece o conteúdo principal.



UM POUCO DE HISTÓRIA

Contextualização do conteúdo na história da Matemática.



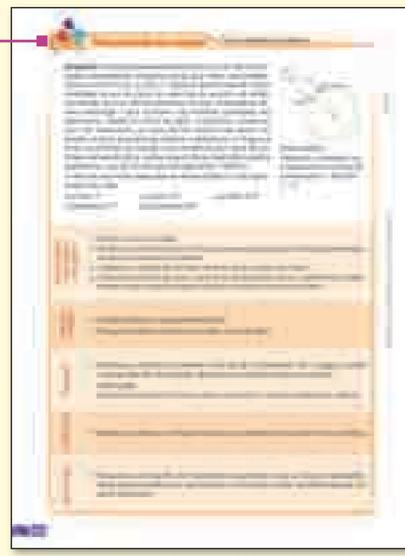
ATIVIDADES

Após cada conteúdo estudado, propomos atividades com nível de dificuldade crescente. Algumas delas abordam o cálculo mental e o trabalho com a calculadora. Outras propõem a discussão e a resolução em dupla.
Os ícones ajudarão você a identificar essas atividades.

- cálculo mental
- trabalho com a calculadora
- duplas

RESOLVENDO EM EQUIPE

Em alguns capítulos, há uma proposta de atividade para incentivar a participação coletiva dos alunos na resolução de situações-problema.



TRABALHANDO OS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS

Atividades que, no final de cada capítulo, abordam todo o conteúdo apresentado. A seção é dividida em duas partes:

- *Revisitando* – composta de atividades de revisão e autoavaliação;
- *Aplicando* – explora o conteúdo por meio de atividades com diferentes níveis de dificuldade, incluindo atividades "Desafio" e algumas do **Enem**.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

ALLAN MORTON/DENNIS MILON/ SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

Potenciação e radicais 10

CAPÍTULO 2

EDUARDO NADDAR/AGÊNCIA O GLOBO

Equações do 2º grau 42

CAPÍTULO 3

THALES ANTONIO

Função afim 68

CAPÍTULO 4

ACKYARD PRODUCTIONS/ ALAMY/GLOW IMAGES

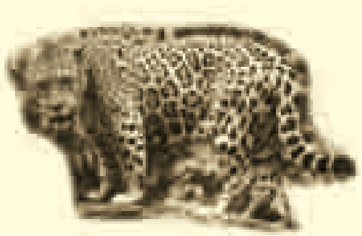
Funções quadráticas 88

CAPÍTULO 5

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Estatística e probabilidade 106

CAPÍTULO 6



LUIZ CLÁUDIO MARIGO /OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Segmentos proporcionais e semelhança 132

CAPÍTULO 7

XINHUA/PHOTOSHOT/OTHER IMAGES

Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas 172

CAPÍTULO 8

RIEGER BERTRAND/HEMIS/GLOW IMAGES

Circunferência, arcos e relações métricas 206

CAPÍTULO 9

DADO GALDIERI/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Polígonos regulares 226

CAPÍTULO 10

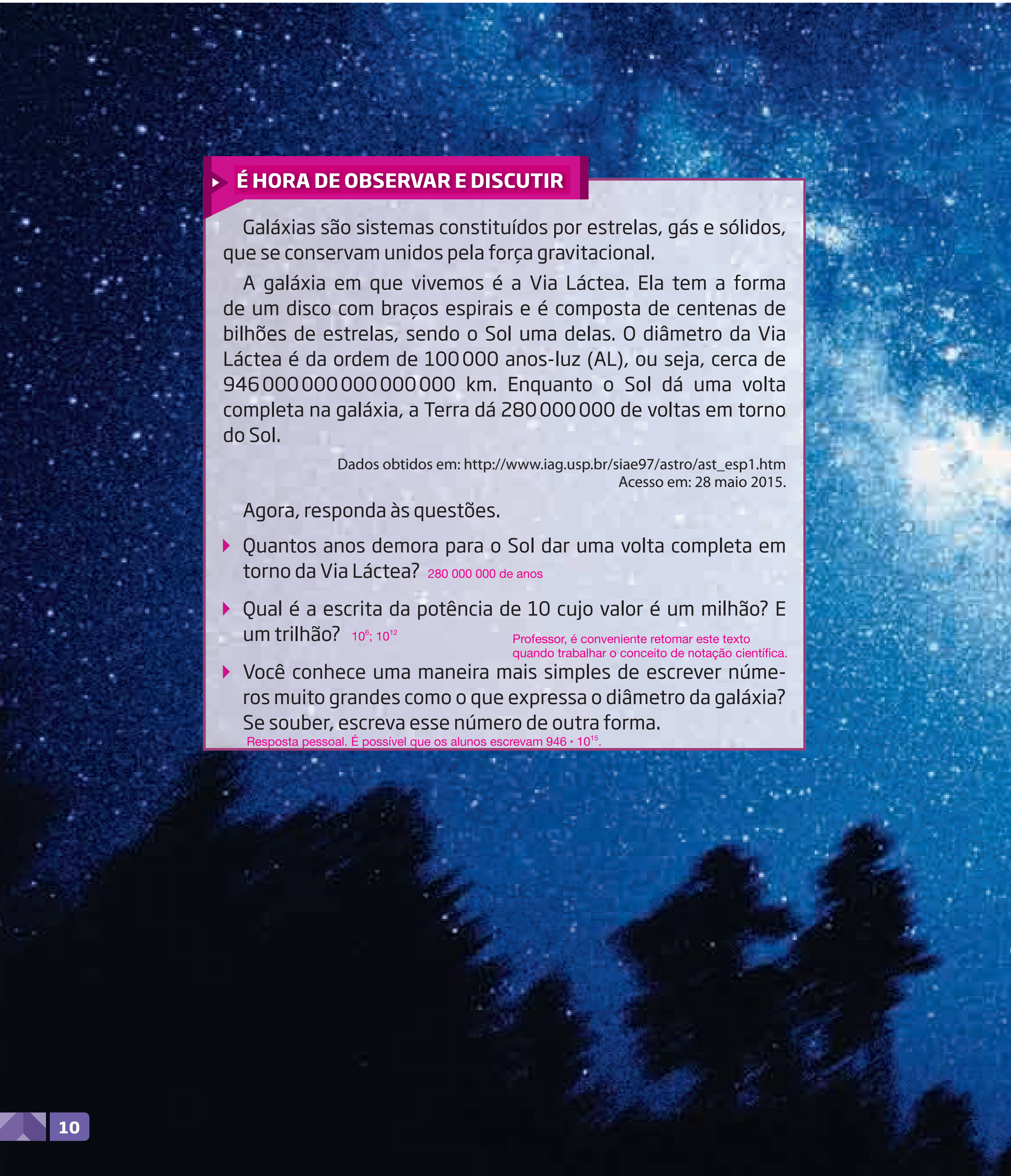
SAHARA FOREST PROJECT/ SAHARAFORESTPROJECT.COM

CAPÍTULO 11

ANDRÉ LESSA/AGÊNCIA ESTADO

CAPÍTULO

1 POTENCIAÇÃO E RADICAIS



É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Galáxias são sistemas constituídos por estrelas, gás e sólidos, que se conservam unidos pela força gravitacional.

A galáxia em que vivemos é a Via Láctea. Ela tem a forma de um disco com braços espirais e é composta de centenas de bilhões de estrelas, sendo o Sol uma delas. O diâmetro da Via Láctea é da ordem de 100 000 anos-luz (AL), ou seja, cerca de 946 000 000 000 000 000 km. Enquanto o Sol dá uma volta completa na galáxia, a Terra dá 280 000 000 de voltas em torno do Sol.

Dados obtidos em: http://www.iag.usp.br/siae97/astro/ast_esp1.htm
Acesso em: 28 maio 2015.

Agora, responda às questões.

- Quantos anos demora para o Sol dar uma volta completa em torno da Via Láctea? 280 000 000 de anos
- Qual é a escrita da potência de 10 cujo valor é um milhão? E um trilhão? 10^6; 10^{12}

Professor, é conveniente retomar este texto quando trabalhar o conceito de notação científica.

- Você conhece uma maneira mais simples de escrever números muito grandes como o que expressa o diâmetro da galáxia? Se souber, escreva esse número de outra forma.
Resposta pessoal. É possível que os alunos escrevam $946 \cdot 10^{15}$.

Neste capítulo, vamos trabalhar com as propriedades das potências com expoentes inteiros. Serão apresentados os conceitos e as propriedades dos radicais. O aluno vai poder trabalhar com a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão, a potenciação e os produtos notáveis envolvendo radicais. Na abertura do capítulo, temos a aplicação da potenciação para expressar números muito grandes.

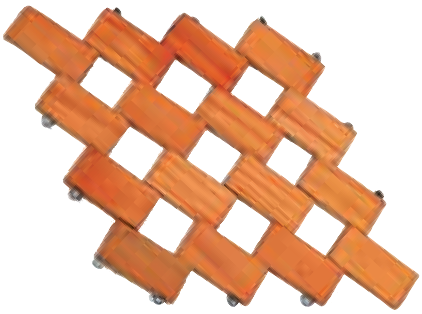
ALLAN MORTON/DENNIS MILON/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

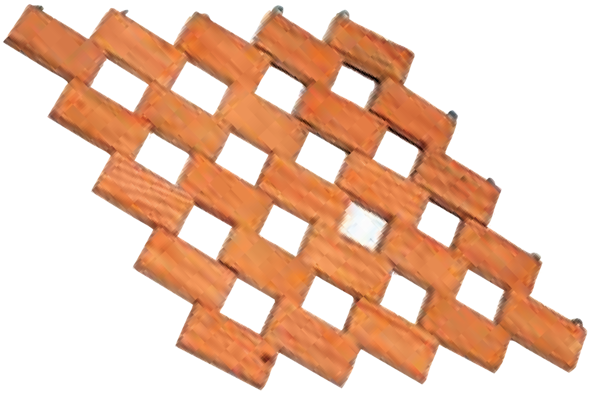
Esta foto, de 1982, mostra um olhar em direção ao centro da Via Láctea, a cerca de 30 000 AL do Sol.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Para servir a refeição quente em travessas e demais utensílios, Olga usa esses descansos de mesa.





Observe que o menor desses descansos de mesa tem quatro fileiras de quatro peças, portanto, 4^2 peças. Entre essas peças, o descanso apresenta três fileiras de três espaços vazios, ou 3^2 espaços vazios. Ao todo, nesse descanso, são 16 peças e 9 espaços vazios.

O descanso maior tem 5^2 peças de madeira e 4^2 espaços vazios. Ao todo são 25 peças e 16 espaços vazios.

Agora, responda às questões.

- Quantas peças e quantos espaços vazios tem um descanso, semelhante a esses, com lados de 6 peças? E com lados de 7 peças? 6^2 ou 36 peças, 5^2 ou 25 espaços vazios; 7^2 ou 49 peças, 6^2 ou 36 espaços vazios.
- Quantas peças e quantos espaços vazios tem o superdescanso da foto abaixo?
  12^2 ou 144 peças e 11^2 ou 121 espaços vazios.

1 Potência de um número real com expoente inteiro

Considere a potência a^n, em que a é um número real e n é um número inteiro. Como determinar o valor dessa potência, caso o expoente n seja um número maior que 1, igual a 1, nulo ou negativo? Observe os casos a seguir.

O expoente é um número inteiro maior que 1

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ com } n > 1$$

Exemplos

- $2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ fatores}} = 16$
- $3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ fatores}} = 243$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}_{2 \text{ fatores}} = \frac{1}{4}$
- $(-0{,}5)^3 = \underbrace{(-0{,}5) \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}5)}_{3 \text{ fatores}} = -0{,}125$

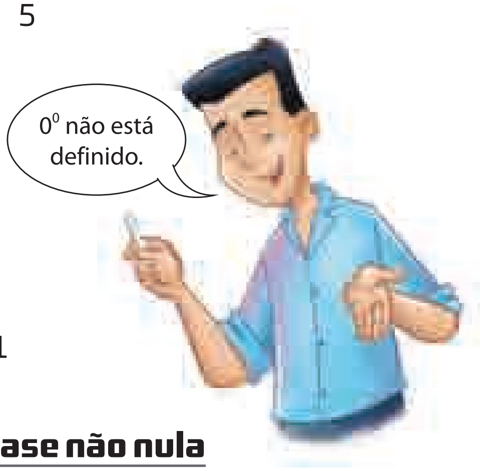
O expoente é 1

$$a^1 = a$$

Exemplos

- $7^1 = 7$
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$

O expoente é zero, com base não nula



GEORGE TUTUMI

$$a^0 = 1, \text{ com } a \neq 0$$

Exemplos

- $5^0 = 1$
- $\left(-\frac{8}{9}\right)^0 = 1$

O expoente é um número inteiro negativo, com base não nula

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ com } a \neq 0$$

Exemplos

- $5^{-1} = \frac{1}{5}$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{3}$
- $(-7)^{-2} = \left(-\frac{1}{7}\right)^{2} = \frac{1}{49}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = -\frac{27}{8}$

Observações

1 Quando a base é negativa, o sinal da potência é:

- positivo, se o expoente é par.

  $(-0{,}1)^2 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = 0{,}01$

- negativo, se o expoente é ímpar.

  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

2 Convenciona-se que -2^4 representa $-(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$, enquanto que $\underbrace{(-2)}_{\text{base}}{}^4$ é igual a $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Logo: $-2^4 \neq (-2)^4$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as potências a seguir.

a) 0^7 0

b) -5^2 −25

c) $-(1{,}2)^2$ −1,44

d) $-(-2)^5$ 32

e) $(-5)^2$ 25

f) $-(0{,}3)^0$ −1

g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ $-\frac{8}{27}$

h) $(-0{,}01)^4$ 0,00000001 ou 10^{-8}

i) $-\left(\frac{2}{5}\right)^3$ $-\frac{8}{125}$

j) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$ $\frac{25}{9}$

2 Calcule as potências de expoente negativo.

a) 7^{-1} $\frac{1}{7}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ 25

c) $(-0{,}5)^{-4}$ 16

d) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-1}$ $\frac{9}{5}$

e) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1}$ $-\frac{8}{3}$

f) $(-3)^{-3}$ $-\frac{1}{27}$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$ $\frac{4}{9}$

h) $\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}$ $\frac{16}{49}$

i) 10^{-2} $\frac{1}{100}$

j) $(-1)^{-5}$ −1

k) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-1}$ 100

l) $-(-0{,}1)^4$ −0,0001

3 Calcule cada uma das potências abaixo.

a) 3^2 9

b) 3^1 3

c) 3^0 1

d) 3^{-1} $\frac{1}{3}$

e) 3^{-2} $\frac{1}{9}$

f) 3^{-3} $\frac{1}{27}$

4 Escreva no caderno cada item na forma de potência com expoente inteiro negativo, lembrando que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, com $a \neq 0$.

a) $\frac{1}{10^4}$ 10^{-4} b) $\frac{1}{5^7}$ 5^{-7} c) $\frac{1}{2^3}$ 2^{-3} d) $\frac{1}{7^5}$ 7^{-5}

5 Escreva no caderno os números como potência de base 2.

a) 64 2^6 b) $\frac{1}{32}$ 2^{-5} c) 256 2^8 d) $\frac{1}{64}$ 2^{-6}

6 Calcule o valor das expressões abaixo.

a) $(-3)^2 + (-3)^3$ −18

b) $-(-2)^4 + (-2)^5 \cdot 4^{-3}$ $-\frac{33}{2}$

c) $(4^0 : 4^{-1}) : (4^{-1} : 4^{-2})$ 1

d) $\dfrac{(-1)^5}{(-2)^{-2} + (0{,}1)^{-2}}$ $-\frac{4}{401}$

e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $-\frac{80}{9}$

Propriedades das potências com expoentes inteiros

Vamos prosseguir nosso estudo indicando simbolicamente as propriedades do cálculo com potências de expoente inteiro e base real não nula.

Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplos

- $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3+(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
- $7^2 \cdot 7^{-5} = 7^{2+(-5)} = 7^{-3}$
- $5^{m-1} \cdot 5^{2+m} = 5^{m-1+2+m} = 5^{2m+1}$

Quociente de potências de mesma base

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Exemplos

- $10^2 : 10^5 = 10^{2-5} = 10^{-3}$
- $\frac{(0,3)^5}{(0,3)^2} = (0,3)^{5-2} = (0,3)^3$
- $5^{-2} : 5^{-4} = 5^{-2-(-4)} = 5^{-2+4} = 5^2$
- $3^{2m-1} : 3^{1-m} = 3^{2m-1-(1-m)} = 3^{2m-1-1+m} = 3^{3m-2}$

Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplos

- $(10^5)^{-2} = 10^{5 \cdot (-2)} = 10^{-10}$
- $[(-3)^2]^{-4} = (-3)^{2 \cdot (-4)} = (-3)^{-8}$
- $[(-0,2)^{-3}]^{-1} = (-0,2)^{(-3) \cdot (-1)} = (-0,2)^3$
- $(2^x)^{x-1} = 2^{x \cdot (x-1)} = 2^{x^2 - x}$

Potência de um produto ou de um quociente

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$
$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Exemplos

- $(3 \cdot 5)^{-2} = 3^{-2} \cdot 5^{-2}$
- $(2 : 5)^3 = 2^3 : 5^3$
- $(10 \cdot 0,2)^3 = 10^3 \cdot 0,2^3$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{5^{-2}}$

Observação

Preste muita atenção às desigualdades abaixo, com bases reais não nulas e expoentes inteiros.

- $a^m + a^n \neq a^{m+n}$
- $a^m - a^n \neq a^{m-n}$
- $(a^m)^n \neq a^{m^n}$, com a, m e $n \neq 1$
- $(a + b)^n \neq a^n + b^n$, com: $a \neq -b$; a, b e $n \neq 1$
- $(a - b)^n \neq a^n - b^n$, com $a \neq b$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Aplique as propriedades e expresse os resultados na forma de uma só potência.

a) $3^5 \cdot 3^{-2}$ 3^3

b) $m^5 \cdot m^{-6}$, com $m \neq 0$ m^{-1}

c) $(0{,}1)^{-3} \cdot (0{,}1)^3$ $(0{,}1)^0$

d) $5^{-1} \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$ 5^{-6}

e) $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x-2}$ 5^{3x-1}

f) $a^{x-2} \cdot a^{x+3}$, com $a \neq 0$ a^{2x+1}

2 Transforme em uma só potência.

a) $(5^2)^{-4}$ 5^{-8}

b) $(n^{-5})^4$, com $n \neq 0$ n^{-20}

c) $(0{,}1^3)^{-24}$ $0{,}1^{-72}$

d) $(5^2)^n$ 5^{2n}

e) $5^3 : 5^{12}$ 5^{-9}

f) $\dfrac{x^3}{x^{-2}}$, com $x \neq 0$ x^5

g) $a^{-2} : a^{-3}$, com $a \neq 0$ a^1

h) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

3 Aplique as propriedades das potências de um produto ou de um quociente.

a) $(3 \cdot 7)^4$ $3^4 \cdot 7^4$

b) $(2^4 \cdot a^{-3})^{-1}$, com $a \neq 0$ $2^{-4} \cdot a^3$

c) $(a^{-3} \cdot b^{-2})^5$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ $a^{-15} \cdot b^{-10}$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$ $\dfrac{2^{-3}}{5^{-3}}$

e) $(x^{-1} \cdot y^{-3})^{-2}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$ $x^2 \cdot y^6$

f) $(a^{3x} : b^x)^{-4}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ $a^{-12x} : b^{-4x}$

4 Reduza a uma potência de base 5.

a) 25^4 5^8

b) 125^{-3} 5^{-9}

c) 625^{-1} 5^{-4}

d) $\dfrac{1}{125^2}$ 5^{-6}

e) 25^{-2} 5^{-4}

f) $(0{,}04)^{-3}$ 5^6

5 Determine o valor das potências 2^{3^2} e $(2^3)^2$. 512 e 64

6 Escreva, na forma fracionária, a expressão $(3^{-4})^5$. $\dfrac{1}{3^{20}}$

7 Sendo $a = 10^{-4}$, $b = 10^{-5}$ e $c = 10^3$, determine:

a) $a \cdot b \cdot c$ 10^{-6}

b) $a : b^2$ 10^6

c) $\dfrac{a^2 \cdot b^2}{c^2}$ 10^{-24}

d) $a : (b \cdot c)$ 10^{-2}

8 Simplifique cada expressão.

a) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6}}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$

b) $\dfrac{16^2 \cdot 8^3}{2^9}$ 2^8

c) $\dfrac{x^{10} \cdot (x^2)^4}{x^{-3} : x^2}$, com $x \neq 0$ x^{23}

d) $\dfrac{5^{3x-2} \cdot 5^{x-1}}{5^{x-5}}$ 5^{3x+2}

Lendo e aprendendo

Prefixos mais conhecidos

Você já deve ter ouvido afirmações como estas:

– A medida do comprimento do móvel era de 80 **centí**metros.

– Quero comprar 5 **quilo**gramas de carne.

– A usina termoelétrica produzia 17 **mega**watts de energia.

– O *pendrive* tem 32 **giga**bytes de memória.

As partes em negrito das palavras acima - **centi**, **quilo**, **mega** e **giga** - são denominadas prefixos. Cada prefixo corresponde a uma potência de base 10. A seguir, estão relacionados os prefixos mais conhecidos.

Nome do prefixo	Símbolo do prefixo	Potência de base 10 correspondente ao prefixo	Significado do prefixo na forma decimal
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000 (trilhão)
giga	G	10^{9}	1 000 000 000 (bilhão)
mega	M	10^{6}	1 000 000 (milhão)
quilo	k	10^{3}	1 000 (mil)
hecto	h	10^{2}	100 (cem)
deca	da	10^{1}	10 (dez)
deci	d	10^{-1}	0,1 (décimo)
centi	c	10^{-2}	0,01 (centésimo)
mili	m	10^{-3}	0,001 (milésimo)
micro	μ	10^{-6}	0,000001 (milionésimo)
nano	n	10^{-9}	0,000000001 (bilionésimo)
pico	p	10^{-12}	0,000000000001 (trilionésimo)

Notação científica

Os números muito grandes ou muito próximos de zero podem ser escritos por meio de um produto da forma $\boldsymbol{x \cdot 10^n}$, em que:

- x é um número escrito na forma decimal cuja parte inteira tem um único algarismo diferente de zero;
- n é um número inteiro.

Chamamos essa representação de **notação científica**.

Exemplos

- $\underbrace{5760}_{\text{3 casas}} = 5{,}76 \cdot 10^3$
- $\underbrace{36\,480}_{\text{4 casas}} = 3{,}648 \cdot 10^4$
- $\underbrace{520\,000}_{\text{5 casas}} = 5{,}2 \cdot 10^5$
- $\underbrace{0{,}00075}_{\text{4 casas}} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$
- $\underbrace{0{,}000008}_{\text{6 casas}} = 8 \cdot 10^{-6}$
- $\underbrace{0{,}000000457}_{\text{7 casas}} = 4{,}57 \cdot 10^{-7}$

- Distância da Terra ao Sol $\simeq$ 150 000 000 km
  Notação científica: $1,5 \cdot 10^8$ km
- Velocidade da luz = 300 000 km/s
  Notação científica: $3 \cdot 10^5$ km/s
- Um ano-luz $\simeq$ 9 460 000 000 000 km
  Notação científica: $9,46 \cdot 10^{12}$ km
- Diâmetro da molécula da água = 280 pm =
  $= 280 \cdot 10^{-12}$ m = 0,000000000280 m
  Notação científica: $2,8 \cdot 10^{-10}$ m


MERYDOLLA/SHUTTERSTOCK

A distância aproximada da Terra ao Sol é $1,5 \cdot 10^8$ km.

- Diâmetro de um elétron = 0,000000000000000001 m
  Notação científica: 10^{-18} m
- Femtossegundo = 0,000000000000001 s
  Notação científica: 10^{-15} s

Femtossegundo é uma unidade de medida de tempo que corresponde a 10^{-15} segundo.

Lendo e aprendendo


OWE ANDERSSON/ALAMY/GLOW IMAGES

Calculadora científica

A calculadora científica é ideal para muitos tipos de cálculo.

Ela permite introduzir cálculos na forma como são escritos, além de possibilitar a resolução de cálculos básicos, fracionários, de porcentagem, científicos e estatísticos. Nos *smartphones*, como o da foto, você pode usar uma calculadora científica; basta escolher um aplicativo que inclua essa funcionalidade.

Vamos aprender como utilizar as teclas $\boxed{y^x}$ e $\boxed{x^2}$.

Observe as sequências e verifique os resultados que aparecem no visor de uma calculadora científica. Verifique a conveniência de lembrar aos alunos que calculadoras diferentes, por vezes, requerem procedimentos diferentes para os cálculos.

- $2^3 \longrightarrow \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\quad 8}$
- $2^{-3} \longrightarrow \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}\ \boxed{\quad 0.125}$
- $(-2)^{-3} \longrightarrow \boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}\ \boxed{\quad -0.125}$
- $9^2 \longrightarrow \boxed{9}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\quad 81}$
- $(-9)^2 \longrightarrow \boxed{9}\ \boxed{+/-}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\quad 81}$

A calculadora científica também mostra números em notação científica. Observe alguns casos:

- $4 \cdot 10^7 \longrightarrow \boxed{\quad 4^{\times 10^{7}}}$
- $5,13 \cdot 10^{12} \longrightarrow \boxed{\quad 5.13^{\times 10^{12}}}$
- $2,951753 \cdot 10^{-17} \longrightarrow \boxed{\quad 2.951753^{\times 10^{-17}}}$

GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva, no caderno, os números em notação científica.

a) 85 700 $8{,}57 \cdot 10^4$

b) 945 000 000 000 $9{,}45 \cdot 10^{11}$

c) 0,00079 $7{,}9 \cdot 10^{-4}$

d) 0,0000002 $2 \cdot 10^{-7}$

e) 13 000 000 $1{,}3 \cdot 10^7$

f) 1 080 000 000 $1{,}08 \cdot 10^9$

g) 0,00000000013 $1{,}3 \cdot 10^{-10}$

h) 0,000000005 $5 \cdot 10^{-9}$

2 Com uma área de 20 000 metros quadrados, o Oceanário de Lisboa (Portugal) tem cerca de 7 500 000 litros de água divididos por mais de 30 aquários e 8 000 organismos (entre animais e plantas) de 500 espécies diferentes. Escreva em notação científica a quantidade de água, em litro. $7{,}5 \cdot 10^6$ litros

3 Uma pessoa adulta tem cerca de 5 litros de sangue. Em uma pessoa saudável, 1 mm^3 de sangue possui, aproximadamente:

- 5 milhões de glóbulos vermelhos ou hemácias;
- 8 mil glóbulos brancos ou leucócitos.

Quantas hemácias e quantos leucócitos possui, aproximadamente, um adulto?

Relembre aos alunos que 1 dm^3 = 1 ℓ.

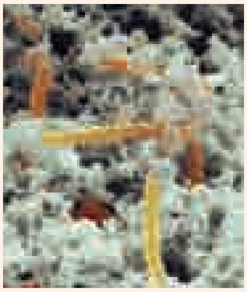
3. glóbulos vermelhos: $2{,}5 \cdot 10^{13}$
glóbulos brancos: $4 \cdot 10^{10}$

4 A Via Láctea é uma estrutura constituída por cerca de 200 bilhões de estrelas e tem massa de cerca de 1 trilhão e 750 bilhões de massas solares. A massa solar equivale a $2 \cdot 10^{30}$ kg. Escreva em notação científica a massa da Via Láctea, em quilograma. $3{,}5 \cdot 10^{42}$ kg

5 Leia atentamente o boxe *Lendo e aprendendo* e responda às perguntas abaixo.

a) Quantas vezes o prefixo **mega** é superior ao prefixo **quilo**? 10^3

b) Quantas vezes o prefixo **nano** é inferior ao prefixo **mili**? 10^6



Bactérias do iogurte, em micrografia eletrônica de varredura, colorizadas artificialmente. O *Streptococcus* spp. (em branco) mede cerca de 800 nm e o *Lactobacillus* spp. (em amarelo), cerca de 4 000 nm.

SPL/LATINSTOCK

Lendo e aprendendo

Acredita-se que os asteroides sejam restos do processo de formação do Sistema Solar há 4,6 bilhões de anos, aproximadamente. Eles são formados por rocha, carbono ou metal. Viajando a 28 000 km/h, um asteroide com 45 metros de diâmetro e 130 000 toneladas passou muito próximo à Terra no dia 15 de fevereiro de 2013. No caderno, escreva em notação científica a idade do Sistema Solar e a massa do asteroide que passou próximo à Terra, em quilograma. $4{,}6 \cdot 10^9$ anos e $1{,}3 \cdot 10^8$ kg

EDITORIA DE ARTE/FOLHAPRESS

Folha de S.Paulo, 15 fev. 2013, Ciência + Saúde, C6.

2 Raiz enésima de um número real

Já sabemos que:

- $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$
- $-\sqrt{1{,}21} = -1{,}1$
- $\sqrt{\dfrac{64}{9}} = \dfrac{8}{3}$

Agora, vamos estudar raízes de um número real cujos índices podem ser qualquer número natural maior ou igual a 2.

A raiz de um número real *a* que tenha como índice um número natural $n \geqslant 2$ pode ser representada assim:

$$\underbrace{n}_{\text{índice}} \quad \sqrt[n]{a} \quad \underbrace{a}_{\text{radicando}}$$

Exemplos

- $\sqrt[2]{16} = 4$
  - 2 é o índice do radical.
  - 16 é o radicando.
  - $\sqrt[2]{16}$ é o radical.
  - 4 é a raiz.
  - Lemos: "raiz quadrada de dezesseis".

- $\sqrt[5]{-243} = -3$
  - 5 é o índice do radical.
  - -243 é o radicando.
  - $\sqrt[5]{-243}$ é o radical.
  - -3 é a raiz.
  - Lemos: "raiz quinta de menos duzentos e quarenta e três".

Observações

1 Podemos omitir o índice 2 na indicação da raiz quadrada.

- $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16}$
- $\sqrt[2]{25} = \sqrt{25}$
- $\sqrt[2]{\dfrac{49}{169}} = \sqrt{\dfrac{49}{169}}$

2 Sendo *n* um número natural, $n \geqslant 2$, temos: $\sqrt[n]{0} = 0$

3 O termo radical é também nome do símbolo $\sqrt{}$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Como se leem os radicais abaixo?

a) $\sqrt{7}$ raiz quadrada de sete

b) $\sqrt[3]{13}$ raiz cúbica de treze

c) $\sqrt[4]{17}$ raiz quarta de dezessete

d) $\sqrt[5]{32}$ raiz quinta de trinta e dois

e) $\sqrt[3]{1000}$ raiz cúbica de um mil

f) $\sqrt[6]{42}$ raiz sexta de 42

2 Na expressão $\sqrt[3]{343} = 7$, identifique:

a) a raiz; 7

b) o radicando; 343

c) o radical; $\sqrt[3]{343}$

d) o índice do radical. 3

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 A queda de um corpo, no vácuo, de uma altura h é regida pelas equações $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$ e $v = gt$. Expressando o tempo (t) em função da velocidade (v) e da aceleração da gravidade (g), temos:

$$h = \frac{1}{2}g \cdot \frac{v^2}{g^2} \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Obtemos, assim, uma expressão correspondente à velocidade com que o corpo chega ao solo. Supondo que $g = 10$ m/s^2, com que velocidade chega ao solo um corpo que cai, no vácuo, de uma altura de 20 m? 20 m/s

Determinação da raiz enésima de um número real

Na determinação da raiz enésima de um número real a, ou seja, $\sqrt[n]{a}$, podem ocorrer os casos a seguir.

- **1º caso:** $a \geqslant 0$ e o índice n é um **número natural**, maior ou igual a 2.

Exemplos

- $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow 4^2 = 16$
- $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$
- $\sqrt[3]{125} = 5 \Leftrightarrow 5^3 = 125$
- $\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 2^5 = 32$

Sendo a um número real, $a \geqslant 0$ e n um número natural maior ou igual a 2, dizemos que a expressão $\sqrt[n]{a}$ corresponde ao número real **não negativo** b tal que $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Observação

Não é correto escrever $\sqrt{25} = \pm 5$, pois o resultado de uma operação deve ser único. O radical $\sqrt{25}$ corresponde ao número **não negativo** cujo quadrado é 25.

Assim:

$\left.\begin{matrix} \sqrt{25} = 5 \\ -\sqrt{25} = -5 \end{matrix}\right\}$ São sentenças verdadeiras.

$\left.\begin{matrix} \sqrt{25} = \pm 5 \\ \sqrt{25} = -5 \end{matrix}\right\}$ São sentenças falsas.

- **2º caso:** $a < 0$ e o índice n é um **número natural ímpar**, maior que 2.

Exemplos

- $\sqrt[3]{-1000} = -10$
- $\sqrt[5]{-1024} = -4$
- $\sqrt[3]{-27} = -3$

Sendo a um número real, $a < 0$ e n um número natural ímpar, maior que 2, dizemos que $\sqrt[n]{a}$ corresponde ao número real **negativo** b tal que $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- **3º caso:** $a < 0$ e o índice n é um **número natural par** diferente de zero.

Exemplo

$\sqrt{-4}$ não é um número real, pois nenhum número real elevado ao quadrado é igual a -4.

> Sendo a um número real, $a < 0$ e n um número natural par diferente de zero, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não representa um número real.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

4. a) Não é número real.
c) Não é número real.
e) Não é número real.

1 Determine o valor de:

a) $\sqrt{100}$ 10
b) $\sqrt[4]{256}$ 4
c) $\pm\sqrt{25}$ ± 5
d) $-\sqrt{144}$ -12
e) $-\sqrt[4]{81}$ -3
f) $\sqrt[3]{-8}$ -2
g) $\sqrt[5]{-1}$ -1
h) $3\sqrt{16}$ 12
i) $\sqrt[9]{512}$ 2
j) $\sqrt[3]{-125}$ -5

2 Determine o valor das expressões abaixo.

a) $-\sqrt{81} - \sqrt[3]{-27}$ -6
b) $\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-1} + \sqrt{0{,}25}$ $-0{,}5$
c) $\sqrt[4]{0{,}0001}$ 0,1

3 Em cada caso, determine o valor de a.

a) $\sqrt{a} = 100$ 10 000
b) $\sqrt[3]{a} = -6$ -216
c) $\sqrt[4]{a} = 5$ 625

4 Calcule o valor de cada expressão.

a) $\sqrt{-16}$
b) $\sqrt{1{,}44}$ 1,2
c) $-\sqrt{-9}$
d) $-\sqrt{49}$ -7
e) $-\sqrt{-1}$
f) $\sqrt{169}$ 13

5 Identifique os radicais que representam números reais. alternativas **a**, **c** e **d**

a) $\sqrt{0}$
b) $\sqrt{-1}$
c) $\sqrt{1}$
d) $\sqrt[3]{-1}$
e) $\sqrt[6]{-1}$
f) $\sqrt[16]{-1}$

6 Em cada caso, determine o valor de x.

a) $\sqrt{2x} = 6$, para $x \geqslant 0$ 18
b) $\sqrt[3]{x+1} = 2$, para $x \geqslant -1$ 7
c) $\sqrt[4]{5x} = 1$, para $x \geqslant 0$ $\frac{1}{5}$
d) $\sqrt{x+2} = 5$, para $x \geqslant -2$ 23

7 Sendo $a = 64$ e $b = 36$, determine:

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \left(\sqrt{a+b}\right)$ 4
b) $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$ 1

8 Determine o valor de x.

$x = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$ 5

9 Calcule o valor de cada expressão.

a) $\sqrt{25} - \sqrt{49}$ -2
b) $-\sqrt{100} - \sqrt[3]{1000}$ -20
c) $\sqrt{0{,}04} + \sqrt{0{,}36}$ 0,8
d) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{81}$ 5
e) $\sqrt{169} - \sqrt{144}$ 1
f) $\sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{-1}$ -2

Radicais

Chamamos de radical a raiz enésima de um número real a que tenha como índice um número natural n maior ou igual a 2.

Exemplos

- $\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{17}$
- $\sqrt[4]{\frac{1}{64}}$
- $\sqrt[5]{-0{,}00243}$

Propriedades dos radicais

Agora, vamos estudar as propriedades dos radicais que servem para simplificar os cálculos.

1ª propriedade

Observe as igualdades:

$\sqrt[3]{64} = 4$ (I) $\qquad 64 = 4^3$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos: $\sqrt[3]{4^3} = 4$

De modo geral:

- se n é um número natural ímpar maior que 2, $\sqrt[n]{a^n} = a$, em que a é um número real.
- se n é um número natural par, não nulo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, em que a é um número real.

Exemplos

- $\sqrt{13^2} = |13| = 13$
- $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$
- $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
- $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

2ª propriedade

Observe as igualdades:

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$ (I) $\qquad \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ (II)

Igualando (I) a (II), temos: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

De modo geral:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, em que a e b são números reais não negativos e n é um número natural maior ou igual a 2.

Exemplos

- $\sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$
- $\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{7}$
- $\sqrt[3]{5 \cdot 17} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{17}$
- $\sqrt[5]{2^3 \cdot x \cdot y^3} = \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{y^3}$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

3ª propriedade

Observe as igualdades:

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ (I) $\qquad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ (II)

Igualando (I) a (II), temos: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

De modo geral:

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, em que a e b são números reais não negativos, com $b \neq 0$, e n é um número natural maior ou igual a 2.

Exemplos

- $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$
- $\sqrt[3]{\frac{5}{17}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{17}}$
- $\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{b}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$
- $\sqrt[5]{\frac{a^3}{7b}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{7b}}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$

4ª propriedade

Observe a igualdade:

$$\boxed{\sqrt[3]{5^3} = 5} \quad \text{I}$$

Multiplicando o índice do radical e o expoente do radicando por 2, obtemos:

$$\boxed{\sqrt[3 \cdot 2]{5^{3 \cdot 2}} = \sqrt[6]{5^6} = 5} \quad \text{II}$$

Igualando I a II, temos:

$\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^{3 \cdot 2}}$

De modo inverso, podemos observar que:

$\sqrt[6]{5^6} = \sqrt[6 : 2]{5^{6 : 2}} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

De modo geral:

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$, em que a é um número real não negativo, n é um número natural maior ou igual a 2, e m e p são números naturais diferentes de zero.

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}}$, em que a é um número real não negativo, n é um número natural maior ou igual a 2, e m e p são números naturais diferentes de zero e p é divisor comum a m e n.

Exemplos

- $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5 \cdot 2]{2^{3 \cdot 2}} = \sqrt[10]{2^6}$
- $\sqrt{3^{25}} = \sqrt[2 \cdot 2]{3^{25 \cdot 2}} = \sqrt[4]{3^{50}}$
- $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[8 : 2]{x^{6 : 2}} = \sqrt[4]{x^3}$, com $x \geqslant 0$
- $\sqrt[10]{b^{15}} = \sqrt[10 : 5]{b^{15 : 5}} = \sqrt{b^3}$, com $b \geqslant 0$

5ª propriedade

Observe as igualdades:

Diga aos alunos que todas as propriedades dos radicais podem ser demonstradas matematicamente.

$$\boxed{\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2} \quad \text{I} \qquad \boxed{\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2} \quad \text{II}$$

Igualando I a II, temos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$$

De modo geral:

> $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, em que a é um número real não negativo e m e n são números naturais com m e n maiores ou iguais a 2.

Exemplos

- $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[2 \cdot 3]{3} = \sqrt[6]{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[3 \cdot 5]{7} = \sqrt[15]{7}$
- $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$
- $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[24]{5}$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o valor dos radicais.

a) $\sqrt{7^2}$ 7
b) $\sqrt[3]{11^3}$ 11
c) $\sqrt{(x)^2}$ $|x|$
d) $\sqrt[5]{6^5}$ 6
e) $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ $a + b$
f) $\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3}$ ab

2 Decomponha o radicando em fatores primos e aplique a primeira propriedade dos radicais.

a) $\sqrt{25}$ $\sqrt{5^2} = 5$
b) $\sqrt[4]{81}$ $\sqrt[4]{3^4} = 3$
c) $\sqrt[8]{256}$ $\sqrt[8]{2^8} = 2$
d) $\sqrt{121}$ $\sqrt{11^2} = 11$
e) $\sqrt[3]{343}$
f) $\sqrt[4]{625}$ $\sqrt[4]{5^4} = 5$

2. e) $\sqrt[3]{7^3} = 7$

3 Transforme em um produto de dois ou mais radicais. **3. b)** $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{11}$

a) $\sqrt{5 \cdot 17}$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}$
b) $\sqrt[4]{5 \cdot 7 \cdot 11}$
c) $\sqrt[5]{2 \cdot x^4}$ $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{x^4}$
d) $\sqrt[3]{10 \cdot 20}$ $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$
e) $\sqrt[3]{3 \cdot 7}$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7}$
f) $\sqrt[3]{7 \cdot a^2 \cdot b}$ $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}$

4 Transforme em um quociente de radicais.

a) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$
b) $\sqrt[3]{\dfrac{7}{11}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{11}}$
c) $\sqrt[4]{\dfrac{10}{17}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{17}}$
d) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, com $b \neq 0$ $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$
e) $\sqrt[5]{\dfrac{2x}{5y^3}}$, com $y \neq 0$ $\dfrac{\sqrt[5]{2x}}{\sqrt[5]{5y^3}}$
f) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{2}{3}$

5 Simplifique os radicais, dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número.

a) $\sqrt[4]{3^2}$ $\sqrt{3}$
b) $\sqrt[5]{7^{10}}$ 7^2
c) $\sqrt[8]{7^6}$ $\sqrt[4]{7^3}$
d) $\sqrt[12]{2^3 \cdot a^6}$, com $a \geqslant 0$ $\sqrt[4]{2 \cdot a^2}$
e) $\sqrt[15]{5^{10}}$ $\sqrt[3]{5^2}$
f) $\sqrt[6]{a^2 b^2}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ $\sqrt[3]{ab}$

6 Decomponha os radicandos em fatores primos e, em seguida, simplifique os radicais.

a) $\sqrt[8]{64}$ $\sqrt[4]{2^3}$
b) $\sqrt[10]{625}$ $\sqrt[5]{5^2}$
c) $\sqrt[20]{243}$ $\sqrt[4]{3}$
d) $\sqrt[14]{128}$ $\sqrt{2}$

7 Transforme em uma única raiz.

a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ $\sqrt[4]{5}$
b) $\sqrt[5]{\sqrt[2]{13}}$ $\sqrt[10]{13}$
c) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ $\sqrt[6]{7}$
d) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{11}}$ $\sqrt[30]{11}$
e) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{4}}}$ $\sqrt[30]{4}$
f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}$, com $x \geqslant 0$ $\sqrt[16]{x}$

8 Determine o valor do número natural x maior ou igual a 2 nas expressões abaixo.

a) $\sqrt[15]{2^{10}} = \sqrt[x]{2^2}$ 3
b) $\sqrt[6]{13^9} = \sqrt{13^x}$ 3
c) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[15]{7}$ 5
d) $\sqrt[9]{6^6} = \sqrt[3]{6^x}$ 2

Lembre-se:
Não escreva no livro!

9 Transforme em um único radical.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ $\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{11}$ $\sqrt[3]{77}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$ $\sqrt{70}$

d) $\sqrt[12]{5} \cdot \sqrt[12]{10}$ $\sqrt[12]{50}$

e) $\dfrac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{8}}$ $\sqrt{\dfrac{45}{2}}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{15}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

g) $\dfrac{\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{10}}}{\sqrt[6]{120}}$ $\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$

10 Transforme em um único radical, escrevendo o radicando na forma mais simples possível.

a) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}$ $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{18}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{30}}{\sqrt[4]{24}}$ $\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}}$ d) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{20}}$ $\sqrt[5]{\dfrac{4}{5}}$

11 Identifique as sentenças verdadeiras. alternativas **a**, **d** e **e**

a) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{a}{b}$, com $a > 0$ e $b > 0$

b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$

c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, com $a > 0$

e) $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$, com $a > 0$ e $b > 0$

f) $\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x - y$

3 Simplificação de radicais

Simplificar um radical significa obter uma expressão mais simples, equivalente ao radical dado. Para isso, vamos utilizar as propriedades estudadas. Observe os casos a seguir.

- **1º caso:** O índice do radical e os expoentes do radicando têm fator comum.

  Podemos dividir o índice do radical e os expoentes de **todos** os fatores do radicando por um mesmo número, diferente de zero.

Exemplos

- $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[8:2]{5^{6:2}} = \sqrt[4]{5^3}$
- $\sqrt[6]{7^{10}} = \sqrt[6:2]{7^{10:2}} = \sqrt[3]{7^5}$

- **2º caso:** Um ou mais fatores do radicando têm expoentes iguais ao índice do radical.

  Podemos **extrair** um ou mais fatores do radicando que tenham expoentes iguais ao índice do radical e escrevê-los como fatores externos sem o expoente.

Exemplos

- $\underbrace{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3}}_{\text{Aplicando a 2ª propriedade.}} \overbrace{= 2\sqrt[3]{3}}^{\text{Aplicando a 1ª propriedade.}}$

- $\underbrace{\sqrt[4]{5^4 \cdot 7^3} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{7^3}}_{\text{Aplicando a 2ª propriedade.}} \overbrace{= 5\sqrt[4]{7^3}}^{\text{Aplicando a 1ª propriedade.}}$

Em alguns casos, podemos decompor o radicando em fatores primos antes da extração.

Observe:

- $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{\underbrace{2^4}_{16}} = 2$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

- $\sqrt{180} = \sqrt{\underbrace{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}_{180}} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Em outros casos, precisamos transformar, convenientemente, o radicando em um produto (utilizando produto de potências de mesma base) para poder extrair fatores desse mesmo radicando. Veja:

- $\sqrt{5^3} = \sqrt{\underbrace{5^2 \cdot 5}_{5^3}} = 5\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{\underbrace{2 \cdot 5^3}_{250}} = 5\sqrt[3]{2}$

Observação

Podemos também introduzir fatores externos no radicando. Veja:

- $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{28}$
- $7\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{1715}$
- $2^2 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{(2^2)^4} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{256 \cdot 3} = \sqrt[4]{768}$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt[10]{5^6}$ $\sqrt[5]{5^3}$
b) $\sqrt[4]{11^2}$ $\sqrt{11}$
c) $\sqrt[5]{7^{10}}$ 49
d) $\sqrt{10^8}$ 10^4

2 Retire fatores do radicando e simplifique.

a) $\sqrt{2^4 \cdot 5}$ $4\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{72}$ $18\sqrt{2}$
c) $\sqrt[3]{200}$ $2\sqrt[3]{25}$
d) $\sqrt{128}$ $8\sqrt{2}$

3 Introduza os fatores no radicando.

a) $2\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[3]{56}$
b) $4\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{320}$
c) $0,2\sqrt{3}$ $\sqrt{\frac{3}{25}}$
d) $5\sqrt{10}$ $\sqrt{250}$

4 Simplifique, fatorando o radicando.

a) $\sqrt[3]{10^5}$ $10\sqrt[3]{100}$
b) $\sqrt[4]{7^8}$ 49
c) $\sqrt{90}$ $3\sqrt{10}$
d) $\sqrt[3]{1000}$ 10
e) $\sqrt{288}$ $12\sqrt{2}$
f) $\sqrt[5]{1024}$ 4

5 Em cada caso, determine o valor de $x \geqslant 0$.

a) $\sqrt{3} = \sqrt[6]{x}$ 27

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt[8]{x}$ $\frac{1}{16}$

4 Radicais semelhantes

Duas ou mais expressões que têm como fatores radicais com o mesmo índice e com o mesmo radicando são chamados de **radicais semelhantes**.

Exemplos

- $2\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ e $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ são radicais semelhantes.
- $\sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[3]{10}$ não são radicais semelhantes, pois possuem radicandos diferentes.
- $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[3]{3}$ não são radicais semelhantes, pois possuem índices diferentes.

Alguns radicais parecem ser não semelhantes por apresentarem índices ou radicandos diferentes, mas, após aplicarmos algumas propriedades e simplificações, podemos reescrevê-los como radicais claramente semelhantes.

Exemplos

- Verificar se $\sqrt[3]{135}$ e $\sqrt[3]{320}$ são radicais semelhantes.

  $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$

  $135 = 27 \cdot 5$

  $\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{5} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$

  $320 = 64 \cdot 5$

  $3\sqrt[3]{5}$ e $4\sqrt[3]{5}$ são radicais semelhantes, ou seja, $\sqrt[3]{135}$ e $\sqrt[3]{320}$ são radicais semelhantes.

- Verificar se $\sqrt{2^5}$ e $\sqrt{2^3 \cdot 3^2}$ são radicais semelhantes.

  $\sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

  $\sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

  $4\sqrt{2}$ e $6\sqrt{2}$ são radicais semelhantes, ou seja, $\sqrt{2^5}$ e $\sqrt{2^3 \cdot 3^2}$ são radicais semelhantes.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Reescreva as expressões, quando possível, para mostrar que são radicais semelhantes.

a) $\sqrt{45}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{180}$ $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{250}$ $3\sqrt[3]{2}$, $4\sqrt[3]{2}$, $5\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{90}$, $\sqrt{250}$, $\sqrt{1210}$ $3\sqrt{10}$, $5\sqrt{10}$, $11\sqrt{10}$

d) $\sqrt[4]{48}$, $\sqrt[4]{405}$ Não são semelhantes $(2\sqrt[4]{3}, 3\sqrt[4]{5})$.

2 Identifique os pares de radicais semelhantes. alternativas **a** e **d**

a) $-\sqrt{7}$ e $13\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[3]{15}$

c) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ e $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$

d) $\sqrt[5]{2}$ e $-13\sqrt[5]{2}$

5 Adição e subtração de radicais

Na adição e subtração com radicais, três casos podem ser considerados.

- **1º caso:** Todos os radicais são claramente semelhantes.
  Efetuamos as adições e subtrações dos fatores externos e mantemos o mesmo radical.

Exemplos

- $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (2 + 7 - 3)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- $3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \left(3 - 1 - 5 + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{3} = -\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

- **2º caso:** Todos os radicais podem ser reescritos como radicais claramente semelhantes.

Exemplos

- $\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{54} = \sqrt{6} + \sqrt{2^3 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 3^3} =$
  $= \sqrt{6} + \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^2} =$
  $= \sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = (1 + 2 + 3)\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
- $\sqrt{180} + \sqrt{500} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5^3} =$
  $= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} =$
  $= 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$

- **3º caso:** Apenas alguns radicais são semelhantes.
  Efetuamos as adições e subtrações dos radicais semelhantes e repetimos os radicais não semelhantes.

Exemplo

$\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}\right) + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} =$

$= -6\sqrt{5} + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

Cuidado!

Preste muita atenção às desigualdades abaixo.

- $\sqrt{3} + \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$
- $2 + \sqrt{5} \neq 2\sqrt{5}$
- $\sqrt{25 + 24} \neq 5 + \sqrt{24}$. Nesse caso, devemos primeiro efetuar a adição expressa no radicando para depois extrair a raiz. Assim: $\sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue as operações.

a) $\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$ $-2\sqrt{7}$

b) $2\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{64}$ $4\sqrt[5]{2}$

c) $2\sqrt{16} + 3\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[4]{16} + \sqrt[6]{16}$ $\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} + 16$

d) $\left(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}\right) + \left(6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)$ $9\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

e) $\sqrt{32} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{72}$ $22\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

2 Simplifique as expressões.

a) $3\sqrt[3]{2} - 7\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2}$ $-10\sqrt[3]{2}$

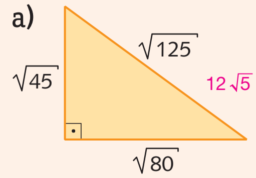
b) $\sqrt{12} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[8]{81}$ $-\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{24}$ $10\sqrt{6}$

d) $7\sqrt{32} - 5\sqrt{2} + \sqrt{8}$ $25\sqrt{2}$

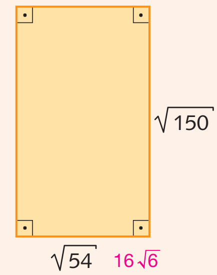
3 Determine o perímetro das figuras.

a)



$12\sqrt{5}$

b)



$16\sqrt{6}$

GUILHERME CASAGRANDI

4 Considere, com aproximação de centésimos, $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$. Determine o valor do número real y na forma decimal, sendo:

$y = \sqrt{200} + \sqrt{300} + \sqrt{800} + \sqrt{1200}$ 94,20

6 Multiplicação de radicais

No estudo da segunda propriedade dos radicais, vimos que:

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

Logo, podemos escrever:

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$

De forma semelhante, temos:

- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{14}$
- $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{11} = \sqrt[5]{66}$

Exemplos

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{5 \cdot 6} = \sqrt{30}$
- $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{10 \cdot 12} = \sqrt[3]{120}$
- $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{10} = (2 \cdot 3)\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 10} = 6\sqrt{350}$

Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos **reduzi-los ao mesmo índice** e depois efetuar a operação.

Exemplo

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}$

Em alguns casos, podemos simplificar uma expressão que envolva radicais utilizando a **propriedade distributiva**.

Exemplos

- $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{2} + 5\right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot 5 = \sqrt{3 \cdot 2} + \sqrt{3} \cdot 5 = \sqrt{6} + 5\sqrt{3}$

- $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 7} - \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{35} - \sqrt{25} = \sqrt{35} - 5$
- $(2 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 2 \cdot 3 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - (\sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5 = \sqrt{5} + 1$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule mentalmente os produtos.

a) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{6}$ $\sqrt{90}$

b) $3\sqrt[5]{6} \cdot 4\sqrt[5]{5}$ $12\sqrt[5]{30}$

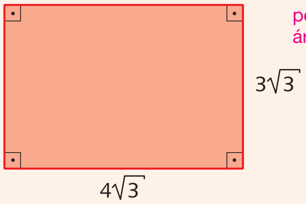
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 1

d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{11}$ $\sqrt[3]{77}$

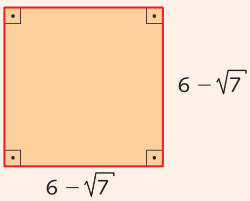
e) $3\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{3}$ $6\sqrt[3]{6}$

f) $\sqrt{10} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 1

2 Determine o perímetro e a área de cada figura.

a) 

perímetro: $14\sqrt{3}$; área: 36

b) 

perímetro: $4(6 - \sqrt{7})$; área: $(43 - 12\sqrt{7})$

3 Efetue as multiplicações.

a) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{50}$ $\sqrt[5]{300}$

b) $3\sqrt[3]{8} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{8}$ $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{3}$

4 Determine os produtos.

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt[6]{72}$

b) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt{2}$ $2\sqrt[3]{2^3}$

c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[3]{30}$ $2\sqrt[30]{2^7 \cdot 3^{16} \cdot 5^{25}}$

d) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{8}$ $2\sqrt[4]{8}$

e) $\sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$ $\sqrt[24]{5^7}$

f) $\sqrt[3]{0{,}04} \cdot \sqrt[6]{625}$ 1

5 Aplicando a propriedade distributiva, determine os produtos abaixo.

a) $\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 1)$ $7 - \sqrt{7}$

b) $(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 3)$ $2 + 2\sqrt{5}$

c) $(\sqrt{3} - 2) \cdot (1 - \sqrt{3})$ $3\sqrt{3} - 5$

d) $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$ $\sqrt{10} + \sqrt{15}$

e) $(2\sqrt{2} + 2) \cdot (2 - \sqrt{2})$ $2\sqrt{2}$

f) $\sqrt{2} \cdot (1 - \sqrt{2})$ $\sqrt{2} - 2$

GUILHERME CASAGRANDI

7 Divisão de radicais

No estudo da terceira propriedade dos radicais, vimos que:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

De forma semelhante, temos:

- $\dfrac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{17}{4}}$
- $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\dfrac{3}{8}}$

Exemplos

- $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{18} = \dfrac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{30}{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$

Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos **reduzi-los ao mesmo índice** e depois efetuar a operação.

Exemplo

$\sqrt{5} : \sqrt[3]{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{4^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^3}{4^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{125}{16}}$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine os quocientes.

a) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2}$ 4

b) $\sqrt[5]{3^5} : \sqrt[5]{3^2}$ $\sqrt[5]{3^3}$

c) $\sqrt{\dfrac{10}{3}} : \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ 2

d) $8\sqrt{75} : 4\sqrt{3}$ 10

2 Efetue as divisões.

a) $\sqrt[3]{8} : \sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[8]{16} : \sqrt[12]{64}$ 1

c) $\sqrt[4]{6} : \sqrt{2}$ $\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{2}$ $\sqrt[6]{\dfrac{25}{2}}$

e) $\sqrt[5]{7} : \sqrt[6]{7}$ $\sqrt[30]{7}$

f) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[8]{8}$ $\sqrt[8]{8}$

8 Potenciação e radiciação de radicais

Observe as potências:

- $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^3}$; então: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3}$
- $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^4}$; então: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5^4}$

Para efetuar a potenciação com um radical em que o radicando é um número real positivo, elevamos o radicando ao expoente dado.

De modo geral:

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$, em que a é um número real positivo, m é um número natural maior ou igual a 2 e n é um número inteiro.

Exemplos

- $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{5 \cdot 5^2} = 5\sqrt{5}$
- $\left(\sqrt[3]{ab^2}\right)^4 = \sqrt[3]{(a \cdot b^2)^4} = \sqrt[3]{a^4 \cdot b^8} = \sqrt[3]{a \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot b^3} = a \cdot b \cdot b \cdot \sqrt[3]{ab^2} =$
  $= ab^2 \cdot \sqrt[3]{ab^2}$, com a e b números reais positivos.
- $\left(\sqrt[4]{7}\right)^8 = \sqrt[4]{7^8} = \sqrt[4]{7^4} \cdot \sqrt[4]{7^4} = 7 \cdot 7 = 7^2 = 49$

Vamos agora entender o procedimento da radiciação com radicais.

Observe as igualdades:

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{4} = 2$

$\sqrt[6]{64} = 2$

Como as duas expressões são iguais a 2, então:

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

De modo geral:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, em que a é um número real maior ou igual a zero e m e n são números naturais maiores ou iguais a 2.

Exemplos

- $\sqrt[5]{\sqrt{7}} = \sqrt[5 \cdot 2]{7} = \sqrt[10]{7}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{125}{64}}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\dfrac{5^3}{2^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{2^6}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue as potenciações dos radicais abaixo.

a) $\left(2\sqrt{3}\right)^3$ $24\sqrt{3}$

b) $\left(2\sqrt{2}\right)^7$ $1024\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt[3]{ab}\right)^4$, em que $a > 0$ e $b > 0$. $ab\sqrt[3]{ab}$

d) $\left(2\sqrt[7]{a^5b^2}\right)^3$, em que $a > 0$ e $b > 0$. $8a^2\sqrt[7]{ab^6}$

e) $\left(\dfrac{x}{y} \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2$, em que $x > 0$ e $y > 0$. $\dfrac{x}{y}$

f) $\left(\sqrt[5]{y^3}\right)^2$, em que $y > 0$. $y\sqrt[5]{y}$

2 Escreva como uma única raiz.

a) $\sqrt{4\sqrt{5}}$ $2\sqrt[4]{5}$

b) $2\sqrt{2\sqrt{3}}$ $2\sqrt[4]{12}$

c) $\sqrt[7]{\sqrt[4]{7}}$ $\sqrt[28]{7}$

d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$ 2

3 Calcule o valor de cada uma das expressões abaixo.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(2\sqrt{3}\right)^4 + \left(-3\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^{-2}$ 217

b) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$ 4

4 Identifique a única alternativa correta.

A expressão $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[10]{2}\right)^4}$ é igual a: alternativa **c**

a) $\sqrt[10]{2^3}$

b) $\sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt[10]{2^4}$

e) $\sqrt[5]{2^3}$

Produtos notáveis em expressões que envolvem radicais

Observe estes **produtos notáveis** já estudados:

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ⟶ quadrado da soma

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ⟶ quadrado da diferença

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ⟶ produto da soma pela diferença

Podemos aplicar as regras dos produtos notáveis em expressões que envolvem radicais. Veja os exemplos a seguir.

- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$
- $\left(\sqrt{7}-2\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2 + (2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$
- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 = 1$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o valor das expressões.

a) $\left(3-\sqrt{3}\right) \cdot \left(3+\sqrt{3}\right)$ 6

b) $\left(7\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right) \cdot \left(7\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)$ 53

c) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ $3 - 2\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{7}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})$ 5

2 Mostre que o número $(1-\sqrt{3}) \cdot (1+\sqrt{3})$ é inteiro. $(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 3 = -2$

3 Utilizando as regras dos produtos notáveis, efetue:

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2$ $7 + 2\sqrt{10}$

b) $\left(8-\sqrt{3}\right)\left(8+\sqrt{3}\right)$ 61

c) $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ $4 - 2\sqrt{3}$

d) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ $3 + 2\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{17}\right)$ -10

f) $\left(\sqrt{5}-3\right)^2$ $14 - 6\sqrt{5}$

Racionalização de denominadores

Considere a expressão fracionária $\frac{5}{\sqrt{3}}$, cujo denominador é o **número irracional** $\sqrt{3}$.

Vamos multiplicar o numerador e o denominador dessa expressão por $\sqrt{3}$, obtendo uma expressão equivalente:

$$\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Observe que a expressão equivalente $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ possui um denominador racional.

A esse procedimento damos o nome de **racionalização**.

Para racionalizar o denominador de uma expressão fracionária devemos multiplicar o numerador e o denominador por uma expressão com radical chamada **fator racionalizante**, a fim de obter uma nova expressão equivalente com denominador sem radical, ou seja, com denominador racional.

A seguir, vamos estudar os principais casos de racionalização.

- **1º caso:** O denominador é um radical de índice 2.

Exemplos

- $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

  Vamos multiplicar o numerador e o denominador dessa expressão fracionária por $\sqrt{2}$, obtendo uma expressão equivalente:

  $$\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

  → Observe que $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Assim, ao multiplicarmos $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ por essa expressão, não alteramos seu valor.

- $\sqrt{\dfrac{4}{17}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{17}} = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$

  Vamos multiplicar o numerador e o denominador dessa expressão fracionária por $\sqrt{17}$, obtendo uma expressão equivalente:

  $$\frac{2 \cdot \sqrt{17}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17^2}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

- $\dfrac{3}{5\sqrt{7}}$

  Vamos multiplicar o numerador e o denominador dessa expressão fracionária por $\sqrt{7}$, obtendo uma expressão equivalente:

  $$\frac{3 \cdot \sqrt{7}}{5\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{5\sqrt{7^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{5 \cdot 7} = \frac{3\sqrt{7}}{35}$$

- $\sqrt{\dfrac{5}{11}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

  Vamos multiplicar o numerador e o denominador dessa expressão fracionária por $\sqrt{11}$, obtendo uma expressão equivalente:

  $$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{55}}{11}$$

- **2º caso:** O denominador é um radical de índice diferente de 2.

Exemplos

- $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

  Multiplicamos o numerador e o denominador dessa expressão fracionária por $\sqrt[3]{7^2}$:

  $$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

- $\dfrac{2}{\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \dfrac{2\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{2\sqrt[5]{2^2}}{2} = \sqrt[5]{2^2}$

- $\dfrac{12}{\sqrt[7]{3^4}} = \dfrac{12 \cdot \sqrt[7]{3^3}}{\sqrt[7]{3^4} \cdot \sqrt[7]{3^3}} = \dfrac{12\sqrt[7]{3^3}}{\sqrt[7]{3^7}} = \dfrac{12\sqrt[7]{3^3}}{3} = 4\sqrt[7]{3^3}$

- **3º caso:** O denominador é uma adição ou subtração de dois termos, em que pelo menos um deles é um número irracional.

Já aprendemos que o produto da soma pela diferença de a e b é: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemplos

- $\dfrac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Como nesse denominador há uma soma de dois números irracionais $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$, multiplicamos o numerador e o denominador dessa expressão fracionária por $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$. Utilizamos o produto da soma pela diferença para racionalizar o denominador.

$$\frac{5 \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)} = \frac{5\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 5 \cdot \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{-1} = -5\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$$

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 7} + \sqrt{2 \cdot 5}}{\left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{14} + \sqrt{10}}{7 - 5} = \dfrac{\sqrt{14} + \sqrt{10}}{2}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{11} - 3} = \dfrac{1 \cdot \left(\sqrt{11} + 3\right)}{\left(\sqrt{11} - 3\right) \cdot \left(\sqrt{11} + 3\right)} = \dfrac{\sqrt{11} + 3}{\left(\sqrt{11}\right)^2 - 3^2} = \dfrac{\sqrt{11} + 3}{11 - 9} = \dfrac{\sqrt{11} + 3}{2}$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Racionalize o denominador dos seguintes números.

a) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ $3\sqrt{2}$

c) $\dfrac{5}{8\sqrt{3}}$ $\dfrac{5\sqrt{3}}{24}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$

f) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

g) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}}$ $\dfrac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

h) $\dfrac{1}{7\sqrt[5]{8}}$ $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{14}$

i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{49}}{7}$

j) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{5}}$ $3\sqrt[3]{25}$

2 Racionalize os denominadores dos seguintes números.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$ $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

b) $\dfrac{3}{5 - \sqrt{7}}$ $\dfrac{5 + \sqrt{7}}{6}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{7} + 2}$ $\sqrt{7} - 2$

d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ $12 - 4\sqrt{6}$

e) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{21} - \sqrt{6}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 No caderno, identifique a alternativa que corresponde ao valor da expressão: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{18}} - \dfrac{1}{\sqrt{8}}$ alternativa **e**

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

b) $\sqrt{12}$

c) $\dfrac{-10}{\sqrt{288}}$

d) $\dfrac{-5\sqrt{2}}{12}$

e) $\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

GEORGE TUTUMI

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 A definição de potenciação foi revisada no início do capítulo. Escreva, no seu caderno, um exemplo de cada um dos itens a seguir.

a) Uma potência na qual o expoente é um número inteiro maior que 1. Exemplo de resposta: $3^4 = 81$

b) Uma potência na qual o expoente é igual a 1. Exemplo de resposta: $7^1 = 7$

c) Uma potência na qual o expoente é igual a 0 e a base é diferente de zero. Exemplo de resposta: $100^0 = 1$

d) Uma potência na qual o expoente é um número inteiro negativo e a base é diferente de zero. Exemplo de resposta: $4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

- Explique por que nos itens **c** e **d**, acima, a base não pode ser 0.

c) 0^0 não está definido matematicamente; **d)** Não existe divisão por zero.

2 Qual é a vantagem em se escrever números em notação científica?

Simplificar a escrita de números muito grandes ou muito próximos de zero e facilitar cálculos operacionais com esses números.

3 Um aluno escreveu o número 1 140 000 em notação científica como $11{,}4 \times 10^5$. Essa escrita está em notação científica? Explique. A escrita não está em notação científica, porque a parte inteira do número na forma decimal deve ter um só algarismo de 1 a 9. Assim, o correto seria $1{,}14 \times 10^6$.

4 Sabemos que $\sqrt{-16}$ não é um número real. Por que essa raiz quadrada não é real?

Porque não existe um número real que multiplicado por ele mesmo resulte em -16.

5 Qual é a relação entre racionalização de denominadores e produtos notáveis?

Para racionalizar denominadores do tipo $A + B$ ou $A - B$, sendo A ou B uma raiz quadrada, é preciso usar o produto da soma pela diferença, pois, dessa maneira, ambas as parcelas serão elevadas ao quadrado, o que eliminará a raiz quadrada.

Aplicando

1 Calcule o valor das potências.

a) $(-2)^0$ 1

b) -2^{-2} $-\frac{1}{4}$

c) $(-2)^{-3}$ $-\frac{1}{8}$

d) $-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ -25

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 9

f) $(-3)^4$ 81

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\frac{4}{9}$

h) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$ $-\frac{4}{3}$

2 Calcule o valor das expressões numéricas.

a) $(-2)^3 - 3^{-1}$ $-\frac{25}{3}$

b) $5^0 + 5^{-1} + 5^{-2}$ $\frac{31}{25}$

c) $\dfrac{2^0 + 2^{-1}}{3^0 - 3^{-1}}$ $\frac{9}{4}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 6

e) $1^3 + (-2)^4 - (-2)^3 + 4^0 + 2 \cdot 2^{-3} + 1^4$ $\frac{109}{4}$

f) $(-2) + (-3) \cdot (-2)^{-1} : (-3)$ $-\frac{5}{2}$

3 Calcule, utilizando as propriedades das potências.

a) $x^{-4} \cdot x^2 \cdot x^{-3}$ x^{-5}

b) $\dfrac{b^{2m}}{b}$, com $b \neq 0$ b^{2m-1}

c) $(2^3)^4$ 2^{12}

d) $(2^{-1})^{-2}$ 2^2

e) $\dfrac{a^{20}}{a^{-4}}$, com $a \neq 0$ a^{24}

f) $\dfrac{x^{n-2}}{x^n}$, com $x \neq 0$ x^{-2}

g) 2^{2^3} 2^8

h) $(2a^m)^{2m}$ $4^m a^{2m^2}$

4 Calcule o valor das expressões.

a) $(3^{-3})^3$ 3^{-9}

b) $5^{x+3} \cdot 5^{x-3}$ 5^{2x}

c) $3^{2m} : 3^{1-m}$ 3^{3m-1}

d) $(7^a \cdot 7^{a+1}) : 7^{a+2}$ 7^{a-1}

e) $\dfrac{(m^2)^{x-1} \cdot (m^3)^{x+1}}{m^{5x}}$, para $m \neq 0$ m

5 Mostre que $2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n$, em que n é um número natural

$2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n \cdot 2 = 2^n \cdot (1 + 2) = 2^n \cdot 3$

6 Simplifique as expressões abaixo.

a) $\dfrac{0{,}001 \cdot (0{,}01)^3}{1000 \cdot 0{,}00001}$ 10^{-7}

b) $\dfrac{16 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{64 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6}}$ 0,2

7 Sendo $x = (2^2)^3$, $y = 2^{2^3}$ e $z = 2^{3^2}$, determine o valor de: $\dfrac{x \cdot y}{z}$ 2^5

8 Escreva, em notação científica, os números a seguir.

a) 184 000 $1{,}84 \cdot 10^5$

b) 0,0000064 $6{,}4 \cdot 10^{-6}$

c) $2\,500 \cdot 10^6$ $2{,}5 \cdot 10^9$

d) $0{,}004 \cdot 10^{-4}$ $4 \cdot 10^{-7}$

9 Efetue a operação $(10^{-2})^3 : 10^6$. Qual é o expoente de potência de base 10 resultante? -12

10 A União Europeia financia um projeto para reconstruir em computador uma simulação do cérebro humano. O Projeto Cérebro Humano (Human Brain Project) conta com cerca de 80 países e 200 participantes. O estudo começa pelo funcionamento dos neurônios, as células nervosas mais importantes do cérebro, conectados por meio das sinapses (região de comunicação entre os neurônios). O cérebro humano tem cerca de 100 bilhões de neurônios com 100 trilhões de sinapses divididas em áreas especializadas.


ANDREJ VODOLAZHSKYI/SHUTTERSTOCK

Ilustração de uma célula nervosa.

Expresse em notação científica o número de neurônios do cérebro humano e o número de sinapses divididas em áreas especializadas. 10^{11} neurônios; 10^{14} sinapses

11 Calcule o valor das expressões a seguir.

a) $(-2)^3 \cdot (-1)^4 - (-2)^3 \cdot 5 + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot (-5)^3$ -93

b) $2^{-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + 120^0 - (-2)^3$ $\dfrac{27}{2}$

c) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left[2{,}5 + \left(-3 - \dfrac{1}{4}\right) : \dfrac{5}{2} - 2^{-3}\right]$ $-\dfrac{41}{80}$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 \cdot (0{,}01)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ $4 \cdot 10^{-4}$

e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3} \cdot (-3)^{-3}$ $\dfrac{19}{8}$

12 Quanto devo subtrair de $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ para obter $\left(\dfrac{1}{7}\right)^0$? $\dfrac{1}{2}$

13 Pedro utilizou a calculadora para determinar 5^2 e 5^3. Veja:

[5] [×] [=] 25 ou 5^2

[5] [×] [=] [=] 125 ou 5^3

GUILHERME CASAGRANDI

Agora é com você!

Utilizando uma calculadora, determine o valor de 5^{10}. 9 765 625

Verifique a conveniência de lembrar aos alunos que calculadoras diferentes, por vezes, requerem procedimentos diferentes para os cálculos.

14 Simplifique a expressão: $1 - 2^{n-3}$

$$\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^{2n}}{2 \cdot 2^{n+3}}$$

15 Calcule o valor da expressão $\dfrac{x^2y^2 - x^3y}{y^2 - x^2}$, para $x = 0{,}5$ e $y = 1{,}5$. $\dfrac{3}{16}$

16 O físico italiano Avogadro (1776-1856) mostrou que 18 g de água encerram cerca de $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas. Calcule o valor aproximado do número de moléculas contidas em 1 miligrama de água. $3{,}34 \cdot 10^{19}$ moléculas

17 Indique a alternativa correta. A expressão $(10\%)^2 - (5\%)^2$ é equivalente a: alternativa **c**

a) 75%
b) 7,5%
c) 0,75%
d) 25%
e) 2,5%
f) 0,075%

18 **(Enem)** Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2055), *Claudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (adaptado).

Lembre-se:
Não escreva no livro!

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1 000 litros de óleo em frituras por semana.

Qual seria, em litro, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade? alternativa e

a) 10^{-2}
b) 10^3
c) 10^4
d) 10^6
e) 10^9

19 O monumento da foto abaixo, construído para a Feira Mundial de Bruxelas de 1958, representa um cristal de ferro ampliado 200 bilhões de vezes. Sua estrutura de aço revestido de alumínio é composta de nove esferas de 10 m de diâmetro, que representam átomos de ferro, interligadas por tubos de 29 m de comprimento e 3 m de diâmetro. Determine, em metro, o tamanho real do diâmetro dos átomos do cristal de ferro. $5 \cdot 10^{-11}$ m

ATLANTIDE PHOTOTRAVEL/CORBIS/LATINSTOCK

O *Atomium* em Bruxelas, Bélgica. Foto de 2010.

20 Calcule a diferença $y - x$, de forma que o número $2^x \cdot 3^4 \cdot 26^y$ possa ser expresso como uma potência de base 39. 8

21 Determine mentalmente entre quais inteiros consecutivos estão situados:

a) $\sqrt{5}$ 2 e 3
b) $\sqrt{37}$ 6 e 7

22 Calcule o valor das expressões.

a) $\sqrt{25} - \sqrt{9}$ 2
b) $\sqrt{25 - 9}$ 4
c) $\sqrt{8^2 + 6^2}$ 10
d) $8 + 6$ 14

23 Escreva cada expressão abaixo como um produto de radicais e simplifique, se possível.

a) $\sqrt{6 \cdot 9}$ $3\sqrt{6}$
b) $\sqrt[3]{8 \cdot 9}$ $2\sqrt[3]{9}$
c) $\sqrt[6]{64 \cdot a^8 \cdot b^6}$, $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$. $2ab\sqrt[3]{a}$

24 Escreva como um quociente de radicais e simplifique, se possível.

a) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$
b) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{8}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$
c) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^4}{b^4}}$, $a \geqslant 0$ e $b > 0$. $\dfrac{2a}{b}$

25 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt[5]{2^{10}}$ 4
b) $\sqrt[16]{5^4}$ $\sqrt[4]{5}$
c) $\sqrt{5^4}$ 25

26 Transforme em uma única raiz.

a) $\sqrt{\sqrt{20}}$ $\sqrt[4]{20}$
b) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$, $x \geqslant 0$. $\sqrt[6]{x}$
c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}}$, $a \geqslant 0$. $\sqrt[6]{a}$
d) $\sqrt[10]{\sqrt{3}}$ $\sqrt[20]{3}$

27 Calcule as raízes.

a) $-\sqrt[4]{625}$ -5
b) $\sqrt[3]{-216}$ -6
c) $\sqrt[5]{0{,}00032}$ 0,2
d) $\sqrt[7]{-\dfrac{1}{128}}$ $-\dfrac{1}{2}$

28 Sendo $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ e $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, determine, na forma decimal, o valor aproximado de:

a) $\sqrt{8}$ 2,82
b) $\sqrt{12}$ 3,46
c) $\sqrt{50}$ 7,05
d) $\sqrt{6}$ 2,4393
e) $\sqrt{200}$ 14,1
f) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 0,815

29 Calcule mentalmente o valor de: 7

$$\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}$$

30 Usando a simplificação de radicais, calcule:

a) a raiz quadrada de 2 916; 54
b) a raiz cúbica de 1 728; 12
c) a raiz quarta de 6 561. 9

31 Escreva na forma de um único radical e simplifique.

a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}$ $\sqrt[8]{7}$
b) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$ $\sqrt[10]{11}$
c) $\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{3}}}$ $\sqrt[12]{12}$
d) $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1280}}}$ $2\sqrt[8]{5}$
f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ $\sqrt[6]{200}$
g) $\dfrac{\sqrt{32}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$ $\dfrac{\sqrt[6]{32}}{2}$
h) $\sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{2}}}$ $\sqrt[12]{18}$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

32 Efetue e simplifique os resultados.

a) $\left(\sqrt{3}\right)^5$ $9\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{10}$ $8\sqrt[3]{2}$

c) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[6]{2x^3y^4}\right)^2$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. $\frac{4}{9}xy\sqrt[3]{2y}$

d) $2\sqrt{6} : 8\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $\sqrt[3]{81x^2} : \sqrt[3]{6x}$, com $x > 0$ $3\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

f) $\sqrt[4]{5^3} : \sqrt[3]{5^2}$ $\sqrt[12]{5}$

33 Calcule o valor da expressão:

a) $\sqrt{1{,}44} + \sqrt{0{,}01} - \sqrt[3]{0{,}008}$ 1,1

b) $3\sqrt{36} + 5 \cdot \sqrt{0{,}04} - 2\sqrt[3]{-8}$ 23

34 Introduza, no radicando, o fator externo.

a) $6\sqrt{3}$ $\sqrt{108}$

b) $5\sqrt{7}$ $\sqrt{175}$

c) $2\sqrt[5]{3}$ $\sqrt[5]{96}$

d) $2\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{40}$

e) $3\sqrt[4]{5}$ $\sqrt[4]{405}$

f) $a^2\sqrt[3]{ab^2}$, $a > 0$ e $b > 0$. $\sqrt[3]{a^7b^2}$

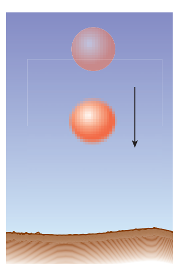
35 Calcule o valor das expressões.

a) $\left(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right) - \left(2\sqrt{2} + 6\sqrt{3}\right)$ $3\sqrt{2} - 10\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{3} + \sqrt{48}$ $18\sqrt{3}$

c) $4 \cdot 0{,}5 + \sqrt{0{,}25^4} + 2^{-2}$ 2,3125

36 Um corpo cai em queda livre de uma altura de 300 m no vácuo. Com o auxílio de uma calculadora, determine quanto tempo, aproximadamente, esse corpo leva para chegar ao solo Considere $g = 10\ m/s^2$. 7,75 s



$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ t \geqslant 0$$

37 Ari foi encarregado de calcular o valor da expressão $A = 4\,000 \cdot 206^2 - 4\,000 \cdot 204^2$, sem o uso de calculadora. Seu amigo Raí recomendou o emprego de técnicas de fatoração, além dos produtos notáveis. Ao seguir o conselho de Raí, Ari obteve: alternativa **a**

a) 3 280 000
b) 360 000
c) 2 380 000
d) 1 680 000
e) 1 240 000

38 **(Enem)** Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20 000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto: *O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos*. Considerando que um ano tem aproximadamente 32×10^6 s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de: alternativa **e**

a) 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.

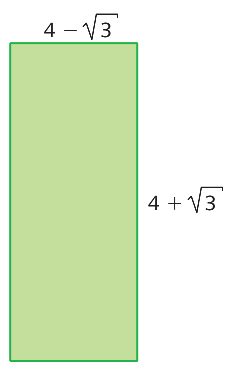
b) 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.

c) 20 000 km², e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.

d) 40 000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.

e) 40 000 km², e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

39 Observe o retângulo abaixo. Determine seu perímetro e sua área. perímetro: 16; área: 13



GUILHERME CASAGRANDI

45. $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3x}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5x}}{\sqrt{60}}=\frac{3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-5\sqrt{x}}{\sqrt{60}}=\frac{0}{\sqrt{60}}=0$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

40 Calcule o valor de cada expressão.

a) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}}$ $\frac{5}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{0{,}05}}$ 10

c) $\frac{\sqrt{0{,}64\cdot 10^{10}}}{\sqrt{10^{-8}}}$ $8\cdot 10^{8}$

d) $\frac{\sqrt{2{,}56\cdot 10^{8}}}{\sqrt{4\cdot 10^{4}}}$ 80

41 Efetue as radiciações.

a) $\sqrt{\sqrt{7}}$ $\sqrt[4]{7}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$ $\sqrt[12]{5}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ 2

d) $\sqrt{4\sqrt[3]{15}}$ $2\sqrt[6]{15}$

e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^{8}}}}$, com $a \geqslant 0$ a

f) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$ $\sqrt[6]{20}$

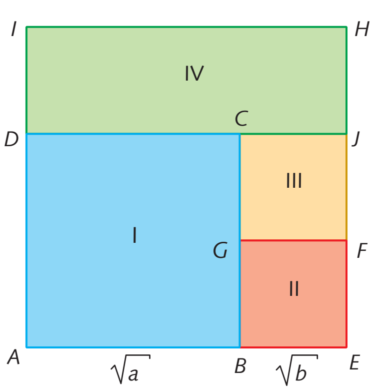
42 Calcule:

a) $\frac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$ 2

b) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}}$ $\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{\sqrt{363}+\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{192}}$ 2

43 Observe o quadrado $AEHI$ da figura, em que $AB=\sqrt{a}$ e $BE=\sqrt{b}$, $a>0$ e $b>0$, e responda às questões.



GUILHERME CASAGRANDI

a) Qual é a área do quadrado $ABCD$? a

b) Qual é a área do quadrado $BEFG$? b

c) Qual é a área do retângulo $GFJC$? $\sqrt{ab}-b$

d) Qual é a área do retângulo $DJHI$? $\sqrt{ab}+b$

e) Determine a área total do quadrado $AEHI$:
- elevando a medida do seu lado ao quadrado; $a+b+2\sqrt{ab}$
- adicionando as áreas das regiões I, II, III e IV. $a+b+2\sqrt{ab}$

44 Racionalize os denominadores e simplifique as expressões.

a) $\frac{7}{\sqrt[5]{7^{2}}}$ $\sqrt[5]{7^{3}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$ $\frac{\sqrt[3]{225}}{5}$

c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\sqrt{3}$

d) $\frac{4}{2-\sqrt{3}}$ $8+4\sqrt{3}$

e) $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} : \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ $2+\sqrt{3}$

45 Prove que: $\sqrt{\frac{3x}{20}}+\sqrt{\frac{x}{15}}-\sqrt{\frac{5x}{12}}=0$, $x\geqslant 0$

46 Na expressão, a e b são números inteiros e positivos. Determine o valor de $a+b$.

$$\frac{(0{,}125)^{b-a}}{8^{a-b}}+21\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{0}+a^{b}=191$$ 15

47 Transforme em uma potência de x a expressão: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, $x\geqslant 0$. $x^{\frac{7}{8}}$

48 Demonstre que $\sqrt{2}+1$ é o inverso de $\sqrt{2}-1$. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

49 Identifique a alternativa correta.

Simplificando a expressão $\frac{A\sqrt{A}-3\sqrt{3}}{\sqrt{A}-\sqrt{3}}$, $A>0$ e $\sqrt{A}-\sqrt{3}\neq 0$, obtemos: alternativa **b**

a) $A-9+A\sqrt{3}$

b) $A+3+\sqrt{3A}$

c) $A-3+\sqrt{A}$

d) $3-A+\sqrt{3}$

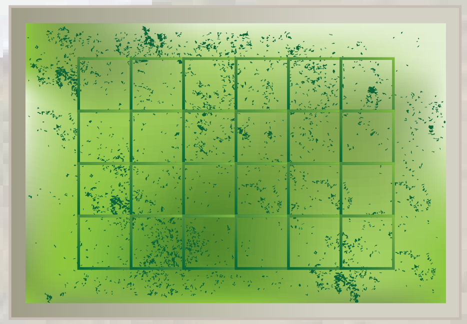
CAPÍTULO

2 EQUAÇÕES DO 2º GRAU

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O telhado ecológico consiste da aplicação de uma camada vegetal sobre uma laje impermeabilizada ou mesmo um telhado convencional. Além de bonito, o telhado ecológico contribui para diminuir a poluição ambiental, melhorar a drenagem de água nas grandes cidades, além de regular a umidade do ar e a temperatura interna das casas.

- Observe a ilustração que representa o telhado verde de uma casa.



Se considerarmos que a medida do lado de cada placa de camada vegetal é x, temos:

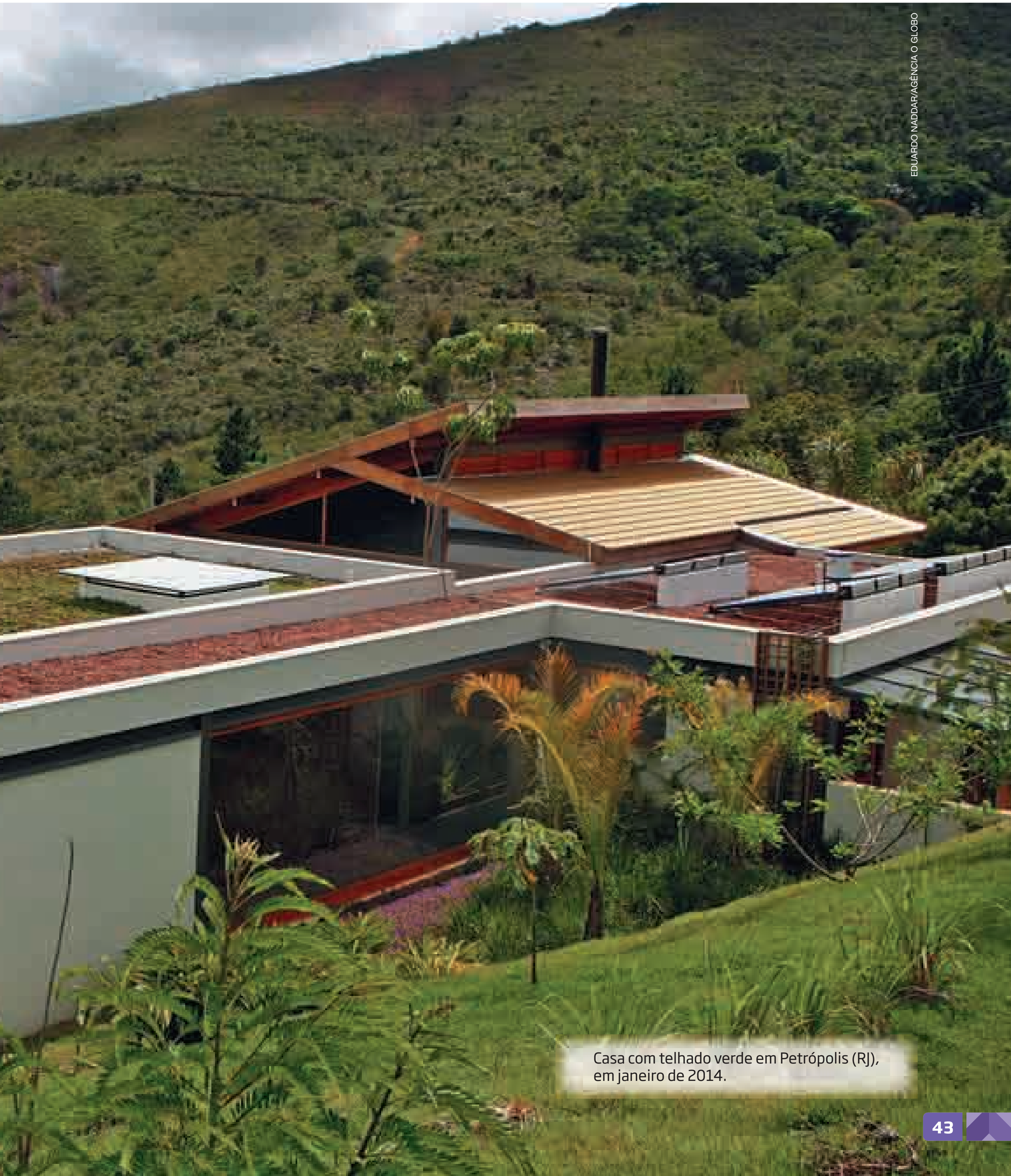
$$4x \cdot 6x = 96$$
$$24x^2 = 96$$
$$24x^2 - 96 = 0$$

Logo, uma maneira de calcular a medida do lado de cada quadrado de camada vegetal é resolver a equação do 2º grau acima.

LUIZ RUBIO

Para cobrir esse telhado foram usadas placas de camada vegetal de formato quadrado, todas com as mesmas dimensões. Sabendo que a área do telhado é 96 m^2, como podemos calcular a medida do lado de cada quadrado de camada vegetal? (Considere que o lado de cada quadrado mede x.)

A abertura deste capítulo apresenta um problema para introduzir as equações do 2º grau. Neste capítulo os alunos vão estudar como resolver equações do 2º grau completas e incompletas. Em seguida, terão contato com os sistemas de equações e a resolução de problemas por meio de equações do 2º grau.



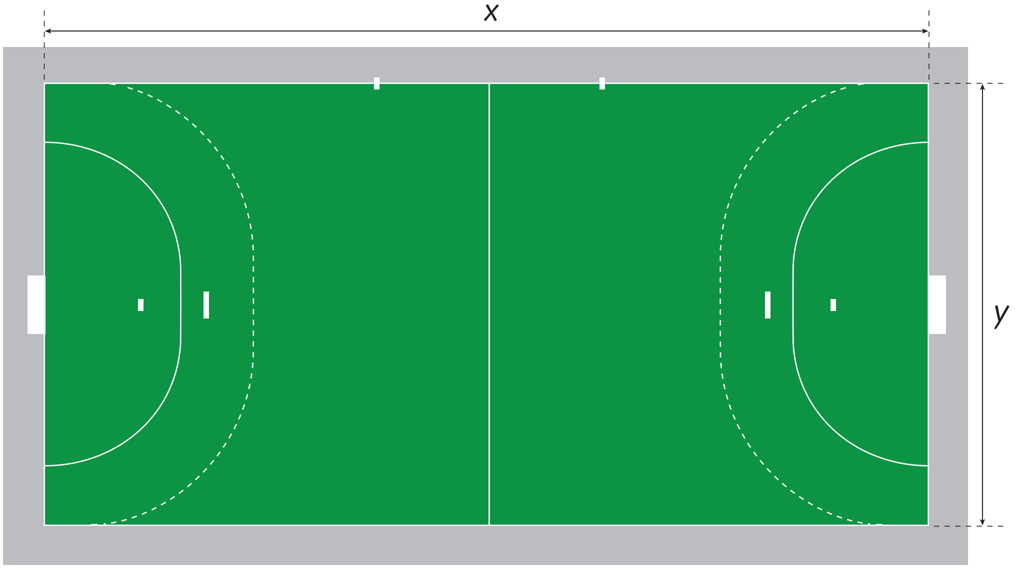
EDUARDO NADDAR/AGÊNCIA O GLOBO

Casa com telhado verde em Petrópolis (RJ), em janeiro de 2014.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Segundo dados da Confederação Brasileira de Handebol (CBHb), a quadra para esse esporte deve ter o formato de um retângulo com área igual a 800 m^2 e perímetro de 120 m. De que forma podemos encontrar as dimensões dessa quadra?



LUIZ RUBIO

Veja como Paulo começou a resolver esse problema:

Área: 800 m^2

Perímetro: 120 m

Sabendo que x é a medida do comprimento da quadra e y é a medida da largura, temos:

$xy = 800$ (I)

$2(x + y) = 120$ (II)

Se julgar conveniente, chame a atenção dos alunos para o fato de que Paulo usou uma estratégia semelhante ao método da substituição para resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Comente ainda que a equação (I) não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois não pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax + by = c$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Isolando x em (I): $x = \dfrac{800}{y}$

Substituindo x por $\dfrac{800}{y}$ em (II): $2\left(\dfrac{800}{y} + y\right) = 120$

Lembre aos alunos que duas equações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto universo e as mesmas raízes, e que, para encontrar uma equação equivalente a uma dada, usamos o princípio aditivo ou o multiplicativo das igualdades.

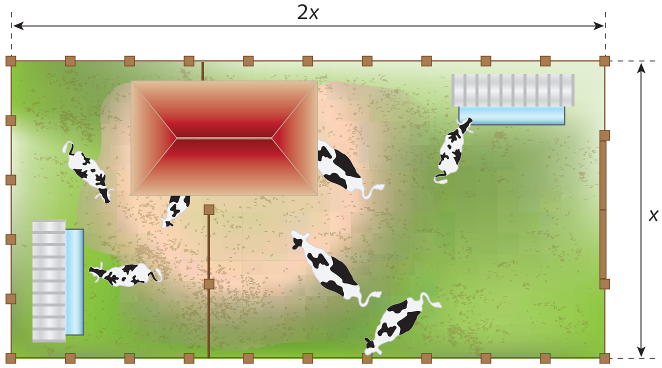
- Determine uma equação equivalente à última encontrada por Paulo, de modo que a incógnita não apareça no denominador. Exemplo de resposta: $y^2 - 60y + 800 = 0$
- Quantas incógnitas tem essa equação? uma incógnita
- Qual é o maior expoente da incógnita dessa equação? 2
- O que Paulo precisa fazer para encontrar as dimensões da quadra? Paulo precisa primeiro encontrar o valor de y (largura da quadra) resolvendo a equação $y^2 - 60y + 800 = 0$ e depois substituir o valor encontrado para y na equação (I) ou (II) para determinar o valor de x (comprimento da quadra).
- Você acha que há outras maneiras de resolver esse problema sem substituir x pela expressão $\dfrac{800}{y}$? Espera-se que os alunos percebam que sim. Por exemplo, pode-se isolar y na equação (I) e substituir a expressão obtida na equação (II), ou, ainda, escolher a 2ª equação para isolar qualquer uma das incógnitas e substituir a expressão obtida na equação (I).

Neste capítulo, você vai aprender a resolver **equações do 2º grau**.

1 Equação do 2º grau com uma incógnita

Considere a situação a seguir.

Um curral tem formato retangular e área igual a 288 m². Uma das dimensões tem o dobro da outra. Quanto mede cada uma das dimensões desse curral?



LUIZ RUBIO

Considerando x a medida da menor dimensão, a maior corresponderá a $2x$ e a área poderá ser representada por $x \cdot 2x$. Assim:

$x \cdot 2x = 288$

$2x^2 = 288$

$2x^2 - 288 = 0$

Uma maneira de calcular a medida de cada uma das dimensões desse curral é resolver essa equação.

A equação $2x^2 - 288 = 0$ é um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita (a letra x).

> Denominamos **equação do 2º grau** na incógnita x aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$.

Exemplos

- $x^2 - 5x + 6 = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$;
- $6x^2 - x - 1 = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 6$, $b = -1$ e $c = -1$;
- $7x^2 - x = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 7$, $b = -1$ e $c = 0$;
- $x^2 - 36 = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -36$.

Nas equações escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$ (equação do 2º grau na incógnita x), chamamos a, b e c de **coeficientes**.

Cuidado!

Não são equações do 2º grau com uma incógnita:

- $x^2 + 2y^2 = 8$ (possui duas incógnitas: x e y)
- $x^3 + 4x^2 - x = -7$ (o maior expoente da incógnita é 3)
- $(3x^2 - 2)^2 = 0$ (o maior expoente da incógnita é 4)

Equações completas e incompletas

Uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, na incógnita x, é **completa** quando todos os seus coeficientes (a, b, c) são diferentes de zero.

Exemplos

- $x^2 - 9x + 20 = 0 \left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 20 \end{array} \right.$
- $-x^2 + 10x - 16 = 0 \left| \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 10 \\ c = -16 \end{array} \right.$

Quando b ou c ou esses dois coeficientes são iguais a zero, dizemos que a equação do 2º grau é **incompleta**.

Exemplos

- $x^2 - 36 = 0 \left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -36 \end{array} \right.$
- $x^2 - 10x = 0 \left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 0 \end{array} \right.$
- $4x^2 = 0 \left| \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array} \right.$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Uma quadra de basquete tem área igual a 240 m². Escreva a equação do 2º grau que pode ser utilizada para determinar a medida do comprimento e da largura da quadra, de acordo com a figura.
Exemplo de resposta: $x^2 + 8x - 240 = 0$

GUILHERME CASAGRANDI

2 Identifique as equações do 2º grau. alternativas **b**, **c**, **e** e **f**

a) $6x + 5 = 0$
b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
c) $y^2 - 4y = 0$
d) $0x^2 + 5x + 6 = 0$
e) $9 - y^2 = 0$
f) $(2z - 3)^2 = 0$

3 Considerando $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, determine os coeficientes das equações.

a) $x^2 + 13x + 36 = 0$ $a = 1, b = 13, c = 36$
b) $-3x^2 + 6x = 0$ $a = -3, b = 6, c = 0$
c) $3x^2 - 12 = 0$ $a = 3, b = 0, c = -12$
d) $25 - 10x + x^2 = 0$ $a = 1, b = -10, c = 25$
e) $x^2 + 4x = 0$ $a = 1, b = 4, c = 0$
f) $(k + 1)x^2 - 2kx = 0$, $k + 1 \neq 0$
$a = k + 1, b = -2k, c = 0$

4 Escreva no caderno a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

a) $a = 5$, $b = -1$ e $c = 0$ $5x^2 - x = 0$
b) $a = 4$, $b = 0$ e $c = -9$ $4x^2 - 9 = 0$
c) $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ e $c = 2$ $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = 0$
d) $a = 0{,}2$, $b = 1$ e $c = 0{,}5$ $0{,}2x^2 + x + 0{,}5 = 0$

5 Um quadrado com lado de medida x tem área igual a 625 m². Escreva uma equação do 2º grau para determinar o valor de x.
Exemplo de resposta: $x^2 - 625 = 0$

6 Classifique as equações do 2º grau em completa ou incompleta.

a) $3x^2 + 5x = 0$ incompleta
b) $-3x^2 + 9 = 0$ incompleta
c) $x^2 - x = 0$ incompleta
d) $x^2 + 7x + 12 = 0$ completa
e) $6x^2 = 0$ incompleta
f) $x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 4 = 0$ completa

7 Determine os valores possíveis de m na equação $(3m - 2)x^2 + (2m + 1)x - 4 = 0$, de modo que ela seja do 2º grau. $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

8 Reescreva a equação $5 - \frac{(x - 3)}{4} = 2x - (x - 2)^2$ na forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
Exemplo de resposta: $4x^2 - 25x + 39 = 0$

2 Raiz de uma equação do 2º grau

Da mesma forma que você aprendeu ao estudar as equações do 1º grau com uma incógnita, podemos verificar se um número é ou não raiz de uma equação do 2º grau. Para isso, substituímos a incógnita pelo número dado: se a sentença obtida for verdadeira, o número dado será raiz da equação; se a sentença for falsa, o número não será raiz da equação.

Exemplos

- Verificar se -1, 0, 1 e 2 são raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$.

Para $x = -1$:

$x^2 - x - 2 = 0$

$(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

$1 + 1 - 2 = 0$

$0 = 0$ ← sentença verdadeira

Para $x = 1$:

$x^2 - x - 2 = 0$

$1^2 - 1 - 2 = 0$

$1 - 1 - 2 = 0$

$-2 = 0$ ← sentença falsa

Para $x = 0$:

$x^2 - x - 2 = 0$

$0^2 - 0 - 2 = 0$

$0 - 0 - 2 = 0$

$-2 = 0$ ← sentença falsa

Para $x = 2$:

$x^2 - x - 2 = 0$

$2^2 - 2 - 2 = 0$

$4 - 2 - 2 = 0$

$0 = 0$ ← sentença verdadeira

Verificamos que -1 e 2 são raízes da equação e que 0 e 1 não são raízes da equação.

- Determinar p na equação $(2p - 1)x^2 - 2px - 2 = 0$, sabendo que 2 é raiz.

Substituindo a incógnita x por 2, já que 2 é raiz da equação, determinamos o valor de p.

$(2p - 1) \cdot 2^2 - 2p \cdot 2 - 2 = 0$

$(2p - 1) \cdot 4 - 4p - 2 = 0$

$8p - 4 - 4p - 2 = 0$

$4p - 6 = 0$

$4p = 6$

$p = \dfrac{6}{4}$

$p = \dfrac{3}{2}$

Portanto, o valor de p é $\dfrac{3}{2}$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Dados os números -6, -5, 0, 1, 5 e 6, quais deles são raízes da equação $x^2 - x - 30 = 0$? -5 e 6

2 Em $\left(\frac{3k}{2}\right)x^2 + (k - 3)x - \frac{5}{2} = 0$, $k \neq 0$, qual é o valor de k para que $-\frac{1}{2}$ seja raiz? $k = -8$

3 Verifique se $-0{,}2$ é raiz das equações abaixo.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ não

b) $15x^2 - 7x - 2 = 0$ sim

4 Dê um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita de modo que:

a) 0 seja uma raiz. Exemplo de resposta: $x^2 + 2x = 0$

b) não possua raízes reais.

Exemplo de resposta: $x^2 + 1 = 0$

3 Resolução de equações do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau é descobrir suas raízes, que devem pertencer a um dado conjunto universo U (conjunto formado por todos os valores que a incógnita pode assumir). Essas raízes também são chamadas de soluções da equação em um conjunto universo.

Resolução de uma equação do 2º grau incompleta

Vamos resolver algumas equações do 2º grau incompletas.

Exemplos

- Determinar as raízes reais ou soluções da equação $2x^2 - 72 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

  $2x^2 - 72 + 72 = 0 + 72$ → Adicionamos 72 a ambos os membros da equação.

  $2x^2 = 72$

  $\frac{2x^2}{2} = \frac{72}{2}$ → Dividimos os dois membros por 2.

  $x^2 = 36$

  $x = \sqrt{36} = 6$ ou $x = -\sqrt{36} = -6$

  Portanto, as raízes reais da equação são 6 e -6.

  Proponha a seguinte pergunta aos alunos: Se o conjunto universo considerado fosse o conjunto dos números naturais, a equação $2x^2 - 72 = 0$ teria quantas soluções? Por quê? Espera-se que os alunos respondam que a equação teria uma única solução, pois -6 não é um número natural.

- Resolver a equação $3x^2 + 6 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

  $3x^2 + 6 - 6 = 0 - 6$ → Subtraímos 6 de ambos os membros da equação.

  $3x^2 = -6$

  $\frac{3x^2}{3} = \frac{-6}{3}$ → Dividimos os dois membros por 3.

  $x^2 = -2$

  Como não existe um número real que elevado ao quadrado seja igual a -2, dizemos que a equação não tem raízes reais ou não tem solução em $\mathbb{R}$.

- Determinar as raízes reais ou soluções da equação $-3x^2 = 0$, em $\mathbb{R}$.

  $\frac{-3x^2}{-3} = \frac{0}{-3}$ → Dividimos os dois membros por -3.

  $x^2 = 0$

  $x = -0 = 0$ ou $x = +0 = 0$

  Portanto, a equação tem duas raízes reais iguais a zero.

- Resolver a equação $x^2 - 8x = 0$, em $\mathbb{R}$.

Inicialmente, colocamos o fator comum x em evidência:

$x \cdot (x - 8) = 0$

Como o produto dos fatores x e $(x - 8)$ é zero, pelo menos um deles é zero. Assim:

$x = 0$ ou $x - 8 = 0$

$\quad\quad\quad x = 8$

Portanto, as raízes reais da equação são 0 e 8.

Comente com os alunos que toda equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem sempre duas raízes reais diferentes, sendo uma delas igual a zero.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 64 = 0$ $x = -8$ ou $x = 8$

b) $x^2 - 7 = 0$ $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$

c) $3x^2 + 7 = 0$ Não tem raízes reais.

d) $9x^2 - 16 = 0$ $x = -\frac{4}{3}$ ou $x = \frac{4}{3}$

e) $3x^2 = 0$ $x = 0$

f) $x^2 - 5x = 0$ $x = 0$ ou $x = 5$

g) $-2x^2 - 10x = 0$ $x = 0$ ou $x = -5$

h) $\frac{3x^2}{4} - 5x = 0$ $x = 0$ ou $x = \frac{20}{3}$

i) $6x^2 = 5x$ $x = 0$ ou $x = \frac{5}{6}$

j) $(x + 2)^2 = 4$ $x = 0$ ou $x = -4$

2 Calcule as raízes reais de cada equação.

a) $(x - 2)^2 + 4x = 4$ $x = 0$

b) $x \cdot (x + 2) = 4x$ $x = 0$ ou $x = 2$

c) $3 \cdot (x - 2)^2 = 12$ $x = 0$ ou $x = 4$

d) $2x^2 - \frac{3}{4} = x^2 + \frac{1}{4}$ $x = -1$ ou $x = 1$

e) $\frac{x - 3}{2} + \frac{2x - 3}{4} = x^2 + x - \frac{17}{2}$ $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$

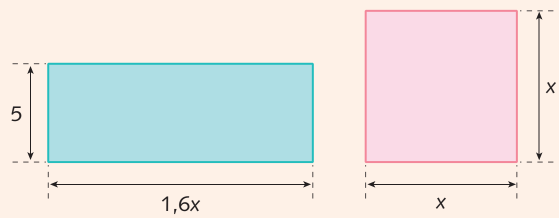
f) $\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 3} = 1$, $x \neq 3$ e $x \neq -3$. $x = -\sqrt{15}$ ou $x = \sqrt{15}$

3 Calcule as raízes reais de cada equação.

a) $3m^2 + 2 = 4m^2 + 2$ $m = 0$

b) $\left(\frac{x}{5} - 5\right) \cdot \left(\frac{x}{5} + 5\right) = 0$ $x = -25$ ou $x = 25$

4 O retângulo e o quadrado abaixo têm a mesma área. Observe atentamente as figuras e responda às questões.



GUILHERME CASAGRANDI

a) Qual é a medida do lado do quadrado? 8

b) Qual é o perímetro do quadrado? E o do retângulo? 32; 35,6

c) Qual é a área do retângulo e do quadrado? 64

5 Determine o valor de x em cada caso.

a) O quadrado de x é igual a 121. $x = -11$ ou $x = 11$

b) A terça parte do quadrado de x é igual a 27. $x = -9$ ou $x = 9$

c) O dobro do quadrado de x é igual ao triplo de x. $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$

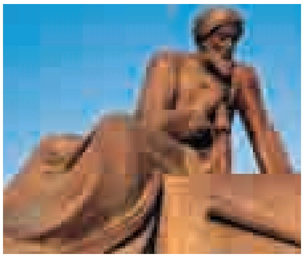
d) A diferença entre o quadrado de x e 4 é igual a 140. $x = -12$ ou $x = 12$

Resolução das equações completas

Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi, matemático árabe do século IX, em seu livro *Al-jabr Wa'l muqabalah*, apresentou regras para encontrar as raízes positivas de equações do 2º grau. Em suas soluções, ele usava apenas palavras, sem empregar símbolos.

Uma das equações apresentadas e resolvidas por Al-Khowarizmi foi:

$$x^2 + 10x = 39$$



GUIZIOU FRANCK/EASYPIX

Estátua de Al-Khowarizmi em Khiva, Uzbesquistão.

Comente com os alunos que os árabes não trabalhavam com números negativos e, por esse motivo, Al-Khowarizmi só considerava raízes positivas, e a equação proposta não foi apresentada na forma $x^2 + 10x - 39 = 0$.

Como podemos encontrar as raízes dessa equação? A seguir, vamos estudar a resolução de equações do 2º grau completas, como a estudada por Al-Khowarizmi.

Resolução por fatoração

Se julgar necessário, retome com os alunos os conceitos de produtos notáveis e fatoração.

Vamos usar o que já foi estudado sobre fatoração e produtos notáveis para resolver algumas equações do 2º grau completas.

Exemplos

- Determinar as raízes reais da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$.

$x^2 - 10x + 25 = 0$ → Trinômio quadrado perfeito.

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 0$

$(x - 5)^2 = 0$ → Forma fatorada do trinômio.

$(x - 5) \cdot (x - 5) = 0$

Como os dois fatores são iguais, a equação tem duas raízes reais iguais:

$(x - 5) = 0$

$x = 5$

Se julgar necessário, proponha aos alunos que verifiquem se 5 é raiz da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$. Espera-se que eles substituam a incógnita x por 5 e verifiquem que a sentença obtida é verdadeira.

Portanto, a equação tem duas raízes reais iguais a 5.

GEORGE TUTUMI

- Resolver a equação $16x^2 + 24x = -9$, em $\mathbb{R}$.

$16x^2 + 24x + 9 = -9 + 9$ → Adicionamos 9 a ambos os membros da equação.

$16x^2 + 24x + 9 = 0$ → Trinômio quadrado perfeito.

$(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 0$

$(4x + 3)^2 = 0$ → Forma fatorada do trinômio.

$(4x + 3) \cdot (4x + 3) = 0$

Caso os alunos não compreendam o porquê de $x = -\frac{3}{4}$, proponha que eles resolvam a equação $4x + 3 = 0$ aplicando os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades.

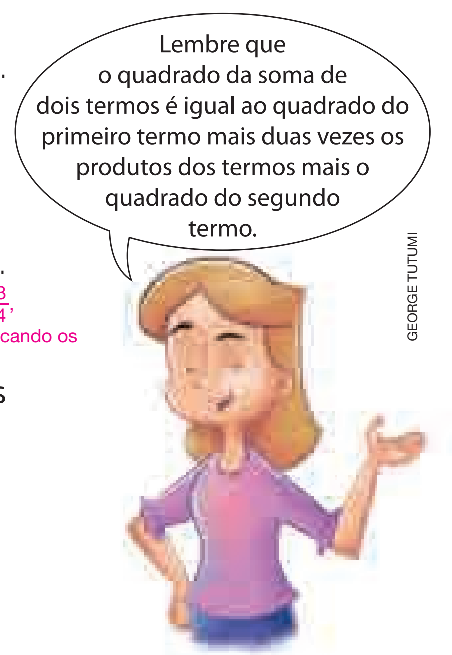
Como os dois fatores são iguais, a equação tem duas raízes reais iguais:

$(4x + 3) = 0$

$x = -\dfrac{3}{4}$

$4x + 3 - 3 = 0 - 3$
$4x = -3$
$\frac{4x}{4} = \frac{-3}{4}$
$x = -\frac{3}{4}$

Portanto, a equação tem duas raízes reais iguais a $-\dfrac{3}{4}$.

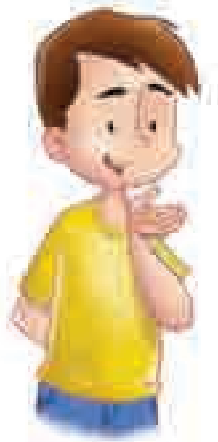


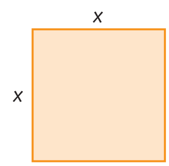
GEORGE TUTUMI

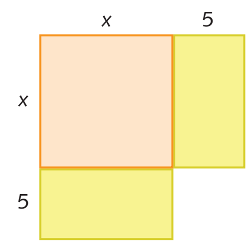
Proponha aos alunos que resolvam algumas equações do 2º grau em que o primeiro membro seja a forma fatorada de um trinômio quadrado perfeito e o 2º membro seja um número diferente de zero, por exemplo, $(x - 1)^2 = 4$, $(2x + 3)^2 = 9$ etc. Isso poderá ajudá-los a entender que obter uma equação equivalente a uma outra, cujo primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito, facilita a tarefa de obter as raízes da equação do 2º grau inicial.

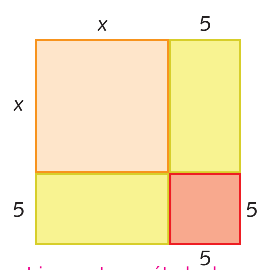
- Determinar as raízes reais da equação $x^2 + 10x = 39$, apresentada por Al-Khowarizmi.

  Veja que o primeiro membro da equação $x^2 + 10x - 39 = 0$ não é um trinômio quadrado perfeito. Para resolvê-la, devemos encontrar uma equação equivalente a ela, cujo primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito. Observe a explicação de Dênis de como ele encontrou essa equação.









Para interpretar geometricamente o método de completar quadrados, devemos assumir que x é positivo, pois é a medida do lado de um quadrado, porém, ao resolver a equação, podemos desconsiderar esse fato e admitir que x pode ser qualquer número real.

Agora, podemos resolver a equação inicial mais facilmente.

$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

$x^2 + \underbrace{2 \cdot x \cdot 5} + 5^2 = 64$

$(x + 5)^2 = 64$

$(x + 5) = \sqrt{64} = 8$ ou $(x + 5) = -\sqrt{64} = -8$

$x = 3$ ou $x = -13$

Portanto, 3 e -13 são as raízes reais da equação $x^2 + 10x = 39$.

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

GRÁFICOS: LUIZ RUBIO

Fórmula de resolução de uma equação do 2º grau

Considerando a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são coeficientes reais com $a \neq 0$, vamos obter, através da generalização do método de completar quadrados, uma fórmula para calcular suas raízes.

- Multiplicamos ambos os membros por $4a$.

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0 \cdot 4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

- Subtraímos $4ac$ de ambos os membros da equação.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ac = 0 - 4ac$$

- Adicionamos b^2 a ambos os membros da equação.

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -4ac + b^2$$

- Fatoramos o primeiro membro.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Espera-se que os alunos respondam que $b^2 - 4ac$ é resultado do quadrado de $2ax + b$. Então, é positivo ou nulo.

- Considerando $b^2 - 4ac \geqslant 0$, extraímos a raiz quadrada dos dois membros.

$$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$$
ou
$$2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Isolamos x.

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\frac{\cancel{2a}x}{\cancel{2a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim, encontramos a fórmula resolutiva de equações do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Comente com os alunos que Bhaskara (1114-1185) foi um matemático hindu cujos estudos contribuíram para a resolução das equações de 1º e 2º grau. Essa fórmula resolutiva foi encontrada por Bhaskara em documentos que datam do século XI e foi apresentada em sua obra *Lilavati*, escrita no século XII.

Essa **fórmula resolutiva** de equações do 2º grau, conhecida como **fórmula de Bhaskara**, permite calcular as raízes conhecidos os coeficientes.

Assim, concluímos que as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

GEORGE TUTUMI

Exemplos

- Calcular as raízes da equação $7x^2 + 13x - 2 = 0$.

Aplicando a fórmula resolutiva para $a = 7$, $b = 13$ e $c = -2$, temos:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-2)}}{2 \cdot 7}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 56}}{14}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{14}$$

$$x = \frac{-13 \pm 15}{14} \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-13 + 15}{14} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-13 - 15}{14} = -\dfrac{28}{14} = -2 \end{array} \right.$$

Portanto, as raízes da equação são -2 e $\frac{1}{7}$.

Na seção *Trocando ideias* da página 44 os alunos estudaram que, para encontrar as medidas do comprimento e da largura da quadra de handebol, eles precisam resolver uma equação do 2º grau. Proponha a eles que resolvam essa equação pelo método que eles julgarem mais conveniente. Chame a atenção deles para o fato de que o conjunto universo considerado deve ser o conjunto dos números reais positivos, pois *x* e *y* correspondem às medidas do comprimento e da largura da quadra, respectivamente. Espera-se que eles concluam que o comprimento da quadra é 40 metros e que a largura é 20 metros.

Relembre com os alunos que equação fracionária é toda equação em que pelo menos um dos termos é uma fração algébrica.

- Determinar as raízes da equação fracionária $\frac{4x}{x - 1} + \frac{x - 10}{x} = 4$.

Como o denominador de uma fração não pode ser zero, as condições de existência dessa equação são $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Inicialmente, vamos reduzir a equação fracionária a uma equação do 2º grau.

$$\frac{4x}{x - 1} + \frac{x - 10}{x} = 4 \longrightarrow \text{mmc } (x - 1, x) = x(x - 1)$$

$$\frac{4x \cdot x}{x(x - 1)} + \frac{(x - 10)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{4x(x - 1)}{x(x - 1)} \longrightarrow$$ Reduzimos todos os termos a um mesmo denominador.

$$\cancel{x \cdot (x - 1)} \cdot \frac{4x \cdot x}{\cancel{x(x - 1)}} + \cancel{x \cdot (x - 1)} \cdot \frac{(x - 10)(x - 1)}{\cancel{x(x - 1)}} = \cancel{x \cdot (x - 1)} \cdot \frac{4x(x - 1)}{\cancel{x(x - 1)}}$$

$\longrightarrow$ Aplicamos o princípio multiplicativo das igualdades.

$$4x^2 + (x - 10)(x - 1) = 4x(x - 1)$$

$$4x^2 + x^2 - x - 10x + 10 = 4x^2 - 4x \longrightarrow$$ Aplicamos a propriedade distributiva.

$$5x^2 - 11x + 10 = 4x^2 - 4x$$

$$5x^2 - 11x + 10 - 4x^2 + 4x = 4x^2 - 4x - 4x^2 + 4x \longrightarrow$$ Aplicamos o princípio aditivo das igualdades.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Agora, vamos resolver a equação do 2º grau aplicando a fórmula resolutiva em que: $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7 + 3}{2} = 5 \\[2ex] x_2 = \dfrac{7 - 3}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Portanto, as raízes da equação são 2 e 5.

2. Espera-se que os alunos concordem com Roberta, pois x deve ser diferente de -1 para que o denominador das frações algébricas $\frac{2}{x^2-1}$ e $\frac{1}{x+1}$ seja diferente de zero.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva as equações abaixo em $\mathbb{R}$.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$

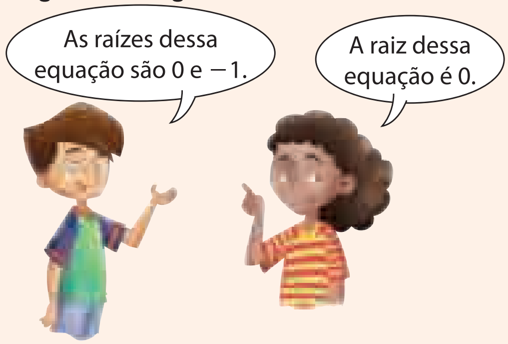
b) $6x^2 - x - 2 = 0$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{2}{3}$

c) $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 4 = 0$ $x_1 = \sqrt{5} + 1$ e $x_2 = \sqrt{5} - 1$

d) $x^2 - 14x + 49 = 0$ $x_1 = x_2 = 7$

e) $(x + 3)^2 = 2x\,(x + 7)$ $x_1 = -9$ e $x_2 = 1$

2 Após resolverem a equação $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} = -1$, Allan e Beatriz chegaram à seguinte conclusão:



Com qual deles você concorda? Por quê?

3 Determine as raízes das equações fracionárias abaixo. Determine antes a condição de existência de cada uma.

a) $\frac{x - 3}{2} + \frac{1}{x} = -3$ $x \neq 0$; $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$

b) $\frac{x}{x + 1} - \frac{x}{1 - x} = \frac{8}{3}$ $x \neq -1$ e $x \neq 1$; $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$

c) $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 2$ $x \neq 1$ e $x \neq -1$; $x = -\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{3 - x} + \frac{6}{x^2 - 9} = \frac{2}{x}$ $x \neq 0$, $x \neq 3$ e $x \neq -3$; $x = -2$

e) $\frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = \frac{x - 2}{x + 1}$ $x \neq 1$ e $x \neq -1$; $x = -2$

4 A soma de um número real com seu quadrado é 42. Determine esse número. -7 ou 6

5 Subtraindo o inverso de um número real qualquer desse mesmo número, obtemos $\frac{3}{2}$. Determine esse número. $-\frac{1}{2}$ ou 2

GEORGE TUTUMI

Discriminante

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de **discriminante** da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e é representada pela letra grega Δ (delta).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Então, a fórmula resolutiva pode ser escrita assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podemos verificar se uma equação tem ou não raízes reais analisando o discriminante.

- Quando $\Delta > 0$, o valor de $\sqrt{\Delta}$ é real e a equação tem duas raízes reais diferentes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Quando $\Delta = 0$, o valor de $\sqrt{\Delta}$ é nulo e a equação tem duas raízes reais iguais:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- Quando $\Delta < 0$, o valor de $\sqrt{\Delta}$ não é um número real e a equação não tem raízes reais.

Exemplo

- Determinar os valores de m para que a equação $3x^2 + 6x + m = 0$ tenha duas raízes reais diferentes.

$3x^2 + 6x + m = 0$

$a = 3$

$b = 6$

$c = m$ $\Delta > 0$

$b^2 - 4ac > 0$

$6^2 - 4 \cdot 3 \cdot m > 0$

$36 - 12m > 0$

$-12m > -36$

$12m < 36$

$m < 3$

Multiplicamos ambos os membros por -1. Invertemos o sentido da desigualdade.

Portanto, os valores de m devem ser menores que 3 para que a equação tenha duas raízes reais diferentes.

Observe que, se $m = 3$, a equação tem duas raízes reais iguais, e que, se $m > 3$, a equação não tem raízes reais.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o discriminante e indique se a equação tem raízes reais.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$ $\Delta = 16$; sim

b) $3x^2 - 10x - 8 = 0$ $\Delta = 196$; sim

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Delta = 0$; sim

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Delta = 0$; sim

e) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ $\Delta = -23$; não

f) $3x^2 + 6x + 4 = 0$ $\Delta = -12$; não

2 Determine o valor de p na equação $x^2 - 6x + p - 5 = 0$, de modo que suas raízes:

a) sejam reais e iguais; $p = 14$

b) sejam reais e diferentes; $p < 14$

c) não sejam reais. $p > 14$

3 Determine o valor de k para que a equação $3x^2 - 5x + 2k = 0$ não tenha raízes reais. $k > \frac{25}{24}$

4 Determine os valores de a em cada uma das equações a seguir, de modo que:

a) a equação $x^2 - 7x + a = 0$ tenha duas raízes reais diferentes; $a < \frac{49}{4}$

b) a equação $x^2 - ax + 9 = 0$ tenha duas raízes reais iguais; $a = -6$ ou $a = 6$

c) a equação $x^2 - 3x + a = 0$ não tenha raízes reais. $a > \frac{9}{4}$

5 Para que valores de m, com $m \neq 0$, a equação $mx^2 - 2mx + 5 = 0$ tem duas raízes reais diferentes? $m < 0$ e $m > 5$

LÉO FANELLI

4 Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau

Considere $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Veja como podemos relacionar essas raízes e os coeficientes a, b e c da equação:

- **Soma das raízes (*S*)**

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = -\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a}$$

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

- **Produto das raízes (*P*)**

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - \cancel{b^2} + \cancel{4}ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}\cancel{a} \cdot a} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Essas relações são denominadas **relações de Girard**.

Veja como podemos escrever qualquer equação do 2º grau dadas as suas raízes:

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da equação por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Assim, podemos escrever a equação da seguinte maneira:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exemplos

- Determinar o valor de k na equação $x^2 + (2k - 3)x + 2 = 0$, de modo que a soma de suas raízes seja igual a 7.

  $x^2 + (2k - 3)x + 2 = 0$

  $x^2 - Sx + P = 0$

  $2k - 3 = -S$

  Como $S = 7$, temos: $2k - 3 = -7$, ou seja: $k = -2$

- Determinar as raízes da equação do 2º grau $2x^2 + 10x + 12 = 0$ sem usar a fórmula resolutiva.

Para encontrar as raízes da equação, podemos usar as relações entre os coeficientes e as raízes. Para isso, escrevemos a equação na forma $x^2 - Sx + P = 0$.

$$2x^2 + 10x + 12 = 0$$

Multiplicamos ambos os membros por $\frac{1}{2}$.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 \underbrace{-(-5)}_{-S}x \underbrace{+6}_{+P} = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$S = -5$

$P = 6$

Sabendo que a soma das raízes é -5 e o produto é 6, testamos mentalmente alguns pares de valores até encontrar aquele que satisfaz as condições. Nesse caso, -2 e -3 são os valores procurados, pois:

$S = x_1 + x_2 = -2 + (-3) = -5$

$P = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot (-3) = 6$

Portanto, -2 e -3 são as raízes da equação.

Se julgar necessário, proponha aos alunos que resolvam as equações do 2º grau a seguir, sem usar a fórmula resolutiva.
- $x^2 - 4x + 4 = 0$ (possui duas raízes reais iguais a 2)
- $-2x^2 + 4x + 48 = 0$ (raízes: -4 e 6)

É importante deixá-los desenvolver sua própria maneira de testar os números. Em seguida, peça a eles que compartilhem suas estratégias com os colegas.

UM POUCO DE HISTÓRIA

DIEGO SAITO

Albert Girard (1595-1632)

TOMA

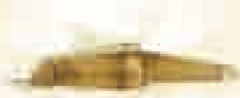
Nascido na França, Albert Girard passou a maior parte de sua vida na Holanda, onde estudou Matemática na Universidade de Leiden. Trabalhou com Aritmética, Álgebra e Trigonometria. Foi Girard quem estabeleceu as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau.

Em 1629, escreveu o livro *Invention nouvelle en algèbre*, no qual estabeleceu relações entre os coeficientes e as raízes para equações de grau superior a 2.

Girard dedicou-se especialmente à engenharia militar, projetando fortificações e mapas cartográficos. Veja alguns exemplos:

1597 – Fundação do Forte dos Reis Magos, que em 1599 passou a se chamar Natal

1605 – Miguel de Cervantes publica *Dom Quixote*



1613 – Fundação do Forte de São Sebastião, que deu origem à cidade de Fortaleza

1616 – Fundação do Forte do Presépio, que deu origem à cidade de Belém

ILUSTRAÇÕES: TOMA

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a soma (S) e o produto (P) das raízes das equações a seguir.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $S = 5; P = 6$

b) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ $S = 2; P = \frac{1}{a}$

c) $5x^2 - 8x + 4 = 0$ $S = \frac{8}{5}; P = \frac{4}{5}$

d) $x^2 - \frac{x}{10} - \frac{1}{5} = 0$ $S = \frac{1}{10}; P = -\frac{1}{5}$

e) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $S = 6; P = 9$

f) $x^2 - 12x + 32 = 0$ $S = 12; P = 32$

2 Determine o valor de m na equação $x^2 - 6x - m + 1 = 0$, de modo que o produto de suas raízes seja igual a -2. $m = 3$

3 Determine o valor de p na equação $px^2 - 3x - 2 = 0$, com $p \neq 0$, de modo que a soma de suas raízes seja igual a 12. $p = \frac{1}{4}$

4 Calcule o valor de m na equação $x^2 - 6x + 2m = 0$, de modo que uma das raízes seja o dobro da outra. $m = 4$

5 Sem resolver a equação $x^2 - 11x + 28 = 0$, calcule o valor das expressões abaixo, sabendo que x_1 e x_2 são suas raízes.

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ $\frac{11}{28}$

b) $x_1^2 + x_2^2$ 65

6 Componha uma equação do 2º grau cujas raízes sejam:

a) 6 e 8 $x^2 - 14x + 48 = 0$

b) $-\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5}$ $x^2 - \frac{9}{25} = 0$

c) $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{4}$ $x^2 + \frac{7x}{4} + \frac{3}{8} = 0$

d) 0,2 e 0,3 $x^2 - 0{,}5x + 0{,}06 = 0$

7 Calcule mentalmente as raízes das equações do 2º grau a seguir:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x_1 = x_2 = 1$

b) $x^2 - 2x - 15 = 0$ $x_1 = -3$ e $x_2 = 5$

c) $x^2 - 9x + 14 = 0$ $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$

d) $x^2 + 7x + 12 = 0$ $x_1 = -3$ e $x_2 = -4$

e) $x^2 + 11x + 30 = 0$ $x_1 = -6$ e $x_2 = -5$

Forma fatorada de uma equação do 2º grau

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e x_1 e x_2 suas raízes.

Colocando a em evidência, obtemos:

$$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Sabemos que: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Então, podemos escrever:

$$a\,[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2)] = 0$$

$$a\,[\underbrace{x^2 - x_1 \cdot x}_{x \text{ é fator comum}} - \underbrace{x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2}_{x_2 \text{ é fator comum}}] = 0$$

$$a\,[x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)] = 0$$

fator comum

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Portanto, a forma fatorada da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2, é:

$$\boxed{a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0}$$

Exemplos

- Escrever, na forma fatorada, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

  Temos que as raízes x_1 e x_2 da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3, respectivamente.

  Sendo $a = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, a forma fatorada de $x^2 - 5x + 6 = 0$ pode ser assim escrita:

  $(x - 2)(x - 3) = 0$

- Simplificar a seguinte expressão algébrica $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$, em que $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

  Vimos no exemplo anterior que a forma fatorada do trinômio $x^2 - 5x + 6$ é $(x - 2)(x - 3)$.

  A expressão $x^2 - 4$ é uma diferença de quadrados e, portanto, sua forma fatorada é $(x - 2)(x + 2)$.

  Assim:

  $$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x - 2)}(x - 3)}{\cancel{(x - 2)}(x + 2)} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

  Logo, a simplificação de $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$, em que $x \neq 2$ e $x \neq -2$, é $\dfrac{x - 3}{x + 2}$.

- Determinar uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 3 e 4.

  Usando a forma fatorada para $a = 1$, temos:

  $(x - 3)(x - 4) = 0$

  Agora, aplicamos a propriedade distributiva:

  $x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$

  $x^2 - 7x + 12 = 0$

  Logo, a equação procurada é $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Após os alunos discutirem sobre a questão, comente que, ao atribuir qualquer outro valor para *a*, obteríamos uma equação equivalente a $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Proponha aos alunos as seguintes perguntas: "Vocês sabem obter essa equação de outra forma? Como?". Espera-se que os alunos respondam que sim, recordando que podem obter esta equação usando a soma (*S*) e o produto (*P*) das raízes. Ou seja, $S = 7$ e $P = 12$. Como $x^2 - Sx + P = 0$, temos que $x^2 - 7x + 12 = 0$ é a equação procurada.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Obtenha a forma fatorada das equações:

a) $x^2 - 64 = 0$ $(x + 8)(x - 8) = 0$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$

d) $x^2 + 2mx - 3m^2 = 0$ $(x - m)(x + 3m) = 0$

e) $3x^2 - 2xp + \dfrac{p^2}{3} = 0$ $3\left(x - \frac{p}{3}\right)^2 = 0$

2 Fatore os trinômios.

a) $2x^2 - 4x + 2$ $2(x - 1)^2$

b) $8x^2 - 6x + 1$ $8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

c) $6x^2 + x - 1$ $6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $x^2 + 5x - 24$ $(x - 3)(x + 8)$

e) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}x - 14$ $\frac{1}{2}(x + 4)(x - 7)$

3 Simplifique as frações algébricas abaixo.

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$, em que $x \neq -1$. $\frac{x - 1}{x + 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$, em que $x \neq 2$ e $x \neq -2$. $\frac{x - 2}{x + 2}$

c) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{2x^2 - 4x - 6}$, em que $x \neq -1$ e $x \neq 3$. $\frac{x - 5}{2(x + 1)}$

4 Determine uma equação do 2º grau que tenha:

a) duas raízes reais iguais a 7; Exemplo de resposta: $x^2 - 14x + 49 = 0$

b) -3 e 8 como raízes; Exemplo de resposta: $x^2 - 5x - 24 = 0$

c) -1 e -5 como raízes e o coeficiente de x^2 igual a 2; Exemplo de resposta: $2x^2 + 12x + 10 = 0$

d) nenhuma raiz real. Exemplo de resposta: $x^2 + 1 = 0$

5 Resolução de problemas

Na resolução de problemas com equações do 2º grau, podemos seguir as etapas:

1ª) estabelecer a equação que traduz o problema;

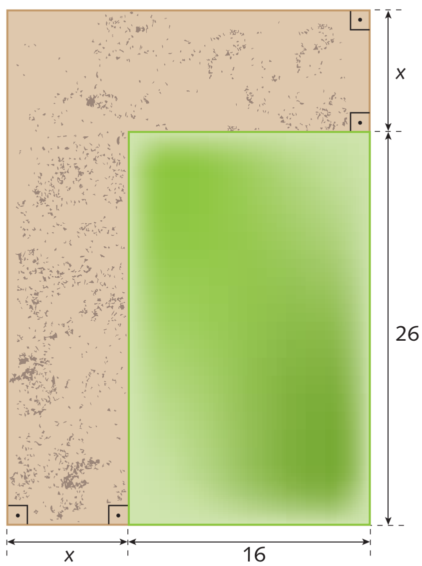
2ª) resolver a equação;

3ª) interpretar as raízes encontradas, verificando se são compatíveis com os dados do problema.

Observe a resolução de alguns problemas que podem ser resolvidos por meio de uma equação do 2º grau.

Problema 1

Sebastião tem um terreno que mede 26 m de comprimento e 16 m de largura. Ele deseja aumentar a área desse terreno para 816 m², acrescentando faixas de mesma largura a um dos lados e ao fundo. Qual deve ser a medida da largura dessas faixas?



LUIZ RUBIO

Sabendo que a nova área do terreno será 816 m², escrevemos a seguinte equação que representa sua área.

$$(x + 16)(x + 26) = 816$$

Resolvemos a equação para obter o valor de x:

$(x + 16)(x + 26) = 816$

$x^2 + 26x + 16x + 416 = 816$

$x^2 + 42x - 400 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos: $x_1 = -50$ e $x_2 = 8$.

Como x corresponde à medida do lado, temos que $x = 8$.

Logo, a medida da largura das faixas é 8 m.

Problema 2

Uma banda com vários instrumentistas dividiu a despesa com a compra de um amplificador que custou R$ 400,00. Se essa banda tivesse 5 integrantes a menos, cada um pagaria R$ 4,00 a mais. Quantos integrantes há nessa banda?

Seja x o número de integrantes da banda. Assim:

- $\dfrac{400}{x}$ é o valor que cada integrante pagou inicialmente;
- $\dfrac{400}{x - 5}$ é o valor que cada um pagaria se a banda tivesse 5 integrantes a menos.

A diferença entre o valor que cada integrante pagaria e o que pagou é R$ 4,00. Logo, podemos representar essa situação pela seguinte equação:

$\dfrac{400}{x - 5} - \dfrac{400}{x} = 4$, em que $x \neq 0$ e $x \neq 5$

Resolvendo-a:

$$\frac{400}{x-5} - \frac{400}{x} = 4 \longrightarrow \text{mmc}(x, x-5) = x(x-5)$$

$$\frac{400x}{x(x-5)} - \frac{400(x-5)}{x(x-5)} = \frac{4x(x-5)}{x(x-5)} \longrightarrow \text{Reduzimos todos os termos a um mesmo denominador.}$$

$$400x - 400(x-5) = 4x(x-5) \longrightarrow \text{Aplicamos o princípio multiplicativo das igualdades multiplicando os dois membros da equação por } x(x-5).$$

$$\cancel{400x} - \cancel{400x} + 2000 = 4x^2 - 20x$$

$$4x^2 - 20x - 2000 = 0$$

$$x^2 - 5x - 500 = 0$$

Se julgar conveniente, proponha aos alunos que resolvam as equações do 2º grau dos problemas 1 e 2 e verifiquem se as raízes encontradas correspondem às mencionadas nos exemplos. Deixe que eles decidam por qual método resolver cada equação.

Resolvendo a equação, obtemos: $x_1 = -20$ e $x_2 = 25$.

Observe que a raiz -20 não convém, porque x deve ser positivo (número de integrantes da banda).

Portanto, há nessa banda 25 integrantes.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 O produto de um número positivo por sua quarta parte é igual a 100. Calcule esse número. 20

2 A metade do quadrado de um número inteiro positivo é igual ao dobro desse número mais 6. Calcule-o. 6

3 O quadrado de um número natural é igual a seu dobro somado com 24. Determine esse número. 6

4 O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7, menos 3. Qual é o número? 3 ou $\frac{1}{2}$

5 O quadrado da idade de Camila subtraído da metade dessa idade é igual a 14 anos. Calcule a idade de Camila. 4 anos

6 Uma mulher tem 54 anos, e sua filha, 12. Há quanto tempo a idade da mãe foi igual ao quadrado da idade da filha? cinco anos

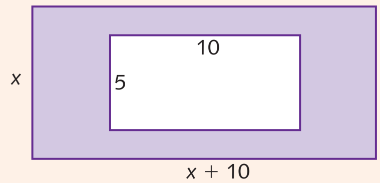
7 Um trem percorreu 200 km em certo tempo. Se tivesse aumentado sua velocidade em 10 km/h, teria percorrido essa distância em uma hora a menos. Determine a velocidade do trem, em quilômetro por hora. 40 km/h

8 A soma dos quadrados de dois números inteiros positivos e consecutivos é 25. Calcule-os. 3 e 4

9 Determine a medida do lado do quadrado em que o número que representa a área excede o número que representa o perímetro em 5. 5

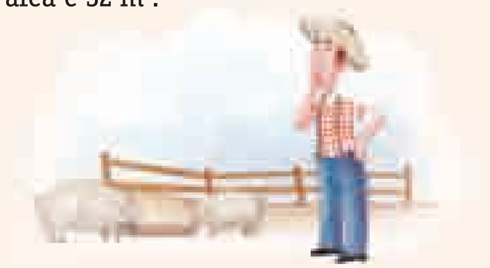
10 Determine três números inteiros, positivos e consecutivos, tais que o quadrado do menor seja igual à diferença dos outros dois. 1, 2 e 3

11 A área da região colorida na figura é 94 m^2. Calcule o valor de x. $x = 8$ m



LUIZ RUBIO

12 Ricardo irá construir um chiqueiro cuja área é 32 m^2.



GEORGE TUTUMI

Quais as dimensões desse chiqueiro, se um dos lados terá 4 metros a mais que o outro? 4 m e 8 m

7. Sendo v a velocidade do trem e t o tempo, o aluno deve chegar ao seguinte sistema: $\begin{cases} v = \dfrac{200}{t} \\ v + 10 = \dfrac{200}{t-1} \end{cases}$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

13 Calcule dois números inteiros e consecutivos, de modo que a soma dos seus inversos seja igual a $\frac{7}{12}$. 3 e 4

14 Um grupo de turistas alugou um ônibus por R$ 1500,00. Dois deles não puderam viajar e, em consequência, a despesa de cada um dos outros aumentou em R$ 25,00.

a) Quantos turistas viajaram? 10 turistas

b) Qual foi a despesa de cada um? R$ 150,00

LÉO FANELLI

15 Um terreno deve ser dividido em lotes iguais por certo número de herdeiros. Se houvesse três herdeiros a mais, cada lote diminuiria 20 m^2. Se houvesse quatro herdeiros a menos, cada lote aumentaria 50 m^2. Qual é a área do terreno todo, em metro quadrado? 1 200 m^2

Lendo e aprendendo

Perto do ano 2000 a.C. os babilônios não só resolviam as equações do 2º grau, como também discutiam a resolução de algumas equações de 3º grau e de um tipo especial de equação de 4º grau: as **equações biquadradas**.

De modo geral, uma equação na incógnita x é chamada de biquadrada quando pode ser escrita na forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ com } a \neq 0$$

Um exemplo de equação biquadrada é $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Observe que podemos escrevê-la da seguinte forma: $(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$.

Substituindo x^2 por uma incógnita auxiliar y, obtemos a equação:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Dessa forma, reduzimos a equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ à equação do 2º grau $y^2 - 13y + 36 = 0$ de incógnita y. Resolvendo essa equação, obtemos: $y_1 = 4$ e $y_2 = 9$. Como $x^2 = y$, temos:

- Para $y = 4$, temos $x^2 = 4$, ou seja, $x = \pm 2$.
- Para $y = 9$, temos $x^2 = 9$, ou seja, $x = \pm 3$.

Logo, as raízes da equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ são $-3, -2, 2$ e 3.

Agora é a sua vez! Resolva as seguintes equações biquadradas.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $-2; 2; -1$ e 1

$2x^4 - 16x^2 = 18$ -3 e 3

6 Sistemas de equações

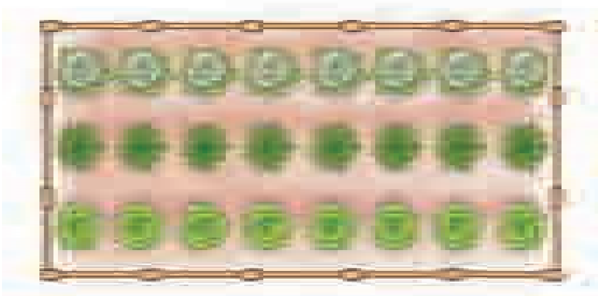
Já estudamos algumas situações que envolvem sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Estudaremos agora sistemas de equações do 2º grau e sistemas de equações que recaem em uma equação do 2º grau.

Observe as situações.

Situação 1

Pedro utilizou um rolo de 180 metros de tela para cercar uma horta retangular de 1 800 m². Quais são as dimensões da horta?

Vamos considerar que os lados da horta meçam *x* e *y*.



GEORGE TUTUMI

De acordo com os dados, podemos escrever duas equações com as incógnitas *x* e *y*.

Perímetro: $2x + 2y = 180$ Área: $x \cdot y = 1800$

Para encontrar as dimensões da horta, devemos resolver o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 180 & \text{(I)} \\ x \cdot y = 1800 & \text{(II)} \end{cases}$$

Primeiro, isolamos *y* na equação (I)

$$2x + 2y = 180$$
$$x + y = 90$$
$$y = 90 - x$$

GEORGE TUTUMI

Substituímos *y* por $90 - x$ na equação (II)

$$x \cdot (90 - x) = 1800$$
$$90x - x^2 = 1800$$
$$x^2 - 90x + 1800 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x_1 = 30$ e $x_2 = 60$.

Determinando *y* para cada um dos valores de *x*, obtemos:

Para $x_1 = 30$, temos que $y_1 = 90 - 30$, ou seja: $y_1 = 60$

Para $x_2 = 60$, temos que $y_2 = 90 - 60$, ou seja: $y_2 = 30$

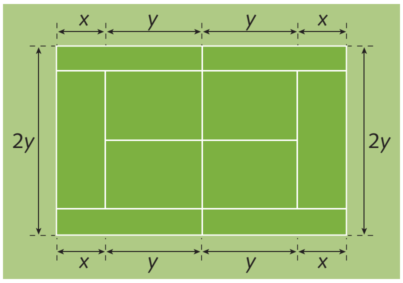
Proponha aos alunos as seguintes perguntas: "E se tivéssemos optado por isolar *x* na segunda equação e depois substituir a expressão obtida na primeira equação? Chegaríamos ao mesmo resultado?". Espera-se que os alunos, após realizarem os cálculos, concluam que sim.

Portanto, as soluções do sistema são os pares ordenados (30, 60) e (60, 30).

Logo, as dimensões da horta são 30 m e 60 m.

Situação 2

Uma quadra de tênis de medidas não oficiais tem perímetro igual a 80 m e área igual a 384 m². Quais são as medidas x e y indicadas na figura?



LUIZ RUBIO

De acordo com os dados, podemos escrever duas equações com as incógnitas x e y.

$$\begin{cases} 8y + 4x = 80 & \text{(I)} \\ 2y \cdot (2y + 2x) = 384 \Rightarrow 4y^2 + 4xy = 384 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo por 4 ambos os membros das equações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} 2y + x = 20 & \text{(I)} \\ y^2 + xy = 96 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolamos x em (I):

$2y + x = 20$

$x = 20 - 2y$

Substituindo x por $20 - 2y$ na equação (II), temos:

$y^2 + (20 - 2y) \cdot y = 96$

$y^2 + 20y - 2y^2 = 96$

$-y^2 + 20y - 96 = 0$

$y^2 - 20y + 96 = 0$ Multiplicamos ambos os membros por -1.

Resolvendo a equação, obtemos: $y_1 = 12$ e $y_2 = 8$

Determinando x para cada um dos valores de y, obtemos:

Para $y_1 = 12$, temos que: $x_1 = 20 - 2 \cdot 12 = -4$

Para $y_2 = 8$, temos que: $x_2 = 20 - 2 \cdot 8 = 4$

As soluções do sistema são os pares ordenados $(-4, 12)$ e $(4, 8)$.

Se julgar necessário, proponha aos alunos que resolvam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ 2x^2 - 22 = 2y \end{cases}$$

Após resolverem, peça que compartilhem sua estratégia com um colega. Em seguida, faça a correção no quadro usando o **método da adição**. As soluções desse sistema são os pares ordenados $(-\sqrt{5}, -6)$, $(\sqrt{5}, -6)$, $(-4, 5)$ e $(4, 5)$.

Como x e y expressam medidas, são números positivos. Então, o par ordenado $(-4, 12)$ não convém. Portanto: $x = 4$ m e $y = 8$ m.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} xy - 6 = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ (3, 2)

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y = 8 \end{cases}$ (3, 5) e (5, 3)

c) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (4, 1) e (16, −11)

d) $\begin{cases} 12x + 12y = 7xy \\ xy = 12 \end{cases}$ (3, 4) e (4, 3)

2 Determine dois números cuja soma seja 8 e cujo produto seja 15. 5 e 3

3 A diferença entre dois números positivos é igual a 6 e seu produto é 27. Que números são esses? 9 e 3

4 A soma de dois números é 28 e a diferença entre o quadrado do primeiro e o quadrado do segundo é 56. Determine esses números. 15 e 13

5 Obtenha dois números inteiros e consecutivos tais que a soma dos quadrados dos seus dobros seja 2 452. 17 e 18 ou −17 e −18

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 A equação do 2º grau incompleta $ax^2 + bx = 0$ (em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$) pode ser resolvida por meio de um caso de fatoração. Que caso é esse?
A equação $ax^2 + bx = 0$ pode ser resolvida colocando o fator comum x em evidência.

2 De que maneira o valor do discriminante se relaciona à quantidade de raízes de uma equação do 2º grau? Se o discriminante for positivo ($\Delta > 0$), serão duas raízes reais diferentes; se o discriminante for negativo ($\Delta < 0$), não existirão raízes reais e se o discriminante for nulo ($\Delta = 0$), serão duas raízes reais iguais.

3 Como você pode resolver uma equação do 2º grau?
Exemplos de resposta: Fórmula resolutiva, fatoração, método de completar quadrados, soma e produto.

Aplicando

1 Usando a calculadora, verifique se -11 é raiz da equação $x^2 + 2x - 99 = 0$. sim

2 O *squash* é um esporte olímpico. A disputa é realizada em uma quadra de 4 992 dm², sendo C a medida do comprimento e L a medida da largura:

$C = (x + 18)$ dm

$L = (x + 4)$ dm

Determine as medidas das dimensões dessa quadra. $C = 78$ dm; $L = 64$ dm

LIGHTPOET/SHUTTERSTOCK

O *squash* surgiu no começo do século XIX na Inglaterra. Sua prática ocorre em um espaço limitado, onde os jogadores arremessam bolas contra a parede, que voltam com muita velocidade.

3 Determine o valor de m na equação $x^2 - 2x + m = 0$, para que $x_1^2 - x_2^2 = 2$ $\frac{3}{4}$ (x_1 e x_2 são as raízes reais da equação).

4 Determine o valor de k na equação $x^2 + mx + k = 0$, para que uma de suas raízes seja o dobro da outra e seu discriminante seja igual a 9. 18

5 Resolva as equações em $\mathbb{R}$.
(Atenção para a condição de existência de cada equação!)

a) $\frac{1}{3}x^2 - 9 = 27$ $x_1 = -6\sqrt{3}$ e $x_2 = 6\sqrt{3}$

b) $8x^2 - 10x = 3x^2 + 5$ $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

c) $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$ $x \neq -60$ e $x \neq \frac{5}{3}$; $x_1 = -10$ e $x_2 = 14$

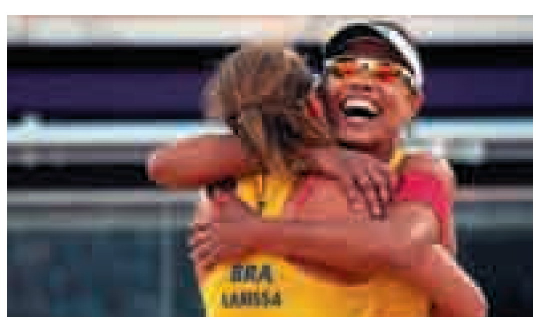
d) $\frac{x^2 + 2}{9} = 3$ $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$

e) $\frac{3}{x + 2} = \frac{3x}{2x + 4}$ $x \neq -2$; $x = 2$

6 Determine o valor da expressão $(r + s + 1) \cdot (r + s - 1)$, em que r e s são raízes da equação $\sqrt{3}\,x^2 + 3x - \sqrt{7} = 0$. 2

7 O número n de jogos disputados por x duplas de vôlei de praia que jogam entre si é dado pela fórmula $n = \frac{x(x - 1)}{2}$. Sabendo que em um campeonato foram realizados 120 jogos, determine quantas duplas participaram dessa competição. 16 duplas

DANIEL GARCIA/AFP



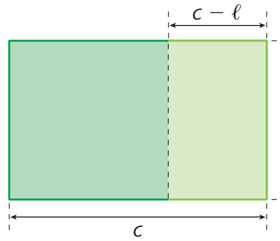
Juliana Silva e Larissa França comemoram a conquista da medalha de bronze. Londres, 2012.

Desafio: Verifique se os alunos perceberão que a velocidade v do barco ao subir o rio, contra a correnteza, é $(v - 16)$ km/h, enquanto, ao descer o rio, a favor da correnteza, é $(v + 16)$ km/h.

Assim, sendo t o tempo, em hora, o aluno deve chegar ao seguinte sistema de equações: $\begin{cases} v - 16 = \dfrac{40}{t} \\ v + 16 = \dfrac{40}{t - 4} \end{cases}$, com $t > 0$ e $t \neq 4$.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

8 No retângulo abaixo, que é um retângulo áureo ou de ouro, podemos observar esta relação:



$$\frac{c}{\ell} = \frac{\ell}{c - \ell}$$ ← proporção áurea

Considerando $c = 1$, temos:

$\dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\ell}{1 - \ell}$, ou, ainda, $\ell^2 + \ell - 1 = 0$

Resolva essa equação e determine o **número de ouro** $\left(\dfrac{1}{\ell}\right)$.

$\left(\text{Sugestão: } \dfrac{1}{\ell}\right.$ é o inverso da raiz positiva dessa equação.$\left.\right)$ $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

9 Determine o valor de c na equação $x^2 - 5x + c = 0$, para que uma das raízes seja 2. 6

10 Determine o valor de a na equação $3x^2 - 7ax + 2a^2 = 0$, de modo que a soma das raízes seja 10. $\frac{30}{7}$

11 Determine k na equação $x^2 + kx + 36 = 0$, de modo que entre as raízes x_1 e x_2 exista a relação $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{5}{12}$. -15

12 Determine, sem usar a fórmula resolutiva, as raízes reais das equações.

a) $x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 4 = 0$ $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$

b) $x^2 - 20x - 8\,000 = 0$ -80 e 100

13 Resolva mentalmente as equações abaixo, determinando suas raízes.

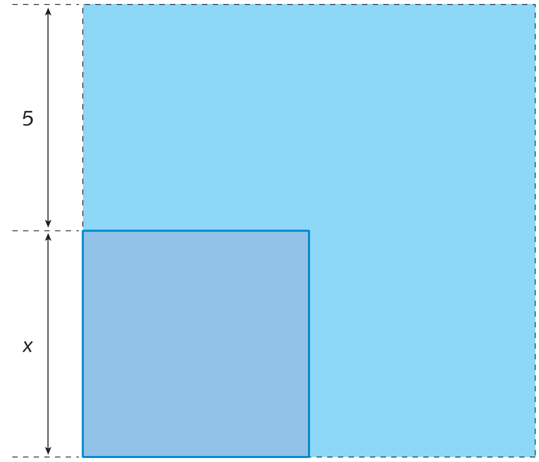
a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ 1 e -3

b) $x^2 - 15x + 26 = 0$ 2 e 13

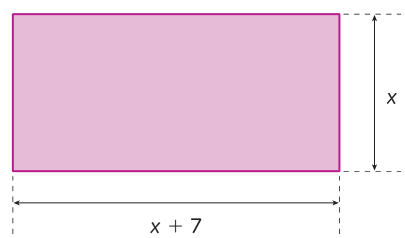
c) $x^2 - 15x + 36 = 0$ 3 e 12

d) $x^2 + 16x - 36 = 0$ 2 e -18

14 Aumentando o lado de um quadrado em 5 m, obtemos um novo quadrado cuja área é 4 vezes maior que a área do quadrado original. Qual é a medida do lado do quadrado original? 5 m



15 A área de um retângulo é 78 m². Sabendo que um lado mede 7 m a mais que o outro, determine suas medidas. 6 m e 13 m



DESAFIO

Um barco, subindo um rio, em sentido contrário à correnteza, percorre 40 km em determinado tempo. Depois, descendo o rio, no mesmo sentido da correnteza, faz o mesmo percurso com quatro horas a menos. Qual é a velocidade do barco, se a velocidade da correnteza é 16 km/h? 24 km/h

GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

LÉO FANELLI

16 A divisão de 4,9 por x tem o mesmo resultado da subtração de 4,9 por x. Quais são os valores de x que tornam verdadeira a afirmação? 1,4 e 3,5

17 Um goleiro repõe a bola em jogo chutando-a a uma velocidade inicial de 30 m/s. Após 3 segundos.

LÉO FANELLI

A partir do momento do chute, após quantos segundos a bola atingirá novamente o solo? Conhecida a velocidade inicial do objeto lançado, podemos determinar a altura que atingirá utilizando a fórmula:

$h = \dfrac{v \cdot t - g \cdot t^2}{2}$, em que h é a medida da altura, v é a velocidade inicial, g é a aceleração da gravidade $\simeq 10$ m/s^2 e t é o tempo.

18 A idade de uma criança daqui a seis anos será o quadrado da idade que tinha há seis anos. Qual é a idade atual da criança? 10 anos

19 A soma de um número com seu inverso é $\dfrac{10}{3}$. Qual é esse número? 3 ou $\dfrac{1}{3}$

20 Quais são os valores de a, para que as raízes da equação $8x^2 - (a - 1)x + a - 7 = 0$ sejam iguais? 9 e 25

21 Determine dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 143. 11 e 13 ou -11 e -13

22 Um retângulo tem 24 m de perímetro e 32 m^2 de área. Quais são as dimensões desse retângulo? 4 m e 8 m

23 A diferença entre dois números é $\dfrac{1}{5}$, e a soma de seus quadrados é 1. Determine esses números. 0,8 e 0,6 ou $-0,6$ e $-0,8$

24 O produto de dois números é 10, e a soma dos seus inversos é $\dfrac{7}{10}$. Quais são esses números? 2 e 5

25 A Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) autorizou a implantação de quarta geração da telefonia móvel, o serviço 4G. No 1º lote, de 800 unidades, foram instaladas x antenas em Curitiba (PR) e y antenas em Cuiabá (MT). Determine o número de antenas autorizadas para cada uma dessas cidades, sabendo que $x > y$ e que xy corresponde a 120 000. Curitiba: 600; Cuiabá: 200

BAZ SPEZIALANTENNEN/CC BY 3.0/WIKIMEDIA FOUNDATION

Antena para redes de comunicação móveis.

26 Em uma festa, todos os participantes cumprimentaram-se. Houve 66 apertos de mão. Quantas pessoas havia na festa? 12 pessoas

27 A soma dos quadrados de três números consecutivos é 110. Determine esses números. 5, 6 e 7 ou -7, -6 e -5

28 Um número é composto de dois algarismos cujo produto é 24. Trocando a posição dos algarismos, o número resultante excederá em 18 unidades o número primitivo. Determine o número primitivo. 46

DESAFIO

Letícia pensou em um número maior que 10 e menor que 100. A soma dos algarismos desse número é 15 e o produto, 56. Qual é esse número? 87 ou 78

CAPÍTULO

3 FUNÇÃO AFIM

Sugerimos, antes do início deste capítulo, que seja retomado a representação de pares ordenados em um plano cartesiano.

THALES ANTONIO

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

A Feira dos Caxixis é uma das feiras de artesanato mais antigas do país e acontece uma vez ao ano na cidade de Nazaré das Farinhas no estado da Bahia. O evento atrai baianos e turistas que admiram os *caxixis* – miniaturas de objetos em cerâmica produzidos na região. Além dos caxixis, fazem parte da exposição jarras, moringas, potes, cofres e peças em couro e madeira.

Um dos expositores desta feira vende cada um de seus caxixis a R$ 10,00.

- Quanto uma pessoa irá gastar se comprar 3 peças? E se comprar 10 peças? R$ 30,00; R$ 100,00
- Escreva uma sentença que relacione a quantidade de caxixis comprados (n) com o valor a pagar (V) em real. $V = 10n$

Bonecas na Feira de Caxixis, em Nazaré das Farinhas (BA), 2015.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe a situação:

Alberto, Bruna e Sandra desejam comprar três terrenos vizinhos com 100 m², 120 m² e 150 m², respectivamente.

TIAGO SILVA

Para saber quanto cada um pagará pelo terreno, podemos montar esta tabela:

Proprietário	Área do terreno	Preço do metro quadrado	Preço do terreno
Alberto	100 m²	R$ 400,00	R$ 40 000,00
Bruna	120 m²	R$ 400,00	R$ 48 000,00
Sandra	150 m²	R$ 400,00	R$ 60 000,00

Levando em consideração todos os dados das situações acima, responda às questões.

- Quanto uma pessoa pagaria se desejasse comprar um terreno de 200 m²? R$ 80 000,00
- O preço do terreno varia de acordo com o quê? Varia de acordo com a área do terreno.
- Escreva uma sentença que relacione a área e o preço do terreno. Se considerarmos *x* a área, em metro quadrado, dos terrenos e *y* o preço, em real, teremos a seguinte sentença: $y = 400x$
- Qual é a área do terreno comprado por uma pessoa se ela pagou R$ 90 000,00? (Utilize a sentença obtida no item anterior.) 225 m²

Neste capítulo, vamos estudar a ideia de função e funções afim.

1 Ideia de função

Considere a situação a seguir.

Um pedreiro cobra R$ 30,00 por metro quadrado de parede rebocada. Observe na tabela a seguir o valor que ele irá receber de acordo com a área das paredes que rebocar.

Valor do serviço de acordo com a área rebocada				
Área rebocada (em m^2)	20	30	40	50
Valor (em real)	600,00	900,00	1 200,00	1 500,00

Observe que cada área de parede rebocada determina um único valor a ser recebido pelo pedreiro. Quando isso ocorre, podemos dizer que o valor que o pedreiro irá receber é dado em **função** da área de parede rebocada.

Quando relacionamos duas grandezas e para cada medida da primeira grandeza corresponde uma única medida da segunda grandeza, dizemos que a segunda grandeza é **função** da primeira.

GEORGE TUTUMI

Lei de formação da função

Quando temos uma relação em que uma grandeza é função de outra, a correspondência entre cada valor de uma grandeza e cada valor da outra é expressa por uma sentença chamada **lei de formação da função** ou **lei da função**.

Na situação anterior, se representarmos por *y* o valor, em real, a ser recebido pelo pedreiro e por *x* a área, em metro quadrado de parede rebocada, a lei da função será:

$$y = 30 \cdot x$$

Variáveis

As grandezas valor a ser recebido pelo pedreiro e área de parede rebocada são chamadas **variáveis** da situação apresentada.

O valor a ser recebido pelo pedreiro é a **variável dependente**, pois depende da área de parede que rebocar.

A área de parede rebocada é a **variável independente**, pois podemos escolher um valor para essa variável.

Comente com os alunos que se a função traduz uma situação real, então os valores que a variável independente pode assumir devem ser coerentes com essa situação. No caso por exemplo, da situação apresentada, a variável independente não pode assumir valores negativos pois corresponde à área de parede rebocada que pode ser representada por um racional positivo.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Uma indústria produz embalagens biodegradáveis. Sua produção é de 600 unidades por hora.

a) Em 10 horas de trabalho, quantas embalagens biodegradáveis são produzidas? 6 000 embalagens

b) Para produzir 4 800 unidades de embalagens biodegradáveis, quantas horas são necessárias? 8 horas

c) Podemos afirmar que o número de embalagens biodegradáveis produzidas é função do tempo de produção? Por quê? Sim, porque cada hora corresponde a uma única quantidade de embalagens produzidas.

d) Escreva uma lei que relacione o número de embalagens biodegradáveis com o tempo, em hora. $y = 600t$, onde y representa a quantidade de embalagens produzidas e t o tempo (em hora)

2 A área (A) de um quadrado é dada em função da medida (ℓ) do seu lado. Escreva a lei dessa função e identifique a variável dependente e a variável independente. $A = \ell^2$
Variável dependente: área
Variável independente: medida do lado

A notação *f*(*x*)

Observe a afirmação de Teresa.

GEORGE TUTUMI

O número de litros (L) de combustível consumido é função da distância (x) percorrida. A lei dessa função é $L = \frac{x}{12}$.

Podemos também representar a lei de formação dessa função por:

$f(x) = \frac{x}{12}$ $\left(\text{lemos: "}f \text{ de } x \text{ é igual a } \frac{x}{12}\text{"}\right)$.

Nessa notação, a função foi representada por f, x representa a distância percorrida, em quilômetro, e $f(x)$ o número de litros de combustível consumido.

Comente com os alunos que a lei de uma função e a variável dependente podem ser representadas por quaisquer letras, não necessariamente f e x.
Exemplos:
- $g(x) = 3x$
- $f(c) = c^2 - 1$
- $h(y) = \frac{y-2}{3}$

Valor de uma função

Na situação anterior, o número de litros de combustível consumido de acordo com a distância percorrida, em quilômetro, foi representado por: $f(x) = \frac{x}{12}$

Desse modo, se quisermos calcular o número de litros de combustível consumido após o automóvel percorrer 108 km, basta substituir x por 108 na lei da função e efetuar a operação indicada. Veja:

$$f(x) = \frac{x}{12} \Rightarrow f(108) = \frac{108}{12} \Rightarrow f(108) = 9$$

Isso significa que, quando x é igual a 108, o **valor da função** é 9.

Logo, o automóvel consumiu 9 litros de combustível após percorrer 108 km.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 A lei de formação de uma função é $f(x) = 5x + 2$. Calcule:

a) $f(0)$ 2 b) $f(-1)$ −3 c) $f(-2)$ −8 d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ $\frac{23}{4}$

2 Dada a lei de uma função $f(x) = 5x - 2$, determine o valor de x de modo que:

a) $f(x) = 0$ $\frac{2}{5}$

b) $f(x) = 3$ 1

c) $f(x) = -10$ $-\frac{8}{5}$

d) $f(x) = 13$ 3

3 A lei de uma função é $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Calcule:

a) $\frac{f(0) - f(1)}{f(2)}$ −2

b) $\frac{f(2) \cdot f(1)}{f(0)}$ $\frac{1}{12}$

4 Ana elaborou a seguinte tabela:

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

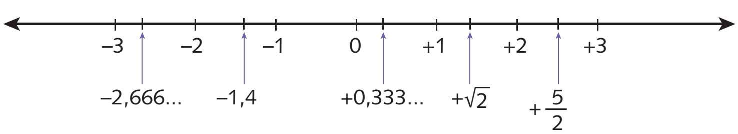
a) Qual é a lei de formação da função que relaciona os valores da segunda e da primeira linha dessa tabela? $f(x) = 2x$

b) Calcule o valor de $f(x)$ para $x = -\frac{1}{5}$. $-\frac{2}{5}$

c) Qual é o valor de x quando $f(x) = \frac{7}{2}$? $\frac{7}{4}$

2 Representação gráfica de uma função

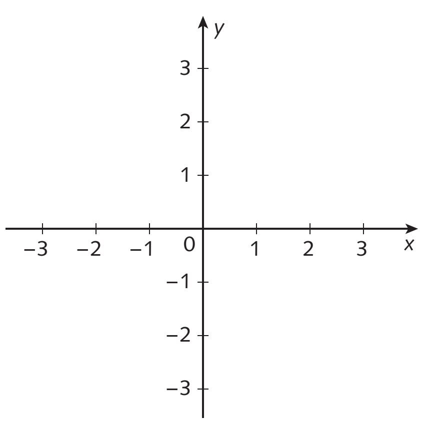
Você estudou em anos anteriores que cada número real tem um ponto correspondente na **reta real**, e cada ponto da reta corresponde a um número real. Observe.



LUIZ RUBIO

Estudou também que podemos representar um par de números reais por pontos de um plano. Para isso, construímos um **sistema de coordenadas cartesianas** ou **plano cartesiano**.

Esse sistema consiste em duas retas reais perpendiculares (**eixos**), cujo ponto de intersecção corresponde à **origem** do sistema.



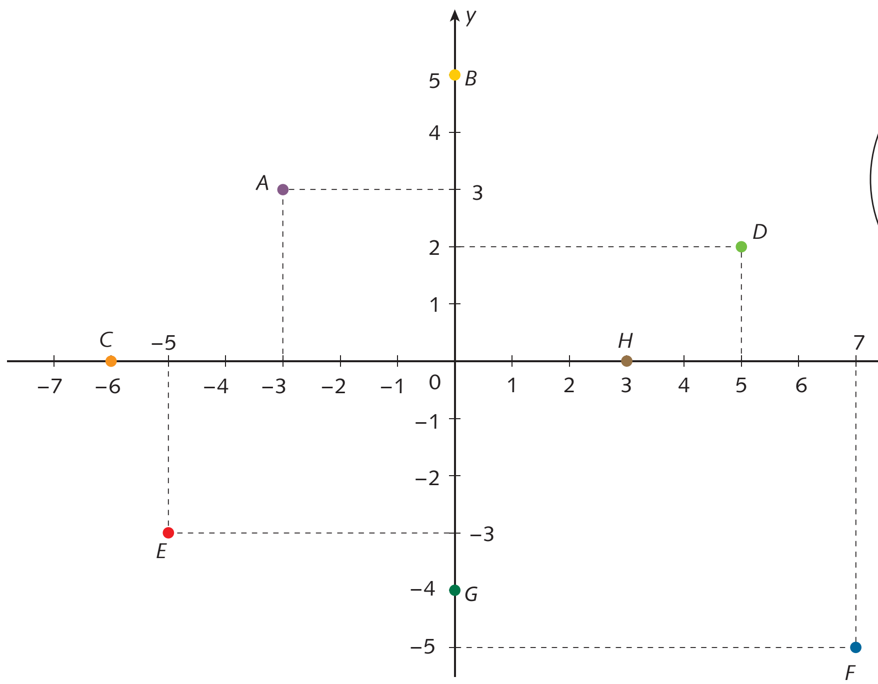
LUIZ RUBIO

Temos que:

- O eixo x é chamado **eixo das abscissas**.
- O eixo y é chamado **eixo das ordenadas**.

Exemplo

Veja como podemos localizar os pontos $A(-3, 3)$; $B(0, 5)$; $C(-6, 0)$; $D(5, 2)$; $E(-5, -3)$; $F(7, -5)$; $G(0, -4)$ e $H(3, 0)$ no plano cartesiano.



LUIZ RUBIO

GEORGE TUTUMI

Toda situação que permite expressar uma grandeza em função da outra pode ser representada em um plano cartesiano na forma de um gráfico. Veja as situações a seguir.

Situação 1

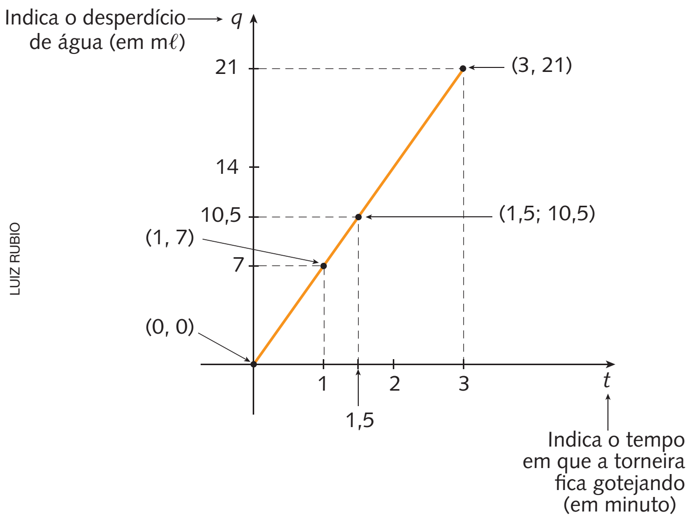
Em cada uma das situações, peça aos alunos que determinem a lei da função que relaciona as variáveis envolvidas.

A quantidade (q) de água desperdiçada por uma torneira gotejando lentamente é função do tempo (t). Veja na tabela valores de q e t.

WILL RODRIGUES/SHUTTERSTOCK

Quantidade de água desperdiçada por uma torneira gotejando lentamente.				
t (em minuto)	0	1	1,5	3
q (em mililitro)	0	7	10,5	21

Cada par ordenado pode ser representado por um ponto em um sistema cartesiano. Nesse exemplo, o primeiro número do par ordenado indica o tempo (em minuto), e o segundo, a quantidade de água desperdiçada pela torneira (em mililitro).



LUIZ RUBIO

GEORGE TUTUMI

Lei da função:
$f(t) = 7t$

Observe que o fato de o tempo poder assumir qualquer valor real positivo ou nulo garante que a representação gráfica dessa função é uma linha contínua que parte da origem, ponto de coordenadas (0, 0), e continua indefinidamente.

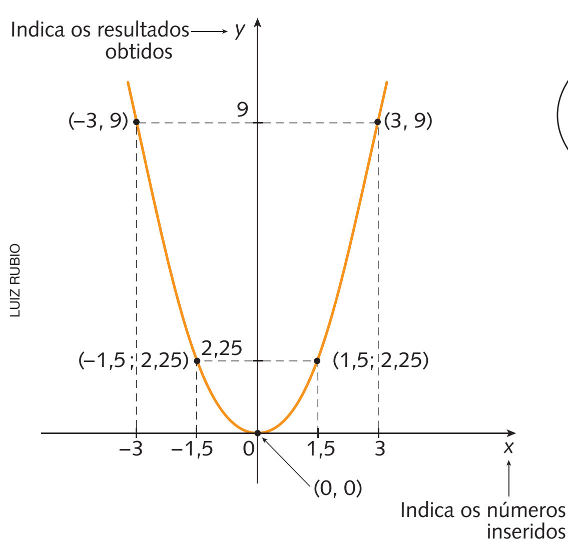
Situação 2

Beatriz elaborou uma planilha eletrônica que determina o quadrado de qualquer número real inserido nela. Observe alguns números que Beatriz inseriu na planilha e os números correspondentes que determinou:

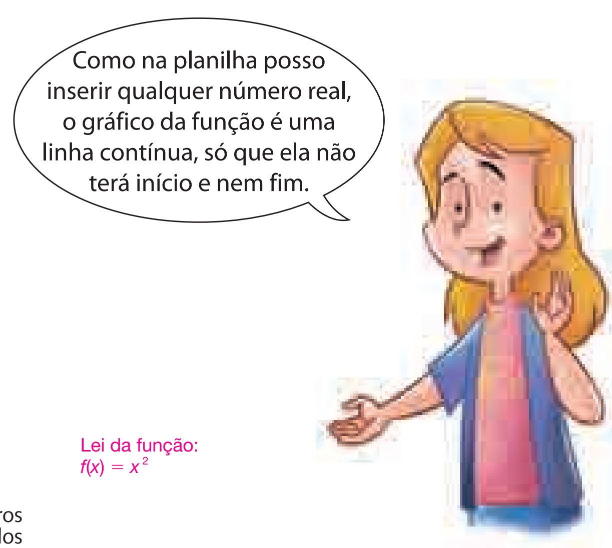
Resultados obtidos pela planilha de acordo com os números inseridos					
Número inserido (***x***)	-3	$-1{,}5$	0	1,5	3
Resultado (***y***)	9	2,25	0	2,25	9

Cada par de números (número inserido, resultado) forma um par ordenado (x, y), que pode ser representado por um ponto em um plano cartesiano.

Em seguida Beatriz usou o mesmo programa em que fez a planilha e solicitou que fosse representado o gráfico da função que relaciona x e y.



LUIZ RUBIO



GEORGE TUTUMI

Lei da função:
$f(x) = x^2$

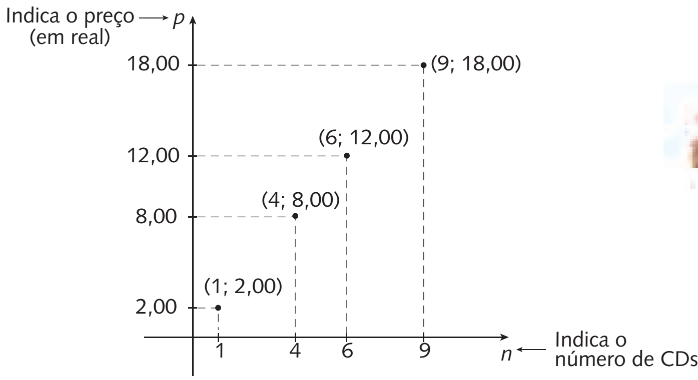
Situação 3

Uma loja vende CDs de acordo com a tabela abaixo.

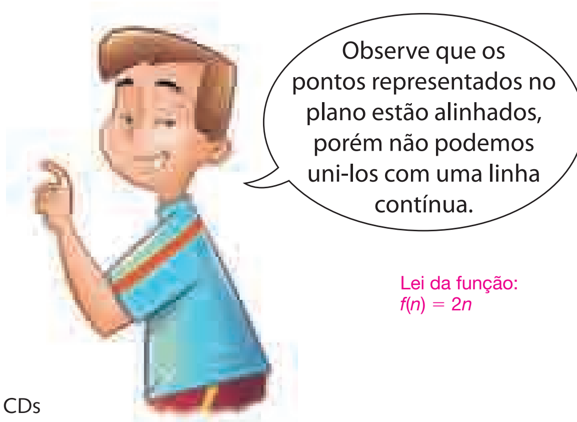
Preço de acordo com a quantidade de CDs				
Número de CDs (***n***)	1	4	6	9
Preço (em real) (***p***)	2,00	8,00	12,00	18,00

Nesse exemplo, também podemos representar por pontos os pares ordenados de números obtidos (*n, p*) em um sistema cartesiano.

Observe que o número de CDs só pode ser um número natural. Assim, no eixo das abscissas representamos apenas números naturais.



LUIZ RUBIO



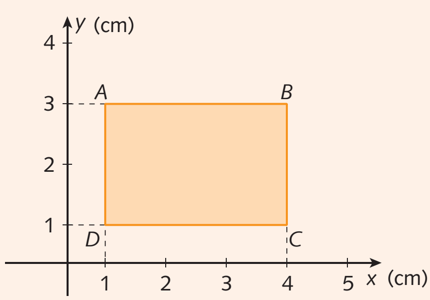
GEORGE TUTUMI

Lei da função: $f(n) = 2n$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

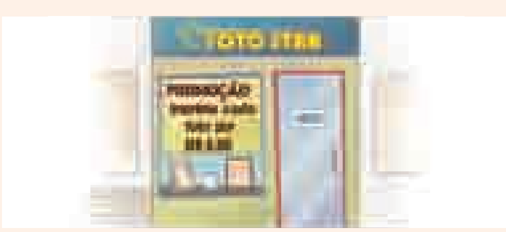
1 Observe o retângulo *ABCD* e responda à questão.



LUIZ RUBIO

Quais são as coordenadas dos vértices do retângulo? *A*(1, 3); *B*(4, 3); *C*(4, 1) e *D*(1, 1)

2 Uma loja de fotografias está fazendo uma promoção para a impressão de fotos.



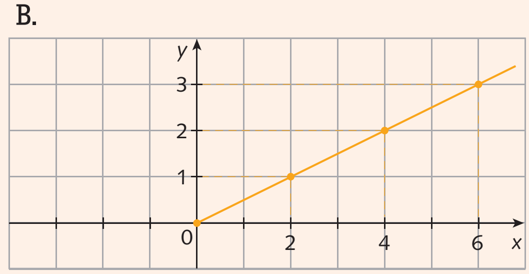
GEORGE TUTUMI

a) Qual é a lei da função que relaciona o preço (*y*) a pagar e a quantidade (*x*) de fotos impressas? $y = 0{,}5x$

b) Qual dos gráficos abaixo corresponde à função encontrada no item **a**? Por quê? Gráfico A. Espera-se que os alunos percebam que o gráfico dessa função não é uma linha contínua pois a quantidade de fotos só pode ser representada por números naturais.

A.

B.

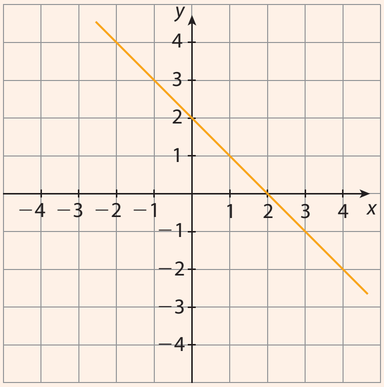


LUIZ RUBIO

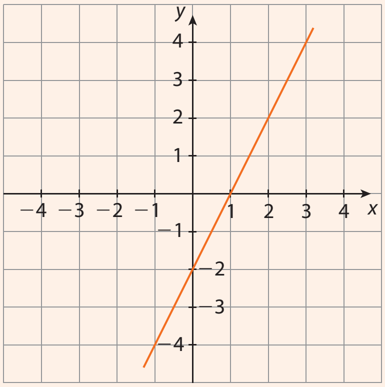
Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Qual dos gráficos abaixo corresponde à função cuja lei é $f(x) = x + 2$, em que x é qualquer número real? alternativa **b**

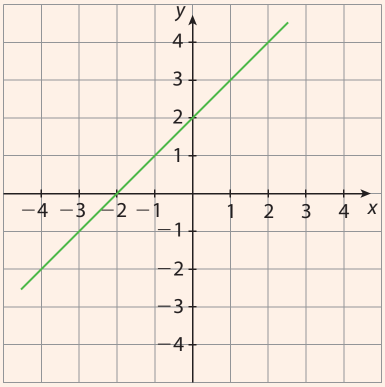
a)



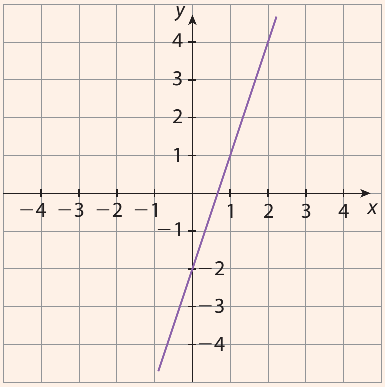
c)



b)



d)



GUILHERME CASAGRANDI

3 Função afim

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Uma bomba retira água de uma cisterna e lança em uma caixa-d'água com vazão de 20 ℓ de água por minuto. A tabela mostra a relação do número de litros de água despejado na caixa-d'água em função do tempo.

Tempo (min)	Número de litros (ℓ)
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	120

TIAGO SILVA

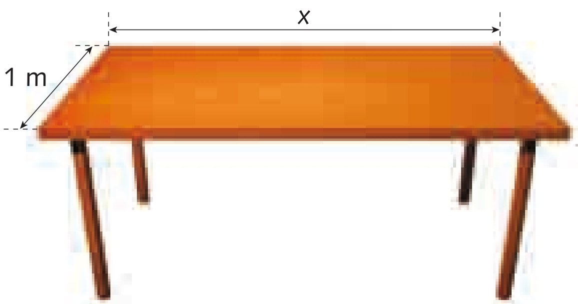
A lei da função que relaciona o número (y) de litros de água despejado com o tempo (x), em minuto, de funcionamento da bomba pode ser representada por:

$$\boxed{y = 20 \cdot x}$$

Situação 2

Uma marcenaria fabrica mesas com largura fixa de 1 m e comprimento de medidas variadas. A tabela mostra a relação entre as medidas de comprimento e os perímetros das mesas fabricadas.

ROGÉRIO LOU



Medida (x) do comprimento	Perímetro (y)
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12

O perímetro (y) dessa mesa é função da medida (x) do comprimento e pode ser expresso por:

$$\boxed{y = 2x + 2}$$

As leis das funções $y = 20x$ e $y = 2x + 2$, que correspondem às situações 1 e 2, são do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais. Essas leis lembram a de uma **função afim**.

Pergunte aos alunos se nas leis associadas às situações 1 e 2 o x pode ser qualquer número real.
Eles devem concluir que não, porque, nas duas situações, x representa uma medida, que não pode ser negativa.

Função afim é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

Exemplos

- $f(x) = 2x + 5$, em que $a = 2$ e $b = 5$
- $f(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$ → Nos casos em que $a \neq 0$ e $b = 0$, chamamos a função afim de **função linear** e pode ser representada por $f(x) = ax$.
- $f(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$ → Nos casos em que $a = 0$, chamamos a função afim de **função constante**.
- $f(x) = \dfrac{x + 1}{3}$ → Essa função também pode ser escrita da seguinte forma: $f(x) = \dfrac{1x}{3} + \dfrac{1}{3}$. Assim, é fácil perceber que $a = \dfrac{1}{3}$ e $b = \dfrac{1}{3}$.

Apresente aos alunos alguns exemplos de funções que não são afim, como, por exemplo: $y = 2x^2 + 5$ e $y = \frac{1}{x} - 3$

Gráfico da função afim

O gráfico de uma função afim é sempre uma reta não perpendicular ao eixo x. Veja alguns exemplos:

Exemplos

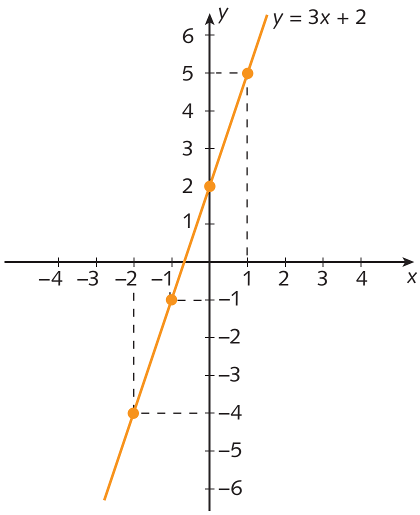
- Construir o gráfico da função $f(x) = 3x + 2$, em que x é qualquer número real.

Inicialmente escolhemos valores arbitrários para x e calculamos os valores de y correspondentes para obter alguns pares ordenados.

Para $x = -2$, $f(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$
Para $x = -1$, $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$
Para $x = 0$, $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$
Para $x = 1$, $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

x	$f(x) = y$	(x, y)
-2	-4	$(-2, -4)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	2	(0, 2)
1	5	(1, 5)

Representamos no plano cartesiano os pares ordenados encontrados e unimos os pontos.

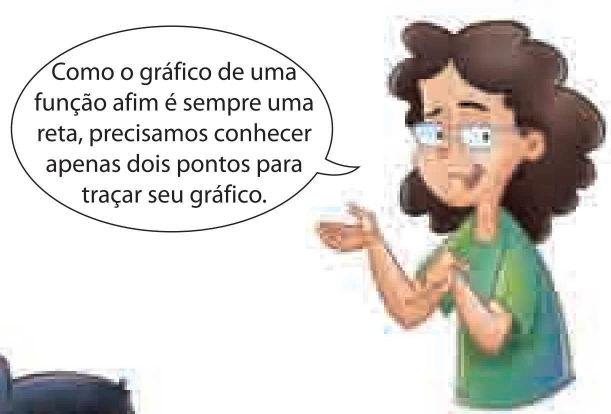


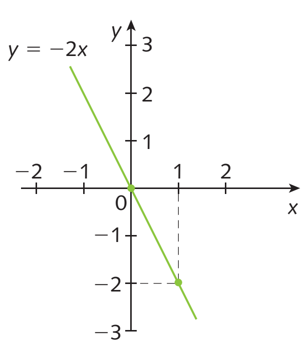
LUIZ RUBIO

- Construir o gráfico da função $g(x) = -2x$, em que x é qualquer número real.

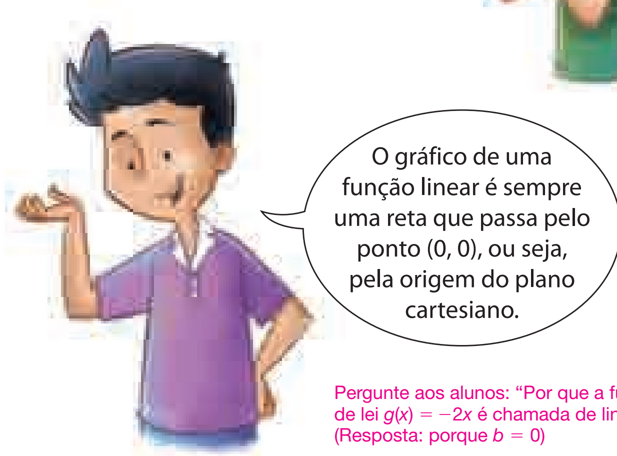
Para $x = 0$, $g(0) = -2 \cdot 0 = 0$
Para $x = 1$, $g(1) = -2 \cdot 1 = -2$

x	$g(x) = y$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	-2	$(1, -2)$





LUIZ RUBIO

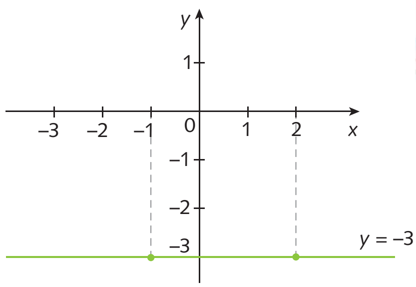


ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

Pergunte aos alunos: “Por que a função afim de lei $g(x) = -2x$ é chamada de linear?” (Resposta: porque $b = 0$)

- Construir o gráfico da função $h(x) = -3$, em que x é qualquer número real.

x	$h(x) = y$	(x, y)
-1	-3	$(-1, -3)$
2	-3	$(2, -3)$



LUIZ RUBIO

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

Pergunte aos alunos: “Por que a função afim da lei $h(x) = -3$ é chamada de função constante?”
Exemplos de explicação: porque, para qualquer valor de x, y é sempre -3; porque na lei da função $a = 0$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Identifique as funções afim. alternativas **a**, **b**, **c** e **e**

a) $y = x - 5$
b) $y = 4 - 2x$
c) $y = 1$
d) $y = x^2 - 5x + 6$
e) $y = -4 - x$
f) $y = x^2$

2 A tabela abaixo relaciona o tempo (t), em minuto, que uma válvula de saída de água fica aberta e o volume (V), em litro, de água despejada na piscina.

t (min)	V (ℓ)
1	60
2	120
3	180
4	240

De acordo com a tabela, responda às questões.

a) Qual é a lei da função que relaciona o volume (V), em litro, de água despejada na piscina e o tempo (t), em minuto, que a válvula fica aberta? $V = 60 \cdot t$

b) Qual é a quantidade de água contida no interior da piscina no tempo de 10 minutos? 600 ℓ

c) Qual é o tempo necessário para que a piscina fique com exatamente 900 ℓ? 15 minutos

3 Copie em seu caderno as afirmações verdadeiras. alternativas **a** e **d**

a) Função afim é toda função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

b) A função $f(x) = \frac{2}{x}$ é linear.

c) A função $y = x\sqrt{2}$ não é afim.

d) O gráfico da função $g(x) = 6$ para qualquer x real é uma reta paralela ao eixo x.

e) O gráfico da função afim $r(x) = -x + 2$ é uma reta que passa pela origem.

4 Construa o gráfico das funções definidas pelas leis abaixo. Construção de gráfico.

a) $y = 2$
b) $y = 3x$
c) $y = -\frac{2}{3}x$
d) $y = x + 3$
e) $y = 1 - 2x$
f) $y = \frac{1}{3}x - 2$

5 Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções de cada item e determine as coordenadas cartesianas do ponto de encontro. Construção de gráfico.

a) $h(x) = x$ e $m(x) = -x$

b) $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = 2x - 3$

c) $p(x) = \frac{x}{2} + 1$ e $q(x) = x - 1$

Zero de uma função afim

Em toda função f, cada valor de x em que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função.**

O zero de uma função afim $y = ax + b$, com $a \neq 0$, será um único número x tal que $ax + b = 0$. Resolvendo essa equação, obtemos $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo

- Determinar o zero da função $y = 2x - 2$.

  Fazendo $y = 0$ temos:

  $2x - 2 = 0$

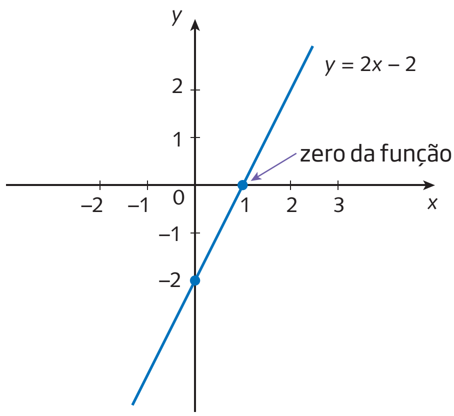
  $2x = 2$

  $x = 1$

  Portanto, 1 é o zero dessa função.

  Representando graficamente, temos:

x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
1	0	$(1, 0)$



LUIZ RUBIO

GEORGE TUTUMI

Pergunte aos alunos: “Será que uma função afim apresenta sempre um zero ou existe alguma função afim que não apresenta zero?” Espera-se que eles respondam que nem sempre uma função afim tem zero, pois quando a função é constante e $b \neq 0$ ela não apresenta zero.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o zero das funções afim.

a) $y = -4x + 8$ $x = 2$

b) $y = -3x - 21$ $x = -7$

c) $y = 2 - 8x$ $x = \frac{1}{4}$

d) $y = 7 - x$ $x = 7$

e) $y = -4x - 64$ $x = -16$

f) $y = -6x + 18$ $x = 3$

g) $y = 3x - 9$ $x = 3$

h) $y = 4x - 20$ $x = 5$

2 Descubra o valor de m para que o zero da função $f(x) = 3x + m - 2$ seja igual a 4. $m = -10$

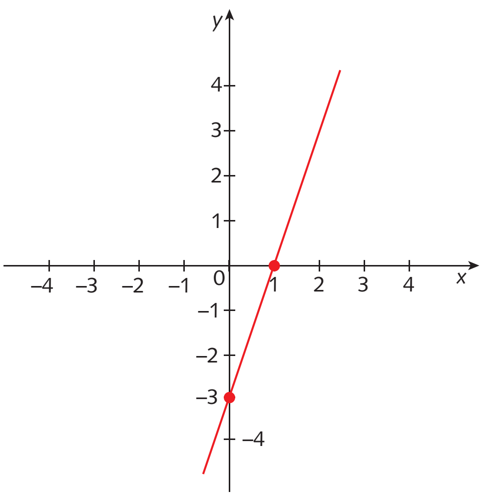
3 Qual é a lei da função afim cujo zero é 1 e o seu gráfico passa pelo ponto $(-1, 2)$? $y = -x + 1$

Variação de uma função afim

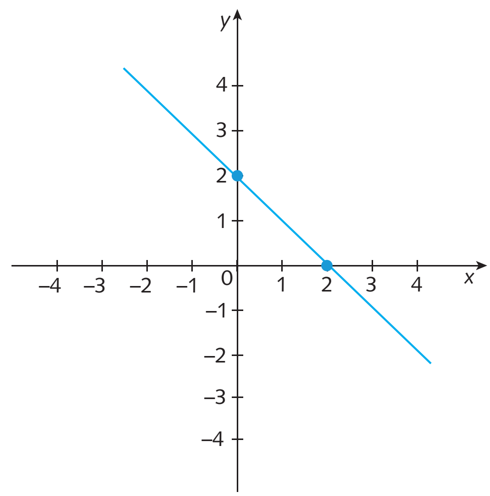
Observe os gráficos das funções $y = 3x - 3$ e $y = -x + 2$, em que x pode ser qualquer número real.

x	*y*	(*x*, *y*)
0	-3	$(0, -3)$
1	0	$(1, 0)$

x	*y*	(*x*, *y*)
0	2	$(0, 2)$
2	0	$(2, 0)$



Aumentando o valor de x, o valor de y aumenta; por isso, dizemos que a função é **crescente**. Observe que na lei $y = 3x - 3$, temos $a = 3$.



Aumentando o valor de x, o valor de y diminui; por isso, dizemos que a função é **decrescente**. Observe que na lei $y = -x + 2$, temos $a = -1$.

De modo geral, temos:

- Uma função afim $y = ax + b$ é **crescente** quando o coeficiente a é maior que zero ($a > 0$).
- Uma função afim $y = ax + b$ é **decrescente** quando o coeficiente a é menor que zero ($a < 0$).

Vimos que quando $a = 0$ em $y = ax + b$ a função é **constante**, pois, aumentando o valor de x, o valor de y não se altera.

Exemplos

- A função dada por $f(x) = 2x + 1$ é crescente, pois $a > 0$.
- A função dada por $g(x) = -3x + 2$ é decrescente, pois $a < 0$.
- A função dada por $h(x) = \sqrt{3}$ é constante, pois $a = 0$.

Estudo do sinal da função afim

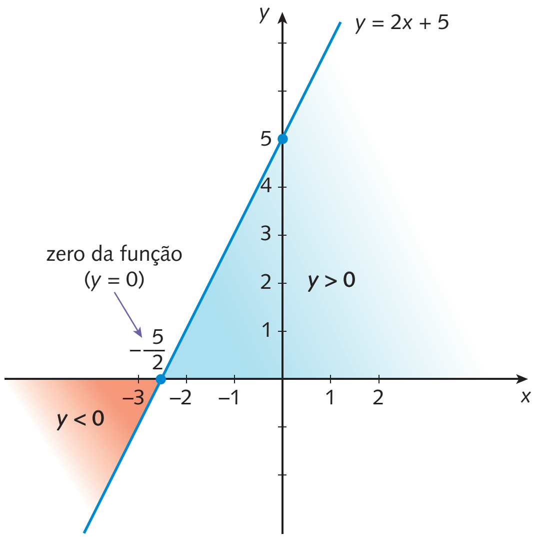
Em uma função afim, podemos verificar para quais valores de x a função é positiva, para quais valores é negativa e para qual valor é nula.

Observe os exemplos:

2. a) Para $x = 3$, a função é **nula**. Para $x > 3$, a função é **positiva**. Para $x < 3$, a função é **negativa**.
b) Para $x = 8$, a função é **nula**. Para $x > 8$, a função é **positiva**. Para $x < 8$, a função é **negativa**.
c) Para $x = 11$, a função é **nula**. Para $x > 11$, a função é **negativa**. Para $x < 11$, a função é **positiva**.
d) Para $x = -2$, a função é **nula**. Para $x > -2$, a função é **negativa**. Para $x < -2$, a função é **positiva**.

Exemplos

- Estudar o sinal da função afim de lei: $y = 2x + 5$



A função é crescente, pois $a = 2$ $(2 > 0)$.

O zero da função é $-\frac{5}{2}$.

Observando o gráfico, verificamos que para:

- $x = -\frac{5}{2}$, a função é **nula** $(y = 0)$.
- $x > -\frac{5}{2}$, a função é **positiva** $(y > 0)$.
- $x < -\frac{5}{2}$, a função é **negativa** $(y < 0)$.

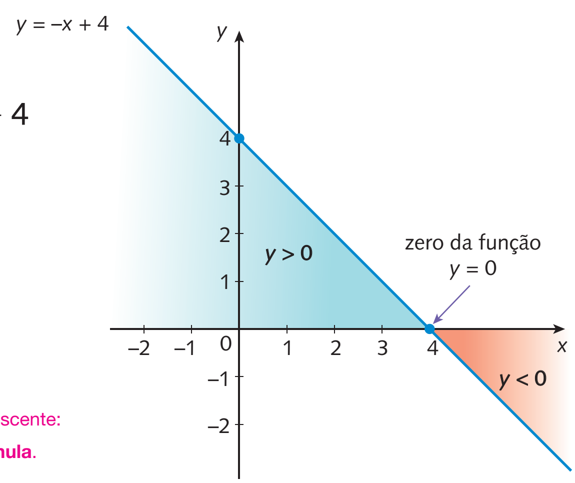
- Estudar o sinal da função afim de lei: $y = -x + 4$

A função é decrescente, pois $a = -1$ $(-1 < 0)$

O zero da função é 4.

Observando o gráfico, verificamos que para:

- $x = 4$, a função é **nula** $(y = 0)$.
- $x < 4$ a função é **positiva** $(y > 0)$.
- $x > 4$, a função é **negativa** $(y < 0)$.



GRÁFICOS: LUIZ RUBIO

4. Para uma função afim crescente:
- Para $x = -\frac{b}{a}$, a função é **nula**.
- Para $x > -\frac{b}{a}$, a função é **positiva**.
- Para $x < -\frac{b}{a}$, a função é **negativa**.

Para uma função afim decrescente:
- Para $x = -\frac{b}{a}$, a função é **nula**.
- Para $x > -\frac{b}{a}$, a função é **negativa**.
- Para $x < -\frac{b}{a}$, a função é **positiva**.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Construa o gráfico, localize o zero de cada uma das funções e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) $f(x) = 4x - 20$ — $x = 5$; crescente
b) $f(x) = 7x - 21$ — $x = 3$; crescente
c) $f(x) = -4x + 1$ — $x = \frac{1}{4}$; decrescente
d) $f(x) = x - 3$ — $x = 3$; crescente

2 Determine os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

a) $y = 2x - 6$
b) $y = -8 + x$
c) $y = -x + 11$
d) $y = -2x - 4$

3 Escreva no caderno a lei de uma função afim que tenha as seguintes características:

- Para $x = 2$, $y = 0$;
- Para $x < 2$, $y < 0$;
- Para $x > 2$, $y > 0$.

Exemplo de resposta: $y = x - 2$

4 Generalize o estudo do sinal de uma função afim cuja lei é $y = ax + b$, crescente $(a > 0)$. Depois faça o mesmo para uma função afim decrescente.

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(ETEC) Um grupo de amigos, em visita a Aracaju, alugou um carro por dois dias.
A locação foi feita nas seguintes condições: R$ 40,00 por dia e R$ 0,45 por quilômetro rodado.
No primeiro dia, saíram de Aracaju e rodaram 68 km para chegar à Praia do Saco, no sul de Sergipe.
No segundo dia, também partiram de Aracaju e foram até Pirambu, no norte do estado, para conhecer o Projeto Tamar. Por uma questão de controle de gastos, o grupo de amigos restringiu o uso do carro apenas para ir e voltar desses lugares ao hotel onde estavam hospedados em Aracaju, fazendo exatamente o mesmo percurso de ida e volta. Nas condições dadas, sabendo que foram pagos R$ 171,80 pela locação do carro, então o número de quilômetros percorrido para ir do hotel em Aracaju a Pirambu foi alternativa **e**

a) 68 b) 61 c) 50 d) 46 e) 34

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Escreva a função que relaciona o valor (V) a pagar em função da distância (x) percorrida, em quilômetro. $V(x) = 40 + 0{,}45x$
- Qual foi a distância total percorrida na viagem de Aracaju à Praia do Saco? 136 km
- Calcule o valor gasto na viagem de Aracaju à Praia do Saco. R$ 101,20

Plano de resolução

- Qual foi o valor gasto na viagem de Aracaju a Pirambu? R$ 70,60
- O valor calculado no item anterior corresponde a quantos quilômetros percorridos? 68 km
- Qual é a distância entre Aracaju e Pirambu? 34 km

Resolução

- Forme uma dupla com outro colega.
- Mostre a ele seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês.
- A dupla deverá discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um dos planos para a execução do processo de resolução.

  Observação

  Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual.

Verificação

- A dupla deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- A dupla deverá pesquisar informações relativas ao município de Pirambu (SE), como: origem do nome, histórico, área do município, população estimada em 2014, densidade demográfica, etc. Estas informações podem ser obtidas no *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE): <www.cidades.ibge.gov.br>.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Considere que o preço de uma entrada de cinema é R$ 15,00. A função que relaciona o número (x) de ingressos e o preço (y) a pagar, em real, é $y = 15x$.

a) Quais as variáveis envolvidas nesta questão? Número de ingressos e preço a pagar.

b) Qual delas é a variável dependente e qual é a variável independente?
O número de ingressos é a variável independente e o preço a pagar é a variável dependente.

2 Construa um plano cartesiano identificando o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas. Em seguida, localize os pares ordenados: $A(3, 1)$; $B(0, 4)$; $C(-2, 0)$; $D(-1, -5)$.
Construção de gráfico.

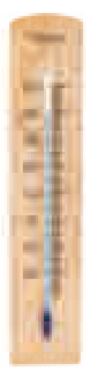
3 O que você compreende a respeito do zero da função? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que o zero da função é o valor de x quando $y = 0$.

4 Observando a lei de formação de uma função afim, como podemos identificar se ela é crescente ou decrescente? Uma função afim é crescente quando o coeficiente a é maior que zero e é decrescente quando o coeficiente a é menor que zero.

Aplicando

1 O grau Celsius (°C) é a unidade de temperatura utilizada no Brasil. O grau Fahrenheit (°F) é a unidade de temperatura utilizada nos Estados Unidos.


BOMBAERT PATRICK/ SHUTTERSTOCK


DIANA TALIUN/SHUTTERSTOCK

Existe uma relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit. Observe a igualdade:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

a) Transforme 40 °C em Fahrenheit. 104 °F

b) Transforme 68 °F em Celsius. 20 °C

2 Dada a função definida por $f(x) = 3x + 1$, calcule: $\dfrac{f(235) - f(129)}{106}$ 3

3 Observe a tabela a seguir.

x	−6	−3	0	12
$f(x)$	2	1	0	−4

a) Determine a lei dessa função. $f(x) = -\frac{x}{3}$

b) Calcule o valor de $f(x)$ para $x = -15$. 5

c) Qual é o valor de x quando $f(x) = -33$? $x = 99$

4 Dada a função de lei $f(x) = 5x - 2$, calcule mentalmente os valores de $f(x)$ para:

a) $x = 0$ −2

b) $x = 2$ 8

c) $x = -1$ −7

d) $x = 1$ 3

5 Um feirante vende mangas pelo preço representado na tabela abaixo.

Quantidade (n) de mangas	2	4	8	10
Preço (p) (em real)	3,00	6,00	12,00	15,00


GEORGE TUTUMI

a) O preço a pagar é função da quantidade de mangas? Por quê?

b) Escreva a lei da função que relaciona p e n. $p = \frac{3}{2}n$

c) Qual é o preço de 7 mangas? R$ 10,50

5. a) Sim, o preço é função da quantidade de mangas, pois há correspondência entre o preço, em real, a pagar e a quantidade de mangas, que é único para cada quantidade.

6 (Etec-SP) Certa companhia fornecedora de água encanada cobra de seus usuários, na conta mensal, o consumo referente a um período, de acordo com a tabela a seguir:

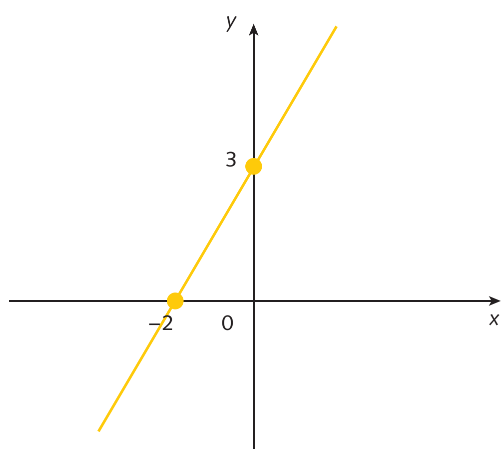
Composição da conta mensal de fornecimento de água	
Item	**Valor (em R$)**
Tarifa fixa e obrigatória	25,00
Tarifa cobrada por metro cúbico de água consumido	6,30

De acordo com a tabela apresentada, a função matemática que expressa, respectivamente, a composição da conta mensal bem como o valor dessa conta, que é referente a um mês no qual foram gastos trinta e cinco metros cúbicos de água, aparece na alternativa alternativa **c**

Considere: V – valor da conta
x – quantidade de metros cúbicos de água consumidos

a) $V = 6{,}30x$; R$ 220,50
b) $V = 25 + 6{,}30x$; R$ 220,50
c) $V = 25 + 6{,}30x$; R$ 245,50
d) $V = 25 - 6{,}30x$; R$ 245,50
e) $V = 25x$; R$ 157,50

7 Identifique a lei da função correspondente ao gráfico. alternativa **c**

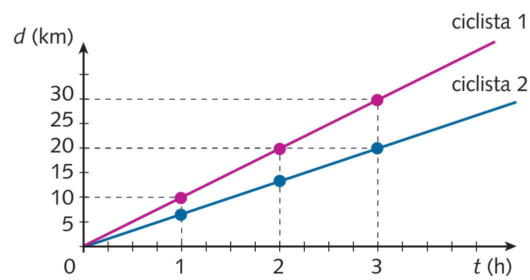


a) $y = 2x - 3$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = 1{,}5x + 3$
d) $3y = -2x$

8 Sem construir o gráfico, determine as coordenadas do ponto em que os gráficos das funções abaixo interceptam o eixo y.

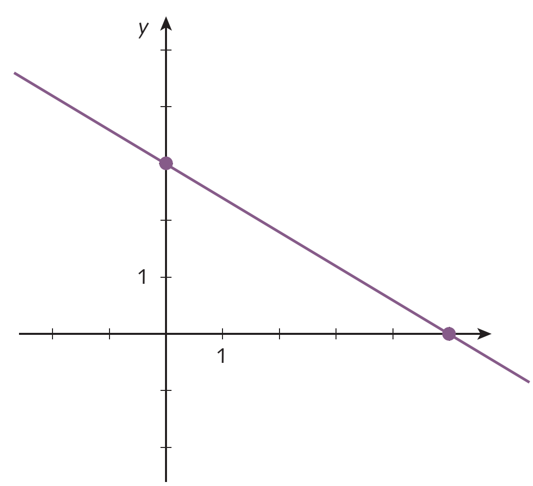
a) $y = 3x - 1$ $(0, -1)$
b) $y = -5x + 2$ $(0, 2)$
c) $y = \dfrac{x}{5}$ $(0, 0)$
d) $y = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{3}{2}$ $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

9 Observe o gráfico e responda às questões.



a) Qual é a distância percorrida pelo ciclista 1 em duas horas? 20 km
b) Qual é a distância entre os ciclistas após três horas da partida? 10 km

10 Qual é a lei da função correspondente ao gráfico abaixo: $y = -\dfrac{3}{5}x + 3$



11 A reta que passa pelos pontos (1, 8) e (4, 11) é gráfico de uma função crescente ou decrescente? Por quê? É gráfico de uma função crescente, pois aumentando-se o valor de x o valor de $f(x)$ aumenta.

12 Analise a tabela usada para a construção do gráfico de uma função afim e responda às questões.

x	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$p(x)$	7	3	1	0	-1

a) Qual é o zero da função? $\frac{3}{2}$

b) Em que ponto o gráfico dessa função intercepta o eixo y? (0, 3)

c) Essa função é crescente ou decrescente? decrescente

d) Qual é a lei dessa função? $p(x) = -2x + 3$

13 Em cada caso construa o gráfico da função a partir das informações: Construção de gráficos

a)
- f é uma função crescente;
- O zero de f é -3;
- O gráfico de f passa pelo ponto de coordenadas (0, 3).

b)
- g é uma função decrescente;
- O gráfico de g passa pelo ponto de coordenadas (1, -3);
- O gráfico de g intercepta o eixo y no ponto de ordenada 2.

DESAFIO

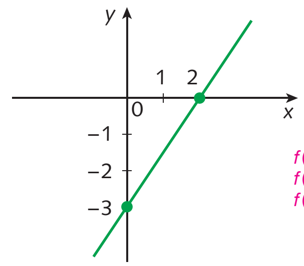
(Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$.

Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo? alternativa **d**

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

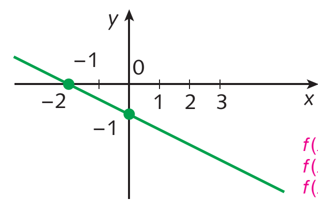
14 Analise os gráficos a seguir e determine os valores de x para os quais a função afim é positiva, negativa ou nula.

a)



$f(x) = 0$ para $x = 2$
$f(x) > 0$ para $x > 2$
$f(x) < 0$ para $x < 2$

b)



$f(x) = 0$ para $x = -2$
$f(x) > 0$ para $x < -2$
$f(x) < 0$ para $x > -2$

15 O lucro de uma empresa com a produção de x televisores é representado pela lei da função $L(x) = 25x - 5000$. Determine o número mínimo de peças que essa empresa precisa produzir para obter lucro. 201 peças

16 Quais das sentenças a seguir são verdadeiras? alternativas **a**, **e** e **g**.

a) Função afim é toda função que pode ser escrita na forma $y = ax + b$, com a e b números reais, em que x pode ser qualquer número real.

b) A lei $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ é um exemplo de lei de função afim.

c) A função cuja lei é $g(x) = \pi x$ não é linear.

d) Uma função afim $y = ax + b$ é decrescente quando $a > 0$.

e) Uma função afim $y = ax + b$ é crescente quando $a > 0$.

f) O zero da função $p(x) = \sqrt[3]{2}$ é $\sqrt[3]{2}$.

g) A função $m(x) = \frac{x}{\sqrt{7}} - 1$ é positiva para $x > \sqrt{7}$

h) Para $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ a função

$$t(x) = \frac{-\sqrt{2}\,x + 1}{\sqrt{2}}$$ é negativa.

CAPÍTULO

4 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O Circuito Mágico das Águas, em Lima, no Peru, conseguiu entrar no *Livro Guinness de Recordes Mundiais* como o maior complexo do mundo de fontes de água em parques públicos. Observe a fotografia e responda às questões:

- Você conhece algum outro recorde mundial? Qual? Respostas pessoais.
- As trajetórias descritas pelos jatos de água lembram o gráfico de uma função quadrática. Você sabe o que é uma função quadrática? Resposta pessoal.

BACKYARD PRODUCTIONS/ALAMY/GLOW IMAGES

Neste capítulo estudaremos a função quadrática. Os alunos aprenderão que o gráfico de uma função desse tipo é uma parábola e que, dependendo da sua concavidade (voltada para cima ou para baixo), a função correspondente pode ter valor máximo ou mínimo. Nesta abertura, o professor pode introduzir a ideia de parábola.

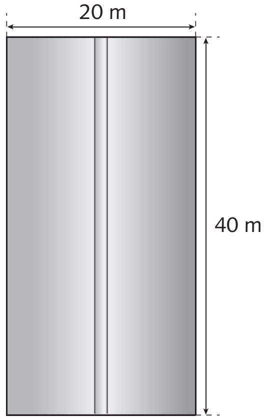
Circuito Mágico das Águas, Lima (Peru), 2012.

TROCANDO IDEIAS

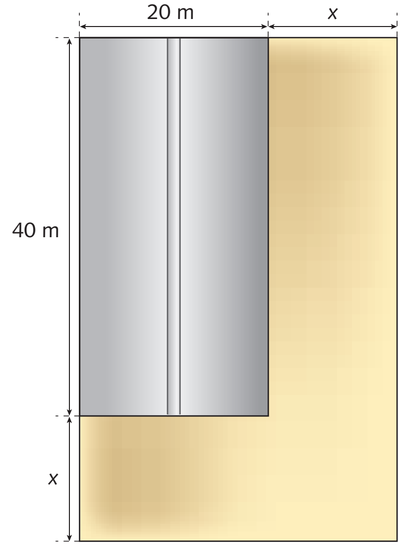
Faça as atividades no caderno.

Observe a situação.

A figura da esquerda representa a vista de cima de um galpão onde funciona uma cooperativa de materiais recicláveis. Para poder receber uma quantidade maior de material, o galpão será ampliado em uma mesma medida tanto no comprimento quanto na largura, conforme o esquema:



Galpão.



Esquema para ampliação.

LUIZ RUBIO

- Qual será a área do novo galpão se tanto o comprimento quanto a largura forem ampliados em 1 m? 861 m²
- Escreva a lei da função que expressa a área *g* do galpão, em metro quadrado, após sua ampliação, em função da medida *x*, em metro. $g(x) = (x + 40)(x + 20) = x^2 + 60x + 800$
- A lei da função do item anterior é lei de uma função afim? Por quê? Não, porque não pode ser escrita na forma $y = ax + b$.
- Copie a tabela no caderno, substituindo cada ■ pelos valores correspondentes.

x (em metro)	Nova área do galpão (em m²)
2	924
2,5	956,25
3	989
5	1 125
9	1 421
11	1 581

MODELO

- Qual deve ser a medida de *x* para que o novo galpão passe a ter área igual a 1 500 m²? $x = 10$ m

Neste capítulo, vamos estudar o conceito de função quadrática, bem como construir e analisar gráficos desse tipo de função.

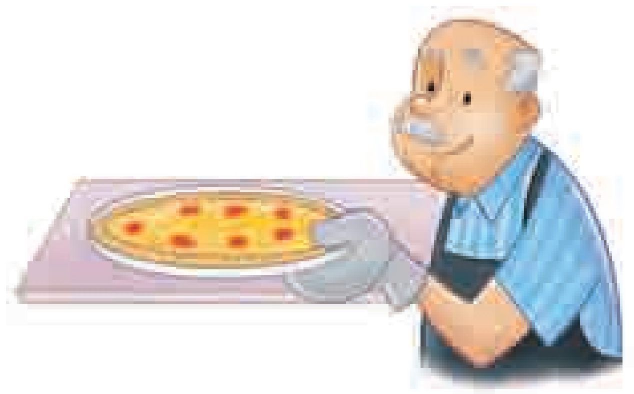
1 Função quadrática

Observe as situações a seguir.

Situação 1

- Na pizzaria de Manuel, há um forno cuja temperatura y (em grau Celsius) pode ser regulada para variar em função do tempo t (em minuto), de acordo com a lei:

$$y = -\frac{t^2}{125} + 4t\text{, em que: } 0 \leqslant t \leqslant 500$$



GEORGE TUTUMI

Situação 2

- Os gafanhotos são insetos que se alimentam principalmente de folhas. Eles têm pernas posteriores muito fortes, com as quais são capazes de dar grandes saltos.

  Um biólogo observou imagens dos movimentos de um gafanhoto e concluiu que, quando esse inseto dava um pulo, sua altura h, em metro, variava em função do tempo t, em segundo, pela lei:

ERIC ISSELEE/SHUTTERSTOCK

Dizemos que as funções que descrevem as situações acima lembram uma função quadrática porque, para serem funções quadráticas, deveriam valer para qualquer valor de t, o que não ocorre em nenhum dos casos.

Peça aos alunos que identifiquem os coeficientes a, b e c nas leis das situações 1 e 2.

(Resposta: na situação 1, $a = -\frac{1}{125}$, $b = 4$ e $c = 0$; na situação 2, $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.)

$$h(t) = -t^2 + 2t\text{, em que: } 0 \leqslant t \leqslant 2$$

As leis das funções $y = -\frac{t^2}{125} + 4t$ e $h(t) = -t^2 + 2t$, que descrevem as situações 1 e 2, lembram a de uma **função quadrática**.

> **Função quadrática** é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, e x pode ser qualquer número real.

Exemplos

- $f(x) = 2x^2 + 16x + 30$, em que $a = 2$, $b = 16$ e $c = 30$.
- $f(x) = x^2 - 16$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -16$.
- $f(x) = 6x^2$, em que $a = 6$, $b = 0$ e $c = 0$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Considerando $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, determine os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* nas funções quadráticas dadas por:

a) $f(x) = x^2 - 25$ $a = 1; b = 0; c = -25$

b) $f(x) = -3x^2 - 6x + 9$ $a = -3; b = -6; c = 9$

c) $f(x) = x^2 - 18$ $a = 1; b = 0; c = -18$

d) $f(x) = -5x^2 + 13x$ $a = -5; b = 13; c = 0$

e) $f(x) = x^2 - 10x + 25$ $a = 1; b = -10; c = 25$

2 Sendo a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 6$, determine:

a) $f(5)$ 44

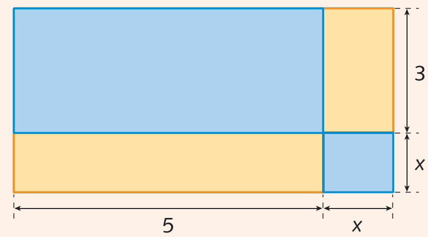
b) $f(0)$ -6

c) $f(-2)$ 2

d) $f(\sqrt{11})$ 16

3 Dada a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para que valores de *x* $f(x) = 0$? $x = 2$ ou $x = 3$

4 Observe a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

A área *y* da figura é dada em função do comprimento *x* indicado. Qual é a lei de formação dessa função? $y = x^2 + 8x + 15$, em que $x > 0$.

2 Gráfico de uma função quadrática

O gráfico de toda função quadrática é uma curva chamada **parábola**. Para construir o gráfico, procedemos de maneira similar à construção dos gráficos de funções afins. Veja os exemplos:

Exemplos

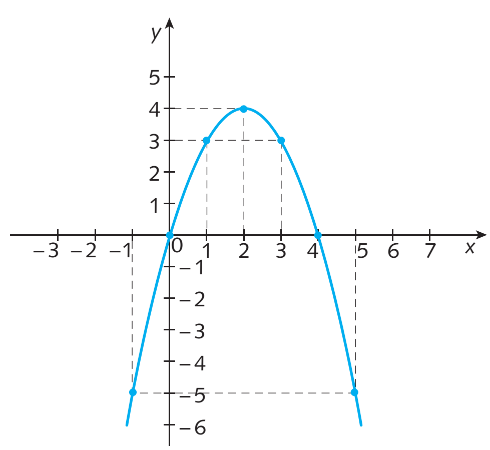
Proponha aos alunos que façam os cálculos e verifiquem que os valores encontrados para *y* correspondem aos da tabela.

- Construir o gráfico da função quadrática dada pela lei $f(x) = -x^2 + 4x$.

Inicialmente, escolhemos valores arbitrários para *x* e calculamos, por meio da lei, os valores de *y* correspondentes para obter alguns pares ordenados.

x	*y*	(*x*, *y*)
−1	−5	(−1, −5)
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
3	3	(3, 3)
4	0	(4, 0)
5	−5	(5, −5)

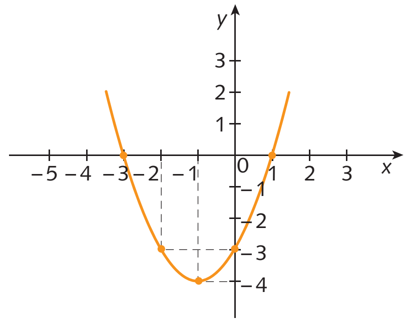
Representamos no plano cartesiano os pontos correspondentes aos pares ordenados encontrados e unimos os pontos, sem usar régua, porque eles não estão alinhados.



LUIZ RUBIO

- Construir o gráfico da função quadrática dada pela lei $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

x	y	(x, y)
-3	0	$(-3, 0)$
-2	-3	$(-2, -3)$
-1	-4	$(-1, -4)$
0	-3	$(0, -3)$
1	0	$(1, 0)$



LUIZ RUBIO

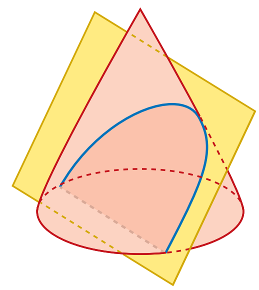
Comente com os alunos que as parábolas possuem concavidade para baixo (como no primeiro exemplo) ou para cima (como no segundo exemplo).

Lendo e aprendendo

A parábola

Parábola é uma curva geométrica que pode ser visualizada parcialmente quando um plano secciona a superfície de um cone, como mostra a figura ao lado.

Etimologicamente, a palavra *parábola* provém do grego e significa “lançar ao longe”. Seu significado foi sempre associado à trajetória de um objeto lançado para cima, porém não na vertical.



GUILHERME CASAGRANDI

MARCELCLEMENS/SHUTTERSTOCK

Retome a situação 2 da página 91 e oriente os alunos a construírem o gráfico da função *h*, comentando que a trajetória dos saltos desse gafanhoto corresponde à parte de uma parábola.

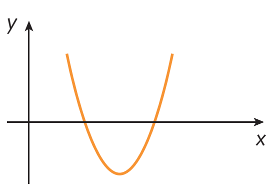
Concavidade da parábola

Peça aos alunos que revejam, nas páginas 92 e 93, o gráfico das funções $f(x) = -x^2 + 4x$, em que $a = -1$, e $g(x) = x^2 + 2x - 3$, em que $a = 1$. Eles devem observar que, na lei da primeira função, $a < 0$ e a parábola tem concavidade voltada para baixo; e, na segunda função, $a > 0$ e a parábola tem concavidade voltada para cima.

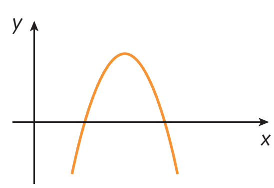
A parábola que representa o gráfico de uma função quadrática pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.

Dada uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, é possível demonstrar que:

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.



Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Exemplos

- $f(x) = x^2 + 2x - 3$

  $a = 1$

  A parábola tem concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.

- $g(x) = -x^2 + 4x$

  $a = -1$

  A parábola tem concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Construa o gráfico das funções definidas pelas leis abaixo. construção de gráficos

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = x^2 - 4$

c) $y = -x^2 + 6x$

d) $y = x^2 - 4x + 3$

e) $y = -x^2 + 2x - 1$

f) $y = -2x^2 - 4x + 6$

2 Quais das leis abaixo representam parábolas com concavidade voltada para cima? alternativas **b**, **c**, **d** e **i**

a) $y = -x^2 + x + 2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = x^2 + 4x$

d) $y = x^2 + 2x + 5$

e) $y = -3x^2 + 6$

f) $y = -2x^2 + x + 3$

g) $y = -\dfrac{x^2}{2} - x$

h) $y = \left(\dfrac{x}{7} + 6\right)(-x + 2)$

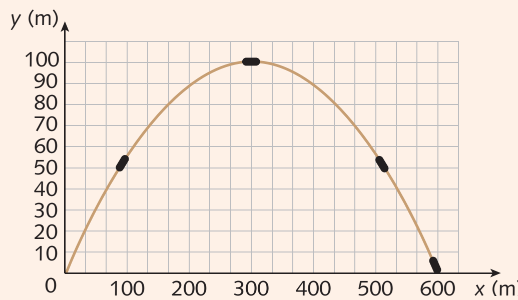
i) $y = \left(\dfrac{5}{9}x + 3\right)^2$

3 Determine os valores de m para que o gráfico da função dada por $f(x) = (m - 7)x^2 - 3x - 2$ tenha a concavidade voltada para baixo. $m < 7$

4 Para que valores de p o gráfico da função $g(x) = \left(\dfrac{p}{2} + 3\right)x^2 - \sqrt{2}\,x + 1$ tem a concavidade voltada para baixo? $p < -6$

5 Um projétil é lançado, e verifica-se que sua altura alcançada (y), em metro, é função do espaço percorrido (x), em metro, de acordo com a lei e o gráfico a seguir:

$$y = -\frac{x^2}{900} + \frac{2x}{3},\ x \geq 0.$$



GUILHERME CASAGRANDI

a) Copie a tabela no caderno, substituindo cada ▬ pelos valores correspondentes.

Distância (metro)	Altura (metro)
100	▬ $\frac{500}{9}$
▬ 300	100
200	▬ $\frac{880}{9}$
400	▬ $\frac{800}{9}$
600	0

b) Qual é a altura máxima atingida pelo projétil? 100 metros

c) Depois de quantos metros percorridos o projétil atinge a altura máxima? 300 metros

d) Qual é a distância total percorrida pelo projétil após ser disparado? 600 metros

Zeros de uma função quadrática

Denominamos **zeros da função quadrática** os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Assim, na função dada pela lei $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

- o número -3 é zero da função, pois, para $x = -3$, temos $f(-3) = 0$;
- o número 1 é zero da função, pois, para $x = 1$, temos $f(1) = 0$;
- o número 0 não é zero da função, pois, para $x = 0$, temos $f(0) = -3$.

Determinação dos zeros da função

Para determinar os zeros da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, basta resolver a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Graficamente, os zeros da função quadrática (quando existem) correspondem às abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x.

Observe os exemplos a seguir:

Exemplos

- Determinar os zeros da função dada por: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

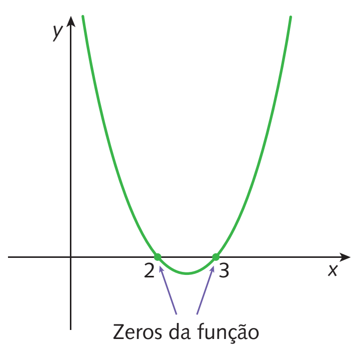
$\Delta = 1$

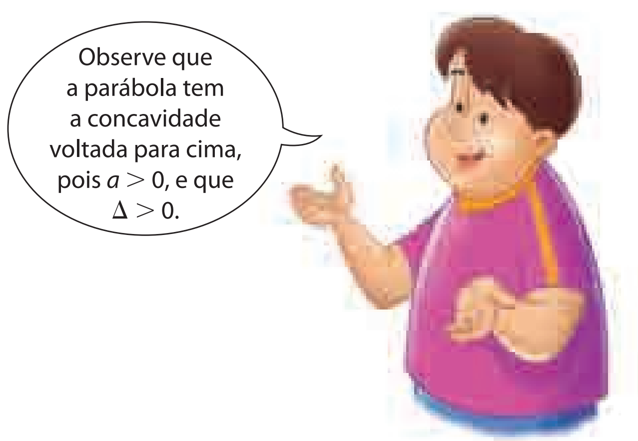
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

A equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ tem duas raízes reais diferentes: $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

Assim, os zeros da função dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3. Isso significa que o gráfico da função f intercepta o eixo x em dois pontos: (2, 0) e (3, 0). Observe o esboço do gráfico.





- Determinar os zeros da função dada por: $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$

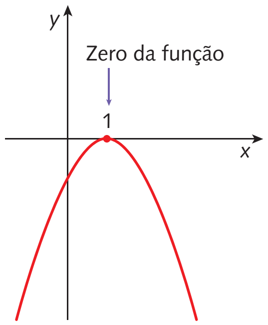
$\Delta = 4 - 4$

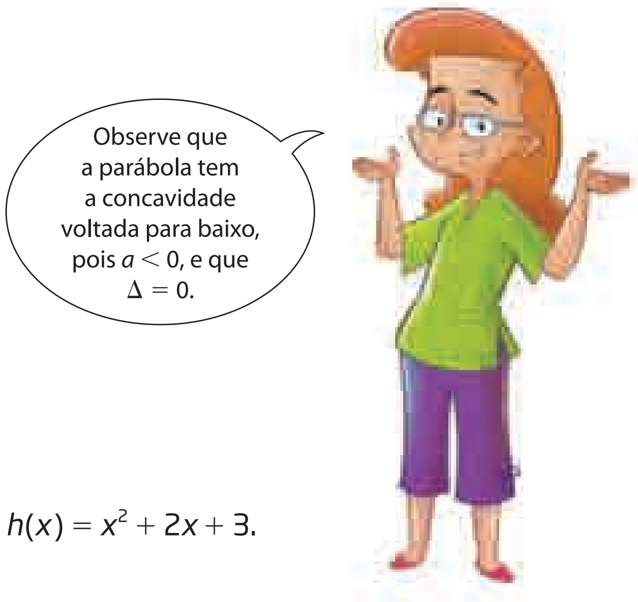
$\Delta = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$$

A equação $-x^2 + 2x - 1 = 0$ tem duas raízes reais iguais: $x_1 = x_2 = 1$.
Assim, a função dada por $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ tem um único zero igual a 1. Isso significa que o gráfico da função g intercepta o eixo x em um único ponto: (1, 0). Observe o esboço do gráfico.





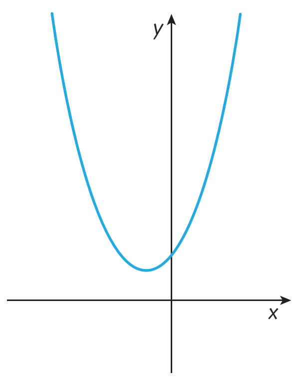
- Determinar os zeros da função dada por $h(x) = x^2 + 2x + 3$.

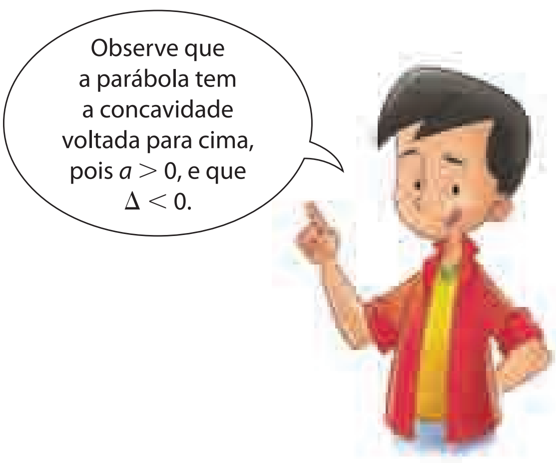
$x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

$\Delta = -8$

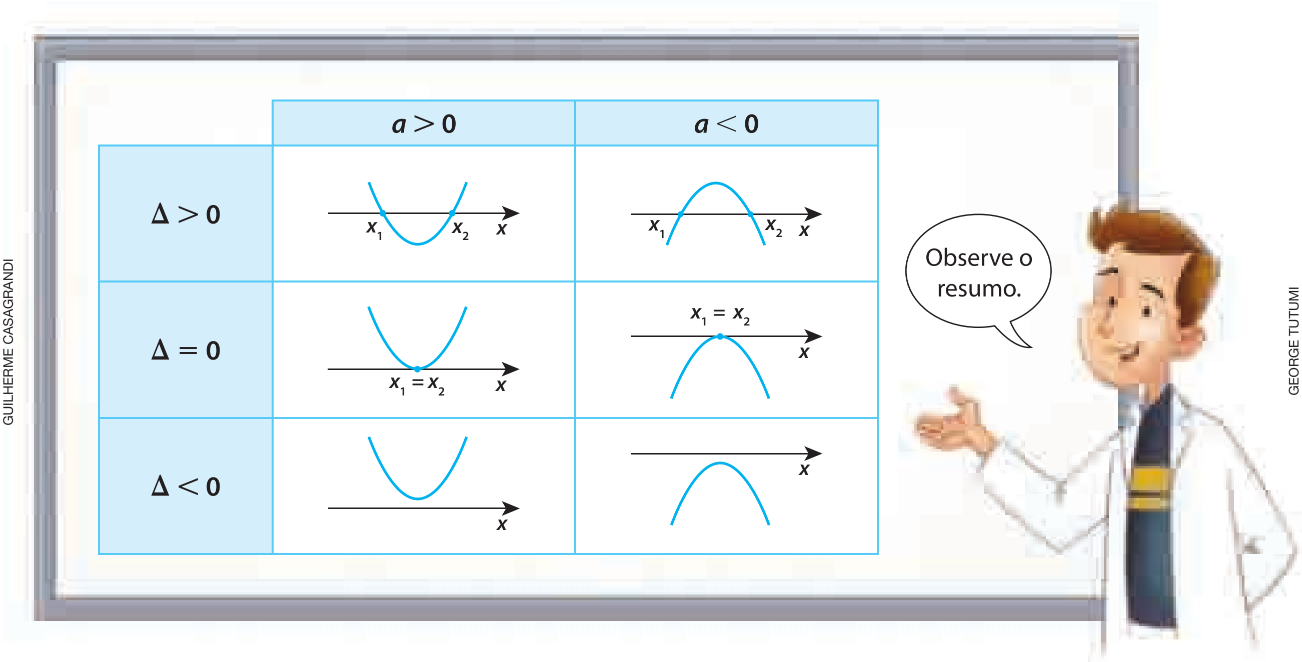
Como $\Delta < 0$, a equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ não tem raízes reais.
Assim, a função dada por $h(x) = x^2 + 2x + 3$ não tem zeros reais.
Isso significa que o gráfico da função h não intercepta o eixo x. Observe o esboço do gráfico.





Nos exemplos, é possível perceber que o valor do discriminante Δ está relacionado à quantidade de zeros que uma função quadrática possui. De modo geral, temos que:

- Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.
- Se $\Delta = 0$, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um só ponto.
- Se $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.



GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine no caderno, se houver, os zeros das funções quadráticas definidas pelas leis a seguir.

a) $y = 6x^2$ 0

b) $y = x^2 - 4$ -2 e 2

c) $y = -x^2 + 1$ -1 e 1

d) $y = 5x^2 + 10x$ 0 e -2

e) $y = -x^2 + 2x - 5$ Não tem zeros.

f) $y = 3x^2 - 5x + 2$ 1 e $\frac{2}{3}$

g) $y = -9x^2 - 6x - 1$ $-\frac{1}{3}$

h) $y = x^2 + 5x + 8$ Não tem zeros.

i) $y = -3x^2 + 2x - 1$ Não tem zeros.

2 Determine as coordenadas dos pontos em que a parábola correspondente a cada lei de função quadrática a seguir corta o eixo x.

a) $y = -3x^2 + 12x$ (0, 0) e (4, 0)

b) $y = x^2 - 4$ (-2, 0) e (2, 0)

c) $y = x^2 - 8x + 15$ (3, 0) e (5, 0)

3 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? alternativas **b** e **c**

a) Uma função quadrática pode ter três zeros reais e distintos.

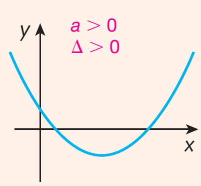
b) O gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + c$ não intercepta o eixo das abscissas quando $4ac > 0$.

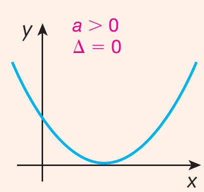
c) Os zeros da função $g(x) = ax^2 + bx$, em que $a \neq 0$, são $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$.

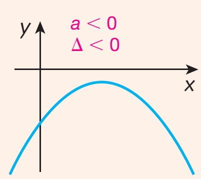
d) O gráfico da função quadrática dada por $p(x) = ax^2$ tangencia o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

4 Um projétil foi lançado, e sua trajetória é descrita pelo gráfico da função $h(x) = -x^2 + 30x$, no qual, em metro, $h(x)$ representa a altura alcançada, e x, a distância percorrida. Qual é a distância percorrida pelo projétil ao atingir o solo? 30 metros

5 São dados os gráficos de três funções quadráticas, com $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4ac$. Em cada caso, escreva no caderno se a é positivo ou negativo e se Δ é positivo, negativo ou nulo.

a) 

c) 

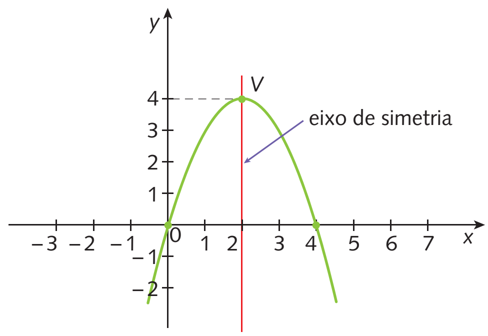
b) 

GUILHERME CASAGRANDI

Coordenadas do vértice

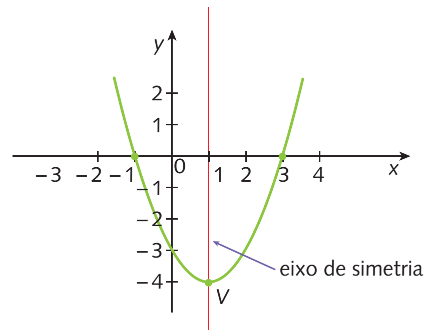
Observe nos exemplos abaixo que toda parábola tem um eixo de simetria e um vértice (V).

$g(x) = -x^2 + 4x$



Vértice: $V(2, 4)$
Zeros da função: $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$

$h(x) = x^2 - 2x - 3$



Vértice: $V(1, -4)$
Zeros da função: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

GUILHERME CASAGRANDI

O vértice é a intersecção da parábola com o eixo de simetria.

Observe que nos dois casos a abscissa do vértice (x_V) corresponde à metade da soma dos zeros da função $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$. E, para obter a ordenada do vértice (y_v), basta substituir x por x_v na lei da função e efetuar os cálculos. Assim:

- do gráfico de g, temos:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

$$y_v = g(2) = -(2)^2 + 4 \cdot (2) = 4$$

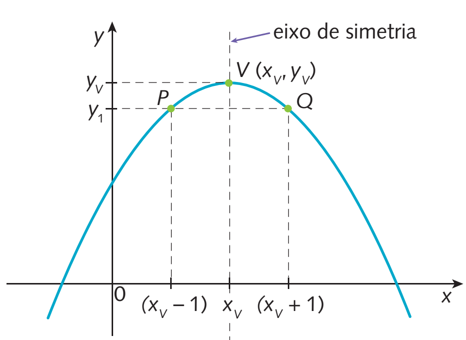
- do gráfico de h, temos:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

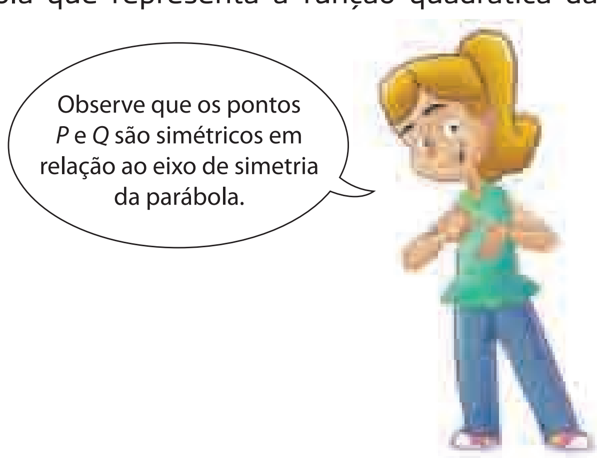
$$y_v = h(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$$

GEORGE TUTUMI

Vimos que toda parábola tem um eixo de simetria e um vértice V. Veja como podemos relacionar a abscissa do vértice da parábola que representa a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ aos coeficientes a e b.



GUILHERME CASAGRANDI



GEORGE TUTUMI

No gráfico da função quadrática f, temos que as abscissas $x_V - 1$ e $x_V + 1$ estão a uma mesma distância de x_V e que $f(x_V - 1) = f(x_V + 1) = y_1$. Dessa forma, temos:

$$a(x_V - 1)^2 + b(x_V - 1) + c = a(x_V + 1)^2 + b(x_V + 1) + c$$

$$a(x_V^2 - 2x_V \cdot 1 + 1) + b(x_V - 1) + c = a(x_V^2 + 2x_V \cdot 1 + 1) + b(x_V + 1) + c$$

$$\cancel{ax_V^2} - 2ax_V + \cancel{a} + \cancel{bx_V} - b + \cancel{c} = \cancel{ax_V^2} + 2ax_V + \cancel{a} + \cancel{bx_V} + b + \cancel{c}$$

$$-2ax_V - b = 2ax_V + b$$

$$-4ax_V = 2b$$

$$x_V = \frac{2b}{-4a}\text{, ou seja: } \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

Comente com os alunos que na demonstração foram considerados dois pontos simétricos quaisquer em relação ao eixo de simetria e que, por esse motivo, poderíamos considerar na demonstração suas abscissas como sendo $x_V - 2$, $x_V + 2$ ou $x_V - 3$, $x_V + 3$ etc.

Lembre-se que, conhecendo a abscissa x_V, temos que a ordenada do vértice será $y_V = f(x_V)$.

Exemplos

- Determinar as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico da função quadrática dada por $p(x) = x^2 - 3x + 2$.

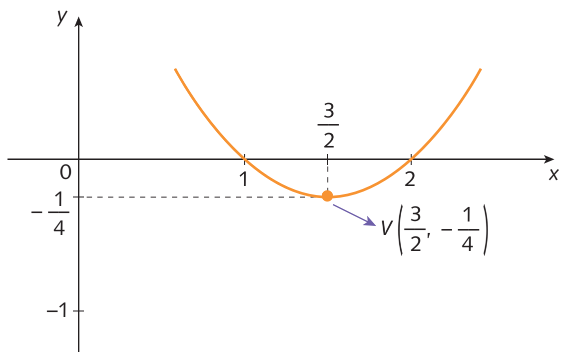
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$y_V = p(x_V) = p\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 2$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$$

Portanto: $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



LUIZ RUBIO

- Determinar os valores de m e n para que o gráfico da função dada por $q(x) = x^2 - mx + \frac{n}{2}$ tenha vértice $V(1, 1)$.

A abscissa do vértice é dada por: $x_V = -\frac{b}{2a}$. Então, para que $x_V = 1$, devemos ter:

$$-\frac{(-m)}{2 \cdot 1} = 1\text{, ou seja: } m = 2$$

Substituindo o valor de m na lei da função obtemos:

$$q(x) = x^2 - 2x + \frac{n}{2}$$

Como $x_V = 1$ e $y_V = 1$, temos: $q(1) = 1$. Assim, podemos determinar o valor de n:

$$q(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{n}{2}$$

$$1 = 1 - 2 + \frac{n}{2}\text{, ou seja, } 2 = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 4$$

Assim: $m = 2$ e $n = 4$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a e b para que o gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + 5$, $a \neq 0$, tenha vértice no ponto $(3, -4)$.
$a = 1$; $b = -6$

2 Determine o valor de k para que o vértice da parábola que é gráfico da função $f(x) = x^2 - 8x + k$ pertença ao eixo x.
$k = 16$

3 Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função quadrática.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $V(2, -1)$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ $V(3, 0)$

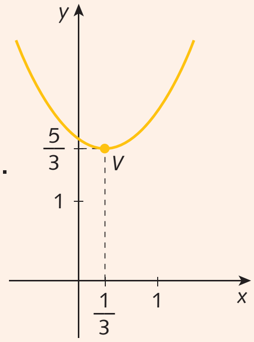
c) $f(x) = -x^2 + 2x$ $V(1, 1)$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ $V(-1, 2)$

e) $f(x) = x^2 - x - 2$ $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

f) $f(x) = 3x^2 - 4x$ $V\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

4 A lei da função quadrática correspondente ao gráfico ao lado é $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Determine a e b.
$a = 3$
$b = -2$



LUIZ RUBIO

Construção do gráfico de uma função quadrática com base nas coordenadas do vértice

Vimos que o gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola. Assim, para construir seu gráfico não podemos usar a régua para unir os pontos, uma vez que a parábola não é formada por segmentos de reta. Veja, no exemplo a seguir, como podemos construir o gráfico de uma função quadrática com base nas coordenadas do vértice.

- Construir o gráfico da função quadrática dada por $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

  Inicialmente, determinamos as coordenadas do vértice.

  $$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2} = 2 \qquad y_V = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 5 = 1$$

  Assim, o vértice é o ponto $V(2, 1)$.

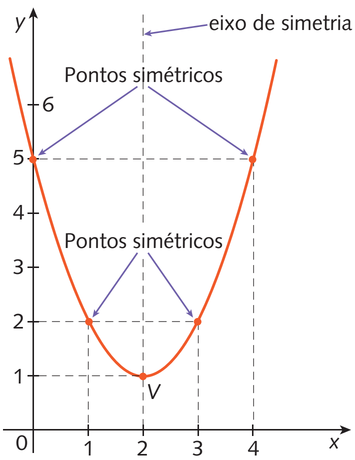
  A seguir, escolhemos valores para x, que sejam simétricos em relação à abscissa do vértice, e calculamos os valores de y correspondentes para obter alguns pares ordenados.

  Nesse caso, vamos escolher valores para x, que sejam simétricos em relação a $x_V = 2$.

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
1	2	(1, 2)
2	**1**	**(2, 1)**
3	2	(3, 2)
4	5	(4, 5)

→ Coordenadas do vértice

Por fim, representamos no plano cartesiano os pontos correspondentes aos pares ordenados e traçamos a parábola que passa por esses pontos.



LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Construa, no caderno, o gráfico de cada função quadrática. Construção de gráficos.

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = x^2 - 9$

c) $h(x) = -x^2 + 4$

d) $s(x) = x^2 - 4x$

e) $t(x) = x^2 - 6x + 10$

f) $u(x) = -x^2 + 4x - 5$

2. Espera-se que os alunos percebam que os gráficos são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

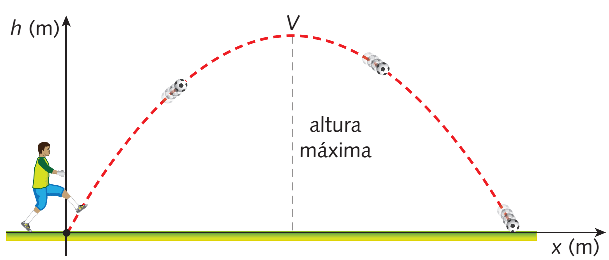
2 Construa o gráfico das funções quadráticas dadas pelas leis $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ em um mesmo sistema de eixos. O que você pode perceber? Construção de gráfico.

3 Construa o gráfico de cada função: $f(x) = x^2$, $b(x) = x^2 - 2$, $t(x) = x^2 - 1$, $h(x) = x^2 + 1$ e $m(x) = x^2 + 2$. Depois, compare-os e veja como o valor de c influencia no gráfico da função definida pela lei $y = ax^2 + c$. Construção de gráficos. Espera-se que os alunos percebam que o valor de c determina o deslocamento vertical da parábola.

3 Ponto de mínimo e ponto de máximo de uma função quadrática

Observe a situação a seguir.

Um goleiro chuta uma bola cuja trajetória pode ser representada pelo gráfico da função dada pela lei $h(x) = -\frac{x^2}{20} + x$, em que x indica a distância horizontal, em metro, percorrida e $h(x)$ a altura, em metro, que a bola alcançou. Qual é a altura máxima atingida pela bola?



LUIZ RUBIO

Observe que o gráfico que representa a trajetória da bola é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e que a altura máxima atingida pela bola corresponde à ordenada do vértice.

Vamos calcular x_V e y_V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)}, \text{ ou seja, } x_V = 10$$

Retome a situação 2 da página 91 e peça aos alunos que encontrem a altura máxima que o gafanhoto, observado pelo biólogo, pode atingir durante o salto. Resposta: 1 metro

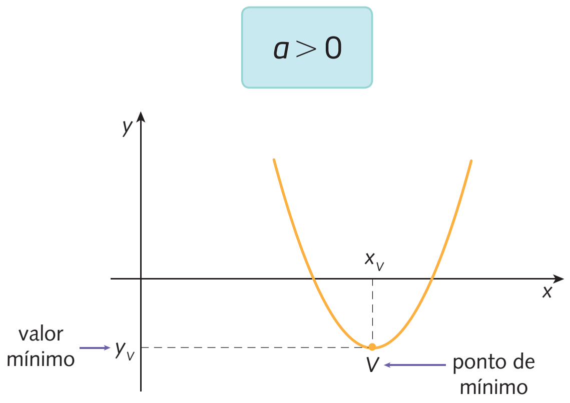
$$y_V = h(10) = -\frac{10^2}{20} + 10, \text{ ou seja, } y_V = 5$$

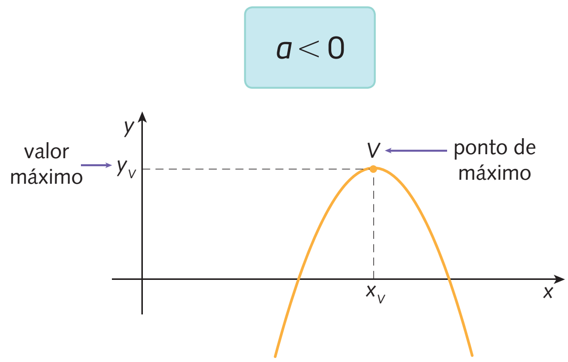
Portanto, a altura máxima atingida pela bola é 5 metros.

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola, e esse tipo de função sempre tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo**, que corresponde à ordenada do vértice da parábola.

Para uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

- Se $a > 0$, a função tem **valor mínimo**, e o vértice é chamado **ponto de mínimo**.
- Se $a < 0$, a função tem **valor máximo**, e o vértice é chamado **ponto de máximo**.





LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o valor máximo ou mínimo das funções definidas por:

a) $f(x) = x^2 - 64$ mínimo: -64

b) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ máximo: 0

c) $f(x) = -x^2 + 3x$ máximo: $\frac{9}{4}$

d) $f(x) = x^2 - x - 6$ mínimo: $-\frac{25}{4}$

e) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$ máximo: $-\frac{3}{4}$

f) $f(x) = 2x^2 + 5x$ mínimo: $-\frac{25}{8}$

2 Determine o valor de k para que a função definida por $f(x) = -4x^2 + (k + 1)x + 2$ admita valor máximo para $x = 2$. $k = 15$

3 Determine o valor de p na função dada por $f(x) = 3x^2 - 2x + p$, para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$. $p = 2$

4 Em cada item, calcule o valor de x para que a função tenha um valor máximo.

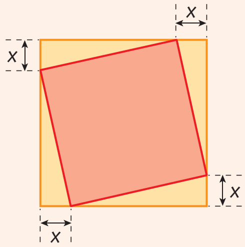
a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ $\frac{5}{4}$

b) $f(x) = -x^2 + 11x - 8$ $\frac{11}{2}$

5 Na figura, o quadrado externo tem lados de medida 12 cm, e os segmentos indicados medem x cm. Determine:

a) o valor de x para que a área laranja do quadrado seja mínima; $x = 6$

b) o valor dessa área mínima. 72 cm^2



GUILHERME CASAGRANDI

6 O barbante da ilustração, excetuando a parte utilizada no laço, tem 100 cm de comprimento. Qual é o retângulo de maior área que se pode formar com esse barbante?
A figura de maior área é um quadrado de 25 cm de lado.

TIAGO SILVA

7 Um fazendeiro dispõe de 1000 m de tela metálica para construir uma cerca retangular, aproveitando um muro já existente. Quais devem ser as dimensões da cerca para que a área encontrada seja máxima?
250 m, 500 m e 250 m

TIAGO SILVA

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 O que diferencia uma função afim de uma função quadrática?
Exemplo de resposta: Na função afim, o maior expoente da variável é 1 e, na função quadrática, é 2.

2 Para encontrar os zeros de uma função quadrática, devemos igualar $f(x)$ a zero. Quais estratégias podem ser utilizadas para resolver a equação obtida?
2. A equação obtida é do 2º grau. Exemplos de estratégia: se a equação do 2º grau for completa, pode-se aplicar a fórmula de Bháskara ou a fatoração. Se $c = 0$, pode-se colocar o fator comum em evidência.

3 De que maneira a concavidade de uma parábola está relacionada aos pontos de máximo e de mínimo da função quadrática? Se a parábola tem concavidade voltada para baixo ($a < 0$), possui ponto de máximo. Caso contrário, se a concavidade for voltada para cima ($a > 0$), terá ponto de mínimo.

4 Quais das sentenças a seguir são verdadeiras? alternativas **a** e **c**.

a) A função $f(x) = x^2 + 18x + 81$ possui apenas um zero, que é -9.

b) A função $f(x) = -x^2 + 7x$ possui dois zeros reais opostos.

c) Em uma função quadrática, se $c = 0$, os zeros serão sempre zero e $-\dfrac{b}{a}$.

d) Uma função quadrática pode ter dois vértices.

Aplicando

1 Seja a função $f(x) = 3x^2 + 2x - m - 3$. Determine m para que $f(2) = 5$. $m = 8$

2 Sabendo que o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -3x^2 + 5x + 2m - 8$ passa pela origem do plano cartesiano, determine o valor de m. $m = 4$

3 **(Enem)** Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \dfrac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leqslant t < 100 \\ \dfrac{2}{125}t^2 - \dfrac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geqslant 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a: alternativa **d**

a) 100
b) 108
c) 128
d) 130
e) 150

4 O nível de uma substância química em um reservatório é dado pela fórmula $N = -t^2 + 6t$ (com $0 \leqslant t < 6$), em que N representa o nível do reservatório, em metro, e t representa o tempo, em hora.

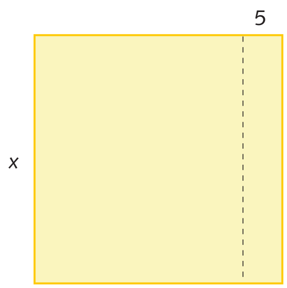
Agora, responda às questões.

a) Qual é o nível do reservatório quando $t = 1$? 5 m

b) Qual é o nível do reservatório quando $t = 3$? 9 m

c) Em quanto tempo o nível do reservatório será igual a zero? (Desprezar $t = 0$.)
6 horas

5 Ao diminuir 5 cm da medida do lado de um quadrado, obtém-se um retângulo com 750 cm² de área. Qual é a medida do lado do quadrado inicial? 30 cm



6 Determine os zeros das funções definidas por:

a) $f(x) = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$ 2 e $-\frac{1}{3}$

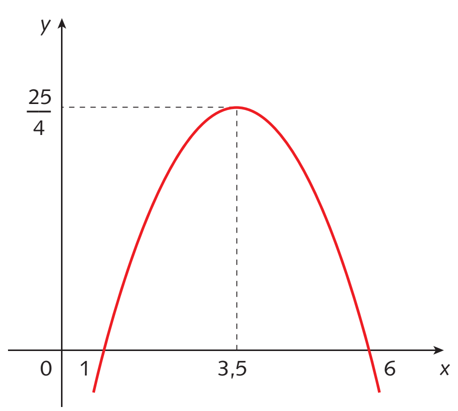
b) $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$ 1 e $-\frac{1}{4}$

c) $f(x) = -x^2 + 4$ 2 e -2

7 Determine as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função dada por $f(x) = 6x^2 + x - 1$ com o eixo das abscissas. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right); \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

8 Determine o valor de k para que a função cuja lei é $f(x) = x^2 + kx + 1$ admita dois zeros reais e iguais. $k = \pm 2$

9 Sabendo que o gráfico abaixo representa a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, determine a, b e c. $a = -1$; $b = 7$; $c = -6$



10 Determine as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função definida por $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$ com o eixo das ordenadas. $(0, -4)$

11 Para cada lei de função f dada, determine as coordenadas do vértice da parábola correspondente.

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

b) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$ $(-3, 4)$

c) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ $(3, 1)$

12 Determine o valor máximo ou o valor mínimo das funções dadas por:

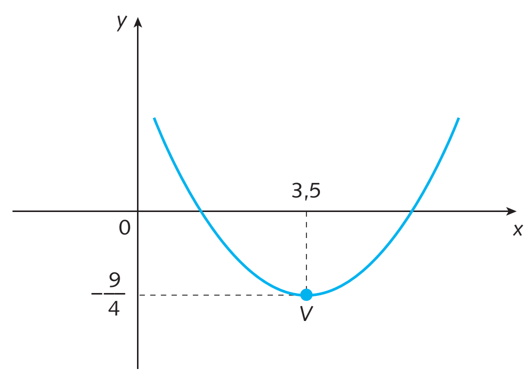
a) $f(x) = -3x^2 + 2x$ máximo: $\frac{1}{3}$

b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ mínimo: $-\frac{1}{8}$

c) $f(x) = x^2 - 40x + 800$ mínimo: 400

13 Determine o valor mínimo da função f dada por $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$. $-\frac{73}{12}$

14 Observe o gráfico da função dada por $f(x) = ax^2 - 7x + c$, $a \neq 0$. Depois, determine a e c. $a = 1$; $c = 10$

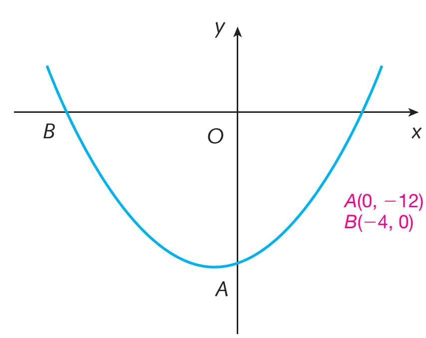


15 Para que valor de x a função definida por $f(x) = -2x^2 + 4x - 7$ admite um valor máximo? $x = 1$

16 Determine o valor de p para que a função $f(x) = (3 - 2p)x^2 + 6x - 4$ admita um valor mínimo. $p < \frac{3}{2}$

17 Determine o valor de k para que a função definida por $f(x) = (5 + k)x^2 + 2x - 7$ admita um valor máximo. $k < -5$

18 A parábola da figura é dada por $f(x) = x^2 + x - 12$. Determine as coordenadas dos pontos A e B.



$A(0, -12)$
$B(-4, 0)$

19 Um golfinho realiza um salto cuja trajetória lembra uma parábola. A função que representa essa parábola é $f(x) = -x^2 + 4x$. Quais são as coordenadas do ponto no qual o golfinho atinge a altura máxima? (2, 4)

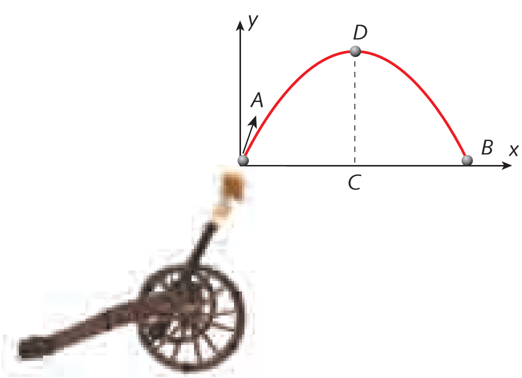
NEJRON PHOTO/SHUTTERSTOCK

20 A bala lançada pelo canhão ilustrado abaixo descreve uma parábola de equação $y = 100x - 2x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 50$. Determine, em metro:

a) o alcance do lançamento (AB); 50 m

b) a altura máxima atingida (CD). 1 250 m

GUILHERME CASAGRANDI



21 O lucro mensal de uma pequena empresa de fabricação de trufas de chocolate é dado pela lei $L(x) = -3x^2 + 90x - 15$, em que L é o lucro (em real) obtido em função da quantidade mensal x de trufas vendidas. Qual é o lucro mensal máximo dessa empresa? R$ 660,00

22 A função dada pela lei $g(t) = t^2 - 4t + 3$ relaciona a temperatura g, em grau Celsius, de uma câmara frigorífica e o tempo t, em hora, em que permaneceu ligada.

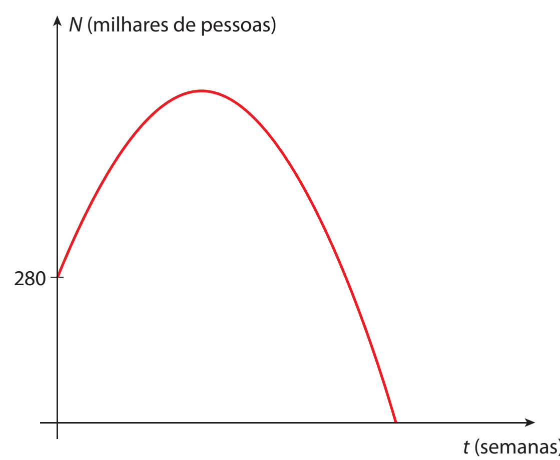
a) Em quais momentos a temperatura é 0 °C? 1 hora e 3 horas depois que a câmara é ligada.

b) Qual é a temperatura mínima atingida? −1 °C

23 Sabendo que o número de diagonais de um polígono convexo com n lados é $\dfrac{n(n-3)}{2}$, determine o polígono convexo que tem 27 diagonais. eneágono

24 Em certo país, houve uma epidemia provocada por um vírus. As estatísticas apontaram que, inicialmente, foram comprovados 280 mil casos de pessoas infectadas pelo vírus. Essa epidemia pode ser representada pela lei $N(t) = 280 + 120t - 10t^2$, sendo $N(t)$ o número de pessoas infectadas (em milhares) dado em função do número t de semanas decorridas. Imediatamente após a comprovação dos primeiros casos, teve início a vacinação em massa da população, a fim de controlar essa epidemia. O gráfico abaixo representa a situação desde o aparecimento do vírus até o seu combate.

GUILHERME CASAGRANDI



a) Qual foi a maior quantidade de pessoas infectadas em um mesmo período? 640 pessoas

b) Depois de quanto tempo essa epidemia foi controlada, isto é, o número de pessoas infectadas reduziu para zero? Depois de 14 dias.

CAPÍTULO

5 ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

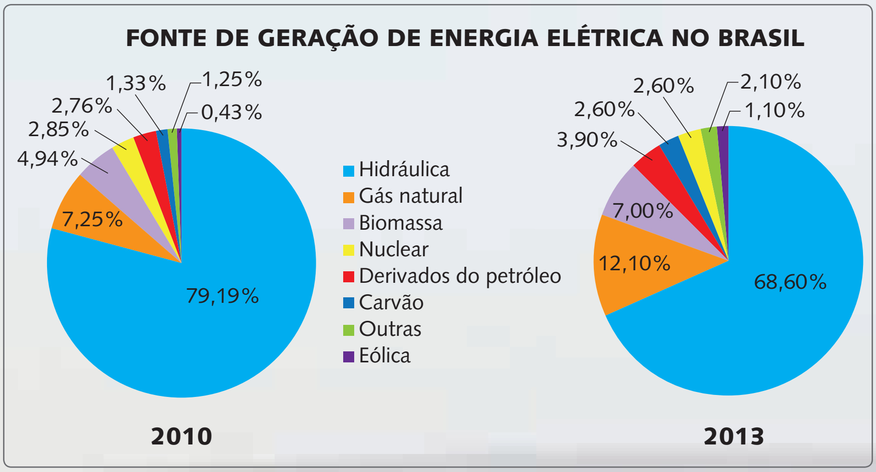
DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Usina Hidrelétrica de Itaipu, uma das maiores geradoras de energia limpa e renovável do planeta. Foto de 2009.

Neste capítulo, vamos trabalhar algumas das etapas do processo estatístico: objetivo da pesquisa, seleção das variáveis a serem analisadas, coleta de dados, organização dos dados, elaboração de tabelas e gráficos e a determinação de medidas de tendência central de um conjunto de dados. Na abertura do capítulo, gráficos de setores são utilizados para iniciar o estudo dos gráficos estatísticos.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

A maior parte da energia elétrica consumida no Brasil em 2010 tinha procedência de empreendimentos hidrelétricos, que correspondiam a cerca de 79% de toda a capacidade instalada do país. Observe nos gráficos a seguir que, em 2013, houve diminuição desse percentual em relação a 2010.



LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: <http://www.epe.gov.br/AnuarioEstatisticodeEnergiaEletrica/20111213_1.pdf> e <http://www.epe.gov.br/AnuarioEstatisticodeEnergiaEletrica/Anu%C3%A1rio%20Estat%C3%ADstico%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%202014.pdf>. Acessos em: 29 maio 2015.

- As informações sobre a geração de energia elétrica produzida no Brasil foram organizadas em dois gráficos. Que tipo de gráfico foi utilizado? gráfico de setores
- Em 2013, além da diminuição da produção de energia elétrica por meio de recursos hídricos, que outra fonte de geração de energia também diminuiu a produção em relação a 2010? Nuclear.

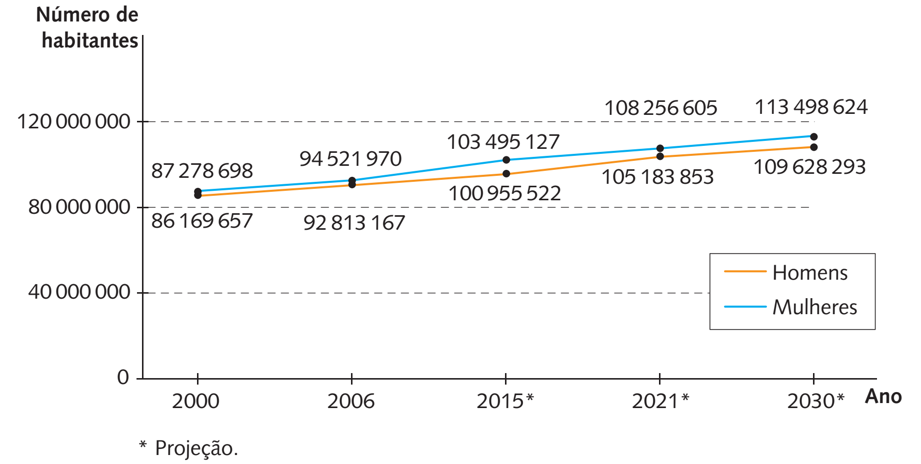
TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Geralmente, os meios de comunicação, como jornais, revistas, internet, entre outros, empregam tabelas e gráficos para representar informações estatísticas.

As tabelas e os gráficos transmitem, de forma objetiva, informações sobre determinados assuntos. Veja os exemplos.

COMPOSIÇÃO DA POPULAÇÃO BRASILEIRA, POR SEXO



LUIZ RUBIO

Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 29 maio 2015.

Quantidade de candidatos por sexo/cargo nas eleições de 2014		
Cargo	**Masculino**	**Feminino**
Presidente	8	3
Governador	146	20
Senador	138	34
Deputado federal	4 382	1 796
Deputado estadual/distrital	11 244	6 470

Disponível em: <http://www.tse.jus.br/hotSites/CatalogoPublicacoes/pdf/informacoes_dados_estatisticos_eleicoes_2014_web.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015

Com base no gráfico e na tabela, responda às questões:

- Na composição da população brasileira há mais homens ou mulheres? Qual foi a projeção para a diferença entre a quantidade de mulheres e homens em 2015? De acordo com a projeção, essa diferença se manterá até 2030? Mulheres; Em 2015 havia 2 539 605 mulheres a mais que homens e essa diferença não se manterá em 2030 já que a projeção é de que haverá 3 870 331 mulheres a mais que homens.
- Observe a tabela e verifique se a relação entre a quantidade de candidatos, homens e mulheres, é a mesma da população. Por que você acha que isso acontece? Converse com o professor e os colegas. Espera-se que os alunos percebam que embora na composição da população brasileira haja mais mulheres que homens, os candidatos aos cargos políticos são na maioria homens; resposta pessoal.

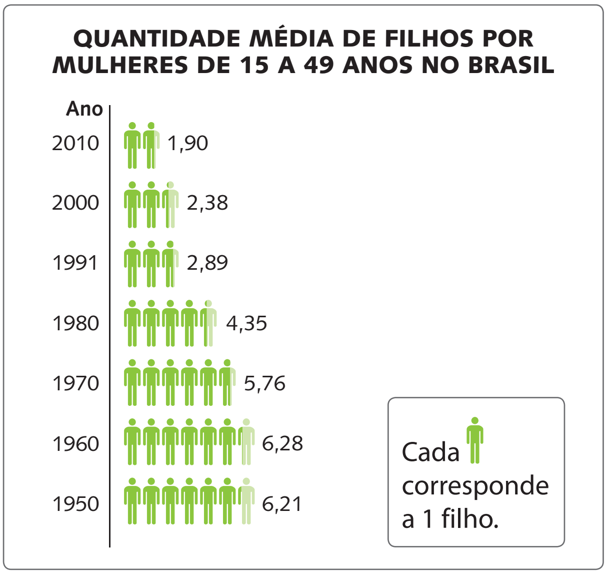
Neste capítulo, vamos estudar algumas das etapas de um processo estatístico.

1 Processo estatístico

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), as famílias ficaram menos numerosas com o passar do tempo.

Em 1950, a média de filhos por mulher era 6,21. Nos anos posteriores, observou-se uma queda acentuada nesse índice, chegando, em 2010, a uma média de 1,90 filho por mulher.

As dificuldades financeiras, as condições de vida das sociedades modernas e os métodos anticoncepcionais justificam essa acentuada redução no número de filhos por família.



LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: <http://7a12.ibge.gov.br/vamos-conhecer-o-brasil/nosso-povo/nupcialidade-e-fecundidade>. Acesso em: 29 maio 2015.

GRZEGORZ PLACZEK/SHUTTERSTOCK

Como foi possível obter essas informações?

Elas são resultantes de um processo estatístico, que se baseia em um método de pesquisa.

A seguir, vamos estudar algumas etapas desse processo: o objetivo da pesquisa, a seleção das variáveis que serão analisadas, a coleta de dados e a sua organização e agrupamento.

1ª etapa: objetivo da pesquisa

Ao iniciar uma pesquisa, é preciso definir claramente o que se quer estudar.

Exemplos

- O número médio de filhos das famílias do município Alfa.
- A medida da altura mais frequente de um aluno do 9º ano do colégio Beta.
- O número de medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Pan-Americanos realizados até 2011.
- O saldo da balança comercial do Brasil no terceiro trimestre de 2014.

2ª etapa: seleção das variáveis que serão analisadas

Já vimos que, em uma pesquisa, cada característica estudada é denominada **variável**. Desse modo, ao montar a pesquisa, deve ficar claro qual será a variável estudada e quais serão seus possíveis valores.

Para cada objetivo da pesquisa, determinamos variáveis.

Exemplos

Considerando os exemplos dados na 1ª etapa, temos as seguintes variáveis:

- O número de filhos das famílias do município Alfa.
- A medida da altura dos alunos do 9º ano do colégio Beta.
- O número de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas pelo Brasil nos Jogos Pan-Americanos realizados até 2011.
- Os valores correspondentes à exportação e à importação do Brasil nos meses de julho, agosto e setembro de 2014.

3ª etapa: coleta de dados

A estatística se baseia na observação de grupos aos quais damos o nome de **população** ou **universo estatístico**. Coletamos dados para cada variável da pesquisa.

Exemplos

Considerando os dois últimos exemplos dados na 1ª etapa, temos os seguintes universos estatísticos:

- Total de medalhas conquistadas: para saber o número de medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Pan-Americanos realizados até 2011, analisamos os dados obtidos no *site* do Comitê Olímpico Brasileiro.

Número de medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Pan-Americanos				
Cidade-sede	**Ano**	**Ouro**	**Prata**	**Bronze**
Buenos Aires	1951	5	15	12
Cidade do México	1955	2	3	13
Chicago	1959	8	8	6
São Paulo	1963	14	20	18
Winnipeg	1967	11	10	5
Cáli	1971	9	7	14
Cidade do México	1975	8	13	23
San Juan	1979	9	13	17
Caracas	1983	14	20	23
Indianápolis	1987	14	14	33
Havana	1991	21	21	37
Mar del Plata	1995	18	27	37
Winnipeg	1999	25	32	44
Santo Domingo	2003	29	40	54
Rio de Janeiro	2007	52	40	65
Guadalajara	2011	48	35	58

Dados obtidos em: <http://timebrasil.cob.org.br/brasil-nos-jogos/jogos-pan-americanos>. Acesso em: 29 maio 2015.

- Total obtido com exportação e importação nos meses de julho, agosto e setembro de 2014: para saber o saldo da balança comercial do Brasil no terceiro trimestre de 2014, analisamos os dados obtidos no Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior.

Balança comercial do Brasil no terceiro trimestre de 2014 (em dólar)

	Julho	Agosto	Setembro
Exportação	23 024 072 161	20 463 307 505	19 616 604 854
Importação	21 452 333 932	19 301 280 029	20 556 609 915

Dados obtidos em: <http://www.desenvolvimento.gov.br/portalmdic/sitio/interna/interna.php?area=5&menu=4839&refr=1161>. Acesso em: 11 jun. 2015.

Quando o universo estatístico estudado é muito grande ou não é possível coletar dados de todos os seus elementos, recorremos a uma parte do universo estatístico denominada **amostra**.

A amostra deve ter as mesmas características da população da qual foi retirada.

Exemplos

Considerando os dois primeiros exemplos dados na 1ª etapa, temos as seguintes amostras:

- para o estudo sobre o número médio de filhos das famílias do município Alfa, tomamos como amostra 80 famílias que moram em diversos bairros desse município, obtendo estas quantidades:

0	2	1	3	4	1	2	3	0	4	1	2	3	1	4	0
2	3	0	5	3	2	1	5	1	2	3	2	0	4	2	3
2	4	3	1	2	1	4	3	2	0	2	6	2	1	0	1
2	0	2	3	2	0	1	2	3	2	1	2	3	2	2	2
1	2	0	2	1	5	2	0	3	2	1	4	0	2	2	1

- para saber a medida mais frequente da altura dos alunos do 9º ano, tomamos como amostra 35 alunos das diversas turmas do 9º ano do colégio Beta, obtendo as medidas indicadas abaixo, em centímetro:

LÉO FANELLI

171	159	185	170	169	174	175	180	158
160	150	168	167	174	163	158	165	168
176	176	165	142	175	172	161	169	165
154	164	156	162	179	160	149	188	

4ª etapa: organização e agrupamento dos dados

A organização dos dados coletados permite uma leitura mais rápida e fácil.

Existem algumas formas de fazer essa organização. Uma delas é montar uma tabela.

Exemplos

Considerando os exemplos da 1ª etapa, organizamos os dados nas seguintes tabelas:

- Na tabela ao lado, o número de filhos foi dividido em sete **categorias** distintas: nenhum filho, um filho, dois, três, quatro, cinco e seis filhos. A quantidade de elementos que pertencem a determinada categoria é chamada de **frequência** da categoria.

Quantidade de famílias do município Alfa de acordo com o número de filhos

Número de filhos	Número de famílias (frequência)
0	12
1	16
2	28
3	13
4	7
5	3
6	1

Dados fictícios.

- Na tabela abaixo, os dados foram agrupados em classes (ou intervalos) de valores. A diferença entre o maior e o menor extremo de uma classe, nessa ordem, é chamada de **amplitude** da classe. No exemplo, a amplitude da classe [140; 150[é 10, pois $150 - 140 = 10$.

Quantidade de alunos do 9º ano do colégio Beta de acordo com a medida da altura

Medida da altura, em centímetro (classe)	Número de alunos (frequência)
[140; 150[	2
[150; 160[	6
[160; 170[	14
[170; 180[	10
[180; 190]	3

Dados obtidos pela professora.

Diga aos alunos que as classes também podem ser representadas de outros dois modos, que já foram apresentados no capítulo 9 do volume 8:
- $140 \leqslant x < 150$
- $140 \vdash\!\!\!— 150$

É importante que eles conheçam e saibam interpretar as diferentes representações.

LÉO FANELLI

Observe que nas quatro primeiras classes consideradas nesse exemplo, os intervalos não incluem os números situados no extremo à direita de cada classe. Por isso, dizemos que os intervalos são fechados à esquerda ([ ) e abertos à direita ([ ), exceto a última classe, que é fechada à direita (]).

- Na tabela ao lado, os tipos de medalhas foram divididos em três categorias: ouro, prata e bronze.

Número de medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Pan-Americanos até 2011

Tipo de medalha	Número de medalhas (frequência)
Ouro	287
Prata	318
Bronze	459
Total	**1 064**

Dados obtidos em: <http://timebrasil.cob.org.br/brasil-nos-jogos/jogos-pan-americanos>. Acesso em: 29 maio 2015.

- O saldo da balança comercial de cada mês é dado pela diferença entre o valor de exportação e o de importação.

Saldo da balança comercial do Brasil no terceiro trimestre de 2014 (em dólar)			
Mês	**Julho**	**Agosto**	**Setembro**
Saldo	1 571 738 229	1 162 027 476	−940 005 061

Dados obtidos em: <http://www.desenvolvimento.gov.br/portalmdic/sitio/interna/interna.php?area=5&menu=4839&refr=1161>. Acesso em: 11 jun. 2015.

Observe que, no mês de setembro, como o valor gasto com a importação foi maior que o arrecadado com a exportação, o saldo é negativo em 940 005 061 dólares.

O saldo da balança comercial do terceiro trimestre de 2014 será dado pela soma dos saldos correspondentes aos meses de julho, agosto e setembro:

$$1\,571\,738\,229 + 1\,162\,027\,476 + (-940\,005\,061) = 1\,793\,760\,644$$

Assim, o saldo da balança comercial do terceiro trimestre de 2014 é 1 793 760 644 dólares.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Uma indústria produz 30 000 parafusos diariamente. Para efetuar um processo de controle de qualidade sobre a produção, de cada 100 parafusos, um vai para análise, que determina se o parafuso é perfeito ou defeituoso.

Considerando a população os 30 000 parafusos produzidos diariamente nessa indústria, qual é o tamanho da amostra que foi utilizada para a análise? 300 parafusos

INGVAR BJORK/SHUTTERSTOCK

2 Um professor de Matemática registrou as 35 notas dos seus alunos no quadro abaixo. Organize, no caderno, uma tabela com esses dados, especificando as notas e as frequências.

8	7	6	7	3	5	4	8	3
6	6	10	7	7	5	6	9	4
4	5	4	9	8	9	10	9	7
9	3	8	10	6	8	7	5	

Nota	Número de alunos (frequência)
3	3
4	4
5	4
6	5
7	6
8	5
9	5
10	3

Dados obtidos pelo professor.

3 Foi feito um levantamento de dados sobre a idade (em anos completos) dos funcionários de uma fábrica. Observe:

De 18 a 20 anos	De 21 a 23 anos	De 24 a 26 anos	De 27 a 29 anos	De 30 a 32 anos
284 funcionários	316 funcionários	420 funcionários	304 funcionários	160 funcionários

LÉO FANELLI

Organize, no caderno, uma tabela com esses dados, especificando as classes e as frequências.

3.

Idade (classe)	Número de funcionários (frequência)
[18; 21[	284
[21; 24[	316
[24; 27[	420
[27; 30[	304
[30; 32]	160

Dados obtidos pelo gerente da fábrica.

DIOGO SAITO

UM POUCO DE HISTÓRIA

A Ciência Estatística, ou simplesmente Estatística, tem origem muito antiga. Os primeiros relatos datam de 2000 a.C. e tratam do recenseamento de populações agrícolas chinesas.

Posteriormente, na época do imperador Augusto, foram feitas pesquisas para mensurar as riquezas do Império Romano: número de soldados, de armas, de navios, de cavalos etc.

A palavra **estatística** – em referência a obtenção, estudo e interpretação de dados – foi utilizada pela primeira vez por volta do século XVIII, na Alemanha.

Seu nome está ligado ao interesse que os assuntos do Estado despertavam.

LÉO FANELLI

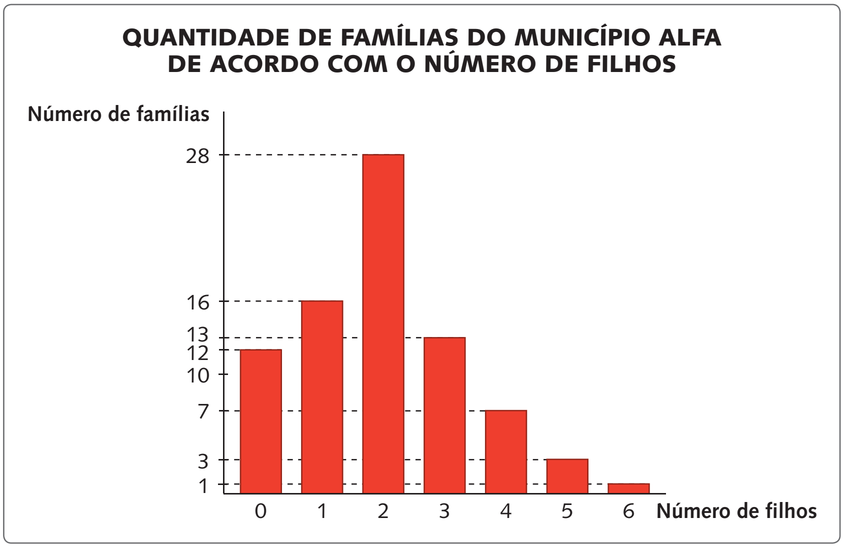
2 Construção de gráficos

Como vimos, as tabelas permitem que a informação, já classificada e organizada, seja facilmente visualizada. Essa comunicação também é favorecida quando os dados são apresentados por meio de **gráficos**. O gráfico de barras (horizontais ou verticais), por exemplo, transmite de forma clara e direta a evolução de um fenômeno.

Gráfico de barras verticais e gráfico de barras horizontais

O gráfico de barras verticais é representado em um plano com retângulos, todos de mesma base. A base dos retângulos situa-se no eixo horizontal e as alturas são proporcionais aos valores da variável representada no eixo vertical.

Gráfico de barras verticais

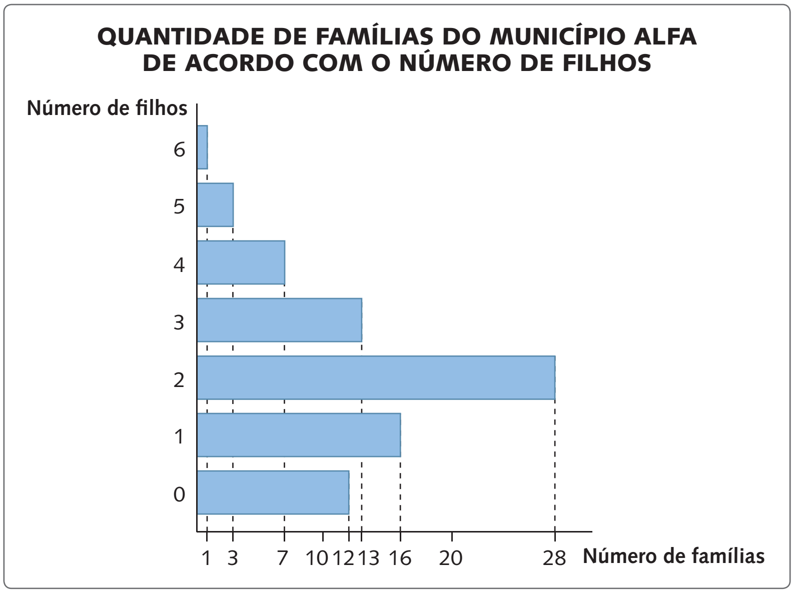


Dados fictícios.

LUIZ RUBIO

O gráfico de barras horizontais é representado em um plano também com retângulos, todos de mesma base. A base dos retângulos situa-se no eixo vertical e os comprimentos são proporcionais aos valores da variável representada no eixo horizontal.

Gráfico de barras horizontais



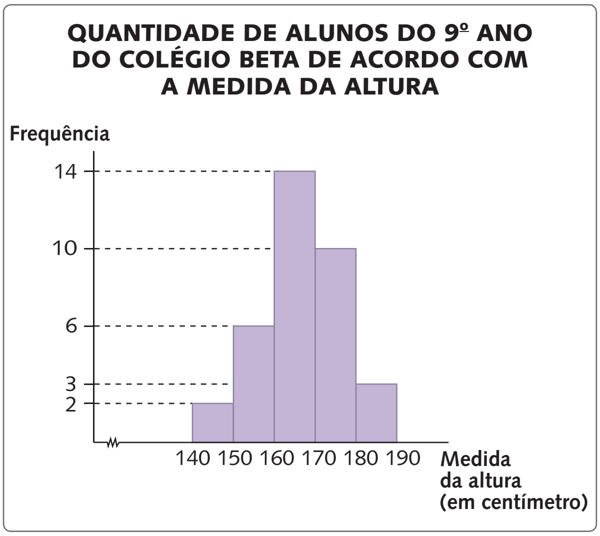
Dados fictícios.

Histograma de frequência e polígono de frequências

O **histograma** é um gráfico utilizado para representar uma distribuição de frequências em que as classes são representadas por intervalos de mesma amplitude. Na elaboração de um histograma, constroem-se retângulos cujas bases coincidem com as classes, e a medida da altura de cada retângulo representa a frequência da classe correspondente.

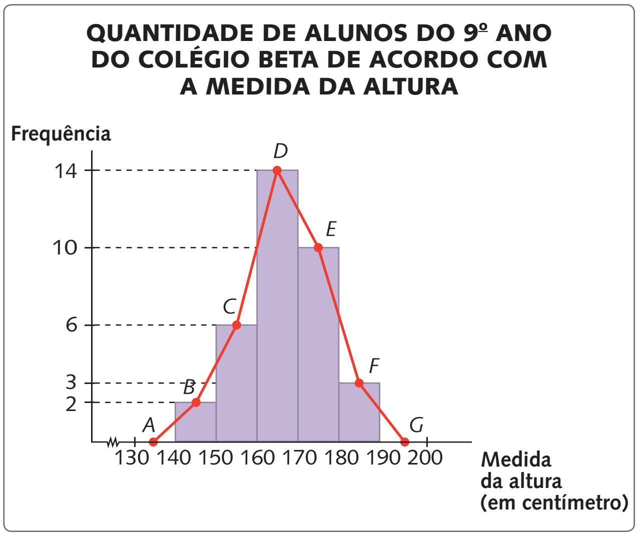
Com base em um histograma, é possível construir um **polígono de frequências**.

Histograma de frequência



Dados obtidos pela professora.

Polígono de frequências

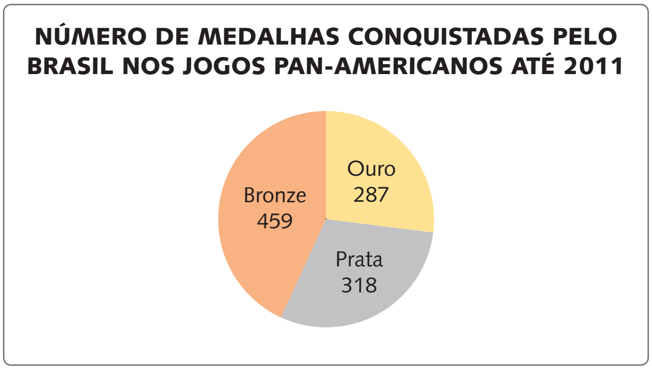


Dados obtidos pela professora.

Observe que o polígono de frequências é determinado unindo-se os pontos médios da parte superior de cada retângulo e prolongando-se a linha até os pontos *A* e *G*, no eixo horizontal. Para obter os pontos *A* e *G*, vértices da base do polígono, devemos considerar que existem mais duas classes com a mesma amplitude das restantes cujo total de aluno é zero.

GRÁFICOS: GUILHERME CASAGRANDI

Gráfico de setores



GUILHERME CASAGRANDI

Dados obtidos em: <http://timebrasil.cob.org.br/brasil-nos-jogos/jogos-pan-americanos>. Acesso em: 29 maio 2015.

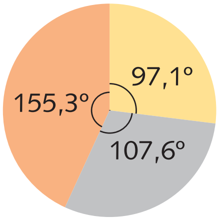
DANIEL OCHOA DE OLZA/AP PHOTO/GLOW IMAGES

O Brasil conquistou a medalha de ouro no vôlei feminino em Guadalajara (México), em 2011, sagrando-se campeão invicto dos Jogos Pan-Americanos.

Na construção de um gráfico de setores, dividimos um círculo em setores, com ângulos de medidas proporcionais às frequências das classes. Neste exemplo, dividimos 360° em partes proporcionais às frequências 287, 318 e 459, que correspondem ao número de cada tipo de medalha.

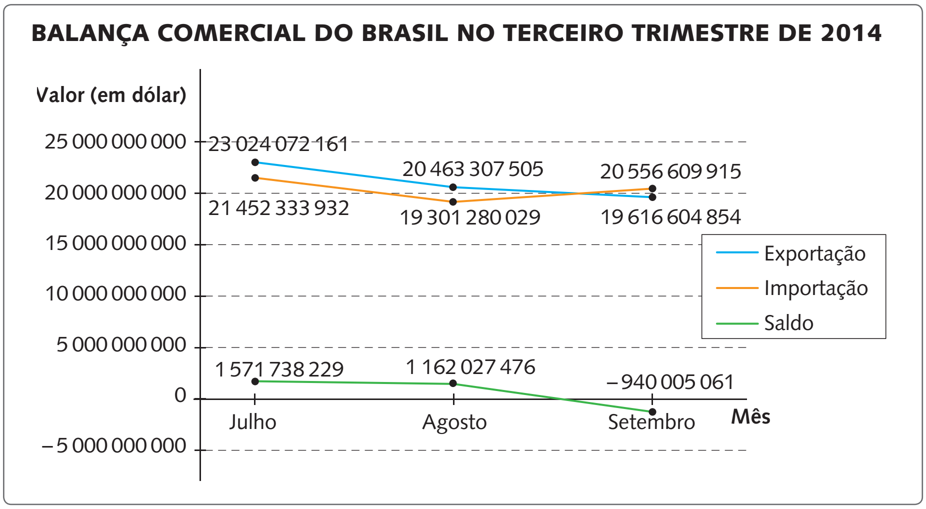
Assim, o ângulo correspondente a cada frequência é:

- medalhas de ouro $\longrightarrow \dfrac{287}{1064} \cdot 360° \simeq 97{,}1°$
- medalhas de prata $\longrightarrow \dfrac{318}{1064} \cdot 360° \simeq 107{,}6°$
- medalhas de bronze $\longrightarrow \dfrac{459}{1064} \cdot 360° \simeq 155{,}3°$



GUILHERME CASAGRANDI

Gráfico de segmentos



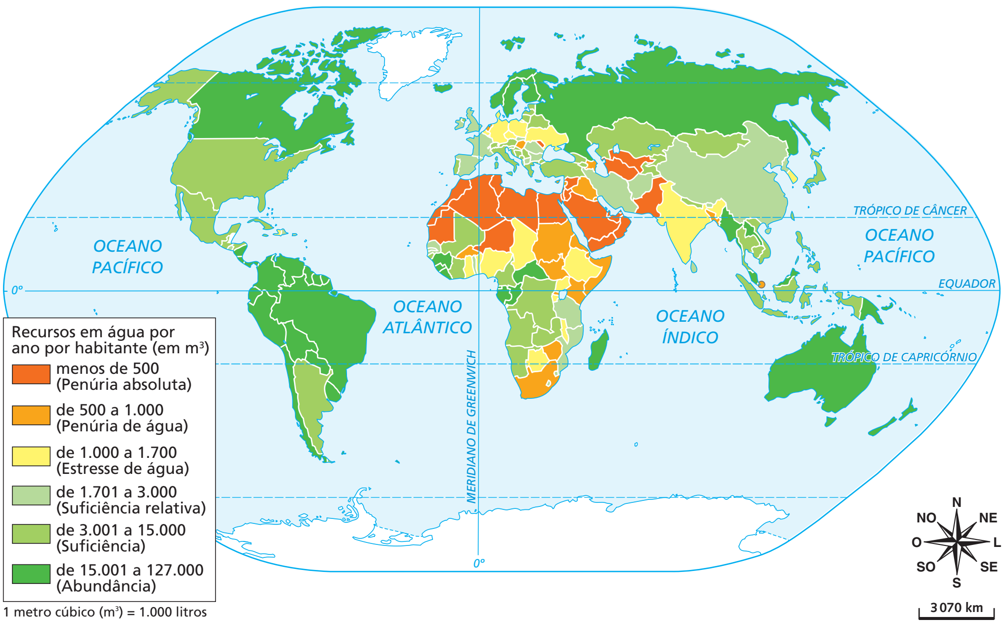
LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: <http://www.desenvolvimento.gov.br/portalmdic/sitio/interna/interna.php?area=5&menu=4839&refr=1161>. Acesso em: 11 jun. 2015.

O gráfico de segmentos é utilizado principalmente para mostrar crescimento, decrescimento ou estabilidade ao longo do tempo. No gráfico acima, marcamos, a cada mês, os pontos correspondentes aos valores de exportação, importação e saldo. Em seguida, esses pontos são ligados por segmentos, determinando a linha correspondente a cada variável.

Cartograma

DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA DOCE NO MUNDO EM 2012

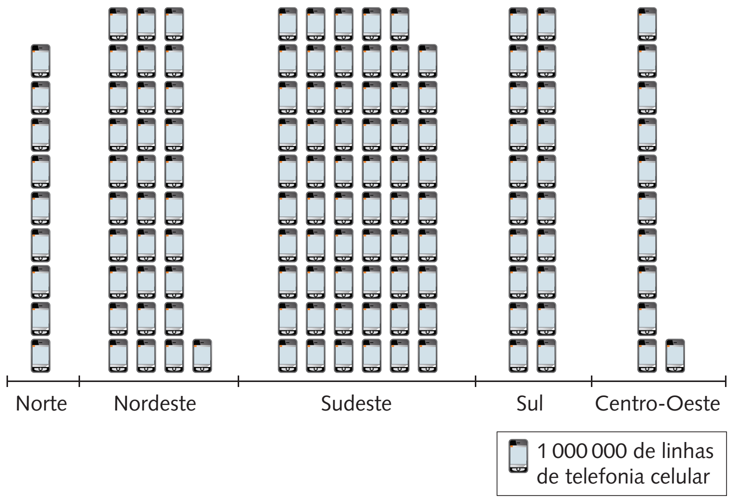


Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas Geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 27.

Cartograma é o mapa ou o quadro em que, por meio de pontos, figuras e linhas, previamente convencionados, se representam a área de ocorrência, a importância, a movimentação e a evolução de um fenômeno.

Pictograma

NÚMERO DE LINHAS DE TELEFONIA CELULAR PARA USO PESSOAL EM 2013, POR REGIÕES BRASILEIRAS



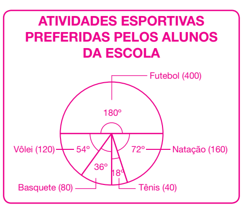
Dados obtidos em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/trabalhoerendimento/pnad2013/sintese_defaultxls.shtm>. Acesso em: 29 maio 2015.

Pictograma é uma forma de representação gráfica em que se utilizam figuras relacionadas ao assunto em estudo para representar quantidades.

Infográfico

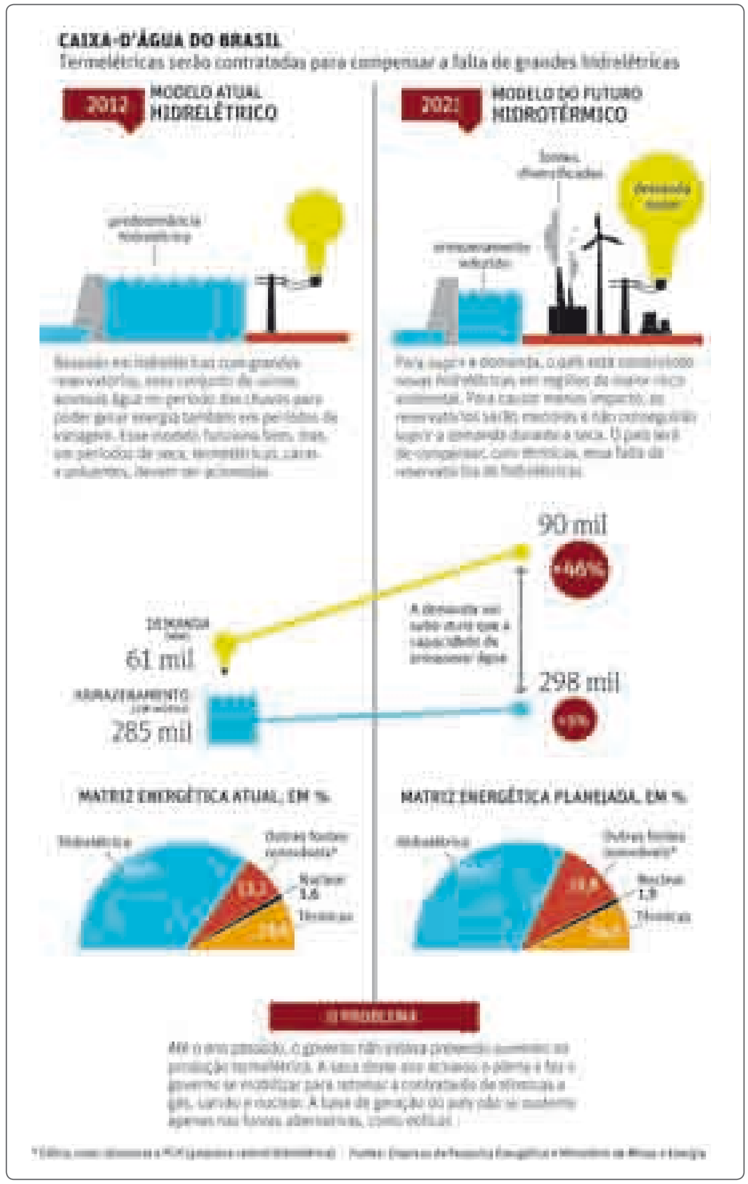
Os infográficos são usados para apresentar informações de forma mais dinâmica, utilizando gráficos, textos, ilustrações, fotos, mapas etc. São encontrados com frequência em jornais, revistas, internet e em manuais técnicos, educativos ou científicos.

Veja ao lado um infográfico sobre a produção de energia elétrica no Brasil no ano de 2012 e a projeção para o ano de 2021.

4. 

LUIZ RUBIO

Dados obtidos pelos professores.

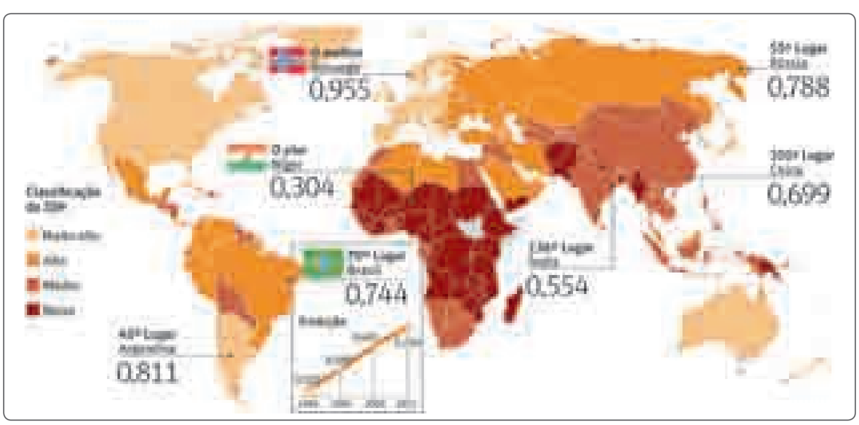


EDITORIA DE ARTE/FOLHAPRESS

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 12 fev. 2013, Primeiro Caderno A8.

Veja mais um exemplo. O infográfico abaixo traz informações sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), em 2012, no Brasil e em outros países.

FOLHAPRESS



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 15 mar. 2013, Primeiro Caderno A8.

O que é Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)?
É um índice calculado pelo Pnud (um programa ligado à ONU) que tenta medir o nível de desenvolvimento humano em vários países.

Como é calculado?
Considerando três quesitos (saúde, educação e renda), o índice dá notas de 0 a 1 aos países. Quanto mais perto do 1, maior é o nível de desenvolvimento do local.

Faça as atividades no caderno.

1 O quadro abaixo relaciona alguns países segundo o número de turistas estrangeiros que os visitaram em 2012 e aponta a receita decorrente dessas viagens.

Turismo internacional		
País		
França	83,0	53,6
Estados Unidos	66,7	126,2
China	57,7	50,0
Espanha	57,5	56,3
Itália	46,4	41,2

 Número de turistas estrangeiros (em milhões de pessoas)

 Receita gerada (em bilhões de dólares)

Dados obtidos em: <http://www.dadosefatos.turismo.gov.br/export/sites/default/dadosefatos/estatisticas_indicadores/downloads_estatisticas/OMT__Turismo_highlights_2014_sp.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

Construção de gráficos.

a) Construa um gráfico de barras verticais, relacionando os países e o número de turistas estrangeiros que os visitaram no ano de 2012.

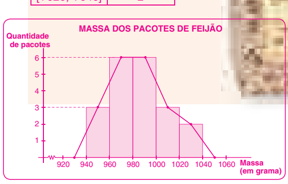
b) Construa um gráfico de barras horizontais, relacionando os países e a receita gerada com o turismo estrangeiro no ano de 2012.

2 Em uma amostra de pacotes de feijão foram constatadas estas massas, em grama: 964, 1 008, 945, 990, 998, 964, 978, 1 036, 994, 958, 1 010, 960, 975, 982, 996, 1 020, 955, 976, 998, 1 016. Construa uma tabela de distribuição de frequências dessa amostra, com cinco classes. Em seguida, construa um histograma e um polígono de frequências.

NIGEL CATTLIN/ALAMY/GLOW IMAGES

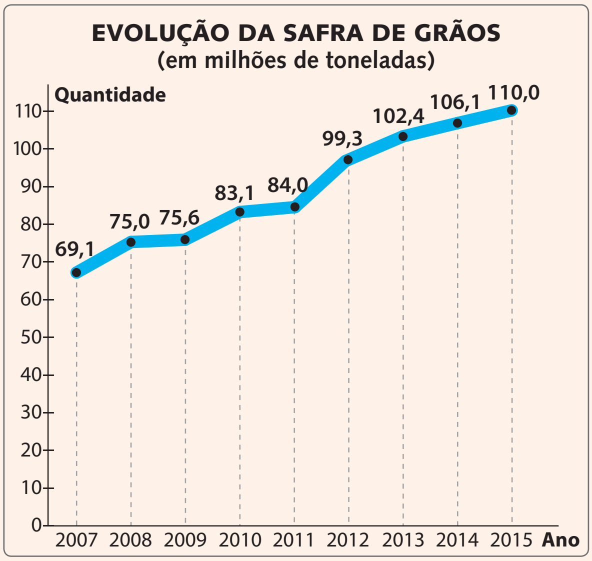
2. Exemplo de tabela de distribuição, histograma e polígono de frequências:

Massa, em grama (classe)	Quantidade de pacotes (frequência)
[940; 960[	3
[960; 980[	6
[980; 1 000[	6
[1 000; 1 020[	3
[1 020; 1 040]	2



LUIZ RUBIO

3 O gráfico abaixo mostra a safra de grãos, em milhões de toneladas, no período de 2007 a 2015, em determinada região.



LUIZ RUBIO

Dados obtidos pelos agricultores.

Responda às questões.

a) Que tipo de gráfico é esse? gráfico de segmentos

b) Quantos milhões de toneladas de grãos foram produzidos em 2011? 84

c) A safra de 2015 foi quanto por cento superior à safra de 2008? 46,66%

4 Foi feita uma pesquisa com 800 alunos de uma escola sobre a atividade esportiva de sua preferência. Observe o resultado obtido:

Atividades esportivas preferidas pelos alunos da escola	
Atividade esportiva	Número de alunos
Futebol	400
Vôlei	120
Basquete	80
Tênis	40
Natação	160

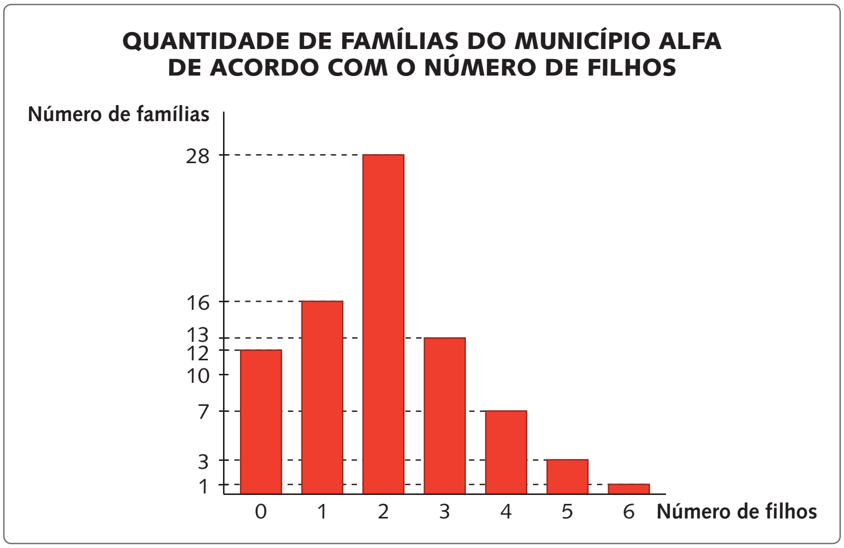
Dados obtidos pelos professores.

Construa um gráfico de setores que represente os dados organizados na tabela acima. Resposta na página anterior.

3 Determinação de parâmetros

Os parâmetros estatísticos **média**, **mediana** e **moda**, que você vai estudar a seguir, servem para sintetizar a informação dada por uma tabela ou um gráfico e indicar a tendência de uma pesquisa estatística.

No exemplo da pesquisa sobre o número de filhos das famílias do município Alfa, construímos o seguinte gráfico:



Dados fictícios.

LUIZ RUBIO

Agora, vamos determinar um parâmetro que represente o número de filhos de uma família do município Alfa.

Média aritmética

A **média aritmética simples** dos números x_1, x_2, x_3, ... x_n, que se indica por $\bar{x}$, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

JUNIAL ENTERPRISES/SHUTTERSTOCK

No exemplo acima, temos:

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{0 + 0 + \ldots + 0}^{12\text{ vezes}} + \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{16\text{ vezes}} + \overbrace{2 + 2 + \ldots + 2}^{28\text{ vezes}} + \overbrace{3 + 3 + \ldots + 3}^{13\text{ vezes}} + \overbrace{4 + 4 + \ldots + 4}^{7\text{ vezes}} + \overbrace{5 + 5 + 5}^{3\text{ vezes}} + \overbrace{6}^{1\text{ vez}}}{\underbrace{80}_{12 + 16 + 28 + 13 + 7 + 3 + 1}}$$

$$\bar{x} = \frac{160}{80} = 2$$

Portanto, a média de filhos dessas famílias é de 2 filhos; desse modo, dizemos que as famílias do município Alfa possuem, em média, 2 filhos.

Observando o gráfico da página anterior, verificamos que o zero (0) aparece 12 vezes, o um (1) aparece 16 vezes, o dois (2) aparece 28 vezes, o três (3) aparece 13 vezes, o quatro (4) aparece sete vezes, o cinco (5) aparece três vezes e o seis (6) aparece apenas uma vez.

Como os números se repetem, podemos utilizar a **média aritmética ponderada**.

A média aritmética ponderada facilita o cálculo de médias quando há valores que se repetem.

Para obtê-la:

- multiplicamos os valores pela frequência (peso) em que eles ocorrem;
- dividimos a soma desses produtos pela soma das frequências (pesos).

Observe o cálculo da média aritmética ponderada dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, em que x_1 repete p_1 vezes, x_2 repete p_2 vezes, x_3 repete p_3 vezes etc.

$$\bar{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Retomando o exemplo, temos:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot \overbrace{12}^{\text{frequência do 0}} + 1 \cdot \overbrace{16}^{\text{frequência do 1}} + 2 \cdot \overbrace{28}^{\text{frequência do 2}} + 3 \cdot \overbrace{13}^{\text{frequência do 3}} + 4 \cdot \overbrace{7}^{\text{frequência do 4}} + 5 \cdot \overbrace{3}^{\text{frequência do 5}} + 6 \cdot \overbrace{1}^{\text{frequência do 6}}}{\underbrace{12 + 16 + 28 + 13 + 7 + 3 + 1}_{\text{soma das frequências}}} = \frac{160}{80} = 2$$

Assim, a média aritmética ponderada do número de filhos que as famílias pesquisadas possuem é 2.

Portanto, **2** é um parâmetro estatístico que pode representar essa distribuição.

Conhecer apenas a média aritmética nem sempre é suficiente para entender o comportamento de uma pesquisa. Por isso, a seguir vamos estudar outros dois parâmetros estatísticos importantes: a mediana e a moda.

Mediana

Mediana é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de valores, colocados em ordem crescente ou decrescente de grandeza.

Se a distribuição tiver número ímpar de dados, haverá um valor central, e este será a mediana.

Se a distribuição tiver número par de dados, não haverá um, mas dois valores centrais. Nesse caso, tomaremos como mediana a média aritmética desses dois valores centrais.

No exemplo da pesquisa sobre número de filhos de famílias do município Alfa, temos esta sequência de números:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ← 12 números zero

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ← 16 números 1

valores centrais

2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, **2, 2**, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 ← 28 números 2

3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 ← 13 números 3

4, 4, 4, 4, 4, 4, 4 ← 7 números 4

5, 5, 5 ← 3 números 5

6 ← 1 número 6

Como a distribuição tem um número par de dados (80), determinamos a média aritmética dos dois valores centrais. Assim:

$$Md = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Portanto, a mediana dessa distribuição é 2; com isso, podemos dizer que 50% dessas famílias têm 2 filhos ou menos e que 50% dessas famílias têm 2 filhos ou mais.

Moda

Moda é o valor que aparece um maior número de vezes em um conjunto de dados, ou seja, a moda é o valor de maior frequência absoluta.

No exemplo acima, temos:

- a frequência do número 0 é 12;
- a frequência do número 1 é 16;
- a frequência do número 2 é 28;
- a frequência do número 3 é 13;
- a frequência do número 4 é 7;
- a frequência do número 5 é 3;
- a frequência do número 6 é 1.

Nesse caso, a moda é 2, pois esse número aparece com maior frequência na pesquisa (28 vezes). Com essa informação, podemos dizer que as famílias que têm dois filhos ocorrem com maior frequência.

Observações

1 Nessa pesquisa, do exemplo, coincidentemente, a média aritmética, a mediana e a moda apresentam o mesmo valor: 2. Mas nem sempre isso ocorre.

2 Ao contrário da média ou da mediana, a moda não é necessariamente única. Podemos ter uma sequência de dados com duas modas (bimodal), sem nenhuma moda (amodal) ou com mais de dois valores modais (multimodal).

Vamos agora considerar o exemplo da pesquisa sobre a medida da altura, em centímetro, dos alunos do 9º ano da escola Beta. Lembre que a amostra dessa pesquisa é formada por 35 alunos das diferentes turmas do 9º ano desse colégio, conforme vimos na página 111.

171	159	185	170	169	174	175	180	158
160	150	168	167	174	163	158	165	168
176	176	165	142	175	172	161	169	165
154	164	156	162	179	160	149	188	

GUILHERME CASAGRANDI

- **Média aritmética**

A média aritmética corresponde ao quociente entre a soma de todas as medidas das alturas e o número de alunos pesquisados.

Assim:

$$\overline{x} = \frac{5\,827}{35} = 166{,}486$$

Portanto a medida 166,49 cm corresponde à altura média dos alunos pesquisados. Observe que nos extremos temos um aluno medindo 142 cm e outro medindo 188 cm; com isso, podemos concluir que um dos alunos está cerca de 24,5 cm abaixo da média e outro está cerca de 21,5 cm acima da média.


RYFLIP/SHUTTERSTOCK

- **Mediana**

Inicialmente colocamos as medidas das alturas em ordem crescente. Observe:

142	149	150	154	156	158	158	159	160	160
161	162	163	164	165	165	165	167	168	168
169	169	170	171	172	174	174	175	175	176
176	179	180	185	188					

GUILHERME CASAGRANDI

Como a distribuição tem um número ímpar de dados (35), a mediana corresponde ao termo central, ou seja, o número 167.

Logo, a medida 167 cm é a mediana da distribuição e, assim, podemos concluir que metade dos alunos da turma tem 167 cm ou menos de altura e a outra metade tem 167 cm ou mais de altura.

- **Moda**

A medida da altura que aparece o maior número de vezes (três vezes) é 165 cm.

Assim, a moda da distribuição é 165 cm.

Portanto, para essa distribuição, a média aritmética é 166,49 cm, a mediana é 167 cm e a moda é 165 cm.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Veja a seguir o número de visitantes, em um parque, nos 31 dias do mês de julho.

176	160	54	62
61	88	95	160
68	76	88	117
78	63	108	99
85	110	88	107
120	156	142	100
80	116	65	94
95	82	76	

LUIZ RUBIO

a) Calcule a média aritmética, a mediana e a moda dessa distribuição. média aritmética: 99; mediana: 94; moda: 88

b) Na sua opinião, qual dessas medidas é mais significativa para o parque avaliar o número de visitantes no mês de julho? Justifique. Resposta pessoal.

c) Em quantos dias o público presente no parque foi acima da média? 12 dias

2 Uma instituição que atende crianças carentes cadastrou 50 crianças para receberem roupas como doação. Veja na tabela a seguir os tamanhos das roupas e a quantidade de crianças.

Quantidade de crianças por tamanho de roupa	
Tamanho da roupa	**Quantidade de crianças**
8	9
10	14
12	12
14	7
16	8

Dados obtidos pela instituição de caridade.

a) Calcule a moda e a mediana desses dados. mediana: 12; moda: 10

b) O que cada uma dessas medidas representa nessa situação? Converse com o professor e os colegas.
Espera-se que os alunos percebam que nesse caso a mediana indica que metade das crianças usa roupa de tamanho menor ou igual a 12 e que a maioria das crianças usa roupa de tamanho 10.

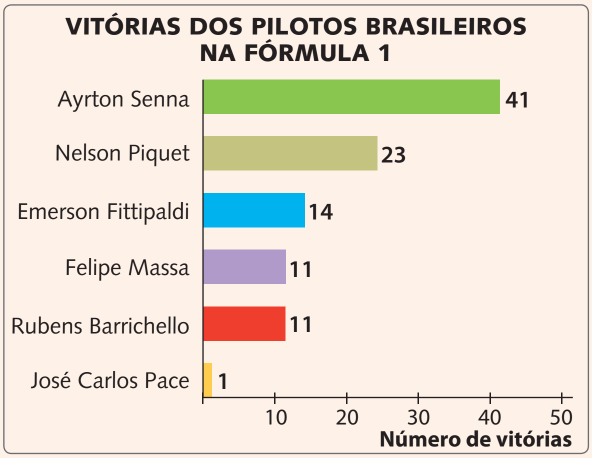
3 A distribuição dos salários de uma empresa está representada na tabela abaixo.

Distribuição dos salários da empresa	
Salário	**Número de funcionários**
R$ 800,00	22
R$ 900,00	9
R$ 1 000,00	8
R$ 1 050,00	8
R$ 1 100,00	7
R$ 1 300,00	6
R$ 2 300,00	4
R$ 5 220,00	1

Dados obtidos pelo departamento pessoal da empresa.

Qual é o salário médio dos funcionários dessa empresa? E qual é a moda dos salários dessa empresa?
salário médio: R$ 1 108,00; moda: R$ 800,00

4 O gráfico de barras abaixo mostra o número de vitórias dos brasileiros que venceram Grandes Prêmios na Fórmula 1 até abril de 2015.



GUILHERME CASAGRANDI

Dados obtidos em: <http://www.lancenet.com.br/10xmais/pilotos-brasileiros-corridas-F1_0_1319268121.html>. Acesso em: 15 abr. 2015.

a) Qual é o brasileiro com maior número de vitórias na Fórmula 1? Ayrton Senna

b) Podemos afirmar que Ayrton Senna obteve mais de 40% das vitórias dos seis grandes pilotos brasileiros?

Sim, Ayrton Senna obteve 40,59% do total de vitórias dos brasileiros.

4 Probabilidade

Antes de retomar o conceito de probabilidade, vamos revisar: experimento aleatório, espaço amostral e evento de um experimento aleatório.

Experimento aleatório

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório**.

Exemplos

- Lançamento de uma ou mais moedas.
- Lançamento de um ou mais dados.
- Sorteio de um brinde promocional de uma empresa.

Espaço amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** (*S*) desse experimento.

Exemplo

Em dois lançamentos sucessivos de uma moeda, temos como espaço amostral:
$S = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$

Evento de um experimento aleatório

Qualquer conjunto de resultados possíveis do espaço amostral de um experimento aleatório é chamado de **evento**.

Exemplo

No caso do lançamento de uma moeda duas vezes sucessivamente, o espaço amostral é $S = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$.

Um exemplo de evento desse espaço amostral é:
$E = \{(\text{cara, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$

Probabilidade

Na retirada de uma bola de uma urna giratória com 100 unidades numeradas de 1 a 100, temos um experimento aleatório com espaço amostral $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Cada bola tem a mesma chance de ser retirada, ou seja, cada elemento do espaço amostral *S* tem a mesma chance de ocorrer. Logo, chamamos o espaço amostral desse evento de **espaço amostral equiprovável**.


CJGPHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Seja *E* o evento de um experimento aleatório com espaço amostral equiprovável *S*. Para determinar a medida da chance da ocorrência desse evento, calculamos a sua **probabilidade**.

A probabilidade de um evento E ocorrer, sendo S um espaço amostral equiprovável, é uma razão dada por:

número de elementos de E

probabilidade do evento E

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

número de elementos de S

A probabilidade é a medida da chance de ocorrência de um evento.

Essa medida pode assumir um valor de 0 a 1:

$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$

- Se E é um evento impossível, então: $P(E) = 0$
- Se E é um evento certo, então: $P(E) = 1$

Exemplos

- Um globo giratório contém 100 bolas numeradas de 1 a 100. Retirando, aleatoriamente, uma bola desse globo, qual é a probabilidade de obter um número par?

  O espaço amostral S é: $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

  O evento E desejado é: $E = \{2, 4, 6, 8, ..., 100\}$

  Logo:

  $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ ou $P(E) = 50\%$

- Um globo giratório contém 80 bolas numeradas de 1 a 80. Retirando, aleatoriamente, uma bola desse globo, qual é a probabilidade de obter um número maior que 50?

  O espaço amostral S é: $S = \{1, 2, 3, ..., 80\}$

  O evento E desejado é: $E = \{51, 52, 53, ..., 80\}$

  Logo:

  $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{30}{80} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$ ou $P(E) = 37{,}5\%$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de obter a face coroa? 50%

2 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 5?

3 Na rifa de um *tablet* foram vendidas 200 cartelas numeradas de 1 a 200. Ana comprou as cartelas de números 78, 79, 80, 81, 82 e 83. Sabendo que todos os números têm a mesma probabilidade de serem sorteados, qual é a probabilidade de Ana ser sorteada? $\frac{3}{100}$ ou 3%

4 Dois dados de cores diferentes são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima a soma dos pontos:

a) igual a 7? $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$

b) maior que 10? $\frac{3}{36}$ ou $\frac{1}{12}$

c) maior que 15? 0%

d) menor ou igual a 12? 100%

2. $\frac{2}{3}$. Nesse caso, podemos representar a probabilidade na forma fracionária para evitar a representação na forma de dízima periódica.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Neste capítulo estudamos algumas etapas de uma pesquisa estatística. Quais foram elas?
Definição dos objetivos da pesquisa, seleção das variáveis que serão analisadas, coleta de dados e organização e agrupamento dos dados.

2 Que formas de apresentação de dados você conhece? Na sua opinião, qual é a mais eficiente?
Exemplo de resposta: tabelas e gráficos. Resposta pessoal: espera-se que os alunos percebam que a eficiência dependerá dos dados coletados.

3 Existem diversos tipos de gráficos, porém cada modelo é indicado para um certo conjunto de dados. Que tipo de gráfico você utilizaria para representar dados referentes às partes de um todo? Justifique sua resposta. Exemplo de resposta: um gráfico de setores, pois facilita a identificação da divisão do todo.

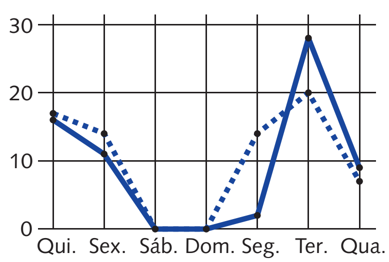
4 A média aritmética é um parâmetro estatístico muito utilizado. Porém, nem sempre é a melhor medida para uma série de dados. Imagine uma empresa que possui 10 funcionários: 1 gerente e 9 auxiliares administrativos. O salário do gerente é de R$ 10 000,00 e o salário de cada auxiliar é de R$ 1 200,00. A média desses salários é a medida que melhor representa esse conjunto de dados? Não, pois o salário do gerente eleva a média, que ficou R$ 880,00 acima do salário dos auxiliares. Nesse caso, a moda seria a medida de tendência central que melhor representa os dados.

5 O lançamento de um dado é um evento com espaço amostral equiprovável? Explique.
Sim, pois cada face do dado tem a mesma chance de ficar voltada para cima, ou seja, cada elemento do espaço amostral *S* tem a mesma chance de ocorrer.

Aplicando

1 **(Enem)**

A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, e o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: <http://bibliotecaunix.org>. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na alternativa **b**

a) segunda e na terça-feira.
b) terça e na quarta-feira.
c) terça e na quinta-feira.
d) quinta-feira, no sábado e no domingo.
e) segunda, na quinta e na sexta-feira.

GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

2 Os alunos do 9º ano de um colégio obtiveram estas marcas em uma competição de salto em distância:

2,30	2,06	2,16	2,38	2,00	2,30	2,24	2,16

Determine a média, a mediana e a moda dessa distribuição. média: 2,20; mediana: 2,20; modas: 2,16 e 2,30

3 Observe, ao lado, o registro da área, em metro quadrado, de 20 lotes que compõem um condomínio residencial.

Construa, no caderno, uma tabela de distribuição de frequências desses dados com seis classes de mesma amplitude. Construa também o histograma e o polígono de frequências correspondentes.

540	790	650	620	760
500	780	688	590	740
745	800	545	650	720
528	570	648	636	690

4 Os dados abaixo representam a massa, em quilograma, dos atletas de uma equipe juvenil de basquete.

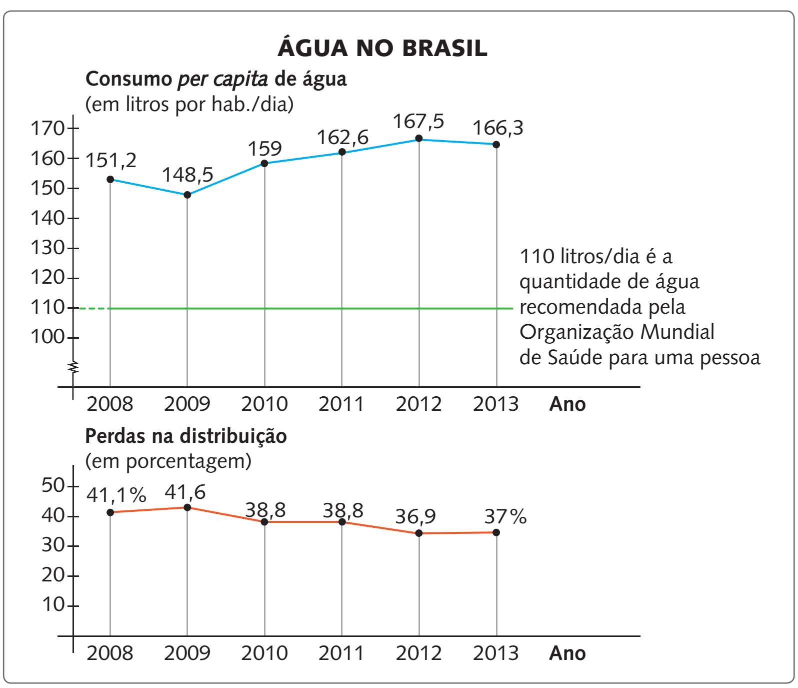
56 47 50 46 48 54 53 52 49 48 51 40

4. a) média aritmética: 49,5; mediana: 49,5; moda: 48

a) Determine a média aritmética, a mediana e a moda dessa distribuição.

b) Quantos alunos estão abaixo da média? 6 alunos

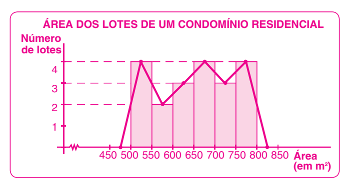
5 Observe o gráfico do consumo de água por habitante, no Brasil, nos anos de 2008 a 2013 e responda.



Dados obtidos em: *Folha de S. Paulo*, 21 jan. 2015, Cotidiano C1.

3.

Área dos lotes (classe)	Número de lotes (frequência)
[500; 550[	4
[550; 600[	2
[600; 650[	3
[650; 700[	4
[700; 750[	3
[750; 800]	4



LUIZ RUBIO

a) Qual é o acréscimo, em litro por habitante/dia, do consumo de água de 2012 em relação a 2008? O que isso significa? 16,3 litros por habitante/dia; isso significa que o consumo de água em 2012 aumentou em relação a 2008.

b) Podemos afirmar que o consumo de água, em litro por habitante/dia, de 2013 foi reduzido em que percentual em relação ao ano anterior? O consumo de água foi reduzido em, aproximadamente, 0,72% em relação ao ano anterior.

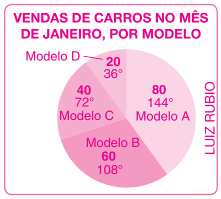
LÉO FANELLI

LUIZ RUBIO

Lembre-se:
Não escreva no livro!

6 Uma concessionária vendeu no mês de janeiro as seguintes quantidades de veículos:

Modelo A: 80 unidades
Modelo B: 60 unidades
Modelo C: 40 unidades
Modelo D: 20 unidades



GEORGE TUTUMI

Construa um gráfico de setores identificando os quatro modelos de veículo vendidos por essa concessionária.

7 **(Enem)** Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que ela acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é: alternativa **c**

a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.

b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

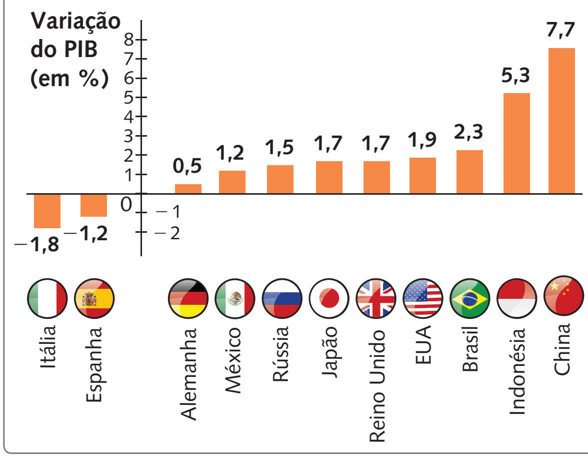
c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.

e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

8 O Produto Interno Bruto (PIB) é um dos principais indicadores de uma economia. Ele revela o valor de toda a riqueza gerada no país. Observe o gráfico abaixo.

VARIAÇÃO DO PIB EM DIFERENTES PAÍSES DE 2012 PARA 2013



GUILHERME CASAGRANDI

Dados obtidos em: <http://www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2014/02/brasil-e-um-dos-paises-que-mais-cresceram-no-mundo-em-2013-superando-eua-e-japao>. Acesso em: 29 maio 2015.

Agora, responda às questões.

a) Analisando o gráfico, explique por que alguns países tiveram a variação do PIB representada por um percentual positivo, e outros, por um percentual negativo.

b) Quais países apresentaram o PIB inferior ao do ano anterior? Itália e Espanha

c) Que país apresentou o maior crescimento do PIB? China

9 Em um curso de língua estrangeira, as idades dos alunos são:
16 anos, 20 anos, 22 anos, 18 anos, 17 anos, 15 anos, 18 anos, 19 anos e 21 anos.
Agora, responda:

a) Qual é a mediana dessas idades? 18 anos

b) Se nesse curso forem matriculados mais três alunos, com idades de 16 anos, 20 anos e 24 anos, qual será a nova mediana? 18,5 anos

8. a) O percentual positivo indica que o PIB de 2013 foi maior que o de 2012 e o percentual negativo indica que o PIB de 2013 foi menor que o de 2012.

10 **(Enem)** José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

alternativa **d**

11 As idades dos jogadores de um time de vôlei são: 18 anos, 21 anos, 19 anos, 23 anos, 25 anos e 20 anos. Qual é a média de idade desses jogadores? 21 anos

12 Pesquise qual é o time de futebol preferido pelos alunos de sua classe e, então, faça um gráfico estatístico com os dados coletados.

Construção de gráfico.

13 **(PUC-MG)** Em uma pesquisa eleitoral para verificar a posição de três candidatos a prefeito de uma cidade, 1 500 pessoas foram consultadas. Se o resultado da pesquisa deve ser mostrado em três setores circulares de um mesmo disco e certo candidato recebeu 350 intenções de voto, qual é o ângulo central correspondente a esse candidato?

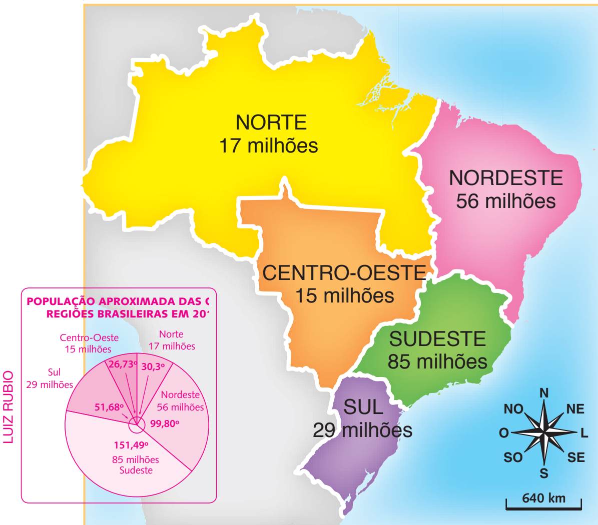
a) 42°　　c) 90°　　e) 84°

b) 168°　　d) 242°

alternativa **e**

14 Veja a população aproximada das cinco regiões brasileiras em 2013.

POPULAÇÃO BRASILEIRA – POR REGIÃO – 2013



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

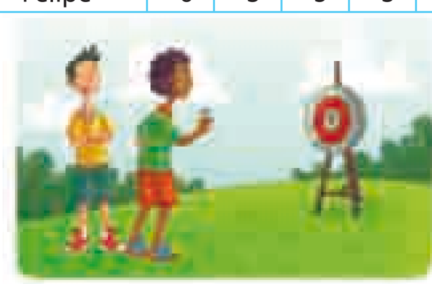
Fonte: IBGE. Disponível em: <http://7a12.ibge.gov.br/images/7a12/mapas/Brasil/brasil_grandes_regioes.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2015. Dados obtidos em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/trabalhoerendimento/pnad2013/default_sintese.shtm>. Acesso em: 29 maio 2015.

Construa um gráfico de setores que represente a população aproximada de cada região.

DESAFIO

Lucas e Felipe estavam brincando de tiro ao alvo. A cada jogada, marcavam seus pontos em um quadro. Depois de cada um atirar 20 vezes, o quadro de resultados ficou assim:

Atirador	Resultado				
	50	30	20	10	0
Lucas	4	6	5	4	1
Felipe	6	3	5	3	3



LÉO FANELLI

Qual é a média de pontos por tiro de cada um dos atiradores? Lucas: 26; Felipe: 26

Lembre-se:
Não escreva no livro!

15 **(Enem)** O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	**Doadores**	**Número de habitantes**	**Doadores/habitantes**
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são alternativa **b**

a) Norte, Centro-Oeste e Sul.
b) Norte, Nordeste e Sudeste.
c) Nordeste, Norte e Sul.
d) Nordeste, Sudeste e Sul.
e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

Diga aos alunos que as atividades 14 e 15 apresentam um mesmo dado: o número de habitantes em cada região brasileira. É importante que eles percebam que, na atividade 15, os dados são de 2010 e, na atividade 14, de 2013. É possível, a partir dessa análise, pedir que eles comparem os dados e os associem, por exemplo, determinando a região na qual a população mais aumentou nesse período.

16 Considere todos os alunos de sua classe. Supondo que a professora vai sortear, ao acaso, um aluno para fazer uma apresentação, responda:

a) Qual é a probabilidade de você ser o aluno sorteado?
b) Qual é a probabilidade de o aluno sorteado ser do sexo feminino?

As respostas dependerão do número de alunos da classe e do sexo dos alunos.

17 Em uma urna há 15 bolinhas vermelhas, 9 amarelas e 6 verdes. Ao sortear, ao acaso, uma dessas bolinhas, determine a probabilidade de a bolinha sorteada ser:

a) verde. 0,2 ou 20%
b) vermelha. 0,5 ou 50%
c) amarela. 0,3 ou 30%

18 Uma loja de sapatos femininos fez uma pesquisa para saber a quantidade de sapatos de cada tamanho que era vendida. A pessoa que organizou os dados dessa pesquisa determinou a moda e a mediana dos dados, encontrando a moda igual a 36 e a mediana igual a 37. Reúna-se com um colega e escrevam um texto explicando o significado desses dois dados. Depois, apresentem-no para os demais colegas da classe.

Espera-se que os alunos percebam que a moda ser igual a 36 significa que a maioria dos clientes dessa loja calça número 36, e, ao levar esse dado em consideração, os pares de sapatos número 36 devem ser comprados em maior quantidade para uma possível revenda. A mediana ser igual a 37 indica que 50% dos sapatos vendidos foram menores ou iguais a 37 e os outros 50% foram maiores ou iguais a 37. Comente com os alunos que, nesse caso, o cálculo do tamanho médio dos calçados vendidos não tem significado para a loja.

CAPÍTULO 6

SEGMENTOS PROPORCIONAIS E SEMELHANÇA

PICSFIVE/SHUTTERSTOCK

A onça-pintada, também conhecida por jaguarapinima e jaguaretê, é uma espécie de mamífero carnívoro da família *Felidae*, encontrada nas Américas. Maior felino brasileiro, a onça-pintada está ameaçada de extinção.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Observe as fotos e responda às questões:

- Que características comuns têm as fotos A, B e C? As fotos são iguais, mas suas medidas são diferentes.
- Qual é a razão entre as dimensões das fotos A e B, nessa ordem? E a razão entre as dimensões das fotos C e A, nessa ordem? $\frac{1}{2}$; 3

Neste capítulo, vamos trabalhar os conceitos de segmentos proporcionais e semelhança. Os alunos estudarão o teorema de Tales e suas diversas aplicações. As três fotografias da abertura podem ser utilizadas para introduzir o conceito de semelhança.

FOTOS: LUIZ CLÁUDIO MARIGO/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

A palavra **semelhante** vem do latim *similare*, que significa “parecer-se com”, “ter a mesma aparência que”.

Em duas figuras semelhantes, as medidas dos comprimentos correspondentes são proporcionais e todos os ângulos correspondentes têm medidas iguais.

É possível obter duas figuras semelhantes fazendo a ampliação ou a redução de uma figura original em uma malha quadriculada.

Explique aos alunos que a figura original pode ser desenhada na malha quadriculada ou, se preferir, o aluno pode desenhar uma malha quadriculada em um desenho qualquer para ampliá-lo ou reduzi-lo.

GUILHERME CASAGRANDI

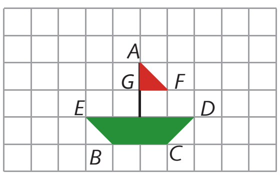
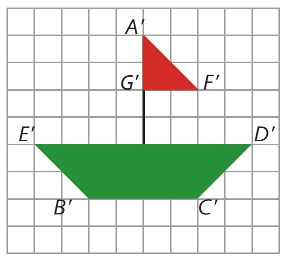
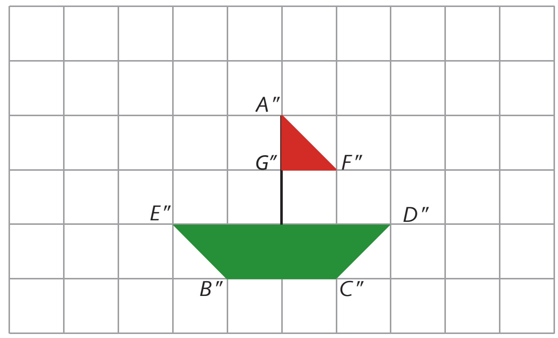


Figura original.

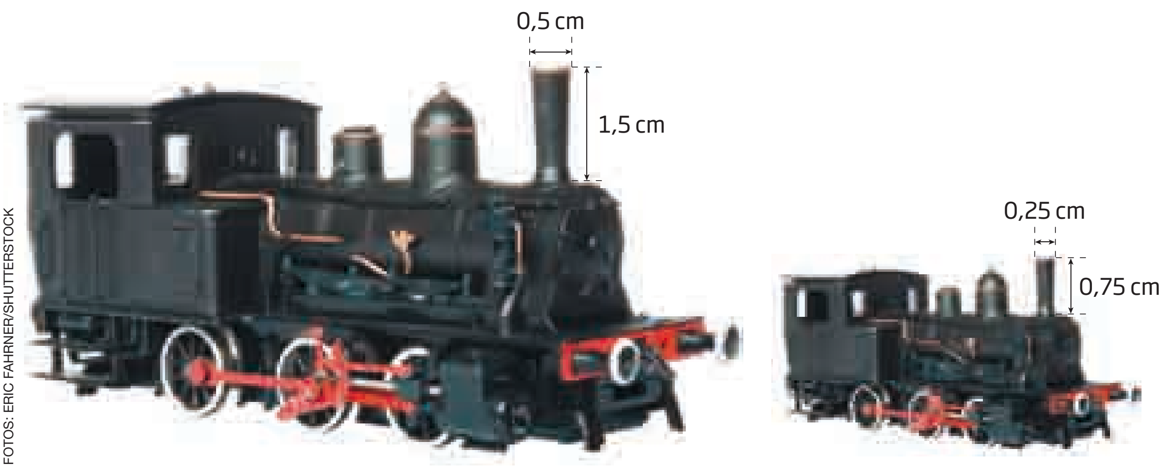


Ampliação da figura em 100%. Neste caso, cada segmento teve sua dimensão multiplicada por 2. Por exemplo: $A'G' = 2 \cdot AG$



Nova ampliação da figura em 100%. Neste caso, cada lado da malha quadriculada teve sua medida duplicada. Observe que, assim como na figura anterior, $A''G'' = 2 \cdot AG$.

As duas imagens abaixo, de tamanhos diferentes de um mesmo trem, são semelhantes.



FOTOS: ERIC FAHRNER/SHUTTERSTOCK

- Agora, copie a frase em seu caderno e complete-a.

  A imagem do trem menor corresponde a uma redução de ■% da imagem do trem maior. Nesse caso, todas as medidas de comprimento foram reduzidas à ■.

  50; metade

Neste capítulo, vamos estudar os conceitos de razão, proporção, semelhança e suas aplicações na Geometria.

1 Razão entre segmentos e segmentos proporcionais

Modelismo é a arte de reconstruir modelos de automóveis, aviões, trens, motos, navios etc. em miniatura.

Os modelos são semelhantes aos objetos reais, que foram reduzidos em escala predefinida.

Observe as miniaturas a seguir.

MINICHAMPS

Miniatura da McLaren M23 de Emerson Fittipaldi, bicampeão mundial da Fórmula 1 em 1974.

DOTTA

Miniatura do Supermarine Spitfire, caça britânico mais famoso que operou na Segunda Guerra Mundial.

Uma das escalas mais usadas pelos profissionais de modelismo é 1 : 12 (lemos: "um está para doze"), e corresponde à **razão** entre as dimensões do modelo construído e do objeto real. Essa razão indica que, se um comprimento do modelo mede a, então no objeto real, o comprimento correspondente mede $12a$.

Razão

A razão 1 : 12 citada acima, indica uma divisão, e pode ser representada por $\frac{1}{12}$. O quociente dessa divisão determina a razão entre os números 1 e 12.

De forma geral, podemos escrever:

> A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, é dada por $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Oriente os alunos que, para o cálculo da razão, eles devem seguir a ordem em que os dados foram fornecidos. Assim:
- A razão entre os números 2 e 3 é $\frac{2}{3}$.
- A razão entre os números 3 e 2 é $\frac{3}{2}$.

Exemplo

A razão entre os números 5 e 7 é $\frac{5}{7}$.

Lê-se: "cinco está para sete".

Proporção

Proporção é uma igualdade de duas razões.

Exemplo

Observe as igualdades a seguir.

$$\frac{18}{10} \overset{:2}{=} \frac{9}{5}$$

$$\frac{27}{15} \overset{:3}{=} \frac{9}{5}$$

$$\frac{18}{10} = \frac{27}{15}$$

Logo, as razões $\frac{18}{10}$ e $\frac{27}{15}$ formam uma proporção.

A proporção do exemplo acima também pode ser escrita assim:

$18 : 10 = 27 : 15$ ⟶ Lê-se: "dezoito está para dez assim como vinte e sete está para quinze".

Nessa proporção os números 18 e 15 são denominados **extremos** e os números 10 e 27 são denominados **meios**.

Observe que: $\underbrace{18 \cdot 15}_{\text{extremos}} = \underbrace{10 \cdot 27}_{\text{meios}} = 270$

Em toda proporção, podemos verificar a propriedade fundamental das proporções:

> O produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Exemplo

Verificar que na proporção $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Em $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$, temos:
- produto dos extremos: $4 \cdot 15 = 60$
- produto dos meios: $6 \cdot 10 = 60$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine, no caderno, a razão entre os números abaixo na ordem em que aparecem.

a) 8 e 10 $\frac{4}{5}$

b) -2 e 3 $-\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$

d) 10 e 2 5

2 Aplicando a propriedade fundamental das proporções, verifique quais dos pares de razões abaixo formam uma proporção. alternativas c e d

a) $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{5}$

b) $-\frac{10}{3}$ e $\frac{20}{6}$

c) $\frac{12}{15}$ e $\frac{4}{5}$

d) $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ e $\frac{3}{30}$

Razão entre segmentos de reta

Seja r a reta que passa pelos pontos distintos A e B.

GUILHERME CASAGRANDI

Os pontos A e B e todos os demais entre eles formam um **segmento de reta** que é indicado por $\overline{AB}$. A medida de um segmento $\overline{AB}$ é indicada por AB ou med$(\overline{AB})$.

A razão entre dois segmentos corresponde à razão de suas medidas, considerando a mesma unidade de medida de comprimento.

Exemplo

Considere os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e suas medidas:

GUILHERME CASAGRANDI

A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ pode ser assim obtida:

$AB = 30$ mm

$CD = 5$ cm $= 50$ mm

$$\frac{AB}{CD} = \frac{30}{50} \underset{:10}{\overset{:10}{=}} \frac{3}{5}$$

Logo, a razão entre esses segmentos é $\frac{3}{5}$.

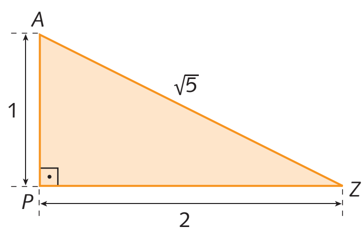
Observação

Segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis

Denominamos segmentos **comensuráveis** aqueles cuja razão entre suas medidas é um número racional. Os segmentos cuja razão é um número irracional, são denominados **incomensuráveis**.

Exemplo

Considere as medidas indicadas no triângulo PAZ.



LUIZ RUBIO

$$\frac{PA}{PZ} = \frac{1}{2}$$

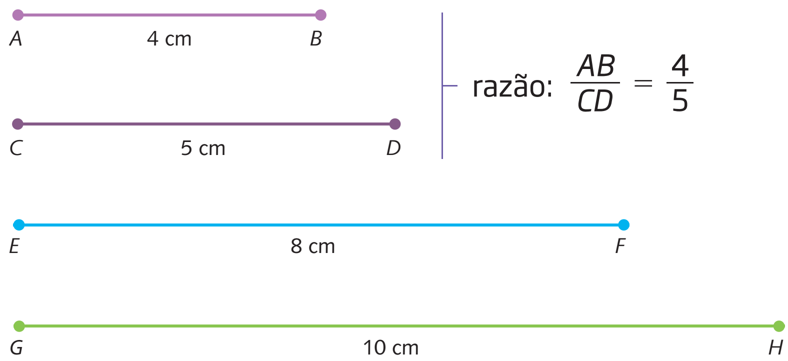
$$\frac{PZ}{AZ} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Portanto, $\overline{PA}$ e $\overline{PZ}$ são segmentos comensuráveis, enquanto que $\overline{PZ}$ e $\overline{AZ}$ são segmentos incomensuráveis.

Segmentos proporcionais

Vamos considerar os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ e suas medidas:

GUILHERME CASAGRANDI



razão: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{4}{5}$

razão: $\dfrac{EF}{GH} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

Como as razões obtidas são iguais, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ formam, nessa ordem, uma proporção:

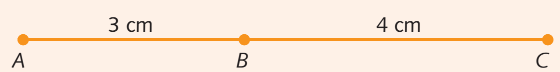
$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a medida x do segmento $\overline{AB}$, sabendo que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{5}$ e $BC = 20$ cm. $x = 8$ cm

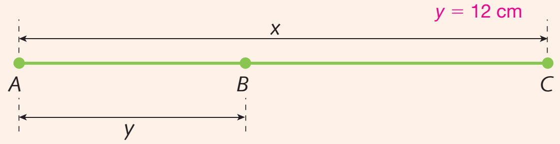
2 Qual é a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$? $\dfrac{3}{4}$



GUILHERME CASAGRANDI

3 Dada a figura, determine os valores de x e y, sabendo que $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{7}$ e $BC = 16$ cm.

$x = 28$ cm
$y = 12$ cm



4 Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Considerando que $EF = 3$ cm, $GH = 5$ cm e $AB + CD = 40$ cm, determine AB e CD.

$AB = 15$ cm; $CD = 25$ cm

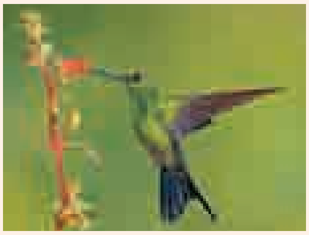
5 Em cada caso, classifique os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{RS}$ em segmentos comensuráveis ou segmentos incomensuráveis.

a) $\dfrac{MN}{RS} = \dfrac{1}{7}$ comensuráveis

b) $\dfrac{MN}{RS} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ incomensuráveis

6 A fotografia abaixo tem dimensões de 30 mm × 40 mm.

Os beija-flores são aves de pequeno porte, que medem em média de 6 a 12 centímetros de comprimento e pesam de 2 a 6 gramas.



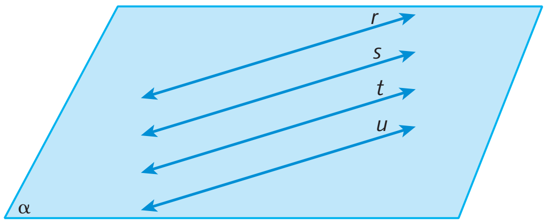
ROSALIE KREULEN/SHUTTERSTOCK

Queremos, com base nessa fotografia, fazer duas outras: uma com ampliação de 100% e outra com redução de 50%. Quais serão as dimensões das novas fotografias? 60 mm × 80 mm; 15 mm × 20 mm

2 Teorema de Tales

Retas paralelas cortadas por transversais

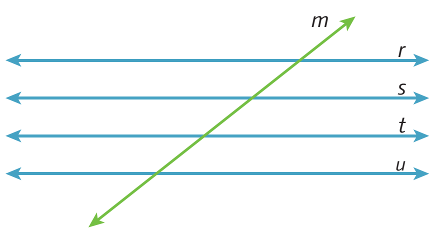
Um **feixe de retas paralelas** é formado por duas ou mais retas, de um mesmo plano, que, consideradas duas a duas, são sempre paralelas.



Notação: $r \mathbin{/\!/} s \mathbin{/\!/} t \mathbin{/\!/} u$

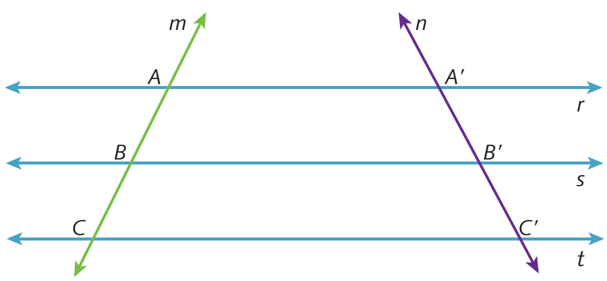
GUILHERME CASAGRANDI

Uma reta que intercepta duas ou mais retas de um feixe de retas paralelas recebe o nome de **transversal**.



Na figura ao lado, $r \mathbin{/\!/} s \mathbin{/\!/} t \mathbin{/\!/} u$ e a reta m é transversal ao feixe de retas paralelas.

Considere as retas paralelas r, s e t e as retas transversais m e n, no mesmo plano.

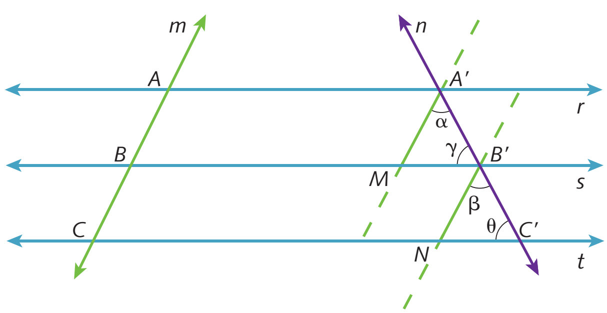


GUILHERME CASAGRANDI

Sobre a reta m ficam determinados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e sobre a reta n ficam determinados os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Vamos mostrar que se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ então $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$.

Por A' e B' traçamos retas paralelas à reta transversal m, determinando os segmentos $\overline{A'M}$ e $\overline{B'N}$.



GUILHERME CASAGRANDI

Como $\overline{A'M} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{AA'} \parallel \overline{BM}$, $AA'MB$ é um paralelogramo.

Como $\overline{B'N} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{BB'} \parallel \overline{CN}$, $BB'NC$ também é um paralelogramo.

Os lados opostos de um paralelogramo têm a mesma medida; então: $\overline{AB} \cong \overline{A'M}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'N}$

GEORGE TUTUMI

Agora, precisamos demonstrar que $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$.

Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, temos que: $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$

Considerando os triângulos $A'B'M$ e $B'C'N$, temos:

- $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$
- $\alpha = \beta \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes
- $\gamma = \theta \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes

Logo, $\triangle A'B'M \cong \triangle B'C'N$ pelo caso LAA_o.

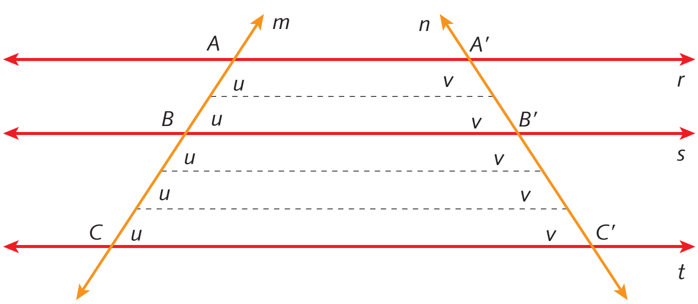
Portanto, $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes. Podemos então enunciar a propriedade:

> Se um feixe de retas paralelas determinar segmentos congruentes sobre uma transversal, esse feixe determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Teorema de Tales

Considere a figura abaixo, em que $r \parallel s \parallel t$, as retas m e n são transversais e $AB \neq BC$.

Vamos verificar qual é a relação entre os segmentos determinados nas duas transversais.



GUILHERME CASAGRANDI

Vamos considerar que u é uma unidade de medida.

Estabelecendo a razão $\frac{AB}{BC}$, temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$ (I)

Estabelecendo a razão $\frac{A'B'}{B'C'}$, temos: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2v}{3v} = \frac{2}{3}$ (II)

A demonstração foi particularizada para facilitar o entendimento do aluno.
Avaliar a conveniência de afirmar aos alunos que os matemáticos demonstraram que o teorema é válido para medidas dos segmentos expressas por quaisquer números reais positivos.

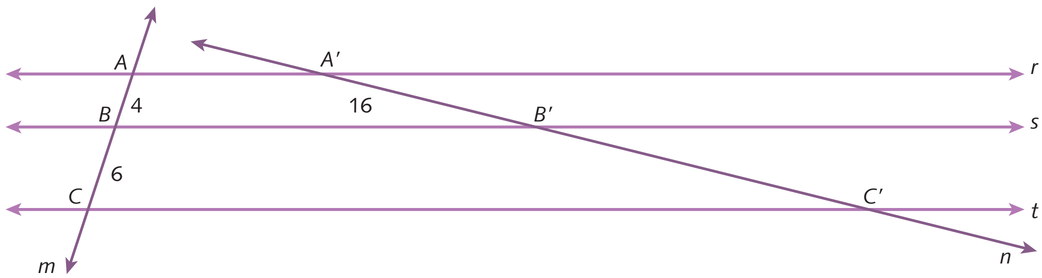
Comparando (I) e (II), temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

Logo, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais a $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ e podemos enunciar o Teorema de Tales:

> Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, os segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre a segunda transversal.

Exemplos

- Um feixe de três retas paralelas determina sobre uma transversal os pontos A, B e C e sobre outra os pontos A', B' e C'. Sabendo que $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm e $A'B' = 16$ cm, vamos calcular $B'C'$.



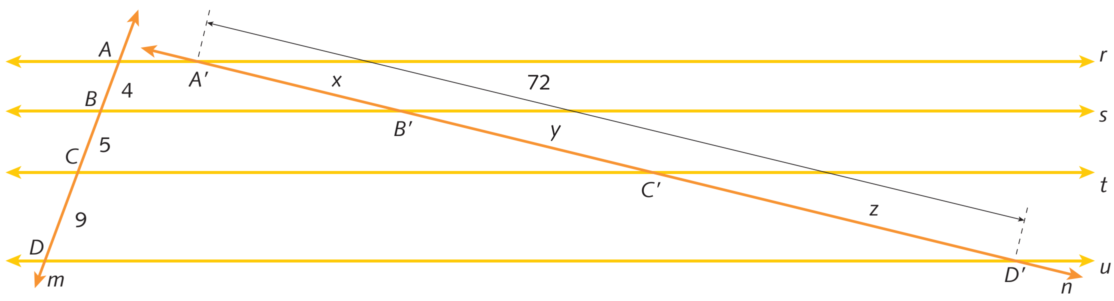
GUILHERME CASAGRANDI

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{16}{B'C'} \Rightarrow B'C' = \frac{16 \cdot 6}{4} \Rightarrow B'C' = 24$$

Logo, $B'C' = 24$ cm.

- Um feixe de quatro retas paralelas determina sobre uma transversal os pontos A, B, C e D e sobre outra os pontos A', B', C' e D'. Sabendo que $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 9$ cm e $A'D' = 72$ cm, vamos calcular $A'B'$, $B'C'$ e $C'D'$.



GUILHERME CASAGRANDI

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{y} \quad \text{(I)}$$

e

$$\frac{5}{9} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{5}{y} = \frac{9}{z} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), podemos escrever: $\frac{4}{x} = \frac{5}{y} = \frac{9}{z}$

$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = k$, ou seja: $\frac{x}{4} = k$, $\frac{y}{5} = k$ e $\frac{z}{9} = k$

Então:

$x = 4k$

$y = 5k$

$z = 9k$

Como $x + y + z = 72$, temos:

$4k + 5k + 9k = 72$

$18k = 72$

$k = 4$

Logo:

$x = 4 \cdot 4 \Rightarrow x = 16$

$y = 5 \cdot 4 \Rightarrow y = 20$

$z = 9 \cdot 4 \Rightarrow z = 36$

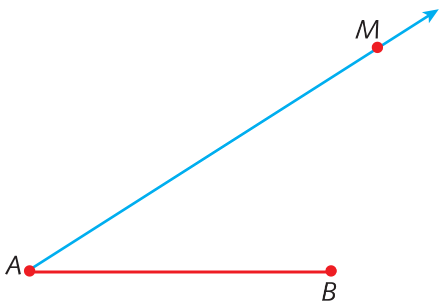
Portanto, $A'B' = 16$ cm, $B'C' = 20$ cm e $C'D' = 36$ cm.

Construção geométrica da divisão de um segmento

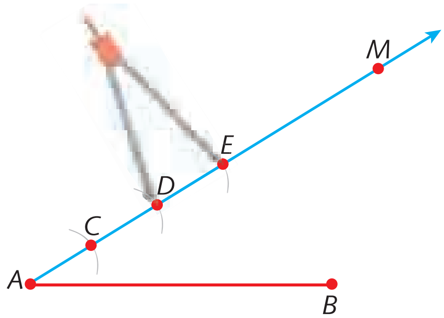
Uma das aplicações do teorema de Tales é a divisão de um segmento em partes proporcionais. Observe o exemplo abaixo.

Dado o segmento $\overline{AB}$, vamos determinar nesse segmento um ponto N, tal que: $\frac{AN}{AB} = \frac{2}{3}$

1º) Traçamos uma semirreta $\overrightarrow{AM}$ qualquer de acordo com a figura.



2º) Sobre a semirreta $\overrightarrow{AM}$, marcamos três pontos C, D e E, de modo que $AC = CD = DE$.

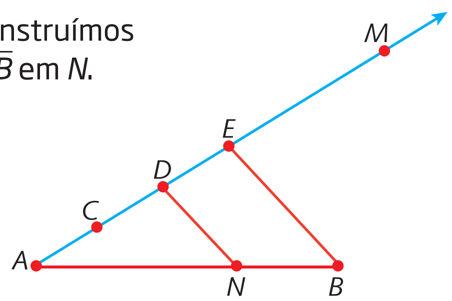


3º) Traçamos o segmento de reta $\overline{EB}$. A seguir, construímos uma paralela a $\overline{EB}$, passando por D, que corta $\overline{AB}$ em N.

Veja que: $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$ e $\overline{ND} \,/\!/\, \overline{BE}$

Assim, pelo teorema de Tales:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AN}{AB} = \frac{2}{3}$$



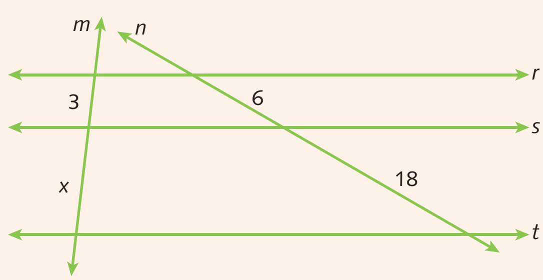
GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

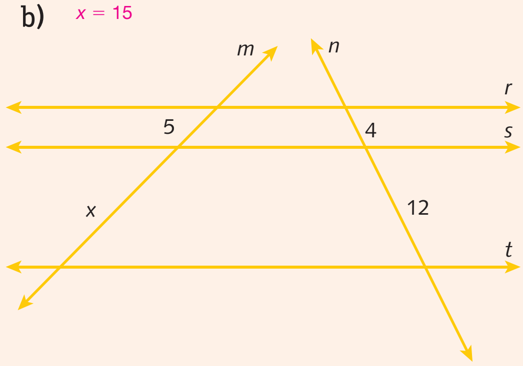
Faça as atividades no caderno.

1 Sendo $r \,/\!/\, s \,/\!/\, t$, determine o valor de x.

a) $x = 9$



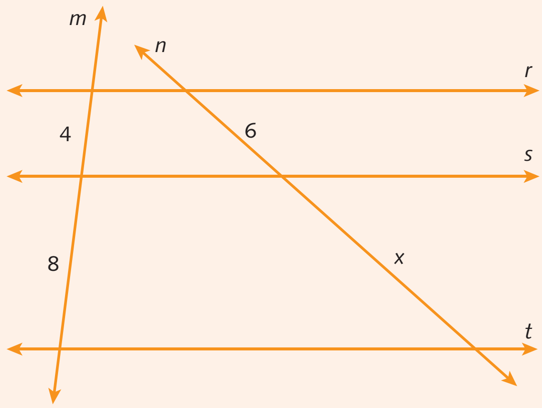
b) $x = 15$



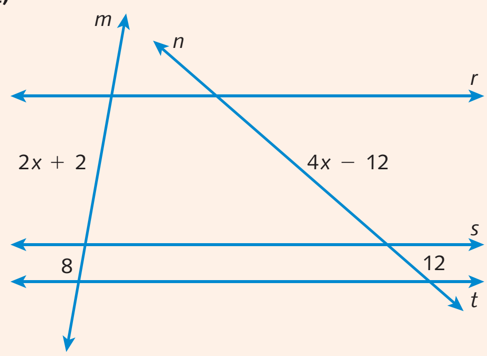
GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

c) $x = 12$

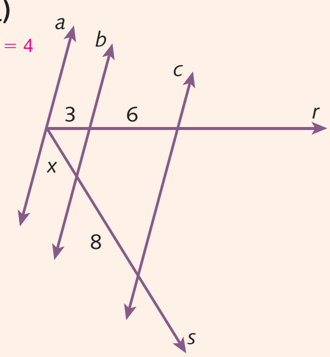


d) $x = 15$

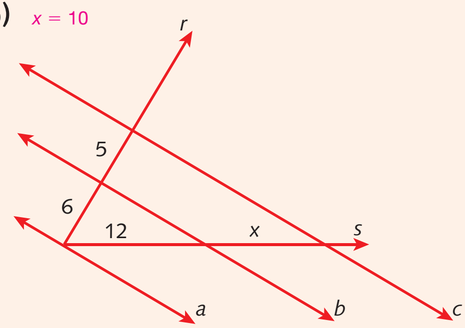


2 Sendo $a \parallel b \parallel c$, determine x.

a) $x = 4$

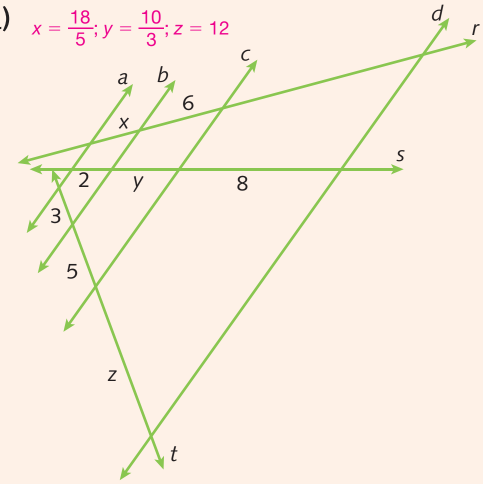


b) $x = 10$

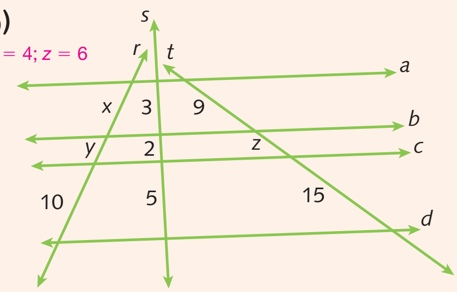


3 Sendo $a \parallel b \parallel c \parallel d$, determine x, y e z.

a) $x = \frac{18}{5}$; $y = \frac{10}{3}$; $z = 12$

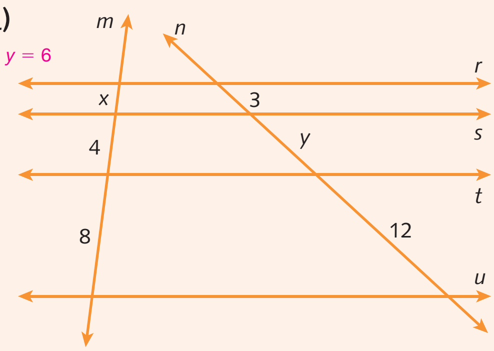


b) $x = 6$; $y = 4$; $z = 6$

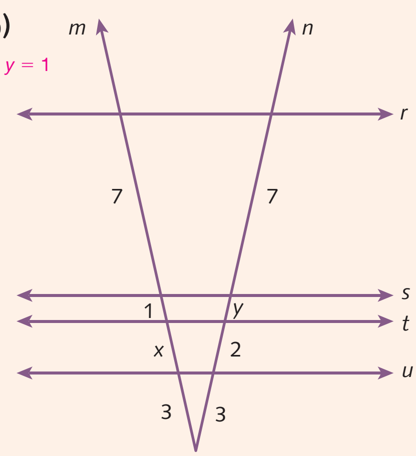


4 Calcule x e y. Considere $r \parallel s \parallel t \parallel u$.

a) $x = 2$; $y = 6$



b) $x = 2$; $y = 1$



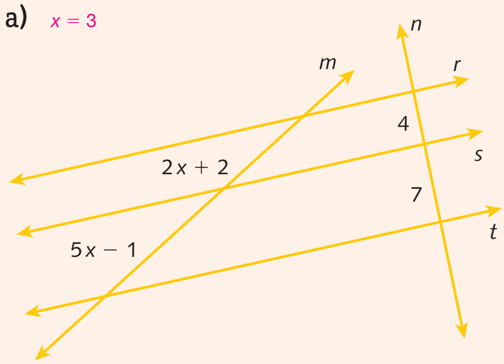
GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

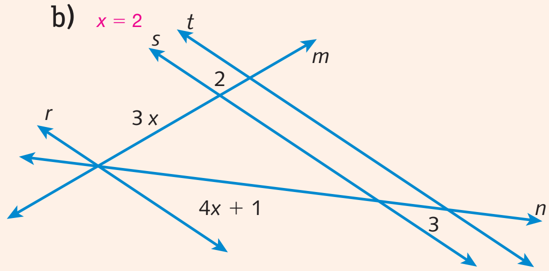
Lembre-se:
Não escreva no livro!

5 Determine o valor de x sabendo que $r // s // t$.

a) $x = 3$

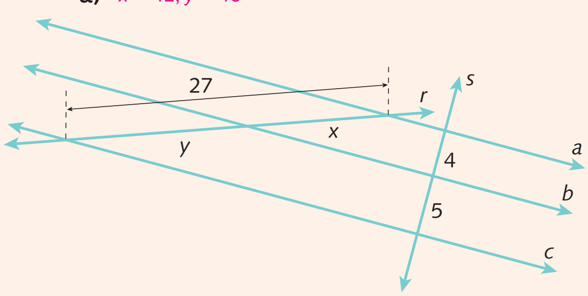


b) $x = 2$

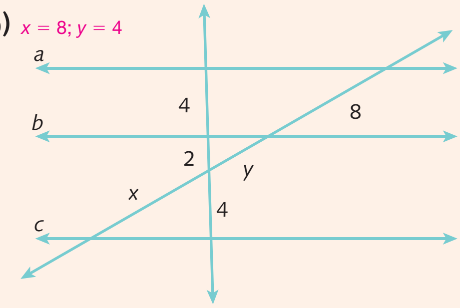


6 Sendo $a // b // c$, determine x e y.

a) $x = 12$; $y = 15$

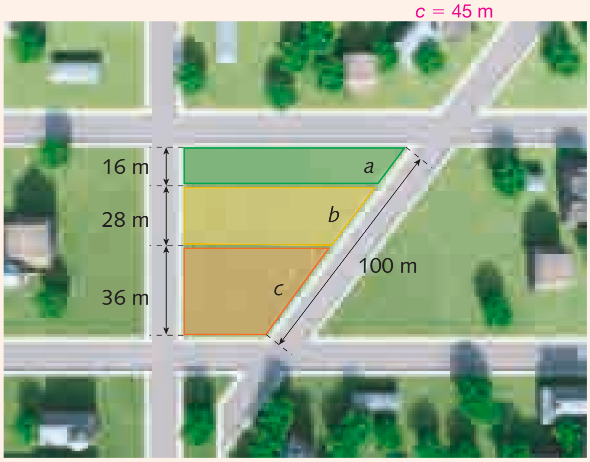


b) $x = 8$; $y = 4$



GUILHERME CASAGRANDI

7 A figura apresenta três terrenos que ocupam uma quadra. Determine as medidas a, b e c, sabendo que cada terreno possui um par de lados paralelos. $a = 20$ m; $b = 35$ m; $c = 45$ m



GUILHERME CASAGRANDI

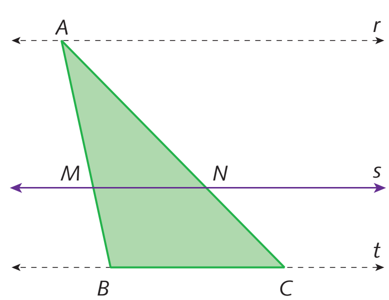
8 Desenhe, no caderno, um segmento de reta $\overline{AB}$ de medida igual a 7 cm. Em seguida, localize o ponto C nesse segmento de forma que $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$. Construção de figura.

GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

Teorema de Tales nos triângulos

Observe o triângulo ABC e a reta s, paralela a um de seus lados. Considere outra reta, r, paralela a s pelo ponto A.



GUILHERME CASAGRANDI

As retas r, s e t formam um feixe de paralelas.

Então, pelo teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Assim:

Toda reta paralela a um lado de um triângulo determina, sobre os outros dois lados, segmentos proporcionais.

Exemplo

Em um triângulo, dois lados medem, respectivamente, 48 m e 60 m. Sobre o primeiro, a 12 m do vértice comum a esses lados, toma-se um ponto *D*. Vamos calcular a medida dos segmentos que a paralela ao terceiro lado, passando por *D*, determina sobre o lado de medida 60 m.

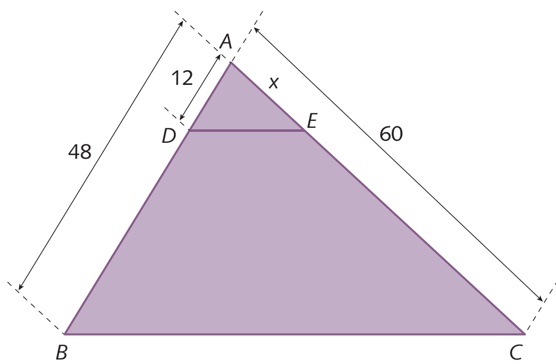
Temos:

$AD = 12$

$DB = 48 - 12 = 36$

$AE = x$

$EC = 60 - x$



GUILHERME CASAGRANDI

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{\cancelto{1}{12}}{\cancelto{3}{36}} = \frac{x}{60 - x} \Rightarrow 3x = 60 - x \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15$$

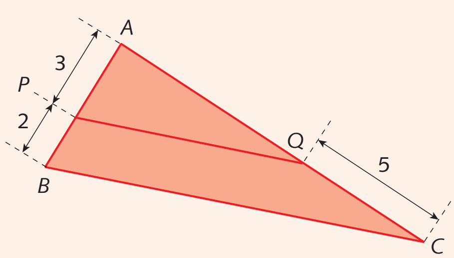
$EC = 60 - x \Rightarrow EC = 60 - 15 \Rightarrow EC = 45$

Portanto, as medidas são 15 m e 45 m.

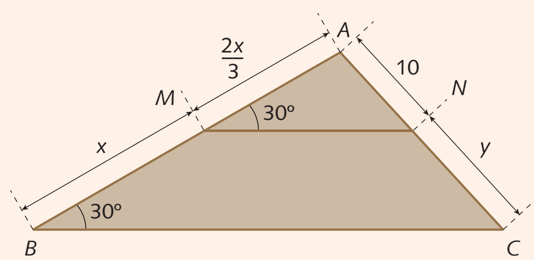
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Na figura, $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$. Determine AQ. $AQ = 7{,}5$



2 Determine o valor de y no triângulo ABC. $y = 15$



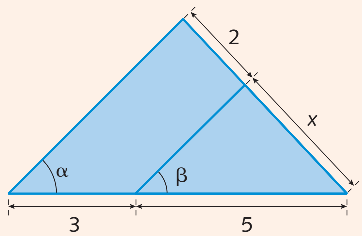
GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC determina o ponto D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$. Esboce uma figura que ilustre essa situação. Sabendo que $AD = k$, $DB = k + 4$, $AE = 4$ e $EC = 6$, determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo. $AB = 20$

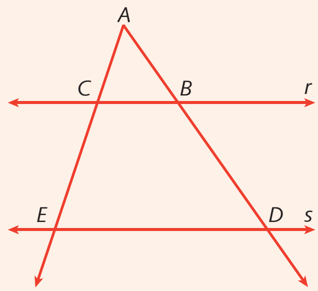
4 Determine o valor de x, sabendo que as medidas α e β dos ângulos correspondentes são iguais.

$x = \frac{10}{3}$



GUILHERME CASAGRANDI

5 Observe a figura, em que $r \parallel s$.



GUILHERME CASAGRANDI

Encontre $med(\overline{AD}) + med(\overline{AE})$, considerando que: 42

I) $med(\overline{AC}) = x$

II) $med(\overline{AB}) = x + 1$

III) $med(\overline{CE}) = 5x$

IV) $med(\overline{BD}) = 6x + 2$

UM POUCO DE HISTÓRIA

DIOGO SAITO

Tales de Mileto (624 a.C.-548 a.C.)

Nascido em Mileto (atualmente pertencente à Turquia), o filósofo grego Tales foi considerado o primeiro dos sete sábios da Grécia. A ele são atribuídos:

- o teorema que leva seu nome;
- a resolução do problema da inscrição do triângulo no círculo;
- a determinação da altura de um objeto por sua sombra;
- a previsão do eclipse do Sol, ocorrido em 28 de maio de 585 a.C.

TOMA

776 a.C.

Primeira Olimpíada, em Olímpia, na Grécia.

753 a.C.

Fundação da cidade de Roma, na Itália.

SYLVAIN SONNET/CORBIS/LATINSTOCK - MUSEUS CAPITOLINOS, ROMA, ITÁLIA

Símbolo da fundação de Roma: Rômulo e Remo sendo amamentados por uma loba.

TOMA

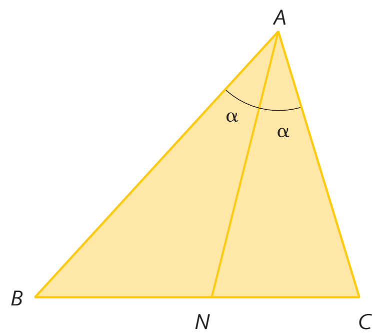
594 a.C.

Abolição da escravidão, por dívidas, em Atenas, na Grécia.

Dados obtidos em: Carl B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974. p. 34.

3 Teorema da bissetriz interna

Observe no triângulo abaixo que $\overline{AN}$ é a bissetriz interna do triângulo *ABC*, relativa ao vértice *A*.

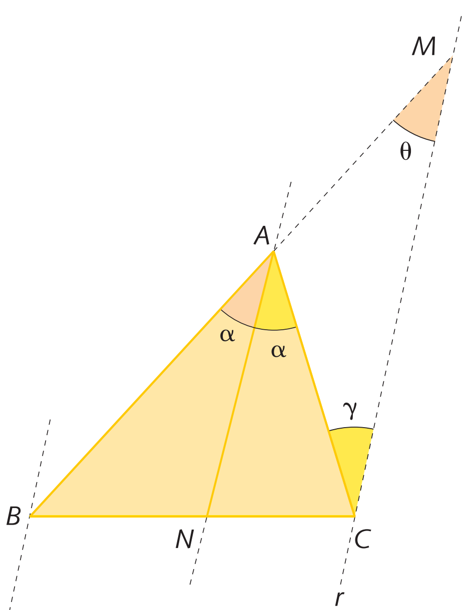


GUILHERME CASAGRANDI

O ponto *N* divide o segmento $\overline{BC}$ em duas partes: $\overline{BN}$ e $\overline{NC}$.

Vamos provar que $\dfrac{BN}{BA} = \dfrac{NC}{AC}$.

Para isso, traçamos a reta *r* paralela ao segmento $\overline{AN}$, passando por *C*. Esta reta encontra $\overrightarrow{BA}$ no ponto *M*. Veja:



GUILHERME CASAGRANDI

De acordo com o teorema de Tales, temos:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AM} \text{ ou } \frac{BN}{BA} = \frac{NC}{AM} \quad \text{(I)}$$

Temos que:

- $\theta = \alpha \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes
- $\alpha = \gamma \longrightarrow$ medidas de ângulos alternos internos

Então: $\theta = \gamma$

Por isso, o $\triangle ACM$ é isósceles e, portanto: $\overline{AC} \cong \overline{AM}$, ou seja, $AC = AM$

Substituindo, em (I), *AM* por *AC*, temos:

$$\boxed{\frac{BN}{BA} = \frac{NC}{AC}}$$

Assim:

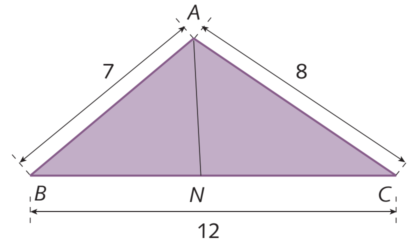
Em todo triângulo, a bissetriz de cada ângulo interno divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos proporcionais aos lados que formam o ângulo.

Exemplo

Os lados de um triângulo medem 7 m, 8 m e 12 m. Vamos calcular a medida dos segmentos que a bissetriz interna $\overline{AN}$ do ângulo $B\hat{A}C$ determina sobre o maior lado.

Temos:

$\dfrac{BN}{BA} = \dfrac{NC}{AC}$, ou seja, $\dfrac{BN}{7} = \dfrac{NC}{8}$



GUILHERME CASAGRANDI

Como $BN + NC = 12$, temos $NC = 12 - BN$. Assim:

$\dfrac{BN}{7} = \dfrac{12 - BN}{8}$

$8BN = 84 - 7BN$

$8BN + 7BN = 84$

$15BN = 84$

$BN = \dfrac{84}{15} \Rightarrow BN = 5{,}6$

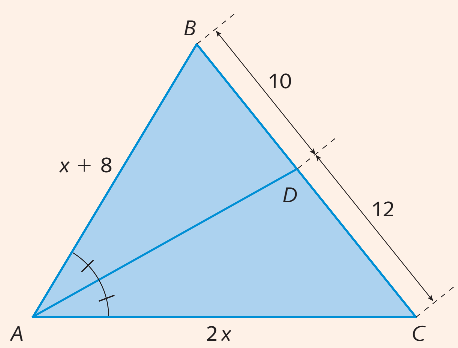
$NC = 12 - BN \Rightarrow NC = 12 - 5{,}6 \Rightarrow NC = 6{,}4$

Portanto, as medidas dos segmentos determinados pela bissetriz interna são 5,6 m e 6,4 m.

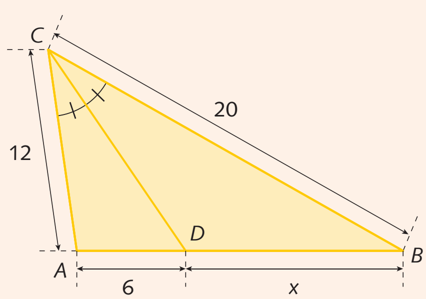
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Seja $\overline{AD}$ uma bissetriz interna do $\triangle ABC$. Sendo $AB = x + 8$, $AC = 2x$, $BD = 10$ e $CD = 12$, determine x. $x = 12$

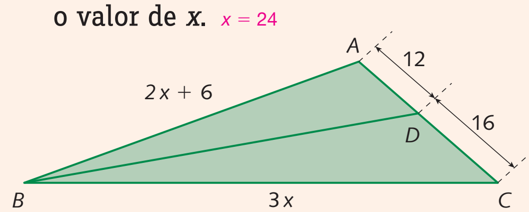


2 No triângulo CAB, $\overline{CD}$ é a bissetriz interna relativa ao ângulo $A\hat{C}B$. Determine a medida x. $x = 10$



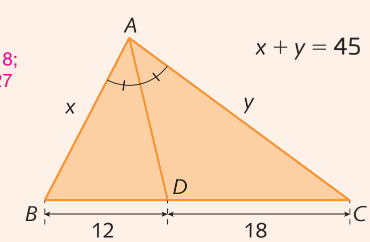
GUILHERME CASAGRANDI

3 No triângulo, $\overline{BD}$ é bissetriz interna relativa ao ângulo $A\hat{B}C$, $AD = 12$ e $CD = 16$. Sendo $AB = 2x + 6$ e $BC = 3x$, determine o valor de x. $x = 24$

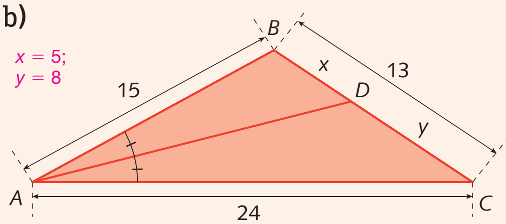


4 Calcule x e y nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz interna relativa ao ângulo $B\hat{A}C$.

a) $x = 18$; $y = 27$



b) $x = 5$; $y = 8$



GUILHERME CASAGRANDI

4 Semelhança

Figuras semelhantes

Observe as figuras.

figura A

figura B

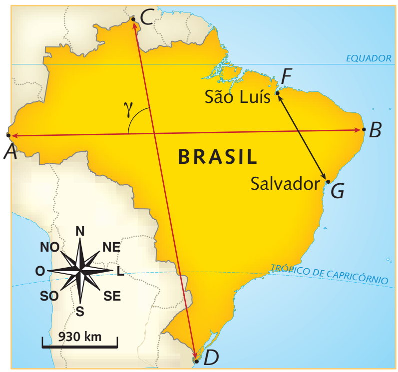


figura C

Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 119.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Elas representam o mapa do Brasil em escalas diferentes. Note que os três mapas têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes.

Nessas figuras, podemos identificar:

- $AB \longrightarrow$ distância do ponto extremo oeste ao ponto extremo leste do Brasil;
- $CD \longrightarrow$ distância do ponto extremo norte ao ponto extremo sul do Brasil;
- $FG \longrightarrow$ distância entre as cidades de São Luís e Salvador;
- $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ e $\hat{\gamma} \longrightarrow$ ângulos agudos formados pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, nas três figuras.

Medindo os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ e os ângulos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ das figuras, podemos organizar a tabela abaixo:

	med($\overline{AB}$)	med($\overline{FG}$)	medida do ângulo
Figura A	3,2 cm	0,94 cm	$\alpha = 80°$
Figura B	3,7 cm	1,09 cm	$\beta = 80°$
Figura C	4,7 cm	1,38 cm	$\gamma = 80°$

Oriente os alunos a conferirem as medidas da tabela usando régua e transferidor.

Observe que, nesse exemplo, as figuras apresentam estas características:

- os ângulos correspondentes têm medidas iguais;
- as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais:

$$\frac{3{,}2}{0{,}94} \simeq 3{,}4; \ \frac{3{,}7}{1{,}09} \simeq 3{,}4; \ \frac{4{,}7}{1{,}38} \simeq 3{,}4; \text{ logo, } \frac{\text{med}(\overline{AB})}{\text{med}(\overline{FG})} \simeq 3{,}4$$

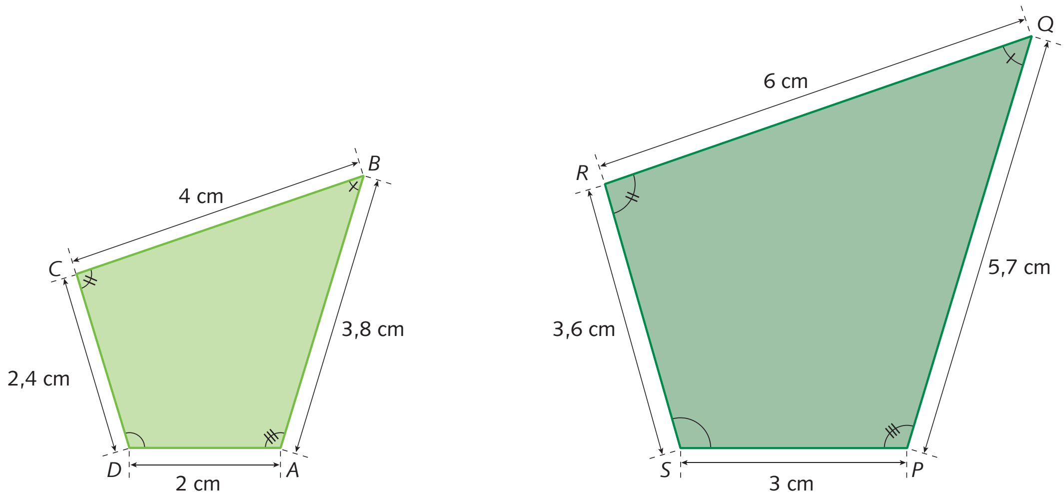
Dizemos que duas figuras são **semelhantes** quando as medidas dos ângulos correspondentes são iguais e as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais.

Logo, as figuras que representam o mapa do Brasil são semelhantes.

GUILHERME CASAGRANDI

Polígonos semelhantes

Considere os polígonos *ABCD* e *PQRS* abaixo.



Comparando as duas figuras, podemos observar que:

- os ângulos correspondentes são congruentes:
  $\widehat{A} \cong \widehat{P}$; $\widehat{B} \cong \widehat{Q}$; $\widehat{C} \cong \widehat{R}$; $\widehat{D} \cong \widehat{S}$
- as medidas dos lados correspondentes são proporcionais:
  $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{DA}{SP}$ ou $\dfrac{3{,}8}{5{,}7} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2{,}4}{3{,}6} = \dfrac{2}{3}$

Portanto, os polígonos *ABCD* e *PQRS* são **semelhantes** e indicamos:

$$\underline{ABCD \sim PQRS}$$

Lê-se: "polígono *ABCD* é semelhante ao polígono *PQRS*".

> Quando dois polígonos possuem ângulos correspondentes congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, eles são denominados **polígonos semelhantes**.

A razão entre as medidas dos lados correspondentes em polígonos semelhantes é denominada **razão de semelhança** ou **coeficiente de proporcionalidade**, ou seja:

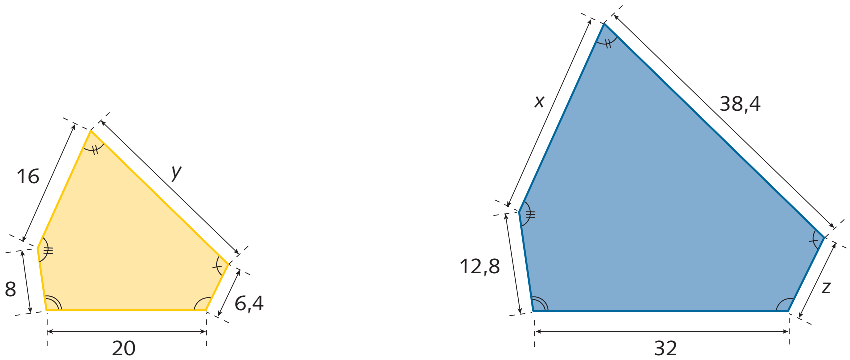
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = k$$

razão de semelhança

A razão de semelhança do menor para o maior dos polígonos considerados é $\dfrac{2}{3}$.

Exemplo

Vamos determinar *x*, *y* e *z*, sabendo que os polígonos abaixo são semelhantes.



GUILHERME CASAGRANDI

- Inicialmente, determinamos a razão de semelhança *k* entre os dois polígonos, do menor para o maior.

$$\frac{16}{x} = \frac{y}{38{,}4} = \frac{6{,}4}{z} = \frac{20}{32} = \frac{8}{12{,}8} = k \Rightarrow k = \frac{20}{32} \overset{:4}{=} \frac{5}{8}$$

- Em seguida, determinamos os valores de *x*, *y* e *z*.

$$\frac{16}{x} = \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{16 \cdot 8}{5} = 25{,}6$$

$$\frac{y}{38{,}4} = \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{5 \cdot 38{,}4}{8} = 24$$

$$\frac{6{,}4}{z} = \frac{5}{8}$$

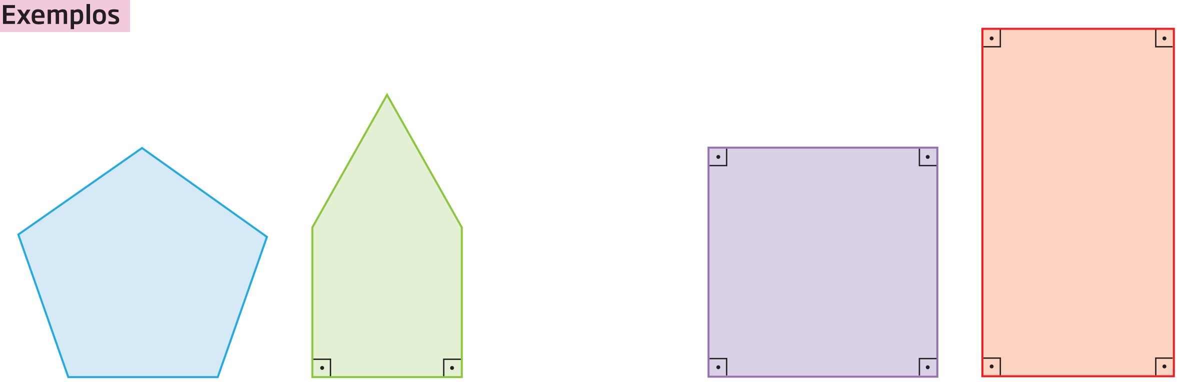
$$z = \frac{8 \cdot 6{,}4}{5} = 10{,}24$$

Então, $x = 25{,}6$, $y = 24$ e $z = 10{,}24$.

Observação

Para garantir que dois polígonos são semelhantes, é preciso verificar as **duas condições**: os ângulos correspondentes devem ser congruentes e as medidas dos lados correspondentes devem ser proporcionais. Apenas uma das condições não é suficiente para garantir a semelhança entre polígonos.

Exemplos



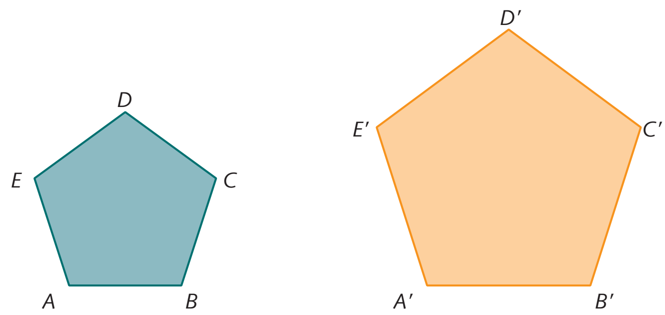
LUIZ RUBIO

O pentágono azul tem lados de medidas iguais às do pentágono verde (a razão entre as medidas dos lados é 1), ou seja, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, mas seus ângulos correspondentes não são congruentes. Portanto, esses polígonos não são semelhantes.

Os ângulos correspondentes dos quadriláteros são congruentes, mas as medidas de seus lados correspondentes não são proporcionais. Portanto, esses polígonos não são semelhantes.

Razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes

Considere os polígonos regulares semelhantes $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ cujos lados medem, respectivamente, 1,4 cm e 2,1 cm.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{1{,}4}{2{,}1} = \frac{2}{3}$$

Os perímetros desses polígonos podem ser assim representados:

Perímetro de $ABCDE$:

$AB + BC + CD + DE + EA =$

$= 1{,}4 \text{ cm} + 1{,}4 \text{ cm} + 1{,}4 \text{ cm} + 1{,}4 \text{ cm} + 1{,}4 \text{ cm} = 7{,}0 \text{ cm}$

Perímetro de $A'B'C'D'E'$:

$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' =$

$= 2{,}1 \text{ cm} + 2{,}1 \text{ cm} + 2{,}1 \text{ cm} + 2{,}1 \text{ cm} + 2{,}1 \text{ cm} = 10{,}5 \text{ cm}$

A razão entre os perímetros desses dois polígonos é: $\dfrac{7{,}0}{10{,}5} = \dfrac{2}{3}$.

:3,5

:3,5

Se dois polígonos são semelhantes, a razão entre seus perímetros é igual à razão entre as medidas de dois lados correspondentes quaisquer dos polígonos.

Exemplo

Um triângulo ABC, cujos lados medem 3,6 cm, 6,4 cm e 8 cm, é semelhante a outro triângulo $A'B'C'$, cujo perímetro é 45 cm. Vamos calcular as medidas dos lados do segundo triângulo.

Razão de semelhança:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{3{,}6 + 6{,}4 + 8}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{3{,}6}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \frac{5 \cdot 3{,}6}{2} = 9$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6{,}4}{B'C'} \Rightarrow B'C' = \frac{5 \cdot 6{,}4}{2} = 16$$

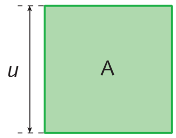
$$\frac{2}{5} = \frac{8}{A'C'} \Rightarrow A'C' = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$$

Portanto, as medidas dos lados do segundo triângulo são 9 cm, 16 cm e 20 cm.

Razão entre áreas de polígonos semelhantes

Considere os quadrados A, B e C, cujos lados medem $\ell_A = 1\ u$, $\ell_B = 2\ u$ e $\ell_C = 3\ u$, respectivamente.

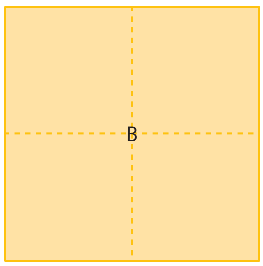
Calculando a área (A) de cada quadrado, temos:



Medida do lado do quadrado A: $\ell_A = 1$

Área do quadrado A: $A_A = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow A_A = 1$

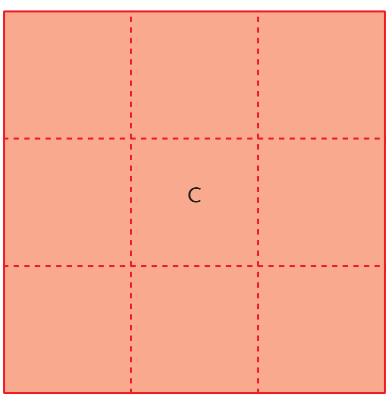
Portanto, se o lado do quadrado A mede 1 u, sua área é igual a 1 u^2.



Medida do lado do quadrado B: $\ell_B = 2$

Área do quadrado B: $A_B = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4 \Rightarrow A_B = 4$

Portanto, se o lado do quadrado B mede 2 u, sua área é igual a 4 u^2.



Medida do lado do quadrado C: $\ell_C = 3$

Área do quadrado C: $A_C = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9 \Rightarrow A_C = 9$

Portanto, se o lado do quadrado C mede 3 u, sua área é igual a 9 u^2.

GUILHERME CASAGRANDI

Agora, observe o quadro abaixo.

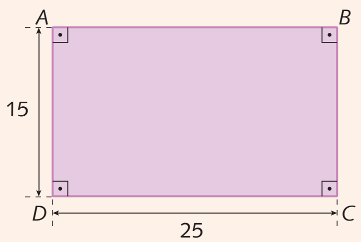
Comparação entre os quadrados	Razão de semelhança	Razão entre as áreas
B e A	$\frac{\ell_B}{\ell_A} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{A_B}{A_A} = \frac{4}{1} = 4$
C e A	$\frac{\ell_C}{\ell_A} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{A_C}{A_A} = \frac{9}{1} = 9$
C e B	$\frac{\ell_C}{\ell_B} = \frac{3}{2}$	$\frac{A_C}{A_B} = \frac{9}{4}$

Se dois polígonos são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

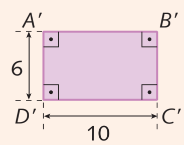
Faça as atividades no caderno.

1 Estas figuras são semelhantes? Justifique sua resposta.

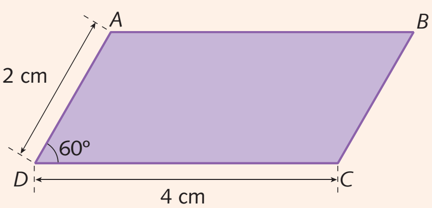
a)



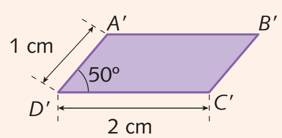
Sim, pois os ângulos correspondentes têm a mesma medida (90°), e a razão de semelhança é $\frac{5}{2}$.



b)

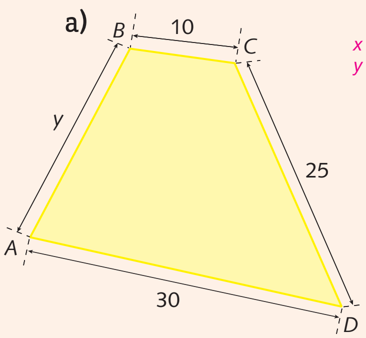


Não, pois os ângulos correspondentes têm medidas diferentes.

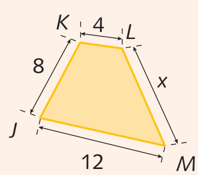


2 Em cada item, os polígonos são semelhantes. Determine as medidas x e y.

a)

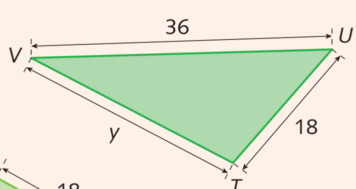


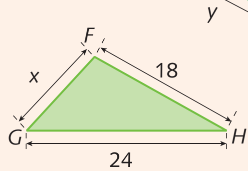
$x = 10$; $y = 20$



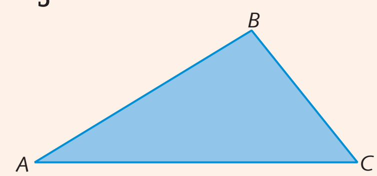
b)

$x = 12$; $y = 27$



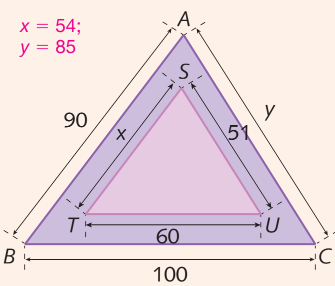


3 Desenhe um triângulo semelhante ao triângulo ABC com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$. Construção de figura.

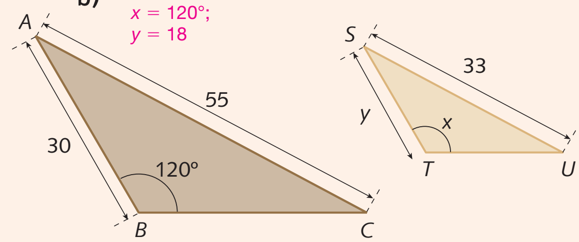


4 Os triângulos ABC e STU são semelhantes. Calcule as medidas x e y.

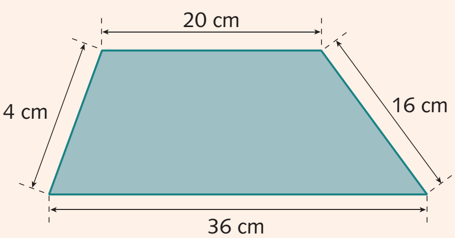
a) $x = 54$; $y = 85$



b) $x = 120°$; $y = 18$



5 Determine as medidas de um trapézio de 129 cm de perímetro semelhante ao trapézio abaixo. 30 cm, 24 cm, 54 cm e 21 cm



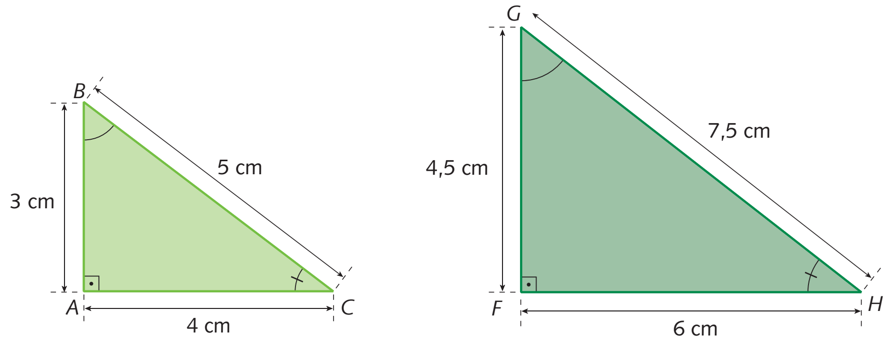
6 Os lados de um triângulo ABC têm medidas 12 cm, 19 cm e 10 cm. Determine a medida dos lados de um triângulo semelhante ao triângulo ABC, com 123 cm de perímetro. 36 cm, 57 cm e 30 cm

7 A razão de semelhança entre dois triângulos é 4. Se a área do triângulo menor é 10 cm^2, qual é a área do triângulo maior?

160 cm^2

5 Triângulos semelhantes

Considere os triângulos *ABC* e *FGH* abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Observe que:

- os ângulos correspondentes são congruentes: $\widehat{A} \cong \widehat{F}$, $\widehat{B} \cong \widehat{G}$, $\widehat{C} \cong \widehat{H}$
- a razão entre as medidas dos lados correspondentes é $\frac{2}{3}$, pois: $\frac{3}{4{,}5} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

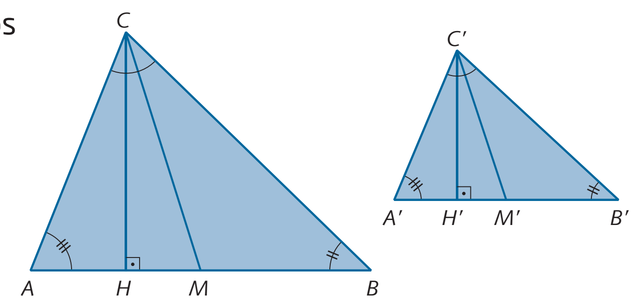
Podemos concluir que os triângulos *ABC* e *FGH* são **semelhantes**. Indicamos: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$

Como os triângulos são polígonos, temos:

> Dois triângulos são **semelhantes** quando os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Linhas homólogas

Observe, ao lado, os triângulos semelhantes *ABC* e *A'B'C'*.



GUILHERME CASAGRANDI

Dois objetos são homólogos quando têm uma relação de correspondência um com o outro. Na Geometria, essa característica se aplica às figuras semelhantes. Assim:

- Os ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes são chamados de **ângulos homólogos**. Neste caso: $C\widehat{A}B$ e $C'\widehat{A'}B'$, $A\widehat{B}C$ e $A'\widehat{B'}C'$, $A\widehat{C}B$ e $A'\widehat{C'}B'$
- **Vértices homólogos** são os vértices dos ângulos homólogos. Neste caso: *A* e *A'*, *B* e *B'*, *C* e *C'*
- **Lados homólogos.** Neste caso: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$
- Nos triângulos acima, $\overline{CH}$ e $\overline{C'H'}$ são exemplos de **alturas homólogas** e $\overline{CM}$ e $\overline{C'M'}$ são exemplos de **medianas homólogas**.

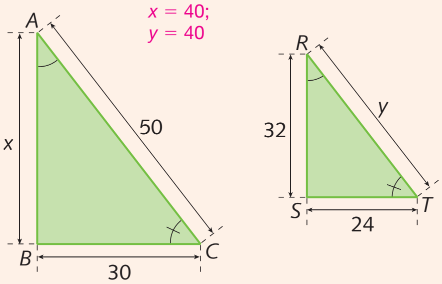
A razão de semelhança entre dois triângulos semelhantes pode ser dada pela razão entre duas linhas homólogas quaisquer (lados, medianas, alturas).

Faça as atividades no caderno.

1 Os triângulos de cada item são semelhantes. Determine o valor de x e y indicado em cada caso.

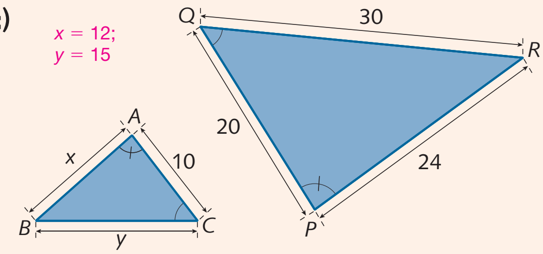
a)

$x = 40$; $y = 40$



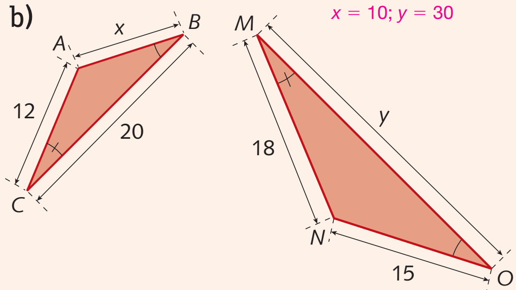
c)

$x = 12$; $y = 15$



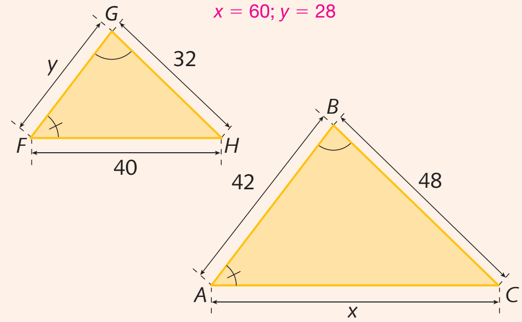
b)

$x = 10$; $y = 30$



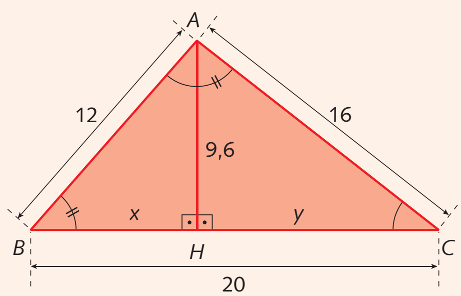
d)

$x = 60$; $y = 28$



2 Calcule os valores de x e y nas figuras.

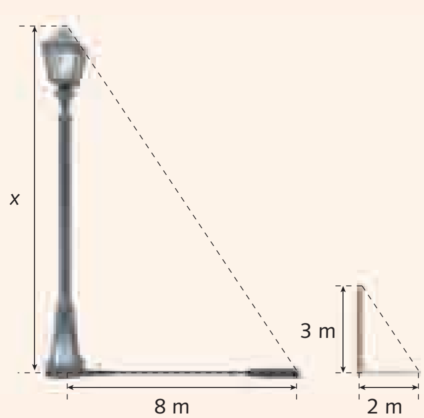
$x = 7{,}2$; $y = 12{,}8$



3 A razão de semelhança entre dois triângulos é $\frac{4}{5}$. Sabendo que os lados do maior triângulo medem 20 cm, 30 cm e 40 cm, calcule as medidas dos lados homólogos do triângulo menor.

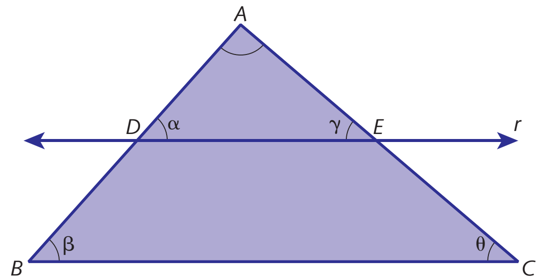
16 cm, 24 cm e 32 cm

4 Calcule a medida da altura de um poste, sabendo que sua sombra sobre o solo mede 8 m no momento em que a sombra de uma vara vertical de 3 m mede 2 m. 12 m



Teorema fundamental da semelhança

Considere um $\triangle ABC$ e uma reta r, paralela a BC, que corta os lados AB e AC, conforme a figura a seguir.

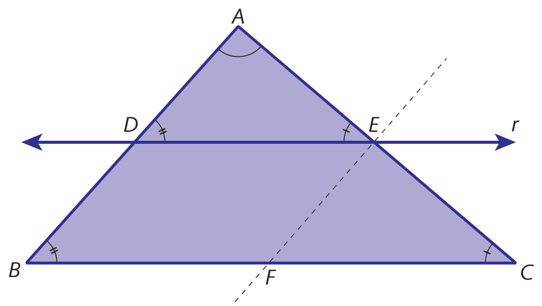


Vamos provar que os triângulos DAE e BAC são semelhantes.

- Os ângulos internos correspondentes são congruentes, pois:
  - O ângulo $B\widehat{A}C$ é comum aos dois triângulos.
  - Os ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{D}E$ são correspondentes; logo, $\alpha = \beta$.
  - Os ângulos $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{E}D$ são correspondentes; logo, $\gamma = \theta$.

  Portanto, os triângulos DAE e BAC têm os ângulos correspondentes congruentes.
- Vamos provar que as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

  Pelo ponto E, traçamos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overline{AB}$.



Temos:

1 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ $\longrightarrow$ Teorema de Tales nos triângulos DAE e BAC.

2 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ $\longrightarrow$ Teorema de Tales nos triângulos CEF e CAB.

3 $\overline{DE} \cong \overline{BF}$ $\longrightarrow$ Lados opostos do paralelogramo $DEFB$.

Substituindo BF por DE em 2, temos: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ 4

Comparando 1 e 4, obtemos: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

Logo, os triângulos DAE e BAC têm as medidas dos lados homólogos proporcionais.

Portanto, concluímos que os triângulos DAE e BAC são semelhantes.

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros dois lados em pontos distintos determina, com esses lados, um triângulo semelhante ao primeiro.

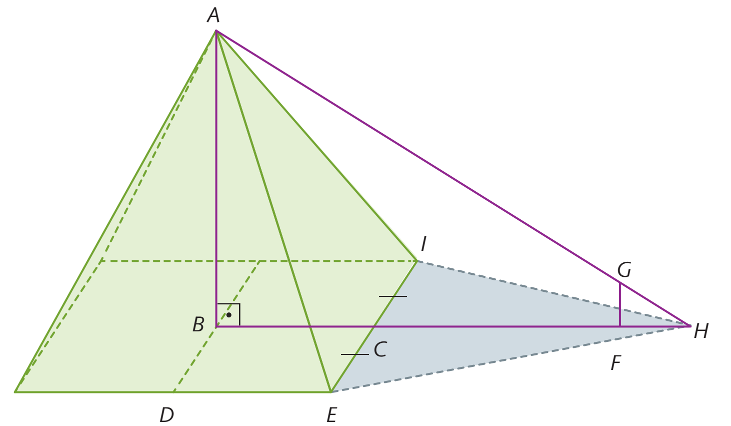
Diga aos alunos que Tales de Mileto era filósofo, matemático e astrônomo da Grécia Antiga, e viveu por volta de 624 a.C. a 558 a.C.

Lendo e aprendendo

Tales de Mileto e a altura da pirâmide

Existem relatos que descrevem que Tales de Mileto teria sido chamado pelo faraó Amasis do Egito para calcular a medida da altura de uma grande pirâmide.

A figura abaixo representa um dos possíveis métodos usados por Tales.



LUIZ RUBIO

Tales teria procedido da seguinte forma:

1º) Colocou uma estaca (representada por $\overline{GF}$) na sombra da pirâmide sobre a perpendicular que passa no ponto médio (C) de ($\overline{EI}$), um dos lados da base da pirâmide, de forma que sua sombra terminasse no mesmo ponto (H) onde acabava a sombra da pirâmide.

2º) Mediu $\overline{DE}$, $\overline{CH}$, $\overline{FH}$ e $\overline{GF}$. Como $DE = BC$, obteve a medida de $\overline{BH}$.

3º) Finalmente, ele calculou a medida da altura da pirâmide (representada por $\overline{AB}$), escrevendo a seguinte proporção:

$$\frac{BH}{FH} = \frac{\boldsymbol{AB}}{GF} \text{ (}BH, FH \text{ e } GF \text{ são medidas conhecidas)}$$

- Explique por que Tales pôde escrever essa proporção que o levou a obter a medida da altura da pirâmide. Espera-se que os alunos percebam que pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, os triângulos *ABH* e *GFH* são semelhantes e, por isso, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Assim, pode-se escrever:

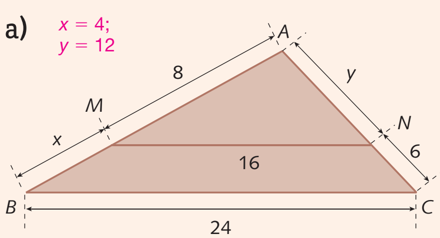
$$\boxed{\frac{AB}{GF} = \frac{BH}{FH}} = \frac{AH}{GH}$$

ATIVIDADES

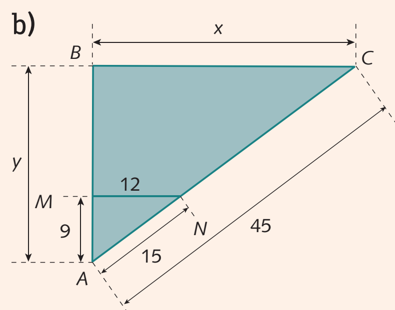
Faça as atividades no caderno.

1 Determine x e y nas figuras, sabendo que $\overline{MN} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$.

a) $x = 4$; $y = 12$

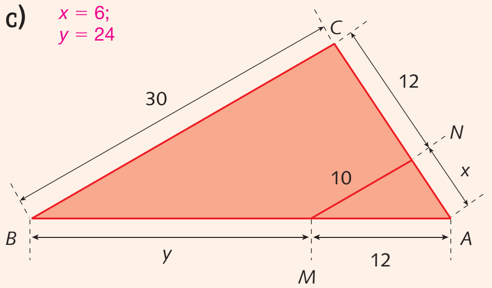


b) $x = 36$; $y = 27$



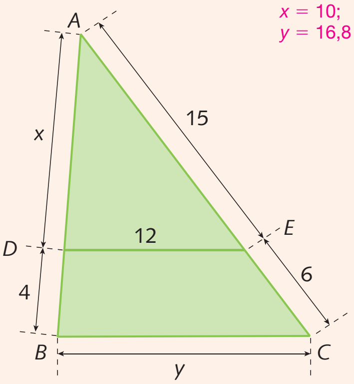
GUILHERME CASAGRANDI

c) $x = 6$; $y = 24$



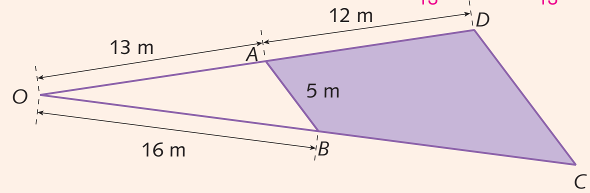
2 Na figura, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Determine as medidas x e y.

$x = 10$; $y = 16,8$



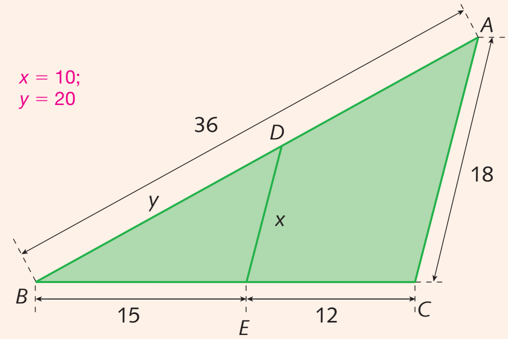
3 Um pátio tem a forma de um quadrilátero $ABCD$, com dois lados paralelos. Sabendo que $AB = 5$ m, $AD = 12$ m, $OA = 13$ m e $OB = 16$ m, determine BC e DC.

$BC = \frac{192}{13}$ m; $DC = \frac{125}{13}$ m



4 Sabendo que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, calcular x e y.

$x = 10$; $y = 20$

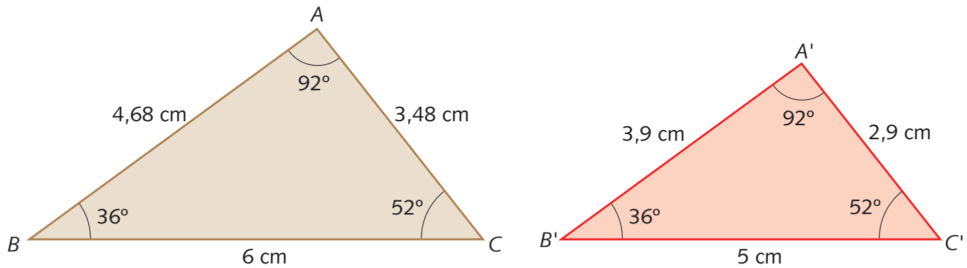


Casos de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando:

- os ângulos internos correspondentes são congruentes;
- as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

A seguir, vamos verificar se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.



- Os ângulos internos correspondentes são congruentes.

$\text{med}(B\widehat{A}C) = \text{med}(B'\widehat{A'}C') = 92°$

$\text{med}(A\widehat{B}C) = \text{med}(A'\widehat{B'}C') = 36°$

$\text{med}(A\widehat{C}B) = \text{med}(A'\widehat{C'}B') = 52°$

- As medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

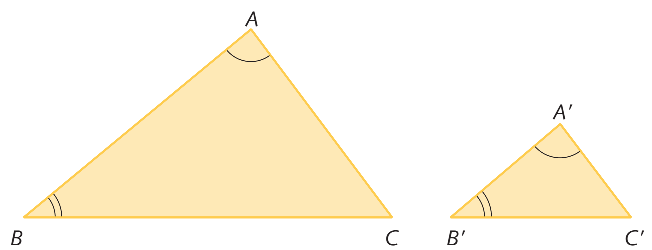
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{6}{5}$$

Assim, concluímos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Existem três casos em que podemos verificar a existência da semelhança de triângulos conhecendo apenas alguns dos seus elementos. Veja.

1º caso: AA (Ângulo – Ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, esses triângulos são semelhantes.



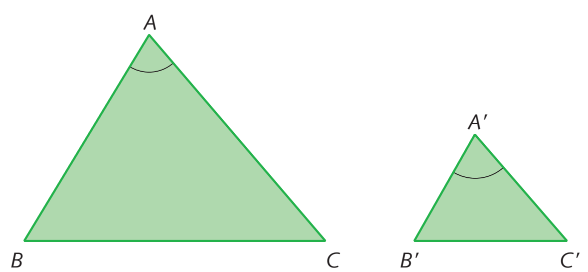
GUILHERME CASAGRANDI

Em linguagem matemática:

se $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$ e $A\widehat{B}C \cong A'\widehat{B'}C'$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

2º caso: LAL (Lado – Ângulo – Lado)

Se dois triângulos possuem as medidas de dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados forem congruentes, esses triângulos são semelhantes.



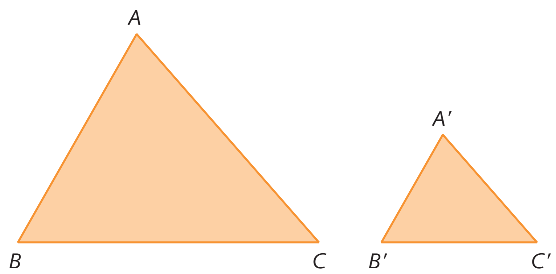
GUILHERME CASAGRANDI

Em linguagem matemática:

se $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ e $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

3º caso: LLL (Lado – Lado – Lado)

Se dois triângulos possuem os três pares de lados correspondentes com medidas proporcionais, esses triângulos são semelhantes.



Em linguagem matemática:

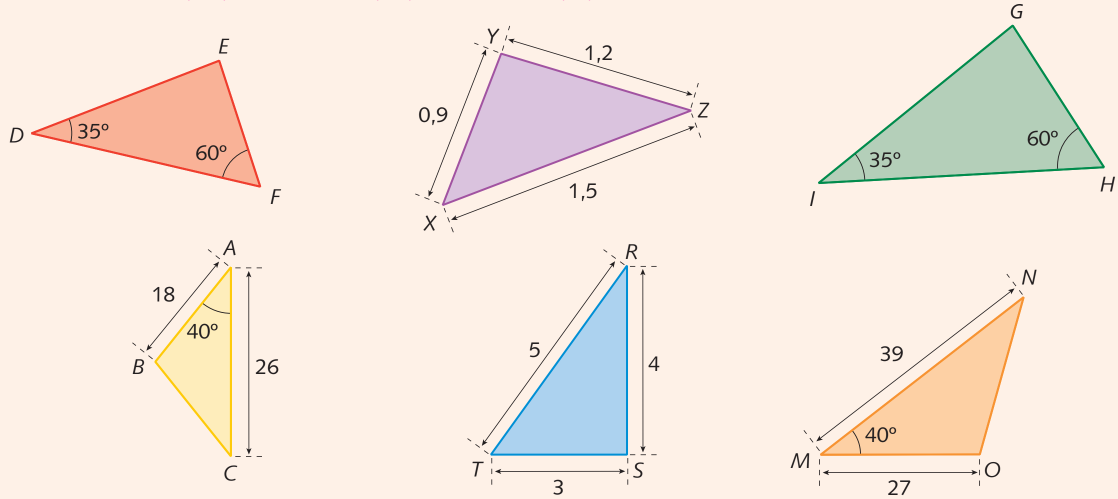
se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Identifique os pares de triângulos semelhantes, especificando o caso.

$\triangle ABC \sim \triangle MON$ (LAL); $\triangle XYZ \sim \triangle TSR$ (LLL); $\triangle DEF \sim \triangle IGH$ (AA)



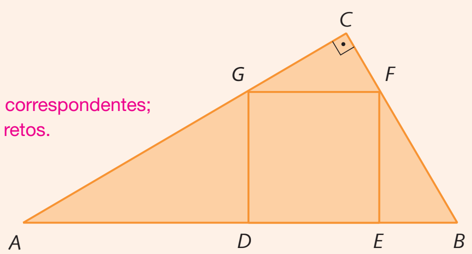
2 Prove que os triângulos *ADG* e *GCF* são semelhantes, sabendo que *GDEF* é um quadrado.

demonstração

Como *GDEF* é um quadrado, temos:
- $\overleftrightarrow{GF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$;
- $A\hat{D}G$ é um ângulo reto.

Logo:
- med $(D\hat{A}G)$ = med $(C\hat{G}F)$, pois são ângulos correspondentes;
- med $(G\hat{D}A)$ = med $(F\hat{C}G)$, pois são ângulos retos.

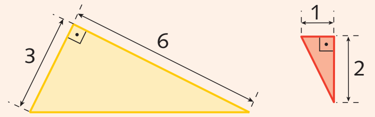
Portanto, pelo caso AA, $\triangle ADG \sim \triangle GCF$.



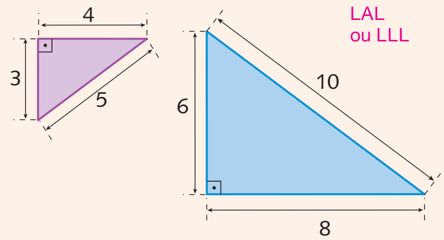
Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Identifique o caso de semelhança nos pares de triângulos.

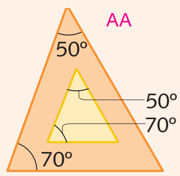
a) LAL



b) LAL ou LLL



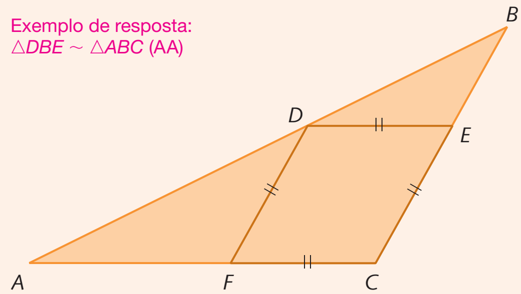
c) AA



4 As bases de um trapézio medem 6 m e 8 m, e sua altura, 5 m. Os lados não paralelos desse trapézio são prolongados até se encontrarem. Esboce esse trapézio no caderno e calcule a medida da altura do menor triângulo assim formado. 15 m

5 Na figura, identifique dois triângulos semelhantes e o caso de semelhança correspondente, sabendo que o quadrilátero *DECF* é um losango.

Exemplo de resposta:
$\triangle DBE \sim \triangle ABC$ (AA)



6 Homotetia

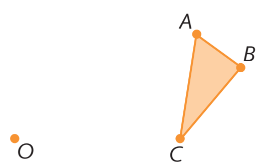
No dia a dia, podemos, de maneira prática, ampliar ou reduzir figuras por meio de uma máquina copiadora, de um projetor, de um programa de computador, entre outros recursos.

Desse modo, dizemos que fazemos uma **transformação geométrica** que preserva a forma da figura original, mas não necessariamente as suas dimensões; temos, então, o que chamamos de **homotetia**. As figuras que se correspondem por homotetia são denominadas **figuras homotéticas**.

Projetor de mesa.

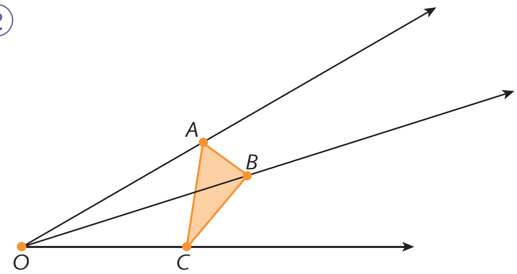
Veja como ampliar o triângulo *ABC*, a partir de *O*, para obter um triângulo *A'B'C'*, em que a medida de cada lado seja o dobro da medida do seu correspondente em *ABC*.

①



Inicialmente, traçamos semirretas com origem *O*, passando pelos vértices *A*, *B* e *C*.

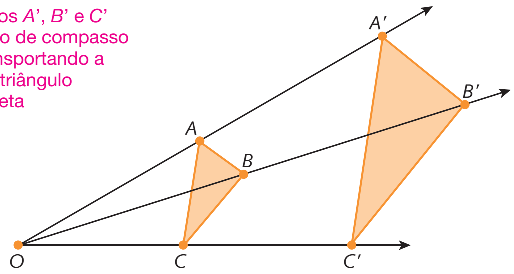
②



Traçamos as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

③ Sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$, marcamos o ponto A' de tal forma que $OA' = 2OA$.
Sobre a semirreta $\overrightarrow{OB}$, marcamos o ponto B' de tal forma que $OB' = 2OB$.
Sobre a semirreta $\overrightarrow{OC}$, marcamos o ponto C' de tal forma que $OC' = 2OC$.

Diga aos alunos que os pontos *A*', *B*' e *C*' podem ser obtidos com o uso de compasso ou, apenas com a régua, transportando a distância de cada vértice do triângulo até o ponto *O* sobre a semirreta correspondente a cada vértice.



GUILHERME CASAGRANDI

O triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo ABC, e a razão de semelhança entre eles é 2.

Note que os lados correspondentes são paralelos.

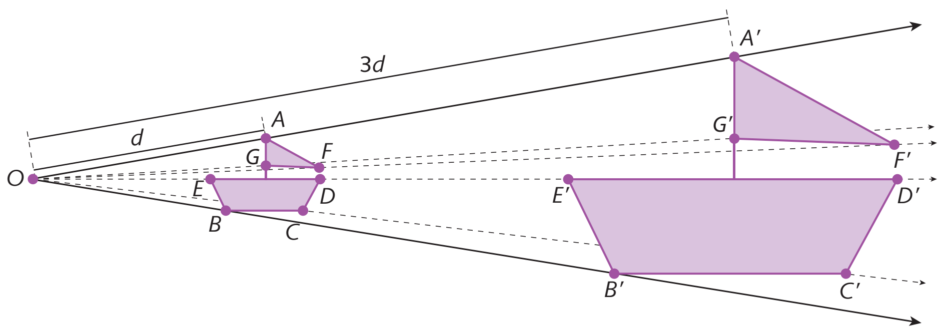
O é chamado centro da homotetia.

Propriedade da homotetia

Em duas figuras homotéticas, os ângulos correspondentes são congruentes, os segmentos correspondentes são paralelos e a razão entre suas medidas é sempre igual à razão de homotetia.

Exemplo

A figura original foi ampliada por homotetia de centro *O* e razão 3.

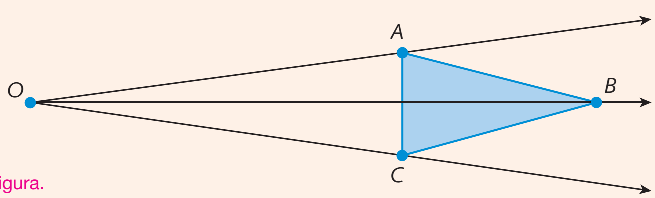


GUILHERME CASAGRANDI

Verifique que cada segmento da figura ampliada mede o triplo do segmento correspondente na figura original.

ATIVIDADE Faça a atividade no caderno.

No caderno, copie a figura ao lado. Nela, construa um triângulo $A'B'C'$ em que a medida de cada lado seja a metade da medida do seu correspondente no triângulo ABC. Construção de figura.

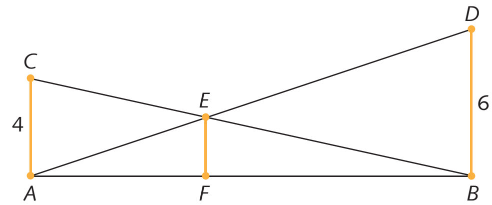


GUILHERME CASAGRANDI

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.



LUIZ RUBIO

Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3 m
e) $2\sqrt{6}$ m

alternativa **c**

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Os triângulos *ABC* e *FBE* são semelhantes? Se sim, explique por quê. Sim, os triângulos *ABC* e *FBE* são semelhantes pelo caso AA, pois ambos possuem um ângulo reto e compartilham o ângulo $\widehat{B}$.
- Encontre outro par de triângulos semelhantes. *ABD* e *AFE*

Plano de resolução

- Monte as proporções relativas aos dois pares de triângulos semelhantes. $\frac{4}{AB} = \frac{EF}{AB - AF}$; $\frac{6}{AB} = \frac{EF}{AF}$
- Encontre uma relação entre as medidas dos segmentos *AB* e *AF*. $\frac{AB}{AF} = \frac{5}{2}$
- Resolva o sistema de equações obtido.

Resolução

- Reúna-se com dois ou três colegas.
- Mostre a eles seu plano de resolução e analise atentamente o plano deles, verificando se há ideias comuns entre vocês.
- Vocês deverão discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um dos planos para a execução do processo de resolução. $EF = 2{,}4$ m

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual em seus cadernos.

Verificação

- O grupo deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Cada grupo deverá elaborar uma síntese sobre os casos de semelhança de triângulos. Essa síntese poderá ser apresentada na forma de texto ou em um cartaz. Para cada um dos casos, inserir um exemplo que ilustre a explicação dada.

Professor, oriente os alunos para que apresentem cada um dos três casos de forma clara.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Quais sentenças a seguir são verdadeiras? alternativas **a** e **c**

a) O Teorema de Tales só é válido se o feixe de retas interceptado pela transversal for composto de retas paralelas.

b) Dois polígonos são semelhantes se seus ângulos internos forem congruentes.

c) Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

d) Se dois triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes, não se pode afirmar que os ângulos do terceiro par também serão congruentes.

2 Determine a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes, sabendo que a razão de semelhança entre os lados é 4. 16

3 Responda: duas figuras homotéticas são semelhantes?
Em duas figuras homotéticas, os ângulos correspondentes são congruentes, os segmentos correspondentes são paralelos e a razão entre suas medidas é sempre a mesma e igual à razão de homotetia. Portanto, são semelhantes.

5. $r_1 = \frac{AC}{EG} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad r_2 = \frac{AB}{EF} = \frac{3}{5}$
$r_1 \neq r_2$, ou seja, os retângulos não são semelhantes.

Aplicando

1 Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais. Sendo $AB = 3$ cm, $CD = 8$ cm e $EF = 12$ cm, determine GH. $GH = 32$ cm

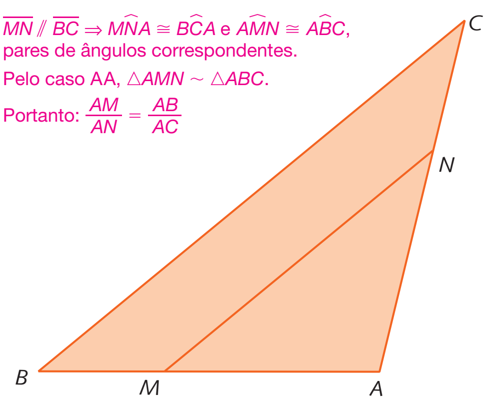
2 Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais. Sabendo que $AB = 6$ cm, $CD = 9$ cm e $EF + GH = 30$ cm, calcule EF e GH. $EF = 12$ cm; $GH = 18$ cm

DESAFIO

Sabendo que na figura abaixo $\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BC}$, prove que:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

$\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BC} \Rightarrow M\widehat{N}A \cong B\widehat{C}A$ e $A\widehat{M}N \cong A\widehat{B}C$, pares de ângulos correspondentes.
Pelo caso AA, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.
Portanto: $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$

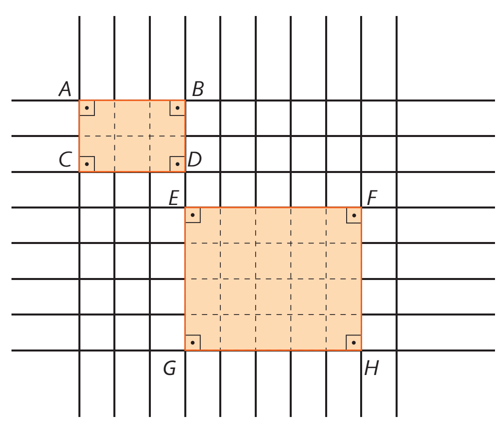


GUILHERME CASAGRANDI

3 Sejam x e y as medidas de dois segmentos. A razão do primeiro para o segundo é $\frac{2}{5}$. Adicionando uma unidade a cada medida, obtêm-se dois segmentos cuja razão é $\frac{3}{7}$. Quais são as medidas dos segmentos? 8 e 20

4 Considere um segmento $\overline{AB}$ de medida igual a 40 cm. Determine a que distâncias de A e de B deve ser posicionado um ponto P, desse segmento, que o divide na razão $\frac{3}{5}$. $PA = 15$ cm; $PB = 25$ cm ou $PA = 25$ cm e $PB = 15$ cm

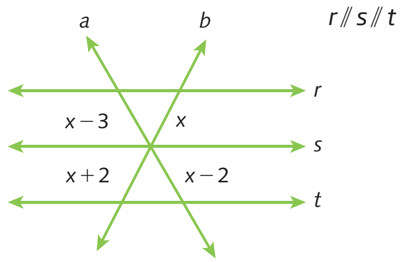
5 Explique por que podemos afirmar que os retângulos $ABDC$ e $EFHG$ não são semelhantes.



GUILHERME CASAGRANDI

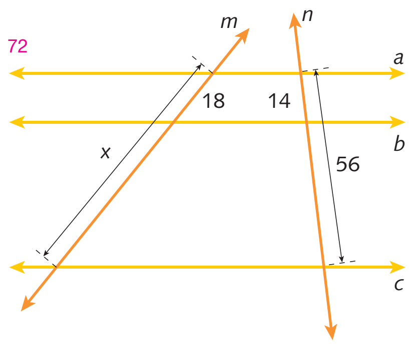
6 Construa um retângulo semelhante ao retângulo *EFHG* da figura da questão 5, cuja razão de semelhança seja $\frac{1}{2}$.
Construção de figura.

7 Determine o valor de x na figura. $x = 6$

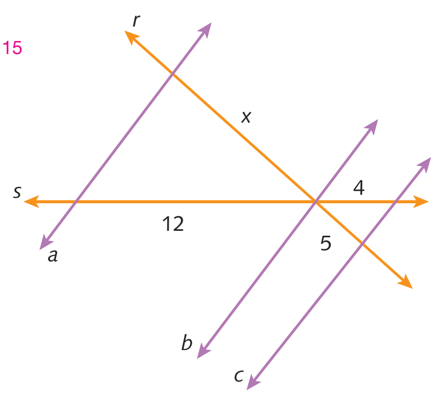


8 Nas figuras a seguir, $a \,/\!/\, b \,/\!/\, c$. Nessas condições, determine a medida x indicada.

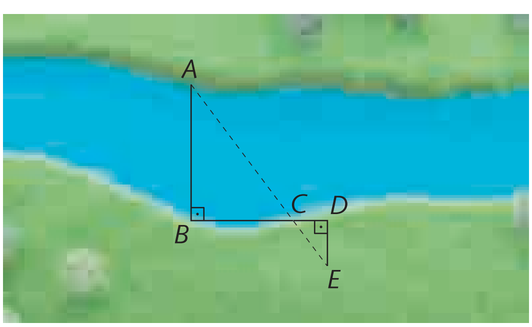
a)
$x = 72$



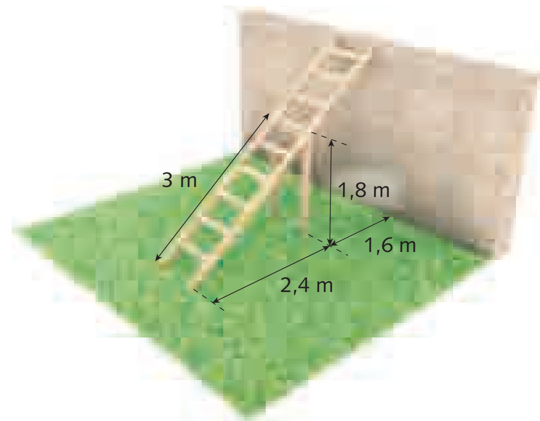
b)
$x = 15$



9 Determine a medida da largura do rio, sabendo que $BC = 36$ m, $CD = 12$ m e $DE = 16$ m. 48 m



10 Calcule a medida do comprimento da escada na figura abaixo. 5 m



Nas questões 11 a 13, identifique a única alternativa correta.

11 Na figura abaixo, sabe-se que $AB = 6$ cm, $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$ e $\frac{CD}{DB} = \frac{5}{7}$

Portanto, $\overline{DB}$ medirá: alternativa **b**

a) 4 cm
b) 5,6 cm
c) 2,8 cm
d) 4,8 cm
e) 3,4 cm

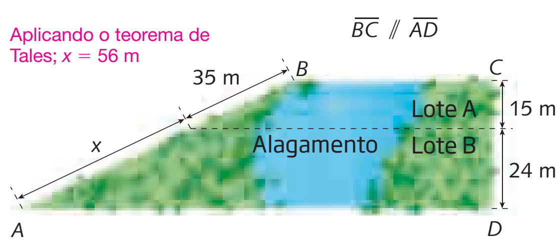
12 Dividindo um segmento de 18 cm em três partes proporcionais a 2, 3 e 4, encontramos: alternativa **d**

a) 4 cm, 7 cm e 7 cm
b) 2 cm, 6 cm e 10 cm
c) 5 cm, 6 cm e 7 cm
d) 4 cm, 6 cm e 8 cm
e) 4 cm, 5 cm e 9 cm

DESAFIO

Júlio precisa saber a medida x dos fundos do lote B, mas não pode obtê-la no próprio local por causa de um alagamento. Como Júlio pode determinar essa medida? Qual é a medida x?

Aplicando o teorema de Tales; $x = 56$ m



13 Sendo M o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ e C um ponto da reta suporte de $\overline{AB}$, externo ao segmento, tal que $\frac{CA}{CB} = 3$, então: alternativa **b**

a) $AB = \frac{AC}{2}$

b) $MC = \frac{AC + BC}{2}$

c) $MC = \frac{AC - BC}{2}$

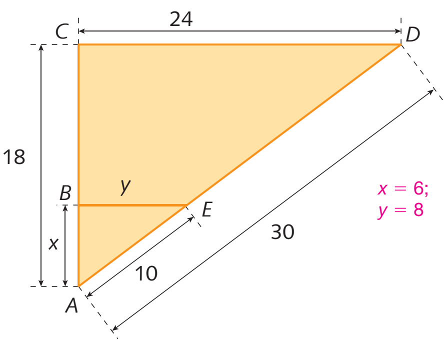
d) $AC = \frac{AB + MC}{2}$

e) $MB = \frac{AC + BC}{2}$

14 Os lados de um triângulo medem 5 m, 6 m e 3 m. Calcule a medida dos segmentos que a bissetriz interna do maior ângulo determina no lado oposto. $\frac{9}{4}$m e $\frac{15}{4}$m

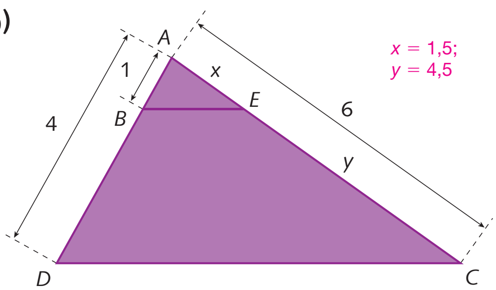
15 Calcule x e y, sabendo que $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

a)



$x = 6$;
$y = 8$

b)

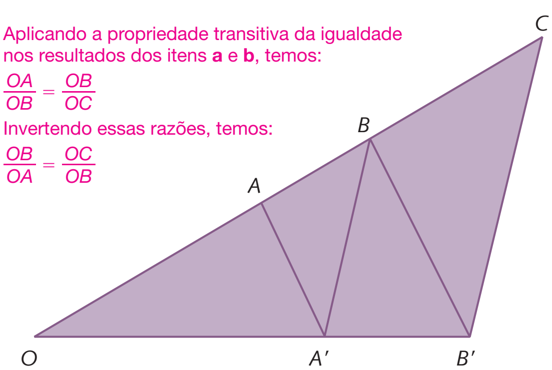


$x = 1,5$;
$y = 4,5$

16 Observe que, na figura:

- as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são paralelas entre si;
- as retas $\overleftrightarrow{BA'}$ e $\overleftrightarrow{CB'}$ são paralelas entre si.

c) Aplicando a propriedade transitiva da igualdade nos resultados dos itens **a** e **b**, temos:
$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$
Invertendo essas razões, temos:
$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$



a) Aplicando o teorema de Tales para os triângulos OAA' e OBB', escreva as relações entre as medidas dos lados. $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$

b) Aplicando o teorema de Tales para os triângulos OBA' e OCB', escreva as relações entre as medidas dos lados. $\frac{OB}{OC} = \frac{OA'}{OB'}$

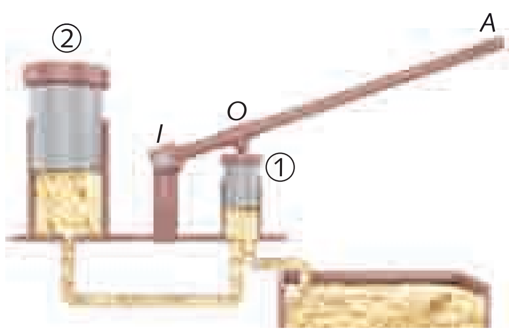
c) Prove que: $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$

17 Em um triângulo ABC, a bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{C}$ determina, sobre o lado oposto $\overline{AB}$, os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{MA}$, de medidas respectivamente iguais a 5 cm e 4 cm. Faça um esboço do triângulo ABC e depois determine a medida dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, adjacentes ao ângulo $\hat{C}$, sabendo que a soma dessas medidas é igual a 27 cm. 15 cm e 12 cm

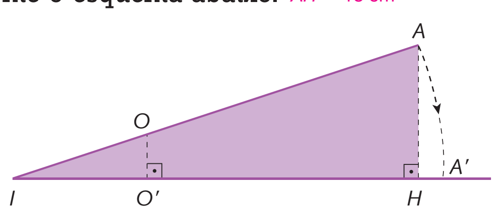
18 Os lados de um triângulo medem 10 m, 15 m e 20 m. Faça um esboço do triângulo ABC e depois calcule a medida do menor dos segmentos em que a bissetriz interna divide o maior lado. 8 m

DESAFIO

Observe o diagrama abaixo, em que, pressionando o pistão 1, uma quantidade de óleo é deslocada, elevando o pistão 2.



Determine a medida da altura $\overline{AH}$ utilizada na movimentação da alavanca, conforme o esquema abaixo. $AH = 18$ cm



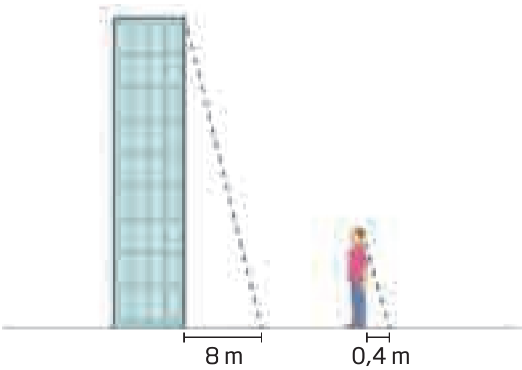
$OA = 1,5$ m; $OI = 0,5$ m; $OO' = 4,5$ cm

GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI

19 Um triângulo *ABC* tem os lados medindo 24 cm, 30 cm e 36 cm. Calcule a medida dos segmentos determinados sobre o lado maior pela bissetriz interna do ângulo oposto. 20 cm e 16 cm

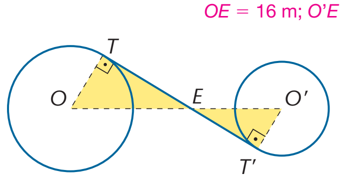
20 Em um triângulo *ABC*, cujos lados medem $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm e $AB = 10$ cm, traça-se a bissetriz interna que parte do vértice *A*. Calcule a razão entre as medidas do menor e do maior dos segmentos, nessa ordem, determinados por essa bissetriz no lado oposto ao vértice *A*. $\frac{9}{10}$

21 Ronaldo notou que, em determinada hora do dia, sua sombra media 0,40 m, enquanto a sombra do prédio onde morava media 8 m. Sabendo que Ronaldo tem 1,60 m de altura, determine a medida da altura do prédio. 32 m



22 Duas circunferências são exteriores. A distância entre os centros é 28 m, e os raios medem 8 m e 6 m. Calcule a medida dos segmentos que a tangente comum interior determina sobre o segmento que une os centros das circunferências.

$OE = 16$ m; $O'E = 12$ m



DESAFIO

O perímetro de um triângulo *ABC* é igual a 45 cm. A bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ divide o lado oposto em dois segmentos de medidas iguais a 10 cm e 8 cm. Calcule as medidas dos lados desse triângulo.

12 cm, 15 cm e 18 cm

23 Observe as figuras e responda às questões.

figura 1

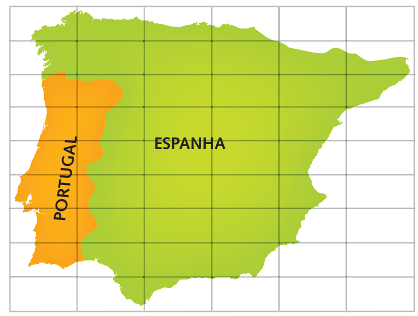


figura 2

Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 89.

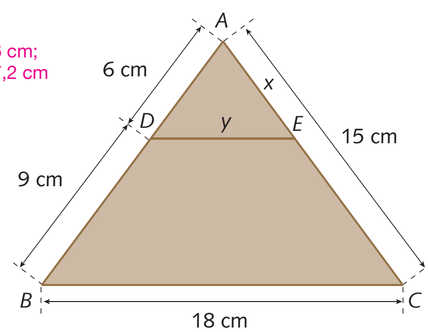
a) Qual é a razão de semelhança entre as figuras 2 e 1, nessa ordem? 1,5

b) Em quantos por cento a área da figura 2 é maior que a da figura 1? 125%

24 Calcule os valores de *x* e *y* nos triângulos.

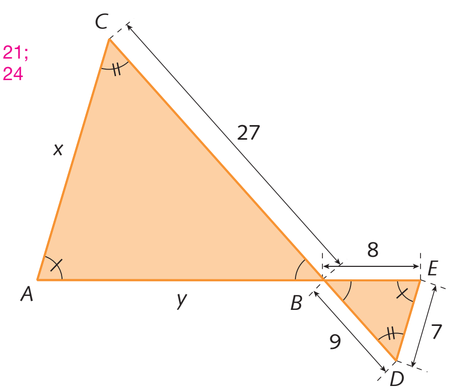
a)

$x = 6$ cm;
$y = 7{,}2$ cm



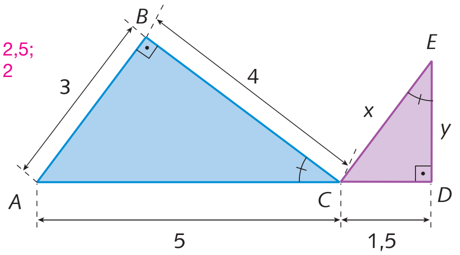
b)

$x = 21$;
$y = 24$

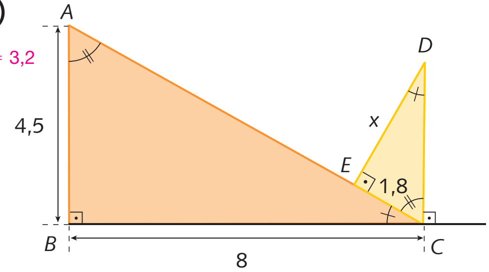


25 Calcule os valores de x e y nos triângulos.

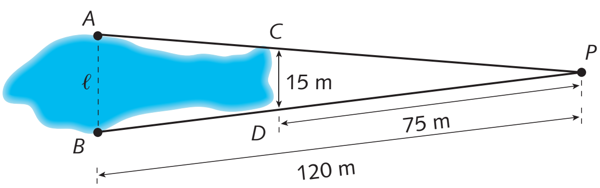
a) $x = 2{,}5$; $y = 2$



b) $x = 3{,}2$

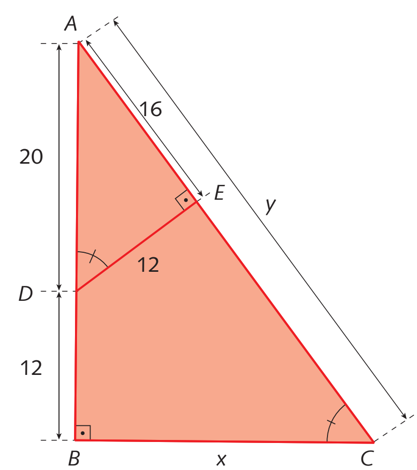


26 Qual é a medida de $\overline{AB}$ no lago da figura? $\ell = 24$ m

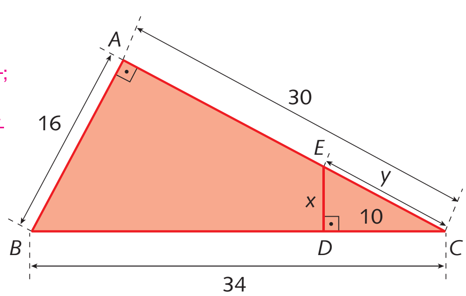


27 Determine os valores de x e y nos triângulos.

a) $x = 24$; $y = 40$



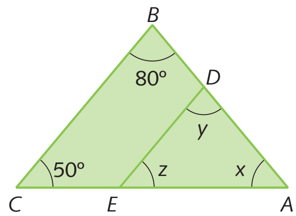
b) $x = \frac{16}{3}$; $y = \frac{34}{3}$



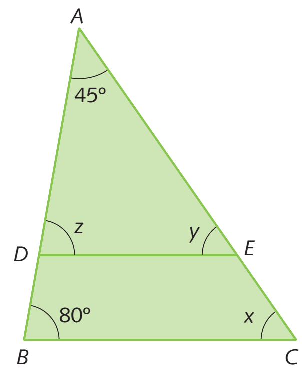
28 Um triângulo, cujos lados medem 12 m, 18 m e 20 m, é semelhante a outro cujo perímetro é 10 m. Calcule a medida do maior dos lados do triângulo menor. 4 m

29 Determine a medida dos ângulos assinalados em cada figura, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

a) $x = 50°$; $y = 80°$; $z = 50°$



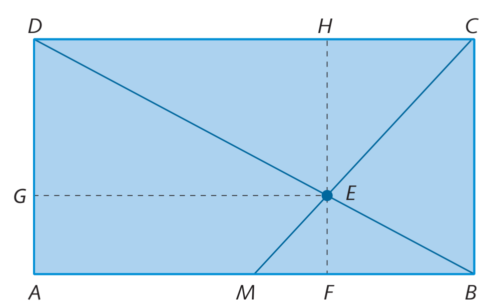
b) $x = 55°$; $y = 55°$; $z = 80°$



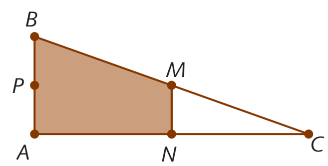
30 Calcule a medida da altura de uma torre cuja sombra mede 3 m, no mesmo instante em que um bastão de 91 cm, colocado em uma posição paralela à torre, produz sombra de 35 cm. 7,8 m

DESAFIO

Em um retângulo $ABCD$, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, 20 m e 12 m. Sabendo que M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, calcule as distâncias EF e EG do ponto E aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, sendo E a intersecção da diagonal $\overline{BD}$ com o segmento $\overline{CM}$. $EF = 4$ m; $EG = \frac{40}{3}$ m



31 **(Enem)** Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



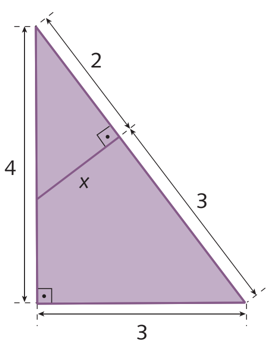
GUILHERME CASAGRANDI

A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.
Nessas condições, a área a ser calçada corresponde: alternativa **e**

a) à mesma área do triângulo AMC.
b) à mesma área do triângulo BNC.
c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
d) ao dobro da área do triângulo MNC.
e) ao triplo da área do triângulo MNC.

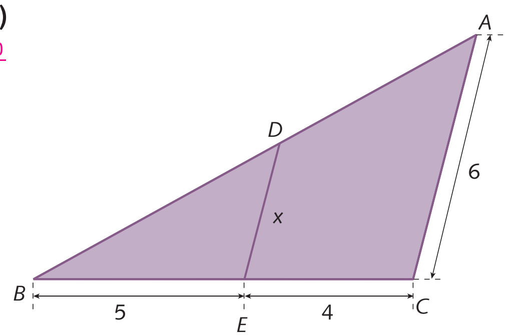
32 Nas figuras, determine o valor de x.

a) 1,5



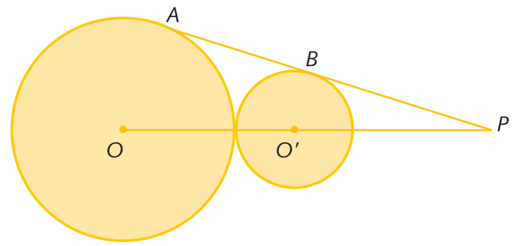
DESAFIO
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
$\frac{H}{h} = \frac{\frac{b}{2} + Sp}{Se}$
mas $h = Se$
Então: $\frac{H}{Se} = \frac{\frac{b}{2} + Sp}{Se}$,
ou seja, $H = \frac{b}{2} + Sp$

b) $\frac{10}{3}$



GUILHERME CASAGRANDI

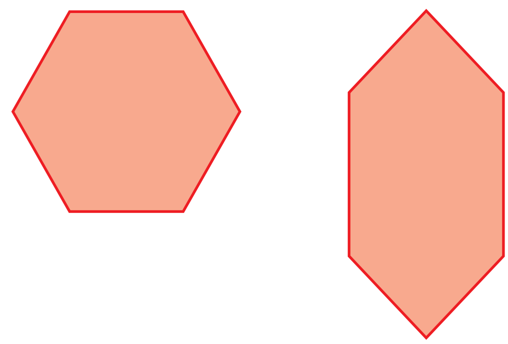
33 O raio da circunferência de centro O mede 5 cm, e o de centro O' mede 3 cm. Qual é a medida de $\overline{O'P}$? 12 cm



GUILHERME CASAGRANDI

34 Pode-se dizer que estes hexágonos são semelhantes? Justifique sua resposta.

Não, pois as medidas dos ângulos correspondentes são diferentes.

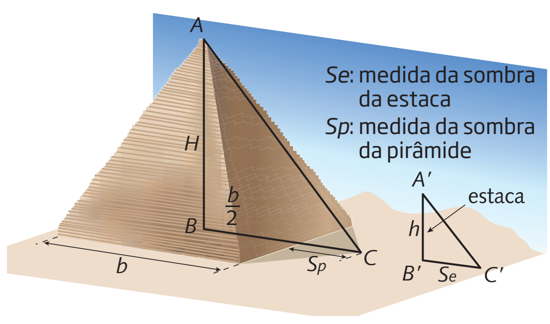


GUILHERME CASAGRANDI

DESAFIO

Apresentamos abaixo outro possível método que Tales (a pedido do faraó Amasis do Egito) pode ter usado para determinar a medida da altura de uma pirâmide sem escalar o monumento.

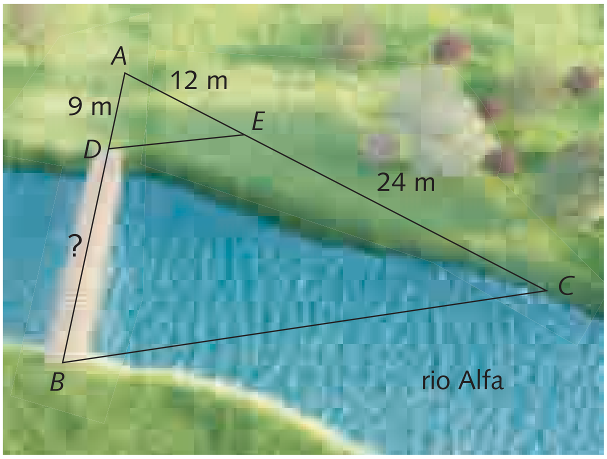
"Quando a medida do comprimento da estaca for igual à medida do comprimento da sua sombra, podemos afirmar que a medida da altura da pirâmide será igual à medida do comprimento da sua sombra mais a metade da medida da base."



LUIZ RUBIO

- Usando semelhança de triângulos, justifique o método de Tales.

35 Determine a medida *BD* do comprimento da ponte sobre o rio Alfa. 18 m

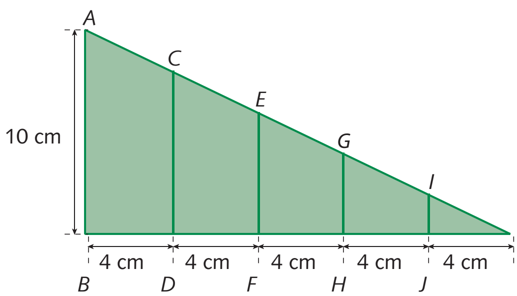


$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

GUILHERME CASAGRANDI

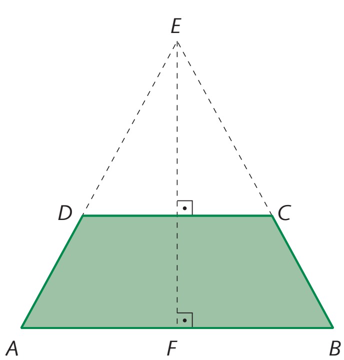
36 Calcule a soma das medidas dos segmentos na expressão:

$AB + CD + EF + GH + IJ$ 30 cm



GUILHERME CASAGRANDI

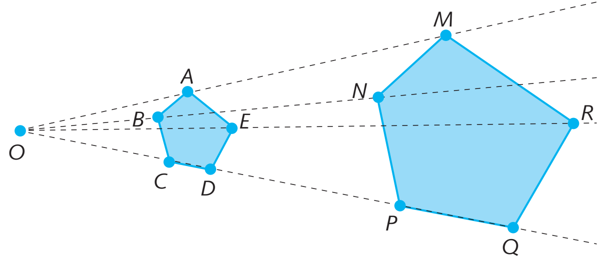
37 As bases de um trapézio *ABCD* medem 50 cm e 30 cm, e a altura, 10 cm. Prolongando os lados não paralelos, eles se interceptam em um ponto *E*. Determine a medida da altura $\overline{EF}$ do triângulo *ABE*. 25 cm



GUILHERME CASAGRANDI

38 As bases de um trapézio medem 8 m e 12 m, e os lados, 3 m e 5 m. Calcule a medida de dois lados do maior triângulo obtido ao se prolongar os lados do trapézio. 9 m e 15 m

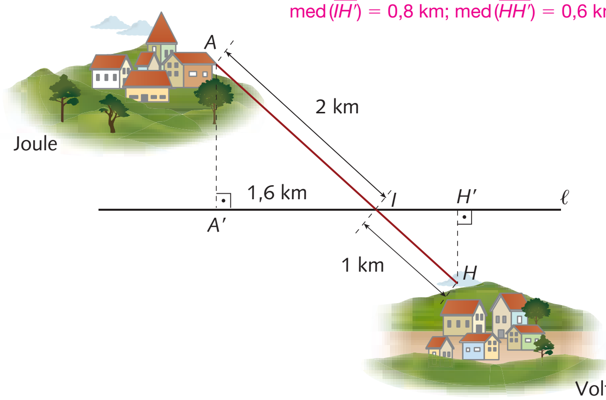
39 Sendo $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $CD = 13$ cm, $DE = 15$ cm e $EA = 20$ cm, determine a medida de $\overline{QR}$, sabendo que o perímetro de *MNPQR* é 2,8 m. 60 cm



GUILHERME CASAGRANDI

40 Uma linha de alta-tensão alimenta as cidades de Joule e Volt, de acordo com a figura. Essa linha corta uma estrada ℓ no ponto *I*. Determine *IH'* e *HH'*.

med$(\overline{IH'})$ = 0,8 km; med$(\overline{HH'})$ = 0,6 km



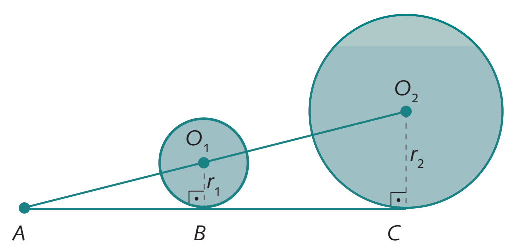
GUILHERME CASAGRANDI

41 Em um triângulo, a base mede 10 m e a altura, 6 m. Quais são as dimensões do retângulo inscrito nesse triângulo, se a medida da altura do retângulo é a quinta parte da medida de sua base? (Considere que a base do retângulo pertence à base do triângulo.)

medida da base: 7,5 m; medida da altura: 1,5 m

DESAFIO

Na figura, $r_1 = 3$, $r_2 = 7$ e $AO_1 = 12$. Determine a distância entre os centros O_1 e O_2. 16



GUILHERME CASAGRANDI

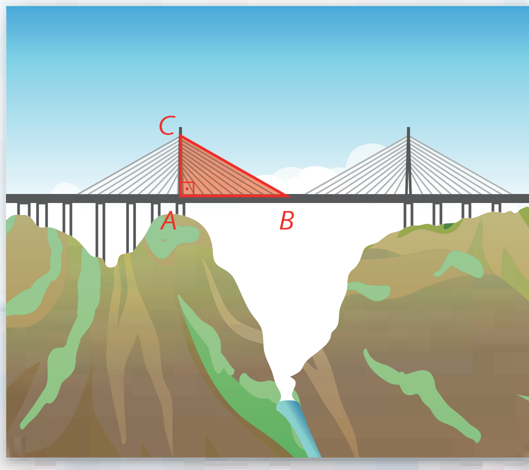
CAPÍTULO 7

RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

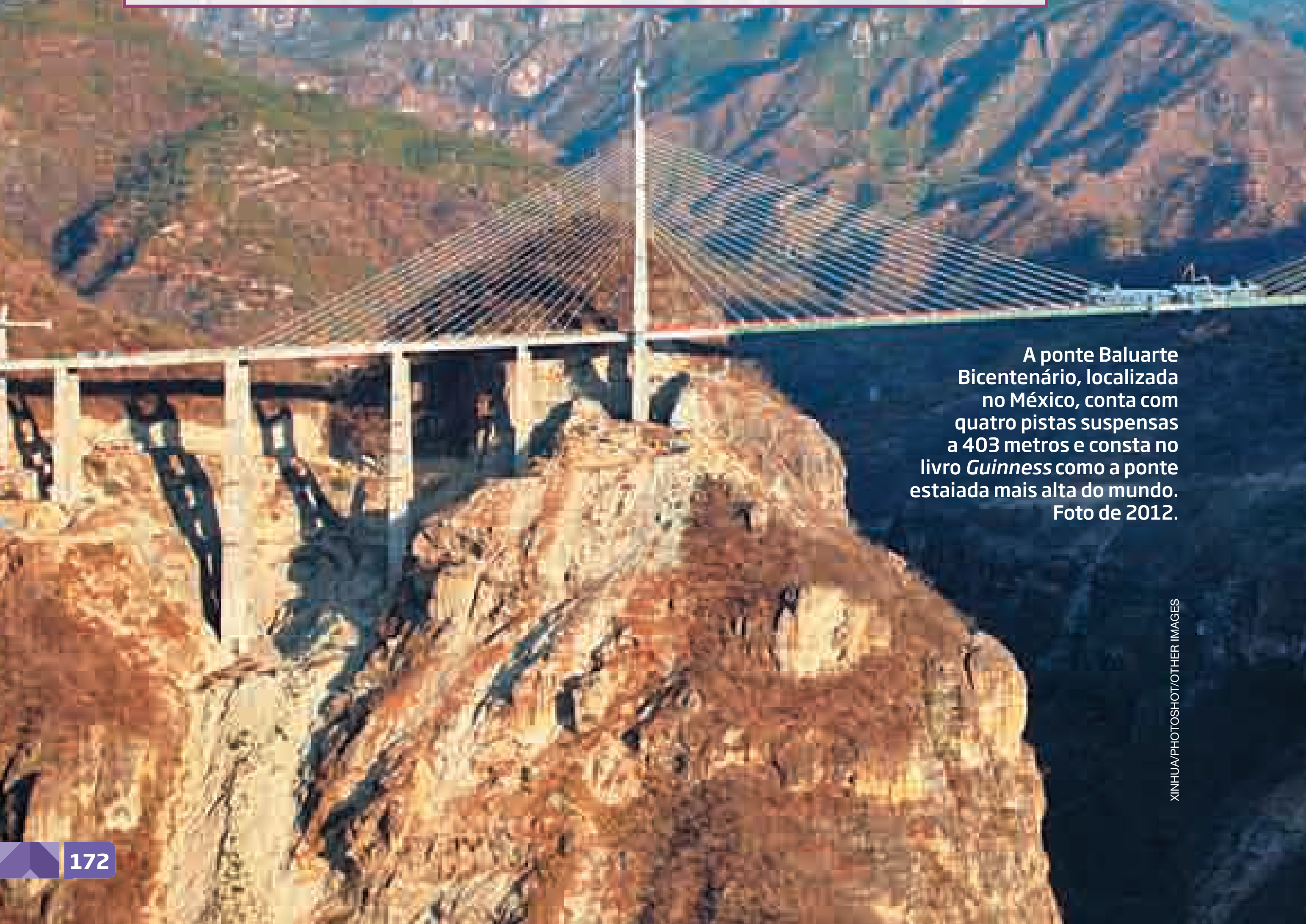
É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Na ilustração ao lado há a representação da ponte da foto desta abertura. Nela, está destacado o triângulo *ABC*. Considerando essa ilustração, responda:

- Como pode ser classificado o triângulo em destaque na cor vermelha de acordo com a medida dos seus ângulos internos? triângulo retângulo
- Que lado desse triângulo é oposto ao ângulo reto? Lado $\overline{BC}$



GUILHERME CASAGRANDI



A ponte Baluarte Bicentenário, localizada no México, conta com quatro pistas suspensas a 403 metros e consta no livro *Guinness* como a ponte estaiada mais alta do mundo. Foto de 2012.

XINHUA/PHOTOSHOT/OTHER IMAGES

Neste capítulo, vamos trabalhar com as relações métricas no triângulo retângulo, os conceitos de seno, cosseno e tangente e suas aplicações na resolução de problemas.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

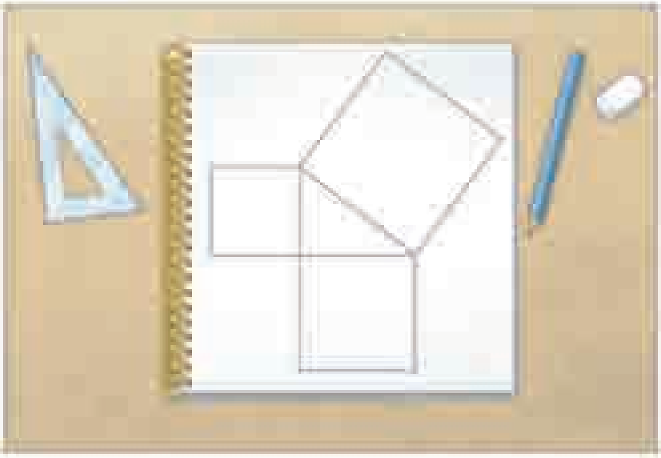
Desde a Antiguidade, o **triângulo retângulo** – com suas características próprias e regras particulares – é uma poderosa ferramenta no estudo de astronomia, agrimensura, navegação e construção.

DARIO SABLJAK/SHUTTERSTOCK

O sextante é um instrumento utilizado para medir o ângulo entre a linha mirada de um astro e a linha do horizonte.

Faça a seguinte experiência:

- Desenhe, em uma folha, um triângulo retângulo de lados medindo: 3 cm, 4 cm e 5 cm.
- Desenhe 3 quadrados com lados de medida 3 cm, 4 cm e 5 cm, de modo que cada lado do seu triângulo também seja lado de um quadrado.



GEORGE TUTUMI

a) Divida cada um dos quadrados em quadradinhos menores de lados medindo 1 cm.

b) Quantos quadradinhos você obteve em cada quadrado? 9, 16 e 25

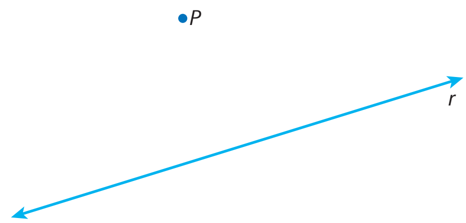
c) Considerando um quadradinho como unidade de área, qual é a área de cada quadrado maior? 9 quadradinhos, 16 quadradinhos e 25 quadradinhos

d) Existe relação entre as áreas dos quadrados cujos lados medem 3 cm e 4 cm com a do quadrado com lados de medida 5 cm. Converse com um colega e estabeleça essa relação. Depois, converse com o professor e os demais colegas da classe.
Espera-se que os alunos percebam que a área do quadrado com lados de medida 5 cm é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados. Ao longo desse capítulo, faremos a formalização e a demonstração do teorema de Pitágoras.

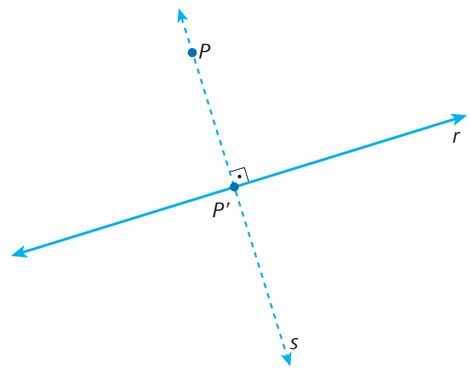
Neste capítulo, vamos estudar de forma detalhada o triângulo retângulo e suas relações métricas. Também vamos estudar as razões trigonométricas.

1 Projeções ortogonais

- Considere um ponto P e uma reta r.

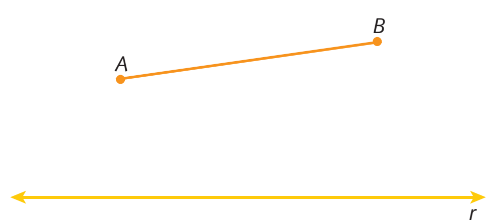


Imagine que traçamos por P uma reta s perpendicular a r. Assim obtemos sobre r um ponto P' denominado **projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r**.

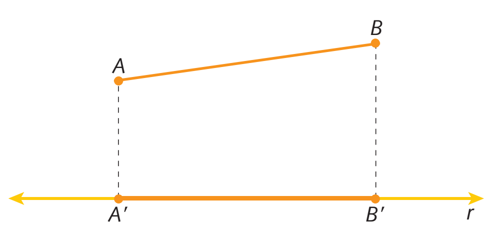


Se o ponto P pertence à reta r, ele coincide com sua projeção ortogonal sobre ela.

- Agora, considere o segmento de reta $\overline{AB}$ e a reta r.



Denominamos **projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r** o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos do segmento $\overline{AB}$ sobre r.



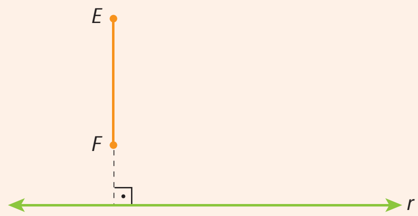
Logo, $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r.

GUILHERME CASAGRANDI

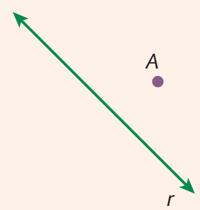
1 Copie as figuras no caderno e determine:

a) a projeção ortogonal do segmento $\overline{EF}$ sobre r; Construção de figura.

LUIZ RUBIO

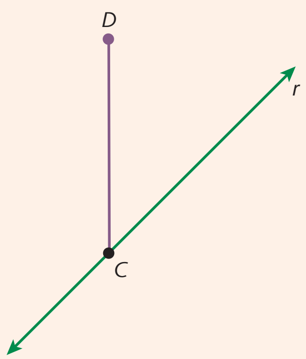


b) a projeção ortogonal de A sobre r;



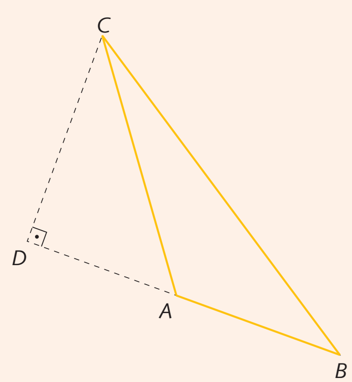
c) a projeção ortogonal do segmento $\overline{CD}$ sobre a reta r.

GUILHERME CASAGRANDI



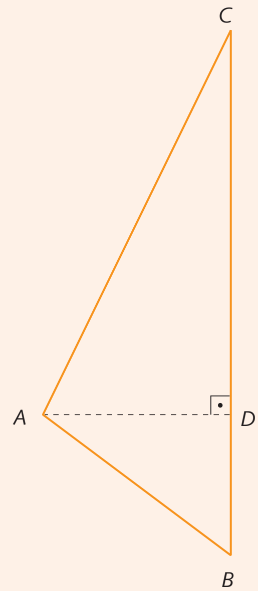
2 Observe as figuras e determine:

a) a projeção ortogonal do segmento $\overline{BC}$ sobre $\overleftrightarrow{AB}$; $\overline{BD}$



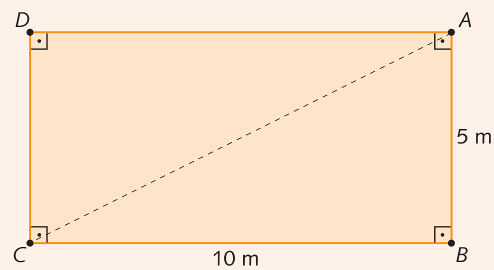
b) a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ e a projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$; $\overline{BD}$; $\overline{CD}$

GUILHERME CASAGRANDI



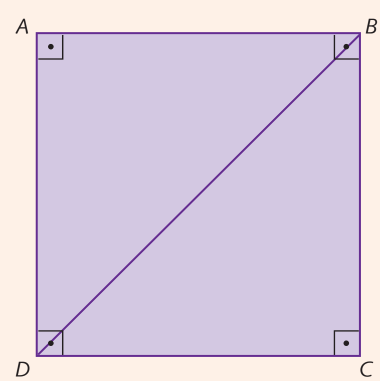
c) a projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{CB}$; $\overline{BC}$

LUIZ RUBIO



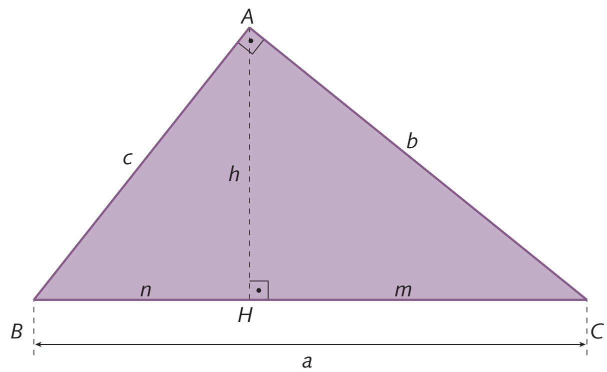
d) a projeção ortogonal do segmento $\overline{AD}$ sobre $\overleftrightarrow{DC}$ e a projeção ortogonal do segmento $\overline{BD}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$. D; $\overline{BC}$

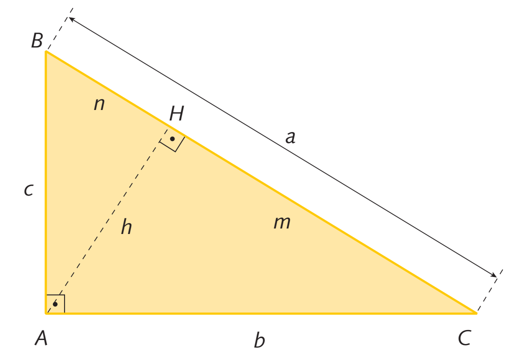
LUIZ RUBIO



2 Triângulo retângulo

Considere os triângulos:





GUILHERME CASAGRANDI

Representamos por letras minúsculas as medidas dos diversos segmentos dos triângulos. Assim:

$\text{med}(\overline{BC}) = a$	$\text{med}(\overline{AH}) = h$
$\text{med}(\overline{AC}) = b$	$\text{med}(\overline{BH}) = n$
$\text{med}(\overline{AB}) = c$	$\text{med}(\overline{CH}) = m$

Denominamos:

$a \longrightarrow$ medida da hipotenusa;

b e $c \longrightarrow$ medida dos catetos;

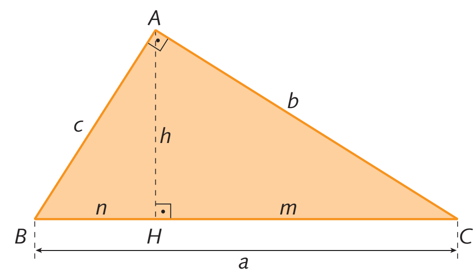
$h \longrightarrow$ medida da altura relativa à hipotenusa;

$m \longrightarrow$ medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa;

$n \longrightarrow$ medida da projeção de $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa.

Relações métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo *ABC*.

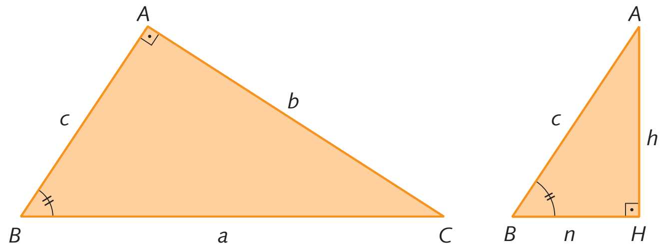


LUIZ RUBIO

Traçando a altura ($\overline{AH}$) relativa à hipotenusa, podemos destacar três triângulos retângulos: $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$.

Esses triângulos são semelhantes entre si. Veja:

- $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (I)

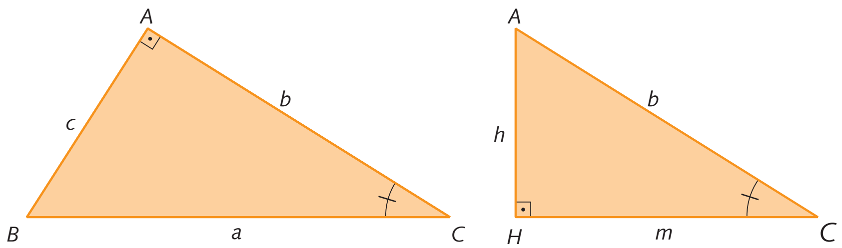


Podemos observar que $B\widehat{A}C \cong B\widehat{H}A$, pois são ângulos retos, e $A\widehat{B}C \cong H\widehat{B}A$, pois são ângulos comuns aos dois triângulos.

Pelo caso AA, temos:

$\triangle ABC \sim \triangle HBA$

- $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ (II)



Podemos observar que $B\widehat{A}C \cong A\widehat{H}C$, pois são ângulos retos, e $A\widehat{C}B \cong H\widehat{C}A$, pois são ângulos comuns aos dois triângulos.

Pelo caso AA, temos:

$\triangle ABC \sim \triangle HAC$

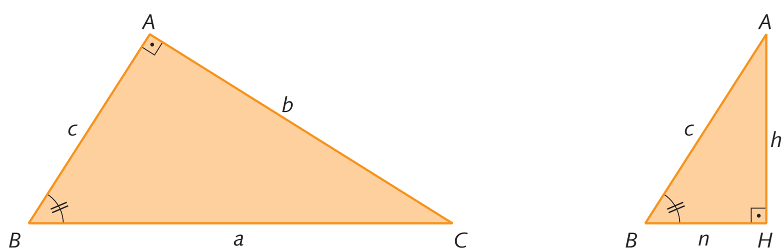
Comparando (I) e (II) podemos afirmar que: $\triangle HBA \sim \triangle HAC$

Portanto, os triângulos *ABC*, *HBA* e *HAC* são semelhantes entre si.

Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa determina dois outros triângulos retângulos semelhantes entre si e também ao triângulo dado.

Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais. Assim, podemos escrever as seguintes proporções em relação aos pares de triângulos:

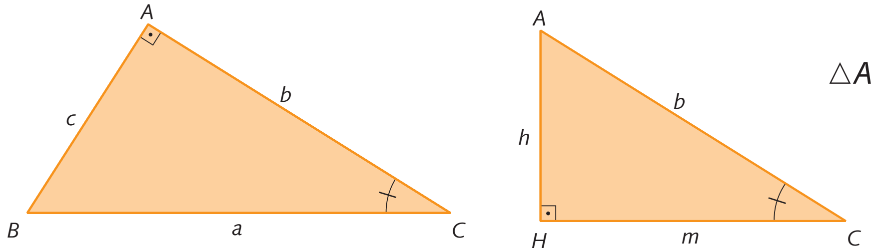
- $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$



$\triangle ABC \sim \triangle HBA$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow \boxed{c^2 = a \cdot n}$$

- $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$

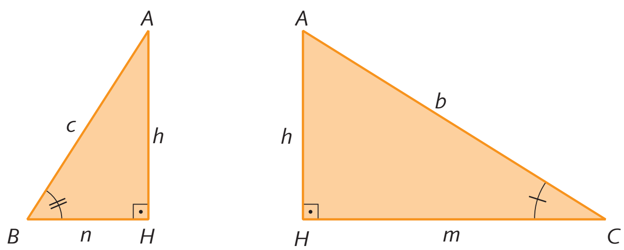


$$\triangle ABC \sim \triangle HAC$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot m}$$

O quadrado das medidas de cada um dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal do cateto considerado sobre a hipotenusa.

- $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$

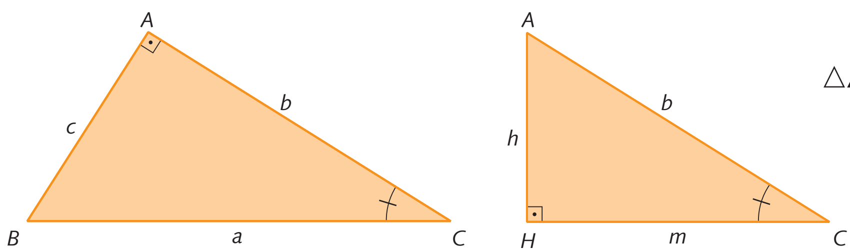


$$\triangle HBA \sim \triangle HAC$$

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

- $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$



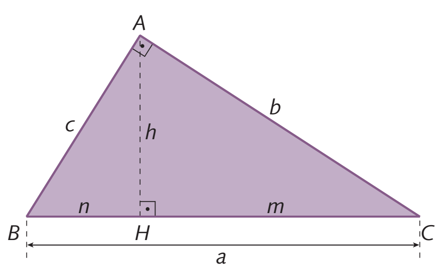
$$\triangle ABC \sim \triangle HAC$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

Exemplos

- A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 60 cm, e a projeção de um dos catetos sobre ela mede 48 cm. Calcular a altura relativa à hipotenusa.



$a = 60$

$m = 48$

$m + n = a \Rightarrow n = a - m \Rightarrow n = 60 - 48 \Rightarrow n = 12$

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 48 \cdot 12 \Rightarrow h^2 = 576$

Como $h > 0$, temos: $h = \sqrt{576} = 24$

Portanto, a altura relativa à hipotenusa mede 24 cm.

GUILHERME CASAGRANDI

- Determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 30 cm, e a sua projeção sobre a hipotenusa, 18 cm.

$b = 30$

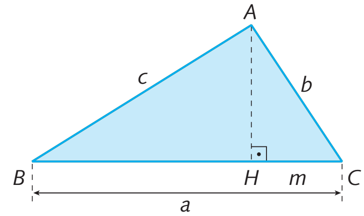
$m = 18$

$b^2 = a \cdot m$

$900 = a \cdot 18$

$a = \dfrac{900}{18} = 50$

Portanto, a hipotenusa mede 50 cm.

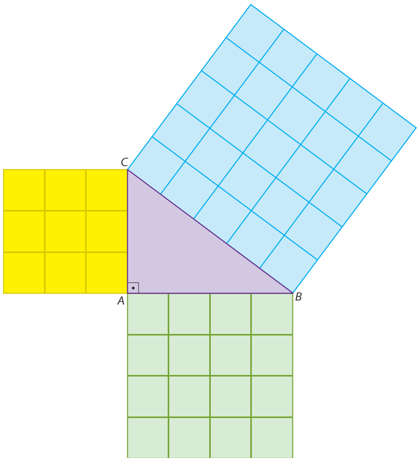


GUILHERME CASAGRANDI

3 Teorema de Pitágoras e aplicações

Vimos no início deste capítulo, na seção *Trocando Ideias*, que no triângulo retângulo com lados de medida 3 cm, 4 cm e 5 cm, podemos estabelecer uma relação entre as medidas dos lados. Vamos retomar esse caso fazendo uso de uma unidade u de medida de comprimento.

Na figura ao lado, temos o triângulo retângulo com lados de medida 3 u, 4 u e 5 u e três quadrados construídos sobre cada um dos lados do triângulo.



LUIZ RUBIO

Esses quadrados estão divididos em quadradinhos com lados de medida 1 u, e cada um desses quadradinhos tem área igual a 1 u^2.

- Área do quadrado amarelo: 9 u^2
- Área do quadrado verde: 16 u^2
- Área do quadrado azul: 25 u^2

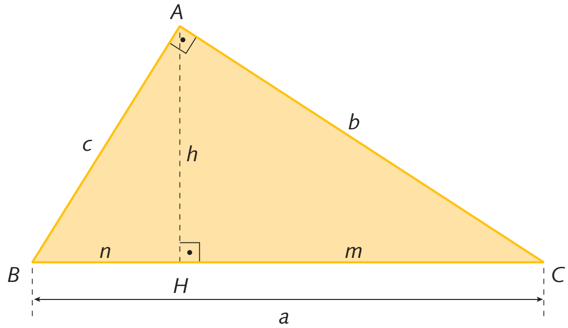
Observe que a área do quadrado azul corresponde à soma das áreas dos outros dois quadrados, pois 25 u^2 = 16 u^2 + 9 u^2

Associando essa relação às medidas dos lados do triângulo, temos:

$$25 = 16 + 9 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2$$

Observe que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Será que essa relação é válida para todos os triângulos retângulos? Vamos verificar!

Considere triângulo retângulo ABC abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Já vimos que:

$b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$

Adicionando as sentenças membro a membro, obtemos:

$b^2 + c^2 = am + an$

$b^2 + c^2 = a(m + n)$

Como $m + n = a$, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Assim, concluímos que:

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Essa relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

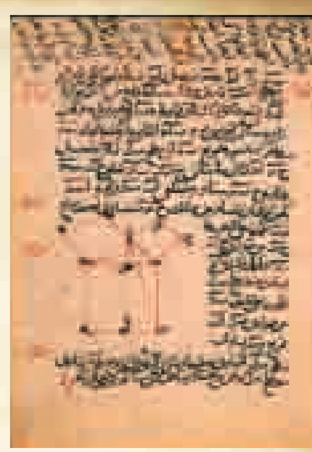
UM POUCO DE HISTÓRIA

PICTURESCOLOURLIBRARY.COM/ STOCK CONNECTION/GLOW IMAGES

Estátua de Pitágoras, localizada na cidade Pythagorio, Ilha de Samos, Grécia.

Pitágoras (580 a.C.-500 a.C.)

Pitágoras fundou a Escola Pitagórica, em Crotona (colônia grega situada ao sul da Itália), que constituía um centro de estudos de Matemática, Filosofia e Ciências Naturais. Como os ensinamentos eram orais e era costume atribuir todas as descobertas ao fundador da escola, várias delas foram atribuídas a Pitágoras, embora não se saiba ao certo se realmente foram realizadas por ele ou por outros membros do grupo.



THE BRITISH LIBRARY, LONDON

Página da obra *Al-Jabr*, de Al-Khowarizmi, em que há uma referência ao teorema de Pitágoras.

Pitágoras é lembrado até hoje, principalmente pelo teorema que leva seu nome e estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Sabe-se, atualmente, que os babilônios, mais de um milênio antes de Pitágoras, já tinham conhecimento de tal relação para casos particulares, porém sua primeira demonstração pode ter sido dada por Pitágoras. Hoje em dia, são conhecidas cerca de 370 demonstrações desse teorema.

DIOGO SAITO

Veja um exemplo em que usamos o teorema de Pitágoras para determinar a medida desconhecida em um triângulo retângulo.

- A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 cm, e a razão entre as medidas dos catetos é $\frac{3}{4}$. Vamos calcular as medidas dos catetos.

$b^2 + c^2 = 20^2 = 400$

$\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$

$\frac{b^2}{c^2} = \frac{9}{16}$

$b^2 = \frac{9}{16}c^2$

Substituindo b^2 por $\frac{9}{16}c^2$ em $b^2 + c^2 = 400$, temos:

$\frac{9}{16}c^2 + c^2 = 400$

$\frac{25}{16}c^2 = 400 \Rightarrow c^2 = \frac{16 \cdot 400}{25}$

Como $c > 0$, temos $c = \frac{4 \cdot 20}{5} = 16$

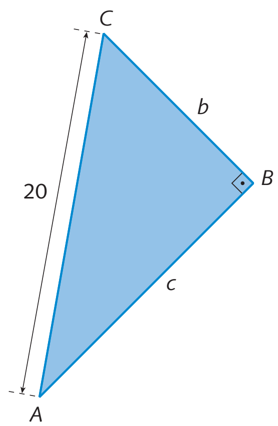
$b = \frac{3}{4}c = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$

Portanto, os catetos medem 12 cm e 16 cm.

Se julgar necessário, chame a atenção dos alunos que, para descobrir as medidas dos catetos, podemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 400 \\ b^2 = \frac{9}{16}c^2 \end{cases}$$

Se julgar conveniente, recorde os alunos que: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ e $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ para $a > 0$ e $b > 0$



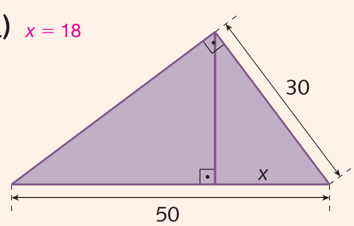
GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

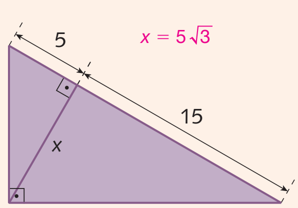
Faça as atividades no caderno.

1 Determine o valor de x nos triângulos retângulos.

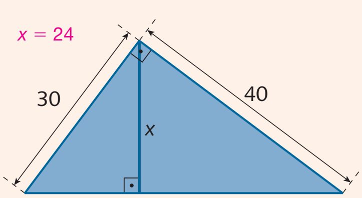
a) $x = 18$



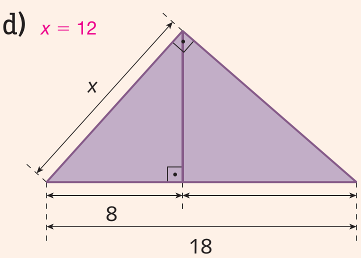
b) $x = 5\sqrt{3}$



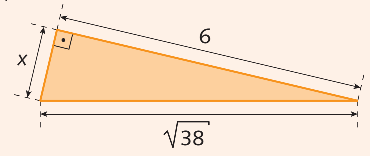
c) $x = 24$



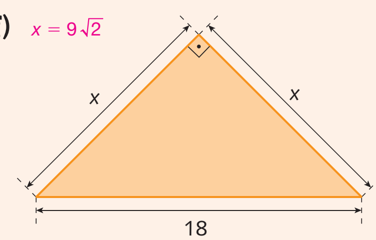
d) $x = 12$



e) $x = \sqrt{2}$



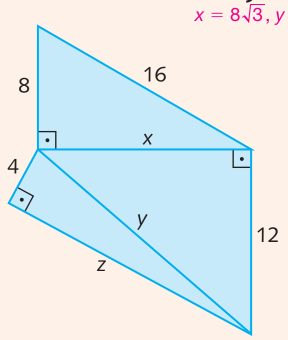
f) $x = 9\sqrt{2}$



GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

2 Determine as medidas x, y e z. $x = 8\sqrt{3}$, $y = 4\sqrt{21}$ e $z = 8\sqrt{5}$



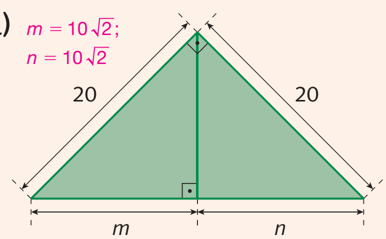
LUIZ RUBIO

3 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 40 m, e a altura relativa a ela, 19,2 m. Calcule as medidas dos catetos. 24 m e 32 m

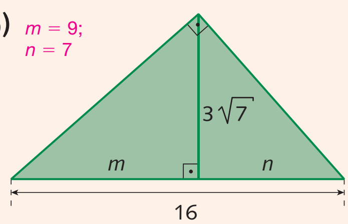
4 Uma escada mede 4 m e tem uma de suas extremidades apoiada no topo de um muro. A outra extremidade dista 2,4 m da base do muro. Determine a medida da altura do muro. 3,2 m

5 Determine os valores de m e n nos triângulos retângulos abaixo.

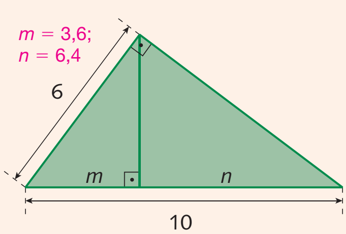
a) $m = 10\sqrt{2}$; $n = 10\sqrt{2}$



b) $m = 9$; $n = 7$



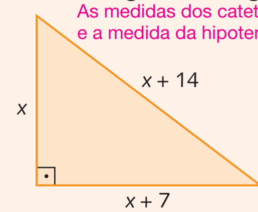
c) $m = 3{,}6$; $n = 6{,}4$



GUILHERME CASAGRANDI

6 Em um trapézio retângulo, as bases medem 16 cm e 4 cm, respectivamente. O maior lado não paralelo mede 13 cm. Qual é o perímetro do trapézio? 38 cm

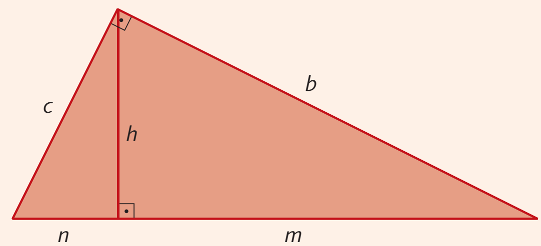
7 Determine as medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo abaixo.
As medidas dos catetos são 21 e 28, e a medida da hipotenusa é 35.



LUIZ RUBIO

8 A hipotenusa de um triângulo mede 40 cm, e a razão entre os catetos é de $\frac{3}{4}$. Calcule as medidas dos catetos. 24 cm e 32 cm

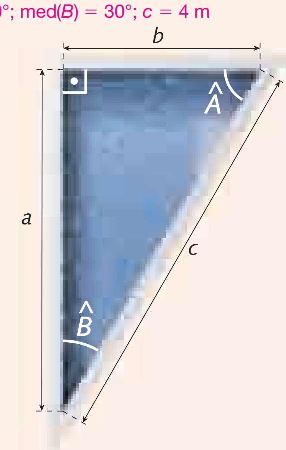
9 No triângulo retângulo, b é o dobro de c. Determine $\frac{m}{n}$. 4



GUILHERME CASAGRANDI

10 Qual é a razão entre as medidas da hipotenusa e de um cateto de um triângulo retângulo isósceles? $\sqrt{2}$

11 Uma empresa foi encarregada de construir uma piscina em um terreno. Como o terreno tinha formato irregular, só foi possível construir uma piscina em forma de triângulo com estas características: $med(\widehat{A}) = 2 \cdot med(\widehat{B})$, $a = 2\sqrt{3}$ m e $b = 2$ m. Determine $med(\widehat{A})$ $med(\widehat{B})$ e c.
$med(\widehat{A}) = 60°$; $med(\widehat{B}) = 30°$; $c = 4$ m

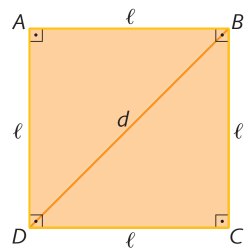


GUILHERME CASAGRANDI

Aplicações do teorema de Pitágoras

Agora, vamos estudar duas importantes aplicações do teorema de Pitágoras: uma no quadrado e outra no triângulo equilátero.

Diagonal de um quadrado



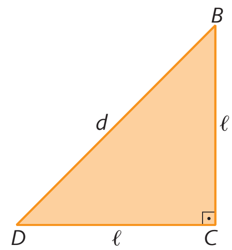
Considere o quadrado *ABCD*, em que:

- ℓ é a medida do lado
- d é a medida da diagonal

Observe que a diagonal $\overline{BD}$ divide o quadrado *ABCD* em dois triângulos retângulos congruentes ($\triangle BAD$ e $\triangle BCD$).

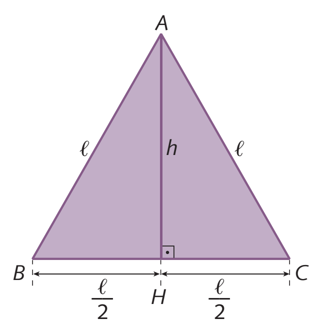
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *BCD*, obtemos:

$$(BD)^2 = (CD)^2 + (BC)^2$$
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$



Portanto, em um quadrado com lados de medida ℓ, a medida da diagonal é $\ell\sqrt{2}$.

Altura de um triângulo equilátero



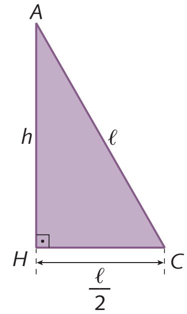
Considere o triângulo equilátero *ABC*, em que:

- ℓ é a medida do lado
- h é a medida da altura

Observe que a altura $\overline{AH}$ divide o $\triangle ABC$ equilátero em dois triângulos retângulos congruentes ($\triangle ABH$ e $\triangle ACH$).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *ACH*, obtemos:

$$(AC)^2 = (AH)^2 + (CH)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$



Portanto, em um triângulo equilátero com lados de medida ℓ, a altura é de $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

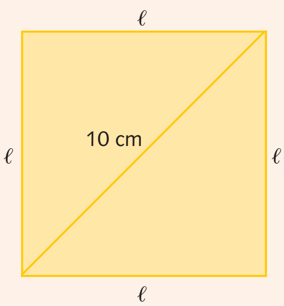
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a medida da diagonal de um quadrado com lados de medida 17 cm. $17\sqrt{2}$ cm

2 Determine a medida da diagonal de um quadrado com 400 cm^2 de área. $20\sqrt{2}$ cm

3 A diagonal de um quadrado mede 10 cm. Calcule a medida do lado desse quadrado. $5\sqrt{2}$ cm



GUILHERME CASAGRANDI

4 Qual é a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro mede $10\sqrt{2}$? 5

5 Qual é a medida da diagonal de um retângulo cuja medida da altura *x* tem um terço da medida do seu comprimento? $\sqrt{10}x$

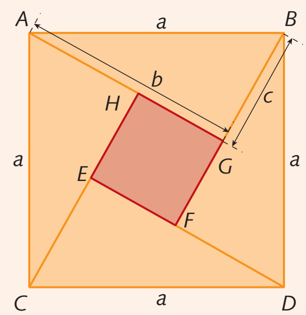
6 Determine a medida da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm. $4\sqrt{3}$ cm

7 O perímetro de um triângulo equilátero é 12 cm. Determine a medida da altura desse triângulo. $2\sqrt{3}$ cm

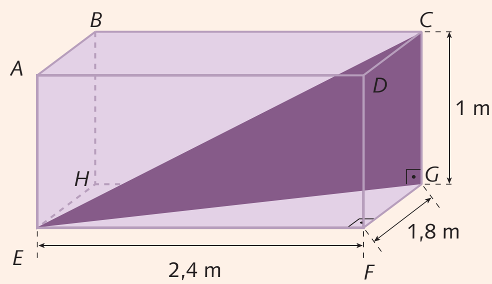
8 Qual é o perímetro de um triângulo equilátero cuja altura mede $4\sqrt{5}$ cm? $8\sqrt{15}$ cm

9 Mostre que a área do quadrado *EFGH* é igual a $(b - c)^2$.

Sugestão:
$A = a^2 - 4 \cdot \frac{bc}{2}$
$A = (b^2 + c^2) - 2bc$
$A = (b - c)^2$



10 Observe o paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo e calcule a medida dos segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{EC}$. $EG = 3$ m; $EC = \sqrt{10}$ m



GUILHERME CASAGRANDI

4 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

A palavra **trigonometria** vem do grego *trígono*, que significa “triangular”, e *metria*, que significa “medida”.

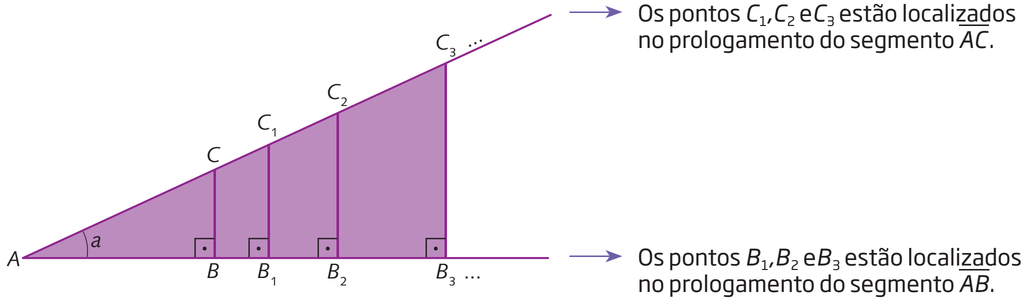
Entre os povos antigos, a Trigonometria surgiu como elemento de apoio na solução de problemas práticos de astronomia, agrimensura e navegação.

Hiparco – astrônomo grego (190 a.C.-125 a.C.) famoso por ter catalogado aproximadamente 1 000 estrelas e calculado a distância da Terra à Lua com erro inferior a 10% – teria sido o primeiro a utilizar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. É considerado o precursor da Trigonometria.

Atualmente, a Trigonometria tem vasta aplicação na topografia, na aviação e nos diversos ramos da Engenharia.

Seno de um ângulo agudo

Considere os triângulos retângulos ABC, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3.



LUIZ RUBIO

Os triângulos retângulos AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3 são semelhantes ao triângulo ABC, pois têm um ângulo comum $(\hat{A})$ e um ângulo reto (caso AA). Assim, podemos escrever:

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \qquad \triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2 \qquad \triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$$

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \qquad \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2} \qquad \frac{AC}{AC_3} = \frac{BC}{B_3C_3}$$

Pela propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{BC}{AC} \qquad \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{BC}{AC} \qquad \frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{BC}{AC}$$

Observe que:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } a}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Vale lembrar que podemos traçar infinitos triângulos retângulos semelhantes ao triângulo ABC, com vértice A e lado oposto ao vértice A formado por segmentos paralelos a $\overline{BC}$ com vértices situados nos prologamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

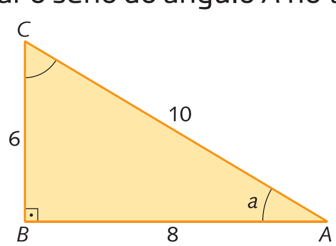
A razão que relaciona a medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$ com a medida da hipotenusa do triângulo, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **seno** do ângulo de medida a. Assim:

$$\text{sen } a = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } a}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Em todo triângulo retângulo, denominamos seno de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Exemplo

Calcular o seno do ângulo $\hat{A}$ no triângulo retângulo ABC abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

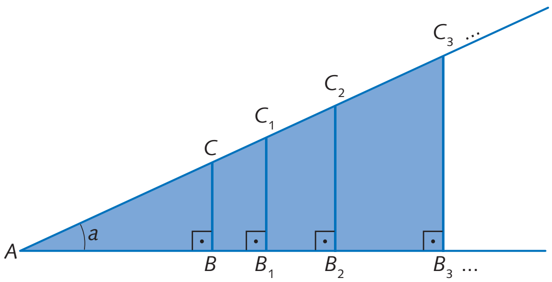
medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$

$$\text{sen } a = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

medida da hipotenusa

Cosseno de um ângulo agudo

Considere os triângulos retângulos ABC, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3, já apresentados.



Já vimos que esses triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim, podemos escrever:

$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ $\qquad$ $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$ $\qquad$ $\triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1} \qquad \frac{AC}{AC_2} = \frac{AB}{AB_2} \qquad \frac{AC}{AC_3} = \frac{AB}{AB_3}$$

Pela propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{AB_3}{AC_3} = \frac{AB}{AC}$$

Observe que:

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de medida } a}{\text{medida da hipotenusa}}$$

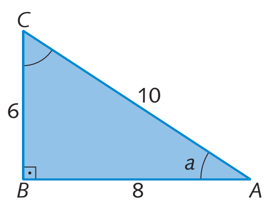
A razão que relaciona a medida do cateto adjacente ao ângulo $\widehat{A}$ com a medida da hipotenusa do triângulo, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **cosseno** do ângulo de medida a. Assim:

$$\cos a = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de medida } a}{\text{medida da hipotenusa}}$$

> Em todo triângulo retângulo, denominamos cosseno de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Exemplos

- Calcular o cosseno do ângulo $\widehat{A}$ no triângulo retângulo ABC abaixo.

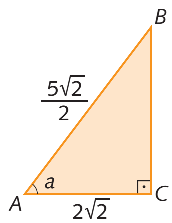


medida do cateto adjacente ao ângulo $\widehat{A}$

$$\cos a = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

medida da hipotenusa

- Calcular o cosseno do ângulo $\widehat{A}$ no triângulo retângulo ABC abaixo.



medida do cateto adjacente ao ângulo $\widehat{A}$

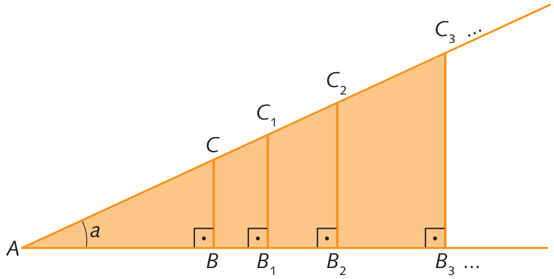
$$\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3}$$

medida da hipotenusa

Tangente de um ângulo agudo

Considere, mais uma vez, os triângulos retângulos ABC, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3, já apresentados.

LUIZ RUBIO



Já vimos que esses triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim, podemos escrever:

$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ $\qquad$ $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$ $\qquad$ $\triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \qquad \frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} \qquad \frac{AB}{AB_3} = \frac{BC}{B_3C_3}$$

Pela propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB} \qquad \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{BC}{AB} \qquad \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{BC}{AB}$$

Observe que:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } a}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de medida } a}$$

A razão que relaciona a medida do cateto oposto ao ângulo $\widehat{A}$ com a medida do cateto adjacente ao ângulo $\widehat{A}$, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **tangente** do ângulo de medida a. Assim:

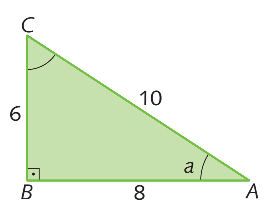
$$\text{tg } a = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } a}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de medida } a}$$

Em todo triângulo retângulo, denominamos tangente de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Exemplos

- Calcular a tangente do ângulo $\widehat{A}$ no triângulo retângulo ABC abaixo.

GUILHERME CASAGRANDI



medida do cateto oposto ao ângulo $\widehat{A}$

$$\text{tg } a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

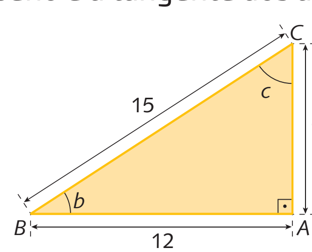
medida do cateto adjacente ao ângulo $\widehat{A}$

- Com base no triângulo retângulo ABC, calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

$$\text{sen } b = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \text{sen } c = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos b = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \qquad \cos c = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

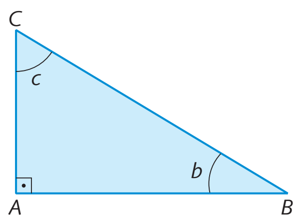
$$\text{tg } b = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \text{tg } c = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$



GUILHERME CASAGRANDI

A tangente de um ângulo agudo também pode ser obtida como a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo.

Observe o triângulo *ABC* a seguir.



$$\text{sen } b = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \text{sen } b$$

$$\cos b = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos b$$

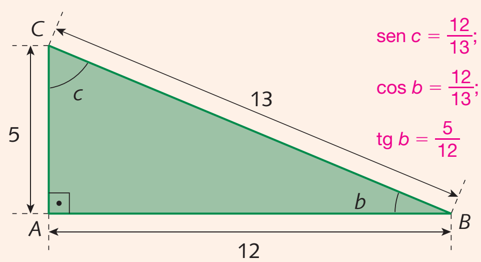
$$\text{tg } b = \frac{AC}{AB} = \frac{\cancel{BC} \cdot \text{sen } b}{\cancel{BC} \cdot \cos b} = \frac{\text{sen } b}{\cos b} \Rightarrow \boxed{\text{tg } b = \frac{\text{sen } b}{\cos b}}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

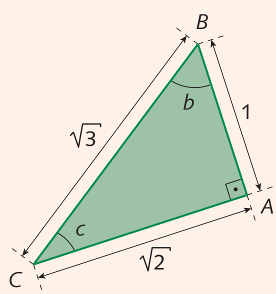
1 Determine as razões trigonométricas indicadas em cada caso.

a) sen *c*; cos *b*; tg *b*



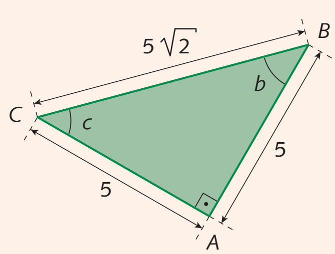
$\text{sen } c = \frac{12}{13}$; $\cos b = \frac{12}{13}$; $\text{tg } b = \frac{5}{12}$

b) sen *b*; cos *b*; tg *c*



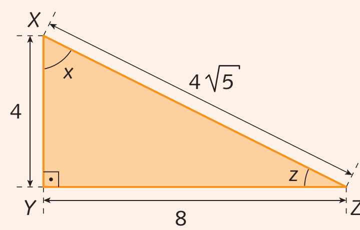
$\text{sen } b = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg } c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen *b*; cos *b*; tg *b*



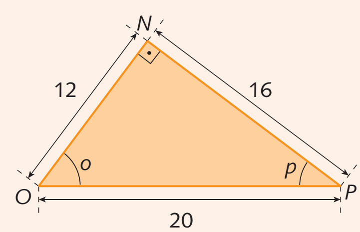
$\text{sen } b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos c = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } b = 1$

d) sen *x*; cos *z*; tg *x*



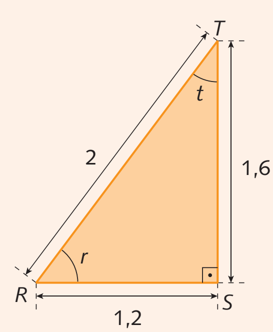
$\text{sen } x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos z = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{tg } x = 2$

e) sen *o*; cos *p*; tg *p*



$\text{sen } o = \frac{4}{5}$; $\cos p = \frac{4}{5}$; $\text{tg } p = \frac{3}{4}$

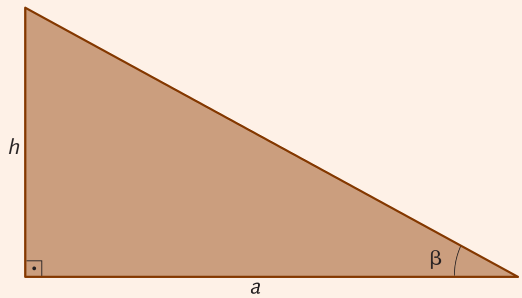
f) sen *r*; cos *t*; tg *t*



$\text{sen } r = 0{,}8$; $\cos t = 0{,}8$; $\text{tg } t = \frac{3}{4}$

2 Leia e, depois, responda às questões.

A inclinação de uma rampa corresponde à tangente do ângulo adjacente à base e oposto à altura dessa rampa.



GUILHERME CASAGRANDI

β é a medida do ângulo de inclinação dessa rampa.

Assim, para calcular a inclinação (tangente do ângulo β) devemos dividir a medida da altura da rampa (*h*) pela medida do afastamento (*a*). Caso o resultado encontrado seja menor que 0,0833 (8,33%), a rampa é segura e segue os padrões de acessibilidade. Esse cálculo é necessário na construção de rampas de acesso para pessoas com deficiência de mobilidade.

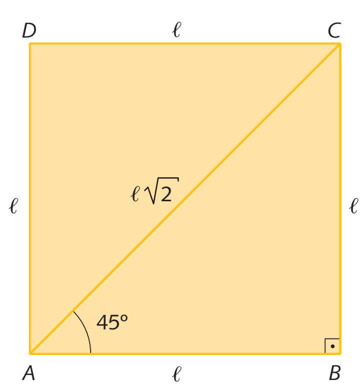
Com base nessa informação, responda:

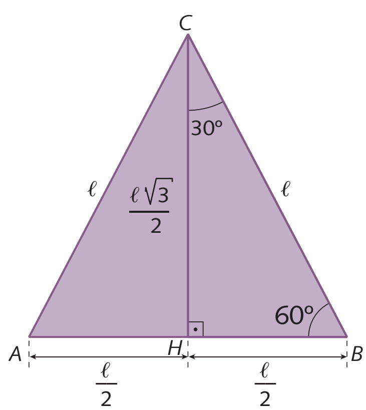
a) Qual deve ser a medida da altura máxima de uma rampa que terá 2,5 m de afastamento? 0,20825 m

b) E qual deve ser a medida mínima de afastamento se uma rampa mede 25 cm de altura? 3,0012 m

5 As razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°

Considere as figuras abaixo.





GUILHERME CASAGRANDI

medidas dos lados: ℓ

medidas das diagonais: $\ell\sqrt{2}$

medidas dos lados: ℓ

as alturas medem $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

As medidas das diagonais de um quadrado e das alturas de um triângulo equilátero podem ser determinadas pelo teorema de Pitágoras.

Agora, vamos usar essas figuras para aprender a calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

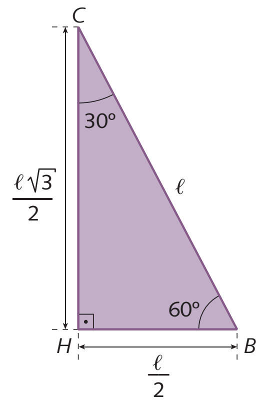
Seno, cosseno e tangente do ângulo de 30°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 30°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\ell}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



GUILHERME CASAGRANDI

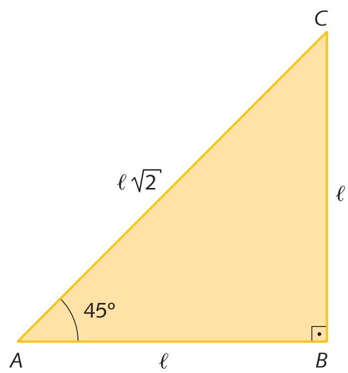
Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 45°, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\ell} \cdot 1}{\cancel{\ell} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\ell} \cdot 1}{\cancel{\ell} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}} = 1$$



GUILHERME CASAGRANDI

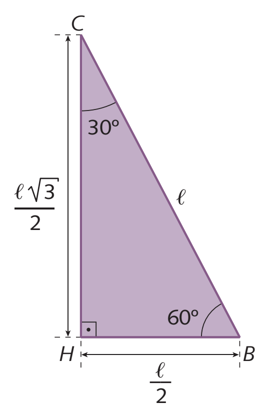
Seno, cosseno e tangente do ângulo de 60°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 60°, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\ell} = \sqrt{3}$$



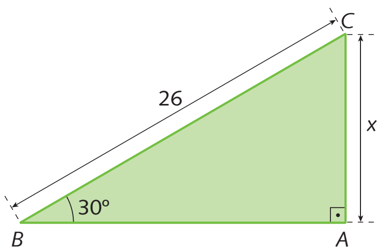
GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

x	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplos

- Determinar o valor de x no triângulo retângulo abaixo.



$$\text{sen } 30° = \frac{AC}{CB}$$

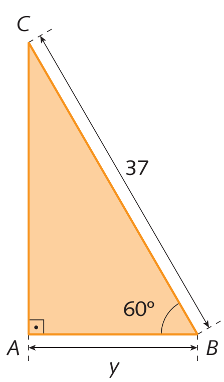
$$\text{sen } 30° = \frac{x}{26}$$

$$x = 26 \cdot \text{sen } 30°$$

$$x = 26 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

Portanto, o valor de x é 13.

- Determinar o valor de y.



$$\cos 60° = \frac{AB}{BC}$$

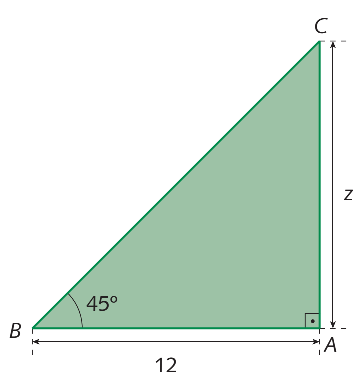
$$\cos 60° = \frac{y}{37}$$

$$y = 37 \cdot \cos 60°$$

$$y = 37 \cdot \frac{1}{2} = 18{,}5$$

Portanto, o valor de y é 18,5.

- Determinar o valor de z.



$$\text{tg } 45° = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{z}{12}$$

$$z = 12 \cdot \text{tg } 45°$$

$$z = 12 \cdot 1 = 12$$

Portanto, o valor de z é 12.

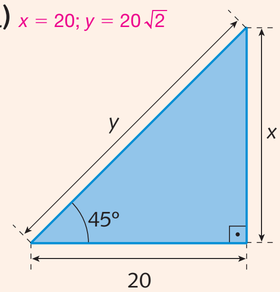
GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

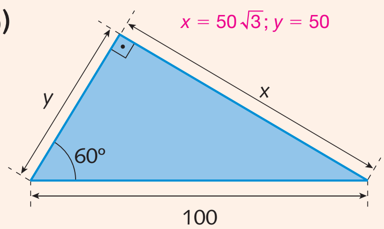
Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor de x e y nos triângulos retângulos.

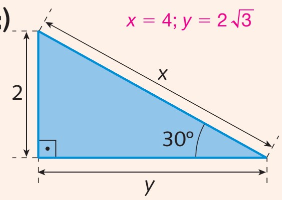
a) $x = 20$; $y = 20\sqrt{2}$



b) $x = 50\sqrt{3}$; $y = 50$

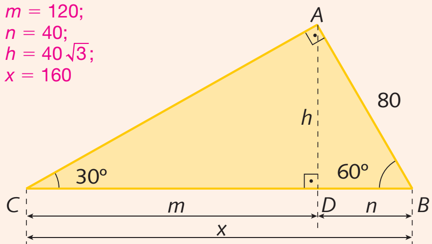


c) $x = 4$; $y = 2\sqrt{3}$



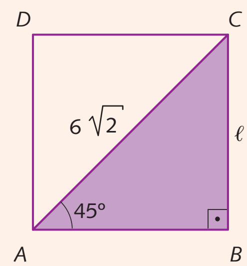
2 Determine o valor de m, n, h e x no triângulo retângulo.

$m = 120$;
$n = 40$;
$h = 40\sqrt{3}$;
$x = 160$

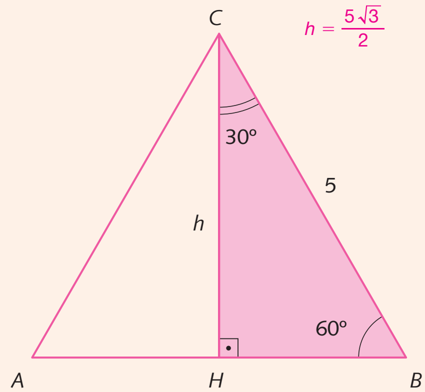


3 Calcule a medida do lado $\overline{CB}$ do quadrado e a medida da altura $\overline{CH}$ do triângulo.

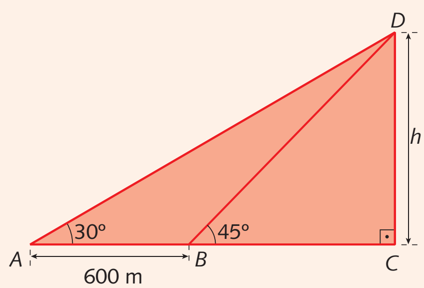
$\ell = 6$



$h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$



4 Determine o valor de h no triângulo retângulo. $h = 300(1 + \sqrt{3})$ m



GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

6 Tabela de razões trigonométricas

Na resolução de diversos problemas envolvendo razões trigonométricas, necessitamos dos valores do seno, do cosseno e da tangente de alguns ângulos.

Por isso, há alguns séculos, matemáticos criaram tabelas com os valores aproximados de seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos (1° a 89°).

Observe uma tabela com aproximação de milésimos.

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,467
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

Veja a seguir alguns exemplos do uso dessa tabela de razões trigonométricas.

- Localizar o cosseno aproximado de 33° na tabela.

  Localizamos o ângulo de 33° e, na coluna "cos", encontramos 0,839.

Ângulo	sen	cos	tg
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	**0,839**	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810

GEORGE TUTUMI

  Portanto, o cosseno aproximado de 33° é 0,839.

- Localizar o ângulo cuja tangente é aproximadamente igual a 1,6.

  Localizamos, na coluna "tg", o valor 1,6 e encontramos o ângulo correspondente a esse valor.

Ângulo	sen	cos	tg
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	**1,600**
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732

  Portanto, o ângulo procurado é de 58°.

- Determinar o ângulo cujos seno e cosseno têm valores iguais.

  Localizamos, nas colunas "sen" e "cos", valores iguais. Depois, encontramos o ângulo correspondente a esses valores.

Ângulo	sen	cos	tg
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	**0,707**	**0,707**	1,000
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072

  Portanto, o ângulo procurado é de 45°.

Trabalhando com a calculadora

Verificar a conveniência de lembrar aos alunos que calculadoras diferentes, por vezes, requerem procedimentos diferentes para os cálculos.

A calculadora científica é um recurso útil para obter os valores das razões trigonométricas dos ângulos.

Vamos aprender a utilizar as teclas SIN (seno), COS (cosseno) e TAN (tangente). Inicialmente, verifique se a calculadora científica está no modo DEG (grau = *degree*). Em seguida, digite as sequências abaixo e confirme o resultado no visor.

4 0 SIN 0.6427

3 6 COS 0.8090

7 0 TAN 2.7474

GUILHERME CASAGRANDI

ROBERT BABCZYNSKI/SHUTTERSTOCK

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Utilizando uma calculadora científica ou a tabela de razões trigonométricas, determine, com aproximação de três casas decimais, os valores de:

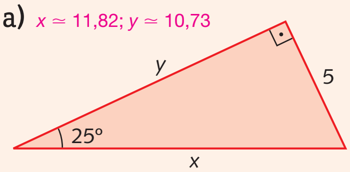
a) sen 17° 0,292
b) cos 2° 0,999
c) tg 26° 0,488
d) sen 43° 0,682
e) cos 38° 0,788
f) tg 50° 1,192
g) cos 14° 0,970
h) tg 88° 28,636

2 Utilizando a tabela de razões trigonométricas, determine a (em grau), sabendo que:

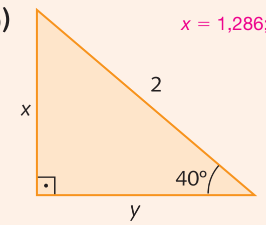
a) sen $a = 0{,}122$ 7°
b) cos $a = 0{,}342$ 70°
c) tg $a = 0{,}7$ 35°
d) sen $a = 0{,}829$ 56°
e) tg $a = 0{,}176$ 10°
f) sen $a = 0{,}988$ 81°
g) cos $a = 0{,}777$ 39°
h) tg $a = 1{,}732$ 60°

3 Calcule o valor de x e y nos triângulos retângulos.

a) $x \simeq 11{,}82$; $y \simeq 10{,}73$



b) $x = 1{,}286$; $y = 1{,}532$



7 Resolução de problemas

Neste tópico, vamos estudar alguns problemas que envolvem aplicações das razões trigonométricas estudadas.

Problema 1

De um posto de observação situado a 100 m de um prédio, vê-se o ponto mais alto desse prédio sob um ângulo de 44°. Determine a medida da altura do prédio, sabendo que o posto está a 1 m do solo.

(Utilize: sen 44° = 0,69; cos 44° = 0,72; tg 44° = 0,97)

Como x corresponde ao cateto oposto ao ângulo de 44°, podemos escrever:

$$\text{tg } 44° = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot \text{tg } 44°$$

$$x = 100 \cdot 0{,}97$$

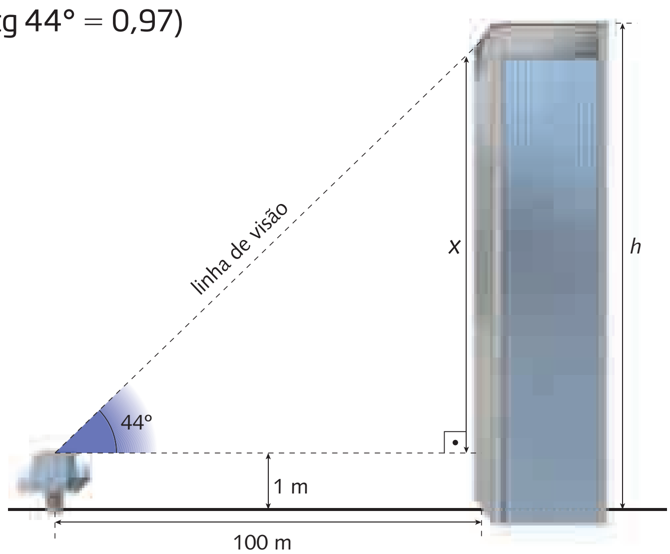
$$x = 97$$

Então:

$$h = x + 1$$

$$h = 97 + 1 = 98$$

Portanto, a medida da altura do prédio é 98 m.

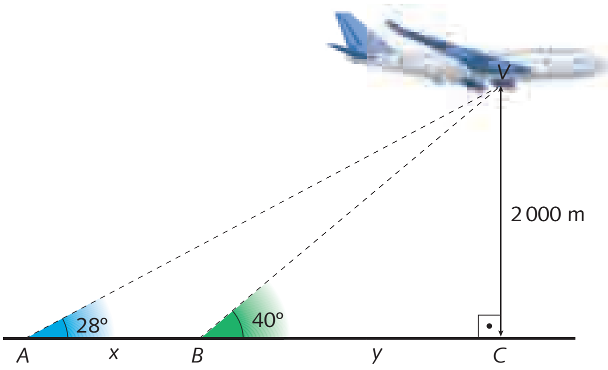


Problema 2

Um avião, a uma altura de 2 000 m, é visto por dois observadores que estão nos pontos *A* e *B*, sob ângulos de 28° e 40°, respectivamente. Qual é a distância aproximada entre esses dois observadores?

(Utilize: sen 28° = 0,47; cos 28° = 0,88; tg 28° = 0,53; sen 40° = 0,64; cos 40° = 0,77; tg 40° = 0,84)

De acordo com a figura, temos dois triângulos retângulos *BVC* e *ACV*, com um dos catetos comum. A distância entre os dois observadores é representada por *x*, que corresponde a uma parte do cateto *AC*, do triângulo *AVC*.



No triângulo *BVC*, temos:

$$\text{tg } 40° = \frac{2000}{y}$$

$$y = \frac{2000}{\text{tg } 40°}$$

$$y = \frac{2000}{0{,}84}$$

$$y \simeq 2\,380{,}95$$

No triângulo *AVC*, temos que:

$$\text{tg } 28° = \frac{2000}{x + y}$$

$$x + y = \frac{2000}{\text{tg } 28°}$$

$$x + y = \frac{2000}{0{,}53}$$

$$x + y \simeq 3\,773{,}58$$

$$x \simeq 3\,773{,}58 - 2\,380{,}95$$

$$x \simeq 1\,392{,}63$$

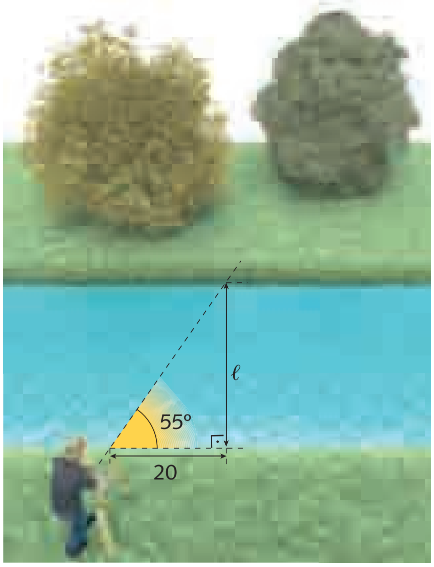
Portanto, a distância aproximada entre os dois observadores é 1 392,63 m.

Problema 3

Há casos em que não podemos pegar uma trena e medir determinado comprimento, como a largura de um rio. Nesses casos, é comum utilizar um instrumento ótico chamado teodolito para medir ângulos e, por meio da trigonometria, descobrir a medida desejada.

Observe a situação representada na imagem ao lado e descubra a medida da largura do rio.

(Utilize: sen 55° = 0,82; cos 55° = 0,57; tg 55° = 1,43)



$$\text{tg } 55° = \frac{\ell}{20}$$

$$\ell = 20 \cdot \text{tg } 55°$$

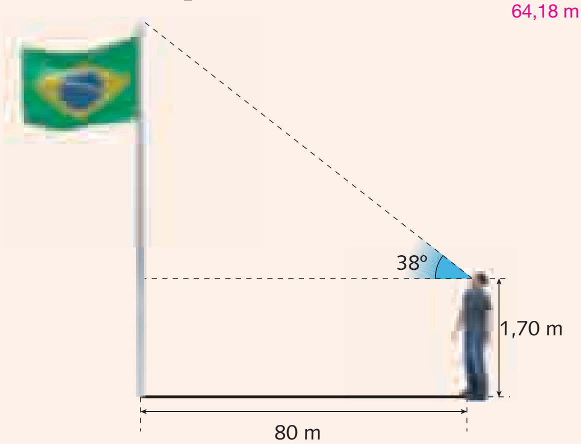
$$\ell = 20 \cdot 1{,}43 = 28{,}6$$

Logo, a largura do rio mede 28,6 m.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

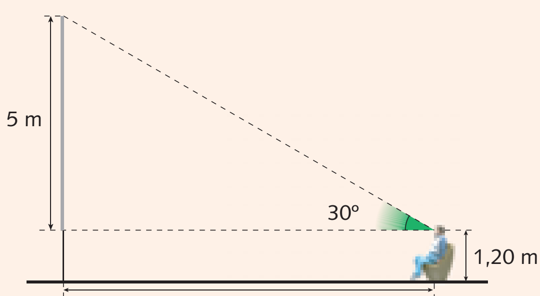
1 Um observador, distante 80 m do mastro de uma bandeira, vê seu ponto mais alto sob o ângulo de 38°. A distância dos olhos dele ao chão é de 1,70 m. Qual é a medida aproximada da altura do mastro? 64,18 m



GUILHERME CASAGRANDI

2 Do alto de uma torre de 50 m de altura, localizada em uma ilha, avista-se a praia sob um ângulo de 45° em relação à horizontal. Qual é a distância da torre à praia? 50 m

3 Calcule a distância (x) a que o garoto deve estar da tela para ver sua linha superior sob um ângulo de 30°. $5\sqrt{3}$ m

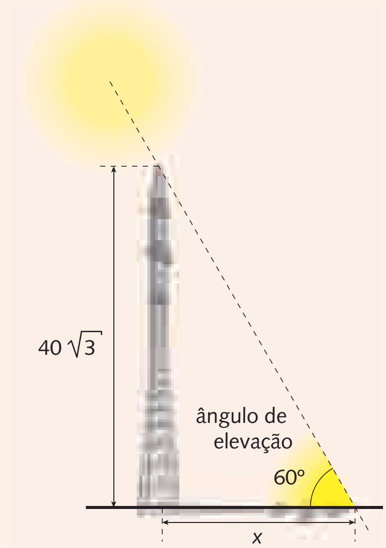


GUILHERME CASAGRANDI

4 Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo, sob um ângulo de 30°. A que altura estará o foguete após percorrer 8 km em linha reta? 4 km

GUILHERME CASAGRANDI

5 Determine a medida do comprimento da sombra projetada por uma torre com $40\sqrt{3}$ m de altura, sob ângulo de elevação do sol de 60°. 40 m



GUILHERME CASAGRANDI

6 Reúna-se com um colega, leiam o texto abaixo e determinem a inclinação máxima aceita pelos engenheiros em um prédio situado à beira-mar. 3°

Inclinações em relação à vertical

Uma das preocupações dos engenheiros de uma cidade litorânea é verificar as inclinações α, em relação à vertical, dos prédios situados na orla marítima. Essas inclinações podem ocorrer em razão de problemas nas fundações construídas sobre o **solo arenoso**. Os valores aceitos, segundo os engenheiros, devem satisfazer esta condição: $\text{tg}\,\alpha \leqslant 0{,}052$ (lemos: "tangente de alfa é menor ou igual a cinquenta e dois milésimos")

Solo arenoso

Tipo de solo com pouca umidade, com teor de areia superior a 70%.

Fachada de prédio inclinado na orla de Santos, SP, 2013.

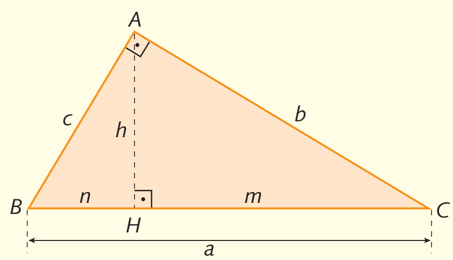
FOTO: LUCAS BAPTISTA/FUTURA PRESS
GRÁFICO: LUIZ RUBIO

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Considere o triângulo retângulo a seguir: a) II; b) III e c) I



LUIZ RUBIO

Associe, em seu caderno, cada relação métrica à sua descrição:

a) $h^2 = m \cdot n$ b) $a \cdot h = b \cdot c$ c) $c^2 = a \cdot n$

I) O quadrado das medidas de cada um dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal do cateto considerado sobre a hipotenusa.

II) O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

III) O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

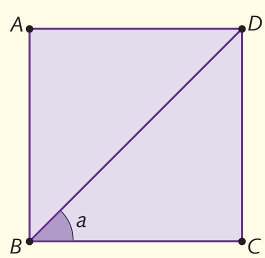
2 No livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, há 370 demonstrações para o Teorema de Pitágoras. Pesquise uma demonstração desse famoso e importante teorema e reproduza-a no seu caderno. Resposta Pessoal.

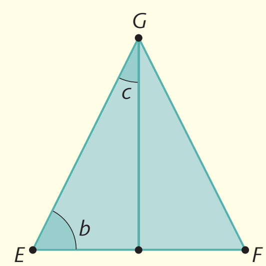
3 Considere o quadrado *ABCD* e o triângulo equilátero *EFG* para determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de medidas *a*, *b* e *c*.

$\text{sen } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen } b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen } c = \frac{1}{2}$

$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos b = \frac{1}{2}$; $\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan a = 1$; $\tan b = \sqrt{3}$; $\tan c = \frac{\sqrt{3}}{3}$





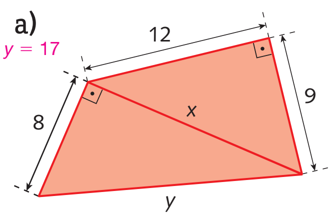
LUIZ RUBIO

- Quais são as medidas *a*, *b* e *c*? 45°, 60° e 30°

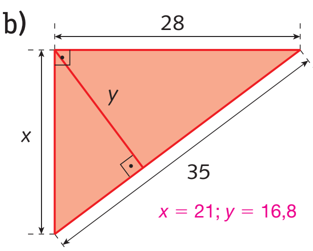
Aplicando

1 Determine os valores de *x* e *y* nas figuras.

a) $x = 15$; $y = 17$

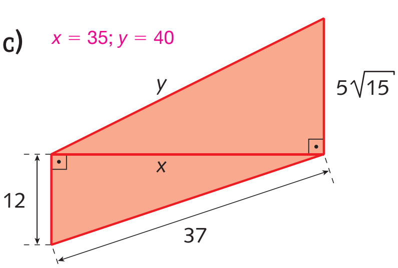


b)



$x = 21$; $y = 16{,}8$

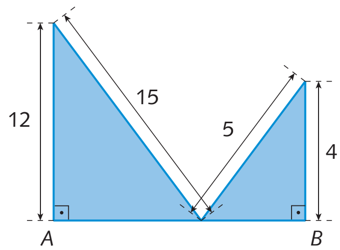
c) $x = 35$; $y = 40$



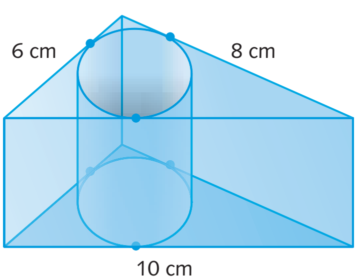
GUILHERME CASAGRANDI

2 Os dois lados maiores de um triângulo retângulo medem 12 dm e 13 dm. Qual é o perímetro do triângulo? 30 dm

3 Determine a medida do segmento $\overline{AB}$ na figura. 12



4 **(Enem)** Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura. alternativa **b**



O raio da perfuração da peça é igual a:

a) 1 cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) 5 cm

5 Em um triângulo retângulo, os catetos medem $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{4}$ cm. Determine a medida da hipotenusa do triângulo. $\sqrt{7}$ cm

6 Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 20 cm, e a medida do outro é igual a $\frac{3}{4}$ da medida do primeiro. Determine a medida da hipotenusa do triângulo. 25 cm

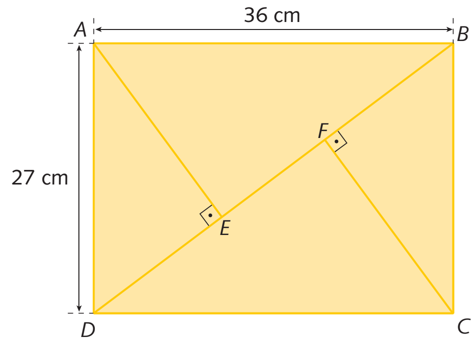
7 As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são 90 cm e 120 cm. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa. 72 cm

8 Qual é o perímetro do quadrado cuja diagonal mede $3\sqrt{6}$ cm? $12\sqrt{3}$ cm

9 As bases de um trapézio isósceles medem 27 cm e 11 cm, e os outros lados medem 10 cm cada um. Determine a medida da altura do trapézio. 6 cm

10 Calcule a medida dos catetos de um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede $10\sqrt{2}$ cm. 10 cm e 10 cm

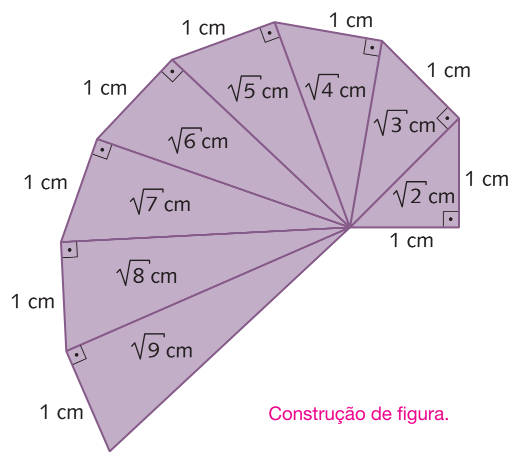
11 Considere o retângulo $ABCD$ e determine a distância entre os pontos E e F. 12,6 cm



DESAFIO

Construa, em seu caderno, um triângulo retângulo com catetos de medida 1 cm. Em seguida, verifique, utilizando o teorema de Pitágoras, que a medida da hipotenusa desse triângulo é $\sqrt{2}$ cm.

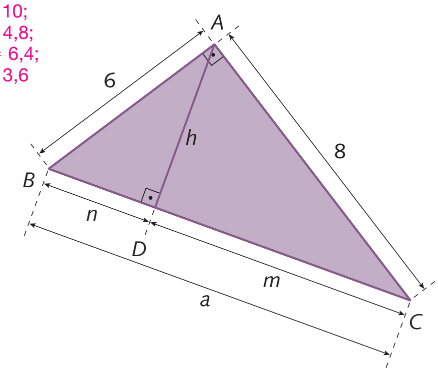
Em seguida, construa outros triângulos conforme a figura a seguir e determine geometricamente segmentos que medem $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$ e $\sqrt{12}$.



Construção de figura.

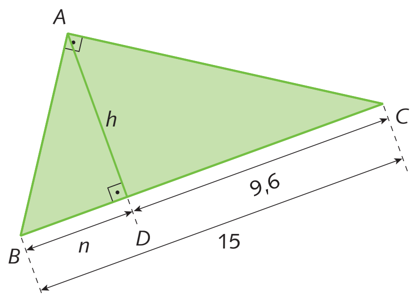
12 Na figura, determine o valor de a, h, m e n.

$a = 10$; $h = 4{,}8$; $m = 6{,}4$; $n = 3{,}6$



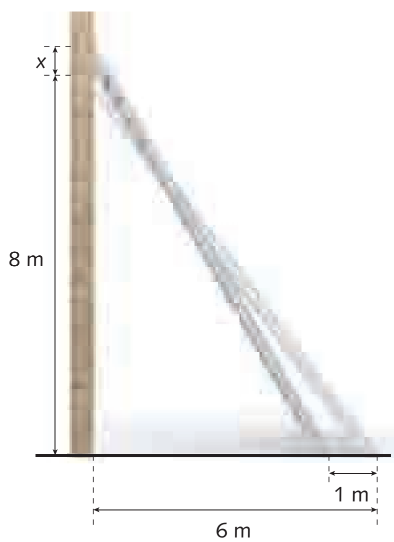
GUILHERME CASAGRANDI

13 Determine a medida da altura relativa à hipotenusa no triângulo ABC abaixo. 7,2



GUILHERME CASAGRANDI

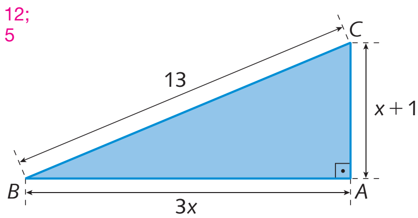
14 Observe as duas posições em que foi colocada uma escada. Determine o valor aproximado de x. $x \simeq 0{,}66$ m



GUILHERME CASAGRANDI

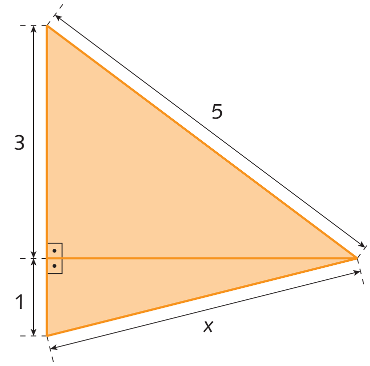
15 Determine as medidas dos lados do triângulo.

$AB = 12$; $AC = 5$



GUILHERME CASAGRANDI

16 Determine o valor de x na figura. $\sqrt{17}$



GUILHERME CASAGRANDI

17 A hipotenusa de um triângulo mede 60 cm, e a razão entre as medidas dos catetos é $\frac{3}{5}$.

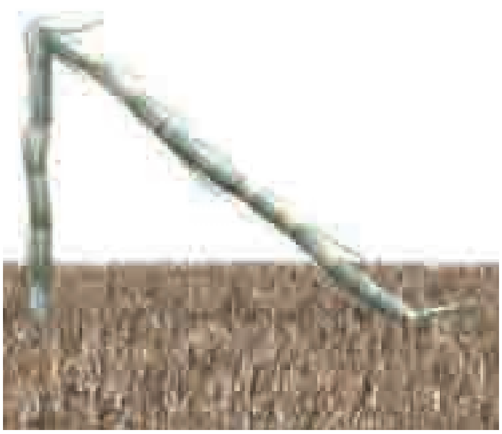
Determine a medida dos catetos.

$\frac{150\sqrt{34}}{17}$ cm; $\frac{90\sqrt{34}}{17}$ cm

DESAFIO

O problema abaixo foi enunciado na publicação chinesa *Kin Tschang*, em 2600 a.C., e editado por Tsin-Kin-Tschaou, 1250 anos antes da era cristã.

No século XII, o matemático Bhaskara assim o publicou no *Lilavati* e *Vija-Ganita*:

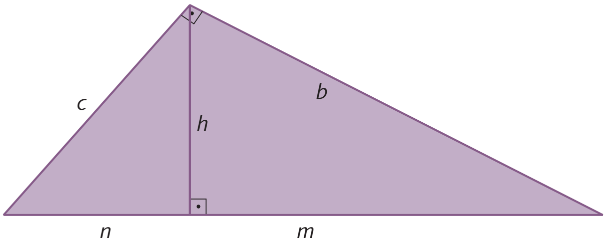


GUILHERME CASAGRANDI

"se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado? 12 cúbitos

Extraído de: BOYER, Carl B. e MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. Trad. Helena de Castro. São Paulo: Blucher, 2012. p. 161.

18 No triângulo retângulo, b é o triplo de c. Determine $m : n$. 9

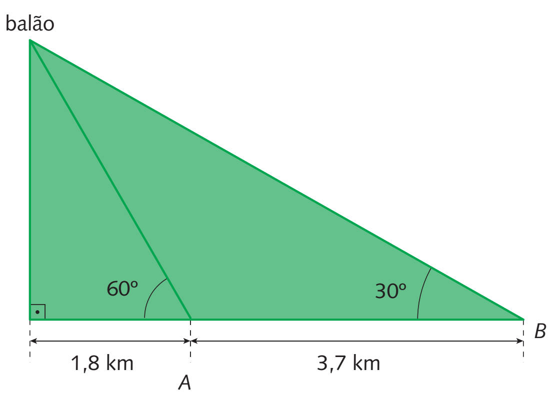


GUILHERME CASAGRANDI

19 **(Enem)**

> Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br.>. Acesso em: 2 maio 2010.



GUILHERME CASAGRANDI

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

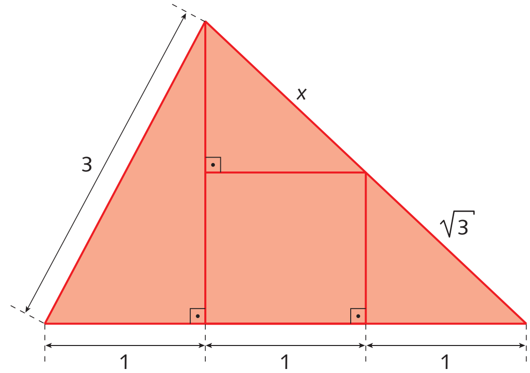
Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão? alternativa **c**

a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

20 O perímetro de um quadrado é 40 cm. Quanto mede sua diagonal? $10\sqrt{2}$ cm

21 Calcule o perímetro de um losango cujas diagonais medem 12 cm e 16 cm. 40 cm

22 Determine o valor de x. $\sqrt{3}$

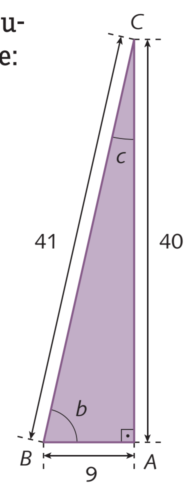


GUILHERME CASAGRANDI

23 A altura de um triângulo equilátero mede $10\sqrt{3}$ cm. Quanto mede seu lado? 20 cm

24 Considere o triângulo retângulo ABC da figura e determine:

a) sen b $\frac{40}{41}$
b) cos c $\frac{40}{41}$
c) cos b $\frac{9}{41}$
d) tg b $\frac{40}{9}$
e) sen c $\frac{9}{41}$
f) tg c $\frac{9}{40}$

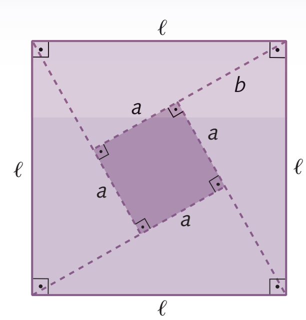


GUILHERME CASAGRANDI

DESAFIO

Determine b para que ℓ seja igual a $2a$.

$b = \frac{a(\sqrt{7} - 1)}{2}$



GUILHERME CASAGRANDI

25 Um caminhão tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo, e o vão da ponte tem o formato de um semicírculo cujo raio mede 4 m.

GEORGE TUTUMI

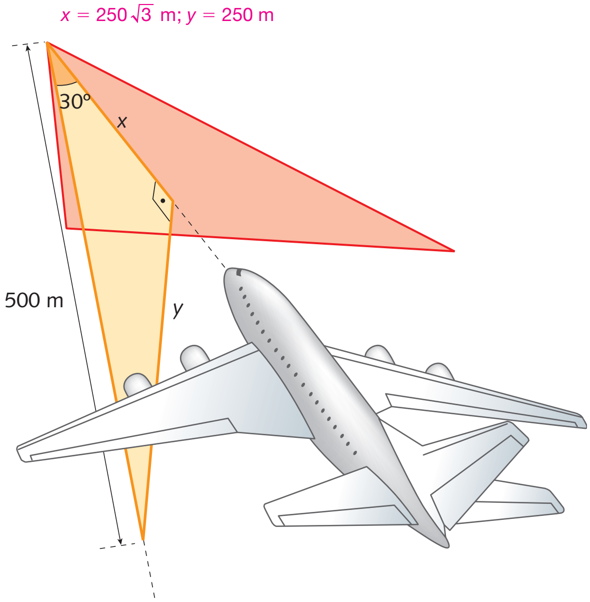
Pergunta-se:

a) Se a largura do caminhão mede 2,8 m, qual deve ser a medida máxima da altura para que ele possa passar sob a ponte? 3,74 m

b) Se a altura do caminhão mede 3,6 m, qual deve ser a medida máxima da largura para que ele possa passar sob a ponte? 3,48 m

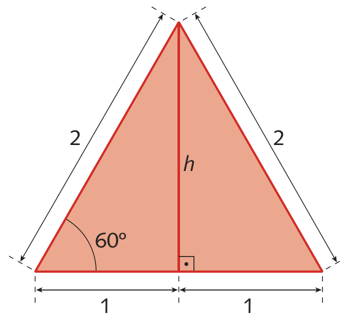
26 A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 42 cm. Determine a medida do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo. 21 cm

27 Para um estudo mais detalhado dos acidentes que ocorrem na aterrissagem de aviões, foi desenvolvido um programa de computador pelo Instituto de Pesquisas Aeroespaciais do Canadá. Em determinado momento, aparece na tela a figura abaixo. Determine x e y nessas condições.
$x = 250\sqrt{3}$ m; $y = 250$ m



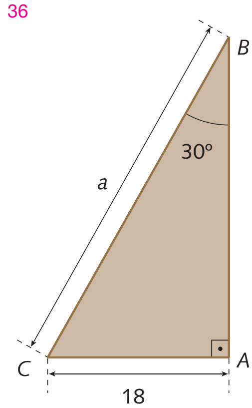
GUILHERME CASAGRANDI

28 Determine a medida da altura do triângulo abaixo. $h = \sqrt{3}$



GUILHERME CASAGRANDI

29 Determine o valor de a no triângulo ABC abaixo. $a = 36$



GUILHERME CASAGRANDI

30 Identifique as sentenças verdadeiras.
alternativas **a**, **b**, **c**, **e** e **h**.

a) sen 40° = cos 50°

b) sen 60° = cos 30°

c) $\text{tg } 35° = \dfrac{\text{sen } 35°}{\cos 35°}$

d) $\text{tg } 48° = \dfrac{\text{sen } 68°}{\cos 20°}$

e) $\cos x = \text{sen } (90° - x)$

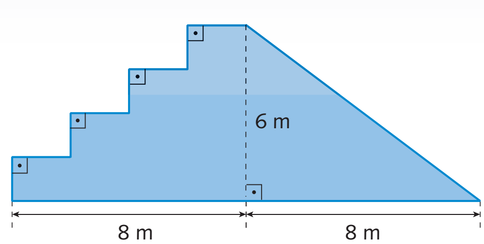
f) sen 45° = cos 45° = tg 45°

g) sen 81° = sen 86°

h) tg 70° = 5,495 · sen 30°

DESAFIO

Determine o perímetro do polígono representado abaixo. 40 m

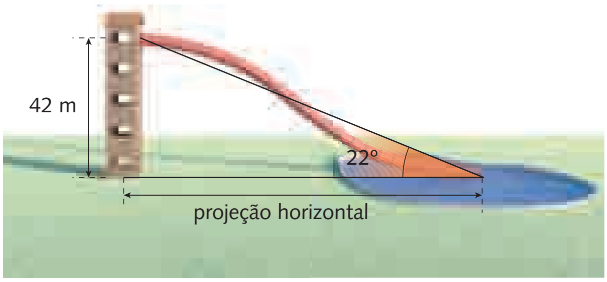


GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

34. Não, pois o triângulo amarelo não é retângulo. Seus lados medem 13 cm, $\sqrt{58}$ cm e 15 cm, e $(13)^2 + (\sqrt{58})^2 \neq (15)^2$.

31 Observe a figura e determine, aproximadamente, a medida da projeção horizontal desse toboágua. (Utilize: sen 22° = 0,37; cos 22° = 0,93; tg 22° = 0,40) 105 m



GUILHERME CASAGRANDI

DESAFIO

Uma prova chinesa do teorema de Pitágoras data, aproximadamente, da dinastia de Han (200 a.C.-200 d.C.). Essa prova consiste na decomposição da figura 1 em cinco partes, com as quais se monta a figura 2. Com base nesse raciocínio, prove que $a^2 = b^2 + c^2$. Demonstração.

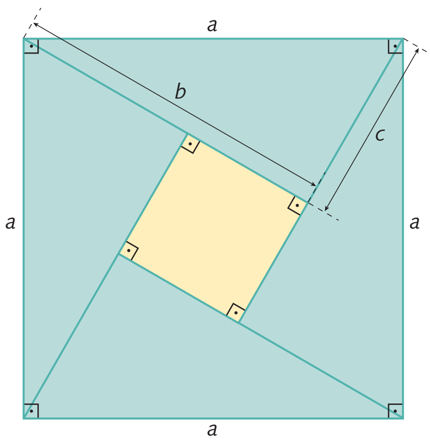


Figura 1

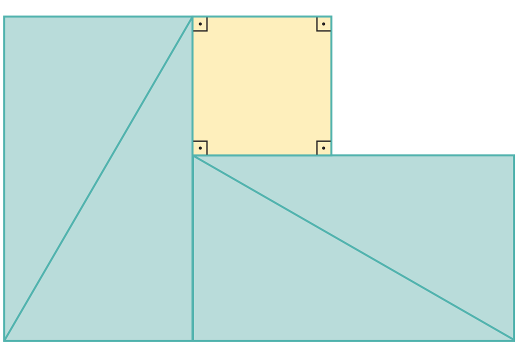
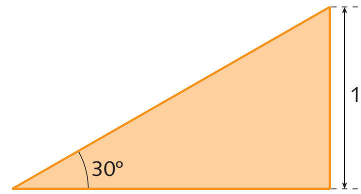


Figura 2

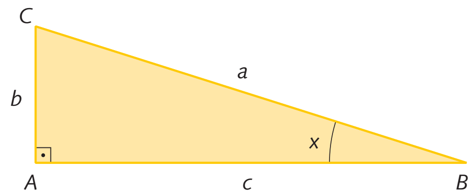
LUIZ RUBIO

32 Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 30°. Quando atingir 1000 m de altura, qual será a distância percorrida por ele? 2 km



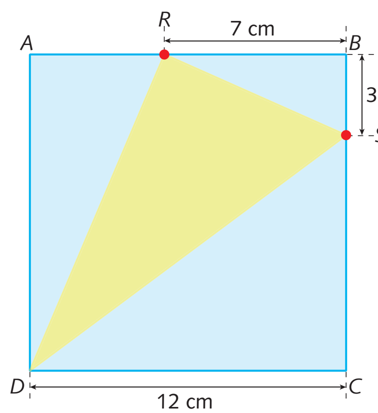
GUILHERME CASAGRANDI

33 Determine o valor de tg x no triângulo retângulo ABC, sendo $a = 7{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm e $c = 6$ cm. 0,75



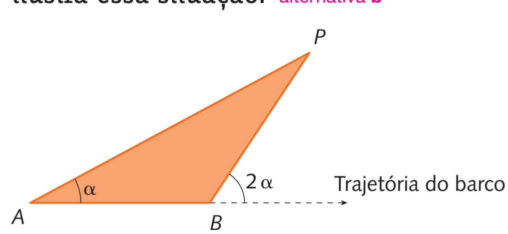
GUILHERME CASAGRANDI

34 Na figura abaixo, o quadrado de 12 cm de lado foi dividido em quatro triângulos retângulos. Essa afirmação é verdadeira?



GUILHERME CASAGRANDI

35 **(Enem)** Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação: alternativa **b**



GUILHERME CASAGRANDI

36. O professor pode comentar que a norma para rampas estipula passagens com ao menos 1,20 m de largura, inclinação máxima de 8,33% e segmentos de até 80 cm de altura.

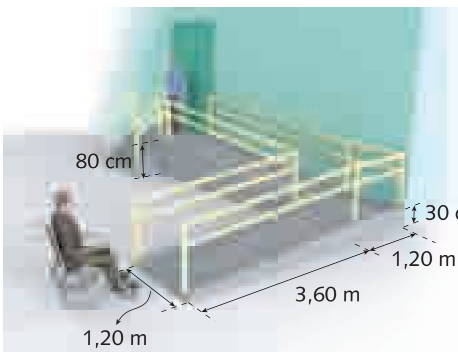
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\textit{altura (desnível)}}{\textit{deslocamento}} = \text{índice de subida}$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será: alternativa **b**

a) 1000 m
b) $1000\sqrt{3}$ m
c) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2000 m
e) $2000\sqrt{3}$ m

36 Para atender pessoas com dificuldade de locomoção, serão construídos duas rampas e um patamar. Observe a figura.



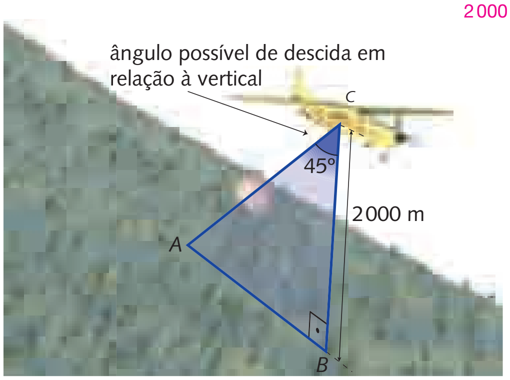
Agora, responda:

a) Qual deve ser a inclinação da primeira rampa? $\frac{30}{360} = 0{,}0833 = 8{,}33\%$

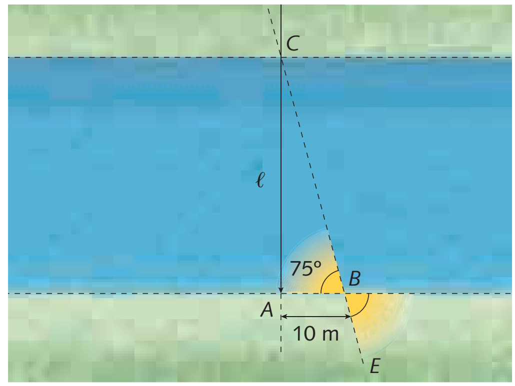
b) Qual deve ser a medida do comprimento da segunda rampa, se ela deve ter a mesma inclinação da primeira? 6,02 m

37 Uma estrada retilínea, em um determinado trecho de 1250 m, se eleva em 109 m. Expresse essa inclinação em porcentagem. 8,7%

38 Na busca de um paraquedista que se perdeu após um salto, foi feito este desenho por uma equipe de resgate. A que distância do ponto B deve ter caído o paraquedista? 2000 m



39 Para saber a medida da largura de um rio, mediu-se a distância $AB = 10$ m e o ângulo $A\hat{B}C$, cuja medida é de 75°. Qual é a medida da largura do rio? 37,3 m

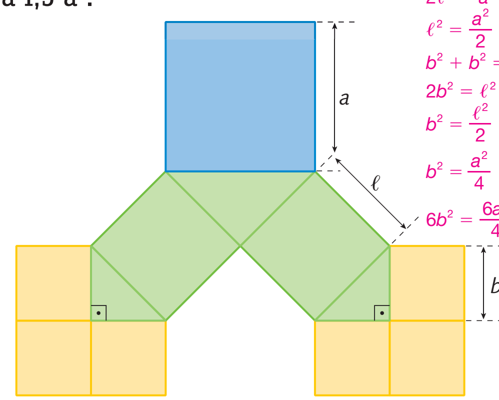


40 **(OBM)** O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro. Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x, em metros? alternativa **d**

a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 4,5 e) 5

DESAFIO

A figura abaixo é formada por quadrados e triângulos retângulos. Prove que a soma das áreas dos quadrados amarelos é igual a 1,5 a^2.



$2\ell^2 = a^2$

$\ell^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$b^2 + b^2 = \ell^2$

$2b^2 = \ell^2$

$b^2 = \dfrac{\ell^2}{2}$

$b^2 = \dfrac{a^2}{4}$

$6b^2 = \dfrac{6a^2}{4} = 1{,}5a^2$

CAPÍTULO

8 CIRCUNFERÊNCIA, ARCOS E RELAÇÕES MÉTRICAS

RIEGER BERTRAND/HEMIS/GLOW IMAGES

Les Anneaux – anéis iluminados à beira do rio Loire, em Nantes, França, 2013.

Neste capítulo, vamos trabalhar com a medida de um arco de circunferência. Além disso, vamos apresentar as relações métricas na circunferência. Com base na imagem da página de abertura, pode ser feita uma revisão sobre a determinação da medida do comprimento de uma circunferência.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Os Anéis, obra de Daniel Buren e Patrick Bouchain, compõe uma série de 18 anéis de 4 metros de diâmetro equidistantes, um atrás do outro, ao longo do cais. À noite, os anéis são iluminados com as luzes vermelha, verde e azul, que se alternam.

Responda às questões:

- Esses anéis lembram que figura geométrica plana? circunferência
- Podemos afirmar que a medida do comprimento da circunferência de cada um desses anéis depende da medida do seu raio? Espera-se que o aluno observe a relação de proporcionalidade entre a medida do raio e a do comprimento da circunferência e responda que sim.

TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

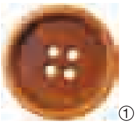
Você já pensou na importância da utilização da circunferência em nosso cotidiano?

Essa forma geométrica está presente no contorno de botões, mídias, relógios, engrenagens, entre outros, como pode ser visto nas imagens abaixo.

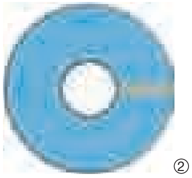
SERGEY NIVENS/SHUTTERSTOCK

As engrenagens são peças de formato circular muito utilizadas no dia a dia.

CRÉDITOS DAS FOTOS - ① COPRID/SHUTTERSTOCK, ② EDITORIAL IMAGE, LLC/ ALAMY/GLOW IMAGES, ③ BALONCICI/SHUTTERSTOCK



①



②

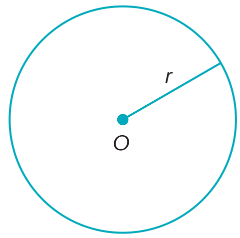
③

- Cite alguns objetos cuja forma lembra uma circunferência. Resposta pessoal.

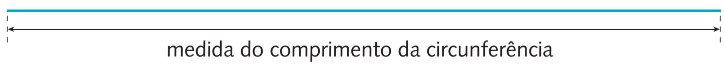
Neste capítulo, vamos estudar a circunferência, seus arcos e suas relações métricas, ferramentas básicas para estudos futuros em diversas áreas.

1 O comprimento da circunferência

Vamos considerar a circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.



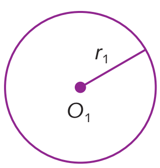
Podemos determinar a medida aproximada do **comprimento da circunferência** envolvendo-a com um cordão e, em seguida, medindo-o.



medida do comprimento da circunferência

Agora, vamos considerar três circunferências cujos raios medem 1 cm, 1,5 cm e 2 cm e cujas respectivas medidas de comprimento são determinadas de modo aproximado pelo processo descrito.

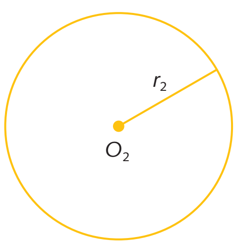
Circunferência | **Medidas da circunferência**



medida do raio (r_1) = 1 cm

medida do diâmetro (d_1) = 2 cm

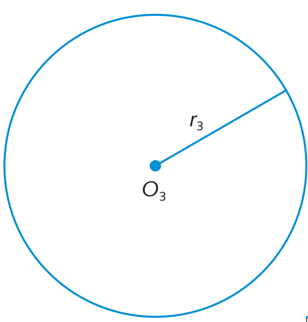
medida aproximada do comprimento (C_1) = 6,28 cm



medida do raio (r_2) = 1,5 cm

medida do diâmetro (d_2) = 3 cm

medida aproximada do comprimento (C_2) = 9,42 cm



medida do raio (r_3) = 2 cm

medida do diâmetro (d_3) = 4 cm

medida aproximada do comprimento (C_3) = 12,56 cm

Ao dividir a medida aproximada do comprimento de cada circunferência pela medida de seu respectivo diâmetro, obtemos:

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{6{,}28}{2} = 3{,}14 \qquad \frac{C_2}{d_2} = \frac{9{,}42}{3} = 3{,}14 \qquad \frac{C_3}{d_3} = \frac{12{,}56}{4} = 3{,}14$$

Observe que o resultado **aproximado** é o mesmo nos três casos. Esse resultado corresponde a uma aproximação de um número irracional.

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} \simeq 3{,}14$$

Representamos essa constante pela letra grega π (lemos: "pi"). Assim, para qualquer circunferência vale que:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

Daí, concluímos que a medida do comprimento de qualquer circunferência pode ser assim determinada:

$$\boxed{C = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r}$$

Exemplos

- Determinar a medida aproximada do comprimento de uma circunferência cujo raio mede 5 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.)

  $C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$

  O comprimento mede, aproximadamente, 31,4 cm.

- Determinar a medida aproximada do raio de uma circunferência cujo comprimento mede 75,36 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.)

  $C = 2\pi r \Rightarrow 75{,}36 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

  $75{,}36 = 6{,}28 \cdot r$

  $r = \frac{75{,}36}{6{,}28} = 12$

  O raio mede, aproximadamente, 12 cm.

MATTEO CARASSALE/GRAND TOUR/CORBIS/LATINSTOCK

Circunferências com diversas medidas de comprimento usadas na decoração das festas de final de ano da cidade de Turim, Itália, em dezembro de 2012.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule a medida aproximada do comprimento de uma circunferência cujo raio mede 15 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.) 94,2 cm

2 Determine a medida aproximada do raio de uma circunferência cujo comprimento mede 50,24 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.) 8 cm

3 Determine a medida aproximada do diâmetro de uma circunferência cujo comprimento mede 78,5 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.) 25 cm

4 Quantas voltas são necessárias para que uma roda cujo raio mede 14 cm percorra um comprimento aproximado de 703,36 cm? (Use $\pi = 3{,}14$.) 8 voltas

5 O diâmetro da roda de uma bicicleta mede 64 cm. Quantas voltas são necessárias para que ela percorra uma distância aproximada de 401,92 m? (Use $\pi = 3{,}14$.) 200 voltas

Lembre-se:
Não escreva no livro!

6 Taís e sua avó fazem caminhada, 3 vezes por semana, ao redor de uma praça circular cujo diâmetro é 12 metros. Elas finalizam cada caminhada ao completar 8 voltas e, então, voltam para casa. Quantos metros, aproximadamente, elas caminham por semana ao redor dessa praça? (Considere $\pi = 3{,}14$.) 904,32 m

7 Nas férias, Caio se diverte soltando pipa em um terreno próximo de sua casa. Ele tem um carretel de linha em formato de cilindro, cujo diâmetro da base é 6 cm. Quando Caio recolhe a pipa para voltar para casa, enrola a linha no carretel, dando 30 voltas completas. Qual é o comprimento aproximado da linha? (Considere $\pi = 3{,}14$.) 565,2 cm

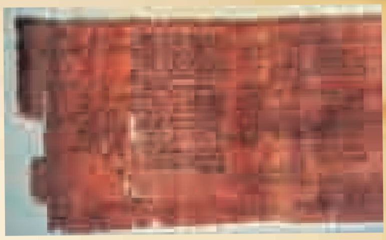
UM POUCO DE HISTÓRIA

DIOGO SAITO

O número π

Encontrar o valor do número π foi o objetivo de muitos matemáticos ao longo dos séculos.

No Oriente antigo, tomava-se frequentemente o número 3 como valor de π. De acordo com o papiro Ahmes, por volta de 1500 a.C., os egípcios usavam π como $3\frac{1}{6} = 3{,}1666...$


BRITISH MUSEUM, LONDRES
Papiro Ahmes.

A primeira tentativa científica de calcular π parece ter sido a de Arquimedes, em 240 a.C., que empregava o método clássico de cálculo de π. Tal método consistia em calcular os perímetros de polígonos regulares inscritos (P) e circunscritos (P') a uma circunferência de raio unitário. O comprimento C da circunferência mantém-se entre esses perímetros ($P < C < P'$) e, quanto maior o número de lados dos polígonos, maior é a aproximação entre P, C e P'. Assim, Arquimedes chegou a um valor aproximado de π entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$.

Em 480 d.C., o chinês Tsu Ch'ung-chih determinou a interessante aproximação racional $\frac{355}{113} = 3{,}1415929...$, que é correta até a sexta casa decimal.

Johann Heinrich Lambert, em 1761, provou que π é irracional.

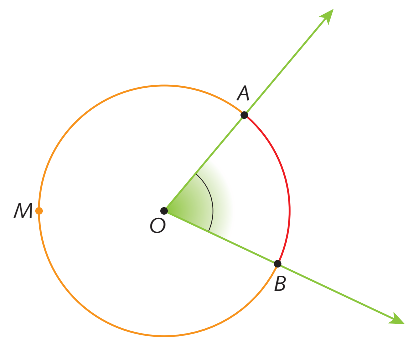
O Eniac, um dos primeiros computadores eletrônicos, calculou π com 2 037 casas decimais, em 1949. Já em 1986, D. H. Bailey, da Nasa, fez funcionar um supercomputador por 28 horas para obter π com 29 360 000 dígitos. Hoje, π já foi calculado com trilhões de dígitos.

Dados obtidos em: Carl B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1974. p. 13, 93 e 148.


BETTMANN/CORBIS/LATINSTOCK
Eniac, o primeiro computador eletrônico, desenvolvido em 1946.

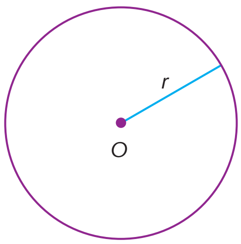
2 Medida de um arco de circunferência

Já vimos que a medida de um ângulo central, em grau, é igual à medida angular do arco correspondente. Na figura abaixo, temos: med($A\hat{O}B$) = med($\overset{\frown}{AB}$)



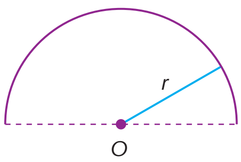
LUIZ RUBIO

Vamos considerar os arcos de circunferência e suas medidas:



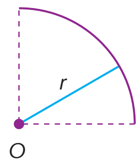
Medida angular do arco de uma volta completa: 360°

Comprimento do arco da circunferência: $2\pi r$ (em unidade de comprimento)



Medida angular do arco de meia-volta: 180°

Comprimento do arco da circunferência: πr (em unidade de comprimento)



Medida angular do arco de um quarto de volta: 90°

Comprimento do arco da circunferência: $\frac{\pi r}{2}$ (em unidade de comprimento)

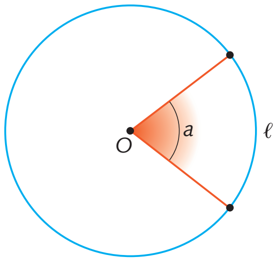
GUILHERME CASAGRANDI

Observe que um ângulo de 360° determina um arco de medida $2\pi r$; dividindo a medida do ângulo por 2, a medida do arco ficará dividida por 2; dividindo novamente a medida do ângulo por 2, a medida do arco ficará novamente dividida por 2. Então, concluímos que:

As medidas dos arcos de uma circunferência, em grau, são diretamente proporcionais às medidas desses arcos em unidade de comprimento.

Assim, podemos escrever a seguinte regra de três:

LUIZ RUBIO



Comprimento do arco	Medida do ângulo central (em grau)
$2\pi r$	360
ℓ	a

$$\boxed{\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{a}}$$

em que:

$2\pi r$ ⟶ medida do comprimento da circunferência em determinada unidade de comprimento

ℓ ⟶ medida do comprimento de um arco de circunferência (medido na mesma unidade de comprimento)

$360°$ ⟶ medida angular da circunferência, em grau

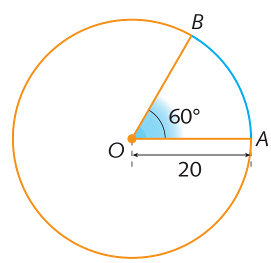
a ⟶ medida angular do mesmo arco, em grau

Exemplos

- Determinar a medida de comprimento de um arco de 60° em uma circunferência cujo raio mede 20 cm.

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{a} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 20}{\ell} = \frac{\cancel{360°}^{\,6}}{\cancel{60°}_{\,1}} \Rightarrow \frac{40\pi}{\ell} = \frac{6}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\ell = 40\pi \Rightarrow \ell = \frac{40\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}$$

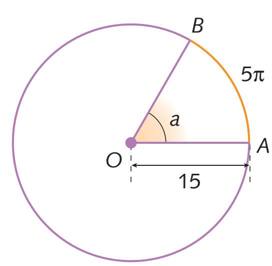


Portanto, a medida de comprimento do arco é $\frac{20\pi}{3}$ cm.

- Determinar, em grau, a medida de um arco de 5π cm em uma circunferência cujo raio mede 15 cm.

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{a} \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi} \cdot \cancel{15}^{\,3}}{{}_{1}\cancel{5}\cancel{\pi}} = \frac{360°}{a} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{360°}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a = 360° \Rightarrow a = \frac{360°}{6} = 60°$$



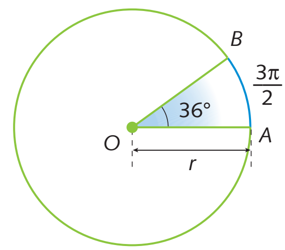
Portanto, a medida do arco é 60°.

GRÁFICOS: GUILHERME CASAGRANDI

- Um arco de $\frac{3\pi}{2}$ cm mede 36°. Vamos determinar a medida do raio da circunferência que contém esse arco.

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{a} \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi} \cdot r}{\frac{3\cancel{\pi}}{2}} = \frac{\cancel{360°}^{10}}{\cancel{36°}_{1}} \Rightarrow \frac{4r}{3} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r = 30 \Rightarrow r = \frac{30}{4} = 7{,}5$$



Portanto, a medida do raio da circunferência é 7,5 cm.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Considerando a proporção $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{a}$, determine a medida solicitada em cada um dos casos.

a) $a = 40°$
$r = 10$ cm
$\ell = ?$ $\frac{20\pi}{9}$ cm

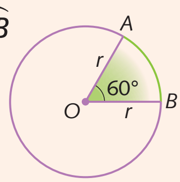
b) $\ell = \pi$ cm
$r = 2$ cm
$a = ?$ 90°

c) $\ell = 20\pi$ cm
$a = 90°$
$r = ?$ 40 cm

2 Determine a medida de comprimento dos arcos destacados em verde considerando a medida do raio indicado em cada item.

a) $\overset{\frown}{AB}$

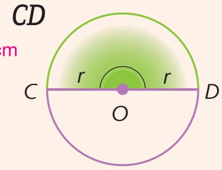
$\frac{2}{3}\pi$ cm



$r = 2$ cm

b) $\overset{\frown}{CD}$

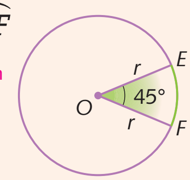
π cm



$r = 1$ cm

c) $\overset{\frown}{EF}$

$\frac{3}{8}\pi$ cm



$r = 1{,}5$ cm

3 Usando $\pi = 3{,}14$, determine a medida do raio da circunferência em que:

a) um arco de 45° mede 9,42 cm; 12 cm

b) um arco de 28,26 cm mede 90°. 18 cm

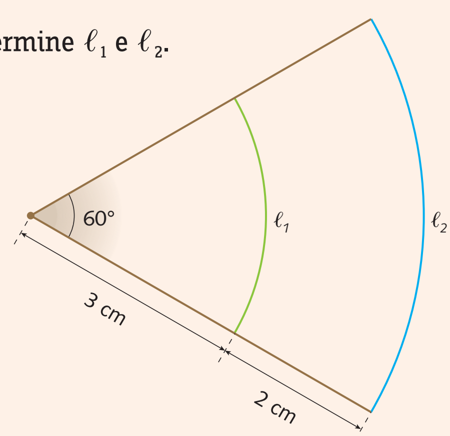
4 Determine, em grau, a medida do ângulo central correspondente ao arco:

a) de comprimento $\frac{2\pi}{5}$ cm, em uma circunferência cujo raio mede 8 cm; 9°

b) de comprimento 20π cm, em uma circunferência cujo raio mede 40 cm. 90°

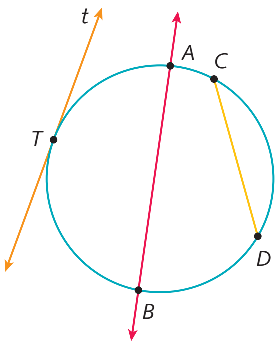
5 Na figura abaixo, determine ℓ_1 e ℓ_2.

$\ell_1 = \pi$ cm; $\ell_2 = \frac{5}{3}\pi$ cm

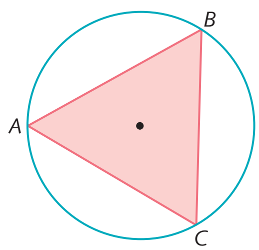


3 Relações métricas em uma circunferência

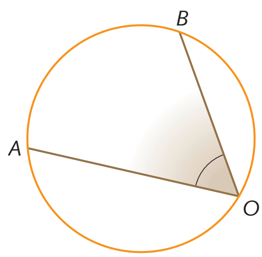
Antes de iniciar o estudo sobre **relações métricas em uma circunferência**, vamos observar atentamente as figuras abaixo.



corda: $\overline{CD}$
secante: $\overleftrightarrow{AB}$
tangente: t

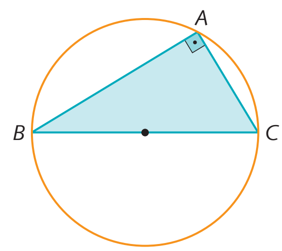


triângulo inscrito na circunferência:
seus vértices pertencem à circunferência



ângulo inscrito na circunferência:

$$\text{med}(A\widehat{O}B) = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2}$$



triângulo inscrito na semi-circunferência é retângulo:

$$\text{med}(\widehat{A}) = \frac{\text{med}(\widehat{BC})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

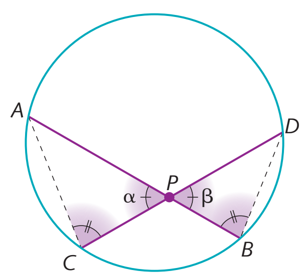
GUILHERME CASAGRANDI

Relação entre as cordas

Observe, na figura, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que se cruzam no ponto P.

Podemos demonstrar esta relação:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$



GUILHERME CASAGRANDI

Vamos considerar os triângulos PAC e PDB:

$\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$ ⟶ ângulos opostos pelo vértice

$\widehat{B} \cong \widehat{C}$ ⟶ ângulos inscritos no mesmo arco

Pelo teorema de semelhança de triângulos, caso AA (Ângulo-Ângulo), temos:

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$

Assim:

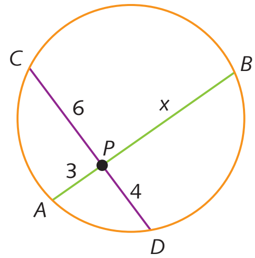
$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Podemos concluir que:

Se duas cordas se cruzam em um ponto interior de uma circunferência, o produto das medidas dos dois segmentos menores da primeira corda é igual ao produto das medidas dos dois segmentos menores da outra corda.

Exemplo

Calcular o valor de x nas figuras.

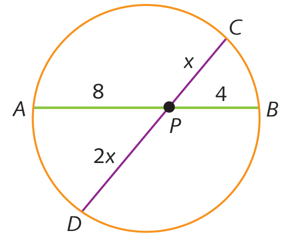


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$3 \cdot x = 6 \cdot 4$

$3x = 24$

$x = 8$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$8 \cdot 4 = x \cdot 2x$

$32 = 2x^2$

$16 = x^2$

$x = \sqrt{16}$

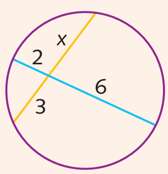
$x = 4$

ATIVIDADES

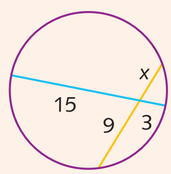
Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor de x.

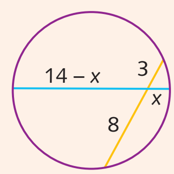
a) $x = 4$



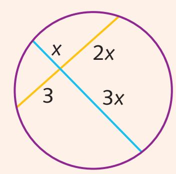
b) $x = 5$



c) $x = 12$ ou $x = 2$

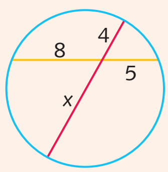


d) $x = 2$

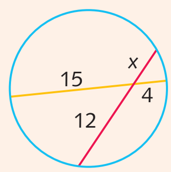


2 Determine as medidas desconhecidas.

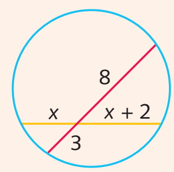
a) $x = 10$



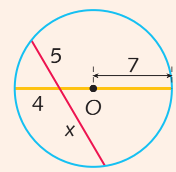
b) $x = 5$



c) $x = 4$ e $x + 2 = 6$



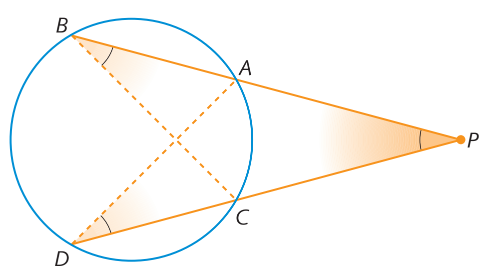
d) $x = 8$



Relação entre as secantes

Observe, na figura, os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$, sendo P exterior à circunferência.

Os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$ são secantes a essa circunferência.



O segmento secante $\overline{PB}$ corta a circunferência nos pontos A e B, enquanto o segmento secante $\overline{PD}$ corta a circunferência nos pontos C e D.

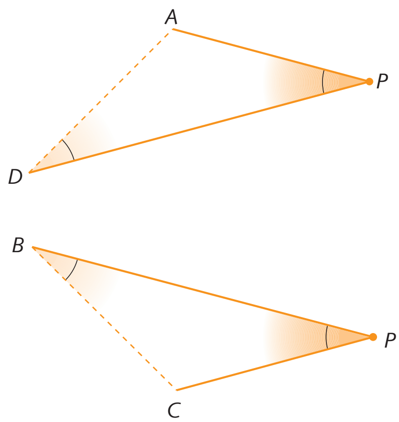
Podemos demonstrar esta relação:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Vamos considerar os triângulos PAD e PCB:

$\widehat{B} \cong \widehat{D} \longrightarrow$ ângulos inscritos no mesmo arco

$\widehat{P} \longrightarrow$ ângulo comum aos dois triângulos



GUILHERME CASAGRANDI

Segundo o teorema de semelhança de triângulos, caso AA, temos: $\triangle PAD \sim \triangle PCB$

Assim:

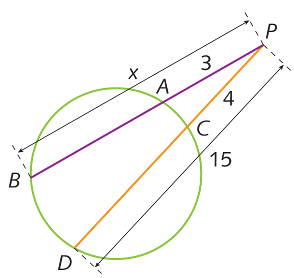
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Podemos concluir que:

Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçarmos dois segmentos secantes a ela, o produto da medida de um deles pela medida de sua parte externa será igual ao produto da medida do outro pela medida de sua parte externa.

Exemplo

Calcular o valor de x nas figuras.

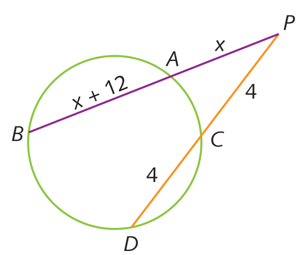


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$3 \cdot x = 4 \cdot 15$

$3x = 60$

$x = 20$



GUILHERME CASAGRANDI

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$x \cdot (2x + 12) = 4 \cdot 8$

$2x^2 + 12x = 32$

$2x^2 + 12x - 32 = 0$ — $x_1 = -8$ (não convém, pois med($\overline{PA}$) $= x$); $x_2 = 2$

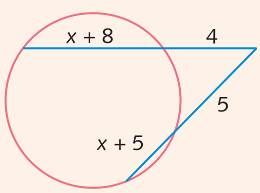
$x = 2$

ATIVIDADES

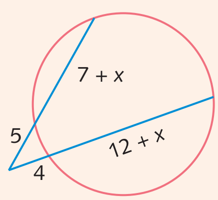
Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor de x.

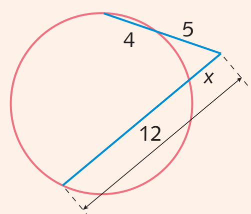
a) $x = -2$



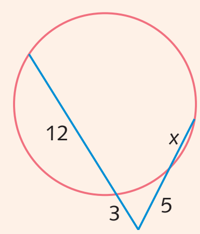
b) $x = 4$



c) $x = 3{,}75$



d) $x = 4$



GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

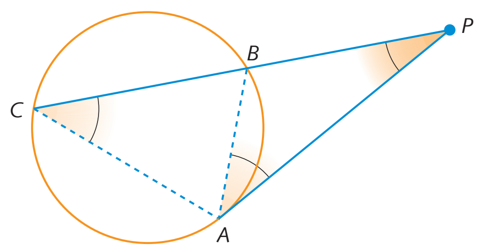
2 De um ponto P, exterior a uma circunferência, traçam-se duas secantes, r e s. As distâncias do ponto P aos pontos de intersecção de r com a circunferência medem 12 m e 3 m. Calcule o valor da maior distância do ponto P ao ponto de intersecção de s com a circunferência, sabendo que a menor dessas distâncias é 4 m. 9 m

LÉO FANELLI

Relação entre secante e tangente

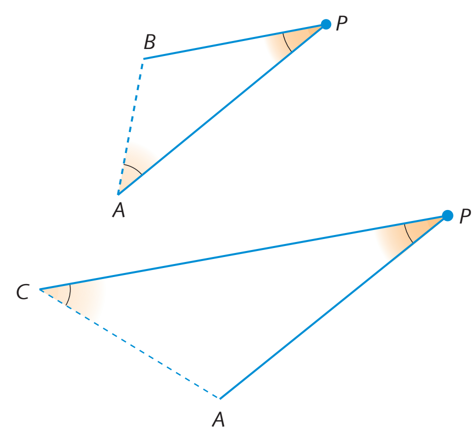
Observe, na figura abaixo, uma secante e uma tangente à circunferência.

O segmento $\overline{PC}$ é secante a essa circunferência e o segmento $\overline{PA}$, tangente.



O segmento secante $\overline{PC}$ corta a circunferência nos pontos B e C, e A é o ponto de tangência. Podemos demonstrar esta relação:

$$\boxed{(PA)^2 = PB \cdot PC}$$



GUILHERME CASAGRANDI

Vamos considerar os triângulos PBA e PAC:

$\hat{A} \cong \hat{C} \longrightarrow$ ângulos com vértice na circunferência e que determinam nela o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$

$\hat{P} \longrightarrow$ ângulo comum aos dois triângulos

Pelo teorema de semelhança entre triângulos, caso AA, temos: $\triangle PBA \sim \triangle PAC$

Assim:

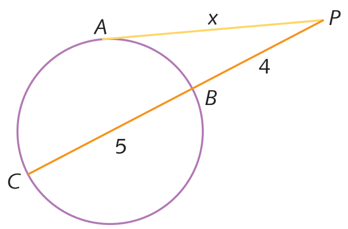
$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow PA \cdot PA = PB \cdot PC \Rightarrow (PA)^2 = PB \cdot PC$$

Podemos concluir que:

Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçarmos um segmento secante e um segmento tangente à circunferência, então o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto das medidas do segmento secante e de sua parte externa.

Exemplo

Sabendo que $\overline{PA}$ é tangente à circunferência, calcular o valor de x nas figuras.



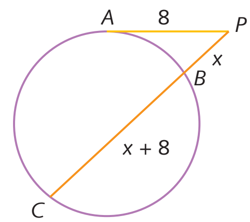
$(PA)^2 = PB \cdot PC$

$x^2 = 4 \cdot 9$

$x^2 = 36,\ x > 0$

$x = \sqrt{36}$

$x = 6$



$(PA)^2 = PB \cdot PC$

$8^2 = x \cdot (2x + 8)$

$64 = 2x^2 + 8x$

$2x^2 + 8x - 64 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -8 & \text{(não convém, pois med}(\overline{PB}) = x) \\ x_2 = 4 \end{cases}$

$x = 4$

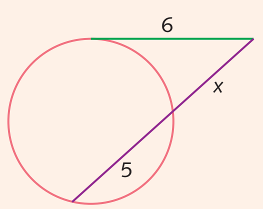
GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

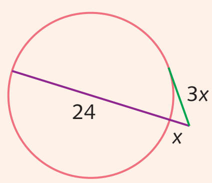
1 Considerando tangentes as retas verdes, calcule o valor de x.

a)



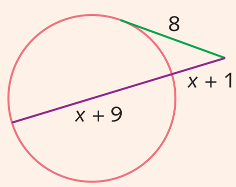
$x = 4$

b)



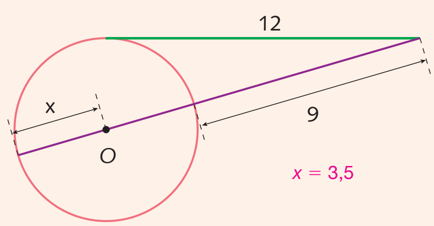
$x = 3$

c)



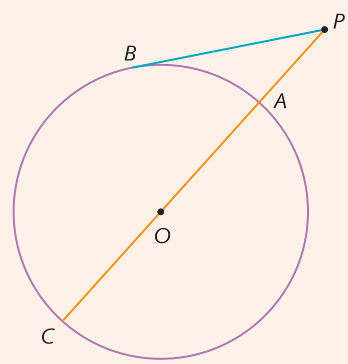
$x = 3$

d)



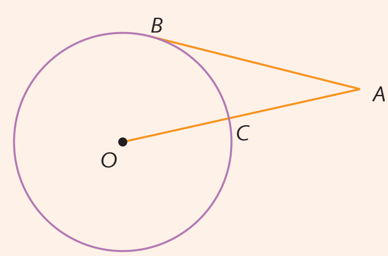
$x = 3{,}5$

2 Esta circunferência tem centro O e raio de medida 9 m. Sabendo que $\overline{PB}$ é tangente à circunferência e que $PB = 2 \cdot PA$, determine a medida de $\overline{PA}$. $PA = 6$ m



GUILHERME CASAGRANDI

3 Na figura, $\overline{AB}$ é tangente à circunferência de raio r. Sabendo que $AB = 2r$, determine o valor de AC. $r(\sqrt{5} - 1)$



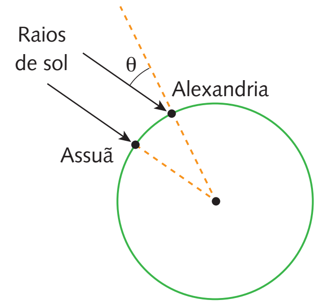
Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(Fuvest) Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio-dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade no norte do Egito. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio-dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã, foi de, aproximadamente, 7 500 km.

O mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são: alternativa **a**

a) junho; 7°.
b) dezembro; 7°.
c) junho; 23°.
d) dezembro; 23°.
e) junho; 0,3°.



LUIZ RUBIO

Note e adote:
Distância estimada por Eratóstenes entre Assuã e Alexandria $\simeq$ 900 km.
$\pi \simeq 3$

Resolução:
Da relação $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{a}$, temos $r = 7\,500$ km, $\ell = 900$ km e $a = \theta$.
Assim: $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7\,500}{360°} = \frac{900}{\theta}$
Logo, $\theta = 7{,}2°$

Interpretação e identificação dos dados

- Reúna-se com um colega.
- Analisem as informações do enunciado e anotem aquelas que vocês julgarem relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Expliquem o significado da frase "ao meio-dia do solstício de verão".
- Observem na ilustração que os raios de sol são paralelos entre si. Sabendo isso, determinem o valor do menor ângulo indicado com vértice no centro da Terra.

Se os alunos não souberem o significado de solstício, peça que façam uma pesquisa em livros e/ou *sites*. Pode-se também realizar um trabalho em conjunto com o professor de Geografia.
O solstício é o momento em que os raios solares incidem perpendicularmente em um dos trópicos. Isso acontece apenas uma vez por ano em cada trópico:

Plano de resolução

- O Egito localiza-se em qual hemisfério? Hemisfério Norte.
- Pesquisem a data do solstício de verão no sul do Egito. 21 de junho.

Resolução

- Relacionem a distância estimada entre Assuã e Alexandria com o ângulo central correspondente. Em seguida, determinem a medida do ângulo θ, em grau. $\theta = 7{,}2°$

<u>Observação</u>
Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Pesquisem a biografia de Eratóstenes, explicando suas principais realizações. Essa pesquisa deverá ser apresentada na forma de cartaz, acompanhada de um texto explicativo. Acessando o *link* http://www.somatematica.com.br/biograf/erat.php, os alunos poderão obter informações sobre o matemático Eratóstenes.

- em 21 de junho no Trópico de Câncer, que corresponde ao solstício de verão no Hemisfério Norte (momento em que o dia é o mais longo do ano) e, simultaneamente, ao solstício de inverno no Hemisfério Sul (quando a noite tem a maior duração do ano);
- em 21 de dezembro no Trópico de Capricórnio, que corresponde ao solstício de inverno no Hemisfério Norte e, simultaneamente, ao solstício de verão no Hemisfério Sul.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Copie as frases a seguir, completando-as com as palavras disponíveis no quadro abaixo, de modo a torná-las verdadeiras.

central	tangente	comprimento	segmento	proporcional

a) A medida do ■ da circunferência pode ser determinada por $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. comprimento

b) A medida do comprimento de um arco de circunferência é ■ à medida do arco de circunferência correspondente. proporcional

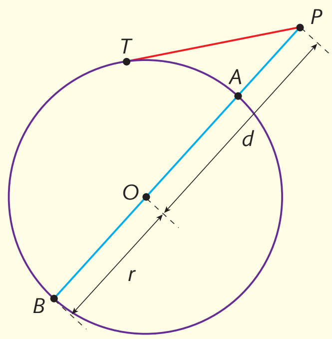
c) Uma corda é um ■ de reta com extremidades sobre a circunferência. segmento

d) A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência corresponde à metade da medida do ângulo ■ correspondente ao mesmo arco. central

e) A reta ■ toca a circunferência em apenas um ponto. tangente

2 Na figura a seguir, mostre que: $(PT)^2 = (d - r) \cdot (d + r)$

Da figura, temos: $PA = d - r$ e $PB = d + r$
Sabemos que $(PT)^2 = (PA) \cdot (PB)$,
então $PT = (d - r) \cdot (d + r)$



LUIZ RUBIO

3 Com o auxílio de um compasso e de uma régua, faça o que se pede: Construção de figuras.

a) Construa, no seu caderno, uma circunferência de raio igual a 4 cm.

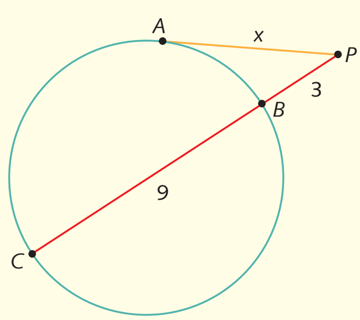
b) Construa duas retas secantes à circunferência que se interceptam no ponto P, exterior à circunferência.

c) Nomeie os pontos de intersecção de cada reta secante com a circunferência.

d) Enuncie a relação entre os segmentos determinados. Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçarmos dois segmentos secantes a ela, o produto da medida de um deles pela medida de sua parte externa será igual ao produto da medida do outro pela medida de sua parte externa.

4 Na figura abaixo, determine o valor de *x*.

$x = 6$



LUIZ RUBIO

Lembre-se:
Não escreva no livro!

Aplicando

1 Quanto mede o raio de uma circunferência cujo comprimento mede 37,68 cm? 6 cm

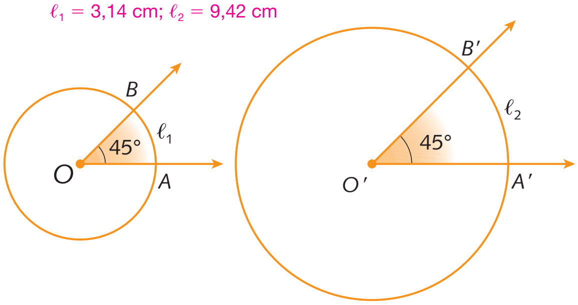
2 Calcule a medida do comprimento, em centímetro, de uma circunferência cujo raio mede 2 m. 1 256 cm

3 As rodas de um automóvel têm 30 cm de medida de raio. Quantas voltas cada uma dá, enquanto o carro percorre 1 507,2 m? 800 voltas

STEVEN SCOTT TAYLOR/ALAMY LIVE NEWS/LATINSTOCK

Carro exposto no 83º Salão Internacional do Automóvel, em Genebra, Suíça, 2013.

4 Determine a medida do comprimento de um arco de 45° em circunferências de 4 cm e 12 cm de raio, respectivamente.
$\ell_1 = 3{,}14$ cm; $\ell_2 = 9{,}42$ cm



GUILHERME CASAGRANDI

5 O raio da menor roda do trator mede 50 cm. Calcule a medida do diâmetro da roda maior, sabendo que o comprimento de sua circunferência mede 50% a mais que o da circunferência da roda menor. 75 cm

LÉO FANELLI

6 Uma cesta de basquete tem 0,45 m de medida de diâmetro. Calcule a medida do comprimento do aro dessa cesta. 1,41 m

KAGEMUSHA/SHUTTERSTOCK

7 O valor das frações $\frac{19}{6}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{377}{120}$ e $\frac{355}{113}$ se aproxima do valor do número π. Use a calculadora e responda: qual delas é a representação mais próxima a π? $\frac{355}{113}$

8 Reúna-se com um colega. Com o auxílio de uma fita métrica, determinem a medida, em centímetro, do diâmetro (D) e do comprimento (C) da circunferência de dois objetos que tenham forma circular.

Depois, resolvam as questões.

GEORGE TUTUMI

a) Qual foi o valor encontrado para a razão $\frac{C}{D}$? Os valores encontrados são próximos? Sim, valores próximos de 3,1.

b) Definam π.

c) O que vocês podem concluir com base nos valores encontrados e na definição de π? Pode-se concluir que os valores encontrados confirmam aproximações do valor de π.

8. b) Espera-se que respondam que π é um número irracional dado pela razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

9 O ponteiro dos minutos de um relógio tem comprimento de 12 cm. Qual é a distância que a ponta do ponteiro percorre em um intervalo de tempo de 20 minutos? 8π cm

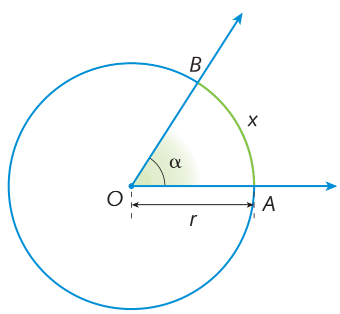

LUCIACASAIS/SHUTTERSTOCK

10 Determine a medida do comprimento de um arco de circunferência nos casos a seguir.

a) $\alpha = 60°$
$r = 5$ cm
$x = ?$ $\frac{5\pi}{3}$ cm

b) $\alpha = 80°$
$r = 4$ cm
$x = ?$ $\frac{16\pi}{9}$ cm

c) $\alpha = 360°$
$r = 4$ cm
$x = ?$ 8π cm



GUILHERME CASAGRANDI

11 Considerando que um arco de 60° mede 12,56 cm, calcule a medida do raio. 12 cm

12 Em quanto aumenta a medida do raio de uma circunferência quando o seu comprimento aumenta 4 cm? $\frac{2}{\pi}$ cm

13 Calcule a medida do comprimento de uma circunferência cujo diâmetro mede 5 cm. 5π cm

14 Quanto mede o comprimento do arco de 36° em uma circunferência cujo raio mede 6 cm? $\frac{6\pi}{5}$ cm

15 O raio de uma pista circular mede 20 m. Determine o número de voltas que um automóvel deve dar para percorrer 6 280 m. 50 voltas

16 O comprimento de $\frac{1}{4}$ de uma circunferência *C* mede 3,14 cm. Determine a medida do diâmetro de uma circunferência cujo comprimento mede o quádruplo de *C*. 16 cm

17 Quanto mede o raio de um círculo cuja circunferência tem um arco de 22° 30' com $\frac{\pi}{2}$ m de comprimento? 4 m

18 **(Enem)** O losango representado na figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

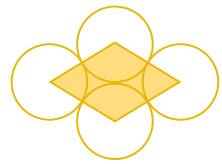


figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela figura 2.

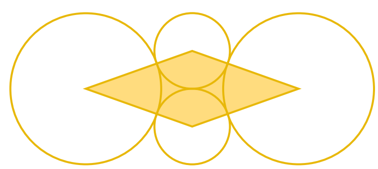


figura 2

GUILHERME CASAGRANDI

O perímetro do losango da figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da figura 1, teve um aumento de: alternativa **e**

a) 300%
b) 200%
c) 150%
d) 100%
e) 50%

19 Determine a medida do comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de 22° 30', cujo raio mede 8 m. (Use $\pi = 3,14$.) 3,14 m

20 O robô Murata Boy pilota uma bicicleta em superfícies planas, sobe rampas e evita a colisão com objetos à sua frente. Os raios das rodas da bicicleta medem 10 cm. Para completar um percurso de 379,94 m, quantas voltas completas, aproximadamente, cada uma das rodas dessa bicicleta dará? 605 voltas


KOICHI KAMOSHIDA/GETTY IMAGES

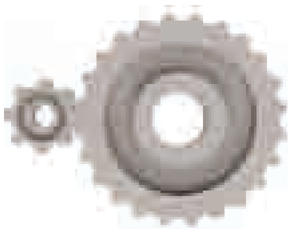
O Murata Boy é um robô de 50 cm de altura e 6 kg de massa, desenvolvido por uma empresa japonesa em Chiba, Japão, em 2006.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

21 Uma circunferência tem 10 m de medida de diâmetro. Quanto mede o comprimento do menor arco limitado pelos lados de um ângulo central de 72°? 2π m

22 Determine, em grau e minuto, a medida de um arco de circunferência cujo comprimento mede o dobro da medida do raio. (Considere $\pi = 3{,}14$.) 114° 39'

23 Em uma engrenagem, uma roda tem 50 cm de medida de raio e dá 800 voltas, enquanto outra roda menor dá 2 000 voltas. Qual é a medida do raio da roda menor? 20 cm

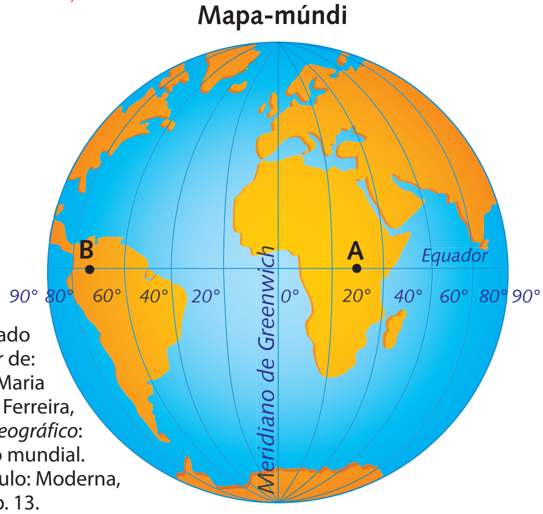


GUILHERME CASAGRANDI

24 No papiro Ahmes (1 500 a.C.), encontrado no Egito, o valor de π é $\frac{19}{6}$. O matemático chinês Tsu Ch'ung-chih (480 d.C.) adota $\frac{355}{113}$ como valor de π. Com uma calculadora, determine esses dois valores com aproximação de cinco casas decimais.
3,16049 e 3,14159

25 Duas cidades sobre a linha do Equador estão situadas a 28° 46' de longitude leste e 75° 42' de longitude oeste. Sabendo que o raio do Equador terrestre mede aproximadamente 6 378 km, determine a distância aproximada entre essas duas cidades.
11 622,29 km

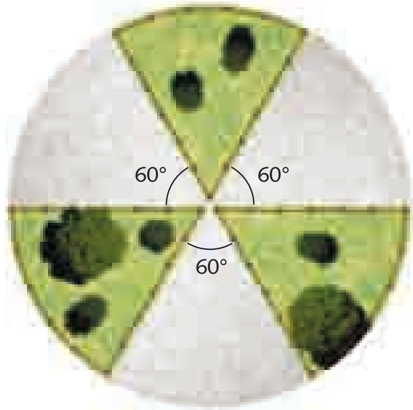
Mapa-múndi



Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira, *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 13.

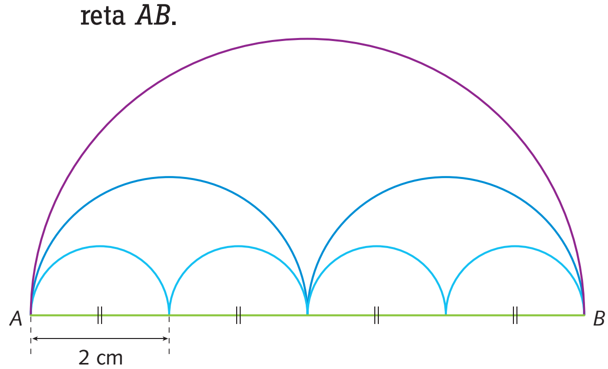
ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

26 Uma praça circular tem 60 m de diâmetro. Nela há três jardins, conforme a figura, cada um deles com um ângulo central de 60°. Em volta de cada um, há uma cerca que o protege. Quanto mede o comprimento total da cerca? $(180 + 30\pi)$ m



GUILHERME CASAGRANDI

27 Calcule a medida do comprimento de todos os caminhos possíveis que ligam o ponto A ao ponto B, excetuando o segmento de reta $\overline{AB}$.

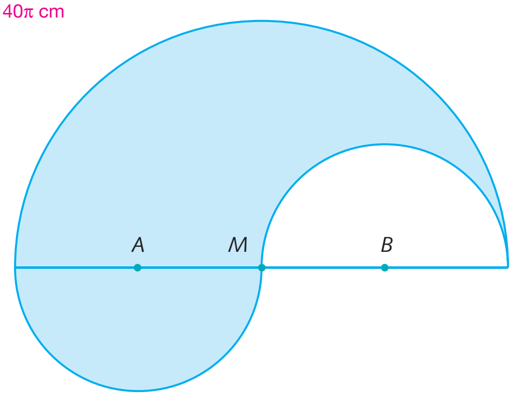


GUILHERME CASAGRANDI

a) Qual é o caminho mais curto?
b) Qual é o caminho mais longo?

Há 5 caminhos possíveis e todos eles medem 4π cm.

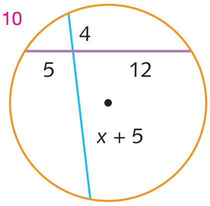
28 A medida do segmento $\overline{AB}$ é 20 cm, e M é ponto médio de $\overline{AB}$. Calcule a medida do comprimento do contorno dessa figura.
40π cm



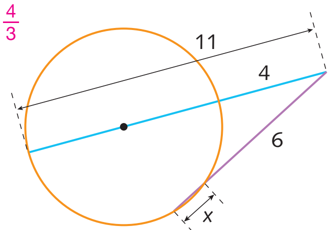
GUILHERME CASAGRANDI

29 Calcule o valor de x em cada figura.

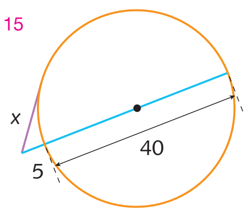
a) 10



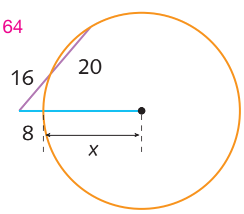
b) $\frac{4}{3}$



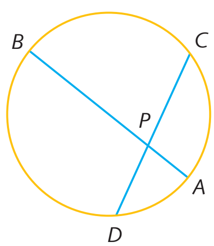
c) 15



d) 64



30 Na figura, $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$, $PC = 8$ cm e $PD = 6$ cm. Qual é a medida, em metro, de $\overline{AB}$? 0,16 m



31 O ponto P está no interior de uma circunferência de 13 cm de raio e dista 5 cm do centro dela. Pelo ponto P traça-se a corda $\overline{AB}$ de 25 cm. Quais são as medidas dos segmentos que P determina sobre a corda $\overline{AB}$?
16 cm e 9 cm

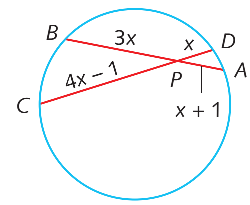
32 Em uma circunferência, a corda $\overline{CD}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto P. Sabendo que $AP \cdot PB = 3$, responda: qual é a medida de $\overline{CD}$? $2\sqrt{3}$

33 Em uma circunferência, duas cordas se cruzam, e os dois segmentos de uma delas medem, respectivamente, 16 m e 3 m. Calcule as medidas dos segmentos da outra, cuja comprimento total mede 16 m.
4 m e 12 m

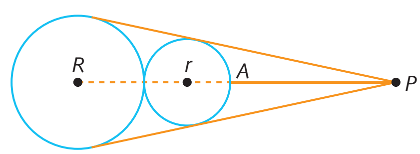
34 Pelo ponto médio M de um segmento $\overline{AB}$ de 12 cm traça-se um segmento $\overline{CD}$ de 20 cm, perpendicular a $\overline{AB}$, e faz-se passar uma circunferência pelas extremidades dos dois segmentos. Determine a medida do raio dessa circunferência e as medidas dos segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{DM}$. 10 cm, 2 cm e 18 cm

35 Em um círculo, duas cordas se cruzam. Os dois segmentos da primeira medem 3 cm e 8 cm. Os dois segmentos da segunda corda estão entre si na razão 2 para 3. Quais são as medidas dos dois segmentos da segunda corda? 4 cm e 6 cm

36 Calcule as medidas das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ na figura.
$AB = 17$; $CD = 19$



37 Duas circunferências de raio R e r, com $R > r$, são tangentes externas (observe a figura abaixo). Qual é a medida do segmento $\overline{PA}$? $\frac{2r^2}{R - r}$



38 Os diâmetros das rodas de uma moto medem 1 m e 0,5 m. Quantos quilômetros terá percorrido a roda menor, quando a maior tiver percorrido a distância de 1 km? 1 km

39 De um ponto P, exterior a uma circunferência, traça-se uma tangente $\overleftrightarrow{PC}$, sendo C o ponto de tangência, e um segmento secante à circunferência. Qual é a razão entre a medida da parte externa do segmento secante e a medida total do segmento secante, para que a medida de $\overline{PC}$ seja o dobro da medida da parte externa do segmento secante? $\frac{1}{4}$

GRÁFICOS: GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO

9 POLÍGONOS REGULARES

DADO GALDIERI/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Neste capítulo, vamos trabalhar com os elementos e propriedades dos polígonos regulares. Os alunos estudarão os polígonos inscritos e circunscritos à circunferência e as relações métricas nos polígonos regulares. A foto da página de abertura oferece oportunidade de revisar os conceitos básicos de polígonos regulares.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Na foto desta abertura, podemos observar um heliporto que tem a forma de um octógono.

- Na sua opinião, esse octógono é regular? Resposta pessoal.
- Quais são as condições necessárias para que um polígono seja considerado regular? Um polígono é regular quando tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos de mesma medida.

Heliporto é o local de pouso e decolagem de helicópteros. Na foto, heliporto em uma plataforma de exploração de petróleo em Macaé (RJ), 2013.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

João e Luísa iniciaram um jogo de bolas de gude.

Colocaram, sobre uma circunferência, três bolinhas a uma mesma distância uma da outra. Em seguida, com o dedo, traçaram linhas unindo-as. Veja a figura.

Depois, apagaram o traçado das linhas e colocaram mais três bolinhas sobre a circunferência, a igual distância das anteriores. Em seguida, traçaram outras linhas unindo as bolinhas. Veja a figura.

GEORGE TUTUMI

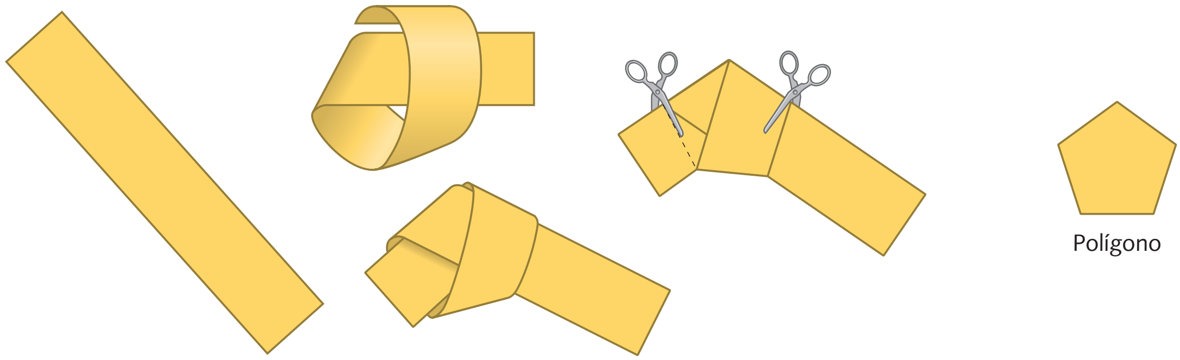
Observe as figuras formadas e responda às questões.

- Essas figuras lembram quais polígonos? primeira figura: triângulo; segunda figura: hexágono.
- Nesses polígonos, o que as bolinhas de gude representam? os vértices do polígono
- Podemos dizer que os polígonos formados são regulares? sim

Nessa situação, assim como em outras, observamos a presença de figuras que lembram **polígonos regulares**. Neste capítulo, vamos estudá-los.

1 Polígonos

Larissa gosta de brincar com dobraduras. Ela formou uma figura que lembra um polígono.



GUILHERME CASAGRANDI

Você já estudou que polígono é definido por uma linha poligonal, fechada e simples em um plano com sua região interna.

Elementos de um polígono

Em um polígono, podemos destacar estes elementos:

- **Lados** – os segmentos de reta:

  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$

- **Vértices** – pontos de encontro de dois lados consecutivos.

  A, B, C, D, E

- **Diagonais** – segmentos cujas extremidades são dois vértices não consecutivos.

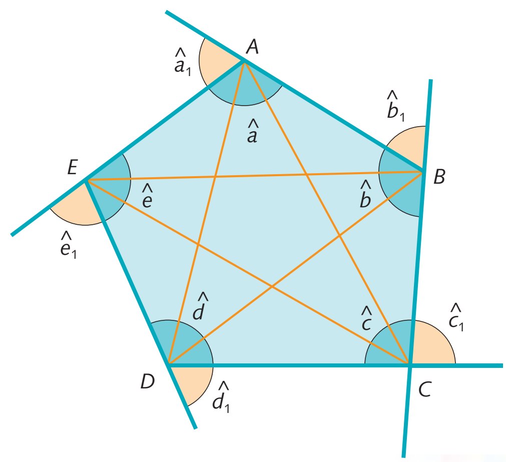
  $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$

- **Ângulos internos** – ângulos formados por dois lados consecutivos.

  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ ou $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{e}$

- **Ângulos externos** – ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo.

  $\widehat{a}_1, \widehat{b}_1, \widehat{c}_1, \widehat{d}_1, \widehat{e}_1$



GUILHERME CASAGRANDI

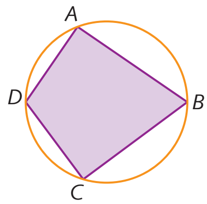
GEORGE TUTUMI

Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

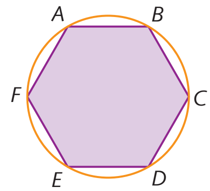
Um polígono está inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos dessa circunferência.

Exemplos

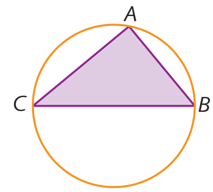
GUILHERME CASAGRANDI



quadrilátero
inscrito em uma circunferência



hexágono
inscrito em uma circunferência



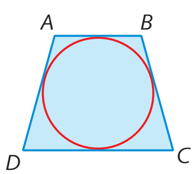
triângulo
inscrito em uma circunferência

Podemos dizer que os polígonos estão **inscritos** nas circunferências ou que as circunferências **circunscrevem** os polígonos.

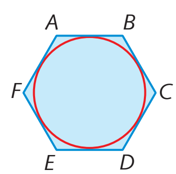
Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Exemplos

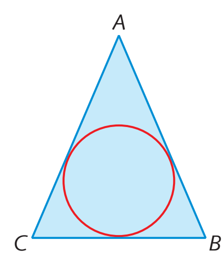
GUILHERME CASAGRANDI



quadrilátero circunscrito
a uma circunferência



hexágono circunscrito
a uma circunferência



triângulo circunscrito
a uma circunferência

Nesse caso, podemos dizer que os polígonos estão **circunscritos** às circunferências ou que as circunferências estão **inscritas** nos polígonos.

Propriedades

Com os conhecimentos adquiridos sobre ângulo inscrito em uma circunferência, podemos demonstrar as seguintes propriedades:

1ª propriedade

Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo.

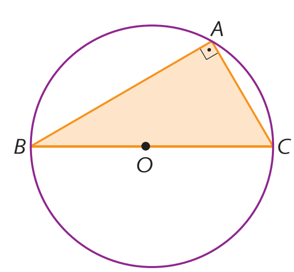
Demonstração

$$\text{med}(\widehat{A}) = \frac{\text{med}(B\widehat{O}C)}{2}$$

$$\text{med}(\widehat{A}) = \frac{180°}{2} = 90°$$

$$\text{med}(\widehat{A}) = 90°$$

GUILHERME CASAGRANDI



2ª propriedade

Os ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência são suplementares.

Demonstração

$\text{med}(\widehat{A}) = \dfrac{\beta}{2}$ e $\text{med}(\widehat{C}) = \dfrac{\alpha}{2}$

$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{360°}{2} = 180°$

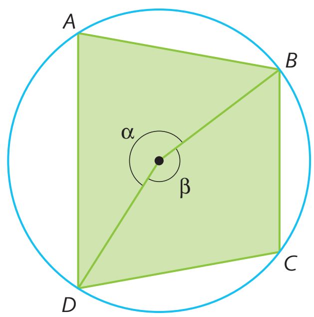
$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) = 180°$

Por analogia:

$\text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{D}) = 180°$

Logo:

$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{D}) = 180°$

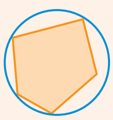


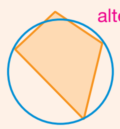
GUILHERME CASAGRANDI

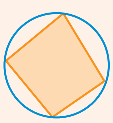
ATIVIDADES

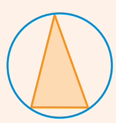
Faça as atividades no caderno.

1 Identifique as figuras que apresentam um polígono inscrito em uma circunferência. alternativas **b** e **d**

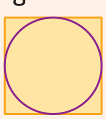
a) 

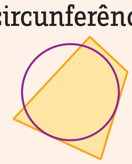
c) 

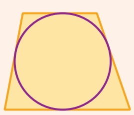
b) 

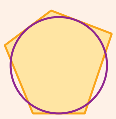
d) 

2 Identifique as figuras que apresentam um polígono circunscrito à circunferência. alternativas **a** e **b**

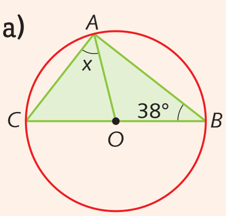
a) 

c) 

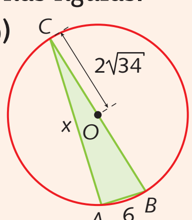
b) 

d) 

3 Determine o valor de x nas figuras.

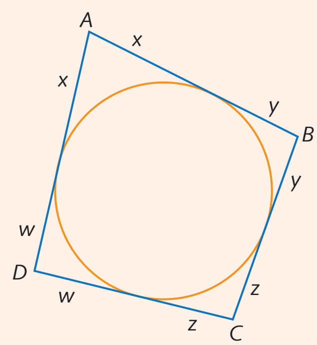
a) 

$x = 52°$

b) 

$x = 2\sqrt{127}$

4 Reúna-se com um colega e observem o quadrilátero $ABCD$, circunscrito a uma circunferência, onde x, y, z e w são as medidas dos segmentos tangentes, e façam o que se pede.



LUIZ RUBIO

a) Escrevam as medidas de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. $x + y$, $y + z$, $z + w$, $w + x$

b) Escrevam a soma das medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. $x + y + z + w$

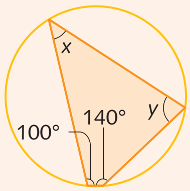
c) Escrevam a soma das medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$. $y + z + w + x$

d) O que vocês podem concluir sobre as somas das medidas dos lados opostos de um quadrilátero circunscritível? As somas das medidas dos lados opostos são iguais.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

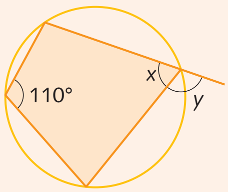
5 Determine o valor de x e y nas figuras.

a)



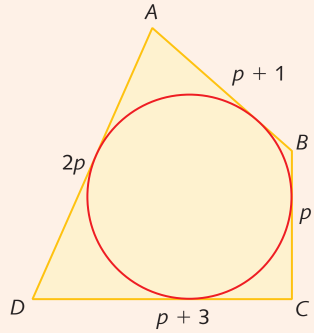
$x = 40°$; $y = 80°$

b)



$x = 70°$; $y = 110°$

6 O quadrilátero $ABCD$ da figura está circunscrito a uma circunferência. Qual é a medida de seu perímetro? 24



2 Polígonos regulares

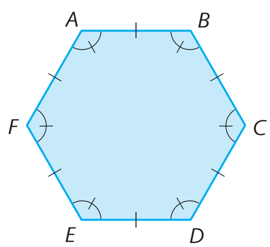
Já vimos que um polígono é regular quando todos os seus lados e todos os seus ângulos internos são congruentes, ou seja, quando o polígono é equiângulo e é equilátero.

Observe um exemplo:

O hexágono da figura é regular, pois possui todos os ângulos congruentes e todos os lados congruentes, ou seja:

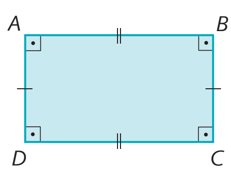
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$

$\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C} \cong \widehat{D} \cong \widehat{E} \cong \widehat{F}$

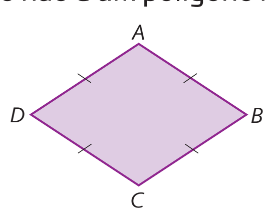


Cuidado!

- Os ângulos de um retângulo são todos congruentes, mas não podemos afirmar que os seus lados sejam congruentes. Logo, o retângulo não é um polígono regular.



- Os lados de um losango são todos congruentes, mas não podemos afirmar que os seus ângulos sejam congruentes. Logo, o losango não é um polígono regular.



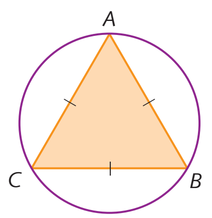
Propriedades dos polígonos regulares

1ª propriedade

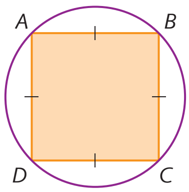
Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.

Para inscrever um polígono regular de n lados ($n > 2$) em uma circunferência, basta dividi-la em n arcos congruentes e traçar todos os segmentos que tenham como extremidades dois pontos consecutivos obtidos nessa divisão, determinando, assim, os lados do polígono.

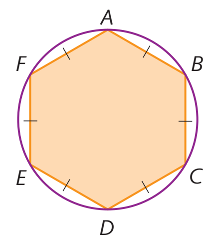
Exemplos



triângulo regular
inscrito em uma circunferência



quadrilátero regular
inscrito em uma circunferência



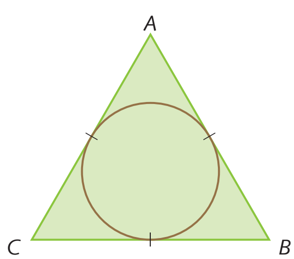
hexágono regular
inscrito em uma circunferência

2ª propriedade

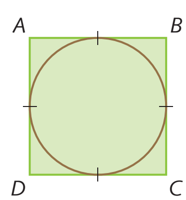
Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.

Para circunscrever um polígono regular de n lados ($n > 2$) a uma circunferência, basta dividi-la em n arcos congruentes e traçar as tangentes nos pontos de divisão.

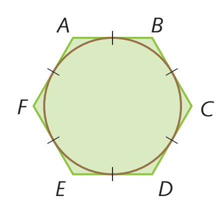
Exemplos



triângulo regular
circunscrito à circunferência



quadrilátero regular
circunscrito à circunferência



hexágono regular
circunscrito à circunferência

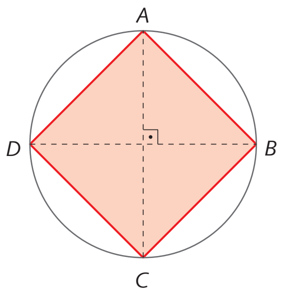
A circunferência é tangente a todos os lados do polígono circunscrito.

Construções geométricas com régua e compasso

Utilizando régua e compasso, veja como construir alguns polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

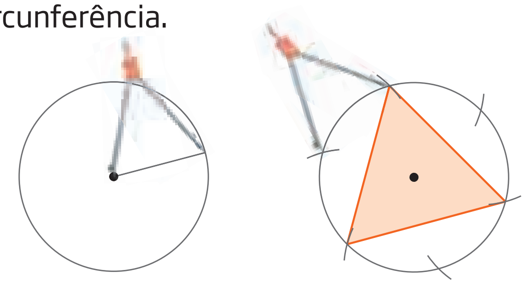
Quadrado

Traçando dois diâmetros perpendiculares, dividimos a circunferência em quatro arcos congruentes. As extremidades das cordas assim determinadas são os vértices de um quadrado inscrito na circunferência.



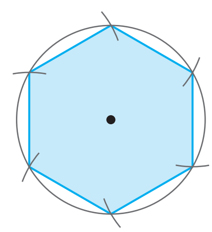
Triângulo equilátero

Usando um compasso com abertura da medida do raio da circunferência, marcamos seis arcos congruentes. Unindo os pontos alternadamente, conforme a figura, obtemos três cordas que formam um triângulo equilátero inscrito na circunferência.



Hexágono regular

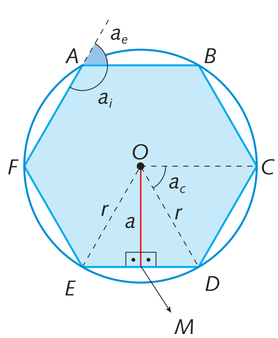
Repetimos o procedimento para a construção do triângulo equilátero, mas não unimos os pontos alternados, e sim os pontos consecutivos, obtendo um hexágono regular inscrito com lado de medida igual à medida do raio da circunferência.



GUILHERME CASAGRANDI

Elementos de um polígono regular

Observe a figura abaixo e verifique os elementos de um polígono regular.



GUILHERME CASAGRANDI

- O ponto O é o **centro do polígono** e corresponde ao centro das circunferências inscrita e circunscrita ao mesmo.
- O raio da circunferência circunscrita (de medida r) é o **raio do polígono**.
- O segmento de reta cujas extremidades são o centro e o ponto médio de qualquer lado do polígono é um **apótema do polígono** (de medida a).

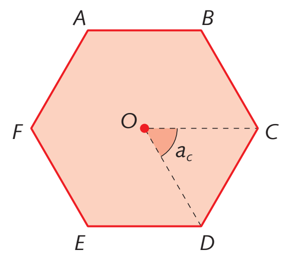
Chame a atenção dos alunos para o fato de que a medida de um apótema corresponde à medida do raio da circunferência inscrita.

- O ângulo que tem o vértice no centro e cujos lados contêm vértices consecutivos é um **ângulo central** ($\widehat{a}_c$).
- O ângulo formado por dois lados consecutivos do polígono é um **ângulo interno** ($\widehat{a}_i$).
- O **ângulo externo** ($\widehat{a}_e$) é o suplemento do ângulo interno correspondente.

Vamos relembrar como calcular a medida dos ângulos central, interno e externo de um polígono regular.

Ângulo central

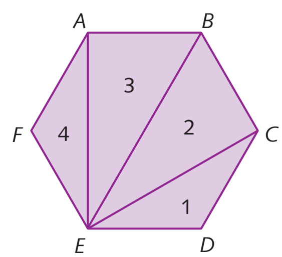
Como a soma das medidas de todos os ângulos centrais do polígono regular é 360°, ou seja, uma volta completa, em um polígono de n lados, a medida do ângulo central é:



$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Ângulo interno

Quando, a partir de um único vértice, decompomos um polígono em triângulos, verificamos que o número de triângulos é duas unidades menor que o número de lados. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos afirmar que a soma dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados corresponde a: $S_i = (n - 2) \cdot 180°$



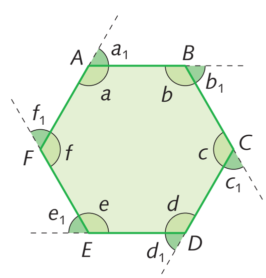
GRÁFICOS: GUILHERME CASAGRANDI

Assim, em um polígono regular de n lados, a medida do ângulo interno é:

$$a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Ângulo externo

Como o ângulo externo e o ângulo interno são suplementares, temos:



$a + a_1 = 180°$ $\quad c + c_1 = 180°$ $\quad e + e_1 = 180°$

$b + b_1 = 180°$ $\quad d + d_1 = 180°$ $\quad f + f_1 = 180°$

Efetuando a adição das medidas de todos os ângulos, temos:

$$\underbrace{a + b + c + d + e + f}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos}} + \underbrace{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1}_{\text{soma das medidas dos ângulos externos}} = \underbrace{6}_{\text{número de lados}} \cdot 180°$$

Então, em um polígono de n lados:

$S_i + S_e = n \cdot 180°$

$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$

$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180° \Rightarrow S_e = 360°$

Assim, em um polígono regular de n lados, a medida do ângulo externo é: $$a_e = \frac{360°}{n}$$

Lendo e aprendendo

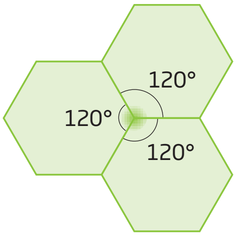
As formas na natureza e os polígonos

Na natureza, podemos encontrar algumas formas que lembram polígonos regulares. Na foto abaixo, vemos que as entradas dos alvéolos de um favo de mel lembram a forma de hexágono.

STUDIOSMART/SHUTTERSTOCK

Alvéolos de um favo de mel.

Observe que os alvéolos se aglutinam de três em três em torno de um vértice comum. Supondo que formem hexágonos regulares, concluímos que a medida de cada um dos três ângulos internos é 120°; logo, a soma resulta em 360° e não sobra espaço entre os ângulos, ou seja, os hexágonos regulares recobrem o plano perfeitamente.



LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? alternativas **a**, **b** e **d**

a) Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

b) Denomina-se equiângulo um polígono que tem todos os ângulos congruentes.

c) O retângulo é um polígono regular.

d) Denomina-se equilátero um polígono que possui todos os lados congruentes.

2 Desenhe, em seu caderno, um polígono regular qualquer, identificando: Construção de figura.

a) o centro do polígono;

b) um ângulo central;

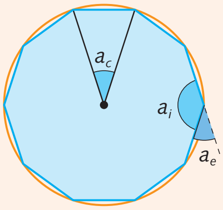
c) um raio;

d) um ângulo interno;

e) um apótema;

f) um ângulo externo.

3 Calcule a medida do ângulo central, do ângulo interno e do ângulo externo do decágono regular. $a_c = 36°$; $a_i = 144°$; $a_e = 36°$



GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Calcule a medida do ângulo central, do ângulo interno e do ângulo externo do:

a) triângulo equilátero; $a_c = 120°$; $a_i = 60°$; $a_e = 120°$

b) quadrado; $a_c = 90°$; $a_i = 90°$; $a_e = 90°$

c) hexágono regular. $a_c = 60°$; $a_i = 120°$; $a_e = 60°$

5 Determine o polígono regular cujos ângulos centrais medem:

a) 36° decágono

b) 40° eneágono

c) 60° hexágono

d) 90° quadrado

e) 120° triângulo equilátero

6 Quantos lados tem um polígono regular cujos ângulos externos medem 24°? 15 lados

7 O ângulo interno de um polígono regular mede 135°. Quanto mede seu ângulo externo? Qual é esse polígono? $a_e = 45°$; octógono

8 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 1440°. Quanto mede o ângulo externo desse polígono? 36°

9 Utilizando um compasso, trace uma circunferência de 3 cm de raio e, inscrito nessa circunferência, desenhe: Construção de figuras.

a) um quadrado;

b) um hexágono regular;

c) um triângulo equilátero.

3 Relações métricas nos polígonos regulares

A seguir, vamos estudar as relações entre as medidas do lado, do apótema de um polígono regular e do raio da circunferência em que o polígono está inscrito.

Quadrado inscrito em uma circunferência

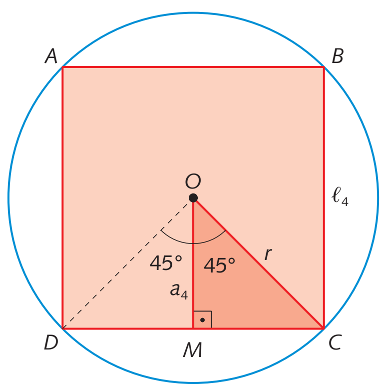
Notações:

ℓ_4 ⟵ medida do lado do quadrado

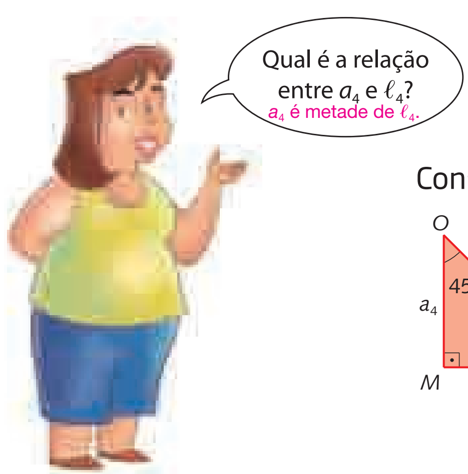
a_4 ⟵ medida do apótema do quadrado

r ⟵ medida do raio da circunferência circunscrita ao quadrado

$$a_c = \frac{360°}{4} = 90°$$

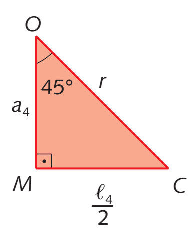


GRÁFICOS: GUILHERME CASAGRANDI



GEORGE TUTUMI

Considere o triângulo *OMC*:



$$\text{sen } 45° = \frac{\frac{\ell_4}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{\ell_4}{\cancel{2}r} \Rightarrow \boxed{\ell_4 = r\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{a_4}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a_4}{r} \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

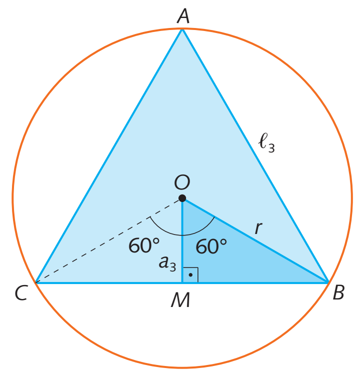
Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência

Notações:

ℓ_3 ⟵ medida do lado do triângulo

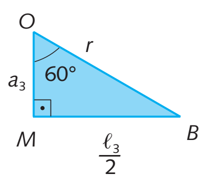
a_3 ⟵ medida do apótema do triângulo

r ⟵ medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo



$$a_c = \frac{360°}{3} = 120°$$

Considere o triângulo *OMB*:



$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{\ell_3}{\cancel{2}r} \Rightarrow \boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{a_3}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_3}{r} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$$

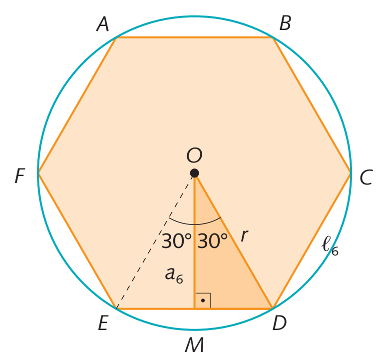
Hexágono regular inscrito em uma circunferência

Notações:

ℓ_6 ⟵ medida do lado do hexágono

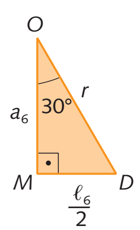
a_6 ⟵ medida do apótema do hexágono

r ⟵ medida do raio da circunferência circunscrita ao hexágono



$$a_c = \frac{360°}{6} = 60°$$

Considere o triângulo *OMD*:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell_6}{2}}{r} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\ell_6}{\cancel{2}r} \Rightarrow \boxed{\ell_6 = r}$$

$$\cos 30° = \frac{a_6}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a_6}{r} \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

Exemplos

- Determinar as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência cujo raio mede 10 cm.

  $\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 10\sqrt{2}$

  $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

  Portanto, o lado mede $10\sqrt{2}$ cm e o apótema mede $5\sqrt{2}$ cm.

GRÁFICOS: GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

- Determinar as medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo raio mede 12 cm.

$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 12\sqrt{3}$

$a_3 = \dfrac{r}{2} \Rightarrow a_3 = \dfrac{12}{2} = 6$

Portanto, o lado mede $12\sqrt{3}$ cm e o apótema mede 6 cm.

- Determinar as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 8 cm.

$\ell_6 = r \Rightarrow \ell_6 = 8$

$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Portanto, o lado desse hexágono mede 8 cm e o apótema mede $4\sqrt{3}$ cm.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência cujo raio mede 10 cm. $\ell = 10\sqrt{2}$ cm; $a = 5\sqrt{2}$ cm

2 O perímetro de um quadrado inscrito em uma circunferência é 40 cm. Determine a medida do raio. $5\sqrt{2}$ cm

3 O lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede 12 cm. Calcule a medida:

a) do raio da circunferência que circunscreve o quadrado; $6\sqrt{2}$ cm

b) do apótema do quadrado. 6 cm

4 O lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $3\sqrt{8}$ cm. Determine a medida do apótema desse quadrado. $3\sqrt{2}$ cm

5 Um quadrado está inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4 cm. Determine:

a) o perímetro aproximado desse quadrado, usando $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$; 22,56 cm

b) a área desse quadrado. 32 cm^2

6 Calcule a medida do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo raio mede 8 cm. $\ell = 8\sqrt{3}$ cm; $a = 4$ cm

7. $r = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm; $a = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

7 O lado de um triângulo equilátero mede 20 cm. Determine as medidas do raio da circunferência circunscrita e do apótema.

8 O apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede 6 cm. Calcule a medida do lado desse triângulo. $12\sqrt{3}$ cm

9 Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo raio mede $10\sqrt{3}$ cm. 90 cm

10 Calcule as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 12 cm. $\ell = 12$ cm; $a = 6\sqrt{3}$ cm

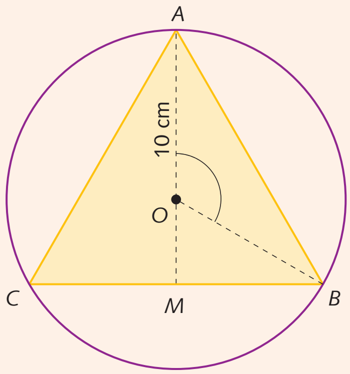
11 O apótema de um hexágono regular mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine o perímetro do hexágono. 60 cm

12 O lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 8 cm. Calcule a medida do raio da circunferência e a medida do apótema do hexágono. $r = 8$ cm; $a = 4\sqrt{3}$ cm

13 A maior diagonal de um hexágono regular mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do apótema desse hexágono. 9 cm

Lembre-se:
Não escreva no livro!

14 Observando o triângulo equilátero inscrito na circunferência, determine:



GUILHERME CASAGRANDI

a) a medida do segmento $\overline{AB}$; $10\sqrt{3}$ cm
b) a medida do segmento $\overline{OM}$; 5 cm
c) a medida do ângulo $A\widehat{O}B$; 120°
d) a medida do segmento $\overline{AM}$. 15 cm

15 O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do lado desse hexágono. 12 cm

16 O lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $8\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do apótema do hexágono regular inscrito na mesma circunferência. $6\sqrt{2}$ cm

17 Qual é a razão entre a medida do lado de um hexágono regular e a medida do lado de um quadrado, nessa ordem (os dois estão inscritos na mesma circunferência)? $\frac{\sqrt{2}}{2}$

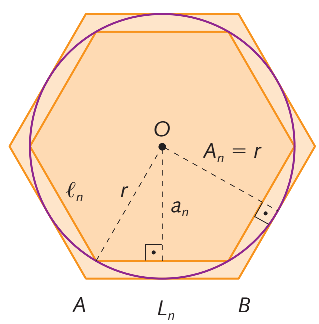
18 O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $12\sqrt{3}$ m. Determine a medida:
a) da diagonal do quadrado inscrito nessa circunferência; 48 m
b) do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. 12 m

Polígonos regulares circunscritos

Observe na figura ao lado dois polígonos: um inscrito e outro circunscrito à circunferência de raio *r*.

Notações:

ℓ_n ⟵ medida do lado do polígono regular inscrito
a_n ⟵ medida do apótema do polígono regular inscrito
L_n ⟵ medida do lado do polígono regular circunscrito
A_n ⟵ medida do apótema do polígono regular circunscrito



Note que: $A_n = r$

GUILHERME CASAGRANDI

Como os polígonos inscrito e circunscrito à circunferência são semelhantes, podemos estabelecer esta relação:

$$\frac{\ell_n}{L_n} = \frac{a_n}{A_n} \Rightarrow \boxed{\frac{\ell_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule a medida do lado do triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência cujo raio mede $2\sqrt{3}$ cm. 12 cm

2 Calcule a medida do lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência cujo raio mede 8 cm. 16 cm

3 Calcule a medida do lado do hexágono regular circunscrito a uma circunferência cujo raio mede $4\sqrt{3}$ cm. 8 cm

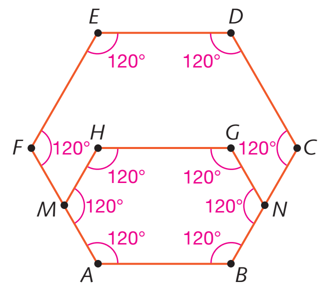
4 O perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é $24\sqrt{3}$ cm. Calcule o perímetro de um triângulo equilátero circunscrito a essa circunferência. 72 cm

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(Obmep) O polígono *ABCDEF* é um hexágono regular. Os pontos *M* e *N* são pontos médios dos lados *AF* e *BC*, respectivamente. O hexágono *ABNGHM* é simétrico em relação à reta que passa por *M* e *N*. Qual é a razão entre as áreas dos hexágonos *ABNGHM* e *ABCDEF*? alternativa **e**

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{4}{11}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{7}{15}$ e) $\frac{5}{12}$



LUIZ RUBIO

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Calcule a medida dos ângulos internos dos hexágonos *ABCDEF* e *ABNGHM*.
- Os hexágonos *ABCDEF* e *ABNGHM* são polígonos semelhantes? Não, pois a medida dos lados correspondentes não são proporcionais.

Plano de resolução

- Os hexágonos *ABCDEF* e *ABNGHM* podem ser decompostos em triângulos equiláteros congruentes? sim
- Quantos triângulos equiláteros congruentes recobrem o hexágono *ABNGHM*? E quantos recobrem o hexágono *ABCDEF*? 10; 24
- Qual é a relação entre a medida do lado desses triângulos equiláteros e a medida do lado do hexágono maior? A medida do lado do triângulo equilátero é metade da medida do lado do hexágono maior.
- Qual é a área de cada hexágono em relação à área dos triângulos que os compõem? 10, 24

Resolução

- Junte-se a um colega.
- Compartilhem os planos de resolução.
- Discutam as diferenças e as semelhanças entre os planos e escolham um para a execução do processo de resolução.

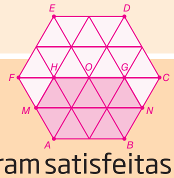
<u>Observação</u>

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

Pode-se decompor o hexágono regular *ABCDEF* em 24 pequenos triângulos equiláteros congruentes e verificar que o hexágono *ABNGHM* é composto de 10 desses triângulos equiláteros.

Portanto, a razão entre as áreas dos hexágonos *ABNGHM* e *ABCDEF* é $\frac{10}{24}$, ou seja, $\frac{5}{12}$.



LUIZ RUBIO

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Construam diversos triângulos equiláteros de cartolina. Utilizando apenas esses triângulos, componham novos polígonos, regulares ou não, e apresentem para a sala.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 No caderno, copie as frases a seguir e complete-as com as palavras do quadro.

inscritível	retângulo	tangentes	quadrilátero

a) Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados são ■ à circunferência. tangentes

b) Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo ■. retângulo

c) Os ângulos opostos de um ■ convexo inscrito em uma circunferência são suplementares. quadrilátero

d) Todo polígono regular é ■ e circunscritível a uma circunferência. inscritível

2 Usando régua e compasso, construa os seguintes polígonos regulares inscritos em uma circunferência: Construção de figuras.

a) um quadrado; b) um triângulo equilátero; c) um hexágono regular.

3 Analise as sentenças abaixo e identifique a falsa, corrigindo-a no caderno.

a) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é dada por $(n - 2) \cdot 180°$.

b) A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono regular é 360°.

c) O ângulo formado por dois lados consecutivos de um polígono é um ângulo interno.

d) A soma das medidas dos ângulos centrais de um polígono regular é $n \cdot 360°$.

d) A soma das medidas dos ângulos centrais de um polígono regular é 360°.

4 As relações métricas estudadas neste capítulo referem-se a que elementos dos polígonos regulares? Neste capítulo, são estudadas as relações entre as medidas do lado e do apótema de um polígono regular e do raio da circunferência em que tal polígono está inscrito.

6. $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ pelo caso LAL (há dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes)

Então: $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AF}$

$\frac{3AE}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{3AF}{AF}$

$3 = \frac{BC}{EF} \Rightarrow EF = \frac{BC}{3}$

$\triangle DBI \cong \triangle EAF \cong \triangle GCH$ pelo caso LAL

Então: $DI = EF = GH = \frac{BC}{3}$

Assim: $DE = EF = FG = GH = HI = ID = \frac{BC}{3}$

Portanto, *DEFGHI* é hexágono regular.

Aplicando

1 Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em um círculo cujo raio mede $7\sqrt{3}$ cm. 63 cm

2 Em um círculo está inscrito um hexágono regular cujo lado mede 6 cm. Qual é a soma das medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo? $3(1 + 2\sqrt{3})$ cm

3 **(Enem)**

STEPHEN FINN/SHUTTERSTOCK

Disponível em: <http://www.diaadia.pr.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante* por rotações, em torno de seu centro, de: alternativa **d**

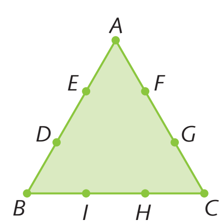
a) 45° b) 60° c) 90° d) 120° e) 180°

(*) Que não varia.

4 Qual é a medida do lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo comprimento mede 18,84 cm? (Use $\pi = 3{,}14$.) 3 cm

5 O perímetro de um hexágono regular é 2,16 dm. Qual é a medida do raio do círculo circunscrito a esse hexágono? 0,36 dm

6 Cada lado do triângulo equilátero *ABC*, ao lado, foi dividido em três partes iguais. Demonstre que *DEFGHI* é um hexágono regular.

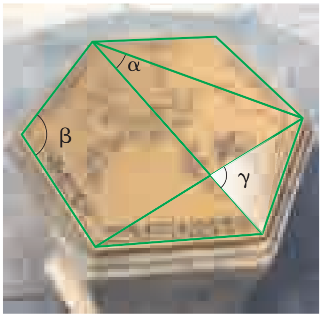


GUILHERME CASAGRANDI

Lembre-se:
Não escreva no livro!

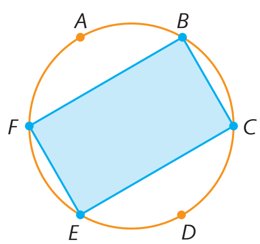
7 A foto abaixo mostra o Marco Zero, monumento de mármore em forma de hexágono regular que indica o centro oficial da cidade de São Paulo. Ele é utilizado como base para medir distâncias. Determine as medidas dos ângulos α, β e γ indicados.
$\alpha = 30°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$

RICARDO SIWIEC



Marco Zero, na Praça da Sé, São Paulo (SP). O monumento data de 1934. Cada um dos lados indica simbolicamente a direção de alguns estados brasileiros e do litoral. Foto de 2013.

8 Uma circunferência cujo diâmetro mede 36 cm está dividida em seis partes iguais. Observe a figura abaixo e determine o perímetro do quadrilátero *BCEF*. $36(1 + \sqrt{3})$ cm

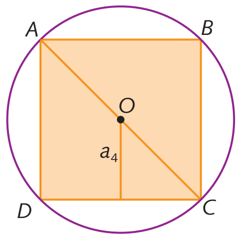


GUILHERME CASAGRANDI

9 Determine o polígono regular cujos ângulos centrais medem $\frac{1}{4}$ da medida do ângulo interno. decágono

10 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3 960°. Qual é a medida de um ângulo central e de um ângulo externo desse polígono? $a_c = 15°$; $a_e = 15°$

11 A diagonal de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema do quadrado. 4,5 cm

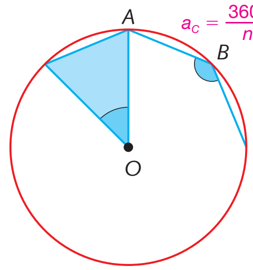


GUILHERME CASAGRANDI

12 Calcule a razão entre as medidas dos lados do hexágono regular e do quadrado inscritos em uma circunferência cujo raio mede 3 cm. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 Determine a razão entre o perímetro do hexágono regular inscrito em um círculo cujo raio mede $3\sqrt{2}$ m e o perímetro de um hexágono regular circunscrito a essa mesma circunferência. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14 Um polígono regular tem *n* lados. Escreva, em função de *n*, a medida de um ângulo central e a medida de um ângulo interno do polígono. $a_c = \frac{360°}{n}$; $a_i = \frac{180° \cdot (n - 2)}{n}$



GUILHERME CASAGRANDI

DESAFIO

(Enem) Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida *R* do raio adequado para a plataforma em termos da medida *L* do lado da base da estátua.
Qual relação entre *R* e *L* o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida? alternativa **a**

a) $R \geqslant \frac{L}{\sqrt{2}}$

b) $R \geqslant \frac{2L}{\pi}$

c) $R \geqslant \frac{L}{\sqrt{\pi}}$

d) $R \geqslant \frac{L}{2}$

e) $R \geqslant \frac{L}{(2\sqrt{2})}$

15 Determine dois polígonos regulares em que a razão entre as medidas dos ângulos internos, nessa ordem, seja $\frac{3}{5}$ e a razão entre o número de lados, nessa ordem, seja $\frac{1}{3}$.
quadrado e dodecágono

CAPÍTULO

10 ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Projeto de oásis capaz de gerar produtos agrícolas e energia sem impacto ambiental em região de deserto na Jordânia, país do Oriente Médio.

Neste capítulo, vamos estudar as áreas das figuras planas: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango. Os alunos também vão aprender a calcular a área de um polígono regular, do círculo, da coroa circular e do setor circular.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Projetos como o ilustrado nesta abertura preveem a utilização da água do mar e luz do Sol para cultivar plantas no deserto, combater o avanço da desertificação e ainda produzir biocombustível. Em um modelo ideal, para desenvolver um desses projetos, o espaço necessário seria de 40 km^2, assim distribuídos:

ÁREA DO TERRENO DESTINADA A CADA UNIDADE DO PROJETO
(em porcentagem)

Fonte: Revista *Época*, ed. 768, 11 fev. 2013.

GUILHERME CASAGRANDI

Nesta distribuição da área falta indicar o uso de 0,2% do terreno. Proponha aos alunos algumas questões para que percebam esse fato e para que conversem sobre como essa fração do terreno está sendo utilizada.

- Nesse projeto, qual é a área destinada, em km^2, para o plantio florestal? E para a produção de energia solar? 15 km^2; 6,4 km^2
- Observe os formatos dos tanques para a produção de algas indicados na imagem. Como você determinaria a área do terreno ocupada por um desses tanques? Converse com o professor e os colegas. Resposta pessoal.

Tanques para produção de algas que posteriormente serão usadas na fabricação de biocombustíveis.

SAHARA FOREST PROJECT/SAHARAFORESTPROJECT.COM

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

A necessidade de determinar a **área** (medida de superfície) é bem antiga. No antigo Egito, donos de terras às margens do rio Nilo já pagavam impostos ao faraó pelo uso da terra. O valor era proporcional à área cultivada.

GIANNI DAGLI ORTI/THE ART ARCHIVE/AFP

Esticadores de cordas egípcios, os agrimensores da época, cerca de 1400 a.C.

Ainda hoje, deparamos frequentemente com situações que exigem o cálculo de áreas. Veja estas situações.

DORIVAL MOREIRA/SAMBAPHOTO

Qual é a área total da fachada do prédio?

GEORGE TUTUMI

Qual é a área do piso da sala?

- O que precisamos saber para responder às perguntas acima?
  Precisamos conhecer as dimensões das superfícies para calcular as respectivas áreas.
- Considere a imagem da fachada do prédio. Se soubéssemos as medidas das janelas e das portas seria possível estimar a área dessa fachada? Espera-se que os alunos respondam afirmativamente.
- Agora, considere a imagem da sala. Se soubéssemos as medidas do sofá seria possível estimar a área dessa sala? Converse com o professor e os colegas sobre essas questões. Espera-se que os alunos respondam afirmativamente.
- Considere que as janelas do prédio tenham 1,2 m de largura e que o sofá da sala tenha 2 m de comprimento. Faça uma estimativa da área total da fachada do prédio e do piso da sala. Compare suas estimativas com as de um colega e verifiquem se os valores encontrados são próximos. Resposta pessoal.

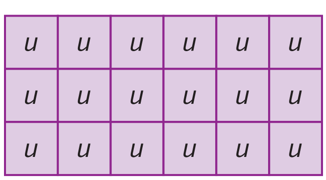
Neste capítulo, vamos estudar como calcular a área de diferentes figuras planas.

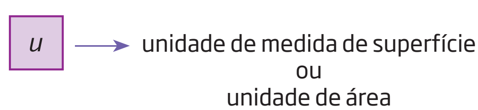
1 Área

A planta baixa de uma residência apresenta sua vista superior com a indicação das medidas da superfície de cada ambiente. Podemos, assim, obter facilmente a área de cada um dos ambientes e, consequentemente, determinar a área total do imóvel. A escala fornece a razão entre as medidas utilizadas no desenho e as medidas reais.

GUILHERME CASAGRANDI

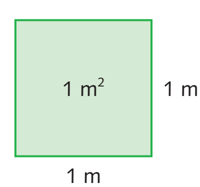
Para determinar a medida de uma superfície, devemos **compará-la** com outra, tomada como unidade de medida. Veja um exemplo.





Tomando $\boxed{u}$ como unidade de medida, verificamos que a área do polígono é igual a 18 *u*.

Para evitar o uso de diferentes unidades de medida, escolhemos uma unidade como **padrão**. A nossa unidade tomada como padrão de medida de superfície no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o **metro quadrado** $(\mathbf{m^2})$, que é uma unidade derivada da unidade de base metro do SI e que corresponde à medida da superfície de um quadrado com lados de 1 metro de comprimento.



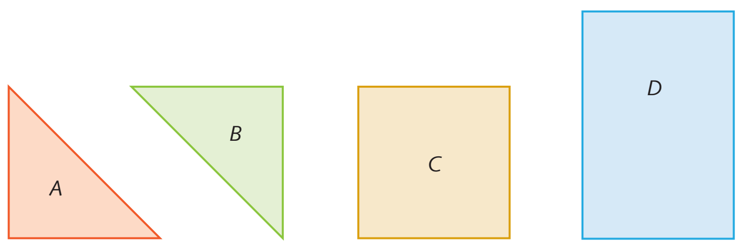
GUILHERME CASAGRANDI

Há também outras unidades de área, como os múltiplos e os submúltiplos do metro quadrado que fazem parte do SI. Veja o quadro a seguir.

	Quadro de unidades de área						
	Múltiplos			**Unidade padrão**	**Submúltiplos**		
Unidade	quilômetro quadrado	hectômetro quadrado	decâmetro quadrado	metro quadrado	decímetro quadrado	centímetro quadrado	milímetro quadrado
Símbolo	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Relação com o metro quadrado	$1\,000\,000\ m^2$	$10\,000\ m^2$	$100\ m^2$	$1\ m^2$	$0{,}01\ m^2$	$0{,}0001\ m^2$	$0{,}000001\ m^2$

Figuras equivalentes

Considere os polígonos *A*, *B*, *C* e *D*:



Com esses polígonos podemos compor diferentes figuras, veja:

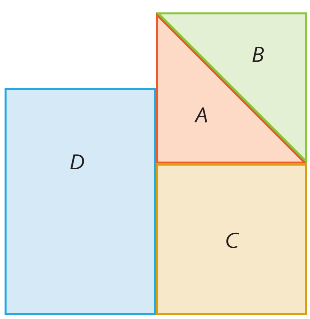


figura 1

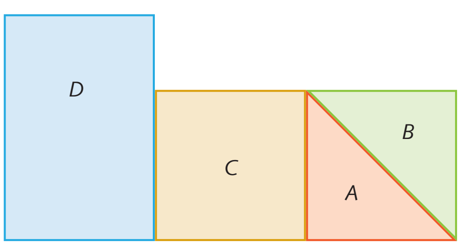


figura 2

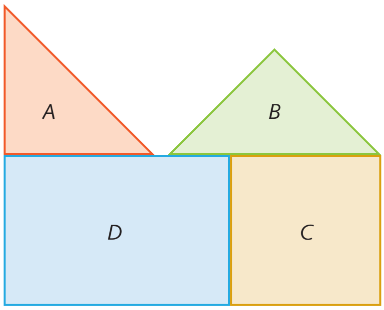


figura 3

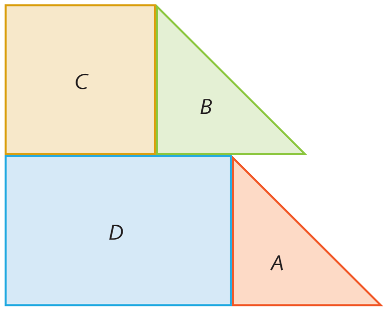


figura 4

LUIZ RUBIO

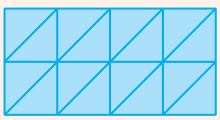
Todas essas figuras, embora de formatos diferentes, são formadas pela composição dos polígonos *A*, *B*, *C* e *D*. Assim, todas elas têm a mesma área, que é igual à soma das áreas desses 4 polígonos. Dizemos então, que essas figuras são **equivalentes**.

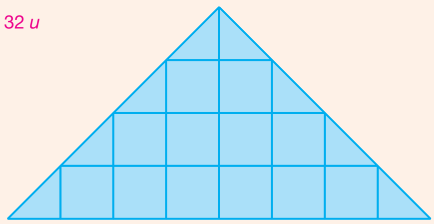
> Duas ou mais figuras geométricas são **equivalentes** quando têm a mesma área.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Tomando  como unidade de área, determine a área das figuras a seguir:

a)  16 *u*

b) 32 *u* 

GUILHERME CASAGRANDI

2 Transforme:

a) 6 km^2 em m^2; 6 000 000 m^2

b) 15 m^2 em cm^2; 150 000 cm^2

c) 0,5 m^2 em cm^2; 5 000 cm^2

d) 12,3 cm^2 em m^2. 0,00123 m^2

e) 45 000 m^2 em km^2; 0,045 km^2

f) 574 cm^2 em mm^2; 57 400 mm^2

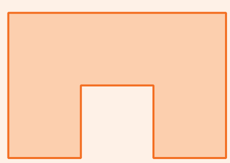
3 Usando jornal, construa uma superfície quadrada com lados de 1 metro de comprimento, ou seja, com 1 m^2 de área.

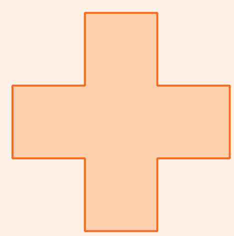
Agora, usando essa superfície como unidade de medida, estime a área de sua sala de aula. Compare sua estimativa com os demais colegas da classe.

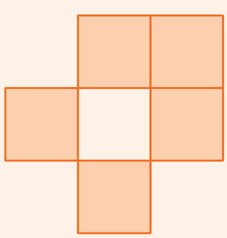
A resposta depende do tamanho da sala.

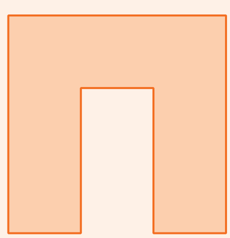
4 Escolha uma unidade de medida e determine as figuras equivalentes. alternativas **b**, **c**, **e**

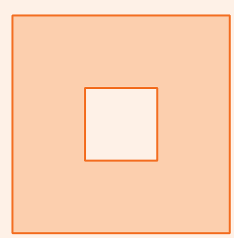
a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

f) 

GUILHERME CASAGRANDI

Lendo e aprendendo

O que é IPTU?

O Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU) é um dos tributos mais antigos e incide sobre os imóveis que estão na área urbana de um município (definida por lei municipal). Quando o imóvel é somente um terreno, sem nenhuma construção, é cobrado o Imposto Territorial; quando há uma construção (residência, comércio, indústria, galpão, prédios etc.), cobra-se o Imposto Predial.

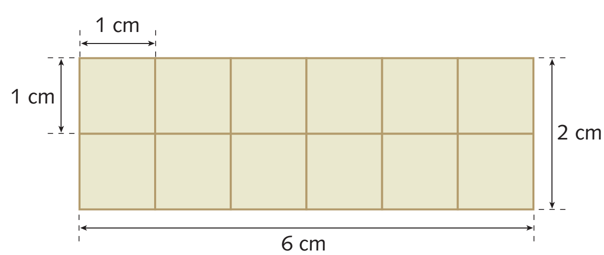
Nesse imposto são atribuídos valores monetários por metro quadrado de área livre e de área edificada, de acordo com a localização e o tipo de uso. A determinação dos valores depende da escolha da base de cálculo, da fixação das alíquotas e do cálculo dos valores básicos (planta de valores). O IPTU deve ser pago anualmente à prefeitura.

ALESSANDRA LORI/FOTOARENA

2 Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo

Área do retângulo

Considere um retângulo com base de medida 6 cm e altura de medida 2 cm.



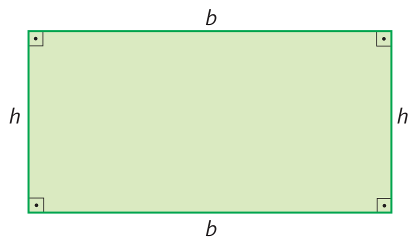
LUIZ RUBIO

Tomando como unidade de área um quadradinho com lado de 1 cm de comprimento, cuja área corresponde a 1 cm^2, podemos observar que nesse retângulo cabem exatamente 12 quadradinhos. Assim, verificamos que a área desse retângulo é igual a 12 cm^2.

A área desse retângulo também pode ser obtida da seguinte maneira:

$A = (6 \cdot 2)\ cm^2 = 12\ cm^2$

Portanto, para um retângulo com base de medida b e altura de medida h, podemos escrever:



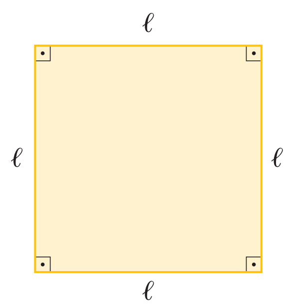
$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$

$b \longrightarrow$ medida do comprimento ou da base

$h \longrightarrow$ medida da largura ou da altura

Área do quadrado

O quadrado é um caso particular de retângulo cujos lados são congruentes.



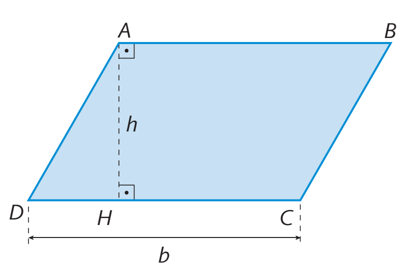
$\ell \longrightarrow$ medida do lado

Então, podemos representar a área de um quadrado com lado de medida ℓ assim:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

Área do paralelogramo

Considere o paralelogramo $ABCD$ abaixo, de base $\overline{DC}$ e altura $\overline{AH}$ relativa à base $\overline{DC}$.



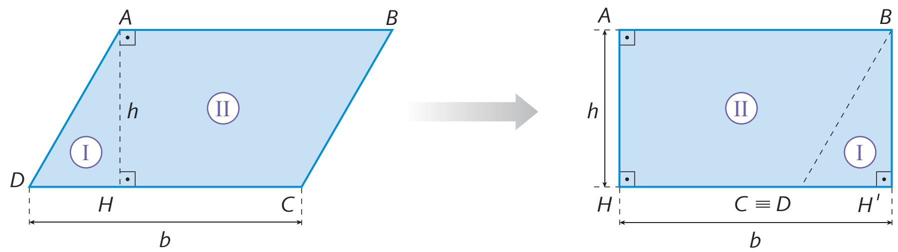
$b \longrightarrow$ medida da base

$h \longrightarrow$ medida da altura relativa à base

GUILHERME CASAGRANDI

O paralelogramo $ABCD$ pode ser decomposto em dois polígonos que identificaremos por I e II. Com os polígonos I e II podemos compor o retângulo $ABH'H$, conforme ilustração abaixo.

GUILHERME CASAGRANDI



Observe que o paralelogramo e o retângulo acima são figuras equivalentes.

A área de um paralelogramo com base de medida b e altura relativa a essa base de medida h é igual à área de um retângulo com base de medida b e altura de medida h.

Portanto, para um paralelogramo com base de medida b e altura relativa a essa base, de medida h, podemos escrever:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a área de um retângulo cujas medidas são: 25 cm de comprimento e 12 cm de largura. 300 cm²

2 Um retângulo tem 3 600 mm² de área e 90 mm de medida de base. Qual é a medida da altura desse triângulo? 40 mm

3 Determine a área de um retângulo cujo perímetro é 80 cm e cujas medidas têm como razão $\frac{7}{9}$. 393,75 cm²

4 Um retângulo tem 40 cm de altura e 50 cm como medida da diagonal. Qual é a área desse retângulo em metro quadrado? 0,12 m²

5 A área de um retângulo é 30 m². Aumentando 1 m de cada lado, a área aumenta 12 m². Quais são as medidas desse retângulo? 5 m e 6 m

6 Quantos ladrilhos de medidas 20 cm de largura e 30 cm de comprimento são necessários para revestir um piso de 60 m²? 1 000 ladrilhos

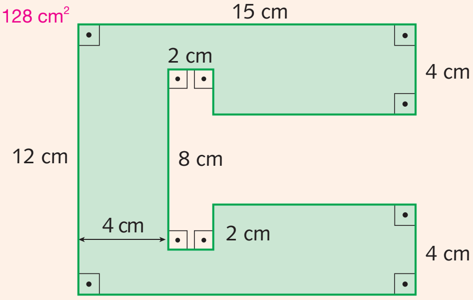
7 A área de um retângulo é 45 cm². Seu comprimento excede a largura em 4 cm. Quais são as medidas dos lados desse retângulo? 5 cm e 9 cm

8 Qual é área de um quadrado que tem 22 cm de lado? 484 cm²

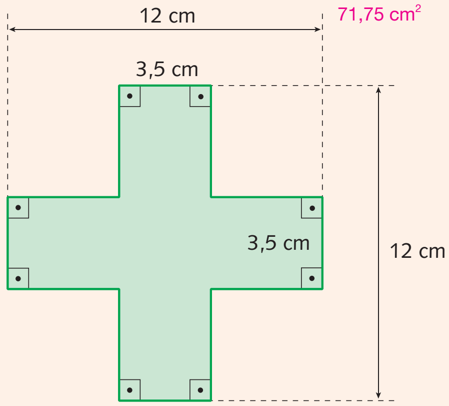
9 Um terreno de formato quadrado tem 1600 m^2. Qual é a medida de seu lado? 40 m

10 Calcule a área das figuras abaixo, em centímetro quadrado.

a) 128 cm^2



b) 71,75 cm^2



11 A diagonal de um quadrado mede $10\sqrt{2}$ cm. Qual é a área desse quadrado? 100 cm^2

12 O perímetro de um terreno com formato quadrado é 6 dam. Qual é a área desse terreno, em metro quadrado? 225 m^2

13 Qual é a razão entre a área de um quadrado de lado de medida ℓ e a de outro de lado de medida 3ℓ? $\frac{1}{9}$

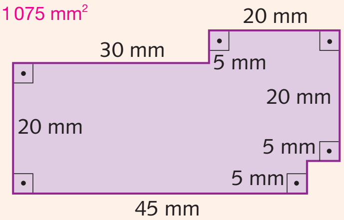
14 O piso de uma sala tem 12 m de largura e 8 m de comprimento. Quantas lajotas quadradas de 40 cm de lado serão utilizadas para revestir esse piso? 600 lajotas

15 Um time de futebol decidiu trocar o gramado de seu estádio, cujas dimensões são 64 m × 100 m. Para isso, deverá adquirir placas de grama cuja área é 0,64 m^2. Determine a quantidade de placas de grama que deve ser comprada pelo clube para cobrir toda a superfície de seu campo. 10000 placas de grama

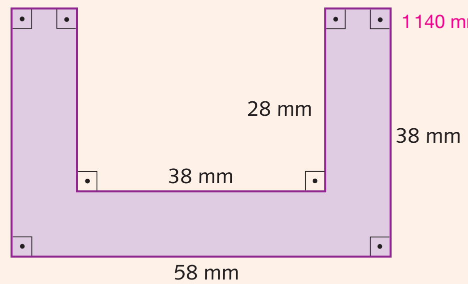
16 Determine a medida do lado de um quadrado que é equivalente a um retângulo que tem 16 m de comprimento e 9 m de largura. 12 m

17 Calcule a área das superfícies das figuras abaixo, em milímetro quadrado.

a) 1075 mm^2

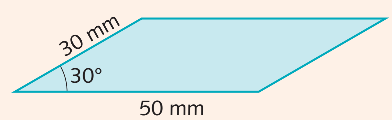


b) 1140 mm^2



18 Determine a área de um paralelogramo cuja base mede 20 cm e a altura mede 15 cm. 300 cm^2

19 Determine a área do paralelogramo a seguir, em milímetro quadrado. 750 mm^2



20 Dois lados consecutivos de um paralelogramo formam um ângulo de 45° e medem $7\sqrt{2}$ m e 10 m. Calcule a área desse paralelogramo. 70 m^2

21 Em um paralelogramo, a altura relativa à base $\overline{AB}$ mede $\frac{4}{5}$ da medida da base. A soma dessas medidas é 27 cm. Qual é a área do paralelogramo? 180 cm^2

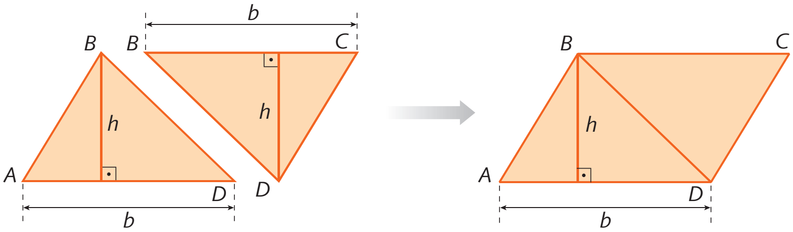
22 No paralelogramo $ABCD$, o lado $\overline{AB}$ mede 4 cm, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 1,5 cm e o perímetro é 14 cm. Determine a área desse paralelogramo. 4,5 cm^2

GUILHERME CASAGRANDI

3 Área do triângulo

Considere os triângulos congruentes *ABD* e *CDB*, com base de medida *b* e altura relativa à base de medida *h*.

Observe que, justapondo esses dois triângulos, eles formam o paralelogramo *ABCD*, como mostra a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Como os dois triângulos são congruentes, podemos afirmar que, a área do triângulo é igual à metade da área do paralelogramo.

A área de um triângulo com base de medida *b* e altura, relativa a essa base, de medida *h* é igual à metade da área de um paralelogramo com base de medida *b* e altura de medida *h*.

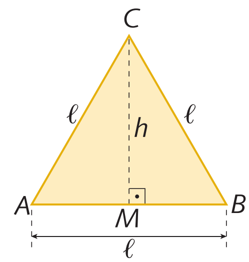
Portanto, a área de um triângulo é dada por:

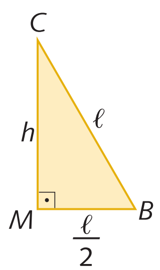
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Vamos estudar a seguir alguns casos particulares da área do triângulo.

Triângulo equilátero

Para calcular a área de um triângulo equilátero com lado de medida ℓ, vamos primeiro determinar a medida *h* da altura $\overline{CM}$. Como o $\triangle CMB$ é retângulo, temos:





GUILHERME CASAGRANDI

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = h^2$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Então: $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{\ell \cdot \ell\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

$$A_{\substack{\text{triângulo}\\ \text{equilátero}}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

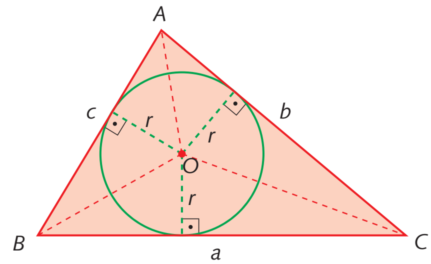
Triângulo circunscrito e inscrito em uma circunferência

Circunscrito

Considere um triângulo *ABC* circunscrito em uma circunferência de centro *O* e raio *r*.

Vamos decompor esse triângulo em três triângulos: *BOC*, *AOC* e *AOB*. Assim, podemos escrever:

$$A_{\text{triângulo } ABC} = A_{\text{triângulo } BOC} + A_{\text{triângulo } AOC} + A_{\text{triângulo } AOB}$$



Observe que os triângulos *BOC*, *AOC* e *AOB* têm altura de medida igual à medida (*r*) do raio da circunferência e que essa altura é relativa às bases de medidas *a*, *b* e *c*, respectivamente. Assim, temos:

$$A_{\text{triângulo } ABC} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$A_{\text{triângulo } ABC} = \left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot r$$

Note que $\frac{a + b + c}{2}$ corresponde à metade do perímetro do triângulo *ABC*, ou seja, ao semiperímetro (*p*) do triângulo *ABC*.

Desse modo, podemos concluir que a área de um triângulo circunscrito a uma circunferência com raio de medida *r* pode ser calculada por:

$$\boxed{A_{\text{triângulo}} = p \cdot r}$$

em que *p* é o semiperímetro do triângulo.

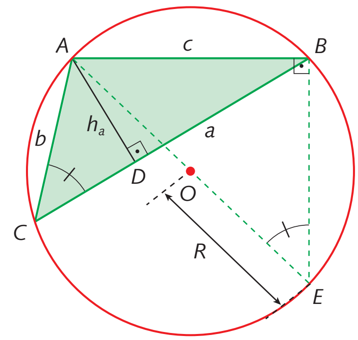
Inscrito

Considere agora, um triângulo *ABC* inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio *R*.

A área desse triângulo é:

$$A_{\text{triângulo } ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

Para determinar a medida h_a da altura relativa à base $\overline{BC}$, construímos o $\triangle ABE$ com $AE = 2R$.



$\triangle ADC \sim \triangle ABE$, pelo caso AA:

$A\hat{D}C \cong A\hat{B}E \longrightarrow$ ângulos retos

$A\hat{C}D \cong A\hat{E}B \longrightarrow \text{med}(A\hat{C}D) = \text{med}(A\hat{E}B) = \text{med}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\right)$

Assim:

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{b \cdot c}{2R}$$

Logo:

$$A_{\text{triângulo } ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b \cdot c}{2R}$$

$$A_{\text{triângulo } ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

A área de um triângulo inscrito em uma circunferência com raio de medida R é dada por:

$$\boxed{A_{\text{triângulo}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

em que a, b e c são as medidas dos lados do triângulo.

Exemplos

- Determinar a área de um triângulo equilátero cujo lado mede 6 m.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 9\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

- Determinar a área do triângulo circunscrito na circunferência de raio $r = 1{,}5$ cm.

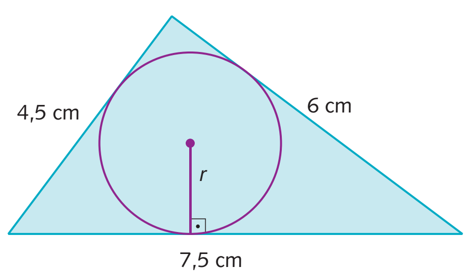
$$A_{\text{triângulo}} = p \cdot r$$

Temos: $p = \dfrac{4{,}5\text{ cm} + 6\text{ cm} + 7{,}5\text{ cm}}{2} = 9\text{ cm}$

Então:

$$A_{\text{triângulo}} = 9\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 13{,}5\text{ cm}^2$$



GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine a área de um triângulo cuja base mede 25 cm e cuja altura mede 12 cm. 150 cm^2

2 Em um triângulo, um dos lados mede 14 cm e a altura relativa a esse lado mede 7 cm. Calcule a área desse triângulo. 49 cm^2

3 Calcule a área de um triângulo equilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ m. $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$

4 Determine a área de um triângulo retângulo cujos catetos medem $7\sqrt{2}$ m e $4\sqrt{2}$ m. 28 m^2

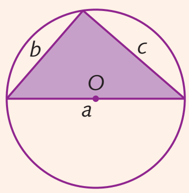
5 Calcule a área de um triângulo isósceles cujos lados medem 8 m, 5 m e 5 m. 12 m^2

6 Um triângulo equilátero tem lados de medida 6 cm. Quanto aumentará sua área se aumentarmos 1 cm na medida de cada um de seus lados? $\frac{13\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$

7 A altura de um triângulo equilátero T tem medida igual à medida do lado de um triângulo equilátero V. Sabendo que a área de V é 10 m^2, responda: qual é a área de T? $\frac{40}{3}\text{ m}^2$

8 O perímetro de um triângulo equilátero é igual a 30 cm. Qual é a área desse triângulo? $25\sqrt{3}$ cm²

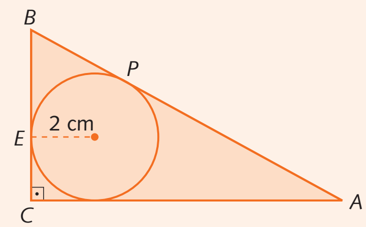
9 Determine a área do triângulo, sabendo que $a = 40$ cm, $b = 24$ cm e $c = 32$ cm. 384 cm²



GUILHERME CASAGRANDI

10 Determine a medida do raio de um círculo inscrito em um triângulo isósceles cujos lados medem 10 cm, 10 cm e 12 cm. 3 cm

11 Na figura, temos uma circunferência de raio de medida 2 cm, inscrita em um triângulo ABC, retângulo em C. A circunferência tangencia a hipotenusa $\overline{AB}$ no ponto P e o cateto $\overline{BC}$ no ponto E. Se $\overline{AP}$ mede 6 cm e $\overline{BE}$ mede 4 cm, determine, em centímetro quadrado, a área do triângulo ABC. 24 cm²



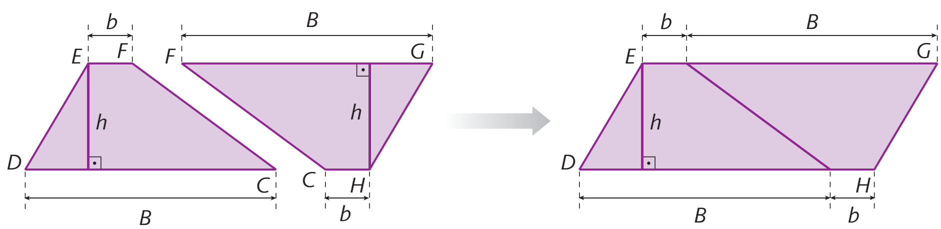
GUILHERME CASAGRANDI

4 Área do trapézio e do losango

Área do trapézio

Considere os trapézios congruentes *CDEF* e *FGHC* de medidas com base *B* e *b* e altura *h*.

Compondo um paralelogramo com esses dois trapézios, temos:



GUILHERME CASAGRANDI

B → medida da base maior

b → medida da base menor

h → medida da altura

Observe que dois trapézios congruentes formam o paralelogramo *DEGH* com base de medida $(B + b)$ e altura, relativa a essa base, de medida *h*. Portanto, a área de cada um desses trapézios é igual à metade da área do paralelogramo *EGHD*.

A área de um trapézio com bases de medida *B* e *b* e altura de medida *h* é igual à metade da área de um paralelogramo com base de medida $(B + b)$ e altura, relativa a essa base, de medida *h*.

Portanto, a área de um trapézio é dada por:

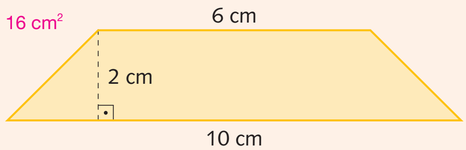
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

ATIVIDADES

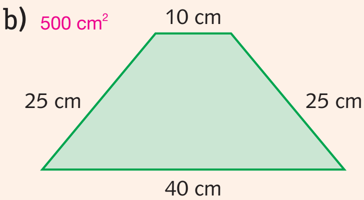
Faça as atividades no caderno.

1 Determine a área dos trapézios abaixo, em centímetro quadrado.

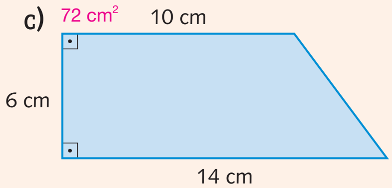
a) 16 cm²



b) 500 cm²



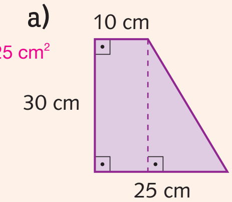
c) 72 cm²



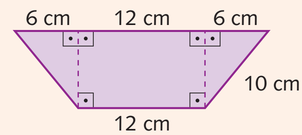
2 Calcule a área de um trapézio isósceles cujas bases medem 4 cm e 7 cm e cujos lados não paralelos medem 2,5 cm cada um. 11 cm²

3 Calcule a área das figuras roxas, em centímetro quadrado.

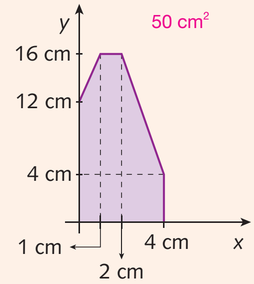
a) 525 cm²



b) 144 cm²



c) 50 cm²

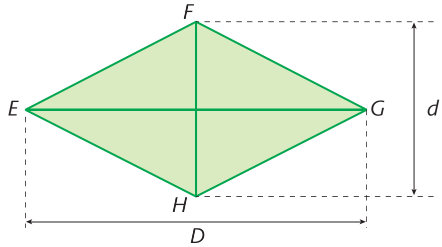


4 Calcule a área de um trapézio retângulo cujas bases medem 10 m e 13 m e o lado não perpendicular às bases mede 5 m. 46 m²

5 O perímetro de um trapézio isósceles é 34 m, e a área é 36 m². Sabendo que a altura mede 3 m, calcule a medida dos lados não paralelos. 5 m

Área do losango

Considere o losango *EFGH* de diagonais com medidas *D* e *d*:



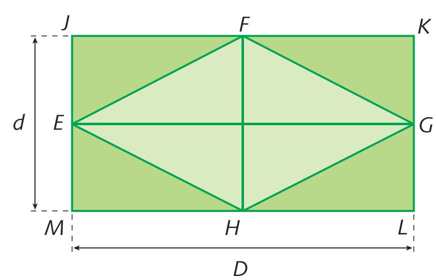
D → medida da diagonal maior

d → medida da diagonal menor

Construímos o retângulo *JKLM* cujos lados contêm os vértices do losango *EFGH*. Veja ao lado.

Observe que o retângulo obtido é formado por oito triângulos congruentes, sendo que quatro deles formam o losango.

Assim, a área do losango *EFGH* corresponde à metade da área do retângulo *JKLM*.



A área de um losango com diagonais de medidas *D* e *d* é igual à metade da área de um retângulo com base de medida *D* e altura de medida *d*.

Portanto, a área de um losango é dada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

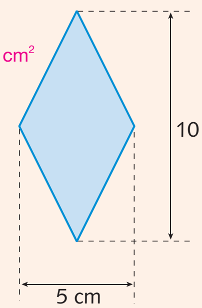
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

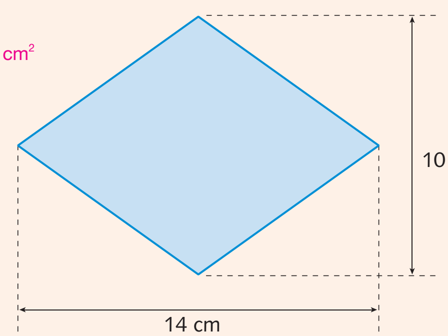
1 Uma pipa em formato de losango é formada por duas varetas de 42 cm e 30 cm. Qual é a medida da superfície dessa pipa? $630\ cm^2$

2 Determine a área dos losangos abaixo, em centímetro quadrado.

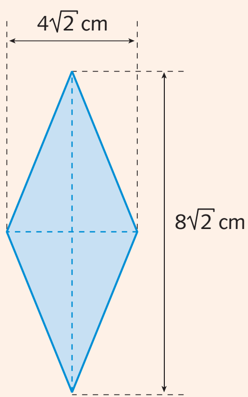
a) $25\ cm^2$



b) $70\ cm^2$



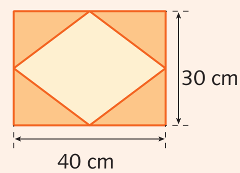
c) $32\ cm^2$



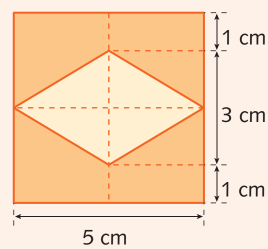
GUILHERME CASAGRANDI

3 Calcule a área da parte pintada de laranja-escuro de cada figura.

a) $600\ cm^2$



b) $17{,}5\ cm^2$



GUILHERME CASAGRANDI

4 Em um losango, os lados medem 10 m. A maior das diagonais mede 16 m. Qual é a área do losango? $96\ m^2$

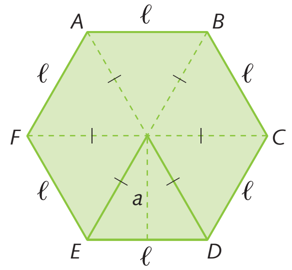
5 Um losango é equivalente a um retângulo de lados medindo 24 cm e 15 cm. Uma das diagonais desse losango mede 18 cm. Qual é a medida da outra diagonal? 40 cm

6 As diagonais de um losango medem, juntas, 30 cm, e a medida de uma delas é o dobro da medida da outra. Qual é a área desse losango? $100\ cm^2$

7 A medida do raio de uma circunferência de centro *O*, inscrita em um losango *ABCD*, é 5 cm. O perímetro desse polígono é 32 cm. Esboce a figura do losango com a circunferência inscrita, trace os quatro raios da circunferência, perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ do losango. Em seguida, calcule a área dos quatro triângulos cujos vértices são *O* e dois vértices do losango. Qual é a área do losango *ABCD*? $80\ cm^2$

5 Área de um polígono regular

Considere o hexágono regular *ABCDEF*, representado a seguir:



$\ell \longrightarrow$ medida do lado do polígono

$a \longrightarrow$ medida do apótema do polígono

Observe que esse hexágono pode ser decomposto em 6 triângulos congruentes.

Assim, a área do hexágono pode ser indicada por:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

A medida da base de cada triângulo é igual à medida do lado do hexágono e a medida da altura de cada triângulo é igual à medida do apótema do hexágono, então:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \underbrace{3 \cdot \ell}_{\text{semiperímetro do polígono}} \cdot a$$

Generalizando, para um polígono de *n* lados, temos:

$$A_{\text{polígono}} = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell}{2} \cdot a$$

Observe que $\frac{n \cdot \ell}{2}$ é o **semiperímetro** (*p*) do polígono. Assim:

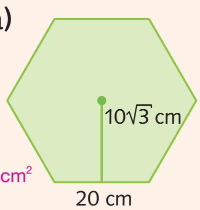
$$\boxed{A_{\text{polígono}} = p \cdot a}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

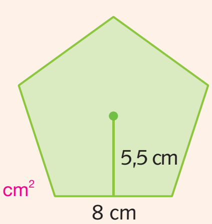
1 Calcule a área dos polígonos regulares, em centímetro quadrado.

a)



$600\sqrt{3}$ cm²

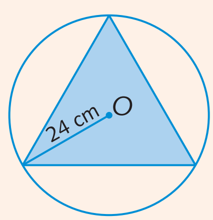
b)



110 cm²

2 Calcule a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede $2\sqrt{6}$ cm. $36\sqrt{3}$ cm²

3 Calcule a área aproximada do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio medindo 24 cm.

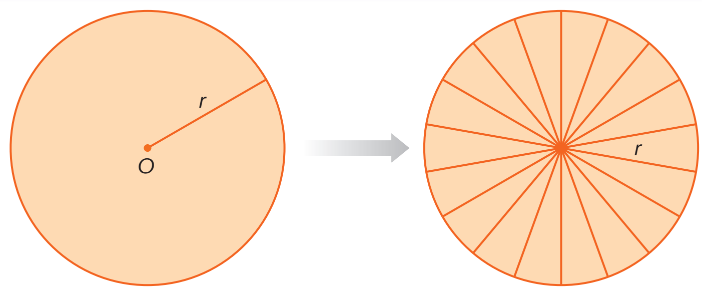


(Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$) 747,36 cm²

4 Determine, em função da medida do raio, a área de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio *r*. $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$

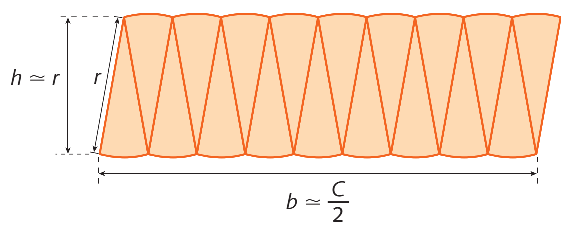
6 Área do círculo

Considere o círculo de centro O e raio de medida r. Podemos dividir esse círculo em 18 setores circulares congruentes. Veja as figuras ao lado.



GUILHERME CASAGRANDI

Podemos reagrupar esses setores em uma figura que lembre um paralelogramo com altura de medida h, que é aproximadamente igual a r, e base b de medida aproximadamente igual a $\frac{C}{2}$, em que C é a medida do comprimento da circunferência.



LUIZ RUBIO

Ao dividirmos qualquer círculo em n setores, sendo n um número muito grande, cada um dos setores circulares se aproxima do formato de um triângulo. Nesse caso, verificamos que a área do círculo corresponde aproximadamente à área do paralelogramo formado pelos n triângulos.

Como a medida da base do paralelogramo é aproximadamente igual à metade da medida do comprimento da circunferência e a medida da sua altura é aproximadamente igual à medida do raio, podemos escrever:

$$A_{\text{círculo}} \simeq \frac{2\pi r}{2} \cdot r$$

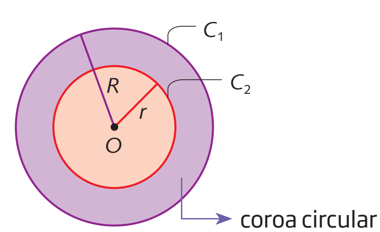
Tomando por base essa ideia, os matemáticos provaram que: $\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$

Área da coroa circular

Coroa circular é uma região limitada por duas circunferências concêntricas, situadas em um mesmo plano e com raios de medidas diferentes.

Na ilustração, temos a circunferência C_1 de centro O e raio com medida R e a circunferência C_2 também de centro O e raio com medida r.

A área (A), da coroa circular, é obtida pela diferença entre a área A_{C_1} do círculo C_1 e a área A_{C_2} do círculo C_2. Veja:



GUILHERME CASAGRANDI

$$A = A_{C_1} - A_{C_2}$$
$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

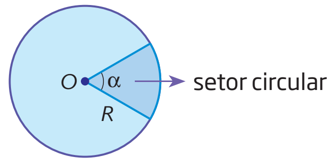
$$\boxed{A = \pi\left(R^2 - r^2\right)}$$

Área do setor circular

Observe na ilustração o setor circular cujo ângulo central mede α. A área desse setor circular é diretamente proporcional à medida do seu ângulo central, em grau.

Assim, podemos escrever:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{A_{\text{círculo}}} = \frac{\alpha}{360°}$$



Logo, a área de um setor circular de raio *r* e ângulo central de medida α em grau, é dada por:

$$A_{\text{setor}} \text{ ——— } \alpha$$
$$\pi r^2 \text{ ——— } 360°$$

$$\boxed{A_{\text{setor}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule a área de um círculo cujo raio mede 9 m. 81π m²

2 Calcule a área de um círculo de 25 cm de diâmetro. $156{,}25\pi$ cm²

3 Calcule a área do círculo cuja circunferência tem medida de comprimento igual a 18π cm. 81π cm²

4 Calcule a medida do raio do círculo cuja área mede 36π m². 6 m

5 Calcule a área da coroa circular determinada por duas circunferências concêntricas de raios de medida 8 cm e 5 cm. 39π cm²

6 Calcule a área de uma coroa circular delimitada por circunferências de raios de medida 6 cm e 10 cm. 64π cm²

7 Calcule a área do setor circular nos casos a seguir, dadas as medidas *a* do ângulo central e *r* do raio.

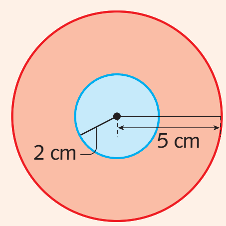
a) $a = 60°$ $\frac{50\pi}{3}$ cm²
$r = 10$ cm

b) $a = 30°$ 3π m²
$r = 6$ m

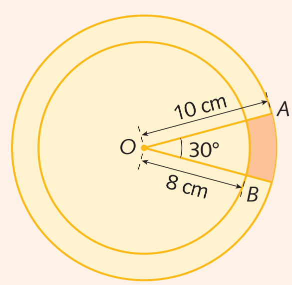
c) $a = 50°$ $31{,}25\pi$ cm²
$r = 15$ cm

8 Calcule a área de um setor circular de ângulo central medindo 108° e raio de medida 8 cm. $19{,}2\pi$ cm²

9 Calcule a área da superfície vermelha da figura. 21π cm²



10 Na figura, $OA = 10$ cm, $OB = 8$ cm e med($A\hat{O}B$) = 30°. Calcule, em centímetro quadrado, a área aproximada da superfície laranja. (Considere $\pi = 3{,}14$) $9{,}42$ cm²



11 Com três pedaços de corda de 30 m de comprimento cada um, Paulo representou um quadrado, um hexágono e um círculo. Qual dessas figuras tem a maior área?

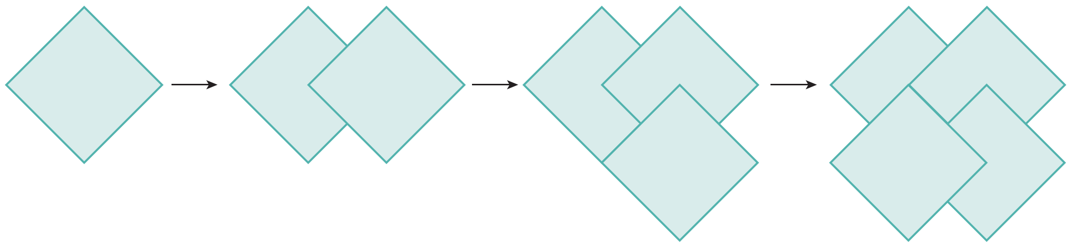
círculo
$A_{\text{quadrado}} \simeq 56{,}25$ m²;
$A_{\text{hexágono}} \simeq 64{,}95$ m²;
$A_{\text{círculo}} \simeq 71{,}62$ m²

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(OBM) Esmeralda tem quatro folhas quadradas iguais, de lado 20 cm. Ela cola uma folha sobre a outra, fazendo um vértice da folha de cima coincidir com o centro da folha de baixo, alinhando horizontalmente quatro vértices dessas folhas, conforme figuras 1 e 2. Ela continua fazendo isto, até colar as quatro folhas, de acordo com as figuras 3 e 4. Qual é a área da figura 4?

fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4



LUIZ RUBIO

a) $1\,200\ cm^2$ b) $1\,300\ cm^2$ c) $1\,400\ cm^2$ d) $1\,500\ cm^2$ e) $1\,600\ cm^2$

alternativa **a**

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. resposta pessoal
- É possível calcular a área do quadrado da figura 1? sim
- Na figura 2, a parte sobreposta das folhas corresponde a que fração da área do quadrado? Corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado.

Plano de resolução

- Calcule a área do quadrado da figura 1. $400\ cm^2$
- Calcule a área da figura 2. $700\ cm^2$
- Calcule, nas figuras 3 e 4, a fração da área do quadrado que está sobreposta. $\frac{2}{4}$ da área do quadrado; $\frac{4}{4}$ da área do quadrado, ou seja, 1 quadrado.
- Calcule a área das figuras 3 e 4. $1\,000\ cm^2$ e $1\,200\ cm^2$

Resolução

- Forme um trio com dois colegas.
- Mostre a eles seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês.
- O trio deverá discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um dos planos para a execução do processo de resolução.

A figura 4 é composta de 12 partes de área igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado. Assim: $12 \times 100\ cm^2 = 1\,200\ cm^2$.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual em seus cadernos.

Verificação

- O trio deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- O trio deverá elaborar uma síntese sobre área de figuras planas, contendo fórmulas, exemplos e resolução de problemas. Essa síntese será entregue na forma de um texto. Cada trio deverá, em uma data predeterminada pelo professor, propor para a classe um problema sobre área e discuti-lo em seguida.

Professor, organize as apresentações dos grupos e verifique, com antecedência, se os problemas que serão propostos são pertinentes ao conteúdo ministrado.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

3. Exemplos de respostas:
a) Sabendo o perímetro do quadrado é possível determinar a medida de seu lado dividindo esse valor por 4. Depois, basta elevar ao quadrado a medida do lado.
b) Conhecendo a medida do comprimento e a medida da diagonal do retângulo, é possível determinar a medida de sua largura aplicando o teorema de Pitágoras. Depois, basta multiplicar a medida do comprimento pela da largura para determinar sua área.

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Qual é a relação entre o metro quadrado e o quilômetro quadrado? E entre o metro quadrado e o centímetro quadrado? $1\ m^2 = 0{,}000001\ km^2$
$1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$

2 Duas figuras que são equivalentes devem ter o mesmo perímetro? Justifique.

Espera-se que os alunos respondam que duas figuras equivalentes devem ter a mesma área, e não o mesmo perímetro. Solicite que os alunos deem diferentes exemplos de figuras equivalentes que tenham o mesmo perímetro e de figuras que não tenham o mesmo perímetro.

3 Escreva um texto explicando como você faria para calcular a área de um:

a) quadrado, conhecendo seu perímetro;
b) retângulo, conhecendo a medida do seu comprimento e a de sua diagonal;
c) triângulo equilátero, conhecendo a medida de sua altura;
d) trapézio, conhecendo as medidas de seus lados;
e) losango, conhecendo as medidas de suas diagonais.

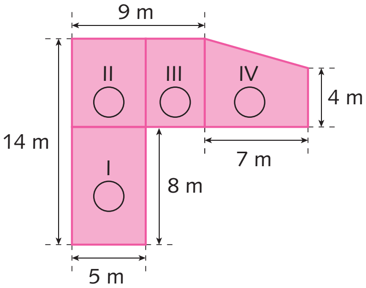
4 Além da medida da apótema, que outra medida devemos ter para calcular a área de um polígono regular qualquer? As medidas dos lados do polígono ou seu semiperímetro.

5 Defina coroa circular e setor circular. Coroa circular é uma região limitada por duas circunferências concêntricas, situadas em um mesmo plano e com raios de medidas diferentes. Setor circular é uma parte do círculo, relativa a determinado ângulo central.

3. c) Sabe-se que a medida da altura de um triângulo equilátero corresponde à metade da medida de seu lado multiplicado por $\sqrt{3}$. Usando essa relação, é possível determinar a medida da base do triângulo. Depois, basta multiplicar a medida da base pela medida da altura e dividir o resultado por 2.
d) Conhecendo as medidas dos lados, é possível determinar a medida da altura de um trapézio por meio do teorema de Pitágoras. Depois, basta multiplicar a medida da altura pela semissoma das medidas das bases.
e) Basta multiplicar essas medidas e dividir o resultado encontrado por 2.

Aplicando

1 **(Enem)** Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m² de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m² de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



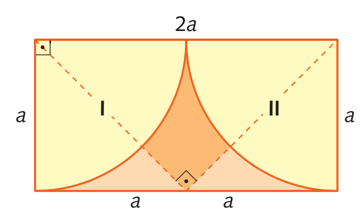
GUILHERME CASAGRANDI

Avaliando-se todas as informações, serão necessárias: alternativa **c**

a) quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
b) três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
c) duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
d) uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
e) nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

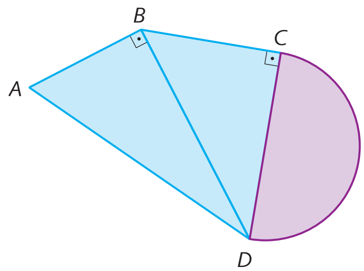
DESAFIO

No retângulo, as regiões I e II representam setores circulares. Qual é a área da parte mais escura da figura? $a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$



GUILHERME CASAGRANDI

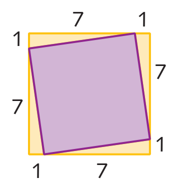
2 Na figura, $AB = 8$ m, $BC = 9$ m e $AD = 17$ m. Qual é a área da parte lilás? 18π m²



LUIZ RUBIO

3 Um quadrado e um triângulo equilátero têm o mesmo perímetro. Se a área do triângulo é $9\sqrt{3}$ cm², qual é a medida da diagonal do quadrado? $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm

4 Sabendo que o quadrado roxo está sobreposto ao quadrado amarelo, calcule a área do quadrado roxo. 50



LUIZ RUBIO

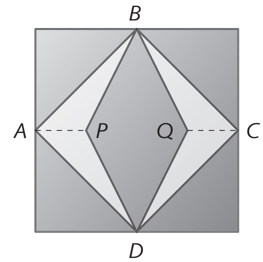
5 Em um programa de computador, Andreza aumentou em 10% o comprimento de uma representação de um retângulo. Em quantos por cento deve-se reduzir a largura para que a figura obtida tenha a mesma área da figura inicial? $\frac{100}{11}$%

6 As dimensões de um terreno retangular estão na razão $\frac{5}{8}$. Qual é o valor da menor dimensão, se a área do terreno é 1000 m²? 25 m

7 Um banheiro tem o piso retangular com 1 m de largura e 2 m de comprimento. Deseja-se cobri-lo com cerâmicas quadradas, que têm 20 cm de lado. Qual é a quantidade necessária de cerâmicas para cobrir todo o piso desse banheiro? 50 cerâmicas

8 Um painel retangular tem dimensões 200 cm de largura por 240 cm de comprimento, sendo 30% de sua área ocupada por ilustrações, e 12% dessas ilustrações são vermelhas. Qual é a área ocupada pelas ilustrações vermelhas? 1 728 cm²

9 **(Enem)** Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura ao lado.



LUIZ RUBIO

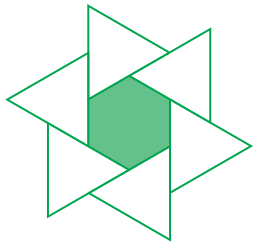
Nessa figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos *AP* e *QC* medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R\$ 50,00 o m².

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? alternativa **b**

a) R\$ 22,50
b) R\$ 35,00
c) R\$ 40,00
d) R\$ 42,50
e) R\$ 45,00

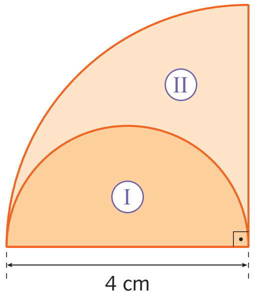
10 **(OBM)** A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a fração da área total que está pintada? alternativa **d**

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{7}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{4}$

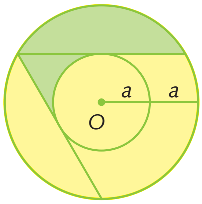


LUIZ RUBIO

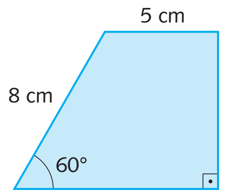
11 Calcule a área da região I (semicírculo) e da região II representadas ao lado. 2π cm² e 2π cm²



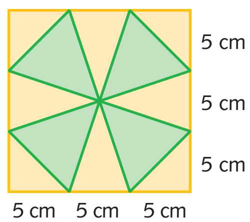
12 Sabendo que o raio do círculo menor mede a e o do círculo maior mede $2a$, calcule a área verde da figura ao lado. πa^2



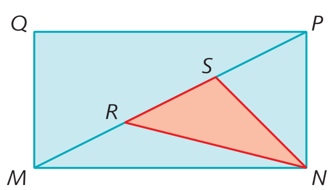
13 Qual é a área do trapézio retângulo representado a seguir? $28\sqrt{3}$ cm²



14 A figura abaixo é um quadrado de 15 cm de lado, em que cada um dos lados é dividido em três partes iguais. Qual é a área da figura verde? 100 cm²



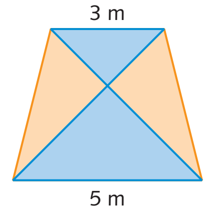
15 Na figura, *MNPQ* é um retângulo. Sendo $MN = 6$ cm, $NP = 3$ cm e $MR = RS = SP$, qual é a área do triângulo *RSN* (em centímetro quadrado)? 3 cm²



16 Em um triângulo isósceles, os lados congruentes medem 10 cm cada um, e a projeção de um dos lados congruentes sobre o terceiro lado mede 6 cm. Qual é a área desse triângulo? 48 cm²

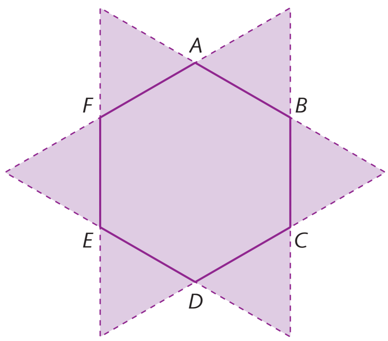
17 Em um trapézio isósceles, as bases medem 43 cm e 37 cm e os lados congruentes medem 5 cm. Qual é a área desse trapézio (em decímetro quadrado)? 1,6 dm²

18 Qual é a área dos triângulos azuis, sabendo que a altura do trapézio mede 4 m? 8,5 m²



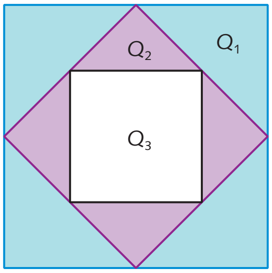
19 Se a medida do raio de um círculo aumenta 40%, qual será o percentual de aumento de sua área? 96%

20 O hexágono regular *ABCDEF* tem 15 cm² de área. Qual é a área da figura estrelada (em centímetro quadrado), obtida pelo prolongamento dos lados do hexágono nos dois sentidos? 30 cm²



DESAFIO

Considere Q_1 um quadrado de lado de medida 2 m, Q_2 o quadrado construído a partir da união dos pontos médios de cada um dos lados de Q_1. Considere ainda Q_3 o quadrado construído a partir da união dos pontos médios de cada um dos lados de Q_2, conforme a figura. Qual é a área da região lilás (em metro quadrado)? 1 m²



GUILHERME CASAGRANDI

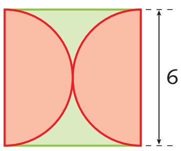
Lembre-se:
Não escreva no livro!

21 Considere um quadrado e um triângulo equilátero. Os lados desse quadrado e os lados desse triângulo medem a cm. Se S é a razão entre as áreas do quadrado e do triângulo, determine o valor A, sabendo que $A = \sqrt{3 \cdot S}$. $2\sqrt[4]{3}$

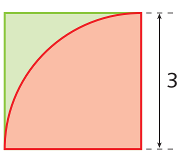
22 Qual é a razão entre as áreas das circunferências inscrita e circunscrita a um mesmo triângulo equilátero? $\frac{1}{4}$

23 Calcule a área da região verde de cada figura.

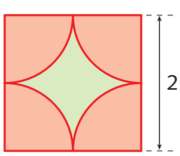
a) $9(4 - \pi)$



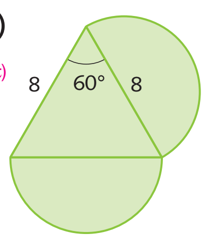
b) $9\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$



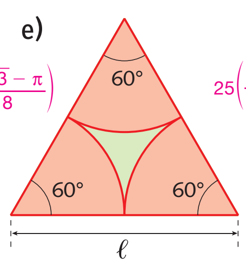
c) $4 - \pi$



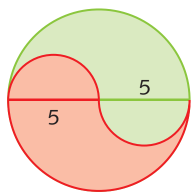
d) $16(\sqrt{3} + \pi)$



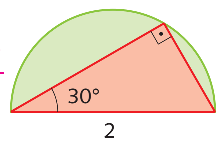
e) $\ell^2\left(\frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}\right)$



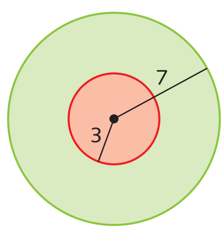
f) $\frac{25}{2}\pi$



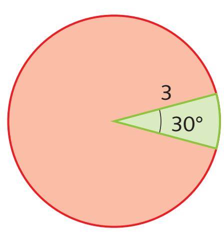
g) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$



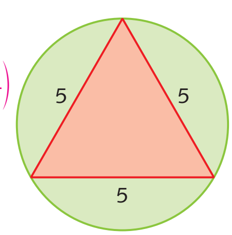
h) 40π



i) $\frac{3\pi}{4}$



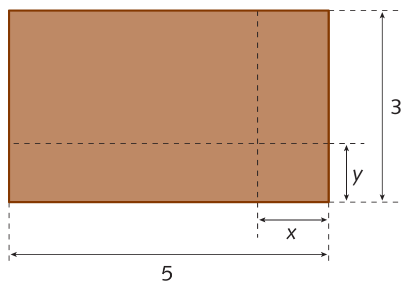
j) $25\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$



24 Calcule a área do triângulo equilátero inscrito em um círculo cujo raio mede 6 cm. $27\sqrt{3}$ cm²

25 Calcule a área do triângulo equilátero inscrito em um círculo cuja área é igual a 32π m². $24\sqrt{3}$ m²

26 **(Enem)** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por: alternativa **e**

a) $2xy$

b) $15 - 3x$

c) $15 - 5y$

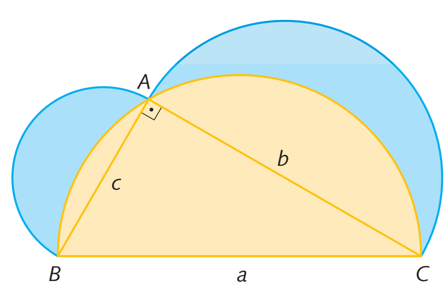
d) $-5y - 3x$

e) $5y + 3x - xy$

27 A medida do comprimento da circunferência de um círculo de raio R_1 é igual à medida do comprimento de um arco de 30° da circunferência de um círculo de R_2. Se a área do primeiro círculo é igual a 4, qual é a área do segundo? 576

DESAFIO

Expresse a área da superfície azul em função de b e c. $\frac{b \cdot c}{2}$



CAPÍTULO

11 MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Carlos tinha um saldo de R$ 2 560,00 em sua conta bancária, quando foram lançados um crédito de R$ 1 500,00 e um débito de R$ 180,00.

- Ao consultar seu saldo no caixa eletrônico, que valor Carlos deverá encontrar? R$ 3 880,00
- A quantos reais equivalem 2% desse saldo? R$ 77,60

Neste capítulo, vamos trabalhar com as diversas operações sobre mercadorias, abordando preço de custo, preço de venda, lucro e prejuízo. Os alunos vão estudar juro simples e juro composto e vão conhecer alguns índices de inflação empregados em nosso país.
A situação da página de abertura serve de elemento motivador para a apresentação do capítulo.

ANDRÉ LESSA/ESTADÃO CONTEÚDO

O caixa eletrônico possibilita, entre outros serviços, que clientes retirem dinheiro e verifiquem o balanço de suas contas bancárias sem a necessidade da presença de um funcionário do banco.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

No dia a dia, deparamos com situações como as a seguir:

- Qual seria o preço desta televisão sem desconto? R$ 1 875,00

GUILHERME CASAGRANDI

Incentive os alunos a buscar suas próprias estratégias para responder às duas questões desta página.

- João fará um empréstimo de R$ 20 000,00 com juro de 3 % ao mês em a uma instituição financeira. Ao término de um mês, a dívida de João será de quantos reais? R$ 20 600,00

Explique aos alunos que, quando tomamos emprestado um capital de uma instituição financeira, devemos pagar a essa instituição, após um tempo previamente combinado, a quantia emprestada mais uma quantia que denominamos juro.

GEORGE TUTUMI

Essas são situações relacionadas a um assunto muito importante: a **Matemática Comercial** e **Financeira**.

Neste capítulo, inicialmente vamos abordar as operações com mercadorias e problemas envolvendo vendas, com lucro ou prejuízo. Em seguida, vamos estudar juro simples e juro composto em diversas situações do dia a dia.

Finalmente, vamos fazer uma análise sobre a inflação, sua definição, sua importância, suas medidas e aplicações práticas.

1 Operações sobre mercadorias

As operações sobre mercadorias, tão comuns na vida comercial, podem gerar lucro ou prejuízo sobre o preço de custo ou sobre o preço de venda do produto.

GEORGE TUTUMI

Considere as situações a seguir.

- Pedro comprou um relógio por R$ 370,00 e quer vendê-lo em sua loja obtendo lucro de 25% sobre o preço de compra. Por quanto Pedro deve vender esse relógio para obter o lucro desejado?

  O preço de venda (*PV*) do relógio deve ser igual ao seu preço de compra (*PC*) mais o lucro (*L*) desejado na venda do relógio. Ou seja:

  SERGEJ RAZVODOVSKIJ/SHUTTERSTOCK

  $PV = PC + L$

  $PV = 370 + \boxed{\frac{25}{100} \cdot 370}$ —— 25% sobre o preço de compra

  $PV = 370 + 92{,}50$

  $PV = 462{,}50$

  Portanto, Pedro deve vender o relógio por R$ 462,50.

- Liana, sócia de Pedro, comprou um telefone celular por R$ 2 880,00 e quer obter um lucro de 10% sobre o preço de venda. Por quanto Liana deverá vender esse telefone celular?

  O preço de venda (*PV*) do telefone celular deve ser igual ao seu preço de compra (*PC*) mais o lucro (*L*) desejado na venda desse telefone. Ou seja:

  $PV = PC + L$

  YEAMAKE/SHUTTERSTOCK

  O lucro desejado por Liana é de 10% sobre o preço de venda do telefone celular.

  $PV = 2\,880 + \boxed{\frac{10}{100} \cdot PV}$ —— 10% sobre o preço de venda

  $PV = 2\,880 + 0{,}10PV$

  $PV - 0{,}10PV = 2\,880$

  $0{,}90V = 2\,880$

  $PV = \frac{2\,880}{0{,}90} = 3\,200$

  Portanto, Liana deverá vender o telefone celular por R$ 3 200,00.

- Um carro elétrico custou R\$ 22 000,00 e seis meses depois foi vendido com um prejuízo de 10% sobre o preço de venda. Calcule o preço de venda.

  O preço de venda (PV) desse carro elétrico deve ser igual ao seu preço de compra (PC) menos o prejuízo (P) obtido em sua venda. Ou seja:

  $PV = PC - P$

  Como o prejuízo (P) na venda do carro elétrico foi de 10% sobre o preço de venda (PV), temos:

Carro elétrico para dois ocupantes.

  $PV = 22\,000 - \boxed{\frac{10}{100} \cdot PV}$ 10% sobre o preço de venda

  $PV = 22\,000 - 0{,}1PV$

  $PV + 0{,}1PV = 22\,000$

  $1{,}1PV = 22\,000$

  $PV = \frac{22\,000}{1{,}1}$

  $PV = 20\,000$

  Portanto, o preço de venda do carro elétrico foi R\$ 20 000,00.

- Uma televisão de 55 polegadas foi vendida com um prejuízo de 20% sobre o preço de custo. Se essa televisão custou R\$ 6 000,00, qual foi o preço de venda?

  O preço de venda (PV) dessa televisão deve ser igual ao seu preço de compra (PC) menos o prejuízo (P) na sua venda. Ou seja:

  $PV = PC - P$

  $PV = 6\,000 - \boxed{\frac{20}{100} \cdot 6\,000}$ 20% sobre o preço de custo

  $PV = 6\,000 - 1\,200$

  $PV = 4\,800$

  Portanto, o preço de venda da televisão foi R\$ 4 800,00.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine por quanto deve ser vendido um objeto comprado por R$ 700,00 para que se obtenha um lucro equivalente a 2,5% do preço de custo. R$ 717,50

2 Um produto cujo custo foi R$ 272,00 deve ser vendido com lucro de 15% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda? R$ 320,00

3 Um aparelho de ***Blu-ray*** custou R$ 500,00 e foi vendido com prejuízo de 15% sobre o preço de custo. Por quanto ele foi vendido? R$ 425,00

TONY CORDOZA/ GETTY IMAGES

Blu-ray

Aparelho que substitui o DVD. Seu nome se origina da cor azul do raio *laser* utilizado para ler o disco.

4 Certa mercadoria foi vendida por R$ 1584,00, com prejuízo de 12% sobre o seu preço de custo. Qual foi o preço de custo dessa mercadoria? R$ 1800,00

5 Valdênio vendeu um aparelho de ar condicionado com prejuízo de 6% sobre o preço de venda. Admitindo que ele tenha comprado o produto por R$ 1113,00, qual foi o preço de venda? R$ 1050,00

MAXX-STUDIO/ SHUTTERSTOCK

6 Calcule o prejuízo de um comerciante que vendeu suas mercadorias por R$ 72788,80, perdendo nessa transação uma quantia equivalente a 3% do preço de custo. R$ 2251,20

2 Juro simples

Quando emprestamos um determinado valor em dinheiro a uma pessoa física ou jurídica, após certo tempo previamente combinado, recebemos de volta a quantia emprestada mais uma quantia que denominamos **juro**.

Quando uma pessoa faz um empréstimo bancário, ela assume o compromisso de, após certo tempo previamente combinado, pagar ao banco a quantia emprestada mais um valor de juro.

Em ambos os casos, o juro corresponde a uma compensação, um lucro sobre a quantia do empréstimo.

Considere a situação a seguir.

Mariana solicitou um empréstimo de R$ 5000,00 a um banco. Ela terá de pagar essa quantia ao banco ao término de 8 meses, com taxa de juro simples de 4% ao mês. Quanto Mariana deverá pagar ao banco ao término dessa operação?

GEORGE TUTUMI

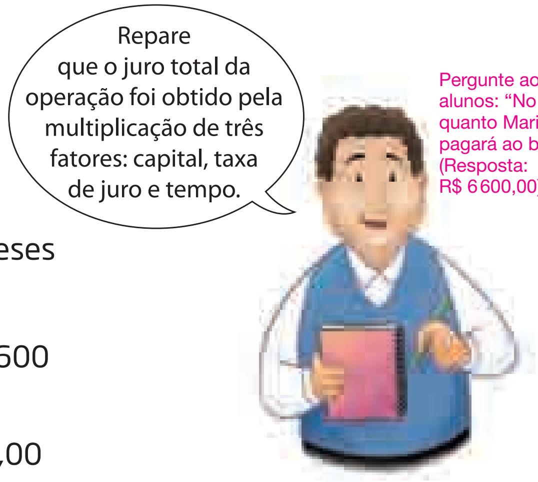
A quantia solicitada por Mariana, a ser paga no prazo de 8 meses, é chamada de **capital** (C).

$C =$ R$ 5 000,00

A **taxa de juro** (i) é a taxa percentual que representa o valor do juro em relação ao capital, a ser pago ao término de 8 meses.

$i = 4\%$ ao mês

Para obter o juro (j) dessa operação, calculamos 4% de R$ 5 000,00 durante esse intervalo de **tempo** (t) de 8 meses.



GEORGE TUTUMI

Pergunte aos alunos: "No total, quanto Mariana pagará ao banco?" (Resposta: R$ 6 600,00)

juro mensal

4% de 5 000

$$\frac{4}{100} \cdot 5000 = \underbrace{0{,}04}_{i} \cdot \underbrace{5000}_{C}$$

$j =$ R$ 200,00

juro em 8 meses

$$\underbrace{8}_{t} \cdot 200 = 1600$$

$j =$ R$ 1 600,00

Portanto, Mariana deverá pagar R$ 1 600,00 de juro ao banco ao término da operação.

Quando o valor do juro a ser pago por um empréstimo ao final de cada período é calculado apenas sobre o capital inicial, mantendo-se constante durante todo o tempo da transação, dizemos que essa transação foi realizada com **juro simples**.

Agora, acompanhe a situação a seguir.

Isaac pediu um empréstimo de R$ 3 600,00 a um banco. Vai pagar daqui a 6 meses, com taxa de juro simples de 2% ao mês. Quanto ele pagará de juro? Que quantia Isaac vai pagar ao final do empréstimo?

GEORGE TUTUMI

Nessa situação, destacamos:

$C =$ R$ 3 600,00

$i = 2\%$ **ao mês**, ou seja: 0,02 ao mês

$t = 6$ **meses**

Então:

$$\text{Total de juro: } \overbrace{\underbrace{3600}_{\text{capital}} \cdot \underbrace{0{,}02}_{\text{taxa}}}^{2\% \text{ de } 3600} \cdot \underbrace{6}_{\text{tempo}} = 432$$

$$\text{Total a pagar: } \underbrace{3600}_{\text{capital}} + \underbrace{432}_{\text{juro}} = 4032$$

Ao final do empréstimo, Isaac vai pagar R$ 432,00 de juro e, ao todo, R$ 4 032,00.

Assim, um capital C, emprestado a uma taxa mensal i durante um intervalo de tempo t, gera um total de juro simples j, que pode ser assim expresso:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

O total a ser pago ao final do empréstimo é denominado **montante** (M) e corresponde ao capital mais o total de juro. Ou seja:

$$M = C + j$$

Na situação estudada do empréstimo de Isaac fizemos:

$$\underbrace{M}_{\text{montante}} = \underbrace{3600}_{\text{capital}} + \underbrace{432}_{\text{juro}} = 4\,032$$

Observações

1 Sobre a taxa de juro, é comum o uso das expressões:
- taxa de juros de 10% **a.a.** – significa que o valor do juro é igual a 10% do capital **ao ano**.
- taxa de juros de 0,5% **a.m.** – significa que o valor do juro é igual a 0,5% do capital **ao mês**.

2 Na determinação do juro, a taxa e o tempo devem estar relacionados na mesma unidade.

3 Sobre o tempo, por convenção, o mês comercial tem 30 dias e o ano comercial, 360 dias.

Exemplo

Calcule o juro simples produzido por um capital de R$ 5 000,00 aplicado à taxa de 3% a.m. durante 1 ano e 6 meses. Qual é o montante a ser devolvido ao final do empréstimo?

Temos:

C: R$ 5 000,00

i: 3% a.m. = 0,03 a.m.

t: 1 ano e 6 meses ou 18 meses

Então:

$j = C \cdot i \cdot t$ $\qquad M = C + j$

$j = 5\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 18$ $\qquad M = 5\,000 + 2\,700$

$j = 2\,700$ $\qquad M = 7\,700$

Portanto, o juro produzido será de R$ 2 700,00, e o montante será R$ 7 700,00.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o juro e o montante de uma aplicação de R$ 20 000,00 durante oito meses, à taxa de juro simples de 0,8% a.m. R$ 1 280,00 e R$ 21 280,00

2 Calcule o montante de um capital de R$ 4 000,00 empregado durante dois anos e seis meses, à taxa de 1,5% a.m. R$ 5 800,00

3 Durante quanto tempo é necessário empregar o capital de R$ 2 000,00 à taxa de 2% a.m., para que se obtenha R$ 800,00 de juro simples? 20 meses, ou um ano e oito meses.

4 Um capital de R$ 10 000,00, aplicado durante três meses a juro simples, rende R$ 300,00. Determine a taxa de juro cobrada. 1% a.m.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

12,5 meses, ou 12 meses e meio, ou 12 meses e 15 dias

5 Em quanto tempo um capital aplicado à taxa de 6% a.m., em uma operação de juro simples, rende $\frac{3}{4}$ do seu valor?

6 Em quanto tempo um capital aplicado à taxa de 0,6% a.m. rende $\frac{3}{5}$ do seu valor, em uma aplicação de juro simples? 100 meses

7 Qual é o capital que, investido hoje a juro simples de 12% a.a., totalizará R$ 1296,00 no fim de oito meses? R$ 1200,00

8 Aplicar um capital à taxa de juro simples de 0,5% a.m., durante dez meses, é equivalente a investir o mesmo capital, por 25 meses, a que taxa? 0,2%

9 O capital de R$ 3000,00, aplicado à taxa de 12% a.a. (juro simples), produzirá, no final de 200 dias, um montante de que valor? (Considere que o ano tem 360 dias.) R$ 3200,00

10 Qual é o prazo necessário para que um capital aplicado à taxa de juro simples de 0,4% a.m. duplique de valor? 250 meses

Lendo e aprendendo

Inflação

A inflação é o aumento generalizado e contínuo no nível de preços e pode ser medida por diversos índices. Veja alguns desses índices:

As medidas da inflação

Índice	O que mede	Para que serve
Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) Responsável: IBGE	A variação de preços ao consumidor nas regiões metropolitanas do Rio de Janeiro, Porto Alegre, Belo Horizonte, Recife, São Paulo, Belém, Fortaleza, Salvador e Curitiba, além do Distrito Federal e do município de Goiânia. O universo são famílias com renda entre um e 40 salários mínimos.	Para determinar a meta de inflação.
Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) Responsável: IBGE	A média do custo de vida nas 11 principais regiões metropolitanas do país para famílias com renda de um até cinco salários mínimos.	Para ser usado como paradigma da reposição de salários.
Índice Geral de Preços do Mercado (IGP-M) Responsável: FGV	Principalmente os preços do atacado, mas também alguns preços ao consumidor e custos da construção civil. A coleta dos dados é nacional, com exceção dos preços ao consumidor, aferidos apenas no Rio de Janeiro e em São Paulo.	Para corrigir aluguéis e tarifas públicas, como energia elétrica.

Observe os índices anuais de inflação do IPCA, INPC e IGP-M de 2011 a 2014.

ÍNDICES ANUAIS DE INFLAÇÃO (em %)

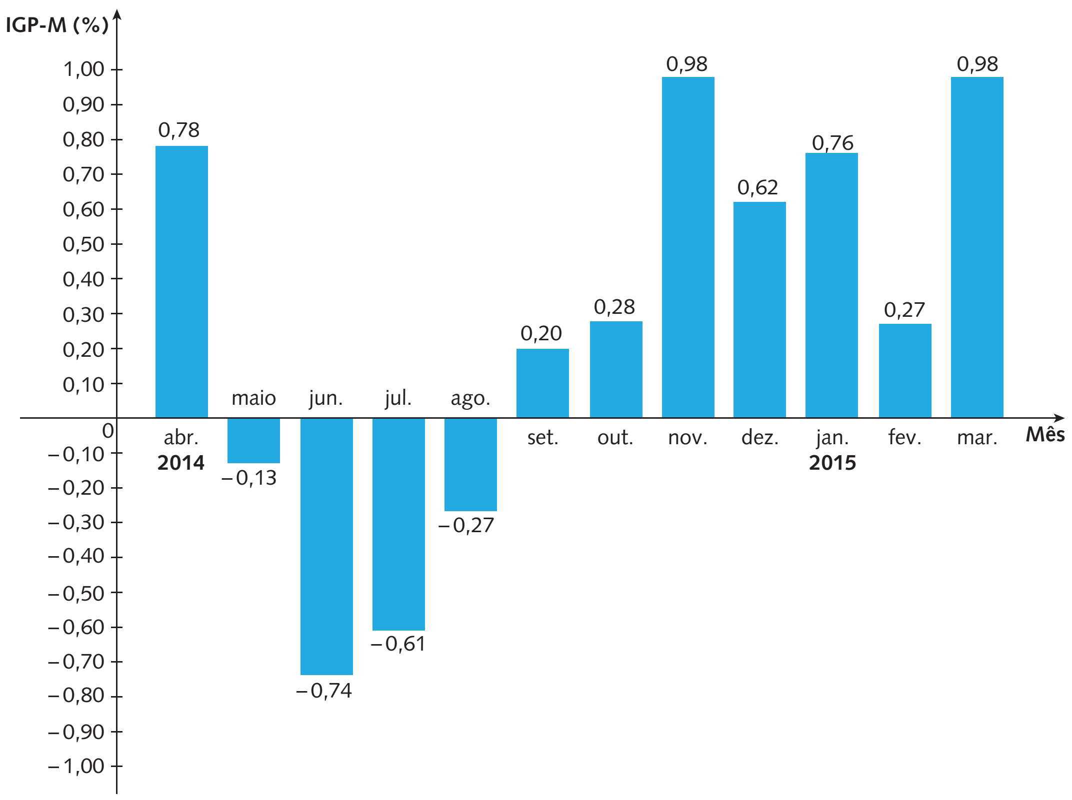
ANO \ ÍNDICE	IPCA	INPC	IGP-M
2011	6,50	6,07	5,09
2012	5,83	6,19	7,81
2013	5,91	5,56	5,52
2014	6,40	6,22	3,67

Dados obtidos em: <http://www.portalbrasil.net/igpm.htm>. Acesso em: 3 jun. 2015.

Veja agora uma tabela e o respectivo gráfico que apresenta a evolução de um dos índices de inflação usados em nosso país: o IGP-M de abril de 2014 até março de 2015. Os valores do IGP-M são coletados entre os dias 21 do mês anterior e 20 do mês de referência.

	EVOLUÇÃO DO ÍNDICE DE INFLAÇÃO IGP-M (% a.m.)											
Ano	2014									2015		
Mês	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.	dez.	jan.	fev.	mar.
Índice	+0,78	−0,13	−0,74	−0,61	−0,27	+0,20	+0,28	+0,98	+0,62	+0,76	+0,27	+0,98

EVOLUÇÃO DO ÍNDICE DE INFLAÇÃO IGP-M (% A.M.)



Dados obtidos em: <http://www.calculador.com.br/tabela/indice/IGP-M>. Acesso em: 3 jun. 2015.

Nesse gráfico, podemos observar que:

- A maior inflação medida pelo IGP-M no período foi em novembro de 2014 e em março de 2015.
- De abril a junho de 2014, de novembro a dezembro de 2014 e de janeiro a fevereiro de 2015, a inflação decresceu.
- De maio a agosto de 2014, o índice inflacionário foi negativo, ou seja, houve deflação. Exemplo: −0,74% em junho de 2014.

A **deflação** é o oposto da inflação. Corresponde à queda persistente no nível de preços.

GUILHERME CASAGRANDI

Indicadores econômicos

Você já deve ter ouvido falar sobre inflação/deflação, emprego/desemprego, crescimento/recessão e superávit/déficit fiscal. Leia atentamente as informações abaixo e entenda os reflexos desses indicadores econômicos em sua vida.

GEORGE TUTUMI

Indicador	O que é?	Reflexos em sua vida
Inflação × Deflação	O maior risco da inflação é a corrosão da moeda. Na deflação, o maior risco é uma depressão da economia.	Com inflação, você pode ter poder aquisitivo mesmo que o rendimento nominal em suas aplicações seja positivo. Na deflação, você corre o risco de perder o emprego.
Emprego × Desemprego	Outro indicador de atividade econômica. Quanto maior a quantidade de empregos, mais aquecida está a economia.	Economia aquecida é bom para os lucros da empresa e para investimentos em ações. Mas preste sempre atenção se esse aquecimento não compromete os níveis de inflação.
Crescimento × Recessão	É medido pela evolução do Produto Interno Bruto (PIB). Em fase de crescimento, o consumo aumenta; na recessão, o consumo diminui.	Economia em crescimento favorece as aplicações de longo prazo em ações, porque receita e lucro das empresas aumentam.
Superávit × Déficit fiscal	Mede a diferença entre receitas e despesas do governo. Superávits em geral são bons para a economia, porque significam receitas superiores a despesas.	Se o governo gasta menos do que arrecada, tem um superávit fiscal, um bom indicador para a estabilidade econômica. Mas o governo não deve exagerar, ou seja, acumular sucessivos superávits, porque também precisa investir em serviços para o país, como educação, saúde etc. O ideal é manter as contas em equilíbrio. Superávit fiscal exagerado pode provocar recessão, desemprego e deflação.

Fonte: Mara Luquet. *Guia Valor Econômico de finanças pessoais*. São Paulo: Globo, 2008.

3 Juro composto

O juro composto é calculado sobre um montante cada vez maior. Isso ocorre porque ele incide sobre um capital que já incorporou outro(s) juro(s). Por esse motivo, após o período determinado na taxa de juro, seu resultado será maior que o do juro simples.

Essa é a modalidade mais usada de juro.

Observe os exemplos a seguir.

- Acácia fez um depósito inicial de R$ 30 000,00 na poupança. Calcule o montante e o juro ao final dos três primeiros meses, sabendo que os rendimentos mensais foram de 0,6%, 1% e 0,7%, nessa ordem.

1º mês: poupança rendeu 0,6% ($i = 0{,}006$)

$$j = C \cdot i \cdot t = 30\,000 \cdot 0{,}006 \cdot \underbrace{1}_{\text{1 mês}} = 180$$

$$M = 30\,000 + 180 = 30\,180$$

No final do primeiro mês, Acácia passou a ter um montante de R$ 30 180,00.

GEORGE TUTUMI

2º mês: poupança rendeu 1% ($i = 0{,}01$)

$$j = \underbrace{30\,180}_{\text{montante do 1º mês}} \cdot 0{,}01 \cdot \underbrace{1}_{\text{1 mês}} = 301{,}80$$

$$M = 30\,180 + 301{,}80 = 30\,481{,}80$$

No final do segundo mês, Acácia passou a ter um montante de R$ 30 481,80.

3º mês: poupança rendeu 0,7% ($i = 0{,}007$)

$$j = \underbrace{30\,481{,}80}_{\text{montante do 2º mês}} \cdot 0{,}007 \cdot \underbrace{1}_{\text{1 mês}} \simeq 213{,}37$$

$$M \simeq 30\,481{,}80 + 213{,}37 = 30\,695{,}17$$

Logo, ao final do terceiro mês, Acácia passou a ter um montante de aproximadamente R$ 30 695,17.

Assim:

$$\text{R\$ } \underbrace{30\,695{,}17}_{\text{montante final}} - \text{R\$ } \underbrace{30\,000{,}00}_{\text{capital inicial}} = \text{R\$ } \underbrace{695{,}17}_{\text{juro composto}}$$

Portanto, ao final de três meses, Acácia recebeu R$ 695,17 de juro.

- Um investidor fez uma aplicação de R$ 80 000,00, com juro composto, a uma taxa de 20% a.a. Qual foi o montante disponível após quatro anos? Qual foi o total do juro da aplicação?

  Observe a tabela a seguir.

	Aplicação inicial (R$)	Montante anterior (R$)	Juro a 20% a.a. (R$)	Montante (R$)
1º ano	80 000	—	$80\,000 \cdot 0{,}20 \cdot 1 = 16\,000$	$80\,000 + 16\,000 = 96\,000$
2º ano	—	96 000	$96\,000 \cdot 0{,}20 \cdot 1 = 19\,200$	$96\,000 + 19\,200 = 115\,200$
3º ano	—	115 200	$115\,200 \cdot 0{,}20 \cdot 1 = 23\,040$	$115\,200 + 23\,040 = 138\,240$
4º ano	—	138 240	$138\,240 \cdot 0{,}20 \cdot 1 = 27\,648$	$138\,240 + 27\,648 = 165\,888$

O montante após quatro anos foi R$ 165 888,00, e o juro da aplicação corresponde a:

$$\text{R\$ } 165\,888{,}00 - \text{R\$ } 80\,000{,}00 = \text{R\$ } 85\,888{,}00$$

5. $100\% + 0{,}6\% = 100{,}6\% = \frac{100{,}6}{100} = 1{,}006$; $100\% + 1\% = 101\% = \frac{101}{100} = 1{,}01$; $100\% + 0{,}7\% = 100{,}7\% = \frac{100{,}7}{100} = 1{,}007$.
Os fatores 1,006, 1,01 e 1,007 aplicados ao capital inicial dão o montante final.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Uma aplicação de R$ 10 000,00 à taxa de juro composto de 0,8% a.m. gera, após três meses, que montante? R$ 10 241,93

2 Bruna depositou R$ 20 000,00 em um banco, a juro composto de 20% a.a., capitalizado anualmente, isto é, juntado ao capital após cada ano de depósito. Ao final de dois anos, quanto Bruna obteve de juro? R$ 8 800,00


GEORGE TUTUMI

3 Um capital de R$ 30 000,00 foi aplicado à taxa mensal de juro composto de 1% a.m. Determine o valor do juro dessa aplicação após três meses. R$ 909,03

4 Um investidor aplicou R$ 100 000,00 a uma taxa mensal de 0,8% a.m. durante quatro meses. Responda:

a) Qual foi o valor total do juro dessa aplicação em regime de juro simples? R$ 3 200,00

b) Qual foi o valor total do juro dessa aplicação em regime de juro composto? R$ 3 238,61

5 No exemplo da página anterior, multiplicando o capital de R$ 30 000,00 por 1,006, por 1,01 e por 1,007 encontramos como resultado um valor aproximado de R$ 30 695,17. Você saberia explicar por quê?

6 Com o auxílio de uma calculadora, determine o valor, após três meses, de uma aplicação de R$ 100 000,00 na poupança, submetida aos índices do quadro a seguir.

R$ $100\,000{,}00 \cdot 1{,}0099 \cdot 1{,}0091 \cdot 1{,}0088 =$ R$ 102 805,81

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Taxa (%)	0,99	0,91	0,88

7 No último exemplo, multiplicando o capital de R$ 80 000,00 por 1,20; 1,20; 1,20 e 1,20 encontramos como resultado um valor aproximado de R$ 165 888,00. Você saberia explicar por quê?

$100\% + 20\% = 120\% = \frac{120}{100} = 1{,}20$

O fator 1,20 aplicado por três vezes ao capital inicial dá o montante final.

Lendo e aprendendo

Glossário do mercado financeiro

Que tal conhecer melhor alguns termos muito utilizados no mercado financeiro? Leia atentamente o glossário abaixo.

GLOSSÁRIO

Âncora cambial: Instrumento da política econômica utilizado para estabilizar o valor de uma moeda, fixando seu valor na taxa de câmbio.
Balança comercial: Saldo das exportações menos as importações de um país.
Bolsa de valores: Instituição onde são negociados ações, títulos e valores mobiliários.
Bovespa: Bolsa de Valores de São Paulo. Principal mercado de ações no Brasil.
Câmbio: Taxa de conversão de uma moeda.
Capital: Riqueza de uma família ou empresa.
Capital de giro: Dinheiro que uma empresa utiliza para viabilizar a fabricação de seu produto.
Deflação: É o oposto de inflação. Queda persistente do nível geral de preços.
Dividendos: Parte do lucro de uma empresa que é distribuído aos acionistas.
Especulação: Compra e venda de ativos com o objetivo de alcançar lucros rápidos.
Fluxo de caixa: É a diferença entre o lucro proporcionado pela atividade de uma empresa (resultado bruto menos as despesas operacionais) e a variação de seu capital de giro.
Inflação: Aumento persistente dos preços que resulta na perda do poder aquisitivo da moeda.
Investir: Empregar dinheiro na compra de títulos, ações etc., a fim de obter retorno.
Juro: Remuneração paga ao investidor na compra de um título de renda fixa.
Nasdaq: Mercado eletrônico de ações dos Estados Unidos.
Nota promissória: Título de crédito em que a pessoa que o emite se compromete a pagar ao favorecido uma quantia determinada, em prazo determinado.
Orçamento: Discriminação de receita e despesas.
***Performance*:** Desempenho.
PIB: Produto Interno Bruto. É a soma de toda a riqueza produzida por um país.
Recessão: Evolução do PIB com sinal negativo em dois trimestres consecutivos.
Taxa pós-fixada: Taxa de juro que é conhecida apenas no vencimento do título.
Taxa prefixada: Taxa previamente acordada entre emissor e comprador de um título.
Taxa Selic: Índice pelo qual as taxas de juros cobradas pelo mercado se balizam no Brasil. A sigla Selic significa Sistema Especial de Liquidação e de Custódia.
Variação cambial: Variação da taxa de conversão de determinada moeda.

Fonte: Mara Luquet. *Guia Valor Econômico de finanças pessoais*. São Paulo: Globo. 2008.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Neste capítulo, você estudou duas modalidades de juro: o juro simples e o juro composto. Qual delas é mais utilizada nas transações comerciais e nas aplicações financeiras? Justifique sua resposta. É o juro composto, pois, a cada período, o juro incide sobre o montante, isto é, sobre o capital que já incorporou outro(s) juro(s).

2 As compras a prazo costumam ter juro embutido no preço final. Em sua opinião, em que situações o pagamento a prazo pode ser interessante? Exemplos de respostas: Quando a taxa de juro for menor que a inflação. Para bens de valor muito alto, o pagamento a prazo torna possível a compra desses bens.

3 Explique o que você entende por inflação. Espera-se que os alunos compreendam que inflação é o aumento reiterado dos preços, o que leva à desvalorização da moeda, ou seja, o dinheiro perde seu poder de compra.

4 Responda às questões.

a) Quando o preço de venda (PV) é maior que o preço de custo (PC), há lucro (L) ou prejuízo (P)? Escreva uma sentença matemática que represente essa situação. Há lucro; $PV = PC + L$

b) Quando o preço de venda (PV) é menor que o preço de custo (PC), há lucro (L) ou prejuízo (P)? Escreva uma sentença matemática que represente essa situação. Há prejuízo; $PV = PC - P$

Aplicando

1 Pedro Henrique vendeu um trator por R$ 63 000,00 com prejuízo de 10% sobre o preço de compra. Para que tivesse um lucro de 10% sobre o preço de compra, por quanto Pedro Henrique deveria ter vendido o trator? R$ 77 000,00

GEORGE TUTUMI

2 Você fez um empréstimo de R$ 5 000,00 a uma taxa de juro simples de 12% ao ano a ser pago em dois anos. Que valor será pago? R$ 6 200,00

3 Um objeto foi vendido por R$ 2 000,00 com um lucro de R$ 400,00. Calcule a porcentagem desse lucro em relação ao preço de custo. 25%

4 Um capital de R$ 15 000,00 foi aplicado a juro simples e, ao final de dois bimestres, produziu o montante de R$ 16 320,00. Qual foi a taxa mensal dessa aplicação? 2,2%

5 Se aplicarmos a quantia de R$ 50 000,00 durante quatro meses, teremos como remuneração desse capital a quantia de R$ 4 360,00. Qual é a taxa de juro simples ao mês dessa operação? 2,18%

6 **(Enem)** Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de: alternativa **c**

a) R$ 4 222,22

b) R$ 4 523,80

c) R$ 5 000,00

d) R$ 13 300,00

e) R$ 17 100,00

Lembre-se:
Não escreva no livro!

7 **(Enem)** Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
Poupança	0,560	isento
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é: alternativa **d**

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.

b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.

c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.

d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

8 Em quantos meses um capital quintuplica em uma operação de juro simples à taxa de 8% ao mês? 50 meses

9 Qual é o valor inicial de uma aplicação a juro simples, por cinco anos, à taxa de juro de 14% ao ano, cujo valor de resgate único é igual a R$ 102 000,00? R$ 60 000,00

10 Observe a tabela com índices de inflação (em %, ao mês) dos meses de outubro, novembro e dezembro dos anos de 2013 e 2014, calculada pelo IGP-M.

	Out.	Nov.	Dez.
2013	0,86	0,29	0,60
2014	0,28	0,98	0,62

Dados obtidos em: <http://portaldefinancas.com/inpc_ibge.htm>. Acesso em: 3 jun. 2015.

Para calcular a inflação acumulada nos meses de outubro, novembro e dezembro de 2013, podemos proceder assim:

$1{,}0086 \cdot 1{,}0029 \cdot 1{,}0060 \simeq 1{,}0176$

Ou seja, a inflação acumulada nesses meses foi de aproximadamente 1,76%.

Calcule a inflação acumulada nos meses de outubro, novembro e dezembro de 2014 com o auxílio da calculadora. 1,89

11 Com o auxílio da calculadora, determine o juro composto obtido em um investimento de R$ 10 000,00, aplicado à taxa de 8% a.a. durante dois anos. R$ 11 664,00

12 Em um dos jornais de grande circulação no Ceará, em março de 2013, lemos a notícia abaixo.

GEORGE TUTUMI

Fonte: *O Povo*, Fortaleza, 15 mar. 2013.

Responda:

a) Um imóvel que, há três anos, custava R$ 900 000,00 e sofreu um reajuste de 51% passou a ter qual valor? R$ 1 359 000,00

b) De quantos reais será o aumento desse imóvel? R$ 459 000,00

13 **(Enem)** Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	3	6	9	12
$1{,}03^n$	1,093	1,194	1,305	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: alternativa **c**

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

14 A Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) aprovou, em janeiro de 2013, tarifas que reduziram a conta de energia elétrica. O efeito médio de redução foi de 20,2%. Para os consumidores residenciais de uma cidade Alfa, a redução foi de 18%. Para os consumidores de alta tensão dessa cidade, o desconto foi de 32%. Agora, responda:

a) Se o kWh de energia residencial da cidade Alfa custava R$ 0,35, qual passou a ser, aproximadamente, seu novo valor após a redução da tarifa? R$ 0,29

b) Se o kWh de energia de alta tensão da cidade Alfa passou a custar R$ 0,44 após a redução da tarifa, qual era, aproximadamente, seu valor? R$ 0,65

15 Um agente financeiro emprestou R$ 25 000,00 a serem pagos após quatro meses à taxa de juros de 3,5% ao mês. Qual é o juro recebido nessa operação, considerando que o empréstimo foi feito utilizando-se juro composto? R$ 3 688,07

16 **(Enem)** Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00.
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.
- Opção 5: Pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção: alternativa **d**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Lembre-se:
Não escreva no livro!

17 Orçamento é a discriminação e o cálculo das receitas e das despesas.

Conhecer com exatidão a receita disponível e controlar as despesas mensais é importante para que uma família possa viver de forma tranquila.

A planilha abaixo é uma sugestão para o controle mensal de gastos de uma família. Observe:


ARIEL SKELLEY/GETTY IMAGES

Controle de gastos		
		Mês/ano: ....
Receitas	Salários Outros	
	Total de receitas (A)	
Gastos fixos (o mesmo gasto todo mês)	Aluguel/Prestação/Condomínio Empregados Prestação/Seguro do carro/IPVA IPTU Plano de saúde Educação: Escola/Cursos Clube/Academia Plano de aposentadoria/Seguro de vida Internet/TV a cabo Outros	
Gastos variáveis (contas que variam mês a mês)	Alimentação Água/Energia/Gás Telefone fixo/celular Cartão de crédito Transporte/Combustível Manutenção de casa/carro Outros	
Gastos arbitrários (gastos que nem sempre são feitos)	Cinema/Teatro Restaurante Roupas Jornais/Revistas Viagens Outros	
	Total de despesas (B)	
Saldo total	**Receitas – Despesas (A − B)**	

Reúna-se com um colega e, com a ajuda do professor, discutam a tabela apresentada acima. Em seguida, a dupla fará uma nova tabela, semelhante à apresentada, de acordo com a realidade de suas famílias. Cada aluno deverá apresentar sua planilha aos pais, mostrando seus conhecimentos sobre orçamento doméstico. Com a ajuda deles vocês poderão até preenchê-las. Boa sorte!

RESPOSTAS

Capítulo 1

Página 14

1 a) 0
b) -25
c) $-1{,}44$
d) 32
e) 25
f) -1
g) $-\frac{8}{27}$
h) $0{,}00000001$ ou 10^{-8}
i) $-\frac{8}{125}$
j) $\frac{25}{9}$

2 a) $\frac{1}{7}$ g) $\frac{4}{9}$
b) 25 h) $\frac{16}{49}$
c) 16 i) $\frac{1}{100}$
d) $\frac{9}{5}$ j) -1
e) $-\frac{8}{3}$ k) 100
f) $-\frac{1}{27}$ l) $-0{,}0001$

3 a) 9 d) $\frac{1}{3}$
b) 3 e) $\frac{1}{9}$
c) 1 f) $\frac{1}{27}$

4 a) 10^{-4} c) 2^{-3}
b) 5^{-7} d) 7^{-5}

5 a) 2^6 c) 2^8
b) 2^{-5} d) 2^{-6}

6 a) -18 c) 1 e) $-\frac{80}{9}$
b) $-\frac{33}{2}$ d) $-\frac{4}{401}$

Página 16

1 a) 3^3 d) 5^{-6}
b) m^{-1} e) 5^{3x-1}
c) $(0{,}1)^0$ f) a^{2x+1}

2 a) 5^{-8} e) 5^{-9}
b) n^{-20} f) x^5
c) $0{,}1^{-72}$ g) a^1
d) 5^{2n} h) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

3 a) $3^4 \cdot 7^4$ d) $\frac{2^{-3}}{5^{-3}}$
b) $2^{-4} \cdot a^3$ e) $x^2 \cdot y^6$
c) $a^{-15} \cdot b^{-10}$ f) $a^{-12x} : b^{-4x}$

4 a) 5^8 c) 5^{-4} e) 5^{-4}
b) 5^{-9} d) 5^{-6} f) 5^6

5 512 e 64

6 $\frac{1}{3^{20}}$

7 a) 10^{-6} c) 10^{-24}
b) 10^6 d) 10^{-2}

8 a) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ c) x^{23}
b) 2^8 d) 5^{3x+2}

Página 19

1 a) $8{,}57 \cdot 10^4$ e) $1{,}3 \cdot 10^7$
b) $9{,}45 \cdot 10^{11}$ f) $1{,}08 \cdot 10^9$
c) $7{,}9 \cdot 10^{-4}$ g) $1{,}3 \cdot 10^{-10}$
d) $2 \cdot 10^{-7}$ h) $5 \cdot 10^{-9}$

2 $7{,}5 \cdot 10^6$ litros

3 glóbulos vermelhos: $2{,}5 \cdot 10^{13}$
glóbulos brancos: $4 \cdot 10^{10}$

4 $3{,}5 \cdot 10^{42}$ kg

5 a) 10^3 b) 10^6

Página 20

1 a) raiz quadrada de sete
b) raiz cúbica de treze
c) raiz quarta de dezessete
d) raiz quinta de trinta e dois
e) raiz cúbica de mil
f) raiz sexta de quarenta e dois

2 a) 7 c) $\sqrt[3]{343}$
b) 343 d) 3

Página 22

1 a) 10 f) -2
b) 4 g) -1
c) ± 5 h) 12
d) -12 i) 2
e) -3 j) -5

2 a) -6 b) $-0{,}5$ c) $0{,}1$

3 a) $10\,000$ b) -216 c) 625

4 a) Não é número real.
b) 1,2
c) Não é número real.
d) -7
e) Não é número real.
f) 13

5 alternativas **a**, **c** e **d**

6 a) 18 b) 7 c) $\frac{1}{5}$ d) 23

7 a) 4 b) 1

8 5

9 a) -2 c) $0{,}8$ e) 1
b) -20 d) 5 f) -2

Página 25

1 a) 7 d) 6
b) 11 e) $a + b$
c) $|x|$ f) ab

2 a) $\sqrt{5^2} = 5$ d) $\sqrt{11^2} = 11$
b) $\sqrt[4]{3^4} = 3$ e) $\sqrt[3]{7^3} = 7$
c) $\sqrt[8]{2^8} = 2$ f) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

3 a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}$
b) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{11}$
c) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{x^4}$
d) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$
e) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7}$
f) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}$

4 a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$
b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{11}}$ e) $\frac{\sqrt[5]{2x}}{\sqrt[5]{5y^3}}$
c) $\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{17}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

5 a) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[4]{2 \cdot a^2}$
b) 7^2 e) $\sqrt[3]{5^2}$
c) $\sqrt[4]{7^3}$ f) $\sqrt[3]{ab}$

6 a) $\sqrt[4]{2^3}$ c) $\sqrt[4]{3}$
b) $\sqrt[5]{5^2}$ d) $\sqrt{2}$

7 a) $\sqrt[4]{5}$ d) $\sqrt[30]{11}$
b) $\sqrt[10]{13}$ e) $\sqrt[30]{4}$
c) $\sqrt[6]{7}$ f) $\sqrt[16]{x}$

8 a) 3 b) 3 c) 5 d) 2

9 a) $\sqrt{15}$ e) $\sqrt{\frac{45}{2}}$
b) $\sqrt[3]{77}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
c) $\sqrt{70}$ g) $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$
d) $\sqrt[12]{50}$

10 a) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$
b) $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{4}{5}}$

11 alternativas **a**, **d** e **e**

Página 27

1 a) $\sqrt[5]{5^3}$ b) $\sqrt{11}$ c) 49 d) 10^4

2 a) $4\sqrt{5}$ c) $2\sqrt[3]{25}$
b) $18\sqrt{2}$ d) $8\sqrt{2}$

3 a) $\sqrt[3]{56}$ c) $\sqrt{\frac{3}{25}}$
b) $\sqrt[3]{320}$ d) $\sqrt{250}$

4 a) $10\sqrt[3]{100}$ d) 10
b) 49 e) $12\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{10}$ f) 4

5 a) 27 b) $\frac{1}{16}$

Página 28

1 a) $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$
b) $3\sqrt[3]{2}$, $4\sqrt[3]{2}$, $5\sqrt[3]{2}$
c) $3\sqrt{10}$, $5\sqrt{10}$, $11\sqrt{10}$
d) Não é possível $\left(2\sqrt[4]{3},\ 3\sqrt[4]{5}\right)$.

2 alternativas **a** e **d**

Página 30

1 a) $-2\sqrt{7}$
b) $4\sqrt[5]{2}$
c) $\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} + 16$
d) $9\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$
e) $22\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

2 a) $-10\sqrt[3]{2}$ c) $10\sqrt{6}$
b) $-\sqrt{3}$ d) $25\sqrt{2}$

3 a) $12\sqrt{5}$ b) $16\sqrt{6}$

4 94,20

Página 31

1 a) $\sqrt{90}$ c) 1 e) $6\sqrt[3]{6}$
b) $12\sqrt[5]{30}$ d) $\sqrt[3]{77}$ f) 1

2 a) perímetro: $14\sqrt{3}$; área: 36
b) perímetro: $4\left(6 - \sqrt{7}\right)$;
área: $\left(43 - 12\sqrt{7}\right)$

3 a) $\sqrt[5]{300}$ b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{3}$

4 a) $\sqrt[6]{72}$
b) $2\sqrt[4]{2^3}$
c) $2\sqrt[30]{2^7 \cdot 3^{16} \cdot 5^{25}}$
d) $2\sqrt[4]{8}$
e) $\sqrt[24]{5^7}$
f) 1

5 a) $7 - \sqrt{7}$
b) $2 + 2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{3} - 5$
d) $\sqrt{10} + \sqrt{15}$
e) $2\sqrt{2}$
f) $\sqrt{2} - 2$

Página 32

1 a) 4 b) $\sqrt[5]{3^3}$ c) 2 d) 10

2 a) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[6]{\frac{25}{2}}$
b) 1 e) $\sqrt[30]{7}$
c) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ f) $\sqrt[8]{8}$

Página 33

1 a) $24\sqrt{3}$ d) $8a^2\sqrt[7]{ab^6}$
b) $1024\sqrt{2}$ e) $\frac{x}{y}$
c) $ab\sqrt[3]{ab}$ f) $y\sqrt[5]{y}$

2 a) $2\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[28]{7}$
b) $2\sqrt[4]{12}$ d) 2

3 a) 217 b) 4

4 alternativa **c**

Página 34

1 a) 6 c) $3 - 2\sqrt{2}$
b) 53 d) 5

2 $(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 3 = -2$

3 a) $7 + 2\sqrt{10}$ d) $3 + 2\sqrt{2}$
b) 61 e) -10
c) $4 - 2\sqrt{3}$ f) $14 - 6\sqrt{5}$

Página 36

1 a) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
b) $3\sqrt{2}$ g) $\frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$
c) $\frac{5\sqrt{3}}{24}$ h) $\frac{\sqrt[5]{4}}{14}$
d) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ i) $\frac{\sqrt[3]{49}}{7}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{15}$ j) $3\sqrt[3]{25}$

2 a) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ d) $12 - 4\sqrt{6}$
b) $\frac{5 + \sqrt{7}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\sqrt{7} - 2$ f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3 alternativa **e**

Página 37 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 a) 1 e) 9
b) $-\frac{1}{4}$ f) 81
c) $-\frac{1}{8}$ g) $\frac{4}{9}$
d) -25 h) $-\frac{4}{3}$

2 a) $-\frac{25}{3}$ c) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{109}{4}$
b) $\frac{31}{25}$ d) 6 f) $-\frac{5}{2}$

3 a) x^{-5} e) a^{24}
b) b^{2m-1} f) x^{-2}
c) 2^{12} g) 2^8
d) 2^2 h) $4^m a^{2m^2}$

4 a) 3^{-9} d) 7^{a-1}
b) 5^{2x} e) m
c) 3^{3m-1}

5 $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n \cdot 2 =$
$= 2^n \cdot (1 + 2) = 2^n \cdot 3$

6 a) 10^{-7} b) 0,2

7 2^5

8 a) $1{,}84 \cdot 10^5$ c) $2{,}5 \cdot 10^9$
b) $6{,}4 \cdot 10^{-6}$ d) $4 \cdot 10^{-7}$

9 -12

10 10^{11} neurônios; 10^{14} sinapses

11 a) -93 c) $-\frac{41}{80}$ e) $\frac{19}{8}$
b) $\frac{27}{2}$ d) $4 \cdot 10^{-4}$

12 $\frac{1}{2}$

13 9 765 625

14 $1 - 2^{n-3}$

15 $\frac{3}{16}$

16 $3{,}34 \cdot 10^{19}$ moléculas

17 alternativa **c**

18 alternativa **e**

19 $5 \cdot 10^{-11}$ m

20 8

21 a) 2 e 3 b) 6 e 7

22 a) 2 b) 4 c) 10 d) 14

23 a) $3\sqrt{6}$ b) $2\sqrt[3]{9}$ c) $2ab\sqrt[3]{a}$

24 a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$ c) $\frac{2a}{b}$

25 a) 4 b) $\sqrt[4]{5}$ c) 25

26 a) $\sqrt[4]{20}$ c) $\sqrt[6]{a}$
b) $\sqrt[6]{x}$ d) $\sqrt[20]{3}$

27 a) -5 c) 0,2
b) -6 d) $-\frac{1}{2}$

28 a) 2,82 d) 2,4393
b) 3,46 e) 14,1
c) 7,05 f) 0,815

29 7

30 a) 54 b) 12 c) 9

31 a) $\sqrt[8]{7}$ b) $2\sqrt[8]{5}$
b) $\sqrt[10]{11}$ f) $\sqrt[6]{200}$
c) $\sqrt[12]{12}$ g) $\frac{\sqrt[6]{32}}{2}$
d) $\sqrt{2}$ h) $\sqrt[12]{18}$

32 a) $9\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $8\sqrt[3]{2}$ e) $3\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$
c) $\frac{4}{9}xy\sqrt[3]{2y}$ f) $\sqrt[12]{5}$

33 a) 1,1 b) 23

34 a) $\sqrt{108}$ b) $\sqrt{175}$ c) $\sqrt[5]{96}$ d) $\sqrt[3]{40}$ e) $\sqrt[4]{405}$ f) $\sqrt[3]{a^7b^2}$

35 a) $3\sqrt{2} - 10\sqrt{3}$
b) $18\sqrt{3}$
c) 2,3125

36 7,75 s

37 alternativa **a**

38 alternativa **e**

39 perímetro: 16; área: 13

40 a) $\frac{5}{3}$ b) 10 c) $8 \cdot 10^8$ d) 80

41 a) $\sqrt[4]{7}$ b) $\sqrt[12]{5}$ c) 2 d) $2\sqrt[6]{15}$ e) a f) $\sqrt[6]{20}$

42 a) 2 b) $\sqrt[3]{2}$ c) 2

43 a) a
b) b
c) $\sqrt{ab} - b$
d) $\sqrt{ab} + b$
e) $a + b + 2\sqrt{ab}$; $a + b + 2\sqrt{ab}$

44 a) $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{225}}{5}$ c) $\sqrt{3}$ d) $8 + 4\sqrt{3}$ e) $2 + \sqrt{3}$

46 15

47 $x^{\frac{7}{8}}$

49 alternativa **b**

Capítulo 2

Página 46

1 Exemplo de resposta:
$x^2 + 8x - 240 = 0$

2 alternativas **b**, **c**, e **f**

3 a) $a = 1, b = 13, c = 36$
b) $a = -3, b = 6, c = 0$
c) $a = 3, b = 0, c = -12$
d) $a = 1, b = -10, c = 25$
e) $a = 1, b = 4, c = 0$
f) $a = k + 1, b = -2k, c = 0$

4 a) $5x^2 - x = 0$
b) $4x^2 - 9 = 0$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = 0$
d) $0{,}2x^2 + x + 0{,}5 = 0$

5 Exemplo de resposta: $x^2 - 625 = 0$

6 a) incompleta b) incompleta c) incompleta d) completa e) incompleta f) completa

7 $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

8 Exemplo de resposta:
$4x^2 - 25x + 39 = 0$

Página 48

1 -5 e 6

2 $k = -8$

3 a) não b) sim

4 a) Exemplo de resposta: $x^2 + 2x = 0$
b) Exemplo de resposta: $x^2 + 1 = 0$

Página 49

1 a) $x = -8$ ou $x = 8$
b) $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$
c) Não tem raízes reais.
d) $x = -\frac{4}{3}$ ou $x = \frac{4}{3}$
e) $x = 0$
f) $x = 0$ ou $x = 5$
g) $x = 0$ ou $x = -5$
h) $x = 0$ ou $x = \frac{20}{3}$
i) $x = 0$ ou $x = \frac{5}{6}$
j) $x = 0$ ou $x = -4$

2 a) $x = 0$
b) $x = 0$ ou $x = 2$
c) $x = 0$ ou $x = 4$
d) $x = -1$ ou $x = 1$
e) $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$
f) $x = -\sqrt{15}$ ou $x = \sqrt{15}$

3 a) $m = 0$
b) $x = -25$ ou $x = 25$

4 a) 8
b) 32; 35,6
c) 64

5 a) $x = -11$ ou $x = 11$
b) $x = -9$ ou $x = 9$
c) $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$
d) $x = -12$ ou $x = 12$

Página 54

1 a) $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$
b) $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{2}{3}$
c) $x_1 = \sqrt{5} + 1$ e $x_2 = \sqrt{5} - 1$
d) $x_1 = x_2 = 7$
e) $x_1 = -9$ e $x_2 = 1$

3 a) $x \neq 0$
$x_1 = -1$ e $x_2 = -2$
b) $x \neq -1$ e $x \neq 1$
$x_1 = -2$ e $x_2 = 2$
c) $x \neq 1$ e $x \neq -1$
$x = -\frac{4}{3}$
d) $x \neq 0, x \neq 3$ e $x \neq -3$
$x = -2$
e) $x \neq 1$ e $x \neq -1$
$x = -2$

4 -7 ou 6

5 $-\frac{1}{2}$ ou 2

Página 55

1 a) $\Delta = 16$; sim
b) $\Delta = 196$; sim
c) $\Delta = 0$; sim
d) $\Delta = 0$; sim
e) $\Delta = -23$; não
f) $\Delta = -12$; não

2 a) $p = 14$ b) $p < 14$ c) $p > 14$

3 $k > \frac{25}{24}$

4 a) $a < \frac{49}{4}$
b) $a = -6$ ou $a = 6$
c) $a > \frac{9}{4}$

5 $m < 0$ e $m > 5$

Página 58

1 a) $S = 5$; $P = 6$
b) $S = 2$; $P = \frac{1}{a}$
c) $S = \frac{8}{5}$; $P = \frac{4}{5}$
d) $S = \frac{1}{10}$; $P = -\frac{1}{5}$
e) $S = 6$; $P = 9$
f) $S = 12$; $P = 32$

2 $m = 3$

3 $p = \frac{1}{4}$

4 $m = 4$

5 a) $\frac{11}{28}$
b) 65

6 a) $x^2 - 14x + 48 = 0$
b) $x^2 - \frac{9}{25} = 0$
c) $x^2 + \frac{7x}{4} + \frac{3}{8} = 0$
d) $x^2 - 0{,}5x + 0{,}06 = 0$

7 a) $x_1 = x_2 = 1$
b) $x_1 = -3$ e $x_2 = 5$
c) $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$
d) $x_1 = -3$ e $x_2 = -4$
e) $x_1 = -6$ e $x_2 = -5$

Página 59

1 a) $(x + 8)(x - 8) = 0$
b) $2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$
c) $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$
d) $(x - m)(x + 3m) = 0$
e) $3\left(x - \frac{p}{3}\right)^2 = 0$

2 a) $2(x - 1)^2$
b) $8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$
c) $6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
d) $(x - 3)(x + 8)$
e) $\frac{1}{2}(x + 4)(x - 7)$

3 a) $\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $\dfrac{x-5}{2(x+1)}$

b) $\dfrac{x-2}{x+2}$

4 a) Exemplo de resposta: $x^2 - 14x + 49 = 0$

b) Exemplo de resposta: $x^2 - 5x - 24 = 0$

c) Exemplo de resposta: $2x^2 + 12x + 10 = 0$

d) Exemplo de resposta: $x^2 + 1 = 0$

Página 61

1 20

2 6

3 6

4 3 ou $\dfrac{1}{2}$

5 4 anos

6 cinco anos

7 40 km/h

8 3 e 4

9 5

10 1, 2 e 3

11 $x = 8$ m

12 4 m e 8 m

13 3 e 4

14 a) 10 turistas

b) R$ 150,00

15 1 200 m²

Página 64

1 a) (3, 2)

b) (3, 5) e (5, 3)

c) (4, 1) e (16, −11)

d) (3, 4) e (4, 3)

2 5 e 3

3 9 e 3

4 15 e 13

5 17 e 18 ou −17 e −18

Página 65 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 sim

2 $C = 78$ dm; $L = 64$ dm

3 $\dfrac{3}{4}$

4 18

5 a) $x_1 = -6\sqrt{3}$, $x_2 = 6\sqrt{3}$

b) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

c) $x \neq -60$ e $x \neq \dfrac{5}{3}$

$x_1 = -10$ e $x_2 = 14$

d) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$

e) $x \neq -2$; $x = 2$

6 2

7 16 duplas

8 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

9 6

10 $\dfrac{30}{7}$

11 −15

12 a) $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$

b) −80 e 100

13 a) 1 e −3 c) 3 e 12

b) 2 e 13 d) 2 e −18

14 5 m

15 6 m e 13 m

Desafio: 24 km/h

16 1,4 e 3,5

17 Após 3 segundos.

18 10 anos

19 3 ou $\dfrac{1}{3}$

20 9 e 25

21 11 e 13 ou −11 e −13

22 4 m e 8 m

23 0,8 e 0,6 ou −0,6 e −0,8

24 2 e 5

25 Curitiba: 600; Cuiabá: 200

26 12 pessoas

27 5, 6 e 7 ou −7, −6 e −5

28 46

Desafio: 87 ou 78

Capítulo 3

Página 72

1 a) 6 000 embalagens

b) 8 horas

c) Sim, porque cada hora corresponde a uma única quantidade de embalagens produzidas.

d) $y = 600t$, onde y representa a quantidade de peças produzidas e t, o tempo (em hora).

2 $A = \ell^2$

Página 73

1 a) 2 b) −3 c) −8 d) $\dfrac{23}{4}$

2 a) $\dfrac{2}{5}$ b) 1 c) $-\dfrac{8}{5}$ d) 3

3 a) −2 b) $\dfrac{1}{12}$

4 a) $f(x) = 2x$ b) $-\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{7}{4}$

Página 76

1 $A(1, 3)$; $B(4, 3)$; $C(4, 1)$ e $D(1, 1)$

2 a) $y = 0{,}5x$ b) Gráfico A

3 alternativa **b**

Página 80

1 alternativas **a**, **b**, **c** e **e**

2 a) $V = 60 \cdot t$ c) 15 minutos

b) 600 ℓ

3 alternativas **a** e **d**

Página 81

1 a) $x = 2$ e) $x = -16$

b) $x = -7$ f) $x = 3$

c) $x = \dfrac{1}{4}$ g) $x = 3$

d) $x = 7$ h) $x = 5$

2 $m = -10$

3 $y = -x + 1$

Página 83

1 a) $x = 5$; crescente

b) $x = 3$; crescente

c) $x = \dfrac{1}{4}$; decrescente

d) $x = 3$; crescente

2 a)
- $x = 3$, a função é nula ($y = 0$).
- $x < 3$, a função é negativa ($y < 0$).
- $x > 3$, a função é positiva ($y > 0$).

b)
- $x = 8$, a função é nula ($y = 0$).
- $x < 8$, a função é negativa ($y < 0$).
- $x > 8$, a função é positiva ($y > 0$).

c)
- $x = 11$, a função é nula ($y = 0$).
- $x < 11$, a função é positiva ($y > 0$).
- $x > 11$, a função é negativa ($y < 0$).

d)
- $x = -2$, a função é nula ($y = 0$).
- $x < -2$, a função é positiva ($y > 0$).
- $x > -2$, a função é negativa ($y < 0$).

3 Exemplo de resposta: $y = x - 2$

4 Para uma função afim crescente:
- Para $x = -\dfrac{b}{a}$, a função é **nula**.
- Para $x > -\dfrac{b}{a}$, a função é **positiva**.
- Para $x < -\dfrac{b}{a}$, a função é **negativa**.

Para uma função afim decrescente:
- Para $x = -\dfrac{b}{a}$, a função é **nula**.
- Para $x > -\dfrac{b}{a}$, a função é **negativa**.
- Para $x < -\dfrac{b}{a}$, a função é **positiva**.

Página 85 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 a) 104 °F b) 20 °C

2 3

3 a) $f(x) = -\frac{x}{3}$
b) 5
c) $x = 99$

4 a) -2 b) 8 c) -7 d) 3

5 a) Sim, o preço é a função da quantidade de mangas, pois há uma correspondência entre o preço, em reais, a pagar e a quantidade de mangas, que é único para cada quantidade.
b) $p = \frac{3n}{2}$
c) R$ 10,50

6 alternativa **c**

7 alternativa **c**

8 a) $(0, -1)$ c) $(0, 0)$
b) $(0, 2)$ d) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

9 a) 20 km b) 10 km

10 $y = \frac{3x}{5} + 3$

11 É gráfico de uma função crescente, pois, aumentando-se o valor de x, o valor de $f(x)$ aumenta.

12 a) $\frac{3}{2}$ c) decrescente
b) $(0, 3)$ d) $p(x) = -2x + 3$

Desafio: alternativa **d**

14 a) $f(x) = 0$, para $x = 2$
$f(x) > 0$, para $x > 2$
$f(x) < 0$, para $x < 2$
b) $f(x) = 0$, para $x = -2$
$f(x) > 0$, para $x < -2$
$f(x) < 0$, para $x > -2$

15 201 peças

16 alternativas **a**, **e** e **g**

Capítulo 4

Página 92

1 a) $a = 1$; $b = 0$; $c = -25$
b) $a = -3$; $b = -6$; $c = 9$
c) $a = 1$; $b = 0$; $c = -18$
d) $a = -5$; $b = 13$; $c = 0$
e) $a = 1$; $b = -10$; $c = 25$

2 a) 44 c) 2
b) -6 d) 16

3 $x = 2$ ou $x = 3$

4 $y = x^2 + 8x + 15$, em que $x > 0$.

Página 94

2 alternativas **b**, **c**, **d** e **i**

3 $m < 7$

4 $p < -6$

5 b) 100 metros
c) 300 metros
d) 600 metros

Página 97

1 a) 0
b) 2 e -2
c) -1 e 1
d) 0 e -2
e) Não tem zeros.
f) 1 e $\frac{2}{3}$
g) $-\frac{1}{3}$
h) Não tem zeros.
i) Não tem zeros.

2 a) $(0, 0)$ e $(4, 0)$
b) $(-2, 0)$ e $(2, 0)$
c) $(3, 0)$ e $(5, 0)$

3 alternativa **b** e **c**

4 30 metros

5 a) $a > 0$, $\Delta > 0$ b) $a < 0$, $\Delta < 0$ c) $a > 0$, $\Delta = 0$

Página 100

1 $a = 1$; $b = -6$

2 $k = 16$

3 a) $V(2, -1)$ d) $V(-1, 2)$
b) $V(3, 0)$ e) $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$
c) $V(1, 1)$ f) $V\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

4 $a = 3$; $b = -2$

Página 102

1 a) mínimo: -64 d) mínimo: $-\frac{25}{4}$
b) máximo: 0 e) máximo: $-\frac{3}{4}$
c) máximo: $\frac{9}{4}$ f) mínimo: $-\frac{25}{8}$

2 $k = 15$

3 $p = 2$

4 a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{11}{2}$

5 a) $x = 6$ b) $72\ \text{cm}^2$

6 A figura de maior área é um quadrado de 25 cm de lado.

7 250 m, 500 m e 250 m

Página 103 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 $m = 8$

2 $m = 4$

3 alternativa **d**

4 a) 5 m b) 9 m c) 6 horas

5 30 cm

6 a) 2 e $-\frac{1}{3}$ c) 2 e -2
b) 1 e $-\frac{1}{4}$

7 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

8 $k = \pm 2$

9 $a = -1$; $b = 7$; $c = -6$

10 $(0, -4)$

11 a) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ c) $(3, 1)$
b) $(-3, 4)$

12 a) máximo: $\frac{1}{3}$
b) mínimo: $-\frac{1}{8}$
c) mínimo: 400

13 $-\frac{73}{12}$

14 $a = 1$, $c = 10$

15 $x = 1$

16 $p < \frac{3}{2}$

17 $k < -5$

18 $A(0, -12)$; $B(-4,0)$

19 $(2, 4)$

20 a) 50 m b) 1 250 m

21 R$ 660,00

22 a) 1 hora e 3 horas depois que a câmara é ligada.
b) $-1°$ C

23 eneágono

24 a) 640 pessoas
b) Depois de 14 dias.

Capítulo 5

Página 113

1 300 parafusos

Página 119

3 a) gráfico de segmentos
b) 84
c) 46,6%

Página 124

1 a) média aritmética: 99; mediana: 94; moda: 88
c) 12 dias

2 mediana: 12; moda: 10

3 salário médio: R$ 1 108,00; moda: R$ 800,00

4 a) Ayrton Senna
b) Sim, Ayrton Senna obteve 40,59% do total de vitórias dos brasileiros.

Página 126

1 50%

2 $\frac{2}{3}$

3 $\frac{3}{100}$ ou 3%

4 a) $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$ c) 0%
b) $\frac{3}{36}$ ou $\frac{1}{12}$ d) 100%

Página 127 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 alternativa **b**
2 média: 2,20; mediana: 2,20; modas: 2,16 e 2,30
4 a) média aritmética: 49,5; mediana: 49,5; moda: 48
b) 6 alunos
5 a) 16,3 litros por habitante/dia; isso significa que o consumo de água em 2012 aumentou em relação à 2008.
b) O consumo de água foi reduzido em, aproximadamente, 0,72% em relação ao ano anterior.
7 alternativa **c**
8 a) O percentual positivo indica que o PIB de 2013 foi maior que o de 2012 e o percentual negativo indica que o PIB de 2013 foi menor que o de 2012.
b) Itália e Espanha
c) China
9 a) 18 anos b) 18,5 anos
10 alternativa **d**
11 21 anos
13 alternativa **e**
Desafio: Lucas: 26; Felipe: 26
15 alternativa **b**
17 a) 0,2 ou 20%
b) 0,5 ou 50%
c) 0,3 ou 30%

Capítulo 6

Página 136

1 a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 5
2 alternativas **c** e **d**

Página 138

1 $x = 8$ cm
2 $\frac{3}{4}$
3 $x = 28$ cm; $y = 12$ cm
4 $AB = 15$ cm; $CD = 25$ cm
5 a) comensuráveis
b) incomensuráveis
6 60 mm × 80 mm; 15 mm × 20 mm

Página 142

1 a) $x = 9$ c) $x = 12$
b) $x = 15$ d) $x = 15$
2 a) $x = 4$ b) $x = 10$
3 a) $x = \frac{18}{5}$; $y = \frac{10}{3}$; $z = 12$
b) $x = 6$; $y = 4$; $z = 6$
4 a) $x = 2$; $y = 6$ b) $x = 2$; $y = 1$
5 a) $x = 3$ b) $x = 2$
6 a) $x = 12$; $y = 15$ b) $x = 8$; $y = 4$
7 $a = 20$ m; $b = 35$ m; $c = 45$ m

Página 145

1 $AQ = 7{,}5$
2 $y = 15$
3 $AB = 20$
4 $x = \frac{10}{3}$
5 42

Página 148

1 $x = 12$
2 $x = 10$
3 $x = 24$
4 a) $x = 18$; $y = 27$ b) $x = 5$; $y = 8$

Página 154

1 a) Sim, pois os ângulos correspondentes têm a mesma medida (90°), e a razão de semelhança é $\frac{5}{2}$.
b) Não, pois os ângulos correspondentes têm medidas diferentes.
2 a) $x = 10$; $y = 20$
b) $x = 12$; $y = 27$
4 a) $x = 54$; $y = 85$
b) $x = 120°$; $y = 18$
5 30 cm, 24 cm, 54 cm e 21 cm
6 36 cm, 57 cm e 30 cm
7 160 cm^2

Página 156

1 a) $x = 40$; $y = 40$
b) $x = 10$; $y = 30$
c) $x = 12$; $y = 15$
d) $x = 60$; $y = 28$
2 $x = 7{,}2$; $y = 12{,}8$
3 16 cm, 24 cm e 32 cm
4 12 m

Página 158

1 a) $x = 4$; $y = 12$ c) $x = 6$; $y = 24$
b) $x = 36$; $y = 27$
2 $x = 10$; $y = 16{,}8$
3 $BC = \frac{192}{13}$ m; $DC = \frac{125}{13}$ m
4 $x = 10$; $y = 20$

Página 161

1 $\triangle ABC \sim \triangle MON$ (LAL)
$\triangle XYZ \sim \triangle TSR$ (LLL)
$\triangle DEF \sim \triangle IGH$ (AA)
3 a) LAL b) LAL ou LLL c) AA
4 15 m
5 Exemplo de resposta:
$\triangle DBE \sim \triangle ABC$ (AA)

Página 165 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 $GH = 32$ cm
2 $EF = 12$ cm; $GH = 18$ cm
3 8 e 20
4 $PA = 15$ cm; $PB = 25$ cm ou $PA = 25$ cm; $PB = 15$ cm
5 $r_1 = \frac{AC}{EG} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $r_2 = \frac{AB}{EF} = \frac{3}{5}$
Temos que $r_1 \neq r_2$, ou seja, os retângulos não são semelhantes.
7 $x = 6$
8 a) $x = 72$ b) $x = 15$
9 48 m
10 5 m
11 alternativa **b**
12 alternativa **d**
Desafio: $x = 56$ m
13 alternativa **b**
14 $\frac{9}{4}$ m e $\frac{15}{4}$ m
15 a) $x = 6$; $y = 8$ b) $x = 1{,}5$; $y = 4{,}5$
16 a) $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ b) $\frac{OB}{OC} = \frac{OA'}{OB'}$
17 15 cm e 12 cm
18 8 m
Desafio: $AH = 18$ cm
19 20 cm e 16 cm
20 $\frac{9}{10}$
21 32 m
22 $OE = 16$ m; $O'E = 12$ m
Desafio: 12 cm, 15 cm e 18 cm
23 a) 1,5 b) 125%
24 a) $x = 6$ cm; $y = 7{,}2$ cm
b) $x = 21$; $y = 24$
25 a) $x = 2{,}5$; $y = 2$
b) $x = 3{,}2$
26 $\ell = 24$ m
27 a) $x = 24$; $y = 40$
b) $x = \frac{16}{3}$; $y = \frac{34}{3}$
28 4 m
29 a) $x = 50°$; $y = 80°$; $z = 50°$
b) $x = 55°$; $y = 55°$; $z = 80°$
30 7,8 m
Desafio: $EF = 4$ m; $EG = \frac{40}{3}$ m
31 alternativa **e**
32 a) 1,5 b) $\frac{10}{3}$

33 12 cm

34 Não, pois as medidas dos ângulos correspondentes são diferentes.

35 18 m

36 30 cm

37 25 cm

38 9 m e 15 m

39 60 cm

40 med $(\overline{IH'}) = 0{,}8$ km; med$(\overline{HH'}) = 0{,}6$ km

41 medida da base: 7,5 m; medida da altura: 1,5 m

Desafio: 16

Capítulo 7

Página 176

2 **a)** $\overline{BD}$ **b)** $\overline{BD}$; $\overline{CD}$ **c)** $\overline{BC}$ **d)** D; $\overline{BC}$

Página 182

1 **a)** 18 **c)** 24 **e)** $\sqrt{2}$
b) $5\sqrt{3}$ **d)** 12 **f)** $9\sqrt{2}$

2 $x = 8\sqrt{3}$; $y = 4\sqrt{21}$; $z = 8\sqrt{5}$

3 24 m e 32 m

4 3,2 m

5 **a)** $m = 10\sqrt{2}$; $n = 10\sqrt{2}$
b) $m = 9$; $n = 7$
c) $m = 3{,}6$; $n = 6{,}4$

6 38 cm

7 As medidas dos catetos são 21 e 28 e a medida da hipotenusa é 35.

8 24 cm e 32 cm

9 4

10 $\sqrt{2}$

11 med$(\widehat{A}) = 60°$; med$(\widehat{B}) = 30°$; $c = 4$ m

Página 185

1 $17\sqrt{2}$ cm

2 $20\sqrt{2}$ cm

3 $5\sqrt{2}$ cm

4 5

5 $\sqrt{10}\,x$

6 $4\sqrt{3}$ cm

7 $2\sqrt{3}$ cm

8 $8\sqrt{15}$ cm

10 $EG = 3$ m; $EC = \sqrt{10}$ m

Página 189

1 **a)** sen $c = \frac{12}{13}$; cos $b = \frac{12}{13}$; tg $b = \frac{5}{12}$

b) sen $b = \frac{\sqrt{6}}{3}$; cos $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$; tg $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tg $b = 1$

d) sen $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos $z = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; tg $x = 2$

e) sen $o = \frac{4}{5}$; cos $p = \frac{4}{5}$; tg $p = \frac{3}{4}$

f) sen $r = 0{,}8$; cos $t = 0{,}8$; tg $t = \frac{3}{4}$

2 **a)** 0,20825 m **b)** 3,0012 m

Página 193

1 **a)** $x = 20$; $y = 20\sqrt{2}$
b) $x = 50\sqrt{3}$; $y = 50$
c) $x = 4$; $y = 2\sqrt{3}$

2 $m = 120$; $n = 40$; $h = 40\sqrt{3}$; $x = 160$

3 $\ell = 6$; $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

4 $h = 300\left(1 + \sqrt{3}\right)$ m

Página 196

1 **a)** 0,292 **d)** 0,682 **g)** 0,970
b) 0,999 **e)** 0,788 **h)** 28,636
c) 0,488 **f)** 1,192

2 **a)** 7° **d)** 56° **g)** 39°
b) 70° **e)** 10° **h)** 60°
c) 35° **f)** 81°

3 **a)** $x = 11{,}82$; $y = 10{,}73$
b) $x = 1{,}286$; $y = 1{,}532$

Página 198

1 64,18 m

2 50 m

3 $5\sqrt{3}$ m

4 4 km

5 40 m

6 3°

Página 199 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** $x = 15$; $y = 17$
b) $x = 21$; $y = 16{,}8$
c) $x = 35$; $y = 40$

2 30 dm

3 12

4 alternativa **b**

5 $\sqrt{7}$ cm

6 25 cm

7 72 cm

8 $12\sqrt{3}$ cm

9 6 cm

10 10 cm e 10 cm

11 12,6 cm

12 $a = 10$; $h = 4{,}8$; $m = 6{,}4$; $n = 3{,}6$

13 7,2

14 $x \simeq 0{,}66$ m

15 $AB = 12$; $AC = 5$

16 $\sqrt{17}$

17 $\frac{150\sqrt{34}}{17}$ cm; $\frac{90\sqrt{34}}{17}$ cm

Desafio: 12 cúbitos

18 9

19 alternativa **c**

20 $10\sqrt{2}$ cm

21 40 cm

22 $\sqrt{3}$

23 20 cm

24 **a)** $\frac{40}{41}$ **c)** $\frac{9}{41}$ **e)** $\frac{9}{41}$
b) $\frac{40}{41}$ **d)** $\frac{40}{9}$ **f)** $\frac{9}{40}$

Desafio: $b = \frac{a\left(\sqrt{7} - 1\right)}{2}$

25 **a)** 3,74 m **b)** 3,48 m

26 21 cm

27 $x = 250\sqrt{3}$ m; $y = 250$ m

28 $h = \sqrt{3}$

29 $a = 36$

30 alternativas **a**, **b**, **c**, **e** e **h**

Desafio: 40 m

31 105 m

32 2 km

33 0,75

34 Não, pois o triângulo amarelo não é retângulo. Seus lados medem 13 cm, $\sqrt{58}$ cm e 15 cm; e $(13)^2 + \left(\sqrt{58}\right)^2 \neq (15)^2$.

35 alternativa **b**

36 **a)** 8,33% **b)** 6,02 m

37 8,7%

38 2 000 m

39 37,3 m

40 alternativa **d**

Capítulo 8

Página 210

1 94,2 cm

2 8 cm

3 25 cm

4 8 voltas

5 200 voltas

6 904,32 m

7 565,2 cm

Página 214

1 **a)** $\frac{20\pi}{9}$ cm **b)** 90° **c)** 40 cm

2 **a)** $\frac{2}{3}\pi$ cm **b)** π cm **c)** $\frac{3}{8}\pi$ cm

3 **a)** 12 cm **b)** 18 cm

4 **a)** 9° **b)** 90°

5 $\ell_1 = \pi$ cm; $\ell_2 = \frac{5}{3}\pi$ cm

Página 216

1 **a)** $x = 4$ **c)** $x = 12$ ou $x = 2$
b) $x = 5$ **d)** $x = 2$

2 **a)** $x = 10$ **c)** $x = 4$ e $x + 2 = 6$
b) $x = 5$ **d)** $x = 8$

Página 217

1 **a)** $x = -2$ **c)** $x = 3{,}75$
b) $x = 4$ **d)** $x = 4$

2 9 m

Página 219

1 **a)** $x = 4$ **c)** $x = 3$
b) $x = 3$ **d)** $x = 3{,}5$

2 $PA = 6$ m

3 $r(\sqrt{5} - 1)$

Página 221 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 6 cm

2 1 256 cm

3 800 voltas

4 $\ell_1 = 3{,}14$ cm; $\ell_2 = 9{,}42$ cm

5 75 cm

6 1,41 m

7 $\frac{355}{113}$

8 **a)** Sim; valores próximos de 3,1.
c) Pode-se concluir que os valores encontrados confirmam aproximações do valor de π.

9 8π cm

10 **a)** $\frac{5\pi}{3}$ cm **b)** $\frac{16\pi}{9}$ cm **c)** 8π cm

11 12 cm

12 $\frac{2}{\pi}$ cm

13 5π cm

14 $\frac{6\pi}{5}$ cm

15 50 voltas

16 16 cm

17 4 m

18 alternativa **e**

19 3,14 m

20 605 voltas

21 2π m

22 114°39′

23 20 cm

24 3,16049 e 3,14159

25 11 622,29 km

26 $(180 + 30\pi)$ m

27 Há 5 caminhos possíveis e todos medem 4π cm.

28 40π cm

29 **a)** 10 **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** 15 **d)** 64

30 0,16 m

31 16 cm e 9 cm

32 $2\sqrt{3}$

33 4 m e 12 m

34 10 cm, 2 cm e 18 cm

35 4 cm e 6 cm

36 $AB = 17$; $CD = 19$

37 $\frac{2r^2}{R - r}$

38 1 km

39 $\frac{1}{4}$

Capítulo 9

Página 231

1 alternativas **b** e **d**

2 alternativas **a** e **b**

3 **a)** $x = 52°$ **b)** $x = 2\sqrt{127}$

4 **a)** $x + y, y + z, z + w, w + x$
b) $x + y + z + w$
c) $y + z + w + x$
d) As somas das medidas dos lados opostos são iguais.

5 **a)** $x = 40°$; $y = 80°$
b) $x = 70°$; $y = 110°$

6 24

Página 236

1 alternativas **a**, **b** e **d**

3 $a_c = 36°$; $a_i = 144°$; $a_e = 36°$

4 **a)** $a_c = 120°$; $a_i = 60°$; $a_e = 120°$
b) $a_c = 90°$; $a_i = 90°$; $a_e = 90°$
c) $a_c = 60°$; $a_i = 120°$; $a_e = 60°$

5 **a)** decágono
b) eneágono
c) hexágono
d) quadrado
e) triângulo equilátero

6 15 lados

7 $a_e = 45°$; octógono

8 36°

Página 239

1 $\ell = 10\sqrt{2}$ cm; $a = 5\sqrt{2}$ cm

2 $5\sqrt{2}$ cm

3 **a)** $6\sqrt{2}$ cm **b)** 6 cm

4 $3\sqrt{2}$ cm

5 **a)** 22,56 cm **b)** 32 cm²

6 $\ell = 8\sqrt{3}$ cm; $a = 4$ cm

7 $r = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm; $a = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

8 $12\sqrt{3}$ cm

9 90 cm

10 $\ell = 12$ cm; $a = 6\sqrt{3}$ cm

11 60 cm

12 $r = 8$ cm; $a = 4\sqrt{3}$ cm

13 9 cm

14 **a)** $10\sqrt{3}$ cm **c)** 120°
b) 5 cm **d)** 15 cm

15 12 cm

16 $6\sqrt{2}$ cm

17 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18 **a)** 48 m **b)** 12 m

Página 240

1 12 cm

2 16 cm

3 8 cm

4 72 cm

Página 242 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 63 cm

2 $3(1 + 2\sqrt{3})$ cm

3 alternativa **d**

4 3 cm

5 0,36 dm

7 $\alpha = 30°$; $\beta = 120°$; $\gamma = 90°$

8 $36(1 + \sqrt{3})$ cm

9 decágono

10 $a_c = 15°$; $a_e = 15°$

11 4,5 cm

12 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14 $a_c = \frac{360°}{n}$; $a_i = \frac{180°(n - 2)}{n}$

Desafio: alternativa **a**

15 quadrado e dodecágono

Capítulo 10

Página 249

1 **a)** 16 u **b)** 32 u

2 **a)** 6 000 000 m² **d)** 0,00123 m²
b) 150 000 cm² **e)** 0,045 km²
c) 5 000 cm² **f)** 57 400 mm²

4 alternativas **b**, **c** e **e**

Página 252

1 300 cm²

2 40 mm

3 393,75 cm²

4 0,12 m²

5 5 m e 6 m
6 1 000 ladrilhos
7 5 cm e 9 cm
8 484 cm^2
9 40 m
10 **a)** 128 cm^2 **b)** 71,75 cm^2
11 100 cm^2
12 225 m^2
13 $\frac{1}{9}$
14 600 lajotas
15 10 000 placas de gramas
16 12 m
17 **a)** 1 075 mm^2 **b)** 1 140 mm^2
18 300 cm^2
19 750 mm^2
20 70 m^2
21 180 cm^2
22 4,5 cm^2

Página 256

1 150 cm^2
2 49 cm^2
3 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ m^2
4 28 m^2
5 12 m^2
6 $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ cm^2
7 $\frac{40}{3}$ m^2
8 $25\sqrt{3}$ cm^2
9 384 cm^2
10 3 cm
11 24 cm^2

Página 258

1 **a)** 16 cm^2 **b)** 500 cm^2 **c)** 72 cm^2
2 11 cm^2
3 **a)** 525 cm^2 **b)** 144 cm^2 **c)** 50 cm^2
4 46 m^2
5 5 m

Página 259

1 630 cm^2
2 **a)** 25 cm^2 **b)** 70 cm^2 **c)** 32 cm^2
3 **a)** 600 cm^2 **b)** 17,5 cm^2
4 96 m^2
5 40 cm
6 100 cm^2
7 80 cm^3

Página 260

1 **a)** $600\sqrt{3}$ cm^2 **b)** 110 cm^2
2 $36\sqrt{3}$ cm^2
3 747,36 cm^2
4 $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$

Página 262

1 81π m^2
2 $156{,}25\pi$ cm^2
3 81π cm^2
4 6 m
5 39π cm^2
6 64π cm^2
7 **a)** $\frac{50\pi}{3}$ cm^2 **c)** $31{,}25\pi$ cm^2
b) 3π m^2
8 $19{,}2\pi$ cm^2
9 21π cm^2
10 9,42 cm^2
11 círculo

Página 264 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 alternativa **c**

Desafio: $a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

2 18π m^2
3 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm
4 50
5 $\frac{100}{11}$%
6 25 m
7 50 cerâmicas
8 1 728 cm^2
9 alternativa **b**
10 alternativa **d**
11 2π cm^2 e 2π cm^2
12 πa^2
13 $28\sqrt{3}$ cm^2
14 100 cm^2
15 3 cm^2
16 48 cm^2
17 1,6 dm^2
18 8,5 m^2
19 96%
20 30 cm^2

Desafio: 1 m^2

21 $2\sqrt[4]{3}$
22 $\frac{1}{4}$
23 **a)** $9(4 - \pi)$ **f)** $\frac{25}{2}\pi$
b) $9\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ **g)** $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$
c) $4 - \pi$ **h)** 40π
d) $16\left(\sqrt{3} + \pi\right)$ **i)** $\frac{3\pi}{4}$
e) $\ell^2\left(\frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}\right)$ **j)** $25\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
24 $27\sqrt{3}$ cm^2
25 $24\sqrt{3}$ m^2
26 alternativa **e**
27 576

Desafio: $\frac{b \cdot c}{2}$

Capítulo 11

Página 273

1 R$ 717,50
2 R$ 320,00
3 R$ 425,00
4 R$ 1 800,00
5 R$ 1 050,00
6 R$ 2 251,20

Página 275

1 R$ 1 280,00 e R$ 21 280,00
2 R$ 5 800,00
3 20 meses, ou 1 ano e 8 meses
4 1% a.m.
5 12,5 meses, ou 12 meses e meio, ou 12 meses e 15 dias
6 100 meses
7 R$ 1 200,00
8 0,2%
9 R$ 3 200,00
10 250 meses

Página 280

1 R$ 10 241,93
2 R$ 8 800,00
3 R$ 909,03
4 **a)** R$ 3 200,00 **b)** R$ 3 238,61
6 R$ 102 805,81

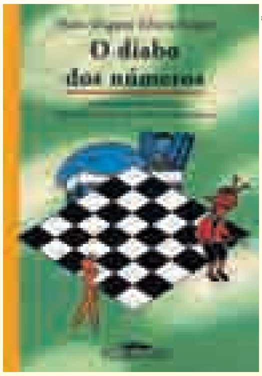
Página 282 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 R$ 77 000,00
2 R$ 6 200,00
3 25%
4 2,2%
5 2,18%
6 alternativa **c**
7 alternativa **d**
8 50 meses
9 R$ 60 000,00
10 1,89
11 R$ 11 664,00
12 **a)** R$ 1 359 000,00
b) R$ 459 000,00
13 alternativa **c**
14 **a)** R$ 0,29 **b)** R$ 0,65
15 R$ 3 688,07
16 alternativa **d**

O diabo dos números

Hans Magnus Enzensberger
São Paulo: Companhia das Letras, 1997
272 páginas

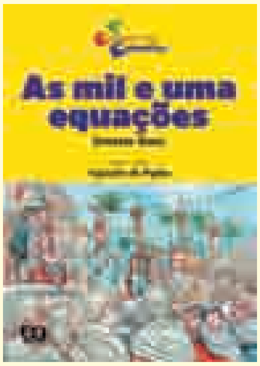


REPRODUÇÃO

Robert é um menino que detesta tudo o que se relaciona à Matemática e acha que aquela montanha de cálculos não serve para nada. Mas um dia ele começa a sonhar com um certo Teplotaxl, um diabo que brinca e faz mil malabarismos com a Matemática. A cada sonho, Teplotaxl cria brincadeiras tão interessantes que os números passam a ficar claros e diabolicamente divertidos para Robert.

As mil e uma equações

Ernesto Rosa
São Paulo: Ática, 2002
69 páginas



REPRODUÇÃO

As mil e uma equações narra as aventuras de três amigos, Ahmed, Kamal e Najla, que enfrentam ladrões e assassinos pelos desertos da Arábia, onde quase viram comida de abutres. No caminho de volta à cidade, eles conhecem o famoso matemático Omar Ibn Sinan, que propõe divertidas recreações matemáticas. O livro apresenta questões práticas e desafiadoras, levando os personagens a desenvolver uma fórmula – a famosa fórmula de Bhaskara – e a resolver equações do 2º grau.

Contando a história da matemática – Jogando com a Matemática

Oscar Guelli
São Paulo: Ática, 1999
56 páginas

REPRODUÇÃO

O livro apresenta jogos e desafios matemáticos que abordam o sistema de numeração decimal, os divisores de um número, as regras de divisibilidade e problemas de aritmética, entre outros conteúdos.

Medindo comprimentos

Nílson José Machado
São Paulo: Scipione, 2000
48 páginas

REPRODUÇÃO

O livro apresenta as diferentes maneiras de medir, por meio de um panorama histórico sobre a necessidade de estabelecer padrões, surgida há milênios. O autor, especialista na área, aborda as primeiras medidas, baseadas no corpo humano, e também aquelas que foram adotadas como padrões universais. De fácil leitura, a obra enriquece os conhecimentos matemáticos e traz muitas curiosidades sobre o assunto.

BIBLIOGRAFIA

Almanaque Abril 2013: Brasil. São Paulo: Abril, 2013.

Asger Aaboe. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Bernard H. Gundlach. *Números e numerais*. São Paulo: Atual, 2005. (Tópicos de história da Matemática para uso em sala)

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brian Bolt. *Actividades matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991.

Carl Benjamim Boyer. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; Edusp, 2012.

Constance Kamii. *Reinventando a Aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1995.

Delia Lerner Zunino. *A Matemática na escola*: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 2003.

Dicionário Enciclopédico Tudo. São Paulo: Nova Cultural, 1979.

Dione Lucchesi de Carvalho. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2009.

Elon Lages Lima. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

Ernesto Rosa Neto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 2010.

Georges Ifrah. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

______. *Os números*: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1998.

George Polya. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Howard Eves. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

Luiz Márcio Imenes. *A numeração indo-arábica*. São Paulo: Scipione, 1990. (Coleção Vivendo a Matemática)

Luiz Roberto Dante. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

Luzia Faraco Ramos. *O que fazer primeiro?* São Paulo: Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática)

Malba Tahan. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

______. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2012.

______. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

Maria Cristina S. A. Maranhão. *Matemática*. São Paulo: Cortez, 1994.

Marilia Centurión. *Conteúdo e metodologia da Matemática*: números e operações. São Paulo: Scipione, 1998.

Martin Gardner. *Matemática, magia e mistério*. Trad. Jorge Lima. Lisboa: Gradiva, 1991.

Milton Zaro. *Matemática experimental*. São Paulo: Ática, 1996.

Oscar Guelli. *Contando a história da Matemática*. São Paulo: Ática, 1999.

Paul Karlson. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

Pierre Berloquin. *100 jogos geométricos*. Lisboa: Gradiva, 2005.

Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática.

Rômulo C. Lins; Joaquim Gimenez. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LISTA DE SIGLAS

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática

Suplemento com orientações para o professor

9º ano

Sumário

Orientações gerais

Orientações para o desenvolvimento dos capítulos

APRESENTAÇÃO

Professor

Esta coleção tem como objetivo principal servir de apoio didático para suas aulas. No Guia Didático (Manual do Professor) você encontra algumas reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática na Escola Básica.

Observe que falamos de "ensino e de aprendizagem", separadamente, sem o hífen muitas vezes utilizado: ensino-aprendizagem. Entendemos que são processos que se articulam, mas são distintos – processo de ensino + processo de aprendizagem. O ensino pode ocorrer sem que ocorra a aprendizagem e a aprendizagem pode ocorrer sem que ocorra o ensino. Na escola, buscamos sempre que esses dois processos andem juntos, se completem, e esse pressuposto guia a organização desta coleção. Lembramos você, professor, que a escolha do livro didático é muito importante, e que deve ser feita sempre a partir do conhecimento de sua realidade escolar. E já que escolheu trabalhar com esta coleção, queremos ajudá-lo a atingir seus objetivos didáticos, valorizando sua autonomia didática na organização e gestão de suas aulas.

Com isso, o papel do professor – seu papel – é de fundamental importância. E nosso papel, oferecendo esta coleção como ferramenta de trabalho, é fomentar situações que lhe permitam sempre enriquecer suas aulas e, em consequência, favorecer as condições de aprendizagem dos seus alunos.

Neste guia trataremos de aspectos da abordagem dos conteúdos, do uso de calculadoras e *softwares*, mas também do uso de materiais concretos, sempre no intuito de enriquecer a gama de materiais didáticos disponíveis. Um tópico importante para reflexão é a avaliação da aprendizagem: vamos articular os objetivos gerais da aprendizagem com a ideia de avaliação e os possíveis instrumentos a serem utilizados. Apresentaremos também sugestões de leituras que permitirão a você, professor, aprofundar-se em suas reflexões.

O professor é o grande mediador na relação entre o aluno e a Matemática escolar: ele planeja, organiza, elabora as situações de aprendizagem, faz a gestão dessas situações, sempre buscando que seus alunos construam conhecimentos que lhes ajudarão em situações presentes e futuras, tanto no âmbito escolar como em suas vidas fora dos muros da escola. Não podemos esquecer também que o objetivo da aprendizagem escolar é a formação humana integral e que por esse motivo é necessário também levar em consideração a vida pessoal e profissional dos alunos. Ferreira (2006)[1] defende que a escola deve promover o desenvolvimento humano, conectando todos os conhecimentos, sejam de ordem cotidiana, sejam de ordem científica. Na organização desta coleção, tanto na parte destinada ao aluno como na parte específica para o professor, assumimos também essa defesa.

Para construir este Guia Didático, visando auxiliar na utilização desta coleção, baseamo-nos nos princípios da Educação Matemática, que é uma área que estuda os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, ou seja, partimos da compreensão de que a Matemática feita pelos matemáticos é diferente da matemática a ser trabalhada na escola.

1 FERREIRA, L. R. Matemática Escolar: conceitos do cotidiano na vida profissional. In: *ZETETIKÉ*, v. 14, n. 26. jul./dez. FE/Unicamp. 2006.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012)[2], os estudos feitos no campo da Educação Matemática têm como perspectiva "o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor" (p. 4). Nesse sentido, esta coleção visa tal formação e considera que não se pode confundir a aplicação de algoritmos com o fazer matemático, pois a Matemática vai muito além. Dessa forma, apresentamos a Matemática escolar de forma que o aluno possa crescer em sua aprendizagem, aprender a pensar matematicamente, resolver problemas diversos, mas sempre no espectro da Matemática escolar.

Neste guia, convidamos você a refletir conosco sobre o "como trabalhar" com os conteúdos da Matemática escolar selecionados para cada ano das séries finais do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS GERAIS DA COLEÇÃO

Ao escolhermos e organizarmos os conteúdos a serem abordados ao longo dos quatro anos desse ciclo escolar, tivemos a preocupação de proporcionar aos alunos as melhores condições para construção dos conhecimentos matemáticos esperados para essa faixa de escolaridade. Pautamo-nos nos objetivos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998)[3], que pode ser consultado a qualquer momento por todos os que se interessam e se preocupam com o ensino e a aprendizagem nessa área do saber.

Dentre os objetivos gerais para o Ensino Fundamental, anunciados nos PCN, destacamos três deles:

- utilizar as diferentes linguagens – verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar as produções culturais e usufruir delas, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Fundamentados nesses objetivos (sem esquecer os demais, logicamente) e nos anunciados para cada ciclo do Ensino Fundamental, adotamos nesta coleção, o objetivo principal de desenvolver as competências necessárias para a aprendizagem da Matemática e para a formação integral do aluno, tal como abordamos na apresentação da obra. Para isso, buscamos construir elementos que permitam desenvolver o pensamento e o raciocínio matemático, construindo habilidades para a resolução de problemas, para a comunicação matemática e para a análise críticas de situações diversas do cotidiano.

ORGANIZAÇÃO

Esta coleção é organizada em quatro volumes, que são dispostos em capítulos e tópicos. O tema do capítulo, apresentado em página dupla, permite ao professor provocar questionamentos sobre o que será desenvolvido, por meio de associações com situações da realidade.

---

2 FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª. edição revisada. Campinas: Editores Associados, 2012.

3 BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

A abertura de cada capítulo sempre traz uma proposta de questionamento no quadro “É hora de observar e discutir”. Em seguida, o capítulo apresenta a seção “Trocando ideias”, na qual o tema é abordado por meio de exemplos de aplicação, com contextos de situações da realidade como também da própria matemática.

Essa forma de primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado permite ao professor inserir atividades diversas a cada capítulo: pesquisas, jogos, entre outras opções. É também uma oportunidade para desencadear um debate com os alunos, visando identificar os conhecimentos prévios para que estes sejam o ponto de partida para a construção de novos saberes.

Um exemplo é a abordagem das operações com números naturais: os alunos já possuem algum conhecimento construído ao longo dos anos anteriores e, retomá-los, permite ao professor fazer um trabalho mais significativo para o aluno.

Após a abertura e a seção “Trocando ideias”, seguem os tópicos, que desenvolverão o conteúdo organizado de forma que o aluno aprenda paulatinamente. O número de tópicos varia a cada capítulo. Nesses tópicos são apresentados definições, propriedades, exemplos e situações que permitem maior detalhamento, para em seguida propor as atividades a serem resolvidas pelos alunos. Em alguns tópicos, são apresentadas também as seções “Lendo e aprendendo” e “Um pouco de história”, com o objetivo de enriquecer a aprendizagem.

Os capítulos são finalizados com atividades que permitem ao aluno um aprofundamento – “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”. A seção “Resolvendo em equipe” traz um problema a ser resolvido pelos alunos organizados em grupos, com orientação para as etapas de resolução: interpretação e identificação de dados, plano de resolução, resolução, verificação, apresentação.

O trabalho em equipe é muito importante sob diversos pontos de vista: permite ao aluno aprender pela troca com os colegas; explicitar seus conhecimentos e dúvidas, facilitando a ação do professor, validar o raciocínio construído por meio do diálogo com os colegas da equipe. Além disso, saber trabalhar em equipe é uma competência exigida nas mais diversas profissões de diferentes áreas.

O uso de tecnologias é uma prerrogativa do professor e uma realidade no mundo de hoje. Algumas atividades propostas na coleção orientam para o uso de calculadoras. É importante que os alunos se apropriem de seu uso, utilizando-as como ferramenta para descoberta de estratégias na resolução das atividades propostas – estratégias distintas daquelas apresentadas na coleção. Valoriza-se assim também o desenvolvimento da criatividade, entre outras habilidades e competências visadas ao longo da vida escolar do aluno.

MATEMÁTICA ESCOLAR

Usualmente lemos ou escutamos frases como “aprender matemática é importante para o desenvolvimento do raciocínio”, e outras com os mesmos pressupostos. Realmente, essa é uma verdade, que, para ser compreendida, precisa ser mais bem analisada. Em pesquisa realizada, Maciel (2009)[4] comprova a importância da Matemática na formação do cidadão. A autora afirma:

> *Desse estudo concluiu-se que o ensino da Matemática é um dos elementos fundamentais para a formação social e intelectual do aluno, fazendo deste um ser humano dotado de conhecimento, possuidor da capacidade de evoluir culturalmente, se tratando de um cidadão apto e preparado para lidar com as mudanças da sociedade. Assim sendo imprescindível o desenvolvimento da autonomia, da criticidade, da criatividade e da capacidade de argumentação, assim se comprovou a importância do ensino da Matemática como componente curricular. (p. 1)*

4 MACIEL, M. V. A importância do ensino da Matemática na formação do cidadão. In: *Revista da Graduação*. EdiPUCRS. 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/6058>. Acesso em: maio 2015.

A Matemática escolar difere da Matemática acadêmica pelo grau de profundidade da abordagem: a Matemática feita pelos matemáticos tem características que não se adequam às atividades para descoberta e aprendizagem. O conhecimento matemático passa, assim, por transformações que resultam em um conjunto de saberes escolares, acessíveis aos alunos. É o que Chevallard (1991)[5] chama de transposição didática: toda transformação sofrida por um saber para que este se adapte a uma instituição (nesse caso, a escola).

Tais transformações são demandadas e trabalhadas pelos que concebem currículos e propostas curriculares, pelas instituições de ensino, pelos autores de livros didáticos, pela sociedade, pelos pais etc. Os resultados são apresentados nas propostas curriculares, nos livros didáticos, e são trabalhados pelos professores em sua sala de aula, completando o ciclo de transformações: de saber científico a saber ensinado.

Os conteúdos abordados nesta coleção encaixam-se nessa perspectiva: fazem parte do conjunto de conteúdos da Matemática escolar, da Matemática a ser aprendida pelos alunos durante sua escolaridade, sem perder de vista o saber de referência, ou seja, a Matemática em sua dimensão de saber científico.

APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A Matemática trabalhada no Ensino Fundamental não tem um fim em si mesma: além de aprofundar e sistematizar aprendizagens anteriores, abre também as portas para novas aprendizagens, considerando as diversas áreas do saber, contribuindo para o desenvolvimento intelectual do aluno. O conhecimento matemático é, assim, o objeto de estudo nas aulas de Matemática, para que possa ser a ferramenta de trabalho tanto na resolução de problemas matemáticos como na construção de novos conhecimentos oriundos tanto da ciência como do cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil 1998) afirmam que "a seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos" (p. 49). Consideram-se aqui conceitos, procedimentos e atitudes.

Nesta coleção, a seleção dos conteúdos foi feita nessa perspectiva, e as abordagens propostas pressupõem desenvolvimento de atitudes importantes na formação do aluno. Escolhemos abordar conceitos e procedimentos (seleção e abordagem) tanto como forma de aprofundamento, de revisita aos conhecimentos prévios dos alunos, como iniciando a construção de novos conhecimentos a serem consolidados em anos posteriores de escolaridade.

O professor pode acrescentar atividades, questionamentos, de modo a atender as especificidades de suas turmas: o livro didático nunca pode ser uma amarra para o professor, deve ser um facilitador de seu trabalho. O Guia Didático traz diversas sugestões que o professor poderá ou não utilizar, sempre a partir do conhecimento de seus alunos e do currículo da escola. A busca é e será sempre por um aprendizado não mecanizado, um aprendizado que permita a construção de significados e, portanto, de articulações entre conteúdos, áreas da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

5 CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 1 – Números naturais e sistemas de numeração Sistemas de numeração Sistema de numeração decimal Os números naturais Igualdade e desigualdade A reta numérica e os números naturais Leitura e escrita de um número natural	**Capítulo 1 –** Números inteiros Números inteiros Reta numérica Módulo de um número inteiro Números opostos ou simétricos Comparação de números inteiros Adição de números inteiros Subtração de números inteiros Multiplicação de números inteiros Divisão exata de números inteiros Potenciação em que a base é um número inteiro Raiz quadrada exata de números inteiros Expressões numéricas	**Capítulo 1 –** Números reais Números naturais, números inteiros e números racionais Números irracionais Números reais	**Capítulo 1 –** Potenciação e radicais Potência de um número real com expoente inteiro Raiz enésima de um número real Simplificação de radicais Radicais semelhantes Adição e subtração de radicais Multiplicação de radicais Divisão de radicais Potenciação e radiciação de radicais
Capítulo 2 – Operações com números naturais Adição com números naturais Algumas propriedades da adição Subtração com números naturais Relação fundamental da subtração Expressões numéricas com adições e subtrações Multiplicação com números naturais Algumas propriedades da multiplicação Divisão exata com números naturais Expressões numéricas com as quatro operações Divisão não exata	**Capítulo 2 –** Números racionais Números racionais Representação dos números racionais na reta numérica Módulo de um número racional Oposto de um número racional Comparação de números racionais Adição e subtração de números racionais Multiplicação de números racionais Divisão de números racionais Potenciação de números racionais Raiz quadrada de números racionais Expressões numéricas	**Capítulo 2 –** Potenciação e radiciação de números reais Potenciação Radiciação	**Capítulo 2 –** Equações do 2º grau Equação do 2º grau com uma incógnita Raiz de uma equação do 2º grau Resolução de equações do 2º grau Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau Resolução de problemas Sistemas de equações

Números e operações

Álgebra

Geometria

Tratamento da informação

Grandezas e medidas

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 3 – Outras operações com números naturais Potenciação com números naturais Propriedades da potenciação Radiciação de números naturais Expressões numéricas com números naturais	**Capítulo 3 –** Expressões algébricas e sentenças matemáticas Expressões algébricas Valor numérico de uma expressão algébrica Termos algébricos Sentenças matemáticas	**Capítulo 3 –** Monômios e polinômios Expressões algébricas Monômio Adição e subtração de monômios Multiplicação de monômios Divisão de monômios Potenciação de monômios Polinômio Adição de polinômios Subtração de polinômios Multiplicação de polinômios Divisão de polinômios	**Capítulo 3 –** Função afim Ideia de função Representação gráfica de uma função Função afim
Capítulo 4 – Figuras geométricas espaciais Sólidos geométricos Poliedros Corpos redondos Planificação da superfície de sólidos geométricos Vistas	**Capítulo 4 –** Equações do 1º grau com uma incógnita Equações Raiz de uma equação Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita Resolução de problemas	**Capítulo 4 –** Produtos notáveis e fatoração Produtos notáveis Fatoração	**Capítulo 4 –** Funções quadráticas Função quadrática Gráfico de uma função quadrática Ponto de mínimo e ponto de máximo de uma função quadrática
Capítulo 5 – Múltiplos e divisores Múltiplos de um número natural Divisores de um número natural Critérios de divisibilidade Número 1, números primos e números compostos Decomposição em fatores primos Máximo divisor comum (mdc) Mínimo múltiplo comum (mmc)	**Capítulo 5 –** Inequações do 1º grau com uma incógnita Desigualdades Inequações equivalentes Resolução de uma inequação do 1º grau	**Capítulo 5 –** Retas e ângulos Retas Segmento de reta Ângulo Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	**Capítulo 5 –** Estatística e probabilidade Processo estatístico Construção de gráficos Determinação de parâmetros Probabilidade

Números e operações

Álgebra

Geometria

Tratamento da informação

Grandezas e medidas

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 6 – Frações A ideia de número fracionário Leitura de frações Comparando frações com o inteiro Número misto Frações equivalentes Simplificação de frações Comparação de frações Fração de uma quantidade Adição e subtração de frações Multiplicação de frações Divisão de frações Potenciação e raiz quadrada de frações Expressões numéricas	**Capítulo 6 –** Ângulos O ângulo e seus elementos Medida de ângulo Transformação de unidades Operações com medidas de ângulos Ângulos congruentes Ângulos adjacentes Bissetriz de um ângulo Ângulos complementares Ângulos suplementares Ângulos opostos pelo vértice	**Capítulo 6 –** Polígonos e simetria Polígonos Diagonais de um polígono Ângulos internos e ângulos externos de um polígono Simetria	**Capítulo 6 –** Segmentos proporcionais e semelhança Razão entre segmentos e segmentos proporcionais Teorema de Tales Teorema da bissetriz interna Semelhança Triângulos semelhantes Homotetia
Capítulo 7 – Números decimais Décimos, centésimos e milésimos Leitura dos números decimais Comparação de números decimais Adição e subtração com números decimais Multiplicação com números decimais Divisão com números decimais Decimais exatos e dízimas periódicas Expressões numéricas com números decimais	**Capítulo 7 –** Razão Razão Razão entre grandezas de mesma natureza Razão entre grandezas de naturezas diferentes	**Capítulo 7 –** Frações algébricas e equações fracionárias Frações algébricas Simplificação de fração algébrica Redução de frações algébricas ao mesmo denominador Adição e subtração de frações algébricas Multiplicação de frações algébricas Divisão de frações algébricas Equações fracionárias	**Capítulo 7 –** Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas Projeções ortogonais Triângulo retângulo Teorema de Pitágoras e aplicações Razões trigonométricas no triângulo retângulo As razões trigonométricas de 30°, 45° e 60° Tabela de razões trigonométricas Resolução de problemas
Capítulo 8 – Porcentagem, possibilidades e Estatística Porcentagem Cálculo do número de possibilidades Estatística	**Capítulo 8 –** Probabilidade e Estatística O que é probabilidade? Cálculo de probabilidades Estatística Média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda	**Capítulo 8 –** Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas Par ordenado Equação do 1º grau com duas incógnitas Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas Resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas	**Capítulo 8 –** Circunferência, arcos e relações métricas O comprimento da circunferência Medida de um arco de circunferência Relações métricas em uma circunferência

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 9 – Figuras geométricas planas Representação de ponto, reta e plano Semirreta e segmento de reta Ângulos Posições entre duas retas no plano Polígonos Triângulos Quadriláteros Circunferência e círculo	**Capítulo 9 –** Proporção Proporção Propriedade fundamental das proporções Sequências de números diretamente proporcionais Sequências de números inversamente proporcionais	**Capítulo 9 –** Estatística e probabilidade Estatística Gráficos de segmentos e de barras Gráfico de setores Cartograma e pictograma Probabilidade	**Capítulo 9 –** Polígonos regulares Polígonos Polígonos regulares Relações métricas nos polígonos regulares
Capítulo 10 – Medidas de comprimento e de tempo Metro Conversão de unidades Perímetro de um polígono Horas, minutos e segundos	**Capítulo 10 –** Grandezas e regra de três Grandezas proporcionais Regra de três simples Regra de três composta	**Capítulo 10 –** Triângulos Triângulo Classificação de triângulos Cevianas notáveis Casos de congruência de triângulos Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo Propriedades dos triângulos isósceles Propriedades dos triângulos retângulos	**Capítulo 10 –** Área de figuras planas Área Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo Área do triângulo Área do trapézio e do losango Área de um polígono regular Área do círculo
Capítulo 11 – Medidas de superfície e de volume Metro quadrado Área do retângulo e área do quadrado Metro cúbico Volume do paralelepípedo e do cubo	**Capítulo 11 –** Porcentagem e juro simples Porcentagem Cálculo de acréscimos e descontos Juro simples	**Capítulo 11 –** Quadriláteros Quadriláteros Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo Paralelogramos Trapézios	**Capítulo 11 –** Matemática comercial e financeira Operações sobre mercadorias Juro simples Juro composto
Capítulo 12 – Medidas de capacidade e de massa Litro Quilograma		**Capítulo 12 –** Circunferência e círculo Circunferência e círculo Posições de um ponto em relação a uma circunferência Posições de uma reta em relação a uma circunferência Posições relativas de duas circunferências Segmentos tangentes Arco de circunferência e ângulo central Ângulo inscrito	

Números e operações
Álgebra
Geometria
Tratamento da informação
Grandezas e medidas

No que se refere aos conteúdos relacionados ao bloco de conhecimentos **Números e Operações**, espera-se que o aluno perceba seus diferentes usos e significados ao longo de sua escolaridade, ampliando o conhecimento construído em anos anteriores. As operações e suas propriedades são trabalhadas de forma gradativa, a cada conjunto numérico abordado: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

A apresentação dos conteúdos se inicia sobre a abordagem dos sistemas de numeração, para depois apresentar o sistema de numeração decimal e o conjunto dos números naturais. A partir daí, apresentam-se os demais conteúdos, sistematicamente e sem que cada tópico ou capítulo esgote o conteúdo. O objetivo principal é a atribuição de significados: o cálculo é importante, mas a compreensão dos resultados obtidos na resolução de um problema, ou mesmo ao final de um procedimento, deve ser a meta principal do processo de ensino e de aprendizagem.

Os PCN de Matemática para o terceiro e quarto ciclos (Brasil, 1998), orientam para que

> *O trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações. (p. 95-96)*

Nossa opção pela atribuição de significados se reflete não apenas ao longo dos capítulos, mas também nas orientações didáticas presentes na parte específica deste manual.

O campo da **Álgebra** é abordado a partir do volume destinado ao 7º ano, buscando uma articulação com o campo de Números e Operações: inicia-se com as expressões algébricas. Ao longo dos quatro anos finais do Ensino Fundamental, a Álgebra caracteriza-se como um espaço bastante significativo para o desenvolvimento dos processos de abstração e de generalização, o que é assinalado nos PCN.

Nesse aspecto, destaca-se a importância de que o ensino dos conteúdos desse bloco não se limite à repetição de algoritmos. É necessário que o aluno desenvolva ferramentas para resolver problemas: os exercícios de fixação são importantes, mas não devem se constituir em abordagem principal.

A formalização excessiva também é evitada ao longo desta coleção: a construção dos conhecimentos se faz paulatinamente. Assim, os primeiros contatos com a Álgebra acontecem no 7º ano (nesta coleção) e, assim como para os demais blocos de conteúdo, os temas não se esgotam, de forma a contribuir com o amadurecimento dos alunos para que, ao terem contato com a formalização, possam atribuir significados a ela.

Os PCN apresentam (p. 116) uma síntese com os significados da Álgebra a serem desenvolvidos nos ciclos finais do Ensino Fundamental:

Álgebra no Ensino Fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variações de grandezas	Resoluções de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

A percepção de padrões contribui bastante para a compreensão dos procedimentos, por exemplo, para a operação entre monômios, entre polinômios, para o desenvolvimento de expressões algébricas, para o trabalho com as funções: a introdução das letras como variável, como incógnita ou como símbolo pode ser trabalhada a partir da observação de padrões, antes que se apresentem os algoritmos.

A utilização de calculadoras, planilhas e *softwares* para o ensino da Matemática também favorece a construção de significados: a construção de gráficos, por exemplo, pode ser extremamente favorecida pelo uso de ambiente computacional.

O papel da **Geometria** é fundamental na construção do conhecimento matemático pelo aluno. O conhecimento nessa área é trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade, e se aprofunda no Ensino Fundamental II, em uma articulação desejável entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial. A utilização de *softwares* e de materiais concretos permite facilitar a compreensão pelo recurso da visualização, da manipulação das figuras geométricas, permite avançar no estudo do espaço, das formas, das grandezas relacionadas e suas medidas. As construções com régua e compasso ampliam e aprofundam as relações construídas pelos alunos.

Nesse contexto se insere a abordagem das transformações geométricas, do estudo das vistas e da percepção espacial, dos deslocamentos no plano e sistema cartesiano. A resolução de problemas é um cenário potencial para essa abordagem. Os primeiros passos na argumentação e na demonstração são dados também nesse cenário da Geometria. No entanto, deve-se evitar ainda nessa fase de escolaridade o excesso de formalização: a construção do pensamento geométrico é um processo não linear, que está em constante crescimento ao longo da vida escolar do aluno.

O campo designado por **Tratamento da Informação** é bastante propício ao desenvolvimento de atividades lúdicas e de atividades que trabalhem profundamente com a criticidade dos alunos: são trabalhadas no Ensino Fundamental algumas ferramentas que auxiliam na compreensão de notícias, de dados fornecidos pelas diversas mídias, de dados referentes à vida cotidiana pessoal do aluno e da família. Amplia-se, assim, um cenário de construção da cidadania.

A coleta de dados e sua organização em gráficos e tabelas são uma etapa anunciada pelas pesquisas na área como fundamental para que os alunos aprendam a mobilizar correta e adequadamente seus conhecimentos para análise estatística desses dados coletados. O objetivo será sempre responder a um questionamento por meio da análise desses dados.

Aprofunda-se também a discussão que permite distinguir o aleatório do determinístico. Nesse sentido, o estudo da probabilidade por meio de experimentações e simulações é bastante favorecido. O professor tem a possibilidade de utilizar tanto materiais concretos (jogos ou mesmo materiais construídos com os alunos, que possam ser utilizados para realização de sorteios aleatórios e simulações) como *softwares* livres (por exemplo, o GeoGebra). O objetivo deve ser a construção de estimativas plausíveis para resultados de experimentos aleatórios.

A leitura estatística e probabilística dos fatos que nos cercam fornece importantes elementos para decisões no campo pessoal, nutricional, de investimentos, de segurança, de confiabilidade em processos de qualidade, em processos de pesquisa de opinião, entre muitas outras. A percepção e a apreensão da variação dos dados coletados nos diversos contextos que se quer analisar são objetivos centrais no estudo dos conteúdos ligados ao Tratamento da Informação.

Os conteúdos relacionados ao campo das **Grandezas e Medidas** podem ser abordados em articulação com os demais campos da Matemática escolar. Contextos ligados ao cotidiano do aluno fornecem elementos para que o professor possa trabalhar tais conteúdos em sala de aula, sem desvincular a Matemática da realidade do aluno. A compreensão das diversas grandezas e das medidas que se associam, destacando a discussão sobre as mudanças de unidades e os efeitos de tais mudanças na análise dos resultados observados na resolução das atividades propostas, é fundamental para a aprendizagem conceitual da Matemática. Nesse sentido, destaca-se o papel do trabalho com os instrumentos de medida.

Os PCN destacam o importante papel do estudo das Grandezas e Medidas, uma vez que favorece articulações "intra" e "extra" Matemática. Destacam sua utilização em contextos diversos e que permitirão que sejam retomados, discutidos e ampliados procedimentos de medidas, discutindo a comparação com padrões determinados – geométricos ou não:

> *(...) Além disso, como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais (utilização de bússolas e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas etc.). As medidas também são necessárias para melhor compreensão de fenômenos sociais e políticos, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos Temas Transversais. (p. 128)*

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A abordagem de episódios da História da Matemática permite aos alunos a percepção de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada. Ela se desenvolveu ao longo do tempo e ainda está em desenvolvimento. Pequenos textos que trazem informações sobre fatos e pessoas ligadas ao seu desenvolvimento permitem ao professor promover discussões e sugerir pesquisas aos alunos, com objetivo de ampliar os horizontes da aprendizagem matemática.

Por exemplo, no estudo de conteúdos da Geometria, o desenvolvimento de pesquisas que permitam conhecer elementos sobre sua história, sobre os locais nos quais a Geometria se desenvolveu, sobre as características sociais, geográficas, pode contribuir para a compreensão do contexto no qual o objeto matemático em estudo se desenvolveu.

A aprendizagem matemática tem, assim, como ferramenta didática disponível, a história da Matemática, junto à resolução de problemas à modelagem. Não cabe ao livro didático fazer um estudo aprofundado da história, mas sim promover elementos que servirão como ponto de partida para complementação e aprofundamento dos conteúdos abordados.

AS TECNOLOGIAS E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A utilização das diversas tecnologias de aprendizagem na aula de Matemática permite uma expansão das oportunidades de construção de conhecimento. Particularmente citando a calculadora e os *softwares* para aprendizagem da Matemática, que permitem a ampliação na busca de novas estratégias para resolução de problemas.

> *A utilização e a exploração de aplicativos e/ou softwares computacionais em Matemática podem desafiar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos, conduzindo-o a uma mudança de paradigma com relação ao estudo, na qual as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas passem a ser objeto de estudo. (AGUIAR, 2008, p. 64)*[6]

A prontidão para a atuação profissional compreende o conhecimento de diversas tecnologias e linguagens, e a escola é um dos ambientes mais propícios para a construção de tal conhecimento. Não cabe ao Ensino Fundamental o preparo de mão de obra especializada, como podemos encontrar nos PCN. No entanto, "é papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola

6 AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. In: *VÉRTICES*, v. 10, n. 1/3, jan./dez. 2008. Disponível em: <www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/outros/Aguiar_Rosane.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

e sociedade, conhecimento e trabalho, e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres". (p. 27).

AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

A avaliação é um momento fundamental no processo de ensino. Ela é um instrumento norteador do trabalho docente: "O que avaliar? Como avaliar?".

Esses questionamentos permitem ao professor identificar possíveis dificuldades dos alunos, podendo construir atividades para sua superação. A avaliação permite rever e redesenhar os caminhos para que a aprendizagem seja alcançada: e não vamos confundir a atribuição de uma nota com o acompanhamento do processo de aprendizagem visado.

Faz-se necessário o conhecimento dos alunos, de suas características relativas à aprendizagem matemática. É preciso identificar elementos que permitam ao professor estabelecer e reavaliar metas, processos, planejar atividades adequadas para a introdução, para o aprofundamento e para a avaliação da aprendizagem desses alunos. Cada um deles tem seu próprio ritmo que deve ser considerado: o tempo didático e o tempo cronológico não correm da mesma forma, o que muitas vezes explica dificuldades detectadas.

Não se trata de individualizar o ensino, mas de buscar as melhores formas de fazer a gestão das situações de aprendizagem e, em paralelo, das situações de avaliação. Estas acontecem continuamente, a cada aula, a cada momento.

Vários são os instrumentos que permitem ao professor obter as informações necessárias para o melhor planejamento, assim como atender à necessidade de quantificação da aprendizagem: atribuir uma nota ou um conceito. Destaca-se a importância da utilização de vários instrumentos simultaneamente, de forma a melhorar as oportunidades para que o aluno mostre efetivamente o que aprendeu (ou não aprendeu e precisa ser retomado pelo professor). Por exemplo: provas, relatórios, autoavaliação, trabalhos em equipe etc.

Cabe ao professor, a partir do conhecimento de suas turmas, escolher os instrumentos mais adequados aos objetivos fixados em seu plano de ensino. Algumas dessas medidas são subjetivas, mas os critérios a serem utilizados devem ser explicitados aos alunos.

Busca-se assim "uma proposta de avaliação flexível, contínua e formativa, identificando os principais problemas que interferem na obtenção de resultados, despertando o interesse dos alunos em relação à aplicação prática dos conhecimentos matemáticos adquiridos, bem como interpretar as informações coletadas na pesquisa de campo". (OLIVEIRA, 2012, p. 2)[7]

Destaca-se a necessidade de não limitar a avaliação aos aspectos cognitivos, uma vez que a formação do aluno deve ser a mais completa: aspectos comportamentais, atitudinais, também são considerados. Lembramos que um objetivo a ser fixado é o de uma educação democrática, inclusiva, e a avaliação tem papel fundamental nesse processo.

Para a elaboração do plano de avaliação, deve-se considerar os objetivos anunciados para cada unidade e o objetivo geral do ensino da Matemática em cada um dos níveis de escolaridade. Uma listagem desses objetivos permite sua operacionalização e, a partir daí, escolhem-se os melhores instrumentos.

7 OLIVEIRA J. C. G. *Os novos paradigmas para uma avaliação do ensino matemático*. Disponível em: <www.uems.br/eventos/semana2012/arquivos/49_2012-09-28_15-29-18.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

Veja a seguir uma sugestão de listagem, que considera não apenas os aspectos cognitivos específicos, mas também os atitudinais. Observe que a construção da autonomia é um objetivo perene, que acompanha toda a formação do aluno.

Meu aluno é capaz de:

- "enfrentar" a resolução do problema;
- entender o contexto das atividades propostas;
- compreender o texto das atividades propostas;
- explicitar o problema com suas palavras;
- selecionar dados da questão de forma autônoma;
- fazer uso adequado de calculadora e outros materiais de forma a buscar soluções para o que é proposto de forma autônoma;
- resolver o problema;
- verificar se a solução é adequada;
- trabalhar em grupo de forma colaborativa;
- trabalhar individualmente com autonomia;
- utilizar corretamente a linguagem matemática.

É importante também lembrar que uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais auxilia na listagem dos objetivos tanto cognitivos como atitudinais.

FORMAÇÃO DO PROFESSOR — SUGESTÕES DE LEITURA E *SITES*

A. Sugestões de leitura:

BARBEIRO, Eulália da Conceição. *A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita: uma análise dos erros e das dificuldades de alunos de 7º ano de escolaridade*. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8318/1/ulfpie043292_tm.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

BERNAL, Márcia Maria. *Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/86993/205628.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 maio 2015.

BORRALHO, A.; BARBOSA, Elsa. *Pensamento algébrico e exploração de padrões*. Disponível em: <www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

________. CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. *Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra*. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

BRANCO, Neusa Cristina Vicente. *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Disponível em: <repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

CAMPOS, Tania M. M.; SOUZA, Vera Helena G. de. *Resolução de desigualdades com uma incógnita: uma análise de erros*. Disponível em: <www.fisem.org/www/union/revistas/2008/14/Union_014_007.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

COLLARES, Bruno Marques; LIMA, Diego Fontoura. *Por que inverter o sinal da desigualdade em uma inequação?* Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE38.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. *O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do GeoGebra: um estudo com professores de Matemática*. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p246/23464>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______. *Desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica*. Disponível em: <www.redalyc.org/pdf/2912/291222099009.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

DAMBROS, Vanessa de Fátima Custódio; ARAÚJO, Viviane Raupp Nunes de. *O ensino de equações do primeiro grau: a busca pela superação da tricotomia entre aritmética, álgebra e geometria*. Disponível em: <www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2010/Educacao_em_Ciencias_e_Matematica/Trabalho/08_00_14_O_ENSINO_DE_EQUACOES_DO_PRIMEIRO_GRAU__A_BUSCA_PELA_SUPERACAO_DA_TRICOTOMIA_ENTRE_ARITMETICA,_ALGEBRA_E_GEOMETRIA.PDF>. Acesso em: 29 maio 2015.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. *Pensamento aritmético e pensamento algébrico no Ensino Fundamental*. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_Groenwald_Claudia.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

HUMMES, Viviane Beatriz; NOTARE, Marcia Rodrigues. *Aprendizagem significativa de equações do 1º grau: um estudo de caso com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental*. Disponível em: <file:///C:/Users/User/Downloads/420-2348-1-PB.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

JÚNIOR, Dárcio Costa Nogueira. *Ensino de razão e proporção na perspectiva curricular da rede*. Disponível em: <www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T8_CC1664.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

LIMA, Duílio Tavares de. *Fichas temáticas: resolvendo equações do 1º grau*. Disponível em: <www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20130919095224.pdf?PHPSESSID=5b59a548f19a92caf50a35dc8b2fb0d4>. Acesso em: 29 maio 2015.

LOPES, Celi Aparecida Espasadin. *A probabilidade e a estatística no currículo de Matemática do Ensino Fundamental Brasileiro*. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/lem/publica/ce_lopes/prob_est.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______; MEIRELLES, Elaine. *Estocástica nas séries iniciais*. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MAGALHÃES, Adil Ferreira. *Uma sequência de atividades para ensinar (e aprender) inequações*. Disponível em: <www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2013/Adil%20Ferreira.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MALAGUTI, Pedro Luiz; BALDIN, Yuriko. *Os números inteiros no Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MANGILI, Leonardo Milioli. *Os jogos e os números inteiros*. Disponível em: <www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000031/00003194.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MARTINI, Grasiela. *Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros*. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29143/000775907.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 maio 2015.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. *Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações*. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.021>. Acesso em: 29 maio 2015.

MEGID, M. A. B. A. Construindo Matemática na Sala de Aula: uma Experiência com os Números Inteiros. In: FIORENTINI, D. & MIORIM, M. A. (Org.) *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp – Cempem, 2001, p. 144-187.

MENEGAT, Maristela Ferrari. *Uma nova forma de ensinar razão e proporcionalidade*. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31572/000783440.pdf?...1>. Acesso em: 29 maio 2015.

MIYASAKI, Dirce Mayumi. *Modelagem matemática e educação ambiental: possibilidades para o Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/359-4.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

NETO, Francisco Tavares da Rocha. *Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/1440/1/2010_dis_ftrneto.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa.; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Álgebra e pensamento algébrico através da resolução de problemas*. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1318.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

POMMER, Wagner M. *Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em $\mathbb{Z}$*. Disponível em: <www.uems.br/eventos/encontromatematica/arquivos/44_2012-08-26_18-35-53.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SCHMITIZ, Ilda; SCHNEIDER, Deborah Sandra Leal Guimarães. *A leitura de mundo através da estocástica: um olhar crítico da realidade, através da mídia e das tecnologias*. Disponível em: <www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_ilda_schmitz.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SILVA, Ana Claudia da. *Dificuldades de aprendizagem na resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau*. Disponível em: <www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12008/AnaClaudiadaSilvaPetronilo.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SILVA, Maria José Ferreira da. *As concepções de números fracionários*. Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/def_mat_concepfracoes1.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_______; ALMOULOUD, Saddo Ag. *As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte – todo*. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2105/1830>. Acesso em: 29 maio 2015.

SOUZA, Leandro de Oliveira; LOPES, Celi Aparecida Espasadin. *O ensino de estocástica por meio de simulação virtual*. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1021.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

B. *Sites*

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>.
- Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): <http://www.sbm.org.br/>.
- Portal do Professor – MEC: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>.
- Centro de Referência em Educação Mário Covas: <www.crmariocovas.sp.gov.br/>.

C. Laboratórios de Educação Matemática (fonte: <www.leoakio.com/laboratorio-de-matematica.html>.)

- UFRJ - LIMC - Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências: <http://limc.ufrj.br/>.
- UFF - Conteúdos Digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática e Estatística: <www.uff.br/cdme>.
- UFF - LEG - Laboratório de Ensino de Geometria: <www.uff.br/leg/>.

- UFF - LABEM - Laboratório de Educação Matemática: <www.uff.br/labem/>.
- UFSC - LEMAT - Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias: <http://mtm.ufsc.br/lemat/Lemat.html>.
- Unesp LEM - Laboratório de Ensino de Matemática - Rio Claro: <www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp/lem/>.
- Unesp/IBILCE - Laboratório de Matemática - Ribeirão Preto: <www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/>.
- USP - LEM - Laboratório de Ensino de Matemática: <www.ime.usp.br/lem/>.
- Feusp - Laboratório de Matemática: <www2.fe.usp.br/~labmat/>.
- UFU - LeMat - Laboratório de Matemática: <www.matematica.facip.ufu.br/laboratorio.html>.
- UFG - LEMAT – Laboratório de Educação Matemática: <www.mat.ufg.br/lemat/>.
- FURB - LMF - Laboratório de Matemática: <www.furb.br/lmf>.
- Unijuí - RS - Laboratório Virtual de Matemática: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/>.
- UFPE - PE - Laboratório de Ensino da Matemática: <www.dmat.ufpe.br/extensao/sala_de_jogos.htm>.

Além desses *links*, diversas revistas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática são disponíveis para acesso livre, *on-line*. Por exemplo, no Portal do Professor, o *link* <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/materiais.html> permite acessar artigos, livros, periódicos, entre outros recursos. Basta buscar por publicações relativas à Matemática: na busca pela ferramenta de pesquisa no- *site* você terá como resultado diversos *links* para ajudá-lo com materiais, leituras etc.

No *site* da SBEM, você tem acesso à *Educação Matemática em Revista* <www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr>, contendo artigos destinados ao professor que ensina Matemática nos diversos níveis de escolaridade. Também tem acesso ao anúncio dos eventos organizados.

No *site* da SBM, você tem acesso ao *link* para a *Revista do Professor de Matemática* <www.rpm.org.br/>, para a revista *Professor de Matemática OnLine* <http://pmo.sbm.org.br/pmo-h.html> e outras publicações.

D. Programas de Pós-graduação *Stricto Sensu* (Mestrado e Doutorado): com essa lista, o professor pode se informar sobre possibilidades de mestrado e/ou doutorado em áreas afins ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

A lista com os programas recomendados e reconhecidos pela CAPES pode ser encontrada no *site* <http://conteudoweb.capes.gov.br/conteudoweb/ProjetoRelacaoCursosServlet?acao=pesquisarIes&codigoArea=90200000&descricaoArea=&descricaoAreaConhecimento=ENSINO&descricaoAreaAvaliacao=ENSINO#>.

PROGRAMA	IES	UF
CIÊNCIA TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO	CEFET/RJ	RJ
CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO	IFSUL	RS
DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS	UFPA	PA
DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	UNESP/BAU	SP
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES	UESB	BA

PROGRAMA	IES	UF
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	UFSC	SC
EDUCAÇÃO E SAÚDE NA INFÂNCIA E ADOLESCÊNCIA	UNIFESP	SP
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS	UESC	BA
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFES	ES
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA	UFPR	PR
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFG	GO
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFPE	PE
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFRRJ	RJ
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	PUC/RS	RS
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - UFMT - UFPA - UEA	UFMT	MT
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS	UFPA	PA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UESC	BA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFJF	MG
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFOP	MG
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFMS	MS
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	USS	RJ
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UNESP/RC	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	PUC/SP	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UNIBAN	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA	UFSM	RS
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	UFPE	PE
EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA	UEM	PR
EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFG	GO
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UEPB	PB
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UEL	PR
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAC	AC
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAL	AL
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAM	AM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFC	CE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFCE	CE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFMA	MA
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFU	MG
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UEPB	PB
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	CEFET/RJ	RJ
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFRN	RN
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFPEL	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UCS	RS

PROGRAMA	IES	UF
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	FUPF	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	ULBRA	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNIFRA	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	FUFSE	SE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNICSUL	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFSP	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	UNIVATES	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	UFSCAR	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	UFRN	RN
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	UNICENTRO	PR
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	FURB	SC
ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRJ	RJ
ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRGS	RS
ENSINO EM EDUCAÇÃO BÁSICA	UERJ	RJ
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFES	ES
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFG	GO
ENSINO TECNOLÓGICO	IFAM	AM
ENSINO, HISTÓRIA E FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFABC	SP
FORMAÇÃO CIENTÍFICA, EDUCACIONAL E TECNOLÓGICA	UTFPR	PR
FORMAÇÃO DOCENTE INTERDISCIPLINAR	UNESPAR	PR
MULTIUNIDADES EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNICAMP	SP
PRÁTICAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA	CPII	RJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNIFRA	RS

Além desses, temos hoje no Brasil um mestrado profissional oferecido pela Sociedade Brasileira de Matemática, modalidade semipresencial.

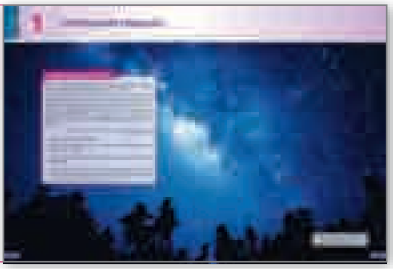
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT): www.profmat-sbm.org.br/	SBM	RJ

Outra possibilidade de formação para o professor de Matemática vem nos cursos de especialização, com pelo menos 360 horas, e que podem ser desenvolvidos presencialmente ou em modalidade a distância (mas com avaliações presenciais, de acordo com a legislação brasileira). Você pode buscar os cursos oferecidos em sua região. A informação é facilmente obtida na internet.

Orientações para o desenvolvimento dos capítulos

CAPÍTULO 1

Potenciação e radicais



Conteúdos abordados

Potência de um número real com expoente inteiro (propriedades e notação científica); raiz enésima de um número real (determinação da raiz enésima de um número real, radicais, propriedades dos radicais); simplificação de radicais; radicais semelhantes; adição e subtração de radicais; multiplicação de radicais; divisão de radicais; potenciação e radiciação de radicais (produtos notáveis em expressões que envolvem radicais, racionalização de denominadores)

Objetivos

- Ampliar e consolidar o significado do conceito de potência de números reais com expoentes inteiros e das propriedades.
- Compreender a ideia de notação científica e identificar situações nas quais ela é normalmente empregada.
- Compreender como se calcula a raiz *n*-ésima de um número real.
- Compreender a noção de radical, suas propriedades e mobilizá-las na resolução de problemas.
- Mobilizar as propriedades da potenciação e da radicação para simplificar radicais em diferentes situações.
- Identificar radicais semelhantes.
- Compreender como realizar adições, subtrações, multiplicações, divisões, potenciações e radiciações com radicais.
- Entender como utilizar produtos notáveis em expressões que envolvem radicais e mobilizar tal conhecimento na resolução de problemas.
- Desenvolver expressões numéricas envolvendo radicais utilizando produtos notáveis.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

A situação apresentada nas páginas de abertura desse capítulo (**páginas 10** e **11**) oferece a oportunidade para que você discuta com os alunos o quão importante é a matemática para o desenvolvimento de outras ciências, como a Astronomia. É importante que os alunos percebam a conveniência de expressar um número muito grande utilizando uma potência de base 10.

Ao trabalhar o tópico 1, que trata de potência de um número real com expoente inteiro, é importante levar em consideração o conhecimento dos alunos no que tange às maneiras de calcular potências e de aplicar as propriedades de potência com expoente inteiro. Você pode, em um primeiro momento, solicitar a eles que trabalhem por conta própria nos exercícios propostos no livro, sem qualquer intervenção inicial de sua parte. Em seguida, com base nas dúvidas apresentadas pelos alunos em tal trabalho, você poderá retomar aquilo que for necessário, destacando aspectos que, mesmo já tendo sido trabalhados, os alunos ainda não dominam totalmente. Um trabalho com essa orientação possivelmente surtirá maior efeito do que discutir o tema como se ele não tivesse sido trabalhado anteriormente ou simplesmente realizar uma revisão rápida, que não deixe os alunos à vontade para esclarecer pontos ainda nebulosos a respeito do conteúdo.

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 17**) explora o significado dos prefixos mais conhecidos. É importante que os alunos percebam que cada um desses prefixos está associado a uma potência de base 10. Você pode conversar com os alunos a respeito do uso de palavras que utilizam esses prefixos no dia a dia.

Ao trabalhar com as notações científicas, você pode solicitar aos alunos que realizem uma pesquisa sobre como se devolveu historicamente esse conceito, as razões para tal e suas principais aplicações. Veja, na figura a seguir, uma ilustração de Arquimedes, um dos pioneiros na busca por maneiras de representar números muito extensos.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DE FRANCE, PARIS

Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.)

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 18**) introduz os alunos à calculadora científica. Pode-se chamar a atenção deles para o fato de esse tipo de calculadora oferecer a possibilidade de efetuar cálculos que uma calculadora simples não realiza, como o de potências de base real e expoente inteiro. Muitas das funções desse tipo de calculadora poderão ser mais bem exploradas no Ensino Médio e é de grande valia que os alunos ao menos conheçam esse equipamento e que tenham oportunidade de utilizá-lo para realizar cálculos compatíveis com os conceitos estudados até o momento.

Ao iniciar a abordagem de raiz enésima de um número real, você pode investigar, por exemplo, por meio de atividades preparadas especificamente com esse fim, quais são os conhecimentos que os alunos já possuem a respeito da ideia de raiz quadrada de um número real para, a partir desses conhecimentos, discutir as especificidades a serem consideradas ao se trabalhar com outros tipos de raízes de números reais, como a cúbica, a quarta etc. Os conhecimentos já construídos a respeito de potências de um número real também precisarão ser mobilizados pelos alunos e relacionados por você ao conteúdo que está sendo introduzido.

A observação de que não é correto escrever $\sqrt{25} = \pm 5$ deve ser explorada com cuidado, para que seja efetivamente compreendida pelos alunos, uma vez que esse é um aspecto no qual eles costumam apresentar muitas dificuldades, especialmente a partir do momento em que passam a trabalhar com equações do 2º grau, como $x^2 = 25$ que possuem como soluções os números 5 e -5. É importante que os alunos, ao estudarem esse tipo de equação, atentem para o fato de que, para determinar o valor de x, não afirmamos que $x = 5$ ou $x = -5$. Assim:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$

$|x| = 5$

$x = -5$ ou $x = 5$

Logo, o número -5 não veio diretamente da raiz de 25, mas decorre do módulo de x.

Pode-se trabalhar exaustivamente as propriedades dos radicais, propondo situações de aprendizagem desafiadoras e adequadas, para que elas sejam, de fato, compreendidas e não apenas memorizadas pelos alunos. É a compreensão, e não a memorização sem qualquer significado ou reflexão, de tais propriedades que permitirá que elas sejam corretamente mobilizadas na resolução de problemas.

É comum os alunos inferirem que $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ ou que $\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[b]{b}$, sendo a e b números reais não negativos e n um número maior ou igual a 2. Caso isso ocorra, é possível incentivá-los a encontrar contraexemplos que revelem a não validade dessas identidades. Essa estratégia de encontrar contraexemplos poderá auxiliá-los na identificação das sentenças que não são verdadeiras na atividade 11 da **página 26**.

A simplificação de radicais também é um procedimento no qual os alunos costumam enfrentar dificuldades e, então, mais uma vez, destacamos a importância de você explorar esse assunto de forma cuidadosa e procurando perceber quais são os principais erros que os estudantes estão cometendo.

Ao trabalhar com a adição e subtração envolvendo radicais, os alunos devem fixar bem a ideia de que a realização dessas operações só é possível quando os radicais envolvidos forem semelhantes. Quando tais radicais não são semelhantes, surge a necessidade de substituí-los por valores aproximados, e isso é trabalhado na atividade 4 da **página 30**.

Antes de iniciar o trabalho com produtos notáveis em expressões que envolvem radicais, é interessante preparar algumas atividades visando revisar com os alunos o que eles já estudaram a respeito de produtos notáveis.

Ao trabalhar com racionalização de denominadores, é importante explicitar claramente aos alunos que não há obrigatoriedade alguma em realizar tal procedimento, uma vez que este é feito com o único propósito de facilitar os cálculos.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 2

Equações do 2º grau

Conteúdos abordados

Equação do 2º grau com uma incógnita (equações completas e incompletas); raiz de uma equação do 2º grau; resolução de equações do 2º grau (resolução de equações incompletas e completas); relação entre raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau (composição e forma fatorada de uma equação do 2º grau); resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau; sistemas de equações.

Objetivos

- Identificar uma equação do 2º grau, sua notação e sua classificação.
- Resolver equações do 2º grau completas e incompletas via fatoração e fórmula resolutiva.
- Compreender a relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau e saber resolvê-la aplicando essas relações.
- Resolver situações-problema por meio de equações do 2º grau, compreendendo os procedimentos envolvidos.
- Resolver sistemas de equações que recaem em uma equação do 2º grau.

Orientações

As páginas de abertura (**páginas 42** e **43**) oferecem a oportunidade para que você converse com os alunos sobre a importância de ações que visem à melhoria da qualidade do ar e à preservação do meio ambiente. Pode-se comentar com os alunos que qualquer ação humana que vise suprir as necessidades atuais dos seres humanos, sem comprometer o futuro das próximas gerações, é uma ação sustentável. Você pode, em parceria com o professor de Ciências, promover algum projeto ligado ao uso de fontes de energia limpas e renováveis, à preservação de áreas verdes, à reciclagem ou a atitudes voltadas para o consumo controlado de água.

Você pode aproveitar a seção *Trocando ideias* (**página 44**) e retomar os métodos da adição e da substituição para a resolução de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Essa retomada é importante, pois essas mesmas estratégias também são utilizadas na resolução de sistema de equações que recaem em uma equação do 2º grau.

O conceito de equação do 2º grau com uma incógnita é introduzido no tópico 1. É importante que os alunos distingam uma equação do 2º grau de uma equação do 1º grau e que também consigam reconhecer equações completas e incompletas. Ao trabalhar com situações contextualizadas, pode-se sempre chamar a atenção dos alunos para os valores que a incógnita pode assumir *a priori*. Na situação inicial, por exemplo, x só pode assumir valores positivos, pois corresponde a uma medida de comprimento.

No tópico 2, os alunos irão estudar o conceito de raiz de uma equação do 2º grau e é importante que o compreendam bem. É comum, por exemplo, ao perguntar a um aluno se 2 é raiz da equação $x^2 - 2x = 4$, que ele tente resolvê-la em vez de substituir x por 2 e verificar se obtém ou não uma sentença verdadeira. Isso é um indício de que esse aluno perdeu de vista o significado do conceito de raiz e está efetuando os procedimentos de maneira acrítica. Incentivar os alunos a refletir sobre os significados dos processos e dos conceitos mobilizados é de extrema importância para que tenham uma visão ampla do que estão fazendo.

É importante também que os alunos resolvam uma mesma equação utilizando estratégias diferentes, pois isso, além de evitar a supervalorização do uso da fórmula resolutiva (fórmula de Bhaskara), pode contribuir para que ampliem seu repertório. Estudar diferentes métodos de resolução de equações do 2º grau permite aos alunos uma visão geral e conectada da matemática. Se julgar conveniente, você pode retomar os conceitos de produto notável e fatoração estudados no 8º ano.

Na resolução de problemas que recaem em equação do 2º grau, os alunos poderão deparar com duas soluções diferentes, com duas soluções iguais ou com a impossibilidade de determinar um número real que satisfaça as condições do problema. Convém lembrá-los de que, ao resolver um problema que recai em uma equação do 2º grau, é preciso, depois de encontrar as raízes da equação, verificar se elas podem ser respostas do problema.

No tópico 6, será ampliado e consolidado o estudo sobre sistemas de equações. Você pode incentivar os alunos a resolver os sistemas da atividade 1 da **página 64** pelo método da substituição e pelo método da adição. É importante também estimulá-los a verificar se a solução ou as soluções encontradas satisfazem ambas as equações do sistema. No caso de problemas que são traduzidos por sistemas de equações, é importante também estimular os alunos a avaliar se as respostas alcançadas satisfazem as condições do problema proposto.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 3

Função afim

Conteúdos abordados

Ideia de função (lei de formação da função, variáveis, a notação $f(x)$, valor de uma função); representação gráfica de uma função; função afim (gráfico, zero, variação e estudo de sinal de uma função afim)

Objetivos

- Compreensão da noção de função pela interdependência de variação de grandezas.
- Construir gráficos de funções com o auxílio de uma tabela.
- Reconhecer uma função afim por meio do seu registro algébrico e gráfico.
- Compreender a ideia de zero de uma função afim e saber encontrá-lo.
- Reconhecer quando uma função afim é crescente ou decrescente.
- Estudar o sinal de uma função afim.

Orientações

A situação proposta nas páginas de abertura (**páginas 68** e **69**) oferece a oportunidade para que você converse com os alunos sobre a importância das feiras de artesanato para o desenvolvimento econômico de algumas cidades brasileiras. Você pode propor aos alunos que contem aos colegas sobre alguma feira de artesanato que conhecem e o que é vendido nela.

A seção *Trocando ideias* (**página 70**) trabalha a noção de função como uma relação entre medidas de duas grandezas. Essa pode ser uma oportunidade para que você faça um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos a respeito da noção de função.

Nas atividades matemáticas, pode-se representar um objeto utilizando vários registros de representação, como a língua materna, o registro gráfico, o registro algébrico, o registro figural etc. Cada um desses registros apresenta significados particulares e que permitem caracterizar de diferentes maneiras o objeto estudado. A mobilização, por parte dos alunos, dos diferentes registros de um mesmo objeto matemático contribui para que se apropriem dele cada vez que se dão conta dos elementos que o caracterizam e, também, para evitar que haja confusão entre representante e representado, ou seja, os alunos passam a distinguir o objeto das suas diferentes representações. Por esse motivo, você pode propor situações, como por exemplo, o aluguel de uma bicicleta, o pagamento de uma corrida de táxi, compra e venda de produtos etc., para que os alunos possam expressar a variação das grandezas envolvidas em diversas situações por meio de diferentes registros: tabular, linguagem natural, algébrico e gráfico.

É importante que os alunos saibam que existem funções com mais de uma variável independente, e, para isso, você pode propor a eles a seguinte questão:

- Um armazém vende farinha a R$ 4,00 o quilograma e feijão a R$ 5,50 o quilograma. Qual é a função que relaciona o faturamento *F*, em reais, com a venda de *x* quilogramas de farinha e *y* quilogramas de feijão?

Espera-se que os alunos concluam que a função *F* é dada por $F = 4x + 5{,}5y$, e que observem que esse é um exemplo de função que possui mais de uma variável independente.

A identificação das variáveis independentes e das dependentes, assim como o valor de uma função são aspectos importantes, e os alunos podem apresentar dificuldades nessas questões. Exemplos variados e a retomada em diversos momentos podem colaborar para que tais dúvidas sejam sanadas. Ao trabalhar com a notação $f(x)$ para escrever a lei de uma função, deve ficar bem claro que essa notação substitui a variável dependente. Outro aspecto importante é que compreendam que o uso das letras *x* e *y* se dá por uma questão de hábito e não por obrigatoriedade, afinal essas letras podem perfeitamente ser substituídas por outras, dependendo da conveniência.

Ao propor o cálculo de valores de uma função, é interessante que a variável independente assuma valores inteiros, fracionários e irracionais, para que o cálculo com esses números seja sempre revisitado.

Para que os alunos possam tratar a representação gráfica de modo adequado, é importante verificar se eles trazem os conhecimentos necessários sobre o sistema de coordenadas cartesianas e a representação de pontos. Caso você ache adequado, essa verificação pode ocorrer por meio de jogos (por exemplo, batalha-naval e outros disponíveis em *sites*). Nessa retomada do tema, insista na localização de pontos sobre os eixos coordenados, pois esse aspecto costuma trazer muitas dificuldades aos alunos.

Ainda quanto à representação gráfica, é importante os alunos diferenciarem o gráfico de linha do gráfico de pontos. Para tal, é preciso que eles trabalhem com funções cujo domínio seja o conjunto dos inteiros, ou parte dele, e outras cujo domínio seja o conjunto dos números reais ou parte dele. Você pode incentivá-los também a procurar gráficos em jornais e/ou revistas, sempre alertando para o fato de que, na mídia, muitas vezes são apresentados gráficos de linha, mesmo que o domínio seja parte do conjunto dos números inteiros, e que isso, em geral, é feito para que haja melhor visualização, embora não seja correto matematicamente. Essa discussão é importante, pois pode contribuir para que os alunos evitem tirar conclusões errôneas a partir de gráficos vinculados nos mais diversos meios de comunicação.

Um aspecto muito importante no estudo de funções é incentivar a passagem de um registro de representação para outro. Por exemplo, dada a representação gráfica de uma função, solicitar aos alunos que a descrevam usando a língua materna ou que encontrem seu registro algébrico. Essas conversões entre as representações favorecem a apreensão conceitual dos alunos a respeito dos conteúdos estudados. A atividade 1 da **página 72**, a atividade 4 da **página 73**, a atividade 2 da **página 76** e a atividade 3 da **página 77** são algumas das atividades que exigem dos alunos a mobilização entre diferentes registros e merecem atenção especial.

No estudo da função afim, é importante que os alunos reconheçam tal função por meio de sua forma algébrica e associem sua representação gráfica a uma reta. Você pode chamar a atenção deles para que percebam que na construção dos gráficos eles precisam conhecer apenas dois de seus pontos, pois essa é a quantidade suficiente de pontos para determinar uma única reta.

Se possível, após construírem os gráficos das atividades 4 e 5 da **página 80**, pedir que façam a mesma construção utilizando o *software* Geogebra. Dessa forma os alunos podem conferir se cometeram algum equívoco e estudar algumas características dessas funções, como intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de intersecção com os eixos etc.

O estudo da variação de uma função afim exige um pouco mais de reflexão. A análise do gráfico associada à análise de uma tabela com vários valores (não só dois) pode colaborar com o entendimento da ideia de função crescente ou decrescente. É importante que você incentive os alunos a reconhecer uma função crescente ou decrescente também observando o gráfico, para evitar que essa análise fique restrita somente à observação do sinal do coeficiente que acompanha a variável independente na função.

Os alunos, em geral, apresentam dificuldades para estudar o sinal de uma função afim, seja porque não compreenderam a ideia desse estudo ou porque se restringem apenas ao registro algébrico. Caso isso aconteça, é importante que você os incentive a utilizar diferentes registros de representação da mesma função ao estudar seu sinal. É de grande valia, também, propor situações-problema em que haja necessidade de estudar quando uma função é positiva, negativa ou nula. A atividade 15 e o *Desafio* da **página 87**, cujo contexto leva o aluno a examinar o sinal da função, contemplam essa proposta.

As atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 85** a **87**) permitem que você avalie os conceitos apreendidos pelos alunos e as dificuldades que eles têm enfrentado. Pode-se incentivá-los a dialogar entre si de modo que compartilhem suas estratégias e também para que se ajudem mutuamente.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 4

Funções quadráticas

Conteúdos abordados

Função quadrática; gráfico de uma função quadrática (concavidade da parábola, zeros de uma função quadrática, coordenadas do vértice, construção do gráfico com base nas coordenadas do vértice); ponto de mínimo e ponto de máximo de uma função quadrática

Objetivos

- Reconhecer uma função quadrática por meio do seu registro algébrico e gráfico.
- Representar graficamente uma função quadrática.
- Compreender termos como concavidade, zeros de uma função, vértice do gráfico e valor máximo e valor mínimo de uma função quadrática.
- Resolver situações-problema envolvendo função quadrática.

Orientações

O estudo deste capítulo complementará o estudo de funções iniciado no capítulo 3. Como já observado anteriormente, o conceito de função é bastante complexo e o tempo necessário para a aquisição desse conceito é longo. É preciso estar ciente das dificuldades que os alunos encontrarão e analisar, entre as questões propostas, aquelas que podem proporcionar melhor entendimento do conceito de função. Para isso, observe o aproveitamento dos alunos em sala de aula para fazer essa escolha.

Você pode, no desenvolvimento desse capítulo, incentivar os alunos a mobilizar as diferentes maneiras de representar uma função quadrática: tabela, registro algébrico, registro em língua materna e registro gráfico. Conforme já foi mencionado, é a mobilização, por parte dos alunos, dos diferentes registros de um mesmo objeto matemático que contribui para que se apropriem dele cada vez que se dão conta dos elementos que o caracterizam e, também, para evitar que haja confusão entre representante e representado.

A situação presente nas páginas de abertura (**páginas 88** e **89**) oferece a oportunidade para que você faça um levantamento do conhecimento prévio dos alunos no que diz respeito ao conceito de função quadrática e de como é a representação gráfica dessas funções.

Na seção *Trocando ideias* (**página 90**), ao terem que encontrar a lei da função que relaciona a área do galpão após ampliação em função da medida *x*, é interessante que você deixe os alunos livres para utilizarem suas estratégias pessoais. Pode-se observar se eles identificaram corretamente a variável dependente e a variável independente, e também se utilizaram corretamente a notação $g(x)$ para, se necessário, retomar essas noções.

Ao trabalhar o conceito de função quadrática no tópico 1, você pode solicitar aos alunos que comparem essa função com as funções afim estudadas no capítulo anterior. Espera-se que eles percebam que a variável em uma função quadrática aparece elevada ao quadrado.

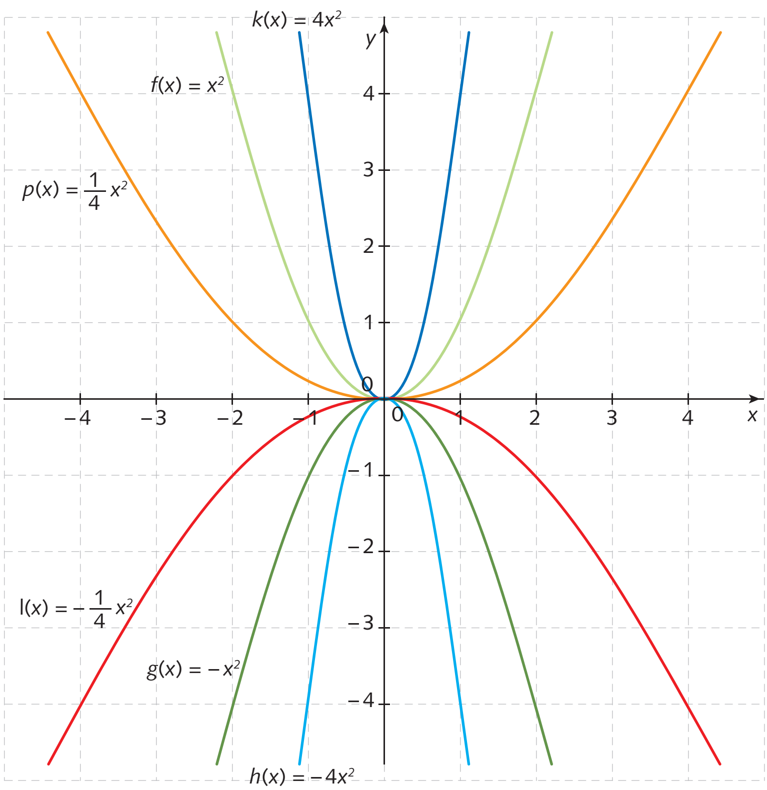
Ao trabalhar as situações 1 e 2 da **página 91**, é importante que você os questione sobre o porquê de $0 \leqslant t \leqslant 500$ na primeira situação e $0 \leqslant t \leqslant 2$ na segunda. Espera-se que eles percebam que as restrições para t em ambas as situações se deve ao fato de que a variável dependente não pode assumir valores negativos por se tratar de medida de temperatura (situação 1) e de altura (situação 2).

Ao iniciar o trabalho com o gráfico de uma função quadrática no tópico 2, você pode propor que no Geogebra os alunos construam o gráfico de algumas funções quadráticas para que eles percebam intuitivamente que o gráfico dessas funções tem concavidade para abaixo ou para cima, que podem ou não interceptar o eixo das abcissas, que a abertura pode variar etc. Ao propor a construção do gráfico, iniciando pela elaboração da tabela de pares ordenados, é importante que você os estimule a representar a maior quantidade de pontos possível para que se convençam de que esses pontos não podem ser unidos por segmentos de reta.

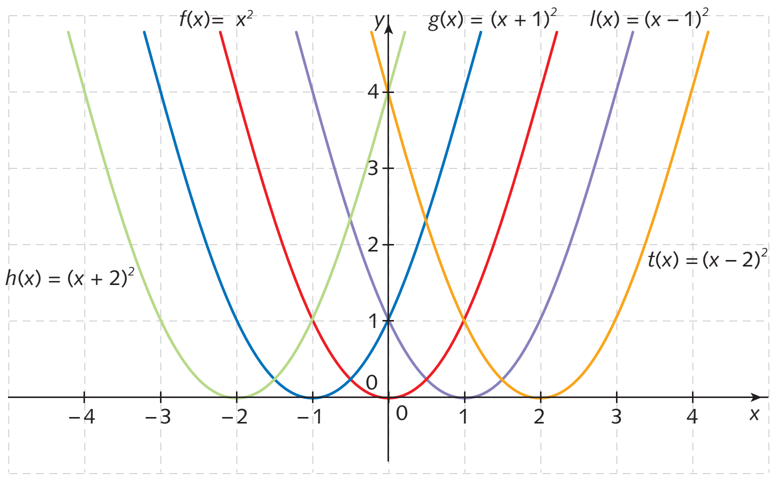
A atividade 2 da **página 101** tem por objetivo levar os alunos a observar que os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ são simétricos em relação ao eixo das abcissas. Se julgar conveniente, você pode ampliar essa atividade e pedir aos alunos que comparem os gráficos de $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 1$; $y = x^2 + 2x$ e $y = -x^2 - 2x$ etc. Espera-se que os alunos percebam que se as funções têm coeficientes opostos, então elas são simétricas em relação ao eixo das abcissas. Se julgar oportuno, você pode retomar o conceito de simetria axial.

A atividade 3 da **página 101** tem por objetivo fazer com que os alunos percebam que o coeficiente c em uma função dada por lei do tipo $y = ax^2 + c$ está associado a uma translação vertical do gráfico da função. Atividades desse tipo contribuem de modo significativo para a aprendizagem dos alunos, pois reforçam a ideia de que a lei da função e o seu gráfico são representações diferentes de um mesmo objeto matemático e que, se alterarmos um, isso implicará mudança no outro.

Atividades que permitem aos alunos variar o coeficiente a em funções dadas por lei do tipo $y = ax^2$ e o coeficiente p em funções dadas por lei do tipo $y = (x + p)^2$ e observar o que acontece com as respectivas representações gráficas podem ser realizadas no Geogebra e podem contribuir para a aprendizagem dos alunos. Veja nas figuras a seguir o "efeito" causado por esses coeficientes.



LUIZ RUBIO



LUIZ RUBIO

Espera-se que os alunos, ao compararem os gráficos, percebam que quanto maior o módulo de a em $y = ax^2$, mais "fechada" é a parábola, e que o coeficiente p em funções dadas por lei do tipo $y = (x + p)^2$ indica uma translação horizontal do gráfico. Sempre que possível, você pode pedir aos alunos que esbocem o gráfico de funções expressas nessa forma por meio de translações.

Ao trabalhar com o vértice da parábola, você pode chamar a atenção dos alunos para que percebam que a abcissa de tal vértice pode corresponder à média aritmética dos zeros da função (se a função possuir dois zeros reais e distintos) ou ao próprio zero da função (quando a função possuir dois zeros reais e iguais).

Pode-se chamar a atenção dos alunos para que percebam que na dedução da fórmula da abcissa do vértice da parábola (**páginas 98** e **99**) foi usado o fato de que o gráfico dessa função é simétrico em relação à reta (denominada eixo de simetria) e que tal demonstração é válida tanto no caso em que a função possui zeros reais como caso em que não possui. É importante que você não dê ênfase excessiva à relação $x_v = -\frac{b}{2a}$, para que eles possam encontrar as coordenadas do vértice de uma parábola utilizando suas raízes ou observando a simetria de seu gráfico.

A atividade 4 e o exemplo da **página 100** e as atividades da **página 101** envolvem a conversão entre registros e merecem atenção especial. Se julgar oportuno, você pode propor aos alunos que façam uma descrição do gráfico de uma função quadrática, no qual eles devem fornecer informações a respeito dos seus zeros, concavidade, vértice etc.

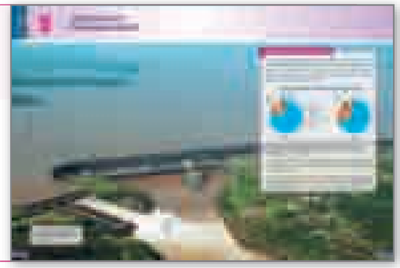
Ao trabalhar com o ponto de máximo ou de mínimo de uma função quadrática, pode-se chamar a atenção para o fato de que uma função quadrática sempre tem um valor máximo ou um valor mínimo e que o mesmo não ocorre com as funções afim.

Você pode propor aos alunos que, em equipe, experimentem, na prática, resolver a atividade 6 da **página 102**. Utilizando 100 cm, de barbante, cola, cartolina e régua, os alunos devem montar retângulos e organizar tabelas, indicando as medidas dos lados dos retângulos possíveis com perímetro 100 cm, e calcular as respectivas áreas. Após os grupos encontrarem sua resposta, devem escrever uma função que modele o problema e encontrar o seu valor máximo para que possam validar a conclusão a que chegaram.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 5

Estatística e probabilidade



Conteúdos abordados

Processo estatístico (objetivo da pesquisa estatística realizada, seleção das variáveis que serão analisadas, coleta de dados, organização e agrupamento dos dados); construção de gráficos estatísticos (gráfico de barras, histograma, gráfico de setores, gráfico de segmentos, cartograma, pictograma e infográfico); determinação de parâmetros (média aritmética, mediana e moda); probabilidade (experimento aleatório, espaço amostral, evento de um experimento aleatório e probabilidade)

Objetivos

- Ampliar e consolidar as noções já estudadas referentes à Probabilidade e à Estatística.
- Compreender algumas etapas do processo estatístico, como o objetivo da pesquisa estatística a ser realizada, a seleção de variáveis a serem estudadas, a coleta de dados e a posterior organização e agrupamento de tais dados.
- Ler, interpretar e construir gráficos estatísticos.
- Avaliar a conveniência de usar um ou outro tipo de gráfico conforme a natureza dos dados e o objetivo da pesquisa.
- Compreender como se determinam a média aritmética, a mediana e a moda de um conjunto de dados e seus respectivos significados.
- Ampliar e consolidar as noções de experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade.
- Mobilizar os conceitos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

A situação apresentada nas páginas de abertura desse capítulo (**páginas 106** e **107**) oferece a oportunidade para que você discuta com os alunos a respeito da geração de energia elétrica no Brasil e de que modo podemos usar essa energia a fim de evitar desperdícios. Você pode firmar uma parceria com o professor de Ciências e desenvolver um projeto sobre as diferentes fontes de energia elétrica no Brasil.

Você pode iniciar o capítulo conversando com os alunos sobre Estatística. Pode-se perguntar à classe como esse ramo da Matemática está presente no dia a dia. É possível citar como exemplos as Eleições 2016, o Censo do IBGE, as questões que aparecem nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). É importante, também, comentar sobre o uso da estatística em outras disciplinas, como Geografia ou História, e sobre sua importância para a Política e a Economia.

Segundo pesquisas, o processo de aprendizagem de Probabilidade e Estatística se torna mais efetivo quando os conceitos são trabalhados a partir de um banco de dados elaborado pelos alunos.

Por essa razão, antes de efetivamente iniciar o estudo do capítulo, você e os alunos podem eleger uma situação para, a partir dela, realizar uma coleta de dados e então, com base nesse banco de dados, realizar um estudo estatístico da situação para que emerjam as etapas do processo estatístico e também os conceitos visados pelo capítulo.

Escolhida a situação com a qual os alunos irão trabalhar, você pode, antes da coleta de dados, discutir o objetivo do estudo a ser realizado. É a partir dessa reflexão que os alunos devem perceber quais serão as variáveis a serem analisadas e, consequentemente, quais tipos de dados referentes à situação escolhida devem ser coletados por eles. Essa discussão pode ser realizada por meio da comparação dessa situação que pretendem estudar com outras abordadas pelos meios de comunicação a partir de um tratamento estatístico.

Após os alunos terem percebido claramente quais são os objetivos do estudo estatístico a ser realizado, as variáveis a serem analisadas e, portanto, os dados a serem coletados, é importante que, com seu auxílio, reflitam a respeito de como a amostra deve ser selecionada.

Realizada a coleta de dados, pode-se discutir com os alunos a respeito da melhor forma de organizá-los e agrupá-los. Essa é uma oportunidade para que sejam discutidas as especificidades de cada um dos gráficos estudados e para que escolham aqueles que melhor representam os dados coletados. Na construção dos gráficos, é possível incentivá-los a atribuir título e a identificar os eixos (no caso de gráficos de barras e de segmentos) com as variáveis de interesse.

Ainda com base no banco de dados construído pelos alunos, você pode solicitar que determinem a média aritmética, a mediana e a moda referentes a tais dados. É importante que você explore o significado de cada um desses parâmetros, que tipo de informações a respeito da amostra selecionada é trazido por eles, quais são as vantagens e desvantagens de se trabalhar com cada um deles etc.

O estudo sobre probabilidades será ampliado e consolidado no tópico 4. Você pode iniciar esse tópico conversando com a classe sobre os usos diários que fazemos da noção de probabilidade, como, por exemplo, as chances de ganhar um sorteio, previsões meteorológicas, previsão de resultados de um experimento, inferências a respeito de uma população a partir de dados coletados numa amostra etc.

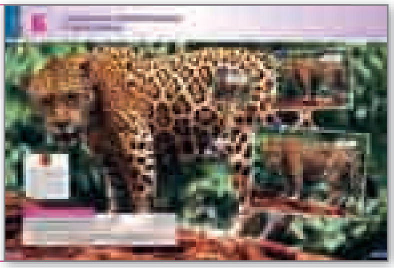
A noções de experimento aleatório, espaço amostral e evento de um experimento aleatório podem ser mais bem compreendidas quando os alunos têm oportunidade de vivenciar situações cujo resultado depende exclusivamente do acaso. Situações que envolvam lançamento de dados, lançamento de moedas, sorteios etc. devem ser estimuladas, pois isso contribui para que o aluno desenvolva noções de aleatoriedade e estimação.

Ao trabalhar com as atividades da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 127** a **131**), você pode estimular os alunos a trocar ideias e compartilhar suas estratégias e conclusões. Isso poderá ampliar o repertório deles no que diz respeito à leitura e à interpretação de gráficos e de estratégias de resolução de situações-problema que envolvam o conceito de probabilidade. Pode-se aproveitar esse momento para sanar as dúvidas dos alunos e avaliar os conhecimentos apreendidos por eles.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 6

Segmentos proporcionais e semelhança



Conteúdos

Razão entre medidas de segmentos e segmentos proporcionais (razão, proporção, razão entre segmentos de reta, segmentos proporcionais); teorema de Tales (retas paralelas cortadas por transversais, teorema de Tales nos triângulos); teorema da bissetriz interna; semelhança (figuras e polígonos semelhantes, razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes, razão entre áreas de polígonos semelhantes); triângulos semelhantes (linhas homólogas, teorema fundamental da semelhança de triângulos, casos de semelhança de triângulos); homotetia

Objetivos

- Ampliar e consolidar as noções de razão e de proporção.
- Compreender as ideias de razão entre medidas de segmentos de retas e de segmentos proporcionais.
- Compreender o teorema de Tales e aplicá-lo para resolver situações-problema.
- Compreender algumas aplicações do teorema de Tales, como a construção geométrica da divisão de um segmento e o teorema de Tales nos triângulos.
- Compreender o teorema da bissetriz interna e aplicá-lo para resolver situações-problema.
- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes e desenvolvendo, assim, o conceito de semelhança.
- Analisar qual é a razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes e também qual é a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes.
- Identificar triângulos semelhantes segundo cada um dos casos de semelhança.
- Compreender o teorema fundamental da semelhança de triângulos e como aplicá-lo para resolver situações-problema.
- Compreender a noção de homotetia e aplicar suas propriedades.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

A abertura do capítulo (**páginas 132** e **133**) oferece a oportunidade para que você discuta com os alunos sobre ampliação e redução de figuras, identificando seus elementos variantes (lados, superfície e perímetro) e invariantes (ângulos). Se julgar conveniente, você pode propor que façam ampliações e reduções de figuras usando papel quadriculado. Essas atividades preliminares podem contribuir para que os alunos desenvolvam o conceito de semelhança.

Aproveite a seção *Trocando ideias* (**página 134**) para retomar as noções de razão e proporção. Você pode solicitar aos alunos que, em um papel quadriculado, façam uma figura e depois sua ampliação de 25% ou sua redução de 50%, por exemplo. Além de estimular a criatividade deles, essa atividade contribui para que você perceba se eles compreenderam que se duas figuras são semelhantes, então a razão entre medidas de lados correspondentes é constante.

Antes de introduzir o teorema de Tales, você pode retomar as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Você pode usar o *software* Geogebra a fim de que os alunos possam perceber a validade do teorema de Tales, que, posteriormente, deverá ser cuidadosamente demonstrado.

O Geogebra também oferece a oportunidade para que os alunos investiguem como podem dividir um segmento em partes proporcionais e verifiquem intuitivamente a validade da propriedade que diz que toda paralela a um lado de um triângulo determina, sobre os outros dois lados, segmentos proporcionais. Tal experiência pode contribuir para que os alunos compreendam essas aplicações do teorema de Tales. Veja um exemplo de como você pode encaminhar a verificação experimental do teorema de Tales nos triângulos.

a) Construa, utilizando o Geogebra, um triângulo qualquer ABC e determine um ponto D sobre o segmento $\overline{AC}$.

b) Trace uma reta paralela a $\overline{BC}$ passando por D e que intercepte $\overline{AB}$ em E.

c) Desloque os pontos e verifique aspectos da figura construída que permaneceram invariantes.

d) Meça os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ e $\overline{CB}$.

e) Fixe os pontos A, B e C utilizando o menu do Geogebra.

f) Altere a posição do ponto D (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) sobre $\overline{AC}$ e preencha a tabela.

Posição de D	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
AE						$\frac{AE}{AB}$					
DE						$\frac{DE}{CB}$					
AD						$\frac{AD}{AC}$					

g) Responda às seguintes questões:

- Se o ponto D estiver no ponto médio de $\overline{AC}$, qual será o valor do quociente $\frac{AD}{AC}$?
- Em cada posição, as razões têm o mesmo valor?
- Quais são as proporções que podemos obter com as diferentes medidas na tabela?
- Existe alguma relação entre a paralela a um dos lados do triângulo e os outros lados?

Antes de introduzir o teorema da bissetriz interna, retome o conceito de bissetriz e como podemos construir a bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso. Tal teorema também pode ser conjecturado pelos alunos por meio da interação com o *software* Geogebra. Os alunos costumam se mostrar motivados com atividades em que são incentivados a investigar a validade de alguma propriedade e acabam se convencendo da validade dela, depois de formalizada.

Ao trabalhar com o conceito de semelhança no tópico 4, é importante incentivar os alunos a comparar um polígono com seu semelhante a fim de que identifiquem os elementos variantes e invariantes para que daí concluam que se dois polígonos são semelhantes, então os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Outro aspecto importante é que se apenas uma das condições estiver satisfeita, isso não garante a semelhança entre polígonos e, nesse caso, você pode pedir aos alunos que apresentem exemplos de polígonos que satisfaçam uma condição, mas não a outra, para que percebam, portanto, que tais polígonos não são semelhantes.

Para que percebam o que acontece com a razão entre os perímetros de polígonos semelhantes, você pode propor aos alunos que construam, com o auxílio do Geogebra, diversos polígonos semelhantes, que determinem a medida do perímetro de cada um e que calculem a razão entre as medidas de seus perímetros. Espera-se com isso que eles verifiquem que o número obtido corresponde à razão entre as medidas de dois lados correspondentes. Analogamente, os alunos podem conjecturar que a razão entre as áreas de polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles. Pode-se comentar também que a congruência de polígonos é um caso particular de semelhança em que também são preservadas as medidas dos lados correspondentes.

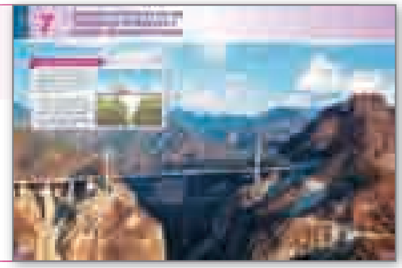
Ao trabalhar com homotetia, você pode explorar a construção de figuras homotéticas também com o auxílio do Geogebra, e não somente com régua e compasso. A partir dessas construções, os alunos poderão ser levados a perceber, em vez de tal fato já ser diretamente apresentado por você, a propriedade de que duas figuras homotéticas são semelhantes.

Ao explorar as atividades propostas, é de grande valia estimular os alunos a justificarem suas estratégias e respostas à luz dos conceitos trabalhados no capítulo. Essa é uma forma de, aos poucos, contribuir para que possam articular melhor suas ideias e para que possam expressá-las de modo cada vez mais claro e preciso. Pode-se propor também que sempre reflitam sobre a razoabilidade da resposta encontrada, pois isso os conduz à depuração do processo de resolução empregado a fim de identificar possíveis falhas.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 7

Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas



Conteúdos abordados

Projeções ortogonais; triângulo retângulo (elementos de um triângulo retângulo, relações métricas no triângulo retângulo); teorema de Pitágoras e aplicações (diagonal de um quadrado e altura de um triângulo equilátero); razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo); as razões trigonométricas de ângulos de 30°, 45° e 60°; tabelas de razões trigonométricas (trabalhando com a calculadora); resolução de problemas envolvendo aplicações das razões trigonométricas

Objetivos

- Compreender a noção de projeção ortogonal.
- Ampliar e consolidar os estudos sobre triângulos retângulos.
- Compreender o teorema de Pitágoras e suas aplicações.
- Reconhecer as razões trigonométricas em um triângulo retângulo (seno, cosseno e a tangente de um ângulo agudo).
- Obter os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de medidas 30°, 45° e 60°.
- Utilizar uma tabela com valores aproximados de senos, cossenos e tangentes de ângulos agudos para resolver problemas.
- Resolver problemas envolvendo aplicações das razões trigonométricas estudadas.

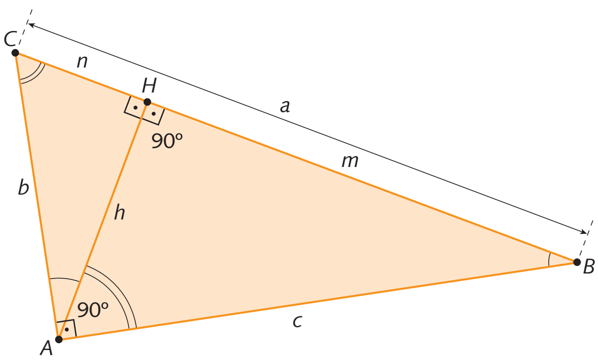
Orientações

A seção *Trocando ideias* (**página 174**) propõe a realização de uma experiência, e é importante que você auxilie os alunos nessa tarefa. Espera-se que essa atividade preliminar, aliada a outros exemplos, permita aos alunos conjecturar a relação entre as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Ao trabalhar as noções de projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e de um segmento sobre uma reta, você pode retomar a construção da perpendicular a uma reta por um ponto usando régua e esquadro.

Ao iniciar o estudo das relações métricas no triângulo retângulo no tópico 2, você pode propor que, por meio de investigações utilizando o *software* Geogebra, os alunos percebam a validade das relações métricas no triângulo retângulo. Veja, a seguir, um exemplo de como essa atividade pode ser encaminhada.

a) No Geogebra, construa a figura seguinte, na qual ABC é um triângulo retângulo em A; o segmento $\overline{AH}$, de medida h, é uma das alturas desse triângulo; o segmento $\overline{BH}$, de medida m, é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$, de medida c, sobre o lado $\overline{BC}$, e o segmento $\overline{HC}$, de medida n, é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$, de medida b, sobre o lado $\overline{BC}$.



b) Na figura construída, verifique quais triângulos são semelhantes, justificando cada uma dessas semelhanças. ($\Delta ABC \sim \Delta HBA \sim \Delta HAC$)

c) Meça os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AH}$, $\overline{HC}$, $\overline{BH}$.

d) A partir do que foi obtido no *item b*, determine cada uma das seguintes razões:

$\Delta ABC \sim \Delta HBA$	$\Delta ABC \sim \Delta HAC$	$\Delta HBA \sim \Delta HAC$
$\frac{AB}{HB}, \frac{BC}{BA}, \frac{AC}{HA}$	$\frac{AB}{HA}, \frac{BC}{AC}, \frac{AC}{HC}$	$\frac{HB}{HA}, \frac{BA}{AC}, \frac{HA}{HC}$

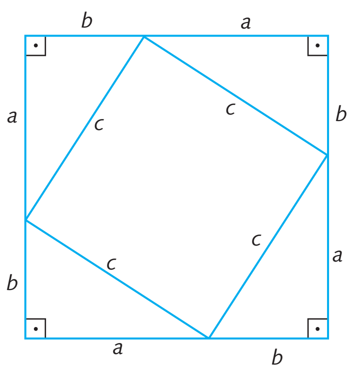
e) Movimente os pontos *A*, *B* ou *C* para obter outros triângulos e, a cada movimento, observe as razões explicitadas no *item d*.

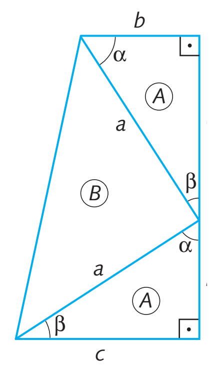
f) Responda às seguintes questões:

- O que você percebe ao movimenta os pontos *A*, *B* ou *C*?
- O que você pode concluir?

Após essa atividade, você pode apresentar aos alunos o teorema de Pitágoras e solicitar que tentem demonstrá-lo usando as relações métricas estudadas no tópico anterior.

Você pode aproveitar o "gancho" da seção *Um pouco de história* da **página 181**, referente a Pitágoras, e solicitar aos alunos que, em grupos, façam uma pesquisa a respeito das diferentes demonstrações do teorema de Pitágoras dadas ao longo do tempo. As figuras a seguir representam construções associadas a diferentes demonstrações do teorema de Pitágoras. A primeira figura refere-se à demonstração chinesa e a segunda, à demonstração do ex-presidente dos Estados Unidos, James Abraham Garfield (1831-1881).

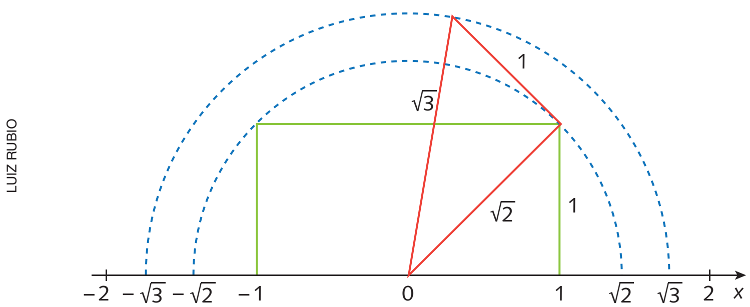




Pode-se pedir aos alunos que compartilhem o que pesquisaram com os colegas e, se julgar necessário, você pode ajudá-los a explicar as demonstrações encontradas.

Ao trabalhar com as aplicações do teorema de Pitágoras, você pode pedir aos alunos que, em duplas, descubram a relação entre a medida da diagonal do quadrado e a medida de seus lados e também que descubram a medida da altura de um triângulo equilátero com base também na medida de seus lados. Pode-se chamar a atenção para o fato de que em ambos os casos $\sqrt{\ell^2} = \ell$, pois ℓ é uma medida e, portanto, só assume valores positivos.

Você pode mostrar aos alunos como utilizar o teorema de Pitágoras para localizar na reta numérica alguns números irracionais, por exemplo, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc., na reta numérica. A imagem a seguir ilustra esse processo:



No tópico 5, em que são trabalhadas as razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°, você pode propor aos alunos que eles mesmos construam um quadro com o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos dessas medidas. Para construir esse quadro, eles devem lembrar que a diagonal do quadrado o divide em dois triângulos retângulos e isósceles (congruentes), que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° e que a altura, a bissetriz e a mediana que partem de um mesmo vértice de um triângulo equilátero coincidem.

Ao trabalhar a tabela de valores aproximados de seno, cosseno e tangente, pode-se chamar a atenção dos alunos para que percebam que os valores de seno e cosseno de ângulos agudos sempre estão entre 0 e 1. Se possível, você pode pedir aos alunos que calculem, utilizando uma calculadora científica (presente também em muitos celulares), o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos e que comparem os valores obtidos com os presentes na tabela. Essa é uma forma não só de familiarizá-los com a calculadora científica, como também de reforçar o fato de que os valores presentes na tabela se tratam de aproximações.

Ao explorar os problemas do tópico 7 e as atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimento adquiridos* (**páginas 199** a **205**), procure incentivar os alunos a justificar suas resoluções e avaliar se a resposta alcançada atende às condições impostas pelo problema. Você pode identificar as dificuldades enfrentadas por eles e retomar algum conceito se achar necessário.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 8

Circunferência, arcos e relações métricas

Conteúdos abordados

Comprimento da circunferência; medida de um arco de circunferência; relações métricas em uma circunferência (relação entre as cordas, relação entre as secantes, relação entre secante e tangente)

Objetivos

- Compreender como calcular a medida do comprimento de uma circunferência.
- Entender como determinar a medida de um arco de circunferência e compreender a relação entre a medida desse arco em unidades de comprimento e sua medida em graus.
- Compreender as relações métricas existentes entre cordas de uma circunferência, entre secantes e entre secante e tangente.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

As páginas de abertura desse capítulo (**páginas 206** e **207**) oferecem a oportunidade para que você retome a diferença entre círculo e circunferência e também para que os alunos percebam que o comprimento de uma circunferência depende da medida do seu raio. Se julgar necessário, você pode propor que meçam o comprimento de algumas circunferências desenhadas em um papel e que comparem essa medida com a do raio, para que percebam que quanto maior o raio, maior é o comprimento da circunferência.

Após trabalhar o tópico 1, que trata do comprimento da circunferência, você pode reproduzir as seguintes afirmações no quadro de giz e pedir aos alunos que identifiquem aquelas que são verdadeiras.

a) O número π é irracional. *Resposta:* verdadeira

b) O comprimento de uma circunferência é proporcional ao seu raio. *Resposta:* verdadeira

c) Uma aproximação para o número π é obtida ao dividir o diâmetro pelo comprimento de uma dada circunferência. *Resposta:* falsa

d) O comprimento de uma circunferência não é proporcional ao seu diâmetro. *Resposta:* falsa

Você pode iniciar o tópico 2 solicitando aos alunos que, a partir do comprimento de uma circunferência, determinem o comprimento de meio arco, de um quarto de arco etc. Pode-se chamar a atenção deles para que percebam a relação entre a medida de um arco em unidades de comprimento e sua medida em graus, que passa pela mobilização de noções de proporcionalidade e também pelo cálculo por meio de regra de três simples.

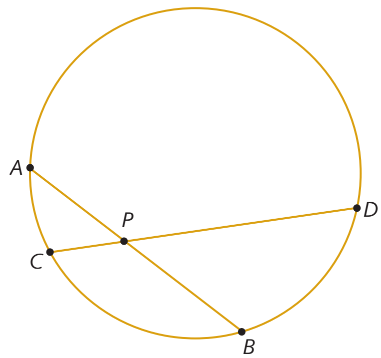
Em vez de apresentar diretamente as relações métricas em uma circunferência, você pode levar os alunos a percebê-las, e o *software* Geogebra é uma ferramenta interessante para isso.

Segue uma sugestão de encaminhamento de atividades a serem realizadas no Geogebra e que têm por objetivo levar os alunos a conjecturarem as relações métricas em uma circunferência.

Relação entre as cordas

a) Trace uma circunferência e as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que se interceptam em um ponto P no interior da circunferência, conforme mostra a ilustração a seguir.

LUIZ RUBIO



b) Meça os segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$.

c) Identifique uma proporcionalidade existente entre essas medidas. Movimente o ponto A e o ponto C para modificar a posição e o comprimento das cordas. A proporcionalidade identificada se mantém?

d) Modifique o raio da circunferência. O que acontece com a proporcionalidade?

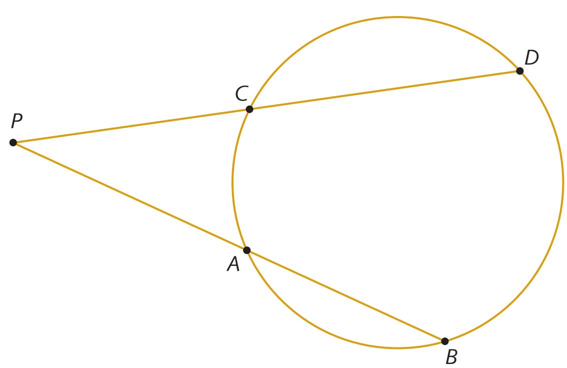
e) Enuncie essa relação métrica que você observou entre as cordas de uma circunferência que se interceptam em um ponto P no interior da circunferência.

Relação entre as secantes

a) Trace uma circunferência e um ponto P na sua região exterior.

b) Trace, por P, os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$ secantes à circunferência.

LUIZ RUBIO



c) Meça os segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$.

d) Identifique uma proporcionalidade existente entre as medidas obtidas. Movimente o ponto P para modificar a configuração da figura. A proporcionalidade identificada se mantém?

e) Modifique o raio da circunferência. O que acontece com a proporcionalidade?

f) Compare essas relações com as obtidas na atividade anterior.

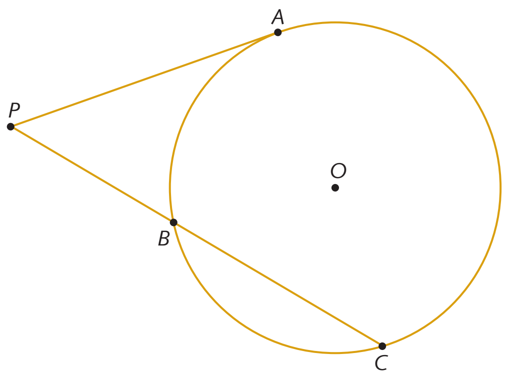
g) Generalize enunciando uma propriedade a partir do que você pôde perceber por meio dos itens anteriores.

Relação entre secante e tangente

a) Trace uma circunferência e um ponto P na sua região exterior.

b) Por P trace o segmento $\overline{PC}$ secante à circunferência.

c) Por P trace o segmento $\overline{PA}$ tangente à circunferência no ponto A.



LUIZ RUBIO

d) Meça os segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

e) Modifique a posição do ponto P. Você consegue perceber alguma relação entre as medidas obtidas?

f) Modifique o raio da circunferência. A relação ainda se mantém?

g) Enuncie a propriedade observada.

Ao propor atividades de investigação apoiadas em um *software* como o Geogebra, isso contribui para que os alunos atribuam significado às demonstrações dessas relações métricas.

Ao propor que resolvam as atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 221** a **225**), é de grande valia estimular os alunos a trocar ideias para que ampliem seu repertório de estratégias de resolução de problemas. Pode-se solicitar que, por fim, façam uma autoavaliação e que descrevam o que apreenderam e os conceitos em que ainda têm dificuldade. Isso poderá ser o mote para que você repense suas estratégias didáticas e retome algum conceito.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 9

Polígonos regulares

Conteúdos abordados

Polígonos (elementos de um polígono, polígonos inscritos e polígonos circunscritos a uma circunferência, propriedades); polígonos regulares (definição, propriedades, construções geométricas com régua e compasso, elementos de um polígono regular); relações métricas nos polígonos regulares (quadrado inscrito em uma circunferência, triângulo equilátero inscrito em uma circunferência, hexágono regular inscrito em uma circunferência, polígonos regulares circunscritos)

Objetivos

- Ampliar e consolidar o estudo de polígonos regulares.
- Compreender as noções de polígono inscrito e de polígono circunscrito a uma circunferência.
- Construir com régua e compasso polígonos regulares inscritos em uma circunferência.
- Identificar elementos de um polígono regular.
- Compreender como determinar a medida do ângulo central e dos ângulos internos e externos de um polígono regular a partir do número de lados.
- Compreender as relações métricas nos polígonos regulares.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

As páginas de abertura (**páginas 226** e **227**) oferecem a oportunidade para que você faça um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito ao conceito de polígono regular. Com base nesse levantamento, você pode planejar de que forma irá fazer a abordagem do capítulo, visando reforçar e retrabalhar aquilo que ainda ocasiona dúvidas nos alunos e, ao mesmo tempo, tratar de novos conteúdos, de forma que a estratégia adotada para o estudo da temática seja sempre desafiadora para eles.

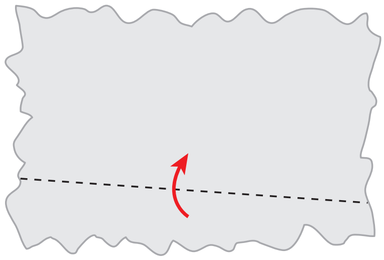
No tópico 1 é retomado o conceito de polígono. A situação inicial ilustra a construção de um pentágono por dobradura. Se você julgar conveniente, pode propor aos alunos que reproduzam tal construção e que façam outras que gerem outros polígonos. Seguem alguns exemplos, apresentados por Buske (2007)[1], da construção de polígonos por dobraduras.

1 Disponível em: <http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91082/buske_n_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 25 maio 2015.

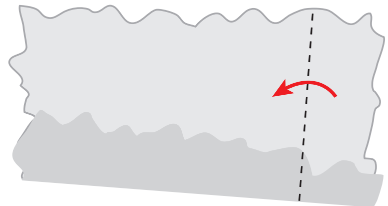
Retângulo

LUIZ RUBIO

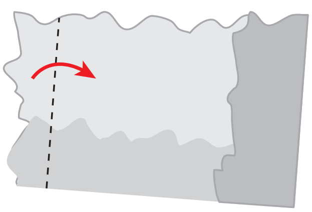
1. Em um pedaço de papel qualquer, fazer uma dobra.



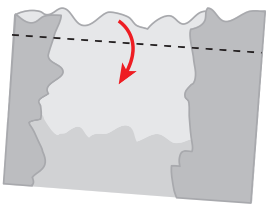
2. Dobrar uma perpendicular à dobra anterior.



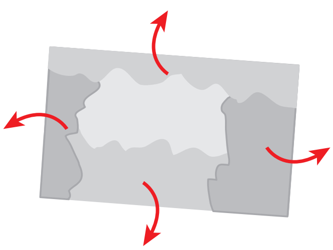
3. Dobrar outra perpendicular à primeira dobra.



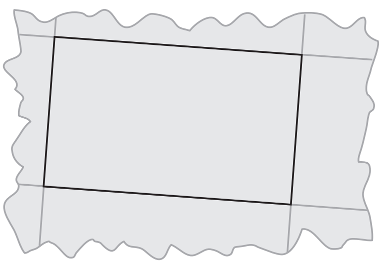
4. Dobrar uma paralela à primeira dobra.



5. Desdobrar o papel.



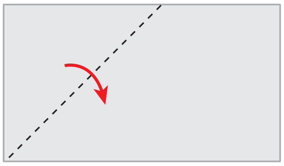
6. Retângulo pronto.



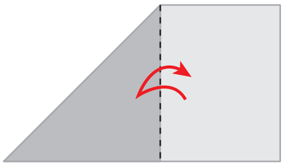
Quadrado

LUIZ RUBIO

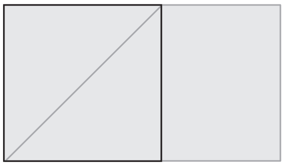
1. Em um pedaço de papel retangular, dobrar fazendo o lado menor coincidir com o lado maior.



2. Dobrar e desdobrar a aba restante e abrir o papel.



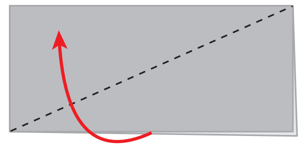
3. Quadrado pronto.



Retângulo áureo

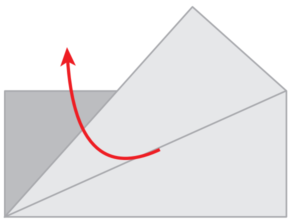
1. Dobrar ao meio um papel com a forma de quadrado.

2. Dobrar para a frente marcando a diagonal do retângulo obtido.

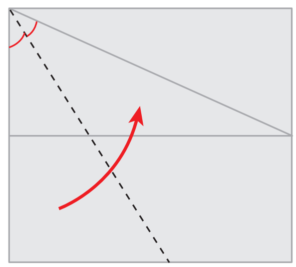


LUIZ RUBIO

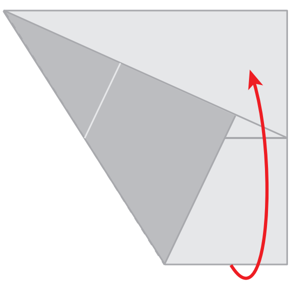
3. Abrir o papel.



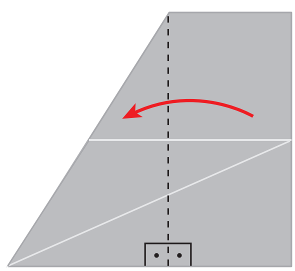
4. Dobrar a bissetriz do ângulo mostrado na figura.



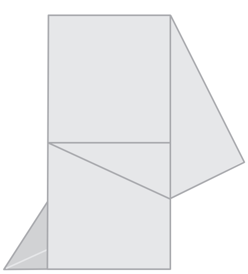
5. Virar completamente a figura para que fique como mostra o passo seguinte.



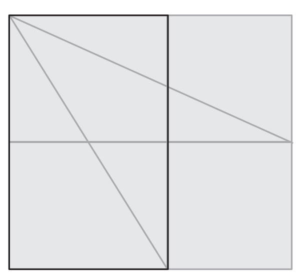
6. Dobrar essa parte para a frente marcando uma dobra perpendicular à base da figura.



7. Esta é a figura obtida depois de feita a dobra. Agora, basta desdobrar o papel.



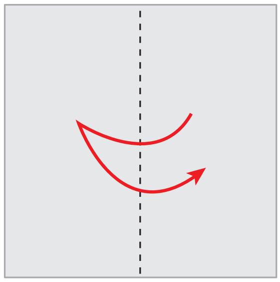
8. Retângulo procurado.



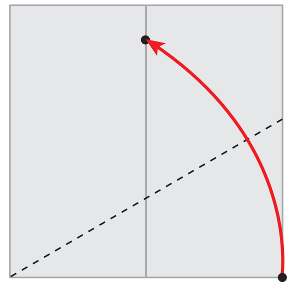
Triângulo equilátero

LUIZ RUBIO

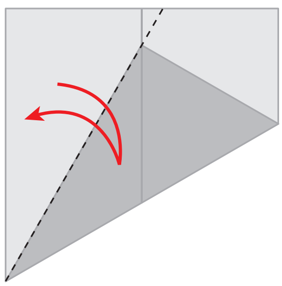
1. Dobrar ao meio um papel com a forma de quadrado e desdobrar.



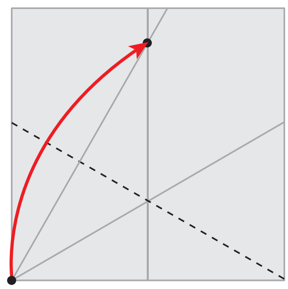
2. Dobrar de modo que os pontos destacados fiquem um sobre o outro.



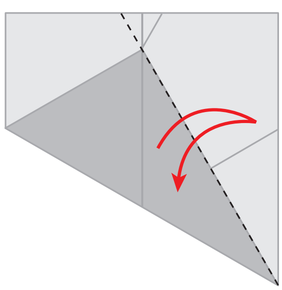
3. Dobrar e desdobrar a aba restrante e abrir o papel.



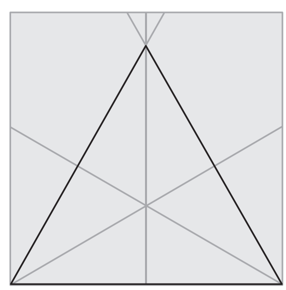
4. Dobrar fazendo os dois pontos destacados coincidirem.



5. Dobrar e desdobrar a aba restante e abrir o papel.



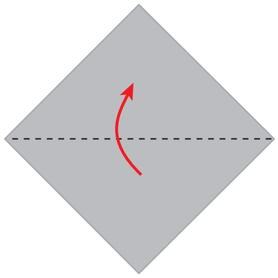
6. Temos um triângulo equilátero.



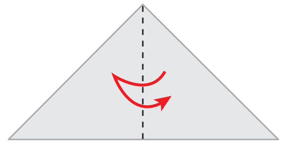
Pentágono regular

LUIZ RUBIO

1. Dobrar a diagonal de um papel com a forma de quadrado.

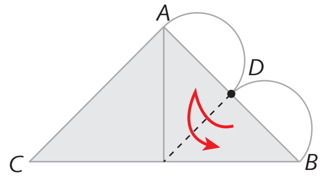


2. Dobrar ao meio e desdobrar.

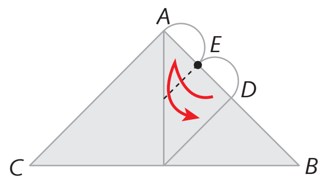


LUIZ RUBIO

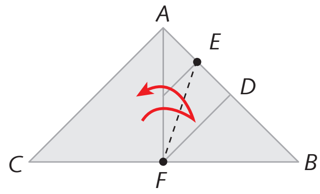
3. Considerar os pontos A, B, C, e D. Marcar o ponto D no ponto médio do segmento $\overline{AB}$, dobrando e desdobrando.



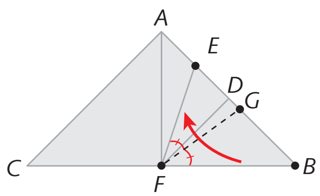
4. Marcar o ponto E no ponto médio do segmento $\overline{AD}$, dobrando e desdobrando.



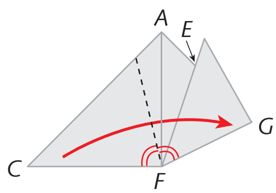
5. Considerar o ponto F. Dobrar e desdobrar para marcar a reta que une os pontos E e F.



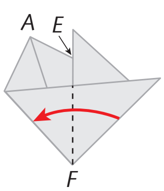
6. Dobrar a bissetriz do ângulo $E\hat{F}B$.



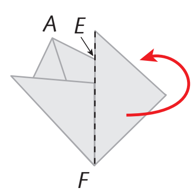
7. Dobrar para a frente e marcar a bissetriz do ângulo $C\hat{F}G$.



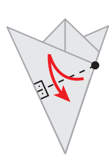
8. Dobrar a ponta produzida pela dobra anterior ao longo do segmento $\overline{FE}$.



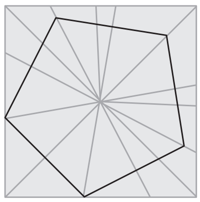
9. Dobrar para trás todo o lado direito do segmento $\overline{FE}$.



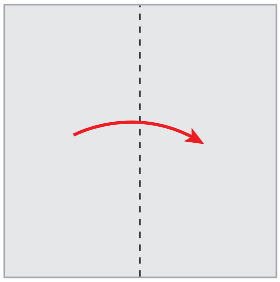
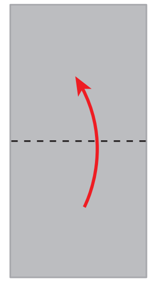
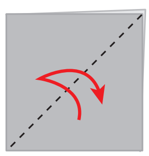
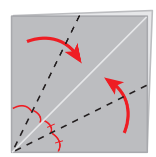
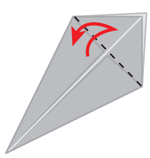
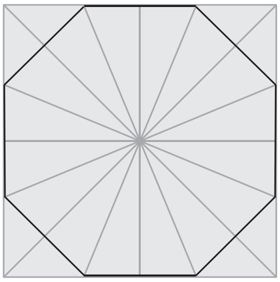
10. Dobre todas as camadas. Essa dobra deve passar pelo ponto destacado e ser perpendicular ao lado esquerdo da figura.



11. Desdobrar o papel.



Octógono regular

1. Dobrar ao meio uma folha de papel com a forma de quadrado. 	2. Dobrar ao meio. 
3. Dobrar e desdobrar a diagonal. 	4. Dobrar a bissetriz dos ângulos formados de cada lado da diagonal. 
5. Dobrar e desdobrar a aba formada. 	6. Desdobrar o papel. 

LUIZ RUBIO

Após discutir, conforme propõe o livro, como construir alguns tipos de polígonos regulares com o auxílio de régua e compasso, você pode trabalhar com tais construções também no Geogebra, mostrando, também, que há uma ferramenta que constrói diretamente qualquer polígono regular, bastando que o usuário do *software* marque dois pontos e escolha o número de lados do polígono.

Antes de trabalhar a determinação da medida do ângulo central e dos ângulos internos e externos de um polígono regular a partir do número de lados, propor aos alunos que construam alguns polígonos regulares no Geogebra, meçam os ângulos central, internos e externos e investiguem a relação existente entre essas medidas e o número de lados do polígono.

Ao tratar das relações métricas nos polígonos regulares, são deduzidas algumas fórmulas. Você pode, ao trabalhar os exemplos e as atividades deste tópico, chamar a atenção dos alunos para o fato de que, caso não se lembrem das fórmulas, poderão resolver os problemas utilizando métodos alternativos, como a aplicação do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas.

Para realizar as atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 242** e **243**), os alunos terão que mobilizar os conceitos apreendidos nesse capítulo e também conceitos que foram estudados em anos anteriores. Você pode aproveitar a oportunidade para identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos e retomar algum conceito que não tenha ficado claro. É importante incentivá-los a compartilhar suas estratégias e respostas para que possam ampliar seu repertório.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 10

Área de figuras planas

Conteúdos abordados

Área (figuras equivalentes); área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo; área do triângulo (triângulo equilátero, triângulo circunscrito e inscrito em uma circunferência); área do trapézio e do losango; área de um polígono regular; área do círculo (área da coroa circular e do setor circular)

Objetivos

- Ampliar e consolidar a noção de área de uma figura plana.
- Compreender a noção de figuras equivalentes e aplicar essa noção no cálculo de áreas.
- Compreender como calcular a área de retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos, polígonos regulares em geral, círculos, coroas circulares e setores circulares.
- Entender como calcular a área de triângulos equiláteros, de triângulos inscritos em circunferências e de triângulos circunscritos a circunferências.
- Mobilizar os conceitos e procedimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

As noções de área e de medida de área já foram estudadas pelos alunos em outros momentos e, por isso, é importante que você dê início à abordagem do capítulo 10 procurando perceber quais são as ideias referentes a essa temática que os alunos já possuem e também quais são aquelas nas quais apresentam maior dificuldade. A partir desse panorama inicial é que você poderá planejar o tratamento que dará ao assunto, visando proporcionar aos estudantes uma abordagem que sempre seja desafiadora para eles.

Você pode iniciar o capítulo conversando com os alunos sobre a importância do cálculo de áreas em algumas situações cotidianas, por exemplo, na construção civil, na compra de um tecido, de um tapete etc. Pode-se também fazer uma lista na lousa com alguns exemplos de situações mencionadas pelos alunos e em que o conceito de área esteja presente. A situação das páginas de abertura (**páginas 244** e **245**) oferece a oportunidade para que você discuta com eles uma das aplicaçõe práticas do cálculo de área: a determinação da medida da superfície de um terreno destinado a uma plantação ou construção.

A noção de figuras equivalentes é bastante importante para o cálculo de áreas. É com essa noção que a partir da área do retângulo podemos descobrir como se determina a área de um paralelogramo qualquer, de um triângulo, de um trapézio, de um losango etc. Uma vez bem compreendida, essa noção pode permitir aos alunos que calculem áreas de figuras planas sem ter de necessariamente recorrer às fórmulas. A atividade 4 da **página 249** pode contribuir para a compreensão dessa noção e merece atenção especial.

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 250**) trata do Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), cujo cálculo do valor a pagar depende, entre outras coisas, da medida da superfície em que o imóvel está construído. Você pode solicitar aos alunos que, em grupos, façam uma pesquisa na Prefeitura da cidade visando compreender, de fato, como tal imposto é calculado. Os resultados obtidos pelos grupos devem ser compartilhados, e você pode aproveitar a discussão para estabelecer as relações devidas entre a pesquisa realizada e o cálculo de áreas.

Ao trabalhar o cálculo da área de um quadrado, você pode destacar que esse quadrilátero é um retângulo "especial", pois tem dois pares de lados paralelos, quatros ângulos de 90° e seus quatro lados têm a mesma medida. Assim, o cálculo de sua área segue o que foi estabelecido para o retângulo.

Ao trabalhar o cálculo da área do paralelogramo, pode-se chamar a atenção dos alunos para que percebam que podemos obter um retângulo de área equivalente a esse paralelogramo usando o conceito de figuras equivalentes. Se julgar necessário, você pode solicitar aos alunos que desenhem um paralelogramo em um pedaço de cartolina e que depois o decomponham, conforme sugerem as ilustrações da **página 252**, com o auxílio de uma tesoura. Em seguida, com o triângulo retângulo e o trapézio obtidos, eles devem compor um retângulo cuja área seja a mesma do paralelogramo inicial.

Você pode propor aos alunos que, após concluírem as atividades 10 e 17 da **página 253**, compartilhem suas estratégias com os colegas. Nessas atividades, os alunos podem valer-se da ideia de figuras equivalentes e também da noção de simetria (estudada no 8º ano).

É possível, conforme mostrado na **página 254**, encontrar a área de um triângulo fazendo a decomposição de um paralelogramo. Para que os alunos se convençam de que os dois triângulos obtidos são congruentes, você pode propor que desenhem novamente um paralelogramo em um pedaço de cartolina, decomponham-no conforme sugerem as ilustrações dessa página e que, em seguida, sobreponham os triângulos obtidos. Pode-se também retomar os casos de congruência de triângulos e chamar a atenção deles para que percebam que os triângulos obtidos são congruentes pelo caso lado-lado-lado (LLL).

É possível, ao abordar o cálculo da área de um triângulo equilátero, de um triângulo inscrito em uma circunferência e de um triângulo circunscrito a uma circunferência, propor atividades (utilizando o *software* Geogebra, por exemplo) nas quais os alunos tenham a oportunidade de investigar as relações entre os lados do triângulo e os raios da circunferência inscrita ou circunscrita.

Novamente por meio de decomposição de figuras, que pode ser feita, por exemplo, com papel e tesoura, os alunos podem chegar às formas de se calcular a medida da área de um trapézio e de um losango.

Ao trabalhar o cálculo da área de polígonos regulares, é importante que os alunos percebam que este pode ser decomposto em triângulos isósceles e congruentes e que, portanto, a área do polígono regular será igual à soma das áreas de cada um dos triângulos que o compõem. Você pode pedir a eles que repitam o raciocínio feito para o hexágono, utilizando outros polígonos regulares antes de partirem para a generalização. A ideia é que os alunos entendam o raciocínio empregado e se convençam da validade da relação obtida após a generalização.

Ao trabalhar com a determinação da medida da área de um círculo, você também pode utilizar o *software* Geogebra para que os alunos possam explorar diferentes situações, decompondo o círculo em um número cada vez maior de setores circulares congruentes.

É importante que os alunos, ao realizarem as atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 264** a **267**), não se apeguem demasiadamente às fórmulas estudadas. Você pode incentivá-los a mobilizar as ideias principais abordadas no capítulo com as noções de simetria para resolver algumas das atividades propostas, por exemplo, as atividades 14, 18, 20, e os *Desafios* das **páginas 264** e **266**.

CAPÍTULO 11

Matemática comercial e financeira

Conteúdos abordados

Operações sobre mercadorias; juro simples; juro composto

Objetivos

- Compreender as noções de preço de compra, preço de venda, lucro e prejuízo.
- Compreender a ideia de juro simples.
- Calcular juro simples.
- Compreender a ideia de juro composto.
- Calcular juro composto.
- Distinguir juro simples de composto.
- Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

Orientações

É fundamental que você tenha consciência de que a Matemática Financeira é um dos conteúdos mais motivadores da Educação Básica por contribuir significativamente para a formação dos estudantes como cidadãos, dando-lhes condições de lidar, de maneira crítica e reflexiva, com situações financeiras presentes em seu cotidiano, como, por exemplo, realizar uma compra e decidir qual forma de pagamento é mais vantajosa: se à vista ou a prazo. Exatamente por essa razão, o trabalho com esse conteúdo deve ser realizado de forma significativa para os alunos e não com base na memorização e aplicação de fórmulas. Deve-se sempre buscar a construção dos conhecimentos por parte dos próprios alunos.

A abordagem de conteúdos sobre Matemática Financeira propicia aos alunos entenderem como funciona o mundo em que vivem. A capacidade de elaborar um orçamento doméstico, analisar se é ou não vantajoso comprar determinado produto, programar uma poupança para um curso superior ou para a velhice são algumas das competências que os alunos precisam desenvolver.

O trabalho com questões relacionadas à Matemática Comercial e Financeira deve se pautar na discussão de aspectos relacionados a transações comerciais e financeiras, que são, de fato, fundamentais para a formação dos estudantes como cidadãos – ideias cujo desconhecimento por parte da maioria da população, acaba, em algum momento, lhe trazendo prejuízos. Conforme indicam pesquisas realizadas na área da Educação Financeira, na Educação Básica, devem ser propostas atividades que evidenciem para os alunos, dentre outras questões, que:

- Acréscimos ou descontos acumulados devem ser multiplicados e não somados.
- Pagamentos da mesma quantia em datas distintas não têm o mesmo valor.
- Quantias que se referem a datas distintas não podem ser somadas.
- Só é possível comparar formas diferentes de pagamento se as quantias forem calculadas tendo como referência a mesma data.

É importante você perceber que o trabalho com situações da Matemática Comercial e Financeira possibilita abordar, de maneira contextualizada, conceitos matemáticos importantes do currículo, como proporcionalidade, porcentagem, raízes de índice *n*, funções afim etc. Além disso, o ideal é que a abordagem de tópicos de Matemática Financeira permeie toda a Educação Básica e que seja feita sempre por meio de situações-problema que realmente possam ter significado para os alunos e que os façam perceber a importância das ferramentas matemáticas necessárias para resolvê-las.

A situação proposta nas páginas de abertura (**páginas 268** e **269**) e a seção *Trocando ideias* (**página 270**) contribuem para que você faça um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito à noção de juros. Você pode aproveitar a oportunidade para retomar o conceito de porcentagem.

Ao iniciar o estudo das Operações sobre mercadorias, no tópico 1, você pode propor como primeira tarefa que os alunos realizem uma pesquisa a respeito da etimologia dos termos lucro e prejuízo, pois a origem dessas palavras lhes trará informações também a respeito de seus sentidos na Matemática Financeira. É interessante também pedir aos alunos que tragam para a sala de aula notícias de jornais, revistas ou da internet que falem sobre lucro e prejuízo e que elas sejam discutidas para que os estudantes possam, de fato, compreender os significados dessas noções.

Mais interessante, do ponto de vista pedagógico, é, em vez de você apresentar diretamente que o preço de venda deve ser o preço de compra mais o lucro, levar os alunos, por meio de reflexões, a construírem eles próprios essa ideia. Da mesma forma, quando a situação envolver prejuízo, os próprios estudantes devem ser levados a perceber que o preço de venda é o preço de compra menos o prejuízo. Pode-se chamar a atenção deles para que observem se o lucro ou o prejuízo está sendo calculado sobre o preço de compra ou sobre o preço de venda da mercadoria em questão.

Ao trabalhar com juro simples, é importante que os alunos, com base na análise de regularidades presentes em situações-problema, possam chegar às expressões para o cálculo do juro e do montante. Para isso, pode-se propor a seguinte atividade:

- Marcelo aplicou R$ 500,00 por dois anos a uma taxa de juro simples de 2% a.m.
  - a) Monte uma tabela explicitando o valor do juro obtido por ele mês a mês, ao longo desses dois anos, por meio dessa aplicação. *Resposta*: montagem da tabela
  - b) Qual foi o juro total obtido por Marcelo por meio de tal investimento? *Resposta*: R$ 240,00
  - c) Construa uma tabela explicitando, mês a mês, durante esses dois anos, o valor do montante obtido por meio dessa aplicação financeira. *Resposta*: montagem da tabela
  - d) Ainda considerando esse problema, expresse, em função de *n*, os juros e o montante obtidos após terem se passado *n* meses a partir do início da aplicação. *Resposta*: $J = 10n$ e $M = 10n + 500$

Finalmente, após essa atividade ser trabalhada com cuidado, você pode formalizar o conteúdo visado.

Ao trabalhar com o conceito de juro composto, você pode ampliar os exemplos propostos e pedir aos alunos que realizem a seguinte atividade:

- Um capital de R$ 1 000,00 foi aplicado à taxa de juro composto de 5% a.m., isto é, renderá, a cada mês, juro de 5% calculados sempre sobre o montante disponível no mês anterior.
  - a) Qual será o montante disponível para o investidor sacar depois de um mês de aplicação? Quanto de juro o capital terá rendido nesse período? *Respostas*: R$ 1 050,00; R$ 50,00
  - b) Qual será o montante disponível para o investidor sacar depois de dois meses de aplicação? Quanto de juro o capital terá rendido nesse período? *Respostas*: R$ 1 102,50; R$ 102,50

c) Qual será o montante disponível para o investidor sacar depois de três meses de aplicação? Quanto de juro o capital terá rendido nesse período? *Respostas*: R$ 1157,63; R$ 157,63 (resultados aproximados).

d) Utilizando aquilo que você pôde observar na resolução dos itens a), b), c), obtenha uma expressão que lhe permita determinar o montante disponível para o investidor sacar após n meses de aplicação, sendo n um número inteiro qualquer maior do que 1. *Resposta*: $M = 1\,000\,(1{,}05)^n$

e) Um capital C foi aplicado a uma taxa de juro composto i durante um intervalo de tempo t. Determine o montante (M) disponível para o investidor sacar após essa aplicação. *Resposta*: $M = C(1 + i)^t$.

Após a atividade, convém chamar a atenção deles de que o juro composto é calculado sobre um montante cada vez maior e que isso ocorre porque ele incide sobre um capital que já incorporou outro(s) juro(s).

É interessante que você converse com eles sobre a importância do juro composto, pois essa é a base do atual Sistema Financeiro, já que são utilizados pelas instituições bancárias e financeiras na cobrança e recebimento de juros nas opções de empréstimos, pagamentos, aplicações, financiamentos, entre outros serviços do ramo.

Esse é um momento oportuno para você conscientizar os alunos sobre os riscos de uma pessoa gastar mais do que recebe e também sobre a compra de produtos que podem não ser necessários.

Em problemas envolvendo operações financeiras, é fundamental salientar para os alunos a importância de o período e a taxa de juro estarem expressos na mesma unidade.

A seção *Lendo e aprendendo* (**páginas 276** a **278**) trata da ideia de inflação e dos indicadores econômicos. Você pode chamar a atenção dos alunos para o fato de que a taxa de inflação não fornece uma medida absoluta, mas sim uma média. Se a taxa de inflação em um período foi de, por exemplo, 10%, isso não implica aumento de 10% de todos os produtos, mas sim que a média ponderada dos aumentos de preços de alguns produtos foi de 10%. Dessa forma, alguns produtos podem ter tido um aumento de preço de 8% e outros, de 12%. Além disso, os alunos devem compreender que existem diversos fatores que podem influenciar as taxas de inflação, como a escassez de produtos, *deficit* orçamentário do Governo, desequilíbrio na balança de pagamentos, entre vários outros.

A seguir, você pode propor estas atividades que exploram noções relativas a alguns índices econômicos utilizados no país:

Se julgar necessário, você pode, com base nos índices inflação e em informações atuais sobre os indicadores econômicos, promover um diálogo com os alunos sobre a situação financeira atual do país e até mesmo compará-la com a de outros países. Esse pode ser um momento oportuno para que você, com o professor de História ou Geografia, promovam um projeto interdisciplinar relacionado à situação econômica brasileira atual.

Ao propor aos alunos a realização das atividades do item *Aplicando* da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 282** a **285**), é importante incentivá-los a usar a calculadora simples ou científica. Nesse momento, mais importante que efetuar os cálculos é mobilizar as noções de lucro, prejuízo e juros para resolver as situações-problema propostas.

Espaço para anotações do professor