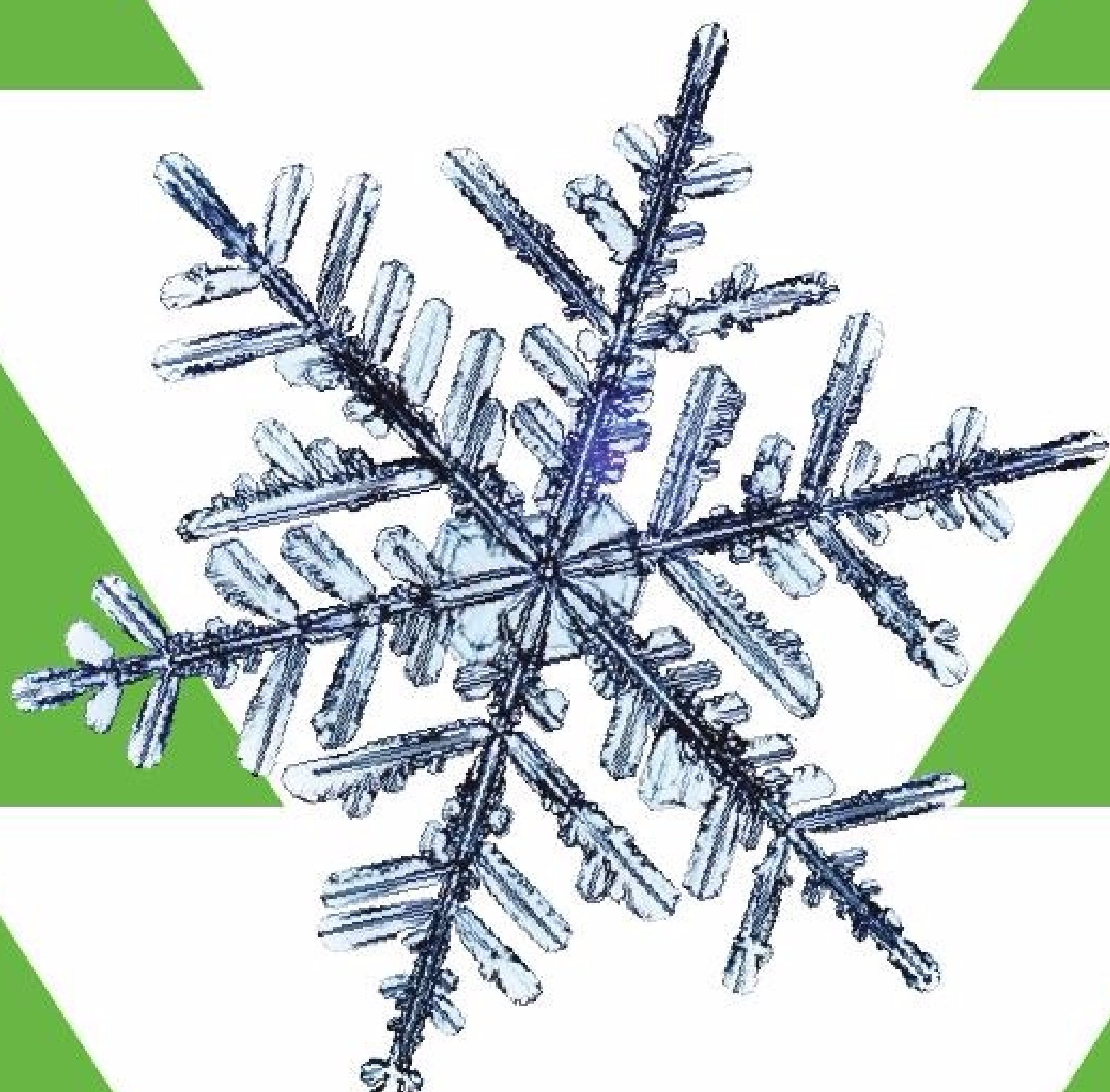
Coleção
Linguagens
e Aplicações

MANUAL DO PROFESSOR

Matemática

Antonio Nicolau
Clarice Fonseca
Heloisa Hessel



8º ano
Ensino Fundamental

Cereja editora

Coleção
Linguagens
e Aplicações

Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Antonio Nicolau Youssef

Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo
Professor de Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino
Médio da rede privada e pública em São Paulo.

Clarice Gameiro da Fonseca Pachi

Licenciada em Matemática pela Universidade de Taubaté com
aperfeiçoamento em Estatística pelo IME – Universidade de São Paulo.
Professora de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, Técnico Profissionalizante e
Curso Superior nas redes públicas e privadas no estado de São Paulo.

Heloísa Maria Hessel

Licenciada e Bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo. Professora de Ensino Fundamental e de
Ensino Médio na rede privada no estado de São Paulo.

1ª edição
São Paulo, 2015

Cereja editora

8º ano
Ensino Fundamental

Responsabilidade editorial: Ana Mortara
Edição: Antonio Nicolau Youssef
Revisão: Ana Cristina Mendes Perfetti
Iconografia: Elaine Bueno
Capa: A+ Comunicação
Projeto gráfico: Alexandre Romão
Editoração eletrônica: Lauro Takayuki Akamatsu
Alfredo Pereira de Santana
Juliana Cristina Silva
Vivian Trevizan
Ilustrações: Fernanda Youssef
Cinthia Yamasaki
Luyse Costa

Imagem da capa: Floco de neve, Kichigin/Shutterstock

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

Y831 Youssef, Antonio Nicolau; Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca; Hessel, Heloísa Maria
Linguagens e aplicações: Matemática. Ensino Fundamental – Anos Finais – 8º. Ano – Livro do Aluno / Antonio Nicolau Youssef, Clarice Gameiro da Fonseca Pachi e Heloísa Maria Hessel. – São Paulo: Cereja Editora, 2015. (Coleção Linguagens e Aplicações).

ISBN 978855543028-2 (livro do aluno)
ISBN 978858777999-1 (manual do professor)

1. Matemática. 2. Linguagens da Matemática. 3. Aplicações da Matemática. 4. História da Matemática. 5. Números. 6. Geometria. 7. Álgebra. 8. Tratamento da Informação. 9. Medidas. I. Título. II. Série. III. Matemática: linguagens e aplicações. IV. Números reais. V. Estudo do triângulo. VI. Expressões algébricas. VI. Matemática financeira. VII. Sistemas de equações. VIII. Congruência de triângulos. IX. Inequações de 1º. grau. X. Circunferência e círculo. XI. Sólidos. XII. Gráficos de linha. XIII. Youssef, Antonio Nicolau. XIV. Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca. XV. Hessel, Heloísa Maria.
CDU 51 CDD 510

Catalogação elaborada por Ruth Simão Paulino

São Paulo, 1ª edição, 2015

Cereja editora

Endereço: Av. Marques de São Vicente, 1011
Barra Funda – São Paulo – SP
CEP: 01139-003
Telefone: (011) 2157-3687
E-mail: editora@cerejaeditora.com.br
www.cerejaeditora.com.br

Apresentação

Caro aluno,

Ao escrever os livros desta coleção, procurei, em todos os momentos, trazer para você conteúdos interessantes, que mostram as relações existentes entre a Matemática e o mundo que nos cerca, além de sua beleza e riqueza histórica.

O principal objetivo do curso de Matemática apresentado nos quatro livros desta coleção é mostrar a você que aprender Matemática é muito mais que saber resolver uma série de problemas e cálculos complicados. É, sobretudo, aprender a utilizar as interessantes ferramentas que ela nos apresenta para que, juntamente com raciocínio e criatividade, você possa solucionar as mais diversas situações concretas onde ela se aplica no mundo que nos cerca.

É importante que você aprenda e domine os principais conceitos aqui apresentados, uma vez que a Matemática será sempre uma poderosa linguagem de estudo e desenvolvimento, seja qual for a área do conhecimento à qual você pretende se dedicar.

Os conceitos são apresentados de forma objetiva, mantendo, no entanto, o rigor necessário para que sua aprendizagem se processe de forma coerente, garantindo que você perceba suas aplicações e possa utilizá-los nos mais diversos contextos de resolução de problemas em sua vida futura como estudante e na vida adulta como profissional.

Observe atentamente as seções que compõem seu livro e faça um bom uso dele, preservando sua integridade, para que outros alunos também possam utilizá-lo.

Bom estudo!

Conheça seu livro

Os conteúdos da coleção estão organizados em cinco eixos temáticos identificados ao longo dos capítulos pelos seguintes ícones:

Números

Geometria

Álgebra

Tratamento da informação

Medidas

Seções

Os capítulos estão organizados pelas seguintes seções, que têm a finalidade de apresentar as diversas linguagens e aplicações do universo da Matemática:

Conversa Inicial

Momento inicial onde procuramos recuperar o que você já sabe sobre o assunto e quais os objetivos específicos do capítulo.

Curiosidade

Informações curiosas sobre os diversos conceitos que você irá estudar.

Para ler

Textos e informações complementares que ilustram e enriquecem sua aprendizagem.

Na prática

Oficinas e atividades nas quais você e seus amigos observam na prática o que aprenderam.

Quando, quem e onde

Os aspectos mais interessantes sobre a história da Matemática e seus criadores.

Conexão

Ao longo dos capítulos, esta seção apresenta aplicações da Matemática nas mais diversas áreas de atividades, assim como nas diversas disciplinas que são estudadas no Ensino Fundamental.

Atividades

Problemas e exercícios de aplicação dos conceitos desenvolvidos no capítulo.

Desafio

Situações que desafiam você a quebrar a cabeça e usar sua criatividade para resolver problemas.

Para estudar

Lista complementar com problemas e exercícios para você estudar em casa.

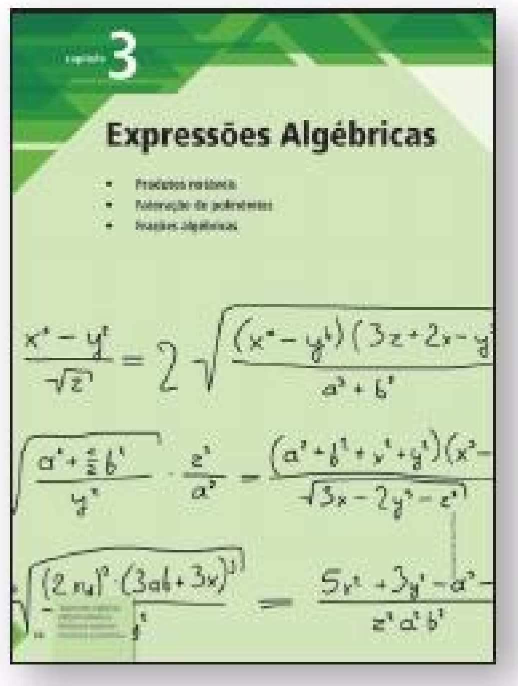
Resolução das atividades

Resolução integral de todas as atividades propostas no livro, para que você possa conferir as respostas e fixar melhor os conceitos envolvidos.

Seu livro do 8º ano é composto de nove capítulos, que tratam dos cinco grandes temas que compõem a coleção: **Números**, **Geometria**, **Álgebra, Tratamento da informação** e **Medidas.**

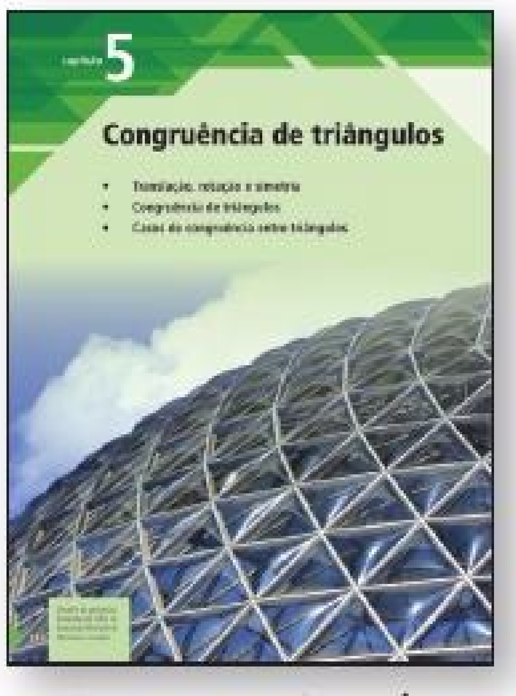
Números reais

Estudo do triângulo



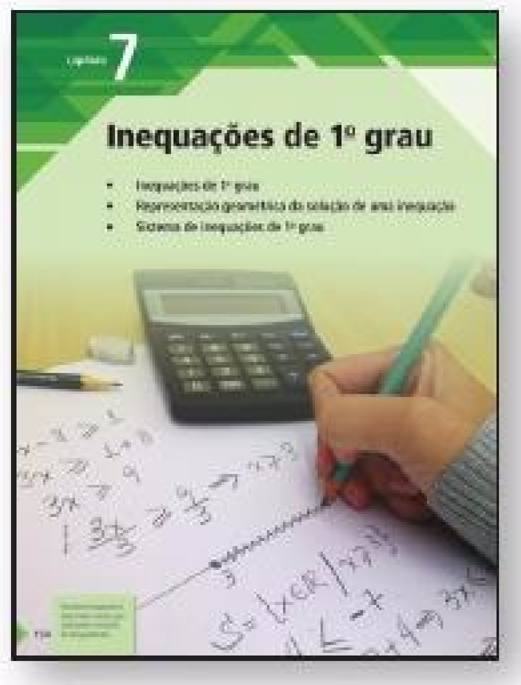
Expressões algébricas

Sistemas de equações



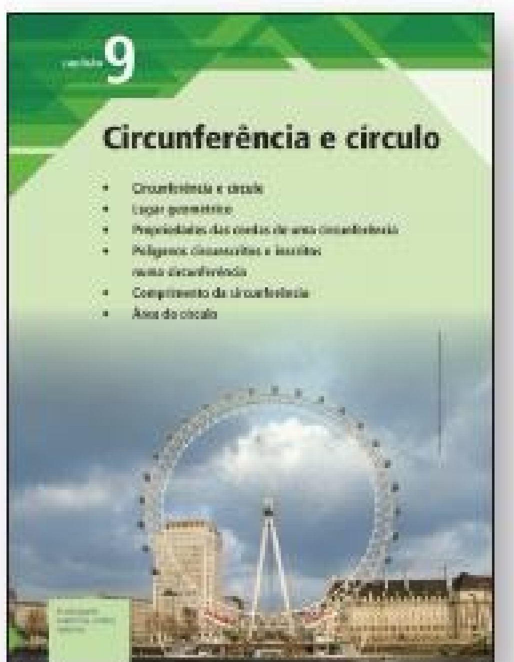
Congruência de triângulo

Estudo dos quadriláteros

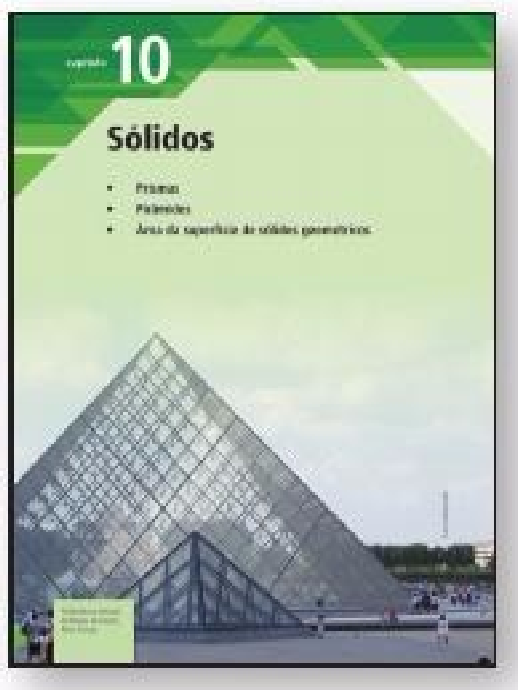


Inequações do 1º grau

Áreas de figuras planas



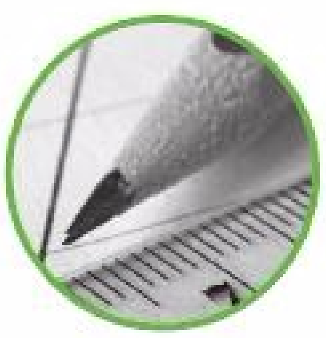
Circunferência e círculo



Sólidos

Gráficos de linha

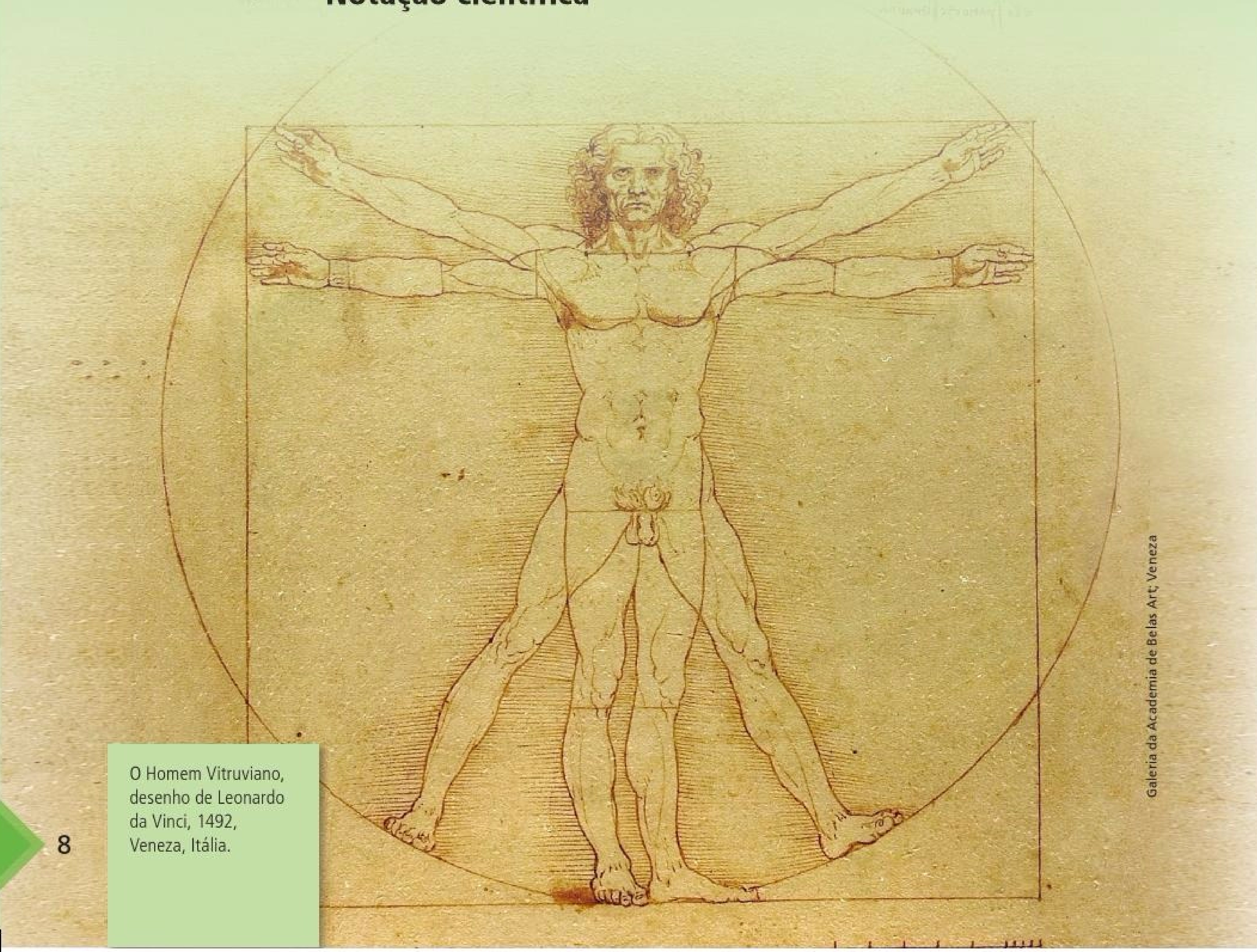
Sumário



capítulo 1

Números reais

- Um pouco mais sobre números racionais
- Números irracionais
- Números reais
- A reta real
- Intervalos
- Operações com números reais
- Propriedades das operações em R
- Notação científica



O Homem Vitruviano, desenho de Leonardo da Vinci, 1492, Veneza, Itália.

Galeria da Academia de Belas Art, Veneza

Conversa Inicial

Utilize o texto inicial para recordar que já estudamos os conjuntos dos números Naturais (N), Inteiros (Z) e Racionais (Q). Leia o texto e, se achar conveniente, recorde que:

Já conhecemos o conjunto **N** = {0, 1, 2, 3, 4, ...} dos números naturais, bem como o conjunto **Z** = {..., –3, –2–1, 0, 1, 2, 3, ...} dos números inteiros. Vimos também que, para as resoluções de equações, se tivéssemos à disposição apenas os números inteiros, o conjunto universo U para as raízes das equações seria **U = Z**.

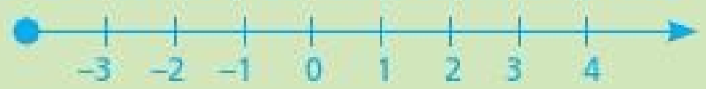
Para iniciar o nosso estudo de 8º ano, suponha que seja preciso resolver as seguintes equações, tendo Z como conjunto universo.

Conjunto dos Números Naturais; N = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}. Podemos considerar o conjunto dos números naturais ordenados sobre uma reta:

Conjunto dos Números Inteiros;

Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...}.

O conjunto N é subconjunto de Z. Podemos considerar os números inteiros ordenados sobre uma reta:



a) $3x = 15$

b) $-2x = 18$

c) $11x = -341$

d) $4x = 34$

e) $3x - 1 = 7$

Conjunto dos Números Racionais; é formado por todos os números que podem ser colocados na forma de fração (com o numerador ∈ Z e denominador ∈ Z*), ou seja, o conjunto dos números racionais é a união do conjunto dos números inteiros com as frações positivas e negativas.

Pode ser escrito da forma: $Q = \frac{a}{b}$, com a ∈ Z, b ∈ Z e b ≠ 0 e podemos dar como exemplos de racionais os números $-2, -\frac{5}{4}, -1, \frac{3}{5}, 1, \frac{3}{2}$.

Ao tentar resolvê-las, descobrimos que as três primeiras têm solução no universo dos números inteiros. Elas são, respectivamente:

$$x = 5,\ x = -9 \text{ e } x = -31.$$

Verificamos, porém, que a quarta e a quinta equações necessitam de números que não pertencem ao conjunto dos inteiros.

As soluções, nesses casos, pertencem ao conjunto dos **números racionais**, que também já foi estudado em anos anteriores. Para as equações $4x = 34$ e $3x - 1 = 7$ a soluções são, respectivamente:

$$x = \frac{17}{2} \text{ e } x = \frac{8}{3}.$$

Até aqui, para resolver equações do tipo $ax + b = c$, consideramos como universo o conjunto dos números racionais **Q**. Porém, pode ocorrer que esse conjunto não baste, pois podemos encontrar situações em que precisamos de números que não sejam racionais.

Suponha, por exemplo, que estejamos diante de um cálculo matemático que envolva a radiciação. Sabemos que a radiciação é a operação inversa da potenciação. Assim, para calcular, por exemplo, $\sqrt{49}$, temos que obter um número que elevado ao quadrado dê como resultado 49. Esse número é o 7. Mas, o que ocorre quando temos que calcular $\sqrt{59}$? Neste caso, não é possível encontrar um número racional que elevado ao quadrado nos forneça como resultado 59.

Como temos equações cuja resolução não pode ser obtida no conjunto dos racionais, necessitamos de um outro conjunto que nos permita resolvê-las. Este conjunto será chamado conjunto dos **números irracionais**, ou seja, números que não podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$ onde **b** e **a** são **racionais**, com **b ≠ 0**.

O diagrama a seguir ilustra a situação dos conjuntos que estudamos até agora. Se achar conveniente, reproduza-o no quadro e faça a leitura do diagrama comentando que • ⊂ ¢ ⊂ §.

Um pouco mais sobre números racionais

Antes de iniciarmos o estudo dos números irracionais, vamos retomar e aprofundar alguns pontos importantes relativos aos números racionais. Em especial, é fundamental que estudemos mais a fundo sua representação na forma decimal.

Vamos, inicialmente, analisar os números inteiros 6, 8 e –11. Podemos escrevê-los, por exemplo, das seguinte formas:

$$6 = \frac{18}{3}, \quad 8 = \frac{32}{4} \quad \text{e} \quad -11 = -\frac{176}{16}$$

Utilize o texto para introduzir o tema e destaque que, como já mencionamos, a representação decimal de um número racional $Q = \frac{a}{b}$, com $a \in Z$, $b \in Z$, $a \neq 0$, se obtém dividindo a por b. Dessa forma podemos ter representações das frações aparentes, além de frações decimais exatas ou finitas,ou ainda referentes às decimais periódicas ou infinitas que veremos no decorrer do texto.

Note que, em cada uma das frações que escrevemos, o numerador é um múltiplo do denominador. Frações desse tipo, que representam números inteiros são chamadas **frações aparentes**.

Por outro lado, podemos ter frações como $\frac{7}{4}$, $\frac{37}{43}$ ou $\frac{3}{11}$ onde, ao dividirmos o numerador pelo denominador, encontramos como resultado um número decimal que pode apresentar um número **finito** de casas decimais ou um número **infinito** de casas, chamados, respectivamente de **decimais exatos** e **decimais inexatos**.

Os números racionais que são decimais inexatos possuem uma quantidade infinita de casas decimais. Existe, porém, nesse caso, um algarismo ou um grupo de algarismos que se repete infinitamente. Este algarismo ou grupo de algarismos denomina-se **período** e esse tipo de número racional chama-se **dízima periódica**.

Observe bem os seguintes exemplos de dízimas periódicas e seus períodos, assinalados com um traço na parte superior de cada um:

$$\frac{8}{3} = 2{,}66666\ ..... = 2{,}\overline{6} \rightarrow \text{período } 6$$

$$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ ..... = 0{,}\overline{27} \rightarrow \text{período } 27$$

Lembre-se também que uma dízima periódica pode ser classificada em **simples** ou **composta** dependendo de seu período. Caso o período da dízima comece logo depois da vírgula, ela será uma dízima periódica **simples**. Caso exista um algarismo ou grupo de algarismos logo após a vírgula, antes de se iniciar a repetição do período, ela será denominada dízima periódica **composta**.

Veja os exemplos:

Escreva os exemplos no quadro e destaque a diferença entre as dízimas periódicas simples e compostas.

$\mathbf{\frac{11}{3}}$ **= 3,66666 ..... = 3,$\overline{6}$ → dízima periódica simples**

$\mathbf{\frac{3}{11}}$ **= 0,272727 ..... = 0,$\overline{27}$ → dízima periódica simples**

$\mathbf{\frac{21}{90}}$ **= 0,23333 ..... = 2,2$\overline{3}$ → dízima periódica composta**

$\mathbf{\frac{1921}{900}}$ **= 2,1344444 ..... = 2,13$\overline{4}$ → dízima periódica composta**

Cálculo da fração geratriz de uma dízima

O termo **geratriz** refere-se a algo que ***gera alguma coisa***. No caso das dízimas periódicas, a geratriz é a fração que dá origem à dízima. Assim, quando dizemos, por exemplo, que a fração $\frac{11}{3}$ = 3,66666 ..... = 3,$\overline{6}$, estamos afirmando que $\frac{11}{3}$ é a fração geratriz da dízima periódica simples 3,66666...

Vamos estabelecer uma forma de calcular a fração geratriz a partir da dízima, utilizando este mesmo exemplo:

a) Chamamos a dízima periódica 3,6666... de **x**

x = 3,6666... **(I)**

b) Multiplicamos ambos os membros da igualdade **(I)** e obtemos

10x = 36,6666.... **(II)**

c) Em seguida, subtraímos membro a membro as duas igualdades:

$$\begin{array}{rl} & 10x = 36{,}666... \\ (-) & \;\;\;x = \;\;3{,}666... \\ \hline & 9x = 33 \end{array} \rightarrow x = \frac{33}{9} \rightarrow x = \frac{11}{3}$$

Assim, a fração $\frac{11}{3}$ é a geratriz de 3,6666... e podemos escrever $\frac{11}{3}$ = 3,$\overline{6}$.

Vamos, agora obter a geratriz de 2,$\overline{15}$ utilizando o mesmo processo.

a) Chamamos a geratriz de **x**.

x = 2,151515... **(I)**

Como o período 15 tem dois algarismos, multiplicamos os dois membros de (1) por 100:

100x = 215,151515... **(II)**

b) Lembrando que **(I)** é x = 2,151515..., fazemos **(II)** – **(I)** obtendo:

Fernanda Youssef

$$\begin{array}{rrcl} (-) & 100x & = & 215{,}151515... \\ & x & = & (-)\ \ 2{,}151515... \\ \hline & 99x & = & 213{,}00000... \end{array}$$

$$99x = 213 \rightarrow x = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$$

A geratriz da dízima periódica $2,\overline{15}$ é $\frac{71}{33}$.

No caso de termos uma dízima periódica composta, utilizamos o mesmo processo, tomando o cuidado de passar os algarismos que estão antes do período para a parte inteira. Veja os exemplos:

Vamos encontrar a geratriz da dízima $0,5\overline{1}$.

Como existe apenas um algarismo antes do período, multiplicamos a igualdade inicial por 10 e procedemos da mesma forma que na dízima periódica simples:

$$x = 0{,}5111... \rightarrow 10x = 5{,}111...$$

Subtraindo-se membro a membro as igualdades, temos:

$$\begin{array}{rrcl} (-) & 10x & = & 5{,}111... \\ & x & = & (-)\ \ 0{,}5111... \\ \hline & 9x & = & 4{,}6 \end{array}$$

$$9x = 4{,}6 \rightarrow x = \frac{4{,}6}{9} = \frac{46}{90} = \frac{23}{45}$$

Note que multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{4{,}6}{9}$ por 10 para obter uma fração com numerador inteiro. A geratriz de $0,5\overline{1}$ é $\frac{23}{45}$.

Observe, agora, como calculamos a geratriz de $0{,}237777777... = 0{,}23\overline{7}$.

Como existem dois algarismos antes do período, multiplicamos a dízima por 100, obtendo:

$$x = 0{,}237777... \rightarrow 100x = 23{,}7777...$$

Subtraindo-se membro a membro as igualdades, temos:

$$\begin{array}{rrcl} (-) & 100x & = & 23{,}7777... \\ & x & = & 0{,}237777... \\ \hline & 99x & = & 23{,}54 \end{array}$$

$$99x = 23{,}54 \rightarrow x = \frac{23{,}54}{99} = \frac{2\,354}{9\,900} = \frac{107}{450} \rightarrow \text{a geratriz de } 0{,}23\overline{7} \text{ é } \frac{107}{450}.$$

Insista com os alunos na caracterização das dízimas periódicas como números racionais. Explore os exemplos no quadro e destaque a obtenção de dízimas simples e compostas.

Atividades

1. Em seu caderno, dê a representação decimal de:

a) $\frac{7}{2}$ 3,5

b) $-\frac{3}{4}$ − 0,75

c) $\frac{21}{5}$ 4,2

d) $\frac{5}{8}$ 0,625

2. Represente na forma de fração, simplificando quando for possível:

a) 0,7 $\frac{7}{10}$

b) 3,4 $\frac{17}{5}$

c) 0,07 $\frac{7}{100}$

d) 5,25 $\frac{21}{4}$

e) 0,004 $\frac{1}{250}$

f) −3,04 $\frac{76}{25}$

3. Represente na forma decimal:

a) $\frac{5}{3}$ $1,\overline{6}$

b) $-\frac{16}{11}$ $-1,\overline{45}$

c) $\frac{3}{15}$ 0,2

d) $\frac{2}{3}$ $0,\overline{6}$

4. Encontre a geratriz das seguintes dízimas:

a) $3,\overline{6}$ $\frac{11}{3}$

b) $1,\overline{8}$ $\frac{17}{9}$

c) $0,\overline{251}$ $\frac{251}{999}$

d) $3,\overline{01}$ $\frac{298}{99}$

5. Dê a representação decimal dos seguintes números racionais:

a) $\frac{13}{99}$ $0,\overline{13}$

b) $\frac{56}{9}$ $6,\overline{2}$

c) $\frac{113}{990}$ $0,1\overline{14}$

d) $\frac{7}{21}$ $0,\overline{3}$

6. Encontre a fração geratriz das dízima periódicas:

a) $0,\overline{12}$ $\frac{4}{33}$

b) $2,1\overline{7}$ $\frac{215}{99}$

c) $0,1\overline{2}$ $\frac{4}{33}$

d) 0,236236..... $\frac{236}{999}$

7. Leia atentamente a regra prática a seguir e, com base nela, determine as frações geratrizes das dízimas apresentadas.

A geratriz de uma dízima periódica ***simples****, com* ***parte inteira nula****, pode ser obtida através de uma fração cujo numerador é formado pelo período, e cujo denominador tem tantos noves quantos forem os algarismos do período.*

a) $0,\overline{58}$ $\frac{58}{99}$

b) $0,\overline{285}$ $\frac{95}{333}$

c) $0,\overline{8}$ $\frac{8}{9}$

8. Encontre a geratriz das dízimas a seguir, apresentando-as na forma de uma fração irredutível.

a) $3,\overline{7}$ $\frac{83}{33}$

b) $2,\overline{51}$ $\frac{34}{9}$

c) $1,4\overline{8}$ $\frac{67}{45}$

d) $2,13\overline{4}$ $\frac{1921}{900}$

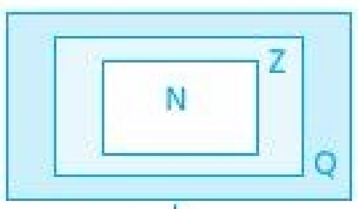
Números Irracionais

Vimos que existem números racionais que, expressos na forma decimal, podem ter um número de casas decimais finito ou infinito, como no caso das dizimas periódicas, onde os períodos repetem-se infinitamente. Observe dois exemplos de números racionais na forma decimal:

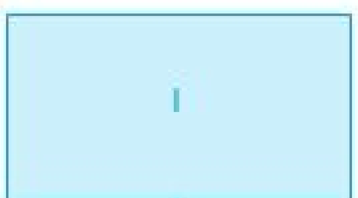
3,53 → número finito de casas decimais (decimal exato);

3,53535353... → dízima periódica infinitas casas decimais (decimal inexato).

Leia o texto e escreva no quadro os principais pontos. Comente que o conjunto dos números Irracionais (I) apresenta todos os números que não podem ser escrito na forma de fração, ou seja, na forma de divisão de dois inteiros. Observe ainda que os números irracionais são representações decimais infinitas não periódicas e destaque que o conjunto I NÃO é uma ampliação do conjunto §. Reforce que esses dois conjuntos não possuem termos em comum e, se achar conveniente, destaque o diagrama a seguir:



Números decimais finitos e números decimais infinitos e periódicos



Números decimais infinitos e não-periódicos

Entretanto, existem números que têm infinitas casas decimais, mas não têm a característica da periodicidade que as dízimas têm. Números como, por exemplo, 1,41421356... não são racionais, pois sua representação decimal é infinita e não é periódica.

Esses números, que não são racionais, são denominados **números irracionais**. Eles têm infinitas casas decimais, mas não podem ser representados na forma de uma fração.

Essas diferentes características dos números racionais e dos números irracionais podem ser resumidas no quadro a seguir. Observe-o com atenção.

Características	NÚMEROS RACIONAIS	NÚMEROS IRRACIONAIS
Casas decimais	Finitas ou infinitas	Infinitas
Período	Quando têm infinitas casas decimais, possuem período	Não têm
Representação na forma de fração $\frac{a}{b}$, $a \in Z$ e $b \in Z^*$	Sempre possível	Nunca é possível

Uma conclusão importante é que um número irracional nunca resulta de uma divisão de números inteiros. Porém, os números irracionais aparecem em muitos cálculos matemáticos, como na operação de cálculo de uma raiz quadrada. Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais. Veja suas dez primeiras casas decimais:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623....$$

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075.....$$

Sempre que possível e necessário, utilizamos aproximações para números irracionais originados por raízes quadradas não exatas.

Utilizando a calculadora, podemos encontrar essas raízes quadradas aproximadas. Porém, é interessante que você saiba fazer estimativas para esses valores, a partir de tentativas de aproximação. Observe, por exemplo, como podemos determinar um valor aproximado para o número irracional $\sqrt{2}$:

- Considerando os inteiros positivos 1 e 2, temos:

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 4$$

Esta primeira aproximação indica que o número que, ao ser elevado ao quadrado resulta 2, está entre 1 e 2.

- Tentamos, então, 1,5:

$$1{,}5^2 = 2{,}25$$

Observe que excedemos o valor 2.

- Tentamos, então, um décimo abaixo de 1,5:

$$1{,}4^2 = 1{,}96$$

- Perceba que $\sqrt{2}$ se encontra entre 1,4 e 1,5.
- Tentamos 1,45:

$$1{,}45^2 = 2{,}1025$$

- Concluímos que $\sqrt{2}$ é menor que 1,45. Vamos então experimentar alguns centésimos abaixo de 1,45:

$$1{,}44^2 = 2{,}0736$$
$$1{,}43^2 = 2{,}0449$$
$$1{,}42^2 = 2{,}0164$$
$$1{,}41^2 = 1{,}9881$$

Observe nos dois últimos resultados, que $\sqrt{2}$ se encontra entre 1,41 e 1,42. Poderíamos repetir esse processo para a casa dos milésimos, começando por 1,415 e calculando os quadrados. No entanto, podemos dizer que 1,41 é um resultado aproximado para a raiz quadrada de dois e apontamos essa aproximação com o símbolo $\cong$, que significa *aproximadamente*.

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41$$

Por outro lado, devemos sempre considerar que nem toda raiz quadrada resulta em um número irracional. Basta lembrar dos números que denominamos **quadrados perfeitos**: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 etc. Suas raízes quadradas são números naturais:

$$\sqrt{0} = 0;\ \sqrt{1} = 1;\ \sqrt{4} = 2;\ \sqrt{9} = 3;\ \sqrt{16} = 4 \text{ etc.}$$

Já os números naturais que não são quadrados perfeitos, têm como raízes quadradas números irracionais.

Reforce mais uma vez que os números irracionais têm representação infinita e não periódica e que, devido aos computadores disponíveis atualmente, é possível determiná-los com centenas de milhões de casas decimais. Por isso, destaque para seus alunos que eles devem tomar cuidado com as aproximações feitas nas calculadoras quando estiver trabalhando com os números irracionais.

Fazer estimativas

Veja alguns exemplos:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3} = 1{,}73205... \\ \sqrt{5} = 2{,}23606... \\ \sqrt{7} = 2{,}64575... \\ \sqrt{8} = 2{,}82842...\end{array}\right\} \rightarrow \text{números irracionais}$$

Existem também números que não são inteiros, cujas raízes quadradas têm casas decimais finitas. Observe:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10{,}24} = 3{,}2 \\ \sqrt{2{,}89} = 1{,}7 \\ \sqrt{21{,}16} = 4{,}6\end{array}\right\} \rightarrow \text{números racionais}$$

Atividades

Para realizar as atividades a seguir você pode utilizar sua calculadora para os cálculos intermediários ou, quando permitido pela atividade, para o cálculo direto.

! Uso de calculadora

9. Fazendo tentativas, calcule por aproximação de duas casas decimais as raízes quadradas a seguir, utilizando a calculadora para os cálculos intermediários e registrando essas operações em seu caderno.

a) $\sqrt{7}$ 2,65

b) $\sqrt{429}$ 20,7

c) $\sqrt{55}$ 7,42

d) $\sqrt{635}$ 25,20

10. Quais dos seguintes números são racionais e quais são irracionais?

a) $\sqrt{55}$ irracional

b) $\sqrt{640}$ irracional

c) $\sqrt{10\,000}$ racional

d) $\sqrt{1{,}21}$ racional

11. Calcule as raízes quadradas a seguir e verifique se elas são números racionais ou irracionais. Faça os cálculos diretamente em sua calculadora.

a) $\sqrt{42{,}25}$ 6,5 racional

b) $\sqrt{841}$ 29 racional

c) $\sqrt{77{,}44}$ 8,8 racional

d) $\sqrt{906{,}01}$ 30,1 racional

12. Observe alguns números que são quadrados perfeitos: ! Argumentar

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196

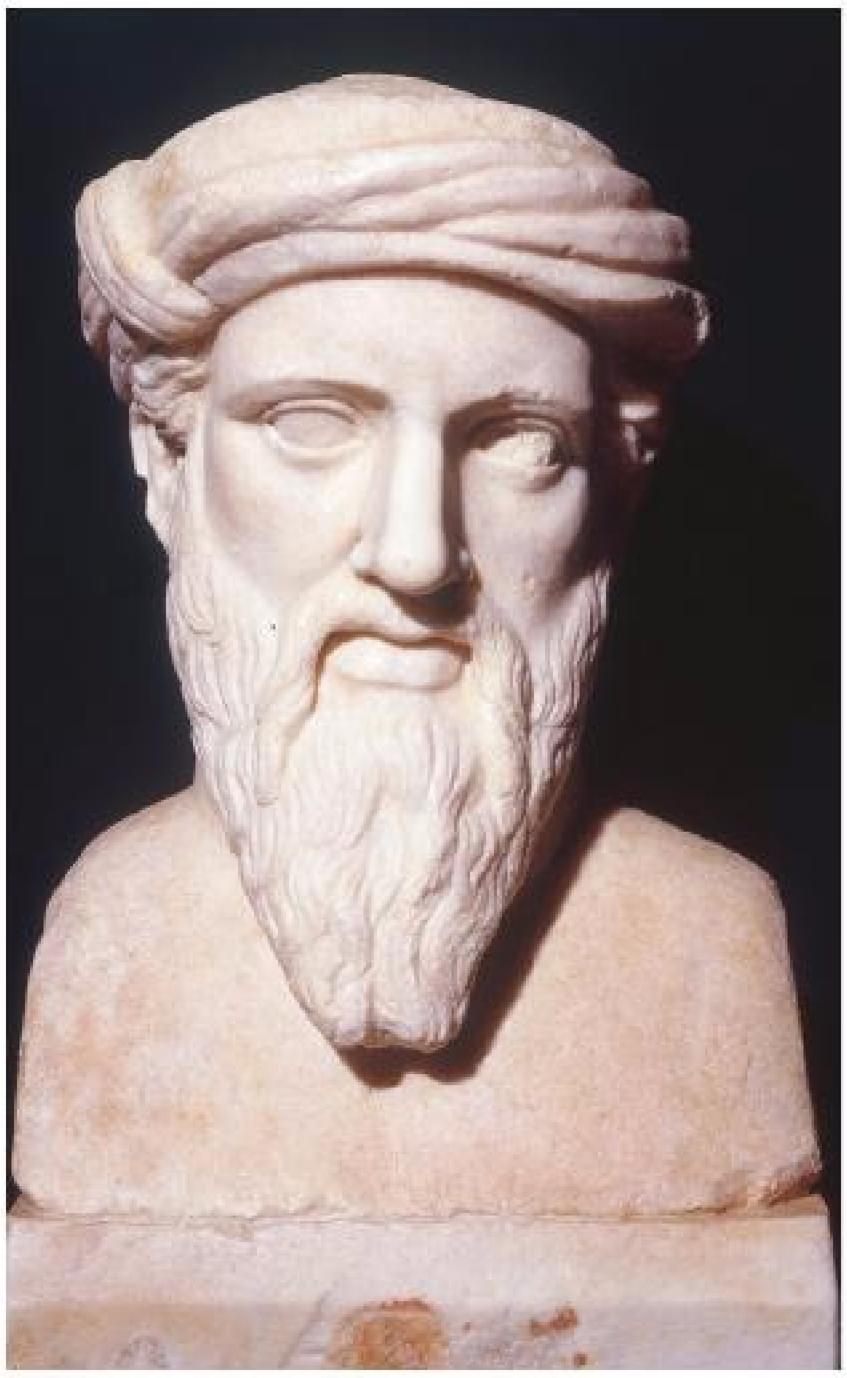
Responda e justifique sua resposta:

a) Um quadrado perfeito qualquer pode terminar em 3? não

b) $\sqrt{3\,727}$ é um número racional ou irracional? irracional

Quando, quem e onde

Os pitagóricos



Pitágoras

Wikimedia

Por volta do ano de 550 a.C., o filósofo grego Pitágoras de Samos, juntamente com seus seguidores, desenvolveu a percepção de que existiam números que não eram inteiros e nem fracionários, registrando-se aí o surgimento do conceito de **número irracional**.

Pitágoras fundou em Crotona, ao sul da Itália, uma sociedade de estudos filosóficos e matemáticos que ficou conhecida como a **Escola Pitagórica,** e seus membros como **pitagóricos**.

Inicialmente, os pitagóricos supunham que os números inteiros e fracionários explicavam todos os fenômenos da natureza, o que levou Pitágoras a proclamar que tudo poderia ser explicado a partir desses números e a formular uma teoria completa sobre a lógica numérica e as características dos números.

Os pitagóricos estudaram e formularam diversas propriedades das figuras planas e, no decorrer desses estudos, propuseram-se a determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1.

Eles chegaram a um número que tinha a estranha característica de ser um **"número que multiplicado por si mesmo é igual a 2"**.

Após várias tentativas de explicação de algo que parecia absurdo, resolveram manter em segredo este número que questionava as bases da lógica numérica da escola pitagórica.

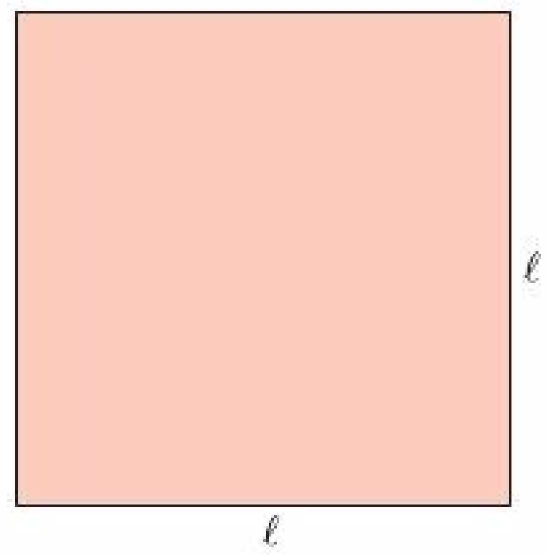
Por essa razão, $\sqrt{2}$, que hoje sabemos ser um **número irracional**, e que os pitagóricos supunham ser único, foi mantido em segredo até a morte de Pitágoras e só revelado por volta de 440 a.C, quando outro célebre pitagórico, chamado Teodoro de Cirene mostrou que existiam outros números irracionais, como:

$$\sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{5}}, \sqrt{\mathbf{6}}, \sqrt{\mathbf{7}}, \sqrt{\mathbf{8}}, \sqrt{\mathbf{10}}, \sqrt{\mathbf{11}}, \sqrt{\mathbf{12}}, \sqrt{\mathbf{13}}, \sqrt{\mathbf{14}}, \sqrt{\mathbf{15}}, \sqrt{\mathbf{17}} \text{ e outros.}$$

! leia o texto e, se achar conveniente, explore mais sobre Pitágoras e sua escola e destaque sua crença que tudo poderia ser explicado pelos números inteiros e racionais. Em geral, os alunos apreciam esse tipo de comentário. Mostre no quadro a demonstração da medida da diagonal de um quadrado de lado 1 de acordo com o texto das próximas páginas.

Lendo o texto sobre o surgimento do número $\sqrt{2}$, percebe-se que os pitagóricos utilizaram um modelo geométrico para sua determinação. Vamos fazer isso, também?

Suponha que você tenha um quadrado de área igual a 2 cm² e queira calcular a medida de seu lado ℓ:



Sabemos que, se os lados de um quadrado medem ℓ cm, sua área em cm², será:

$$A = \ell^2$$

Logo, seu lado ℓ é um número que, elevado ao quadrado, resulta 2:

$$\ell^2 = 2 \rightarrow \ell = \sqrt{2}$$

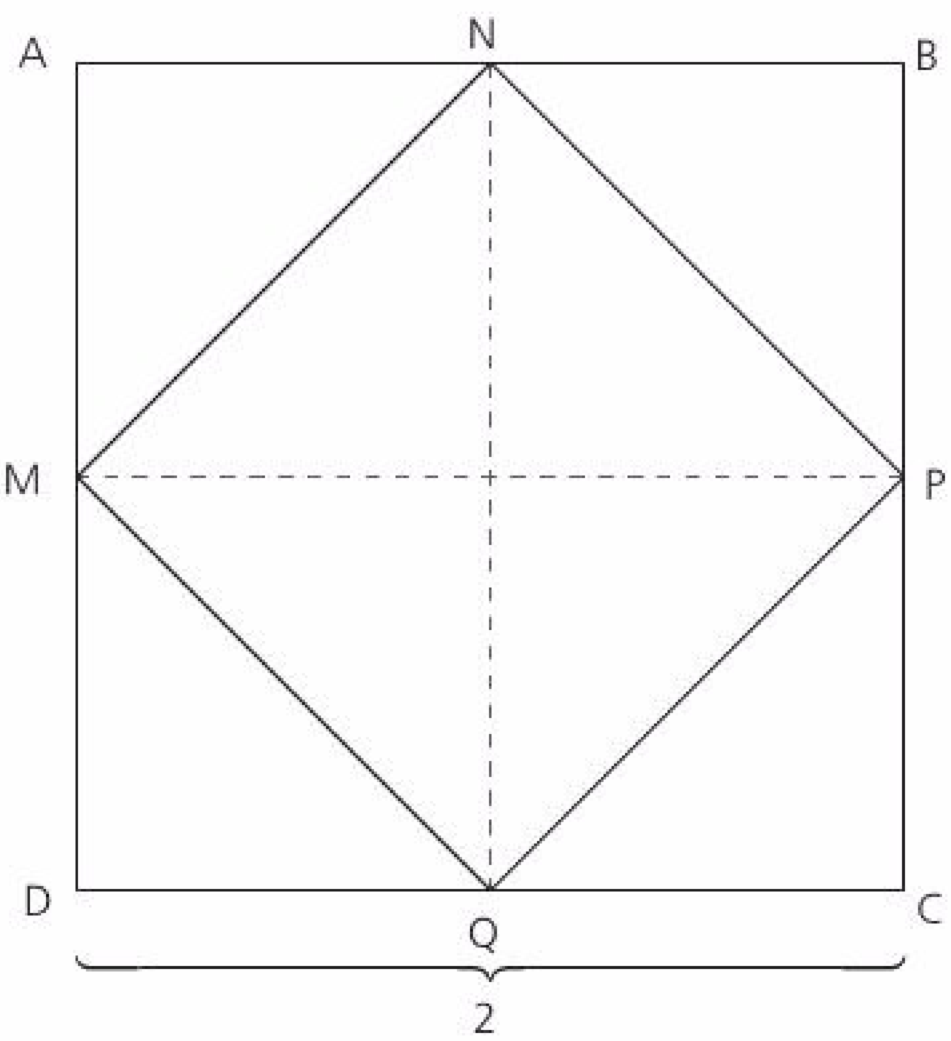
Assim, o quadrado de área igual a 2 cm² tem lados que medem $\sqrt{2}$ cm, ou seja:

$$\ell = 1{,}4142135623\text{....}\ \text{cm}$$

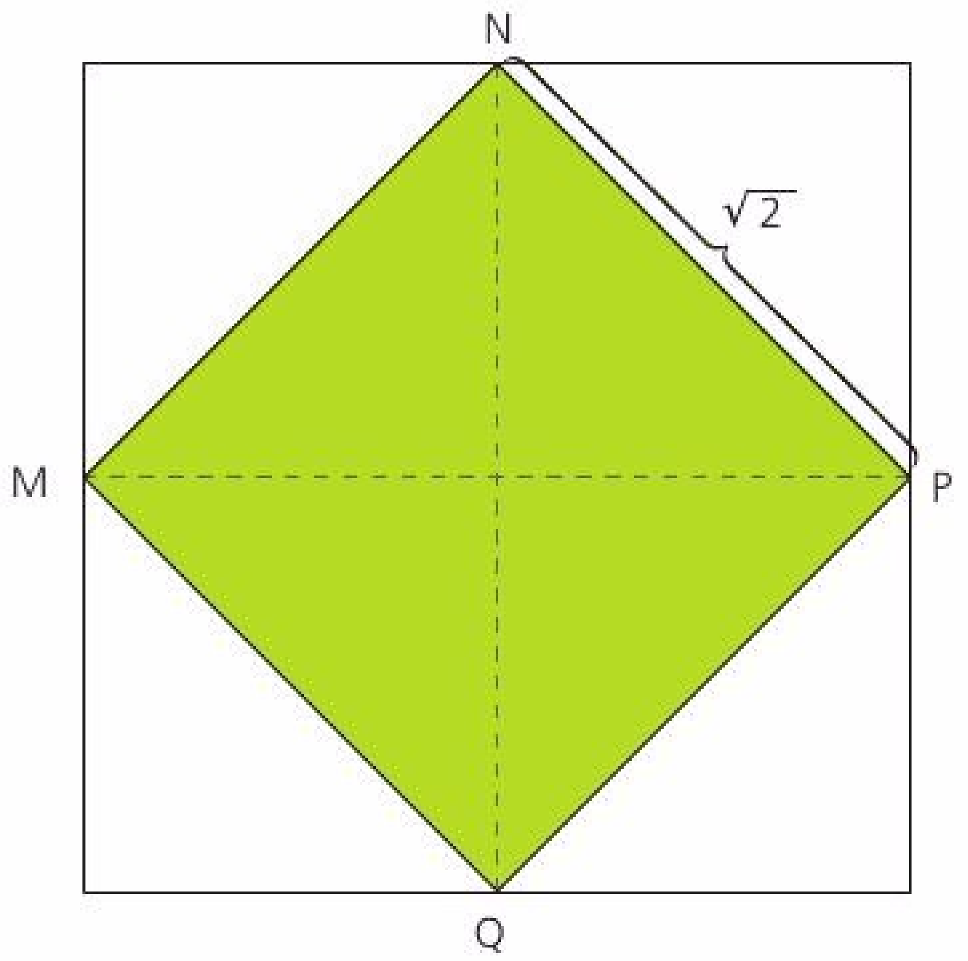
Perceba que, apesar do lado ter infinitas casas decimais, pois sua medida é um número irracional, ele tem um comprimento finito, representado geometricamente pelo lado do quadrado.

Veja, agora, como podemos observar o comprimento $\sqrt{2}$ cm de outra maneira.

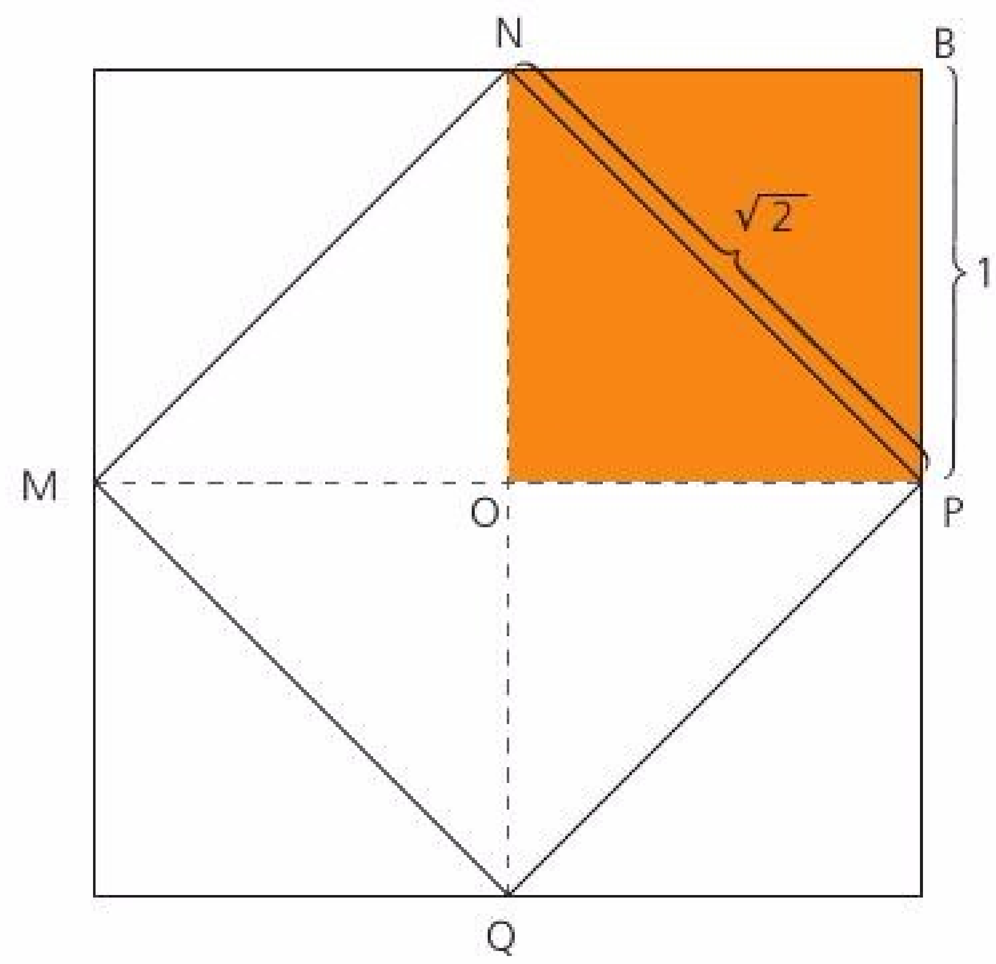
Suponha um quadrado ABCD tenha 2 cm de lado e, portanto, 4 cm² de área:



Unindo-se dois a dois os pontos médios de seus lados, dividimos a área de 4 cm^2 em oito áreas triangulares de 0,5 cm^2 cada:



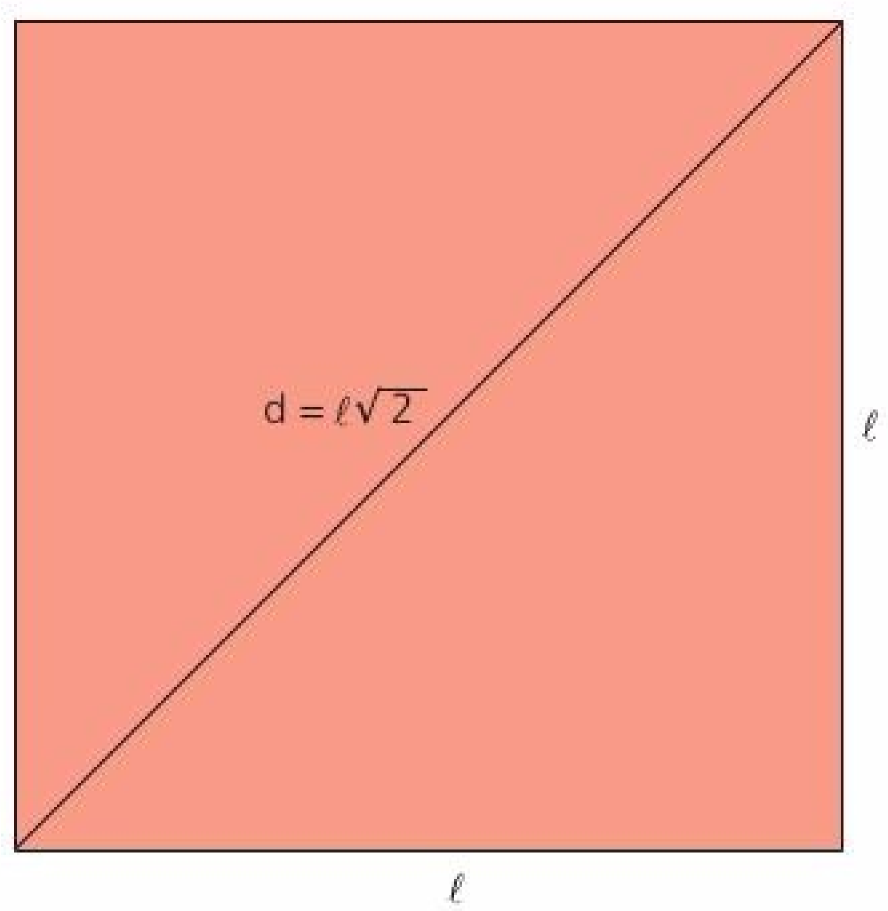
Fazendo isso, obtemos o quadrado MNPQ, de área 4 x 0,5 = 2 cm^2, cujo lado será $\ell = \sqrt{2}$, conforme calculamos anteriormente. Porém, o lado do quadrado MNPQ é a diagonal do quadrado NBPO, cujo lado é 1, conforme mostra a figura ao lado.



Dessa maneira, verificamos que o número irracional $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Se generalizarmos essa constatação, podemos dizer que para um quadrado qualquer de lado ℓ teremos para sua diagonal a medida $\ell\sqrt{2}$.

O número irracional π

Como se pode verificar, os números irracionais não se originam apenas de raízes inexatas. Talvez você já tenha ouvido falar do número π (lê-se pi), que também é um número irracional. Ele é representado pela letra grega π, que é a inicial da palavra ***periphereia*** que, em grego, significa periferia. Para descobrir o significado e um valor aproximado desse número, vamos realizar a atividade prática a seguir.



Na prática

Para realizar essa oficina, você e seus colegas irão necessitar de:

Budda/Dreamstime; Alessandro Paiva/Slavomir Ulicny/SXC; Krokodyl/Aleksandr Ugorenkov/PhotoXpress

- fita métrica de costureira ou um pedaço de barbante;
- régua graduada;
- tesoura;
- calculadora;
- objetos circulares, como lata de refrigerante, lata de óleo de cozinha, copo para água, pedaço de cano de PVC, garrafa pet etc.

A atividade "Na prática" e as demais atividades sugeridas a seguir envolvem conceitos de geometria e têm por objetivo associar os números irracionais à resolução de problemas. Explore essa oportunidade e, se achar conveniente, proponha discussões em grupo.

As imagens não são proporcionais entre si.

Você e seus amigos devem seguir os seguintes passos:

a) Usando a fita métrica, meça o contorno de quatro objetos diferentes. Também é possível medir o contorno passando o barbante em volta do objeto, cortando o comprimento correspondente à circunferência e medindo-o com a régua. Fazendo isso, você obterá a medida do comprimento (ou perímetro) da circunferência desses objetos;

b) Em seguida, meça a distância entre dois pontos da circunferência do objeto, passando pelo seu centro. Dessa forma, você obterá a medida do diâmetro dessa circunferência;

c) Usando sua calculadora, calcule $\pi = \dfrac{\text{COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA}}{\text{DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA}}$;

d) Copie o quadro a seguir em seu caderno e anote os resultados, utilizando cinco casas decimais.

OBJETO	COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA	DIÂMETRO	π

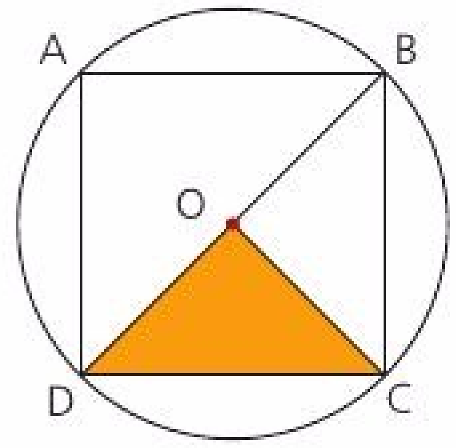
e) Compare os valores obtidos com o número irracional π = **3,141592...**

Ao fazer o cálculo da razão entre o comprimento de cada circunferência e seu diâmetro, você deve ter encontrado valores próximos a 3,14159. Eventuais diferenças devem-se a imprecisões de medidas. Esse número constante, cujo valor aproximado é 3,14 é representado pela letra grega π e é um irracional que se obtém da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Atividades

Interpretar figuras

13. Considere a figura ao lado, que representa um quadrado de lado 1 cm inscrito numa circunferência de centro **O**:



Determine:

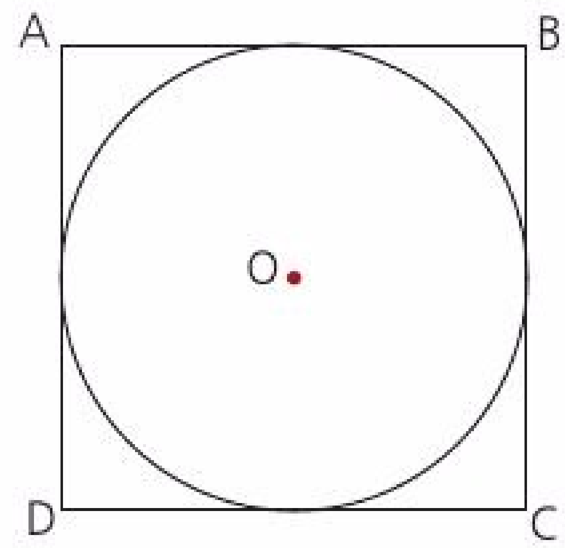
a) A área do quadrado ABCD. 1 cm^2

b) A diagonal $\overline{DB}$ do quadrado. $\sqrt{2}$ cm

c) O raio e o comprimento da circunferência. (Utilize $\pi = 3,14$) 4,4274 cm

d) A área do triângulo ODC. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm^2

14. Na figura a seguir, a circunferência de centro **O** tem raio de 3 cm e está inscrita no quadrado ABCD. raio = 3 cm lado = 6 cm



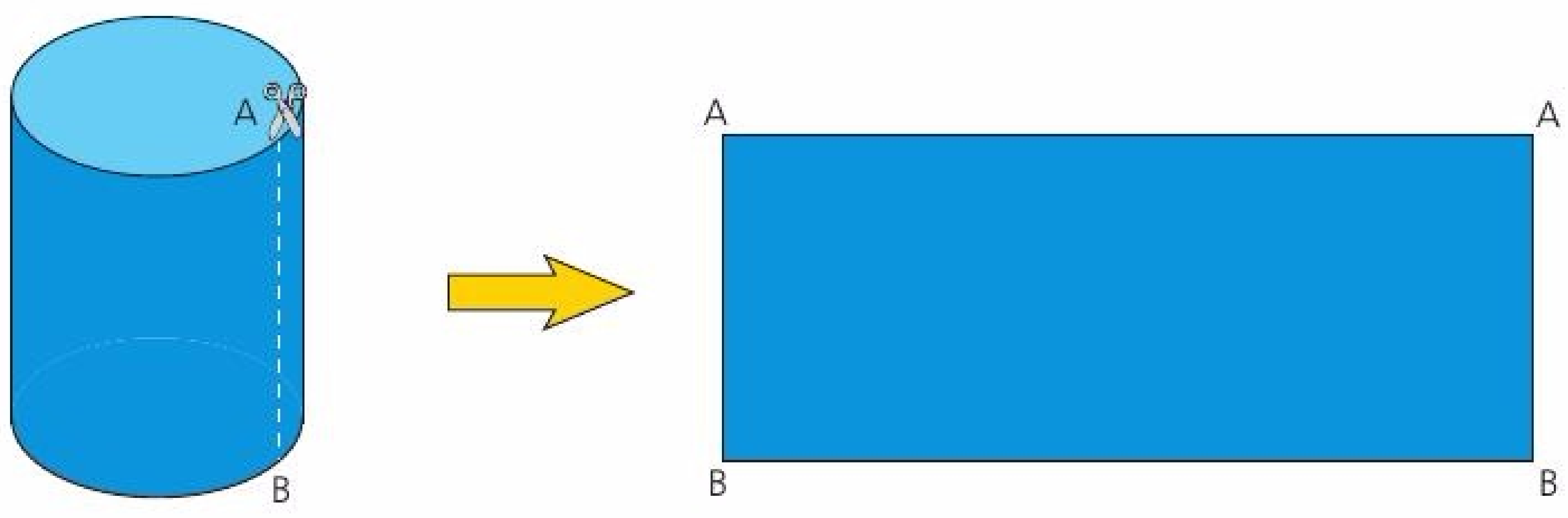
a) Determine o comprimento da circunferência. (utilize $\pi = 3,14$)
18,84 cm

b) Calcule o lado, a diagonal e a área do quadrado ABCD.
diagonal ≅ 8,49 cm
área = 36 cm^2

15. Um quadrado tem área de 20 cm^2. Calcule a medida dos seus lados com uma aproximação de centésimos de centímetro. $\ell \cong 4,47$ cm

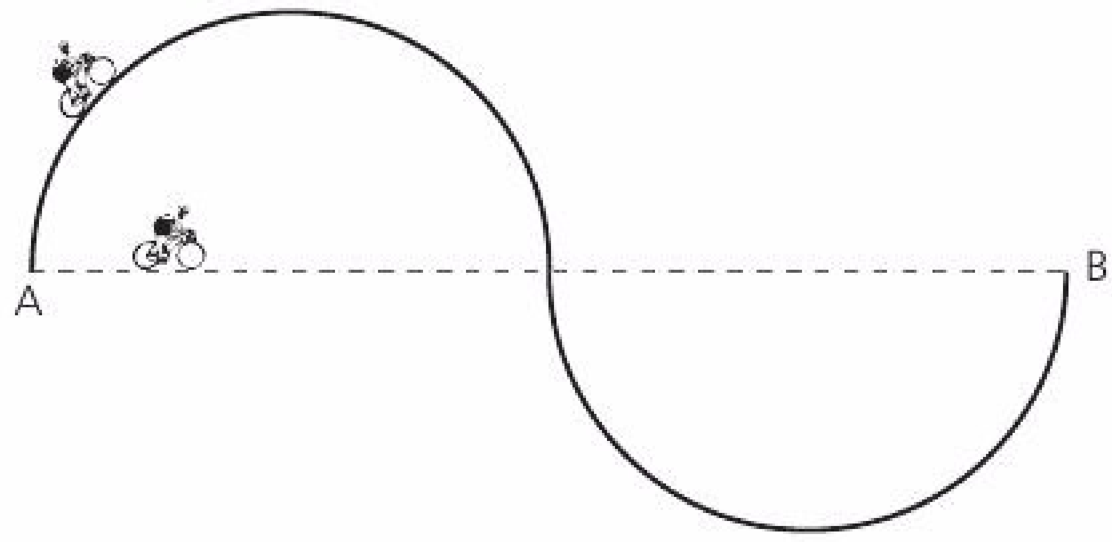
16. Uma circunferência tem 5 cm de comprimento. Utilizando $\pi = 3,14$, calcule o diâmetro e o raio da circunferência. r ≅ 0,79 cm
diâmetro = 1,58 cm

17. A figura a seguir representa um tubo cilíndrico de diâmetro de 4 cm, que foi recortado ao longo do segmento $\overline{AB}$ de medida 5 cm. Esta planificação resultou em um retângulo. Sabendo-se que a área de um retângulo é dada pelo produto de seus lados, determine a superfície lateral do tubo cilíndrico. 62,8 cm^2



18. O diâmetro da roda de um automóvel mede 0,5 m. Calcule quantas voltas dá cada roda desse automóvel quando ele percorre 47,1 km. 30 000 voltas

19. Dois ciclistas saem simultaneamente do ponto **A** em direção ao ponto **B**. O primeiro percorre uma pista retilínea **AB** de 200 m de comprimento. O segundo percorre uma pista sinuosa, formada por duas semicircunferências de mesmo raio, conforme a figura. Determine o comprimento da pista percorrida pelo segundo ciclista. 314 m

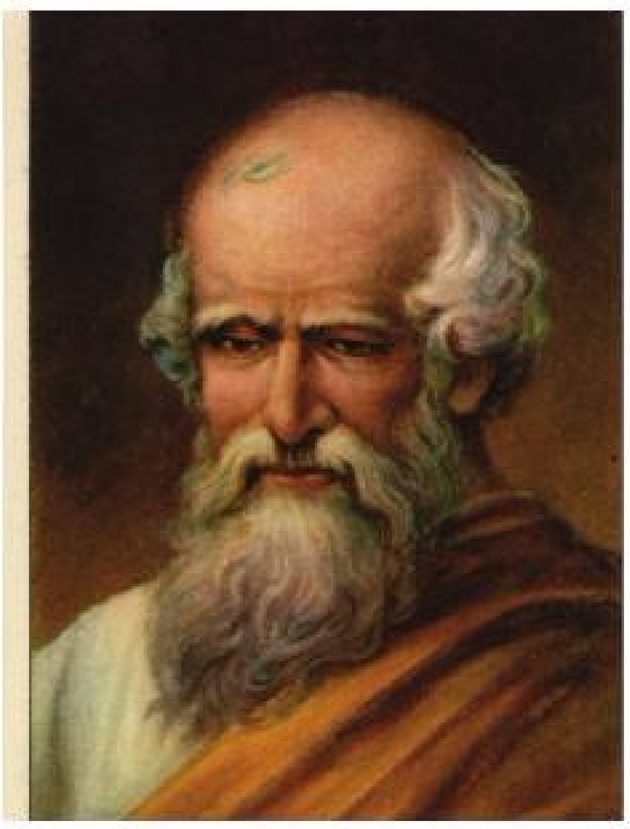


Leia o texto e destaque no quadro que uma das características comuns a todas as circunferências, qualquer que seja seu tamanho, é a razão entre o seu perímetro (comprimento da circunferência) e seu diâmetro (a largura máxima da circunferência).

Quando, quem e onde

O comprimento da circunferência

Os egípcios, há 3 500 anos, calculavam a razão $\dfrac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}}$ como 3,16. Já os babilônios, consideravam que o comprimento de uma circunferência era igual a três vezes seu diâmetro. Sendo assim, para eles, π era igual a 3.


Biblioteca Nacional, Paris, França

Arquimedes

Trabalhando com polígonos de grande número de lados, que se aproximam de uma circunferência, o matemático grego Arquimedes, deduziu, no século III a.C que o valor de π era um número cujo valor estaria entre 3,1408 e 3,1428. Aproximadamente 500 anos depois, no século II da era cristã, o astrônomo grego Ptolomeu, trabalhando com polígonos de mais de 700 lados, deduziu que o valor de π seria igual a 3,1416.

Deve-se ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) o uso definitivo do símbolo π e ao, também suíço, Johan Lambert (1728-1777), a primeira prova de que o número π é um número decimal que possui infinitas casas decimais, sem ser uma dízima periódica, sendo, portanto, um número irracional.


Kunstmuseum Basel, Suiça.

Euler

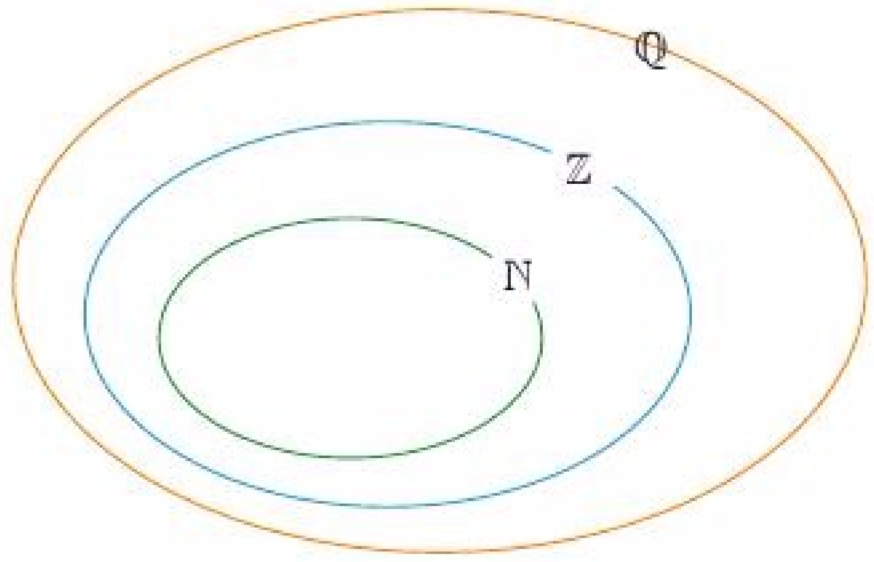
Números reais

Já estudamos todas as características dos seguintes conjuntos:

Leia o texto com seus alunos e destaque no quadro que o conjunto dos números Reais é o conjunto que contém todos os outros conjuntos já citados. Em outras palavras, ele é resultado da união dos racionais com os irracionais. Destaque os diagramas dessa página no quadro e explore a leitura utilizando os símbolos $\in$, $\notin$ $\subset$.

- Conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3, ...}
- Conjunto dos números inteiros Z = {..., –2, –1, 0, 1, 2, ...}
- Conjunto dos números racionais Q, formado por todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, sendo $a,b \in Z$ e $b \neq 0$.

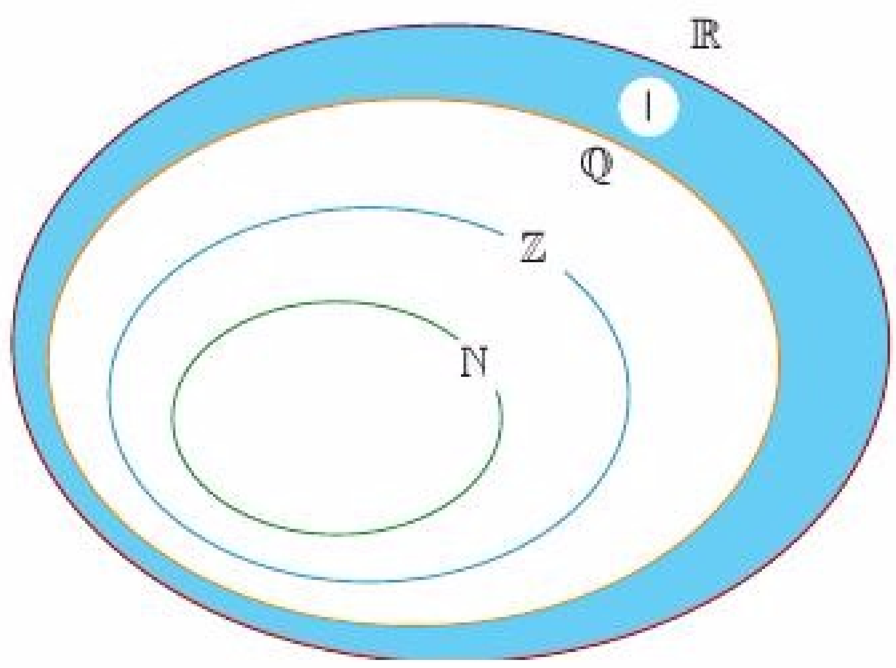
Já vimos também que todo número natural é inteiro e que todo número inteiro também é um número racional. Em outras palavras, o conjunto dos naturais está contido no conjunto dos inteiros e este no conjunto dos racionais. Representando a relação entre esses conjuntos em diagramas, teremos a figura ao lado:



$N \subset Z \subset Q$

Além desses conjuntos, estudamos também o conjunto dos **números irracionais**, cujos elementos são todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\mathbf{\frac{a}{b}}$, sendo que $a, b \in Z$ e $b \neq 0$.

A reunião dos conjuntos **N, Z, Q** e **irracionais**, define o **conjunto dos números reais**, que indicaremos por **R**. Observe no diagrama ao lado que tanto os racionais quanto os irracionais são números reais. Se representarmos o conjunto dos irracionais por **I,** o conjunto dos números reais pode ser escrito como **$R = Q \cup I$**.



Veja alguns exemplos de números reais:

- **$8 \in R$**
- **$-7 \in R$**
- **$\frac{5}{4} \in R$**
- **$\sqrt{5} \in R$**
- **$4,3333... \in R$**
- **$-15,\overline{21} \in R$**
- **$\pi \in R$**
- **$0 \in R$**

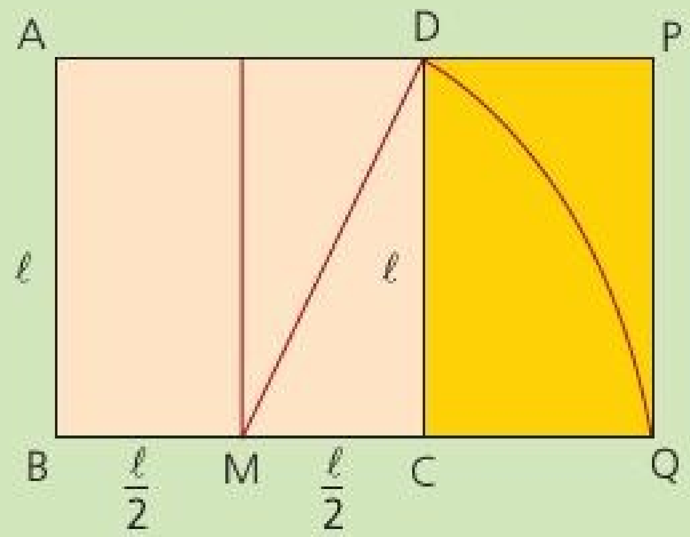
Conexão

O número de ouro

O número de ouro, representado pela letra grega Φ (lê-se "fi") é um número irracional muito especial, que tem sido utilizado e estudado desde o antigo Egito. Datam dessa época muitas construções egípcias nas quais as proporções entre suas dimensões são representadas pelo número Φ. Seu valor é:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\,204...$$

Mesmo tendo sido muito utilizado pelos egípcios, foram os gregos que desenvolveram estudos de sua presença na Geometria, nas Artes, na Arquitetura, na anatomia de plantas e animais e em diversos cálculos matemáticos.



Para que você entenda a **proporção áurea** ou **proporção de ouro**, vamos considerar um retângulo ABCD de lado ℓ. Observe a imagem ao lado.

Com centro no ponto médio M do lado $\overline{BC}$ e utilizando-se um compasso, traçamos o arco DQ de tal maneira que $\overline{MQ}$ seja igual a $\overline{MD}$. Fazendo isso, construímos um novo retângulo ABPQ, onde:

$$\overline{MD}^2 = \ell^2 + \frac{\ell^2}{4} \rightarrow \overline{MD}^2 = \frac{5\ell^2}{4} \rightarrow \overline{MD} = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$$

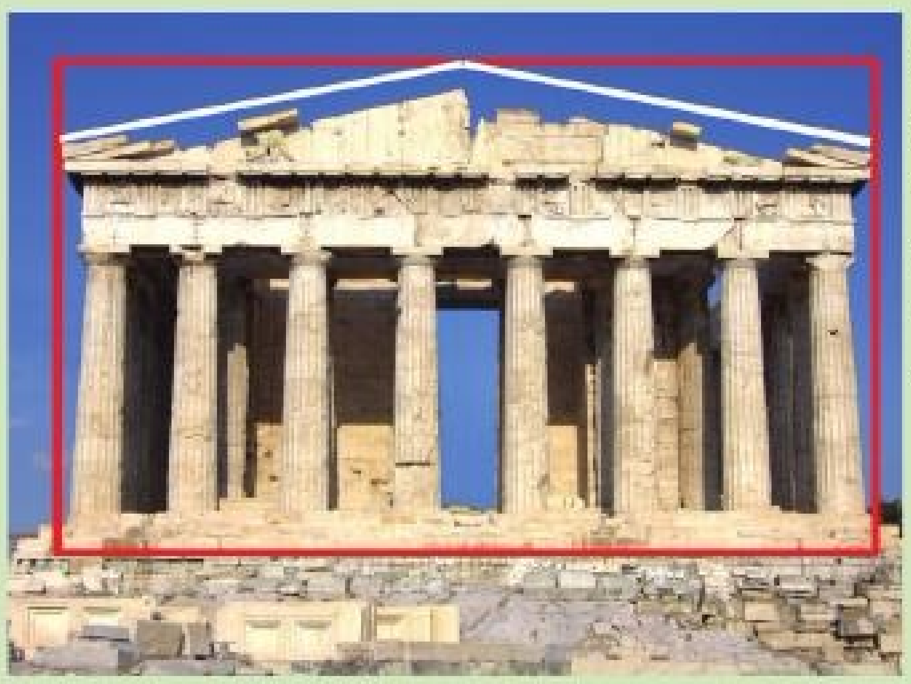
$$\overline{MD} = \overline{MC} = \frac{\ell\sqrt{5}}{2} \rightarrow \overline{BQ} = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$$

Assim, a razão entre o maior lado e o menor lado do retângulo ABPQ será:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\ell}{2} + \frac{\ell\sqrt{5}}{2}}{\ell} \rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\overline{AB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Todo retângulo no qual a relação entre o lado maior e o lado menor é o número de ouro chama-se **retângulo áureo**.

Do ponto de vista estético a forma do retângulo áureo é extremamente agradável e foi utilizada, por exemplo, na construção do Pathernon em Atenas, no qual o retângulo que envolve sua face frontal é áureo.



Konstantinos Dafalias/SXC

Pathernon, Atenas , Grécia, 2008.

Por ser uma forma estética muito agradável, a proporção áurea pode ser encontrada (com valores aproximados) no formato dos cartões de crédito, nas carteiras de identidade e em diversos projetos arquitetônicos.

Frederic Carmel/SXC

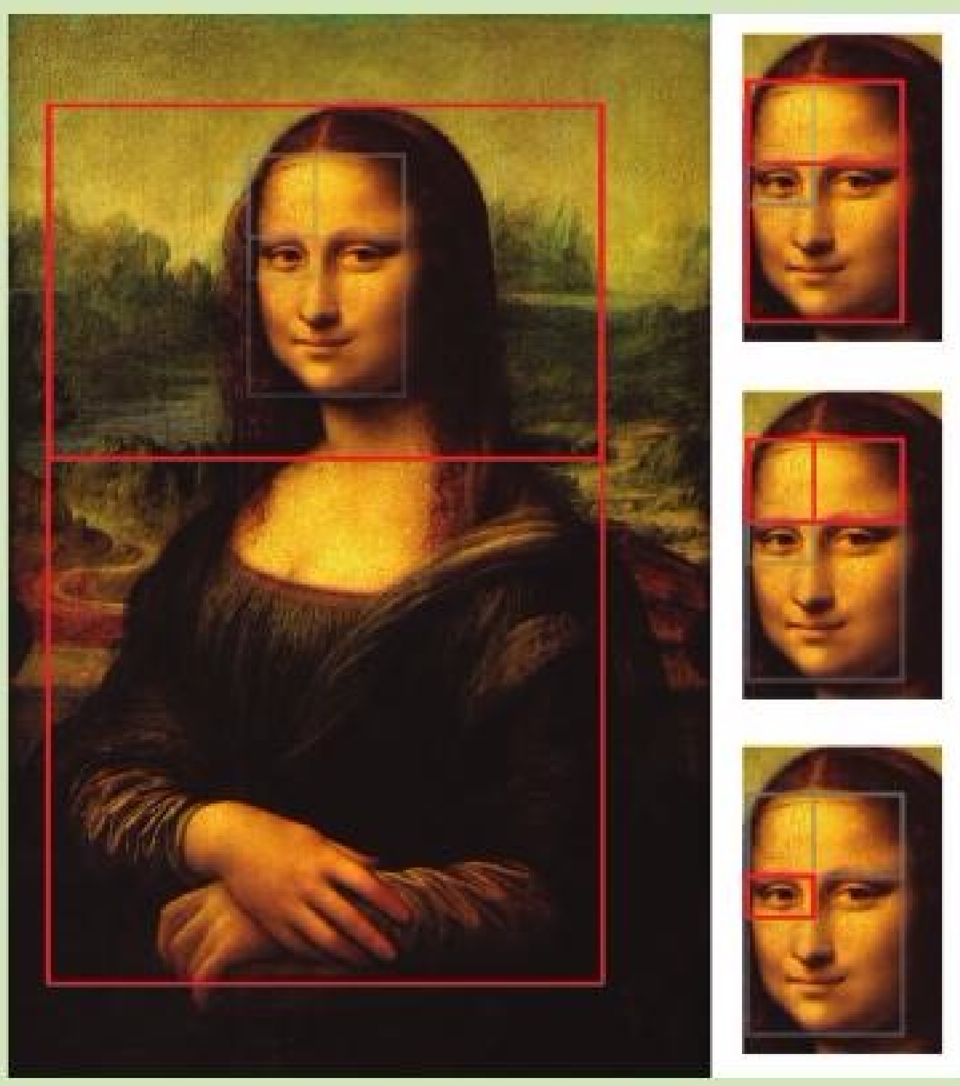
Patrimonio Designs/PhotoXpress

A proporção áurea também pode ser encontrada no desenho de aparelhos como as TVs de tela plana e os iPods.

Ulisse/PhotoXpress

Jannes Glas/SXC

Também nas artes são inúmeras as situações em que os artistas recorrem à proporção áurea para manifestar a beleza e harmonia das formas. Veja, por exemplo, como Leonardo da Vinci utilizou-se dos retângulos áureos para pintar o mais famoso quadro do mundo, a Mona Lisa.



Museu do Louvre, Paris, França

VINCI, Leonardo. *Mona Lisa*, 1507. Museu do Louvre, Paris, França. Óleo sobre madeira de álamo, 77 cm x 53 cm.

A reta real

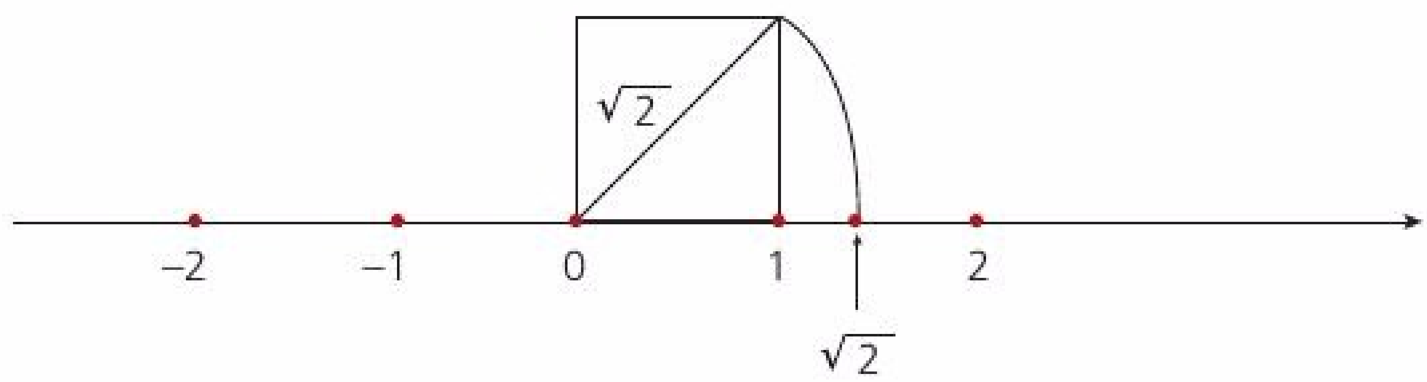
Quando associamos os números naturais a pontos de uma reta, vimos que apenas alguns pontos representavam esses números. O mesmo ocorreu quando associamos os números inteiros e os racionais aos pontos de uma reta. Isso equivale a dizer que o conjunto dos racionais não “preenche” todos os pontos de uma reta.

Observe, por exemplo, que $\sqrt{2}$, que não é um número racional, pode ser representado na reta numérica. Veja como fazemos isso.

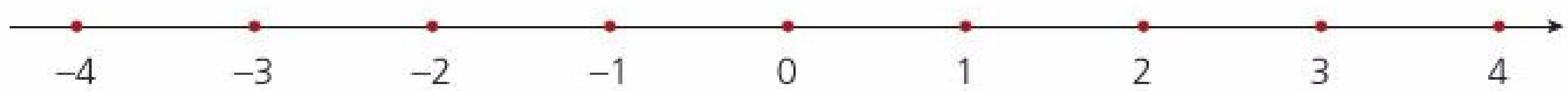
Leia o texto com seus alunos e comente que foi o processo de medição de segmentos geométricos que levou à noção de número real e, por isso, podemos considerar o comprimento de um segmento de reta como exemplo do número real. Este processo de medição é tão significativo que o conjunto dos números reais é também conhecido como a reta real. O conjunto R pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto e vice versa; a reta real é o modelo geométrico de R.

Inicialmente, lembre-se de que, num quadrado em que os lados medem 1 unidade, as diagonais medem $\sqrt{2}$.

Vamos desenhar, então, um quadrado com lados de 1 unidade sobre a reta. Depois, transportaremos essa diagonal para a reta.



Verificamos que existe um ponto da reta que representa o número $\sqrt{2}$. O mesmo acontece com $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, π e outros números irracionais. Isso nos leva a concluir que, se existem pontos das retas para todos os racionais e também para todos os irracionais, todos os números reais podem ser representados numa reta, chamada de **reta real**.



Como a reta real é orientada, quanto mais à direita estiver um ponto, maior será o número real a ele associado. Essa ideia nos permite fazer comparações entre números reais. Observe alguns exemplos e procure situá-los na reta real.

$$\left.\begin{array}{l}\pi = 3{,}14\ldots\\ \sqrt{2} = 1{,}41\ldots\end{array}\right\}\ \pi > \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi = 3{,}14\ldots\\ \dfrac{18}{4} = 4{,}5\end{array}\right\}\ \pi < \dfrac{18}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10{,}24} > 3{,}02\\ \sqrt{1{,}89} < 1{,}5\\ \sqrt{26{,}01} = 5{,}1\end{array}\right\} \rightarrow \text{verifique na reta real}$$

Podemos agora resumir tudo o que vimos sobre números, definindo os números reais como um conjunto de números que podem ser representados por uma expressão decimal finita, por uma decimal infinita e periódica ou, ainda, por uma expressão infinita e não periódica. Quando é finita ou infinita e periódica tem-se um número **racional**. Em caso contrário, tem-se um número **irracional**. Indicamos esse conjunto pela letra **R** que vem da palavra **real**.

Admitem-se também para os números reais as seguintes notações:

R* (todos os reais menos o zero)

R_+ (todos os reais positivos mais o zero)

R_- (todos os reais negativos mais o zero)

Atividades

20. Indique se cada sentença a seguir é verdadeira ou falsa:

a) $\frac{2}{3} \notin Z$ V

b) $\frac{4}{3} \in Q$ V

c) $-2,1313... \in Q$ V

d) $-8 \in R_+$ F

21. Indique quais sentenças são verdadeiras e quais são falsas.

a) $N \subset Q$ V

b) $N \not\subset Q$ F

c) $Q \subset R^*$ V

d) $N \subset Z \subset Q \subset R$ V

22. Indique três exemplos de produtos de números irracionais que resultam em um número racional. a) O, b) Z, c) ∅

23. Utilizando sua calculadora, e os sinas **>**, **<** ou **=**, compare cada um dos números reais a seguir:

a) $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$

b) $\sqrt{20}$ e 4,4 $\sqrt{20} > 4,4$

c) $-\frac{31}{7}$ e $-\frac{43}{9}$ $-\frac{31}{7} > -\frac{43}{9}$

d) 7,2 e $\sqrt{51}$ $7,2 > \sqrt{51}$

e) $\frac{7}{2}$ e $-\frac{2}{7}$ $\frac{7}{2} > -\frac{2}{7}$

f) $-\sqrt{11}$ e $-\sqrt{7}$ $-\sqrt{11} > -\sqrt{7}$

24. Dados **n = 3** e **m = $\sqrt[3]{2}$**, efetue as operações e classifique as afirmações em verdadeiras ou falsas.

a) n + m é racional. F

b) n · m é irracional. V

c) m^2 é irracional. V

d) m^3 é irracional. F

25. Assinale verdadeiro ou falso para cada uma das seguintes afirmações:

a) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional. Falso

b) Os números que possuem representação decimal periódica são irracionais. Falso

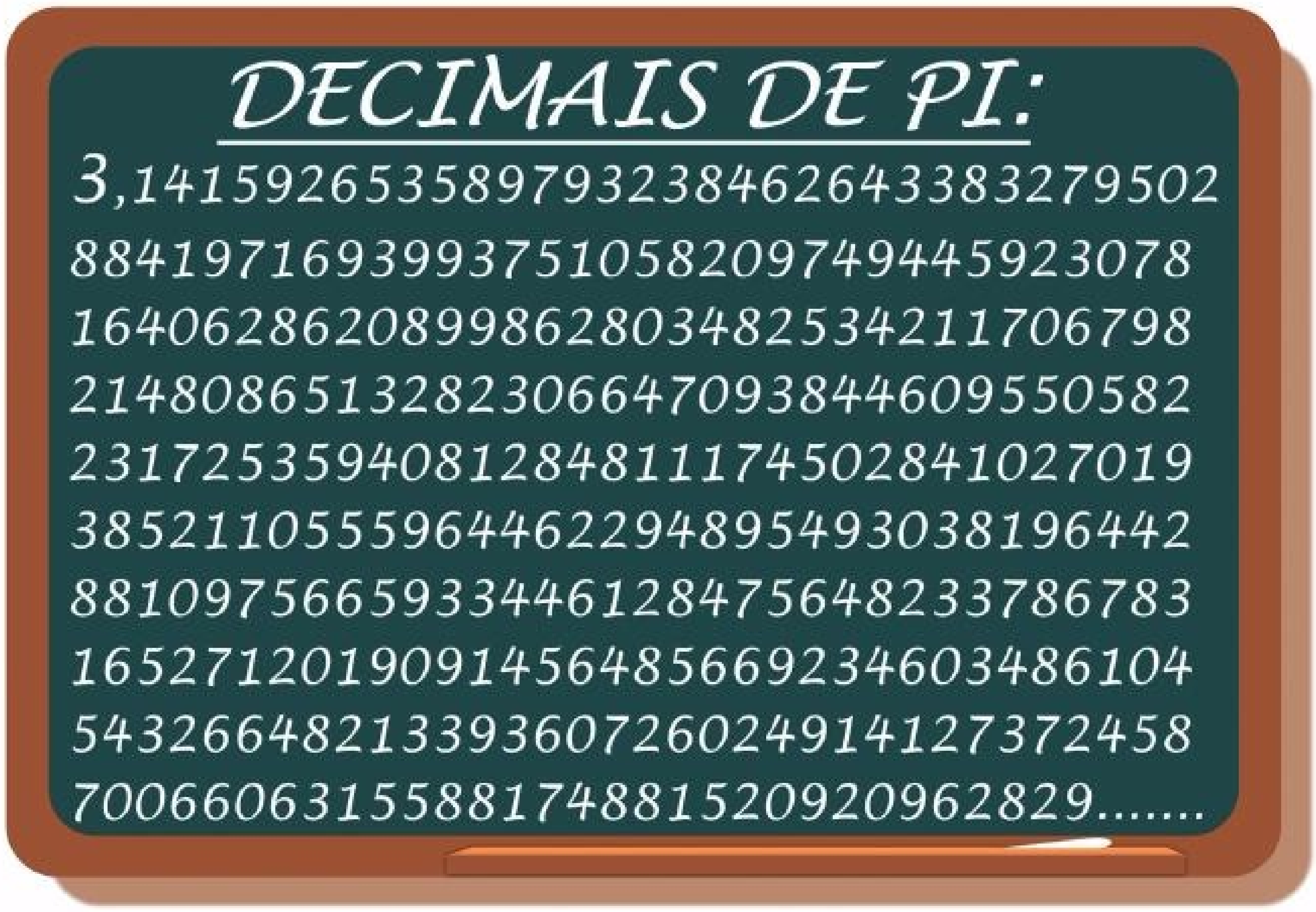
c) Todo número racional tem uma representação decimal finita. Falso

26. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "*O produto de dois números irracionais pode ser um número racional.*" Justifique sua resposta com exemplos.
V, pois, por exemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Curiosidade

Quantas casas tem o número π?

Foram realizadas diversas iniciativas para o cálculo das casas decimais de π, algumas delas chegando a determinar mais de 10 milhões de algarismos após a vírgula. Apenas por curiosidade, observe as primeiras 360 casas decimais, sem que haja qualquer regularidade como a que vemos nos períodos das dízimas periódicas.



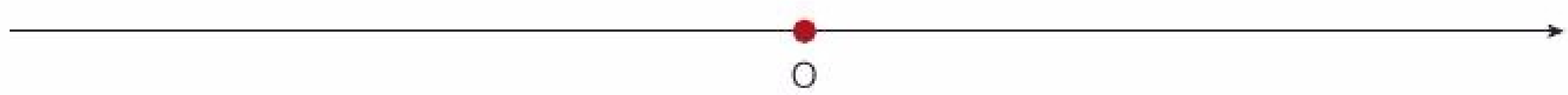
Olympixel/Fotolia

Intervalos

Leia o texto com seus alunos e explore no quadro a notação dos intervalos e dos conjuntos em cada caso. Comente que como os números reais podem ser associados a cada ponto de uma reta, eles nos permitem explorar a ideia do contínuo. O matemático russo Georg Cantor (1845-1918) destacou, em seus estudos, diversos aspectos interessantes sobre conjuntos numéricos finitos e infinitos.

Já vimos que podemos representar o conjunto dos números reais associando cada número $x \in R$ a um ponto de uma reta r.

Assim, convencionando-se uma origem **O**, associando a ela o zero, e adotando uma unidade e um sentido positivo para esta reta, teremos a **reta real**.



Vamos considerar, agora, dois números reais **a** e **b**, com **a < b**. Os subconjuntos de R, que podemos obter na reta real a partir de **a** e **b**, são denominados **intervalos.**

Intervalos limitados

a) **Intervalo fechado** – Números reais maiores que **a** ou iguais a **a** e menores que **b** ou iguais a **b**.

Utilizando os símbolos **[** e **]** para indicar que os pontos das extremidades que fazem parte do intervalo, representamos o intervalo fechado por:

Intervalo: [a, b]
Conjunto: $\{x \in R \mathbin{/} a \leq x \leq b\}$

b) **Intervalo aberto** – Números reais maiores que **a** e menores que **b**.

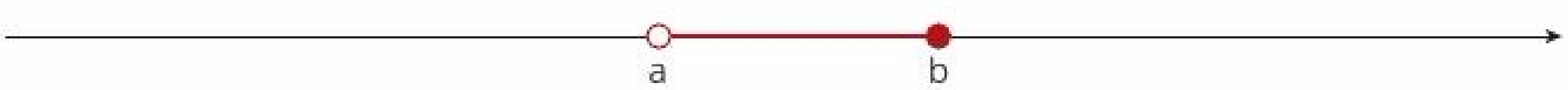
Neste caso, como as extremidades **a** e **b** não fazem parte do intervalo, marcamos esses pontos na reta com "*bolinhas vazias*" e representamos o intervalo utilizando os símbolos **]** e **[** . Observe:

Intervalo:]a, b[
Conjunto: $\{x \in R \mathbin{/} a < x < b\}$

c) **Intervalo fechado à esquerda** – Números reais maiores que **a** ou iguais a **a** e menores que **b**.

Intervalo: [a, b[
Conjunto: $\{x \in R \mathbin{/} a \leq x < b\}$

d) **Intervalo fechado à direita** – Números reais maiores que **a** e menores que **b** ou iguais a **b**.



Intervalo:]a, b]
Conjunto: $\{x \in R \mathbin{/} a < x \leq b\}$

Observe alguns exemplos de intervalos limitados:

- $\{x \in R \ / \ 2 \leq x \leq 5\}$

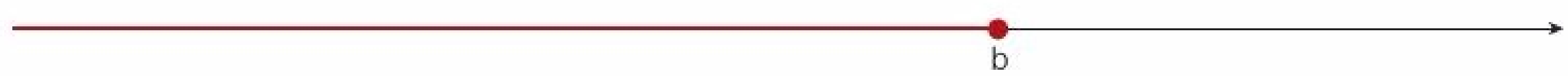
- $\{x \in R \ / \ -3 < x < 8\}$

- $\{x \in R \ / \ 0 \leq x < 21\}$

- $\{x \in R \ / \ \sqrt{2} < x \leq \pi\}$

Intervalos ilimitados

a) **Semirreta esquerda, fechada, de origem b** – Números reais menores que **b** ou iguais a **b**.

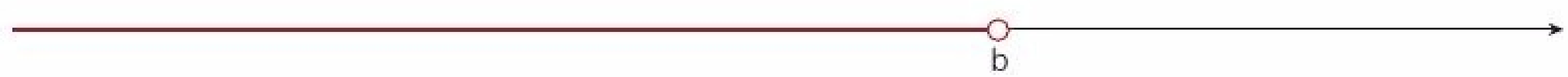


Leia o texto com seus alunos e destaque no quadro os exemplos propostos. Crie mais exemplos, se achar conveniente, e explore a interpretação da representação dos intervalos.
Nesse momento é fundamental garantir que seus alunos entenderam esses conceitos e é interessante reforçar as operações com os intervalos.

Para indicar que a semirreta é infinita "à esquerda", utilizamos **$-\infty$** (lê-se **menos infinito**), onde o sinal de menos apenas indica o sentido dos números negativos.

Intervalo: $]-\infty, b]$
Conjunto: $\{x \in R \ / \ x \leq b\}$

b) **Semirreta esquerda, aberta, de origem b** – Números reais menores que **b**.



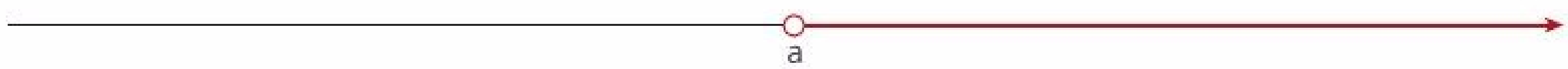
Intervalo: $]-\infty, b[$
Conjunto: $\{x \in R \ / \ x < b\}$

c) **Semirreta direita, fechada, de origem a** – Números reais maiores que **a** ou iguais a **a**.

Neste caso, para indicar que a semirreta é infinita "à direita", utilizamos **+∞** (lê-se **mais infinito**).

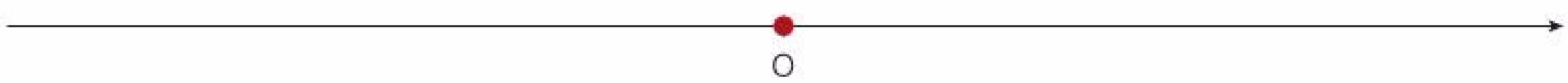
Intervalo: $[a, +\infty[$
Conjunto: $\{x \in R \;/\; x \geq a\}$

d) **Semirreta direita, aberta, de origem a** – Números reais maiores que **a**.



Intervalo: $]a, +\infty[$
Conjunto: $\{x \in R \;/\; x > a\}$

Utilizando a notação de intervalos, podemos representar a reta real, ou conjunto dos números reais, da seguinte maneira:



Intervalo: $]-\infty, +\infty[$

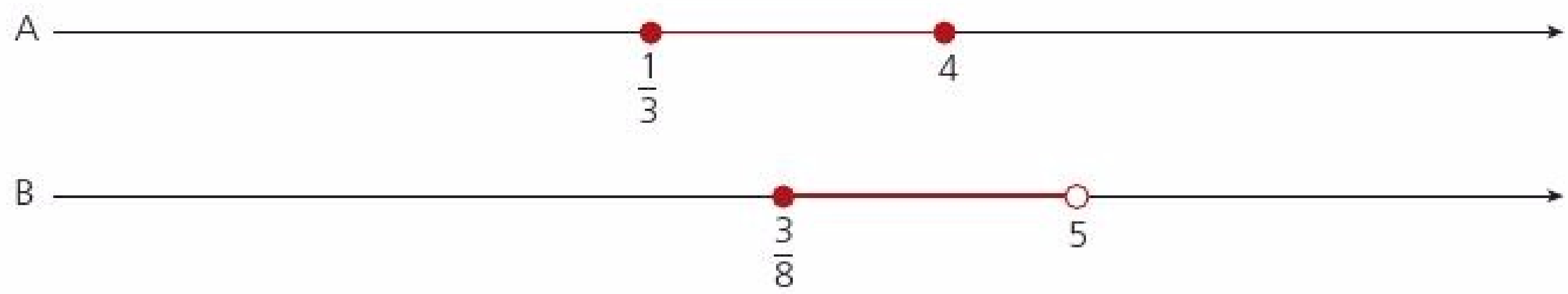
Conjunto: R

A representação dos intervalos é muito útil para a solução de problemas que têm infinitas soluções, como veremos mais adiante ao estudarmos inequações com soluções em R. Por enquanto, é importante que saibamos operar com conjuntos representados por intervalos. Vamos fazer isso com exemplos.

Dados os intervalos $A = \left[\frac{1}{3}, 4\right]$ e $B = \left[\frac{3}{8}, 5\right]$, vamos efetuar as operações $A \cup B$ e $A \cap B$.

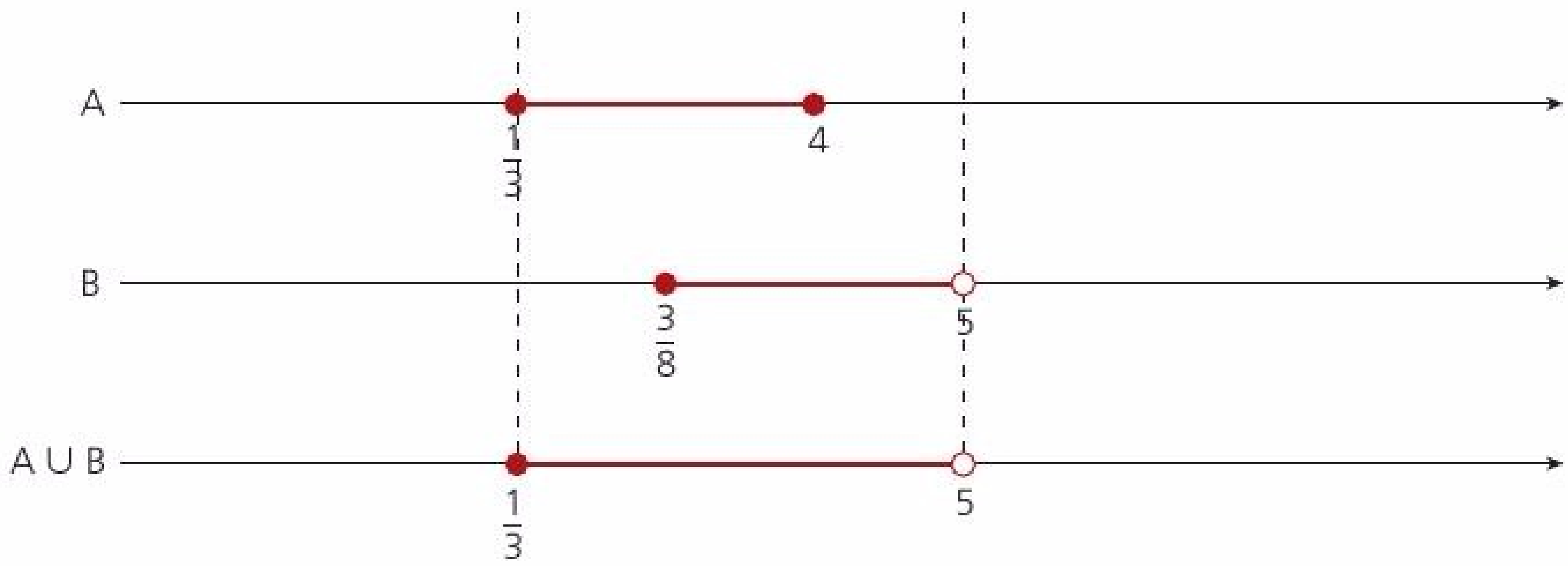
- $A \cup B = \left[\frac{1}{3}, 4\right] \cup \left[\frac{3}{8}, 5\right]$

Em primeiro lugar, posicionamos os dois conjuntos paralelamente, mantendo a orientação da reta real. Ou seja, os números, em ambos os conjuntos, devem estar na ordem crescente de seus valores:



Como desejamos determinar $A \cup B$, devemos tomar todos os elementos que pertencem a A ou a B. Fazemos isso buscando a menor e a maior extremidade dos dois intervalos na reta real.

Professor: enfatize para os alunos a diferença entre as operações de União e Intersecção.

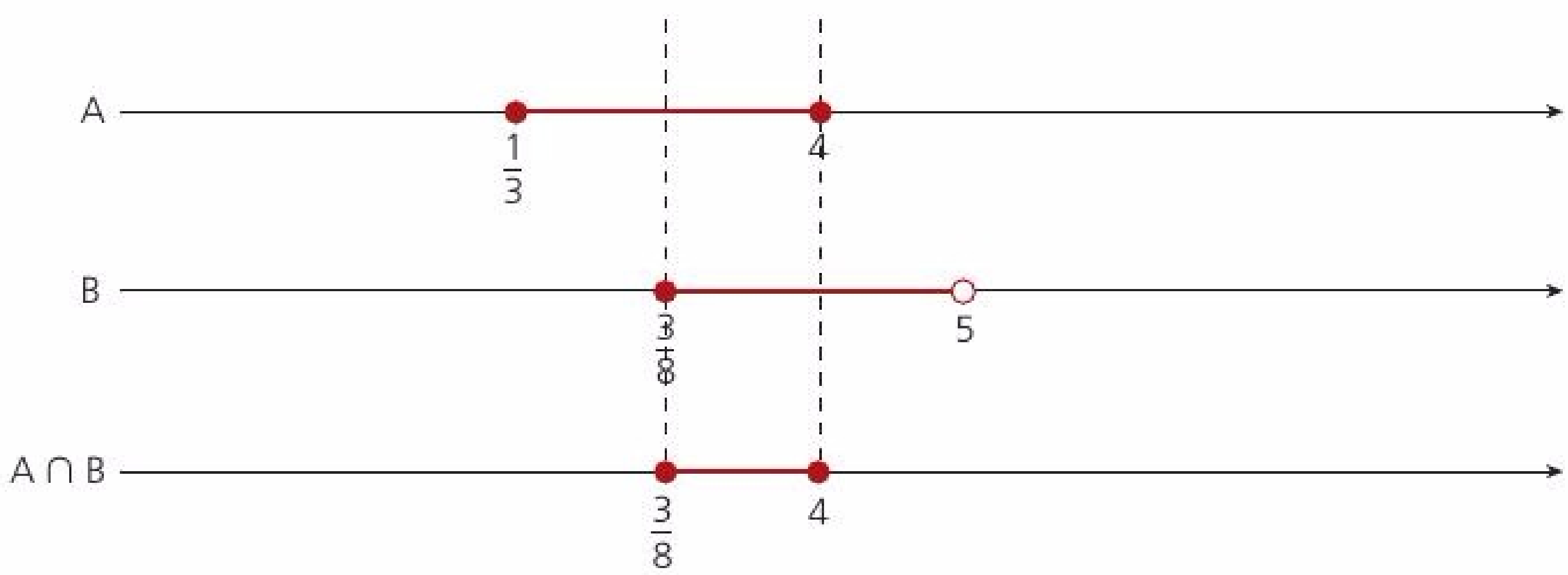


Note, então, que o conjunto que buscamos é:

$A \cup B = \{x \in R \,/\, \frac{1}{3} \leq x < 5\}$ ou $A \cup B = [\frac{1}{3}, 5[$

- $A \cap B = \left[\frac{1}{3}, 4\right] \cap \left[\frac{3}{8}, 5\right]$

Neste caso, devemos buscar os elementos que pertencem a A e a B. Fazemos isso buscando as extremidades dos segmentos comuns aos dois conjuntos.



$A \cap B = \{x \in R \,/\, \frac{3}{8} \leq x \leq 4\}$ ou $A \cap B = [\frac{3}{8}, 4]$

Atividades

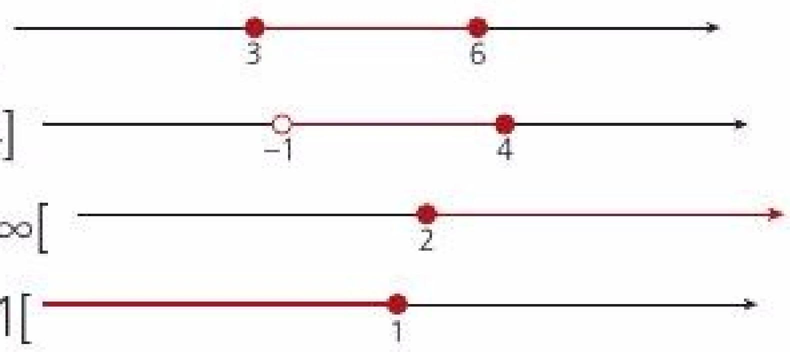
27. Represente na reta real os intervalos:

a) [3, 6]

b)]–1, 4]

c) [2, + ∞[

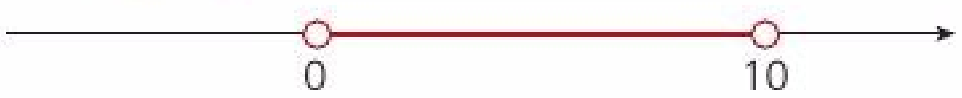
d)]–∞, 1[



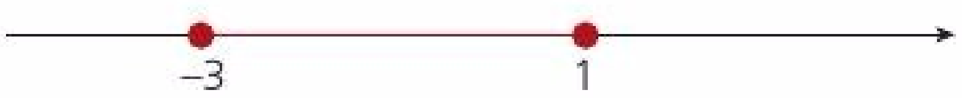
28. Represente, usando a notação de intervalos, os seguintes subconjuntos de R:

a) [–1, 1[

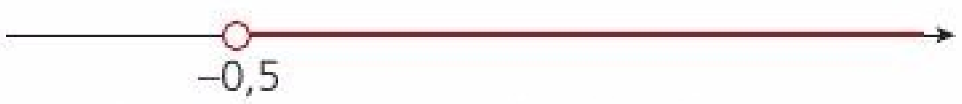
b)]0, 10[



c) [–3, 1]



d)]– 0,5 , + ∞[



Representar em linguagem matemática

29. Escreva os subconjuntos de **R** na notação de intervalos:

a) $\{x \in R \,/\, x < 3\}$]– ∞, 3[

b) $\{x \in R \,/\, 1 \leq x < 9\}$ [1, 9[

c) $\{x \in R \,/\, x \geq -5\}$ [–5, + ∞[

d) $\{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 6\}$ [–2, 6]

30. Escreva os intervalos na forma de conjuntos entre chaves:

a) [–2, 3] $\{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 3\}$

b)]0, 4] $\{x \in R \,/\, 0 < x \leq 4\}$

c)]–∞, 8] $\{x \in R \,/\, x \leq 8\}$

d)]–3, 6[$\{x \in R \,/\, -3 < x < 6\}$

31. Dados os intervalos A = [2, 4], B = [3, 5[e C =]1, 3[, efetue as operações indicadas, lembrando que $A \cup B$ representa o conjunto formado por todos os elementos de A e todos os elementos de B.

A = [2, 4], B = [3,5[e C =]1,3[

a) $B \cup C$ $B \cup C$ =]1,5[

b) $A \cup C$ $A \cup C$ =]1,3[ʌ]3,4]

c) $B \cup C$ $B \cup C$ =]1,5[

32. Dados os conjuntos:

$A = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 3\}$,

$B = \{x \in R \,/\, x \leq 3\}$ e

$C = \{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 3\}$,

Determine $A \cap B \cap C$

$A \cap B \cap C = A = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 3\}$

(Lembre-se de que a intersecção de três conjuntos deve ter elementos que pertençam simultaneamente aos três conjuntos.)

33. Seja **n** um número natural. Se

$$A = \{x \in N \,/\, x = 2n\}$$

e

$$B = \{x \in N \,/\, x = 2n + 1\}$$

Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para cada afirmação:

a) $B \cup A = \{1\}$ F

b) $A \cup B = N$ V

c) $A \cap B = \{x \in N \,/\, x \text{ é par}\}$ V

d) $A \cap A = A$ V

e) $A \cup B = [0, 10]$ F

Operações com números reais

Quando estudamos os conjuntos dos naturais, inteiros e racionais, percebemos que existiam operações que não eram possíveis, pois seus resultados não existiam nesses conjuntos. Por exemplo, no conjunto N, nem sempre podemos subtrair, dividir dois números, e outras vezes é impossível extrair uma raiz quadrada. O mesmo ocorre no conjunto dos inteiros e dos racionais. Veja os exemplos:

- Em Z, é impossível fazer a divisão de 10 por 4, pois 10 : 4 = 2,5 e 2,5 não é um número inteiro.
- Em Q, não se pode efetuar $\sqrt{2} = 1{,}414...$, pois este não é um número racional.

Leia o texto com seus alunos e escreva no quadro os principais pontos destacados. Explore as operações e as diferenças em cada caso.

Porém, a partir do momento em que definimos e estudamos os números irracionais que, juntamente com os racionais, formam o conjunto dos números reais, deixamos de ter limitações a qualquer das operações que estudamos.

A única operação que ainda não conseguimos fazer no conjunto dos números reais é a extração de raízes de índice par de números negativos como, por exemplo, $\sqrt{-4}$. Também não podemos fazer, como já vimos, qualquer divisão por zero.

Fernanda Youssef

Feitas essas ressalvas, o conjunto dos números reais permite todas as operações que conhecemos e, portanto, fazer cálculos sobre a maioria dos problemas que envolvem equações e medidas.

Observe alguns exemplos de operações com reais:

a) $7{,}23 + 4{,}125 = 11{,}355 \Rightarrow$ adicionamos dois racionais e obtivemos uma soma racional;

b) $\sqrt{20} + \sqrt{5} \cong 4{,}472 + 1{,}236 \cong 5{,}708 \Rightarrow$ calculamos um valor aproximado para esta soma de raízes quadradas. Em casos como esse, temos a adição entre dois irracionais que fornece uma soma irracional, que fica mais bem representada por $\sqrt{20} + \sqrt{5}$. As aproximações são indicadas quando precisamos dimensionar medidas.

De maneira geral, podemos afirmar que, qualquer operação que envolva dois números **a** e **b** reais, tem como resultado um número real, guardadas as restrições de existência que fizemos para a divisão por zero e as raízes de índices pares de números negativos. Já as propriedades das operações com números reais, mantêm as características que têm nos conjuntos **N**, **Z**, **Q** e no conjunto **I** dos irracionais.

Vamos, a seguir, relembrar as principais propriedades operatórias e ver como estas se aplicam para os números reais.

Propriedades das operações em R

Se os números a, b, c, pertencem ao conjunto dos números reais, então valem as seguintes propriedades operatórias:

a) **Adição de números reais**

Fechamento → $a + b \in R$

Comutativa → $a + b = b + a$

Associativa → $(a + b) + c = a + (b + c)$

Elemento neutro → $a + 0 = a$ e $0 + a = a$

Oposto → $a + (-a) = 0$

b) **Subtração de números reais**

Fechamento: $a - b \in R$

Não se aplicam as propriedades comutativa e associativa.

c) **Multiplicação em R**

Fechamento: $a \cdot b \in R$

Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$ e $1 \cdot a = a$

Inverso: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, com $a \neq 0$

Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

d) **Divisão em R**

Fechamento: $a : b \in R$, com $b \neq 0$

Não se aplicam as propriedades comutativa e associativa.

A partir das propriedades operatórias, podemos escrever:

- **Toda subtração pode ser escrita como uma adição**.

$$a - b = a + \underbrace{(-b)}_{\text{oposto de b}}$$

- **A adição e a subtração são operações inversas**.

$$x + a = b \rightarrow x = b - a$$
$$x - a = b \rightarrow x = b + a$$

- **Toda divisão pode ser escrita como uma multiplicação**.

$$a : b = a \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)}_{\text{inverso de b}}, \text{ com } b \neq 0$$

- **A multiplicação e a divisão são operações inversas**.

$$x \cdot a = b \rightarrow x = b : a, \text{ com } a \neq 0$$
$$x : a = b \rightarrow x = b \cdot a, \text{ com } a \neq 0$$

Destaque que o uso correto dessas propriedades é essencial para a resolução de problemas que envolvam expressões e equações algébricas. De fato, boa parte dos erros cometidos provém do emprego de regras que não constituem propriedades das operações aritméticas.

Vamos relembrar também o que aprendemos para a potenciação:

Sendo **a** um número real e **n** um número natural:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ..., a}_{\text{n fatores}}, \text{ quando } n > 1$$

Já vimos também que, nessas condições, as seguintes propriedades são válidas para a potenciação:

$$\mathbf{a^1 = a}$$
$$\mathbf{a^0 = 1, \text{ com } a \neq 0}$$
$$\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ com } a \neq 0}$$
$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$
$$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$$
$$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$
$$\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Atividades

Uso da calculadora

34. Utilizando sua calculadora, determine o resultado das operações com duas casas decimais.

a) $\sqrt{7} - 3$ – 0,35

b) $5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5}$ 9,31

c) $4 \cdot (\sqrt{2} : 3)$ 1,88

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3})$ 6,32

35. Sem utilizar sua calculadora, determine o valor de:

Cálculo mental

a) $\sqrt{4} - 3$ – 1

b) $(\sqrt{5})^0 - \dfrac{\sqrt{25}}{5}$ 0

c) $(\sqrt{7})^2$ 7

d) $(\sqrt{49} : \sqrt{1})^2$ 49

36. O resultado de cada operação a seguir é positivo, negativo ou nulo?

a) $\sqrt{5} - 7$ negativo

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ positivo

c) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ negativo

d) $(-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{5})$ positivo

e) $\sqrt{2} - (-\sqrt{5})$ positivo

f) $(-\sqrt{7}) : (-\sqrt{3})$ positivo

37. Aplicando a propriedade indicada, escreva a expressão equivalente a cada uma das expressões a seguir:

a) comutativa $\Rightarrow$ $x + y =$ ★ x + x

b) elemento neutro $\Rightarrow$ $1 \cdot x =$ ★ x

c) distributiva $\Rightarrow$ $x \cdot (y + z) =$ ★ xy + xz

38. Simplifique as operações, reduzindo-as a uma única potência.

a) $\pi^7 \cdot \pi^{-2}$ π^5

b) $(\pi^{-4})^{-2}$ π^8

c) $(\pi^2 \cdot \pi^3)^5$ π^{25}

d) $\dfrac{\pi^{-2} \cdot \pi^{-5}}{\pi^{-7}}$ 1

e) $\dfrac{(\pi^3)^{-2}}{\pi^{-4}}$ π^{-2}

f) $\dfrac{(\pi^3 \cdot \pi^5)^2}{\pi^{-2} \cdot (\pi^3)^5}$ π^3

39. Efetue sem o uso de calculadora:

a) $(\sqrt{2})^6$ $2^3 = 16$

b) $(\sqrt{3})^4$ $3^2 = 9$

c) $(\sqrt{3})^6$ $3^3 = 27$

40. Utilizando sua calculadora, apresente o resultado com aproximação de duas casas decimais:

Uso da calculadora

a) $\sqrt{13} - \pi$ 0,46

b) $\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{5}$ – 2,82

c) $\dfrac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{5}}$ 4,10

41. Apresente os resultados exatos de:

a) $[(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}] - (\sqrt{3} - 2)$ 2

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ 0

c) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^2$ –2

42. Aplique as propriedades operatórias, para escrever de maneira mais simples as expressões a seguir.

Nessas expressões, **x** e **y** representam dois números reais, com $x \neq 0$.

a) $x \cdot (y + 1) - x =$ ★ xy

b) $\sqrt{3} \cdot x : \sqrt{3} =$ ★ x

c) $2 \cdot x - 2 \cdot (x + y) - 3x + 4 \cdot (y - x) =$ ★ 2y – 7x

d) $2 \cdot (x + y + 5) - 5 \cdot y =$ ★ 2x – 3y + 10

e) $x^5 \cdot x : x^4 =$ ★ x^2

Desafio

Copie o quadro em seu caderno e, com a ajuda da calculadora, complete cada linha resolvendo a operação solicitada, respectivamente, como no exemplo da primeira linha.

		(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)	(VII)	(VIII)
X	Y	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x + y}$	$\sqrt{x} - \sqrt{y}$	$\sqrt{x - y}$	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt{x \cdot y}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$
7	2	4,059965	3	1,231538	2,236068	3,741657	3,741657	1,870829	1,870829
5	3								
15	10								
49	34								
121	96								

A seguir observe os valores encontrados em cada caso e compare os resultados das colunas:

a) **I** e **II** e explique com suas palavras qual a diferença que existe entre as operações;

b) **III** e **IV** e explique com suas palavras qual a diferença que existe entre as operações;

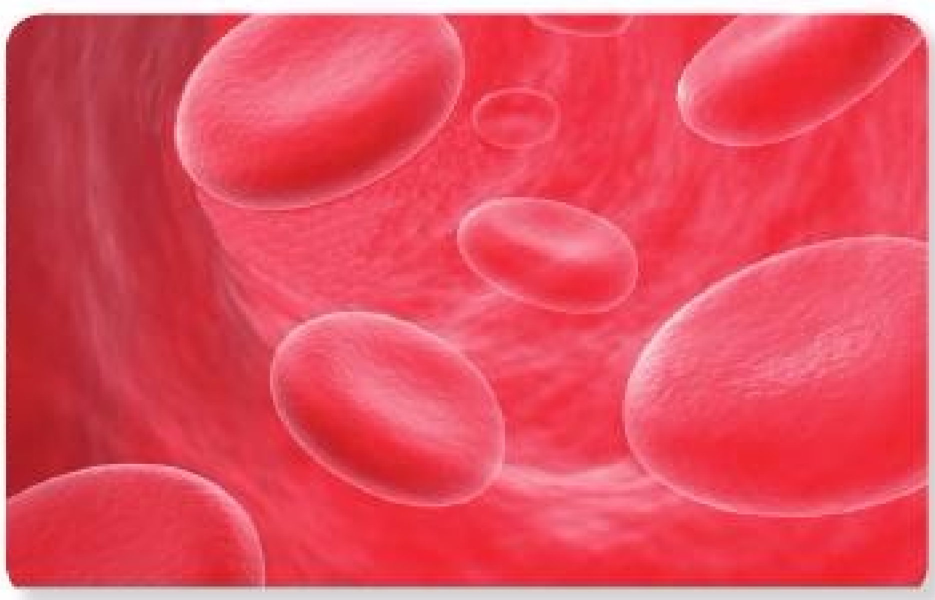
c) **V** e **VI** e também das colunas VII e VIII e explique a seguir com suas palavras, qual a diferença que existe entre os respectivos pares de operações.

Notação Científica

Muitas vezes, quando analisamos situações que envolvem grandes números ou números muito pequenos, para simplificar a notação numérica, utilizamos potências de 10. Um dos usos mais comuns das potências de 10 ocorre nos textos científicos.

Destaque que a notação científica é uma maneira de escrever um número muito grande ou muito pequeno de uma forma mais simples.

Marko Kovacevic/PhotoXpress



As microscópicas hemácias do nosso sangue têm diâmetro igual a $7 \cdot 10^{-6}$ m.

NASA

A nebulosa de Órion tem diâmetro aproximado de 250 trilhões de quilômetros, ou seja, $2,5 \cdot 10^{14}$ km.

Para utilizarmos melhor as potências de 10, vamos recordar algumas definições de potências com expoentes inteiros e bases reais.

Com **a** ∈ **R** e **n** ∈ **Z**, temos as seguintes definições:

- $\mathbf{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$**, se** $\mathbf{n > 1}$
- $\mathbf{a^1 = a}$
- $\mathbf{a^0 = 1}$**, se** $\mathbf{a \neq 0}$
- $\mathbf{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$**, se** $\mathbf{a \neq 0}$

Veja alguns exemplos de potências com expoentes inteiros:

- $1{,}4^3 = 1{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 2{,}744$
- $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- $0{,}2^0 = 1$
- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{16}} = 16$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$

A notação científica baseia-se na ideia de que podemos representar um número através do produto de um número entre 0 e 10 por uma potência de 10.

Observe os exemplos:

- O número 450 000 pode ser escrito da seguinte forma:

  $450\,000 = 4{,}5 \cdot 10^5$, pois $4{,}5 \cdot 100\,000 = 450\,000$

- Já o número 0,000 000 13 fica:

  $0{,}000\,000\,13 = 1{,}3 \cdot 10^{-7}$ pois $1{,}3 \cdot 10\,000\,000 = 0{,}000\,000\,13$

A representação de um número racional na notação científica é sempre um número entre 1 e 10 multiplicado por uma potência de 10.

Atividades

43. Efetue as seguintes potências:

a) 5^{-2} $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) 2^{-1} $\frac{1}{2}$

c) 3^2 9

d) 10^3 1 000

e) 5^{-3} $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

f) 1^{-2} 1

g) $(-2)^{-2}$ $\frac{1}{4}$

h) $(-10)^3$ $-1\,000$

i) 10^{-4} $\frac{1}{10\,000}$

j) $(-10)^4$ 10 000

k) 10^{-3} $\frac{1}{1\,000}$

l) $(-10)^{-1}$ $-\frac{1}{10}$

44. Escreva os números a seguir da maneira habitual:

a) $1{,}2 \cdot 10^3$ 1 200

b) $3{,}8 \cdot 10^7$ 3 800 000

c) $2 \cdot 10^5$ 200 000

d) $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ 0,0032

e) $2{,}71 \cdot 10^{-4}$ 0,000271

f) $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 0,00015

45. Considere a tabela que se segue com algumas dimensões:

Distância média de Júpiter ao Sol (km)	778 300 000
Distância média da Terra ao Sol (km)	149 600 000
Diâmetro de um fio de cabelo (m)	0,000 1
Tamanho de uma bactéria (*Escherichia Coli*) (m)	0,000 001

Escreva em notação científica:

a) distância de Júpiter ao Sol $7{,}783 \cdot 10^8$

b) distância da Terra ao Sol $1{,}496 \cdot 10^8$

c) diâmetro de um fio de cabelo $1 \cdot 10^{-4} = 10^{-4}$

d) O tamanho da bactéria *Escherichia Coli* $1 \cdot 10^{-6} = 10^{-6}$

46. Escreva os números a seguir em notação científica:

a) 6,7 bilhões $6{,}7 \cdot 10^9$

b) 7,1 milhões $7{,}1 \cdot 10^6$

c) 7,3 trilhões $7{,}3 \cdot 10^{12}$

47. O Sol é constituído, basicamente, por hidrogênio, o elemento mais abundante no Universo. Como esse gás encontra-se sob alta pressão, o Sol tem temperaturas elevadíssimas de mais de 10 milhões de graus Celsius em seu centro e 6 mil graus Celsius na superfície.

a) Escreva em notação científica as temperaturas de 10 milhões de graus Celsius e 6 mil graus Celsius. $10 \cdot 10^6 = 10^7$ °C
$6 \cdot 10^3$ °C

b) Qual a diferença de temperaturas entre o centro e a superfície do Sol? 9994000 ou $9{,}994 \cdot 10^6$ °C

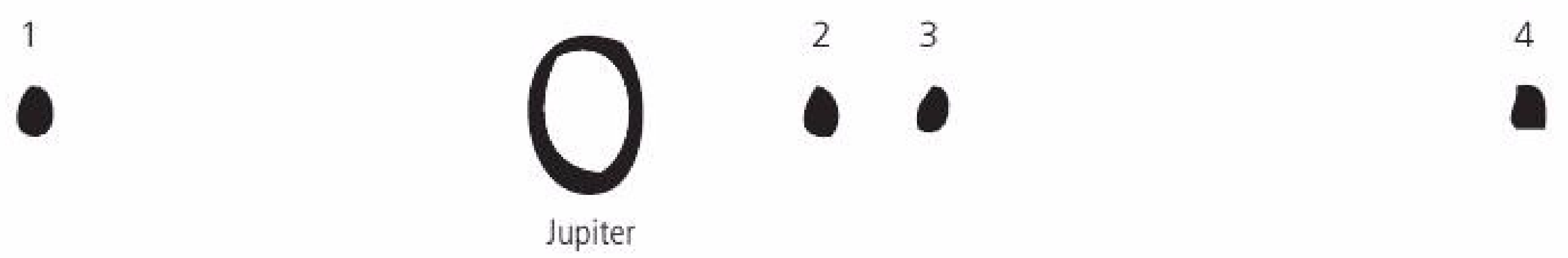
Interpretar tabela

48. A tabela abaixo resume alguns dados importantes sobre os satélites de Júpiter.

Nome	Diâmetro (km)	Distância média ao centro de Júpiter (km)	Período orbital (dias terrestres)
Io	3642	421800	1,8
Europa	3138	670900	3,6
Ganimedes	5262	1070000	7,2
Calisto	4800	1880000	16,7

Ao observar os satélites de Júpiter pela primeira vez, Galileu Galilei fez diversas anotações e tirou importantes conclusões sobre a estrutura de nosso Universo.

A imagem abaixo reproduz uma anotação de Galileu referente a Júpiter e seus satélites.



De acordo com essa representação e com os dados da tabela, os pontos indicados por 1, 2, 3 e 4 correspondem, respectivamente, a:

a) Io, Europa, Ganimedes e Calisto.

x b) Ganimedes, Io, Europa e Calisto.

c) Europa, Calisto, Ganimedes e Io.

d) Calisto, Ganimedes, Io e Europa.

e) Calisto, Io, Europa e Ganimedes.

Para estudar

49. Qual é a representação decimal de:

a) $\frac{3}{10}$

b) $-\frac{333}{100}$

c) $\frac{33}{1\,000}$

d) $\frac{3}{10\,000}$

50. Qual é a representação decimal de:

a) $\frac{9}{2}$

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{22}{5}$

d) $\frac{5}{8}$

51. Encontre a fração geratriz das dízimas:

a) $3,\overline{6}$

b) $0,\overline{251}$

c) $1,\overline{8}$

d) $3,\overline{01}$

52. A representação decimal de um número pode ser: finita; infinita e periódica, ou, ainda, infinita e não-periódica. Qual é o caso de cada um desses números?

a) $\frac{13}{5}$

b) −0,353535...

c) 0,353353355...

d) $\sqrt{2}$

53. Considere os números:

5 −7,2 7,8333... 8,909009000...

Quais deles são números racionais? Para os números racionais encontrados, indique uma divisão de inteiros que resulte nesses números.

54. Quais dos seguintes números são racionais e quais são irracionais?

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{30}$

c) $\sqrt{36}$

d) $\sqrt{189}$

55. Quais desses números são racionais e quais são irracionais?

a) 7,555...

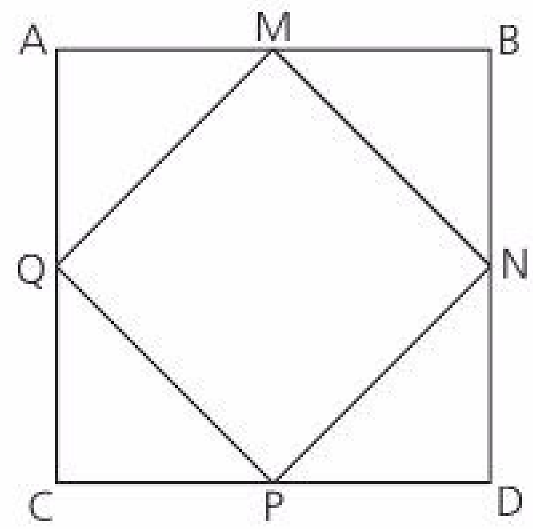
b) 7,515115111...

c) $\sqrt{500}$

d) $0,\overline{428571}$

56. Observe a figura:

Interpretar figura



O quadrado ABCD tem lados de 2 cm.

a) Qual é a área do quadrado ABCD?

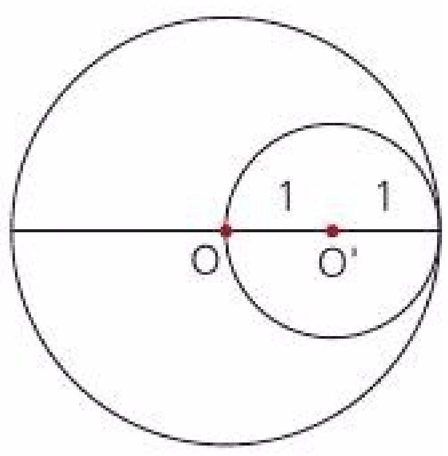
b) Qual é a área do quadrado MNPQ?

c) Indique a medida de AD.

d) No quadrado ABCD, o número que expressa a medida dos lados, em cm, é um número racional? E o que expressa a medida das diagonais?

e) No quadrado MNPQ, o número que expressa a medida dos lados, em cm, é um número racional? E o que expressa a medida das diagonais?

57. Nesta figura, a circunferência menor tem 2 cm de diâmetro e passa pelo centro **C** da circunferência maior:



a) Indique os comprimentos dessas circunferências.

b) Na circunferência menor, o número que expressa a medida do diâmetro, em cm, é um número racional? E o que expressa o comprimento da circunferência?

58. Considere os números:

$$\sqrt{3};\ 3{,}333...;\ -3 \text{ e } 3$$

a) Qual deles é um número natural?

b) Qual deles é um número inteiro que não é natural?

c) Qual deles é um número racional que não é inteiro?

d) Qual deles é um número irracional?

e) Quais deles são números reais?

59. Substitua o símbolo ▼ por **<** , **>** ou **=**.

a) $2{,}1 \blacktriangledown \frac{19}{9}$

b) $-2{,}1 \blacktriangledown \frac{19}{9}$

c) $\sqrt{2} \blacktriangledown -\pi$

d) $-5 \blacktriangledown -\frac{16}{3}$

e) $\frac{268}{33} \blacktriangledown 8{,}\overline{12}$

f) $\frac{55}{9} \blacktriangledown \sqrt{38}$

Expressar linguagem matemática

60. Considere que $A = \{x \in R \,/\, x > -\}$. Substitua o símbolo ▼, por $\in$ ou $\notin$.

a) $0 \blacktriangledown A$

b) $\frac{6}{5} \blacktriangledown A$

c) $-\sqrt{2} \blacktriangledown A$

d) $-\pi \blacktriangledown A$

e) $-6 \blacktriangledown A$

f) $-\frac{10}{3} \blacktriangledown A$

61. Apresente o resultado exato de:

a) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

b) $(\sqrt{7})^2$

c) $\sqrt{13} \cdot 0$

d) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$

62. Diga se o resultado de cada operação é um número real positivo ou negativo.

a) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$

b) $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$

c) $\sqrt{2} - (\sqrt{5})$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

e) $(-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{5}$

f) $(-\sqrt{2}) : (\sqrt{5})$

Fazer estimativas

63. Escreva na forma decimal os números abaixo:

a) $5{,}2 \cdot 10^4$

b) $3{,}176 \cdot 10^{-3}$

c) $5{,}8 \cdot 10^6$

d) $2{,}75 \cdot 10^{-1}$

e) $2 \cdot 10^8$

f) $1{,}5 \cdot 10^{-3}$

64. Escreva os números em notação científica.

a) A população aproximada do mundo em 2013: 7 000 000 000 habitantes.

b) Um raio de luz percorre aproximadamente 9 460 500 000 000 quilômetros num intervalo de tempo de 1 ano. Por isso, essa distância é chamada de um ano-luz.

c) Um milímetro quadrado é apenas 0,000 000 1 metro quadrado.

d) O diâmetro médio de um fio de cabelo é 0,000 1 metro.

65. Escreva os números do gráfico em notação científica:

a) 6,7 bilhões $6{,}7 \times 10^9$

b) 7,1 bilhões $7{,}1 \times 10^9$

c) 7,3 bilhões $7{,}3 \times 10^9$

d) 8,1 bilhões $8{,}1 \times 10^9$

66. O número **a** é igual a 5,6 bilhões e o **b** é igual a 2,27 bilhões.

a) Escreva **a** e **b** em notação científica.

b) Calcule a diferença **a – b** e escreva-a em notação científica.

Resolução das atividades

1. a) $\frac{7}{2} = 3{,}5$

b) $\frac{3}{4} = -\,0{,}75$

c) $\frac{21}{5} = 4{,}2$

d) $\frac{5}{8} = 0{,}625$

2. a) $0{,}7 = \frac{7}{10}$

b) $3{,}4 = \frac{17}{5}$

c) $0{,}07 = \frac{7}{100}$

d) $5{,}25 = \frac{21}{4}$

e) $0{,}004 = \frac{1}{250}$

f) $-\,3{,}04 = -\frac{76}{25}$

3. a) $\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

b) $-\frac{16}{11} = -\,1{,}\overline{45}$

c) $\frac{3}{15} = 0{,}2$

d) $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

4. a) $3{,}\overline{6} = \frac{11}{3}$

b) $1{,}\overline{8} = \frac{17}{9}$

c) $0{,}\overline{251} = \frac{251}{999}$

d) $3{,}\overline{01} = \frac{298}{99}$

5. a) $\frac{13}{99} = 0{,}\overline{13}$

b) $\frac{56}{9} = 6{,}\overline{2}$

c) $\frac{113}{990} = 0{,}1\overline{14}$

d) $\frac{7}{21} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$

6. a) $0{,}\overline{12} = \frac{4}{33}$

b) $2{,}\overline{17} = \frac{215}{99}$

c) $0{,}\overline{12} = \frac{4}{33}$

d) $0{,}236236... = \frac{236}{999}$

7. a) $0{,}\overline{58} = \frac{58}{99}$

b) $0{,}\overline{285} = \frac{285}{999} = \frac{95}{333}$

c) $0{,}\overline{8} = \frac{8}{9}$

8. a) $3{,}\overline{7} = \frac{34}{9}$

b) $2{,}\overline{51} = \frac{83}{33}$

c) $1{,}14\overline{8} = \frac{67}{45}$

d) $2{,}13\overline{4} = \frac{1921}{900}$

9. a) $\sqrt{7} \cong 2{,}65$

b) $\sqrt{429} \cong 20{,}7$

c) $\sqrt{55} \cong 7{,}42$

d) $\sqrt{635} \cong 25{,}20$

10. a) irracional

b) irracional

c) racional

d) racional

11. a) $\sqrt{42{,}25} = 6{,}5$ racional

b) $\sqrt{841} = 29$ racional

c) $\sqrt{77{,}44} = 8{,}8$ racional

d) $\sqrt{906{,}01} = 30{,}1$ racional

12. a) não, porque não existe nenhum número que multiplicado por ele mesmo termine em 3.

b) irracional

13. a) Área do quadrado ABCD = 1 cm^2

b) A diagonal DB do quadrado = $\sqrt{2}$cm

c) Raio da circunferência = $\frac{\sqrt{2}}{2}$cm

Comprimento da circunferência

$$C = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3{,}14 =$$

$$C = 1{,}41 \cdot 3{,}14 = 4{,}4274 \text{ cm}$$

d) Área do triângulo ODC

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^2$$

14. raio = 3 cm

lado do quadrado = 6 cm

a) comprimento da circunferência

$C = 3 \cdot 2 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$ cm

b) quadrado ABCD

diagonal $d^2 = \ell^2 + \ell^2$

$d^2 = 6^2 + 6^2$

$d^2 = 36 + 36$

$d = \sqrt{72}$

$d \cong 8{,}49$ cm

área $A = \ell \cdot \ell$

$A = 6 \cdot 6$

$A = 36 \text{ cm}^2$

15. $A = 20 \text{ cm}^2$

$A = \ell^2 \qquad \ell = \sqrt{20} \cong 4{,}47$cm

16. c = 5 cm

$c = 2\,\pi \cdot r \rightarrow 5 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$r = \frac{5}{6{,}28} \cong 0{,}79$cm

diâmetro → d = 2 r = 1,58 cm

17. diâmetro = 4 cm

c = 2 ñ r = 4 · 3,14 = 12,56 cm

$A = 12{,}56 \cdot 5 = 62{,}8 \text{ cm}^2$

18. d = 0,5 cm

c = 0,5 · 3,14 = 1,57 m (1 volta)

47,1 km = 47 100 m

$\frac{47\,100}{1{,}57} = 30\,000$ voltas

19. AB = 200 m

r = 50 m

2º ciclista

$C = 2 \cdot 50 \cdot 3{,}14 = 314$ m

20. a) V

b) V

c) V

d) F

21. a) V

b) F

c) V

d) V

22. a) O

b) Z

c) ∅

23. a) $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$

b) $\sqrt{20} > 4{,}4$

c) $-\frac{31}{7} > -\frac{43}{9}$

d) $7{,}2 > \sqrt{51}$

e) $\frac{7}{2} > -\frac{2}{7}$

f) $-\sqrt{11} < -\sqrt{7}$

24. n = 3 $\qquad$ $m = \sqrt[3]{2}$

a) F

b) V

c) V

d) F

25. a) Falso

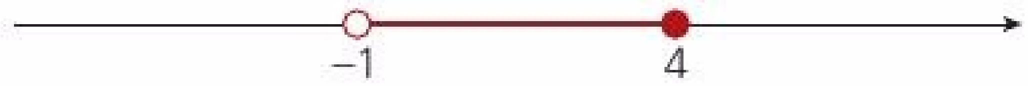
b) Falso

c) Falso

26. V, pois, por exemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

27. a)

b)



c)

d)

28. a) [–1, 1[

b)]0, 10[

c) [–3, 1]

d)]– 0,5 , + ∞[

29. a)]– ∞, 3[

b) [1, 9[

c) [–5, + ∞[

d) [–2, 6]

30. a) $\{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 3\}$

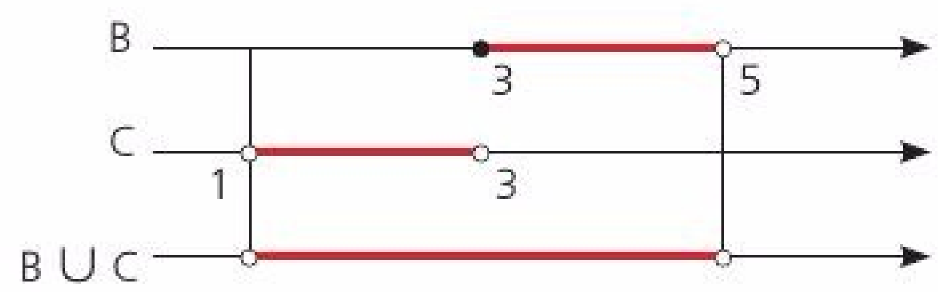
b) $\{x \in R \,/\, 0 < x \leq 4\}$

c) $\{x \in R \,/\, x \leq 8\}$

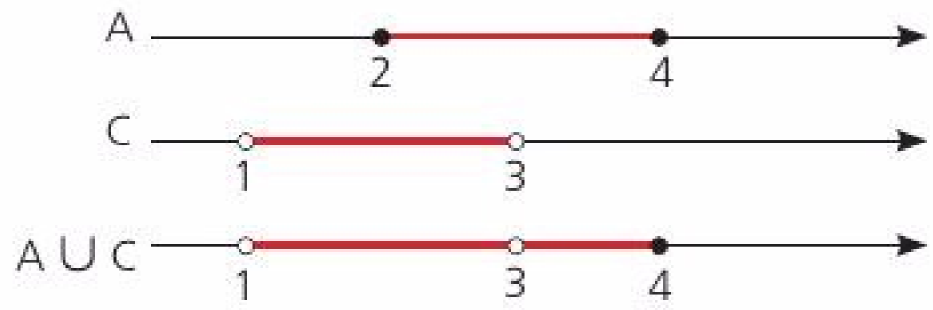
d) $\{x \in R \,/\, -3 < x < 6\}$

31. A = [2, 4], B = [3,5[e C =]1,3[

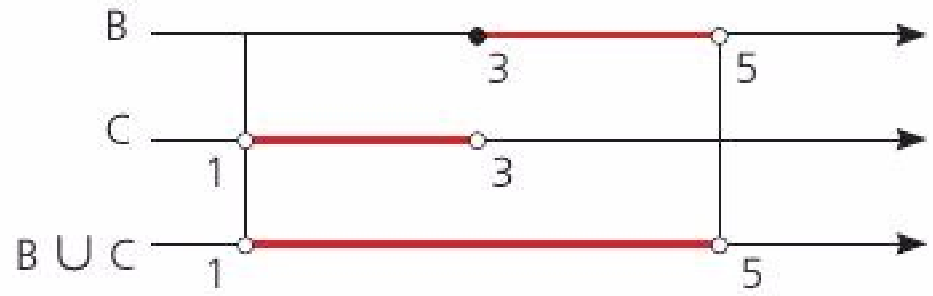
a) B ∪ C =]1,5[



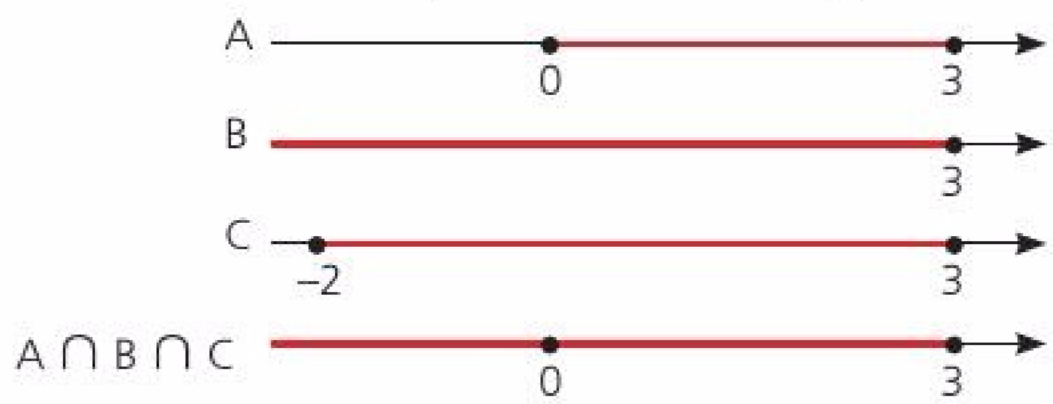
b) $A \cup C =]1,3[\wedge]3,4]$



c) $B \cup C =]1,5[$



32. $A \cap B \cap C = A = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 3\}$



33. a) F

b) V

c) V

d) V

d) F

34. a) – 0,35

b) 9,31

c) 1,88

d) 6,32

35. a) – 1

b) 0

c) 7

d) 49

36. a) negativo

b) positivo

c) negativo

d) positivo

e) positivo

f) positivo

37. a) $x + y$

b) x

c) $xy + xz$

38. a) $\pi^{7 + (-2)} = \pi^5$

b) $\pi^{(-4) \cdot (-2)} = \pi^8$

c) $(\pi^{2+3})^5 = (\pi^5)^5 = \pi^{25}$

d) $\dfrac{\pi^{-2-5}}{\pi^{-7}} = \dfrac{\pi^{-7}}{\pi^{-7}} = 1$

e) $\dfrac{\pi^{-6}}{\pi^{-4}} = \pi^{-2}$

f) $\dfrac{(\pi^8)^2}{\pi^{13}} = \pi^3$

39. a) $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^3 = 8$

ou

$(\sqrt{2})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$

b) $(\sqrt{3})^4 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2\ 9$

c) $(\sqrt{3})^6 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$

40. a) 0,46

b) – 2,82

c) 4,10

41. a) $[(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}] - (\sqrt{3} - 2) =$

$= [\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}] - \sqrt{3} + 2 =$

$= [\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}] - \sqrt{3} + 2 = 2$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$

$= \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$

– 2,82

c) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^2 = 3 - 5 = -2$

42. a) xy

b) x

c) 2y – 7x

d) 2x – 3y + 10

e) x^2

43. a) $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $\frac{1}{2}$

c) 9

d) 1 000

e) $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

f) 1

g) $\frac{1}{4}$

h) – 1 000

i) $\frac{1}{10\,000}$

j) 10 000

l) $\frac{1}{1\,000}$

m) $-\frac{1}{10}$

44. a) 1 200

b) 3 800 000

c) 200 000

d) 0,0032

e) 0,000271

f) 0,00015

45. a) $7{,}783 \cdot 10^8$

b) $1{,}496 \cdot 10^8$

c) $1 \cdot 10^{-4} = 10^{-4}$

d) $1 \cdot 10^{-6} = 10^{-6}$

46. a) $6\,700\,000\,000 = 6{,}7 \cdot 10^9$

b) $7\,100\,000 = 7{,}1 \cdot 10^6$

c) $7\,300\,000\,000\,000 = 7{,}3 \cdot 10^{12}$

47. a) $10 \cdot 10^6 = 10^7$ °C

$6 \cdot 10^3$ °C

b) 9994000 ou $9{,}994 \cdot 10^6$ °C

48. Em função das distâncias a Júpiter, alternativa **b**.

Respostas da seção Para estudar

49. a) 0,3

b) –3,33

c) 0,033

d) 0,0003

50. a) 4,5

b) –0,75

c) 4,4

d) 0,625

51. a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{251}{999}$

c) $\frac{17}{9}$

d) $\frac{298}{99}$

52. a) finita

b) infinita e periódica

c) infinita e não-periódica

d) infinita e não-periódica

53. 5; –7,2 e 7,8333...

Há infinitas divisões que dão 5; –7,2 e 7,8333...

54. São racionais os números dos itens **a** e **c**; os demais são irracionais.

55. São racionais os números dos itens **a** e **d**; os outros são irracionais.

56. a) 4 cm^2

b) 2 cm^2

c) $2\sqrt{2}$ cm

d) O número que expressa a medida dos lados é racional, mas o das diagonais não.

e) O número que expressa a medida dos lados não é racional, mas o das diagonais é.

57. a) O comprimento da circunferência menor é $1{,}5 \cdot \pi$ cm; o da maior é $3 \cdot \pi$ cm.

b) O número que expressa a medida do diâmetro é um número racional, mas o do comprimento é irracional.

c) As respostas são as mesmas do item anterior.

d) 4,65 cm e 9,3 cm.

58. a) 3

b) –3

c) 3,333...

d) $\sqrt{3}$

e) todos

59. a) $<$

b) $<$

c) $>$

d) $>$

e) $=$

f) $<$

60. a) $\in$

b) $\in$

c) $\in$

d) $\notin$

e) $\notin$

f) $\notin$

61. a) 0

b) 7

c) 0

d) 5

62. a) negativo

b) negativo

c) positivo

d) positivo

e) negativo

f) positivo

63. a) 52000

b) 0,003176

c) 5800000

d) 0,0275

e) 200000000

f) 0,0015

64. a) $7{,}0 \cdot 10^{9}$

b) $9{,}460\,5 \cdot 10^{12}$

c) $1{,}0 \cdot 10^{-6}$

d) $1{,}0 \cdot 10^{-4}$

65. a) $6{,}7 \cdot 10^{9}$

b) $7{,}1 \cdot 10^{9}$

c) $7{,}3 \cdot 10^{9}$

d) $8{,}1 \cdot 10^{9}$

66. a) $5{,}6 \cdot 10^{9}$ e $2{,}27 \cdot 10^{9}$

b) $3{,}33 \cdot 10^{9}$

capítulo 2

Estudo do triângulo

- Elementos do triângulo
- Condições de existência de um triângulo
- Mediana, bissetriz, altura e mediatriz
- Triângulos notáveis

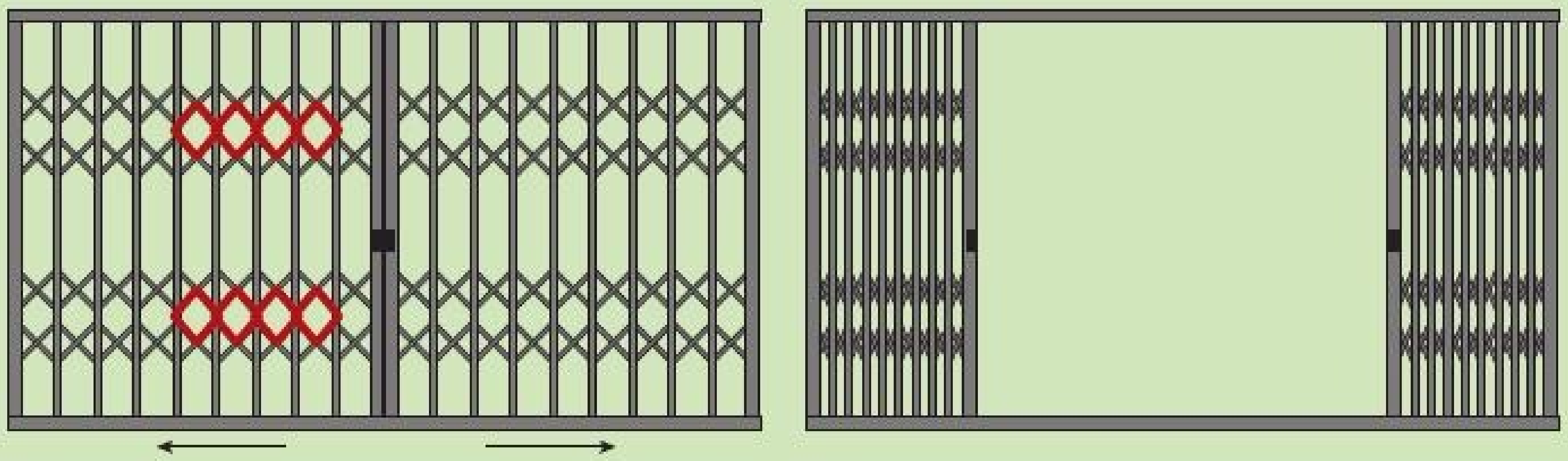
Maurício Simonetti/Pulsar Imagens

Ponte estaiada Otávio Frias de Oliveira sobre o rio Pinheiros, São Paulo, SP.

Conversa Inicial

Leia o texto com seus alunos em sala de aula e destaque no quadro as palavras por eles desconhecidas. Estimule-os a usar o dicionário para encontrar o significado dessas palavras.

Vamos estudar mais detalhadamente o triângulo, que é uma figura plana muito importante, pois as relações entre seus elementos (ângulos, lados e pontos notáveis) são básicas para o estudo da Geometria, para a Arquitetura e Engenharia. Além disso, os triângulos possuem uma propriedade que não encontramos em nenhum outro polígono: **a rigidez**. Enquanto qualquer polígono com mais de três lados pode ser flexionado, mudando de forma, o triângulo mantém uma rigidez que não permite esta flexão.



Com certeza, você já viu uma porta pantográfica como a da figura, muito comum em elevadores antigos e também como grade de segurança. As portas pantográficas podem ser flexionadas em razão de sua estrutura articulada ser um conjunto de quadrados ligados por uma barra vertical. Quando flexionados, os quadrados transformam-se em losangos e as portas ocupam um espaço menor.

Já as estruturas baseadas em triângulos, em função de sua rigidez, não têm essa flexibilidade. É o que ocorre na estrutura de uma bicicleta, que não passa de dois triângulos que têm um lado comum e nas tesouras dos telhados, que garantem sua rigidez e estabilidade.

Bicicleta

Estrutura de telhado com tesouras

A característica de rigidez dos triângulos nos desafia a pesquisá-los. Em que condições podemos construir um triângulo? Quais são seus elementos fundamentais? Se conhecermos bem esses elementos, com certeza teremos mais facilidade para o estudo dos demais polígonos.

Em um triângulo, uma vez definidos seus lados, não é possível alterar seus ângulos (propriedade da rigidez do triângulo). O triângulo não pode ser deformado mantendo as mesmas medidas de seus lados.

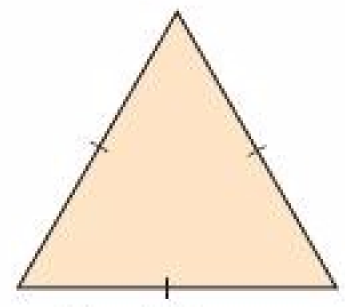
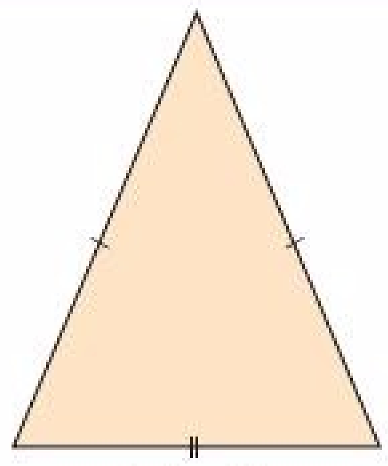
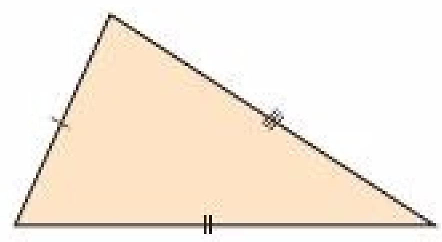
Elementos do triângulo

Vamos recordar alguns conceitos importantes sobre trângulos, já estudados anteriormente.

Os triângulos são polígonos que têm três lados e três ângulos internos. Podemos classificá-los de acordo com seus lados ou com seus ângulos internos.

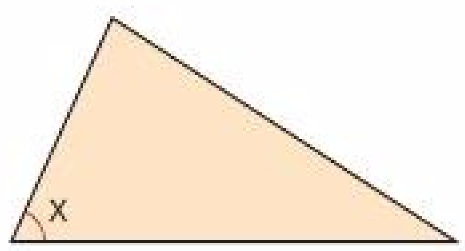
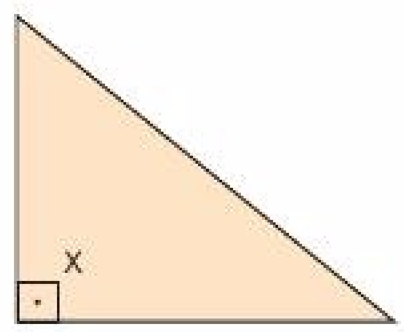
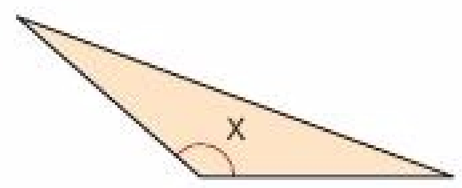
Classificação dos triângulos de acordo com seus lados

O triângulo equilátero também pode ser chamado de triângulo equiângulo (possui três ângulos congruentes)

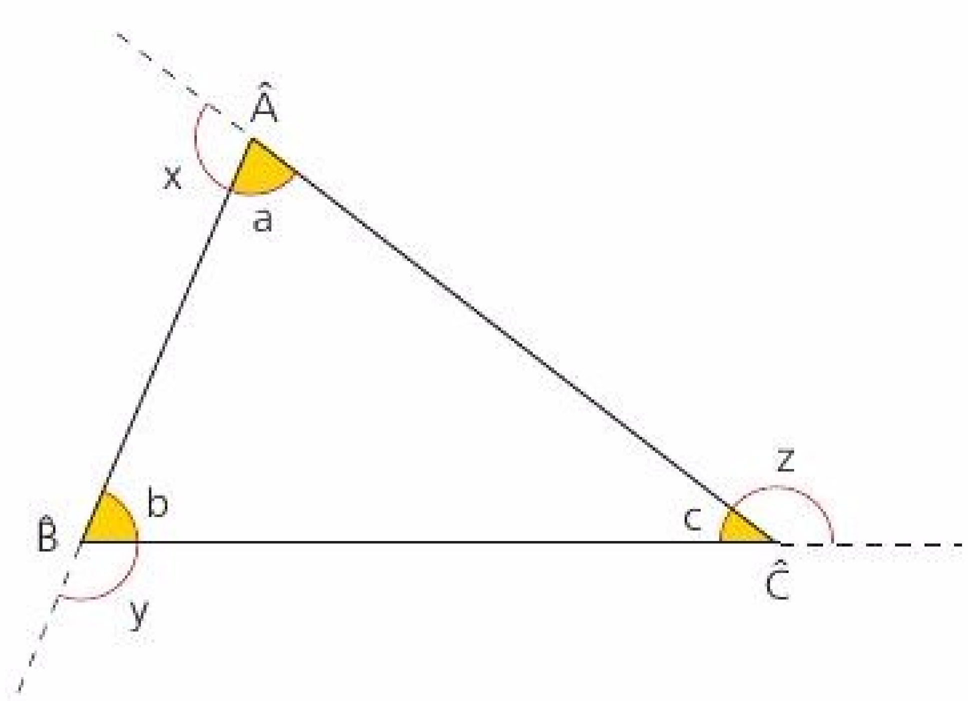
 **Equilátero**	 **Isósceles**	 **Escaleno**
Três lados iguais	Dois lados iguais	Três lados diferentes

Observe os traços nos lados dos triângulos. Esses traços indicam as igualdades ou diferenças entre os lados dos triângulos.

Classificação dos triângulos de acordo os ângulos internos

 **Acutângulo**	 **Retângulo**	 **Obtusângulo**
$x < 90°$	$x = 90°$	$x > 90°$

Considere o triângulo ABC da figura ao lado. Para representar as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ utilizaremos as letras **a**, **b** e **c.**



Para facilitar as notações de ângulos, vamos passar a representar suas medidas por letras minúsculas.

Vamos recordar os principais elementos deste triângulo.

- **Lados:** são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
- **Vértices:** são as extremidades **A**, **B** e **C** dos lados do triângulo
- **Ângulos internos:** são os ângulos formados por dois lados consecutivos e têm medidas **a**, **b** e **c**.
- **Ângulos externos:** são os ângulos formados por um lado do triângulo e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo. Os ângulos externos do triângulo **ABC** têm medidas **x**, **y** e **z**.

Já sabemos também que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º. Assim, podemos escrever:

$$a + b + c = 180^\circ$$

Lembre-se também de que um ângulo interno de um triângulo é sempre suplementar ao ângulo externo adjacente a ele.

A medida de um ângulo AÔB deve ser indicada por: med (AÔB), sendo O, o vértice do ângulo.

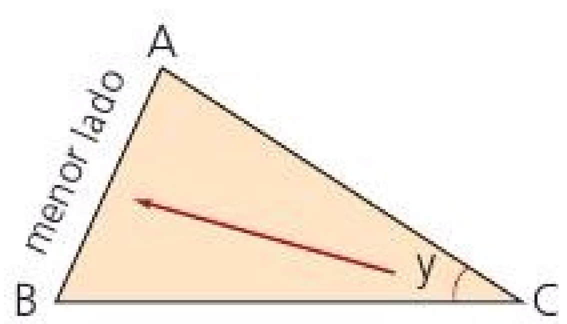
$$a + x = 180^\circ$$
$$b + y = 180^\circ$$
$$c + z = 180^\circ$$

Relações entre os ângulos e os lados de um triângulo

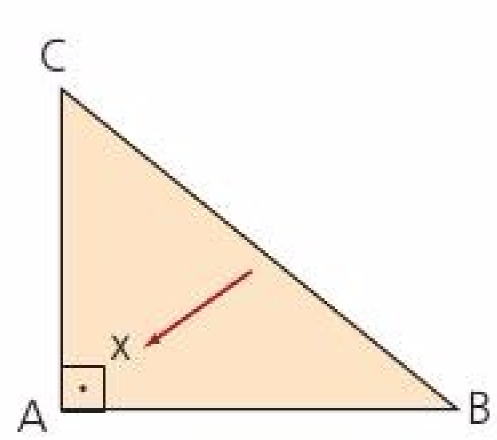
Para qualquer triângulo, podemos afirmar que, se dois **lados** de um triângulo são **desiguais**, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se ao menor ângulo.

É fácil concluir que se o triângulo tiver dois lados iguais terá, também, dois ângulos iguais e se tiver três lados iguais, como no caso do triângulo equilátero, terá três ângulos iguais a 60º.

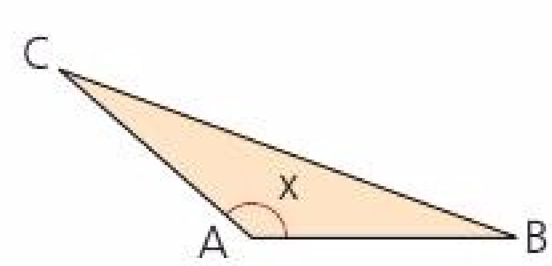
Destaque as relações entre os ângulos e os lados de um triângulo. Escreva no quadro, anotando em cada desenho.



y é o menor ângulo, pois é oposto ao menor lado



$\overline{CB}$ é o maior lado, pois é oposto ao maior ângulo (x = 90º)

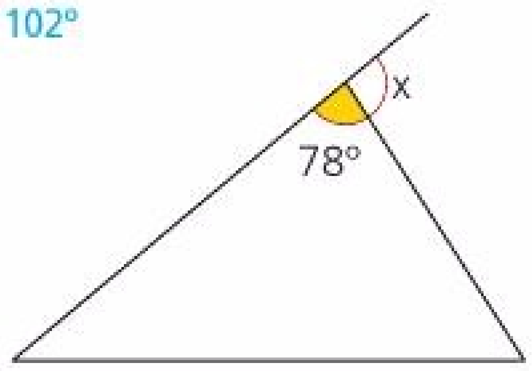


Como **x** é obtuso, $\overline{CB}$ é o maior lado do triângulo

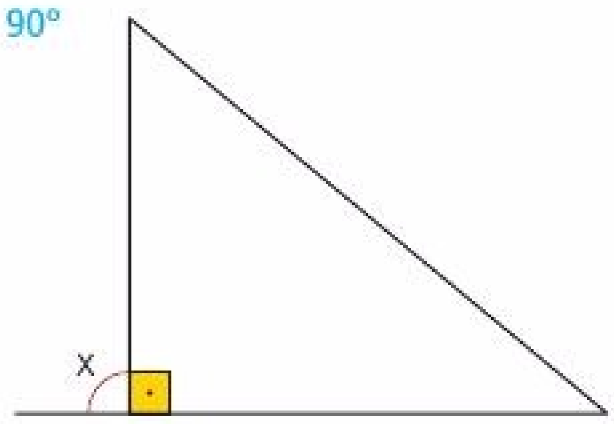
Atividades

1. Calcule o valor de **x** em cada triângulo a seguir:

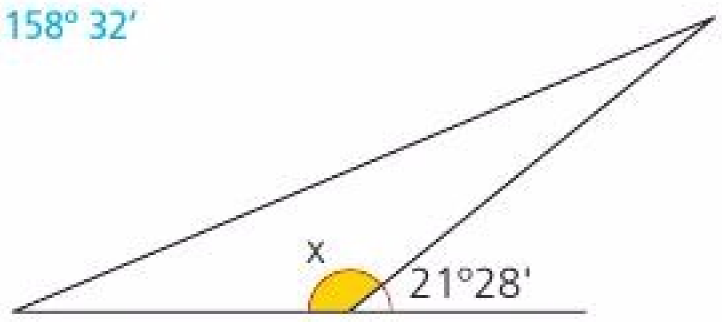
a) 102°



b) 90°

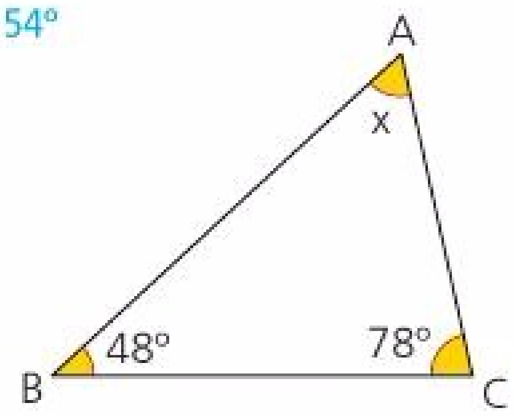


c) 158° 32′

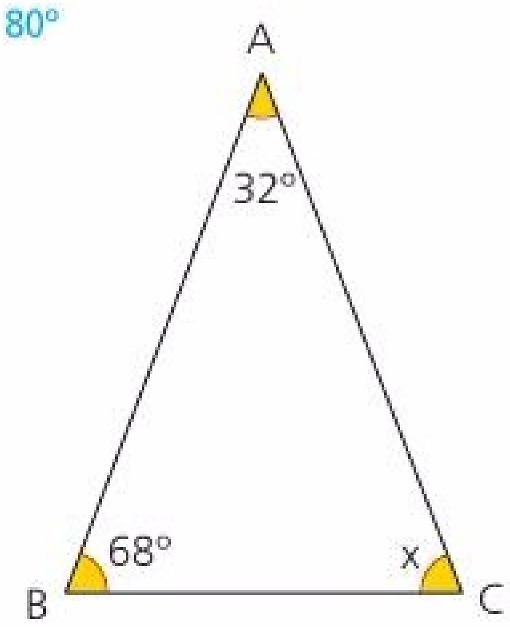


2. Determine as medidas dos ângulos indicados nos triângulos seguintes:

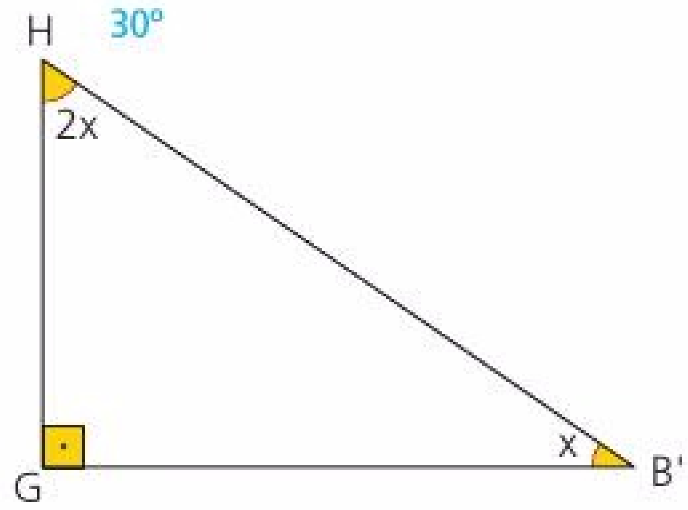
a) 54°



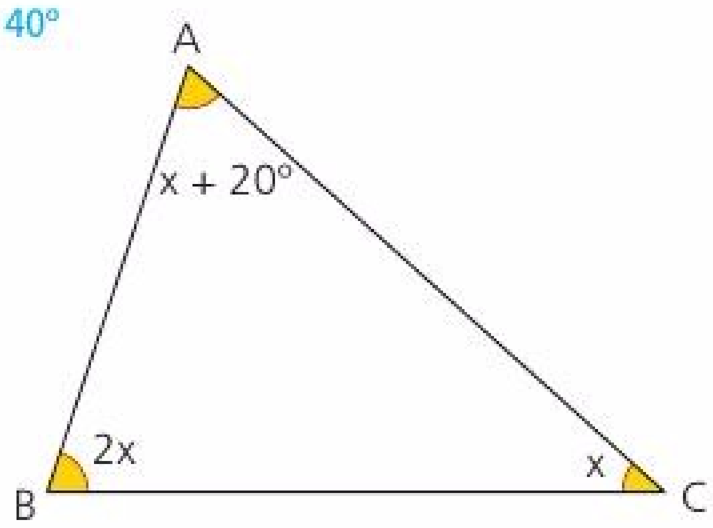
b) 80°



c) 30°

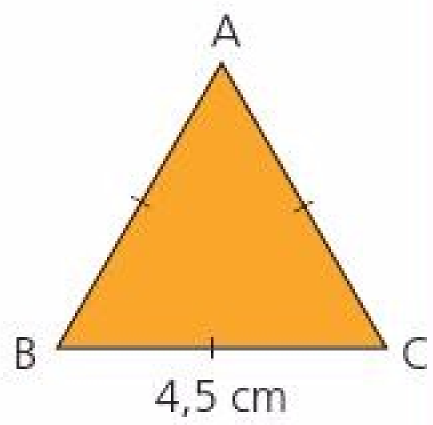


d) 40°



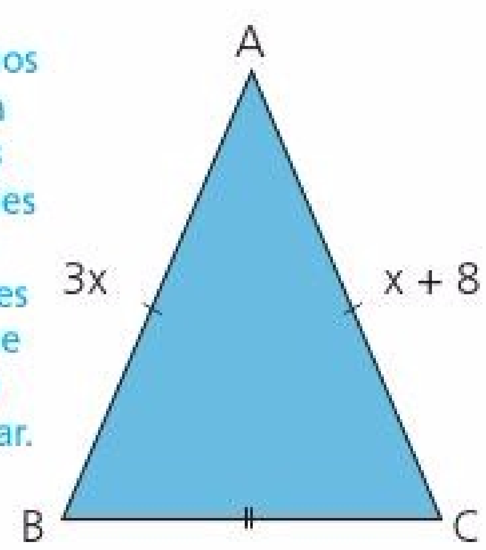
3. Resolva os seguintes problemas.

a) Um dos lados de um triângulo equilátero mede 4,5 cm. Qual é o perímetro desse triângulo?
13,5 cm

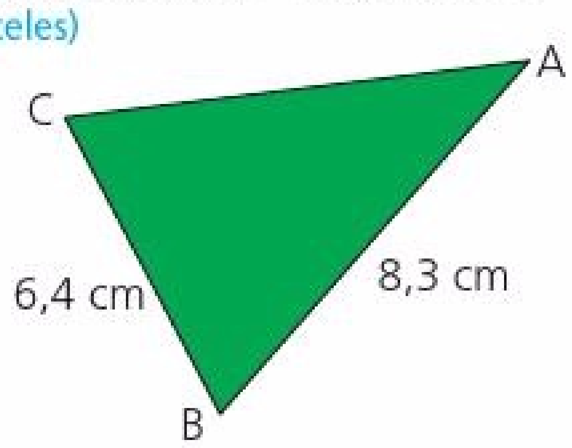


b) Num triângulo isósceles ABC, as medidas dos lados iguais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, representadas pelas expressões **3x** e **x + 8**. Se o perímetro desse triângulo é igual a 26 cm, qual é a medida do lado $\overline{BC}$? 2 cm

Converse com os alunos sobre a importância da organização dos registros das resoluções de exercícios. Faça modelos de resoluções organizadas para que o aluno tenha uma referência para utilizar.

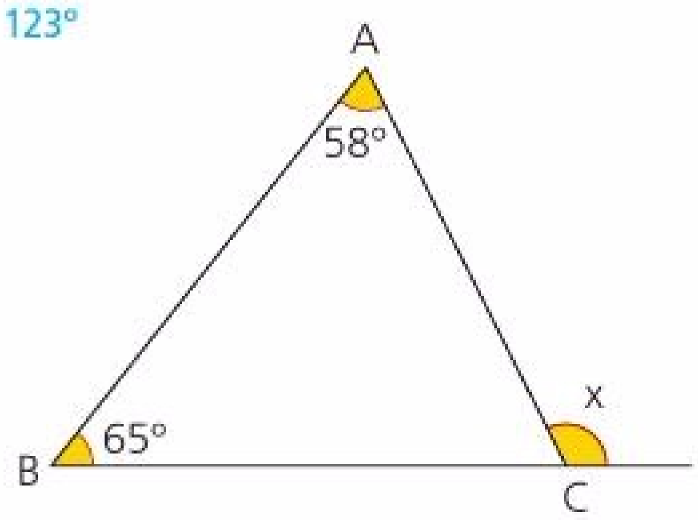


c) Num triângulo ABC, $\overline{AB}$ = 8,3 cm e $\overline{BC}$ = 6,4 cm. Considerando que o perímetro desse triângulo é igual a 23 cm, calcule a medida do lado $\overline{AC}$ e, depois, classifique esse triângulo quanto à medida de seus lados.
8,3 cm (isósceles)

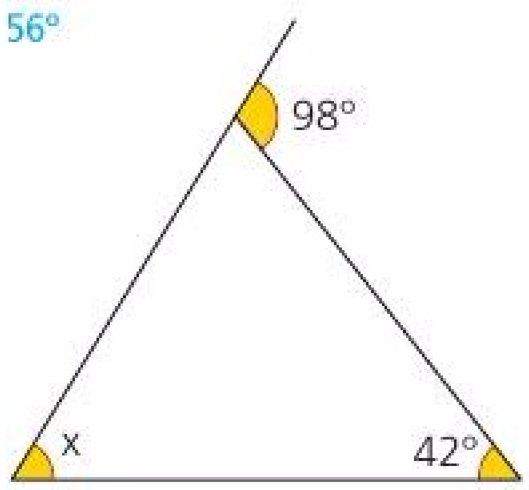


4. Determine o valor de **x** para cada triângulo a seguir.

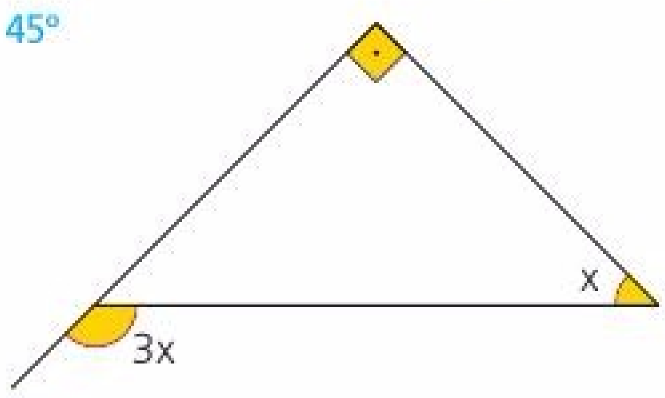
a) 123°



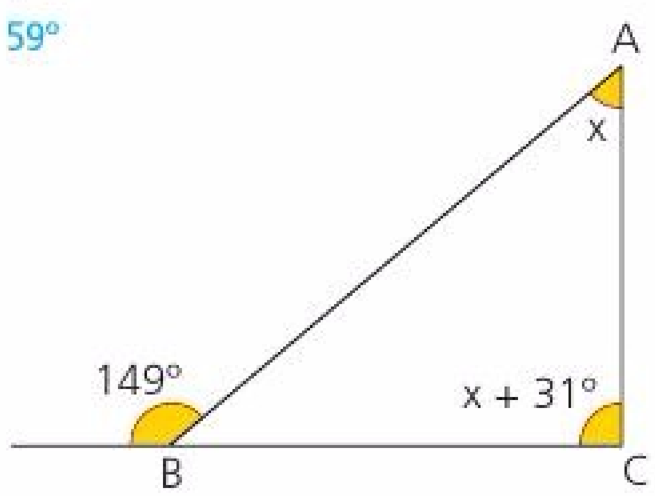
b) 56°



c) 45°

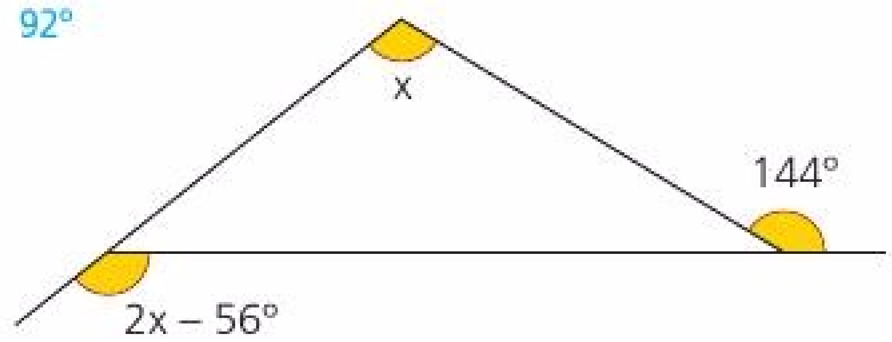


d) 59°

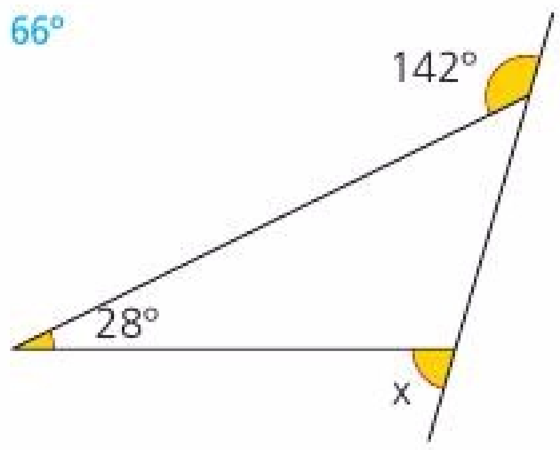


5. Determine o valor de **x** para cada triângulo a seguir:

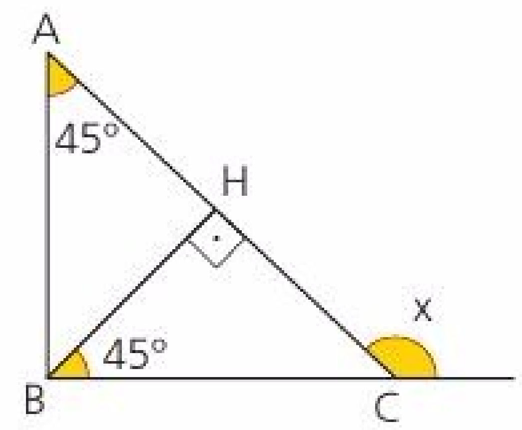
a) 92°



b) 66°

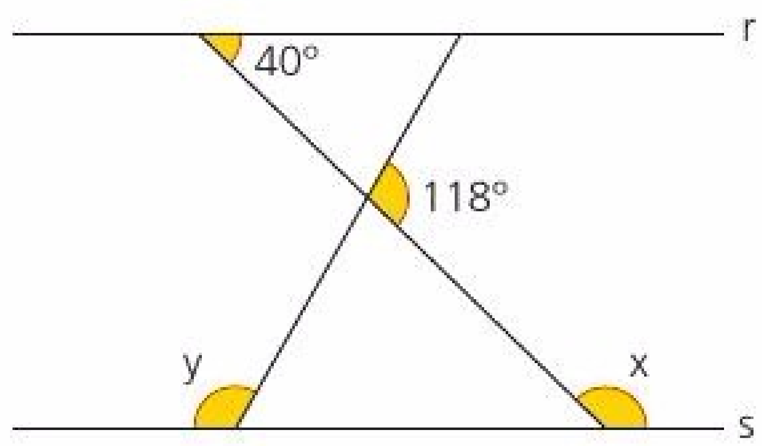


6. Na figura, $\overline{BH}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$. Determine **x** e os ângulos internos dos triângulos ABH e BHC. 135°



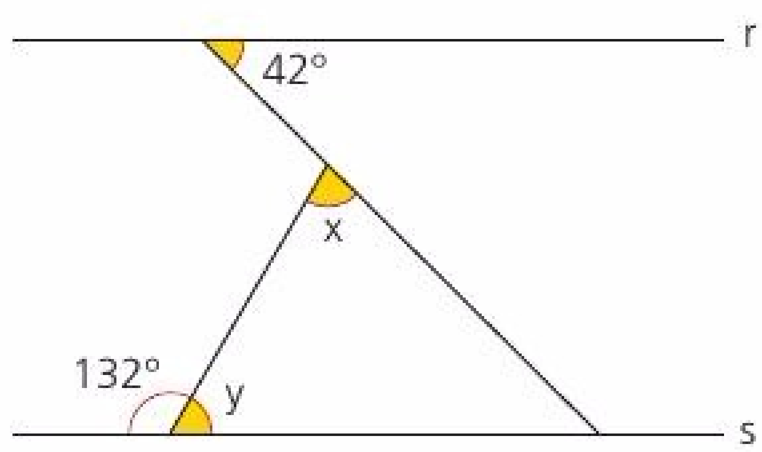
7. Lembrando-se das relações existentes entre os ângulos formados quando duas paralelas são cortadas por uma transversal, e considerando-se que **r//s**, determine **x** e **y** nas figuras:

a)



x = 140°
y = 920°

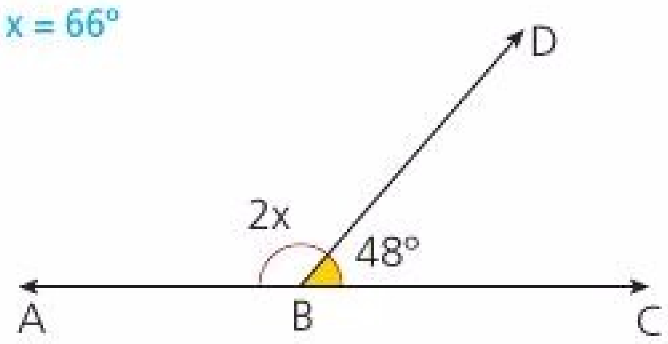
b)



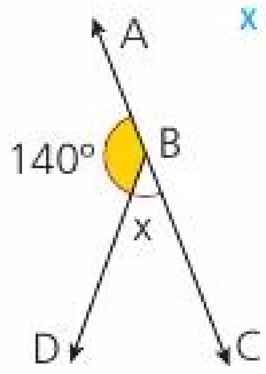
x = 90°
y = 48°

8. Em cada figura a seguir, determine o valor de **x**.

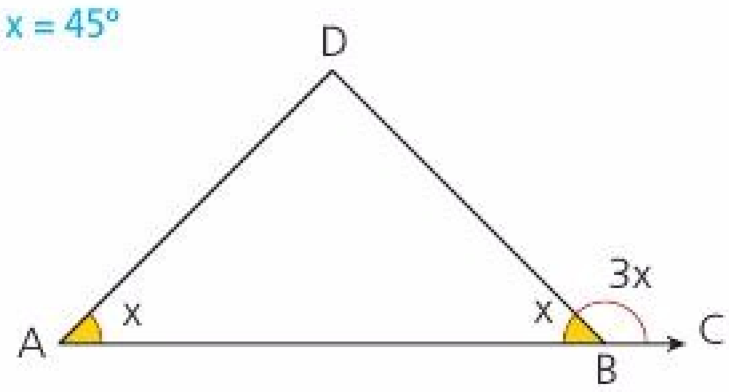
a) x = 66°



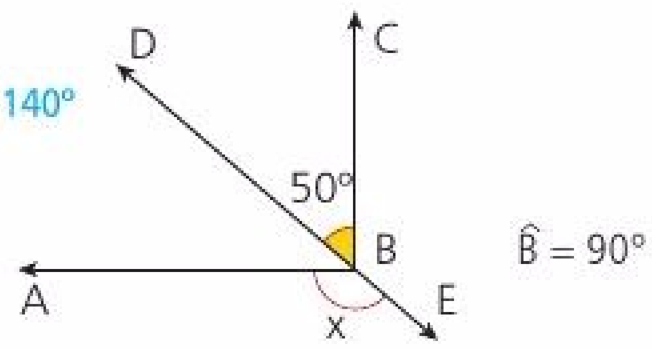
b) x = 40°



c) x = 45°



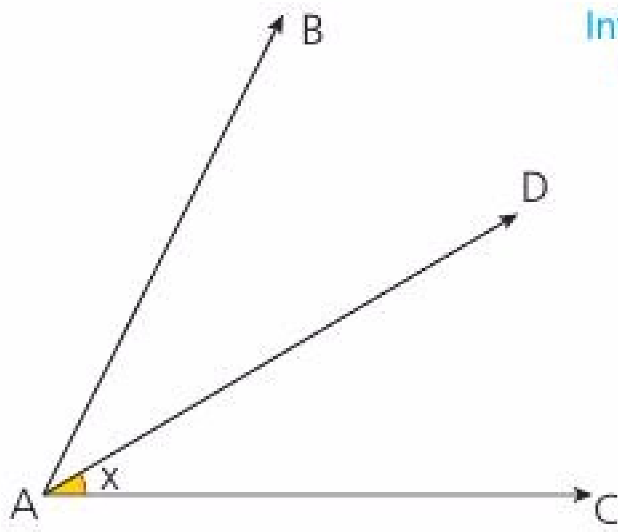
d) x = 140°



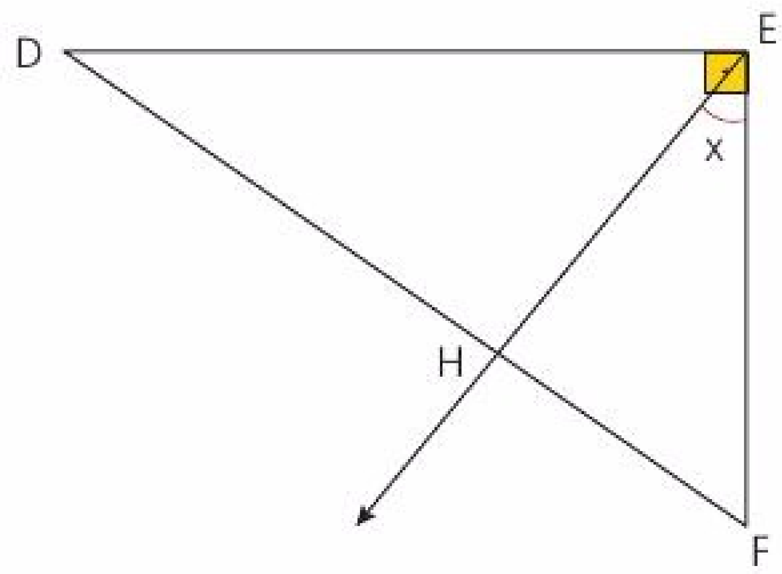
9. Em cada figura a seguir, determine **x**, considerando as informações dadas em cada caso.

a) $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e a medida de $B\hat{A}C$ é 74°. 37°

Interpretar figura



b) $\overrightarrow{EH}$ é bissetriz do ângulo $D\hat{E}F$. 45°



Condições de existência de um triângulo

Sabemos que um triângulo é formado por três lados cujas medidas não podem ser escolhidas aleatoriamente como podemos fazer, por exemplo, com os lados de um quadrado ou de um retângulo. Esse fato está diretamente ligado à condição de rigidez que estudamos.

Um triângulo só existirá se os seus lados obedeceram à seguinte condição: **qualquer um de seus lados deve ser maior que a diferença entre os outros dois lados e menor que a soma desses outros dois lados**.

Quando comparamos um lado com a diferença dos outros dois, devemos nos preocupar com o valor absoluto desta diferença, pois estamos trabalhando com medidas de segmentos. Assim, podemos dizer que para um triângulo de lados **a**, **b** e **c**:

Use três palitos de sorvete ou três lápis de tamanhos diferentes (sugestão de medidas: 4 cm, 5 cm e 10 cm) para que o aluno possa verificar que não é possível construir um triângulo. Faça também as operações matemáticas para comprovar que o triângulo não existe.

$$\mathbf{b - c < a < b + c}$$
$$\mathbf{a - c < b < a + c}$$
$$\mathbf{a - b < c < a + b}$$

Veja, por exemplo, que com três segmentos medindo 5 cm, 10 cm e 9 cm, podemos formar um triângulo, pois podemos aplicar a regra da condição de existência de um triângulo para todos os lados.

$10 - 9 < \mathbf{5} < 10 + 9 \rightarrow 1 < 5 < 19$ (verdadeiro)

$9 - 5 < \mathbf{10} < 9 + 5 \rightarrow 4 < 10 < 14$ (verdadeiro)

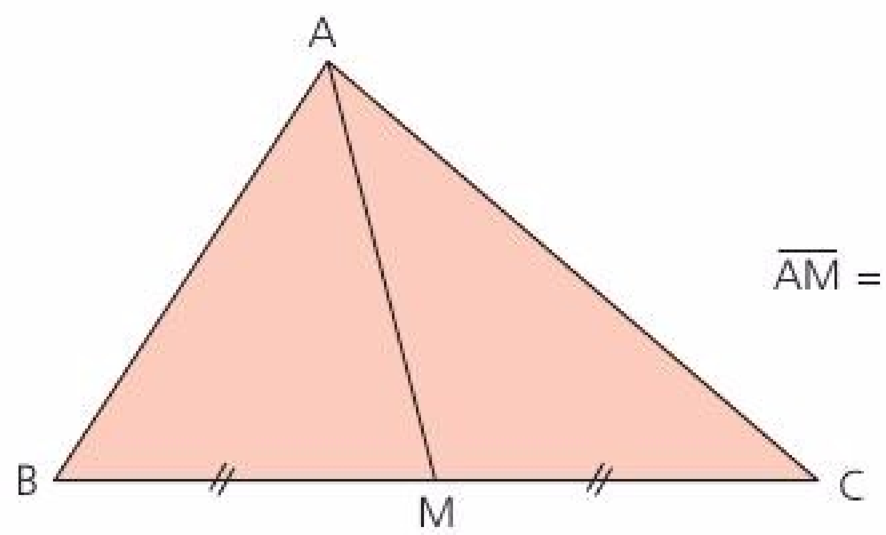
$5 - 10 < \mathbf{9} < 10 + 5 \rightarrow 5 < 9 < 15$ (verdadeiro)

Mediana, bissetriz, altura e mediatriz

Além dos lados, os triângulos possuem segmentos importantes na sua caracterização e nas demais construções geométricas. São as **medianas**, as **bissetrizes**, as **alturas** e as **mediatrizes**. Vamos entendê-los:

a) **Mediana**

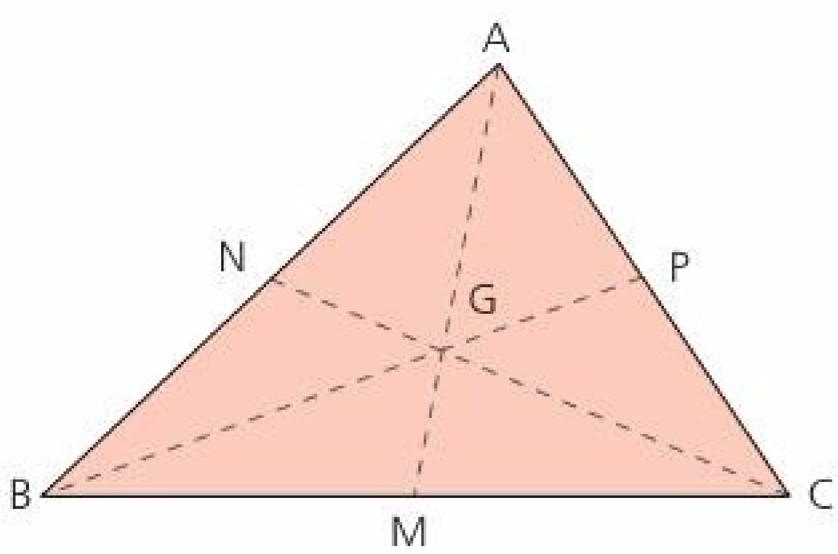
Chama-se **mediana de um triângulo** ao segmento que tem extremidades em **um vértice** e **o ponto médio** do lado oposto a esse vértice. Na figura, **M é o ponto médio de $\overline{BC}$** e **$\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$**.



$\overline{AM}$ = mediana relativa a $\overline{BC}$

Chamamos de ceviana todo segmento de reta que tem uma das extremidades em um vértice do triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte ao lado, oposto a esse vértice. As cevianas notáveis são: mediana, bissetriz interna e altura.

Como um triângulo possui três lados, terá também três medianas, que se cruzam em um único ponto denominado **baricentro G** do triângulo.



G é o baricentro do triângulo

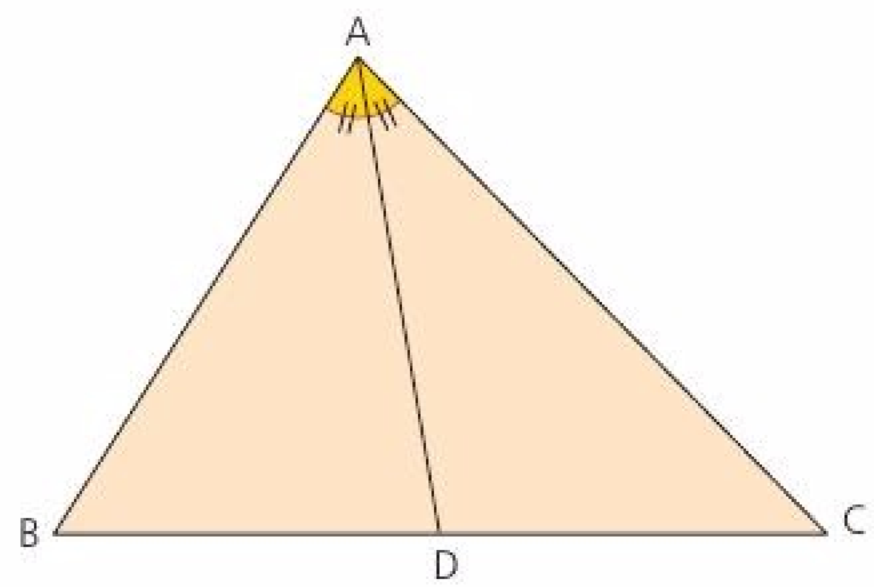
Baricentro é uma de origem grega que significa centro de peso. O baricentro divide cada mediana da seguinte forma, o segmento que contem o vértice é o dobro do segmento que contem o ponto médio do lado.

Além de ser chamado de **centro de gravidade** ou **ponto de equilíbrio** do triângulo, o baricentro **divide cada mediana em duas partes, de tal forma que uma é o dobro da outra**. Isto vale para qualquer triângulo e pode ser escrito da seguinte forma para o triângulo ABC da figura:

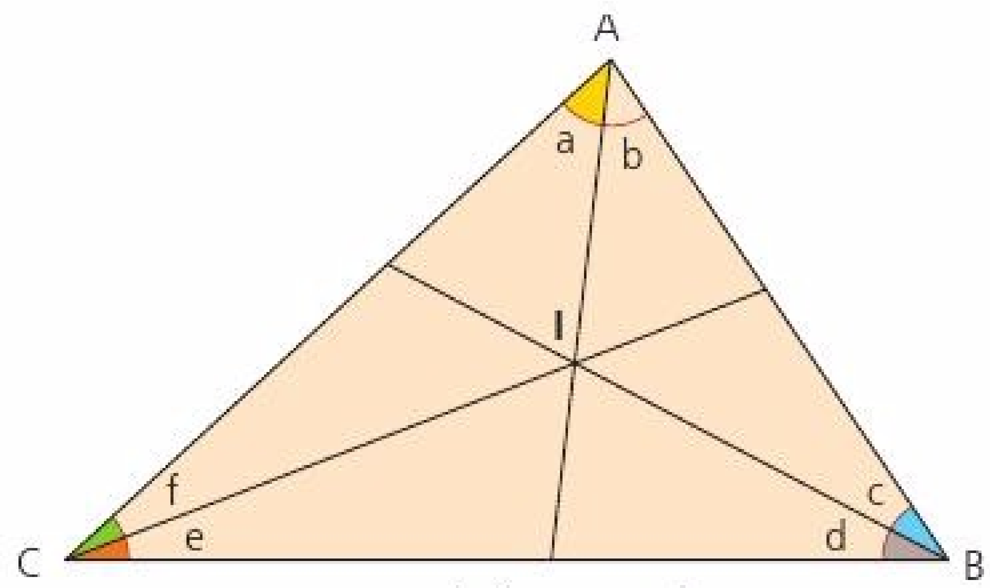
$$\overline{AG} = 2\overline{GM} \qquad \overline{BG} = 2\overline{GP} \qquad \overline{CG} = 2\overline{GN}$$

b) **Bissetriz interna**

Chama-se **bissetriz interna** do triângulo cada um dos segmentos que une um vértice ao lado oposto e divide o ângulo deste vértice em duas partes iguais. Na figura,o segmento $\overline{\mathbf{AD}}$ **é a bissetriz interna** relativa ao ângulo $\hat{\mathbf{A}}$.



$\overline{AD}$ = bissetriz interna

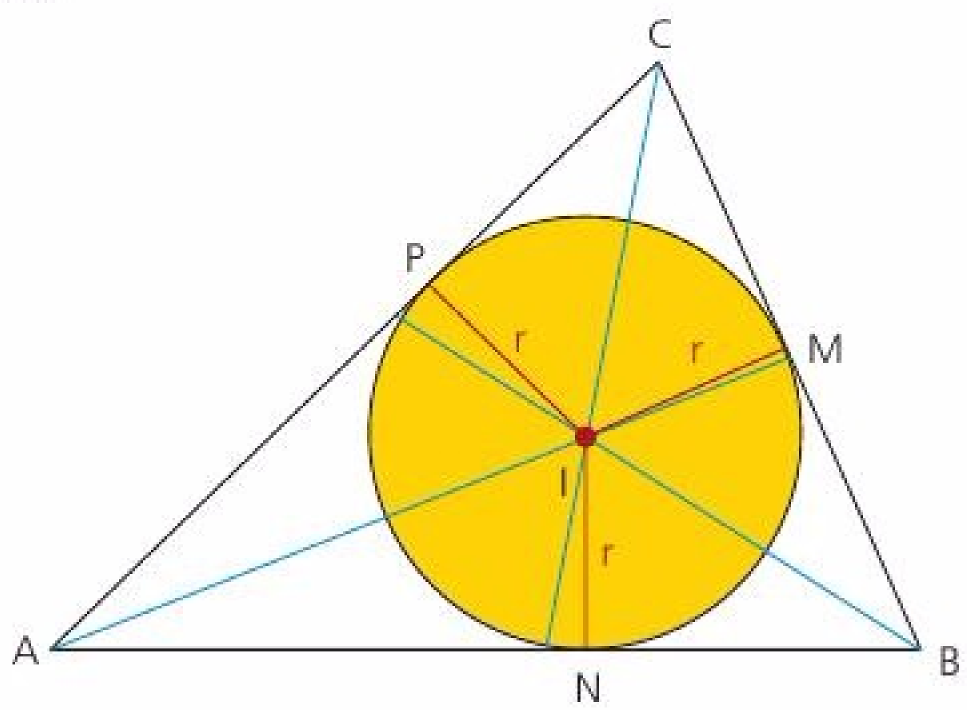


a = b, f = e, c = d
ponto I = incentro

Todo triângulo possui três bissetrizes internas, cada uma relativa a um ângulo. As três bissetrizes encontram-se num mesmo ponto, denominado **incentro (I)** do triângulo como mostra a figura acima.

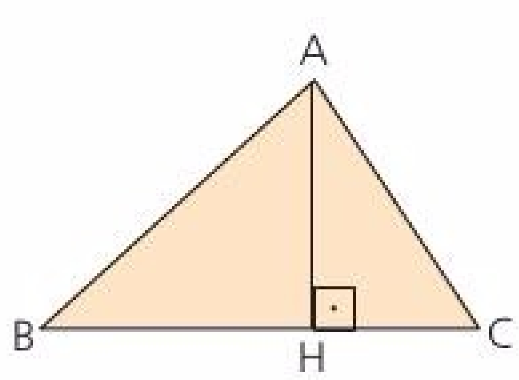
Dizemos que o incentro é o ponto equidistante aos lados do triângulo.

O **incentro** é o centro da circunferência inscrita no triângulo. Observe no triângulo a seguir que o raio da circunferência é perpendicular aos lados do triângulo nos pontos M, N e P e são os pontos de tangência da circunferência inscrita no triângulo.

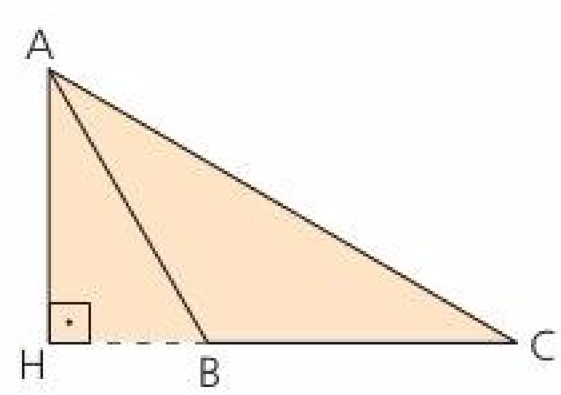


c) **Altura**

A altura relativa de um dos lados de um triângulo é o segmento perpendicular a este lado, que tem como extremos o vértice e o "pé" da perpendicular sobre esse lado (ou sobre seu prolongamento). Observe nos dois triângulos a seguir que no acutângulo, o "pé" da perpendicular (H) é interno ao lado $\overline{BC}$ e no obtusângulo cai sobre o prolongamento do lado $\overline{BC}$.

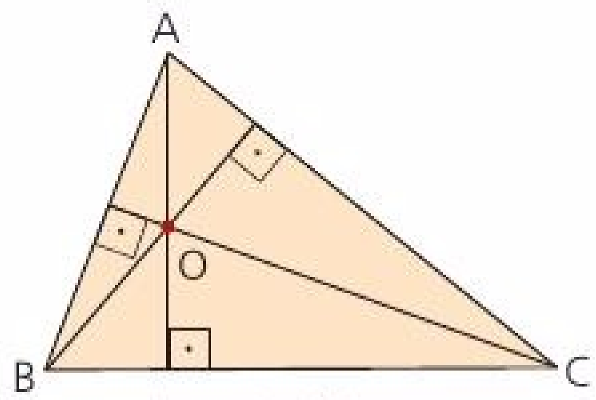


altura interna

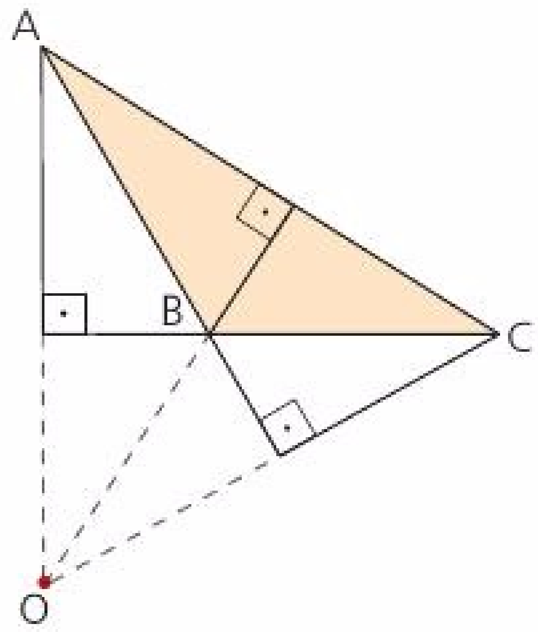


altura externa

As três alturas de um triângulo sempre se encontram em um ponto denominado **ortocentro (O)**. Note que o ortocentro pode ser interno ou externo ao triângulo.



ortocentro interno

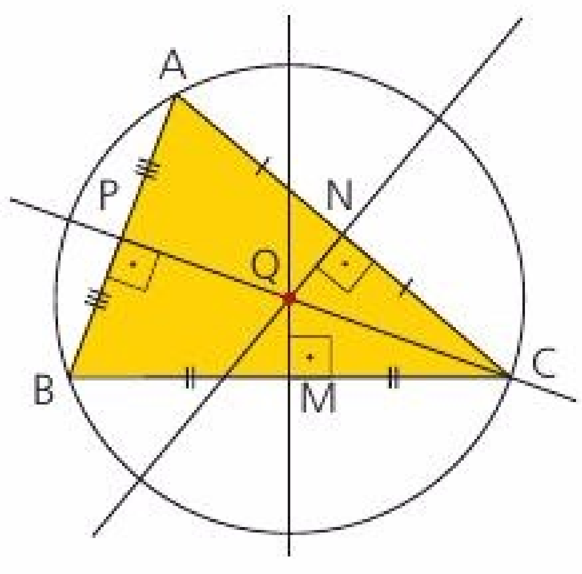


ortocentro externo

O circuncentro pode ser interno se o triângulo for acutângulo, externo se o triângulo for obtusângulo e coincidente se for um triângulo retângulo.

d) **Mediatriz**

Chama-se mediatriz, relativa a um lado de um triângulo, à reta perpendicular ao lado em seu ponto médio. Assim, cada triângulo tem três mediatrizes que se encontram num único ponto denominado **circuncentro** do triângulo. Observe na figura a seguir que **Q** é o circuncentro e **M**, **N** e **P** são os pontos médios dos lados do triângulo.



As três mediatrizes se encontram no circuncentro Q

Fernanda Youssef

Atividades

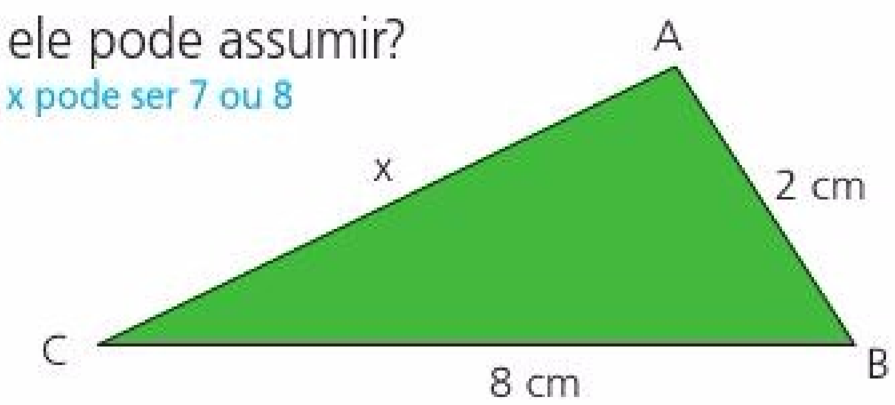
10. Responda a cada pergunta a seguir e justifique sua resposta.

a) É possível construir um triângulo com lados medindo 6 cm, 9 cm e 4 cm? sim

b) É possível construir um triângulo com lados medindo 4 cm, 3 cm e 7 cm? não

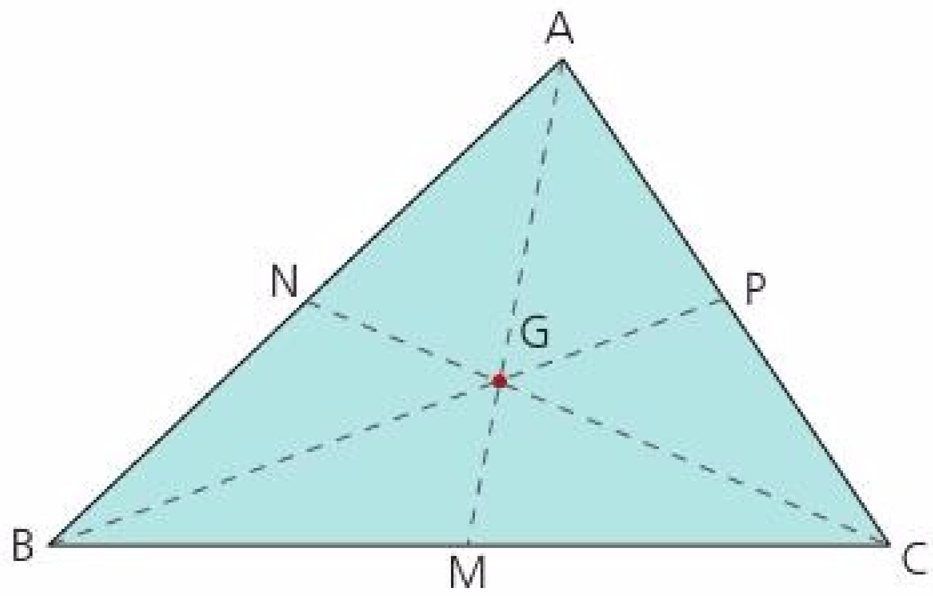
c) É possível construir um triângulo com lado medindo 12 cm, 12 cm e 25 cm? não

11. Na figura, $\overline{AB}$ é o menor lado do triângulo ABC e $\overline{BC}$ é o maior. Sabendo que a medida do lado **x** é um número inteiro, que valores ele pode assumir?
x pode ser 7 ou 8



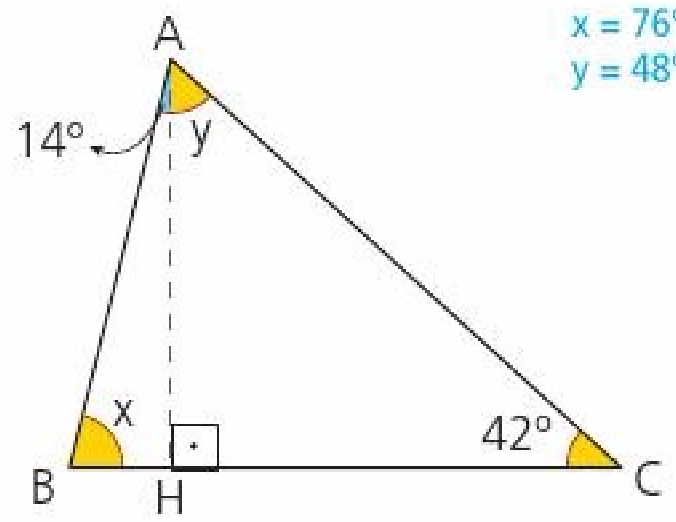
12. As medidas dos lados de um triângulo são números inteiros. O maior lado mede 10 cm e o menor lado mede 6 cm. Que medidas pode ter o terceiro lado? 7,8 ou 9

13. Sendo, G o baricentro do triângulo ABC. Sabendo que $\overline{AM}$ = 2,1 cm e $\overline{CN}$ = 1,8 cm determine o perímetro do triângulo GCM, onde o lado $\overline{BC}$ mede 2,6 cm.
Perímetro Δ GCM = 3,2 cm



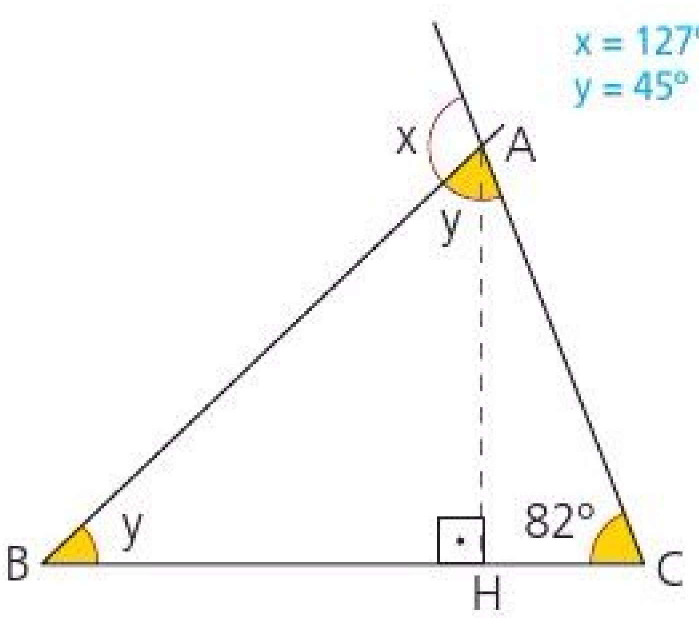
14. Determine os valores de **x** e **y** em cada figura, sabendo que $\overline{AH}$ é a altura de cada triângulo.

a)



x = 76°
y = 48°

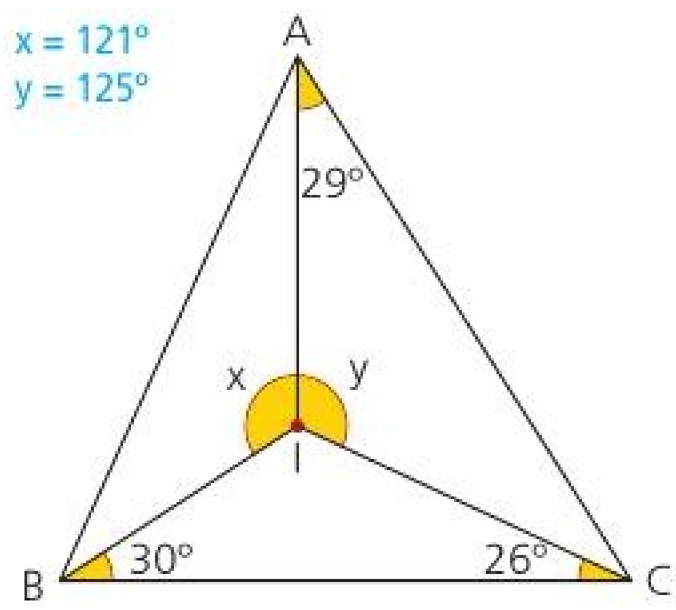
b)



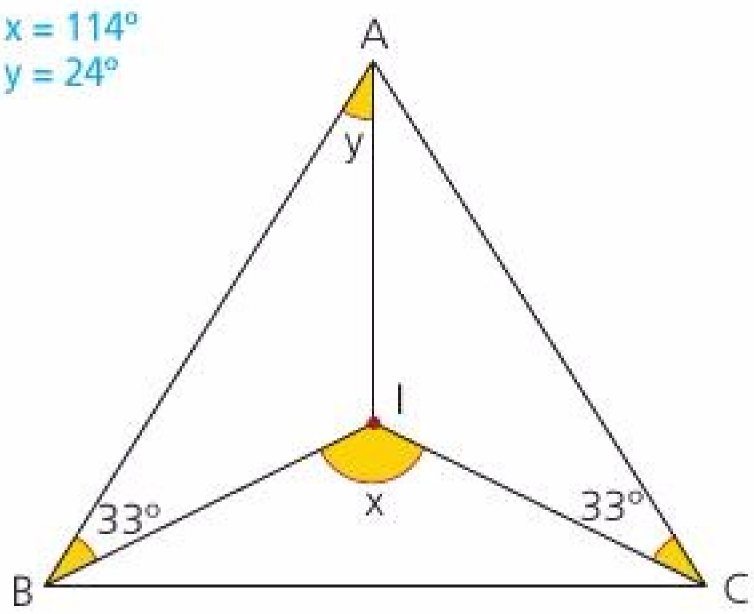
x = 127°
y = 45°

15. Determine **x** e **y** nas figuras, sabendo que o ponto **I**, em cada uma delas, é o incentro do triângulo.

a) x = 121°
y = 125°



b) x = 114°
y = 24°



16. Uma empreiteira pretende construir um posto de serviços num entroncamento que envolve três rodovias que, duas a duas se cruzam. Para valorizar o empreendimento e fazer com que o posto seja equidistante das três rodovias os projetistas decidiram por construí-lo num determinado ponto. Faça um desenho esquemático da situação geométrica descrita e responda:

a) Qual o ponto escolhido pelos projetistas?

b) Descreva o processo pelo qual eles determinaram o ponto.

a) A intersecção das bissetrizes, in centro do triângulo formado pelos três cruzamentos.

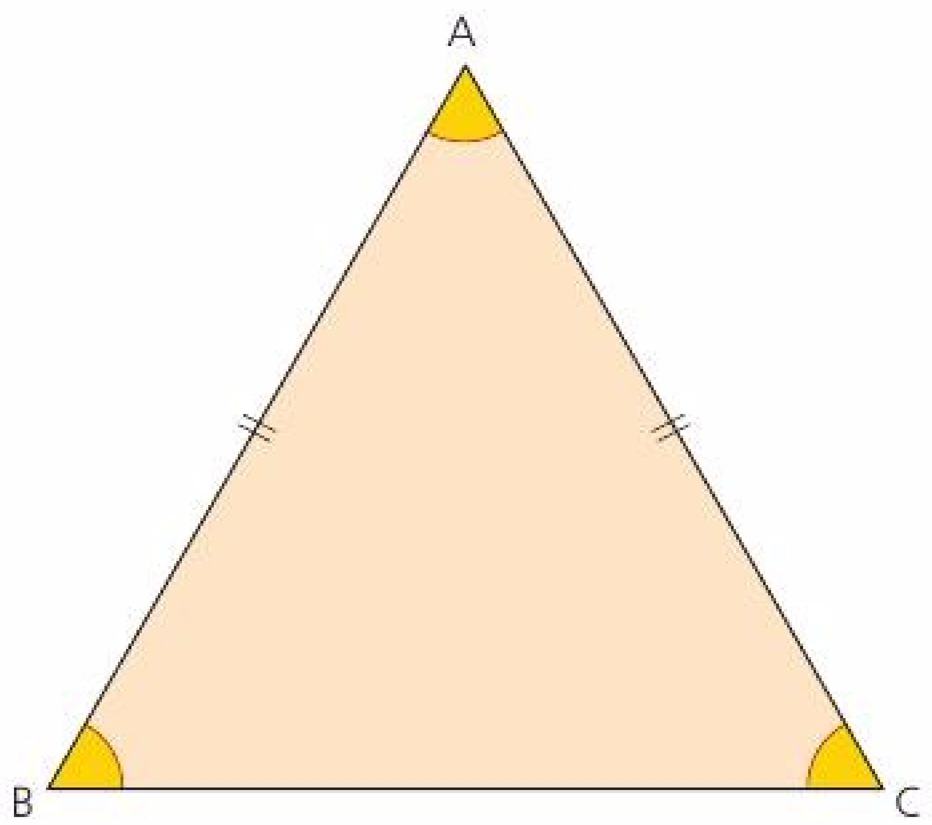
b) Devemos usar os cruzamentos das rodovias como vértices do triângulo e assim traçar as bissetrizes internas do triângulo.

Triângulos notáveis

Alguns triângulos têm grande importância no estudo da Geometria, em função de suas características e das relações entre os respectivos lados e ângulos. Vamos estudá-los mais detalhadamente.

- **Triângulo isósceles**

Sabemos que **triângulo isósceles é todo o triângulo que possui dois lados iguais**. Observe o triângulo **isósceles ABC** a seguir:

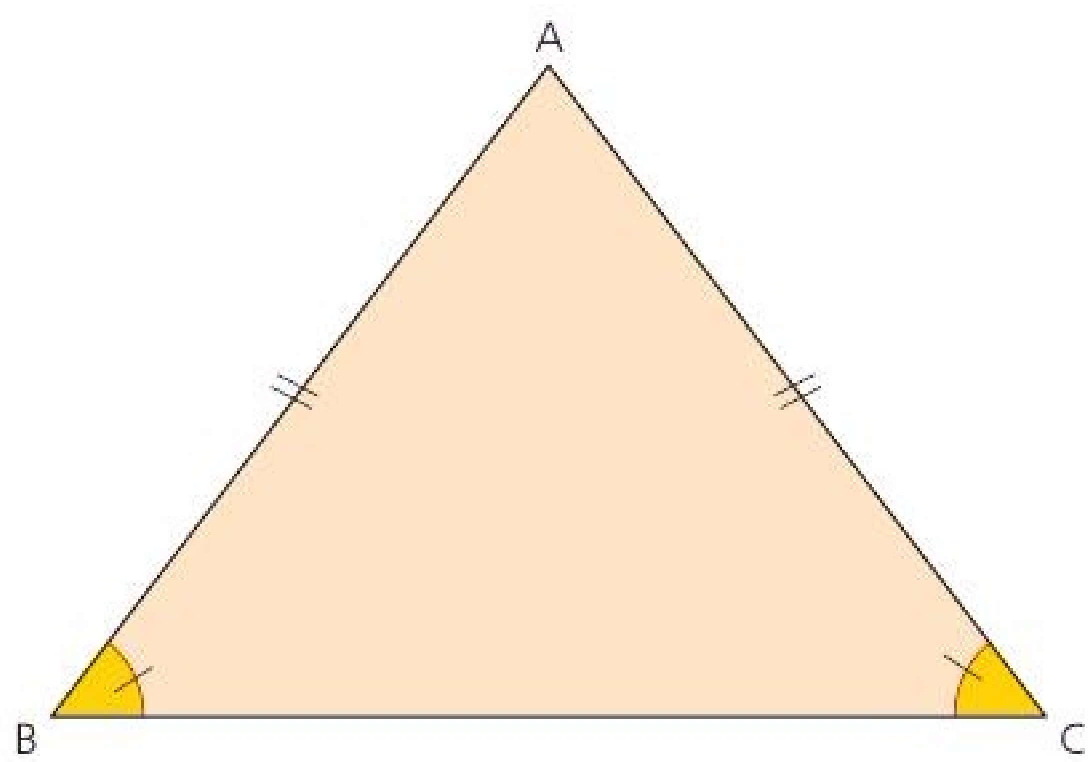


O ângulo $\hat{A}$, formado pelos lados iguais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é chamado **ângulo do vértice**, o lado $\overline{BC}$ (oposto ao ângulo do vértice) é chamado **base** e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os **ângulos da base**.

- **Propriedades do triângulo isósceles**

1ª propriedade

Em todo o triângulo isósceles, **os ângulos da base são congruentes**.

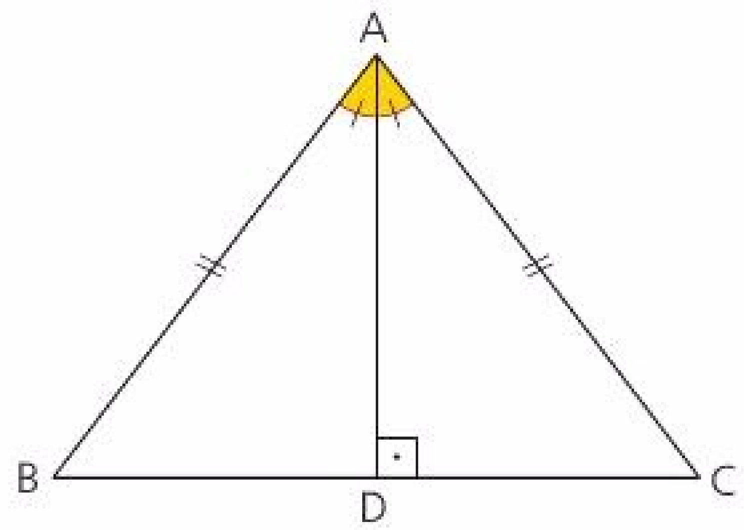


$$\overline{AB} \equiv \overline{AC} \rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

Faça no quadro, as construções geométricas que comprovem a 2ª propriedade do triângulo isósceles: a mediana e a altura relativas à base e a bissetriz do ângulo do vértice coincidem.

2ª propriedade

Em todos os triângulos isósceles, **a mediana e a altura relativas à base e a bissetriz do ângulo do vértice** coincidem.



$\overline{AD}$ é, ao mesmo tempo, **altura** e **mediana** relativa a $\overline{BC}$ e **bissetriz** de $\hat{A}$.

- **Triângulo equilátero**

Você já sabe que triângulo equilátero é todo triângulo que possui os três lados congruentes. Veja, a seguir, algumas de suas propriedades.

- **Propriedades do triângulo equilátero**

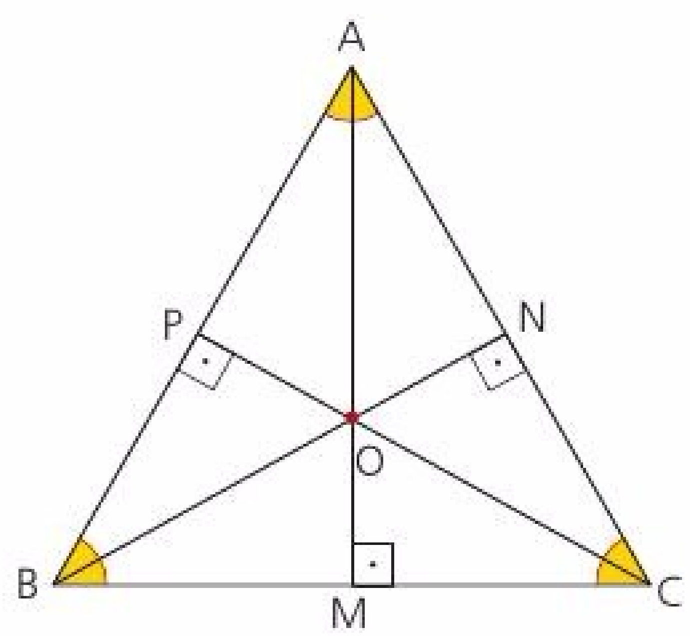
1ª propriedade

Em todo o triângulo equilátero, **os três ângulos internos são congruentes, medindo 60º cada um**.

2ª propriedade

Em todo o triângulo equilátero, **a mediana e a altura relativas a qualquer lado coincidem com a bissetriz relativa ao ângulo oposto a esse lado**.

Faça as construções geométricas para obter um triângulo equilátero e comprove, geometricamente, que as cevianas coincidem.

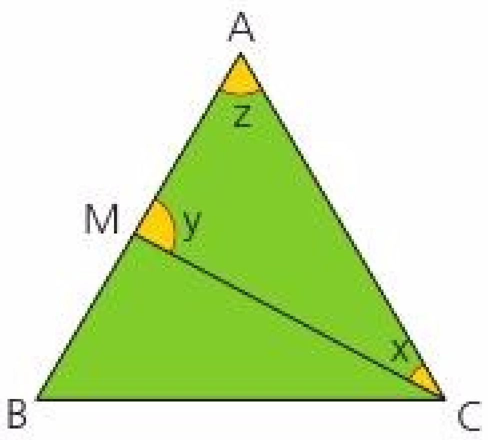


$\overline{AM} \equiv \overline{CP} \equiv \overline{BN}$

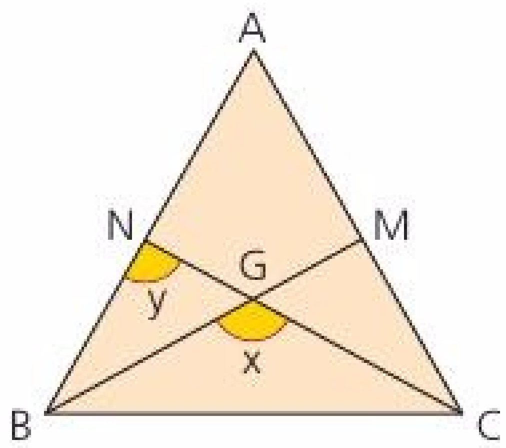
O é, ao mesmo tempo, **baricentro**, **incentro**, e **circuncentro** do triângulo ABC.

Atividades

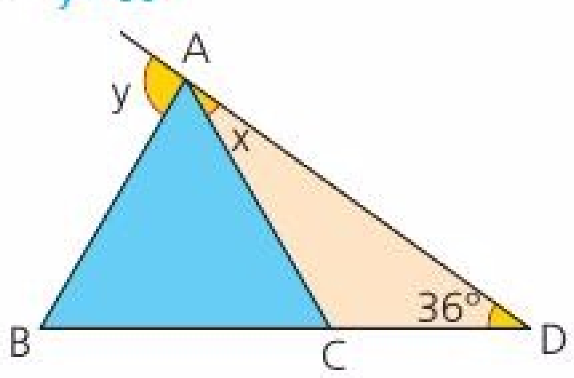
17. No triângulo equilátero ABC, $\overline{CM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{AB}$. Determine os valores de **x**, **y** e **z**. $x = 30°$ $y = 90°$ $z = 60°$



18. Na figura,o triângulo ABC é equilátero. Sabendo que $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, calcule os valores de **x** e **y**. $x = 120°$ $y = 90°$



19. Na figura, o triângulo ABC é equilátero. Nessas condições, calcule os valores de **x** e **y**. $x = 24°$ $y = 96°$



20. Desenhe a figura e resolva, os problemas a seguir. Construir figuras

a) O perímetro de um triângulo isósceles é 35 cm. Determine as medidas dos lados desse triângulo, sabendo que a medida da base é a metade da medida de cada um dos outros lados. $\overline{AB} = \overline{AC} = 14$ cm $\overline{BC} = 7$ cm

b) Em um triângulo isósceles, a medida do ângulo do vértice supera em 27° a medida de cada ângulo da base. Calcule as medidas dos ângulos internos desse triângulo. $\hat{B} = \hat{C} = 51°$ $\hat{A} = 78°$

c) Um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo mede 42° 28′. Calcule a medida do outro ângulo agudo desse triângulo. $\hat{C} = 47° 32'$

d) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são expressas, em graus, por **2x** , **3x + 4°** e **6x − 22°**. Determine as medidas dos ângulos externos desse triângulo. 36°, 58° e 86°

21. O triângulo PQR é retângulo em Q. A medida do ângulo $\hat{R}$ é: alternativa **d**

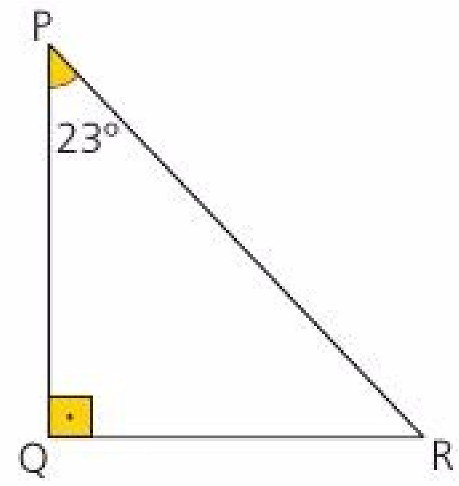
a) 27°

b) 33°

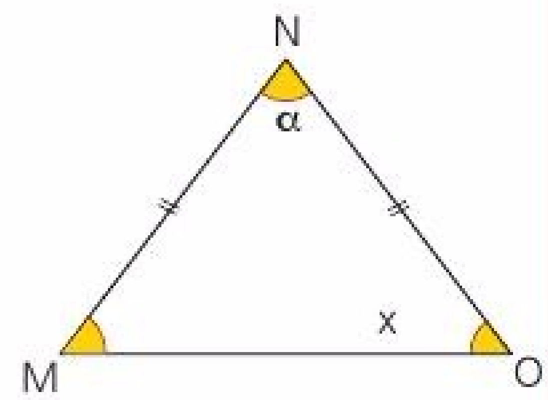
c) 54°

d) 67°

e) 127°

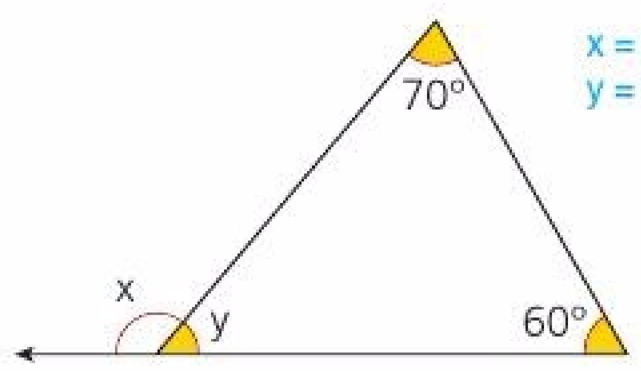


22. O triângulo MNO é isósceles e $\alpha = 82°$. Determine os ângulos da base. 49°



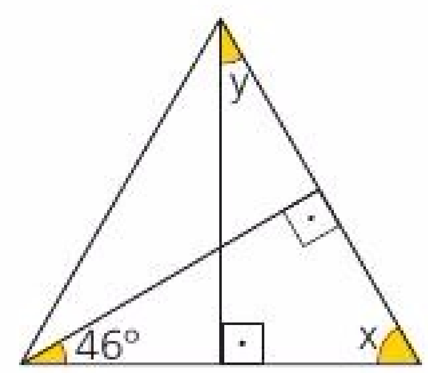
23. Determine a medida dos ângulos **x** e **y** em cada uma das figuras a seguir:

a)



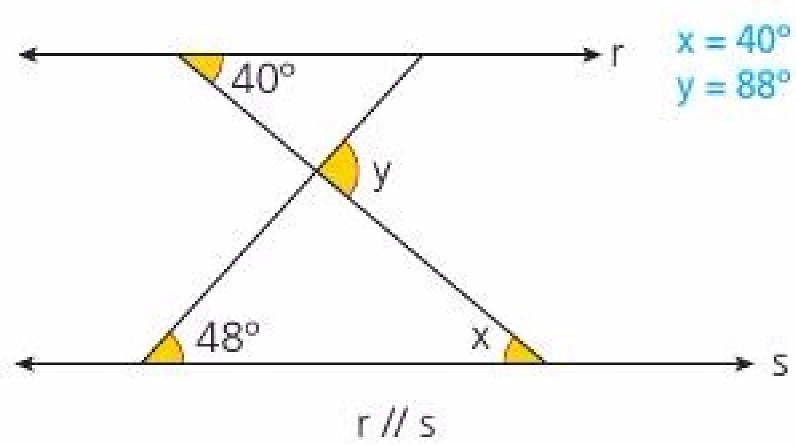
$x = 130°$ $y = 50°$

b)



$x = 44°$ $y = 46°$

c)

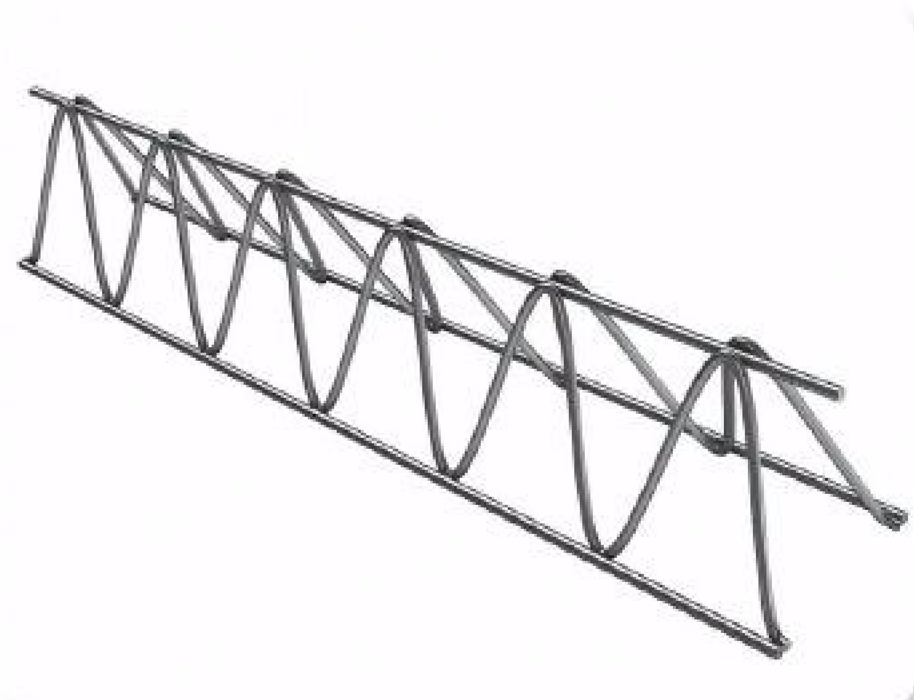


$x = 40°$ $y = 88°$

Na prática

As treliças são estruturas que se baseiam na rigidez do triângulo. Por essa razão, são chamadas estruturas triangulares. Em função desta rigidez, possuem grande resistência a esforços e são muito utilizadas em projetos de construção civil.

Douglas Martins de Carvalho



Wong Chee Yen/Dreamstime

A estrutura da esquerda é uma treliça utilizada para construção de vigas de concreto. À direita, treliças metálicas dão sustentação ao telhado.

Grandes pontes são projetadas a partir da associação de estruturas metálicas treliçadas, extremamente eficiente para vencer grandes vãos e resistir a grandes cargas.

Rodrigo Soldon/Creative Commons

Observe na foto a utilização de estruturas metálicas em treliças em uma das mais conhecidas pontes brasileiras, a Hercílio Luz, em Florianópolis, SC.

Nesta oficina, vamos construir uma maquete de ponte, utilizando uma estrutura em treliça.

Material necessário

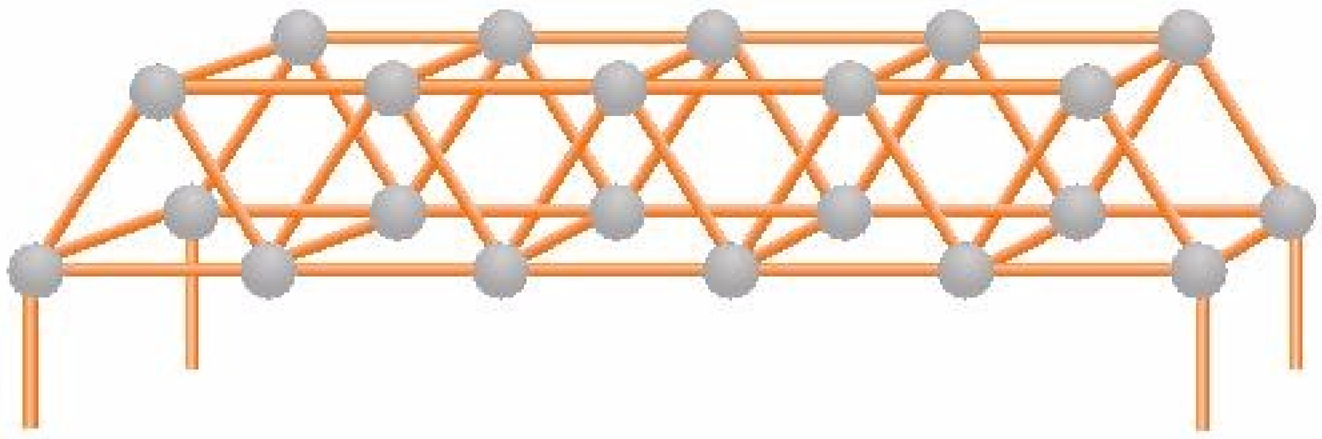
- 1 pacote de 500g de espaguete número 7;
- 1 cola do tipo epóxi ou cola quente aplicável com pistola;
- Bolas de isopor de diâmetro aproximado de 2 cm.

Adriana Botter; Marek Kosmal/PhotoXpress

Objetivo

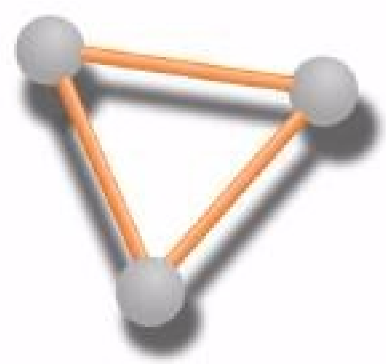
Após construídas as pontes de macarrão, faça uma exposição na escola com cartazes explicando sobre a rigidez dos triângulos (alguns grupos de alunos deve ser incumbido dessa tarefa) e as várias pontes de macarrão construídas e com cargas diferentes colocadas sobre as pontes.

Cada grupo de quatro alunos (ou na quantidade que o professor determinar) deverá elaborar o projeto e construir uma ponte de macarrão que vença um vão de aproximadamente 50 cm.



Procedimento

1. Façam um desenho do projeto, estabelecendo as medidas das barras de macarrão que serão utilizadas nas duas treliças laterais, formadas por triângulos equiláteros.
2. Cortem as barras de macarrão nas dimensões estabelecidas.
3. Montem os triângulos que formarão as treliças, utilizando-se das bolinhas de isopor coladas com a cola quente nos vértices do triângulo.



Caso prefiram, vocês podem colar os vértices fazendo pequenas esferas de massa epóxi no lugar das bolinhas de isopor. O grupo deve discutir e decidir coletivamente.

4. Depois de montagem, unam as duas treliças, formando as partes superior e inferior da ponte.
5. Nos últimos nós de cada extremidade, colem também dois suportes, conforme mostra a figura.

Depois de pronta, testem a resistência da ponte, colocando sobre ela, gradativamente, diferentes cargas. Comecem, por exemplo, colocando um livro. Se a ponte aguentou bem esse peso, vocês podem, então, acrescentar um caderno e verificar se ela aguenta sustentar um livro mais um caderno e assim por diante. Caso a ponte quebre, não há motivos para preocupação; vocês já sabem como montá-la e podem fazer quantas vezes quiserem.

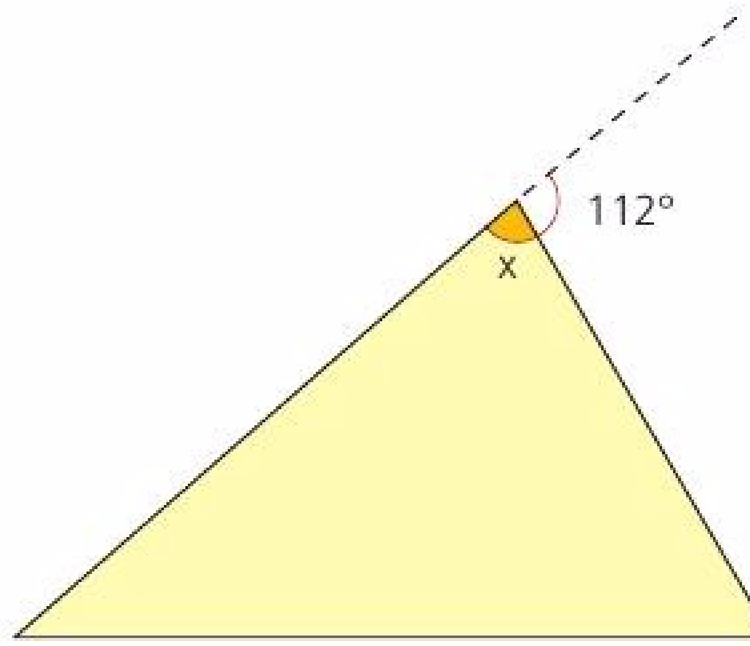
Compare essa ponte que vocês construíram com o vão central da ponte Hercílio Luz. Se desejar, você e seus amigos podem reforçar as treliças com uma barra de macarrão vertical entre o vértice e a base do triângulo.

Para estudar

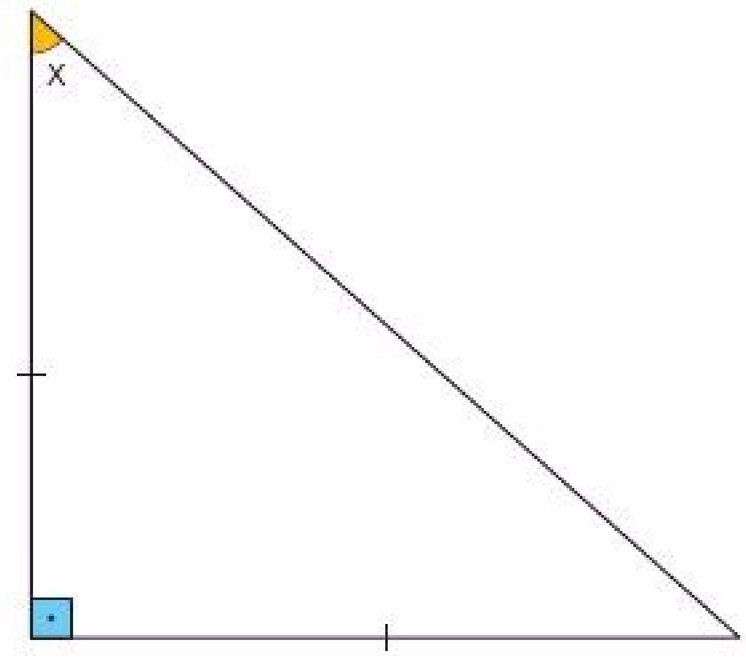
A relação de exercicios a seguir, retoma diversos conceitos já estudados na geometria. A matemática possui uma linguagem universal sendo assim reforce a importância da organização e da clareza dos registros.

24. Calcule o valor de **x** em cada triângulo a seguir:

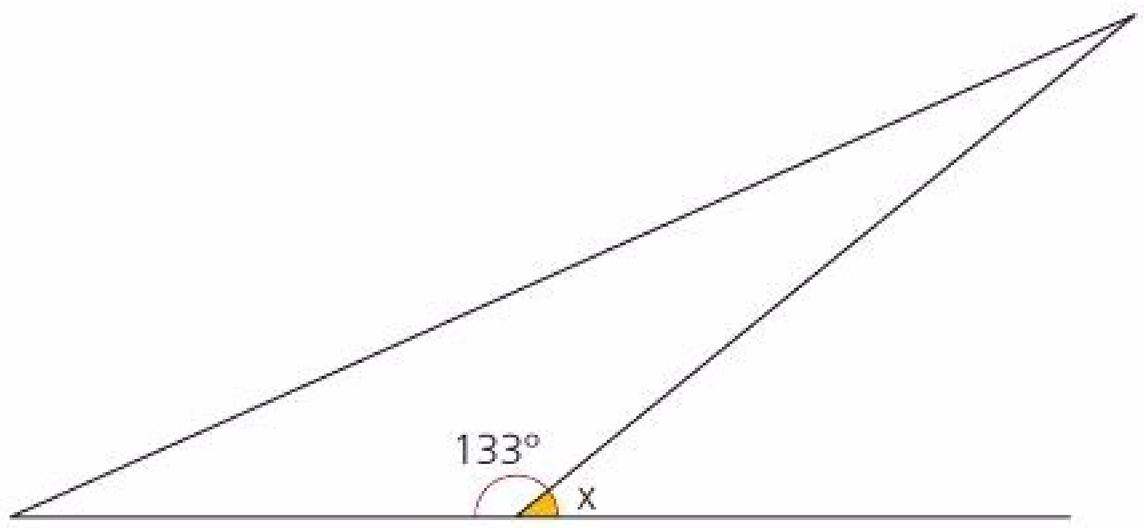
a)



b)

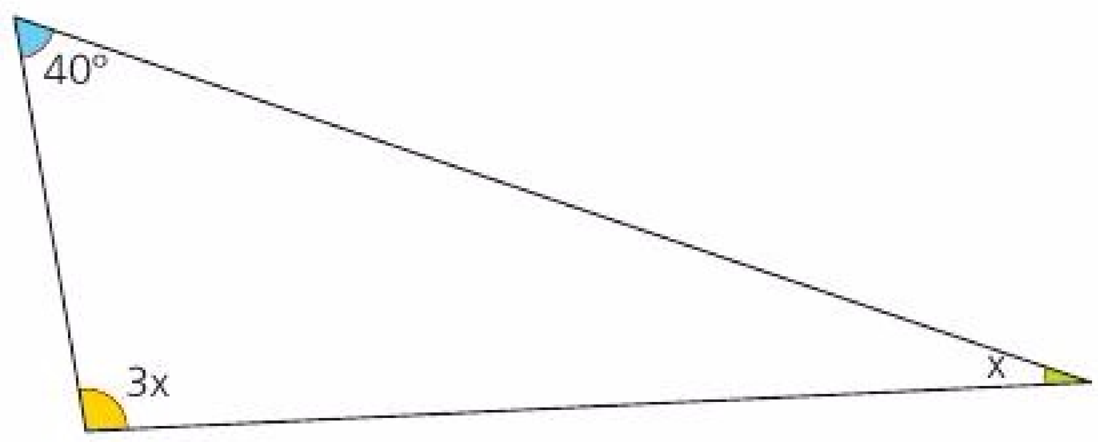


c)

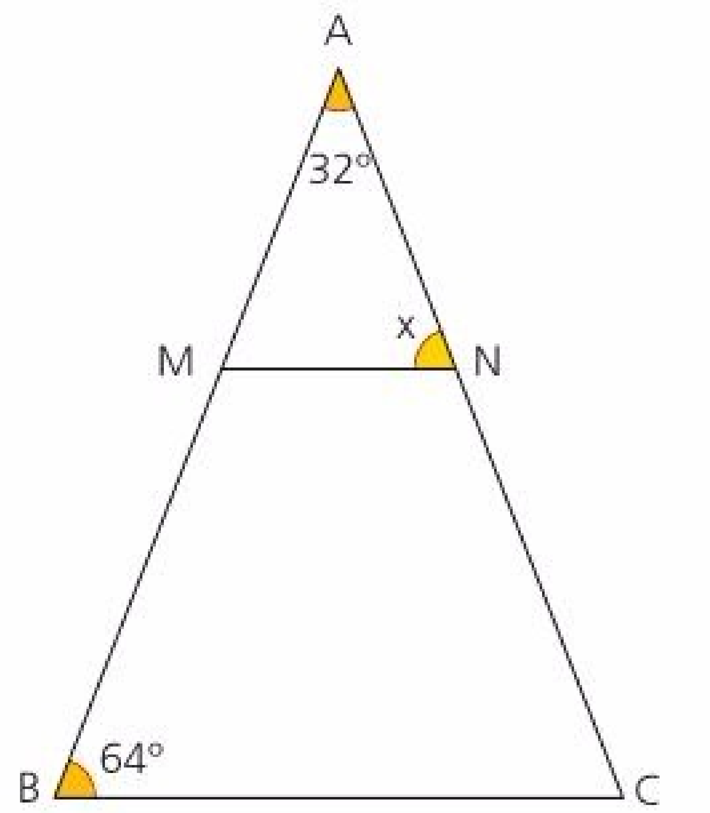


25. Determine as medidas dos ângulos indicados nos triângulos seguintes:

a)

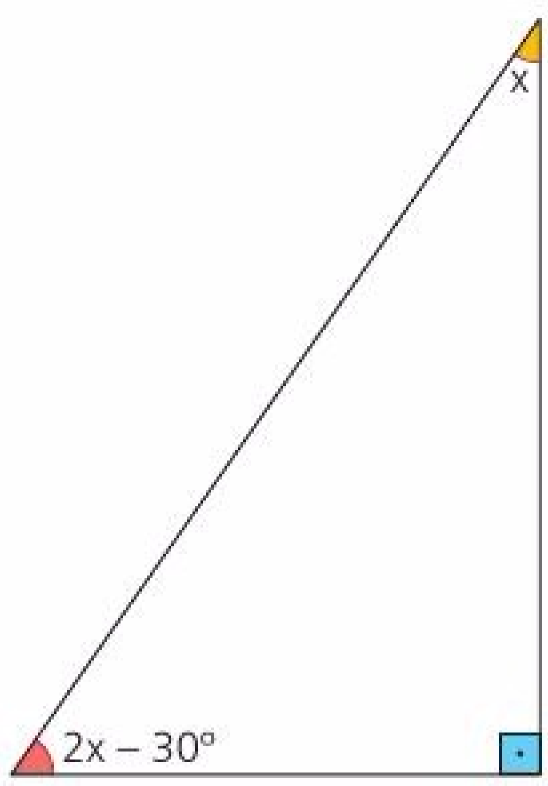


b)



$\overline{MN} // \overline{BC}$

c)



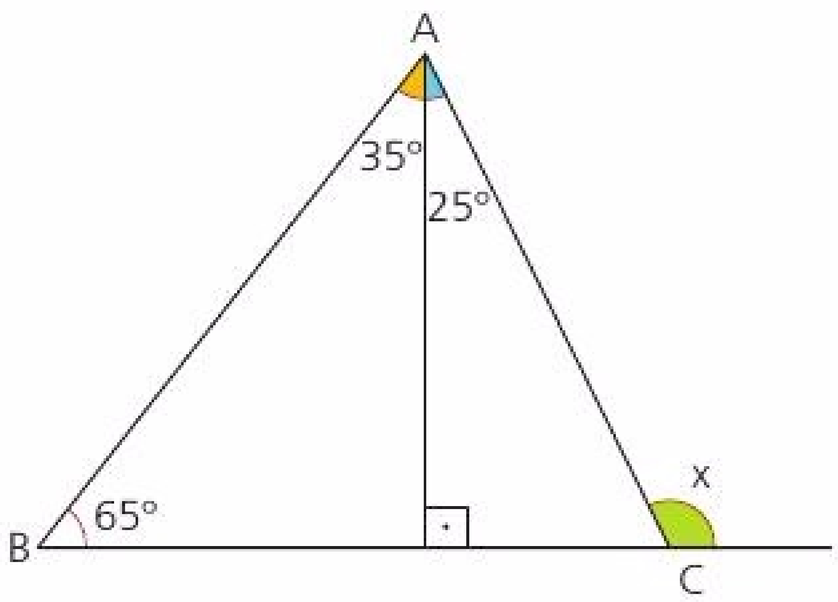
26. Resolva os seguintes problemas:

a) Um dos lados de um triângulo equilátero mede 8 cm. Qual é o perímetro desse triângulo?

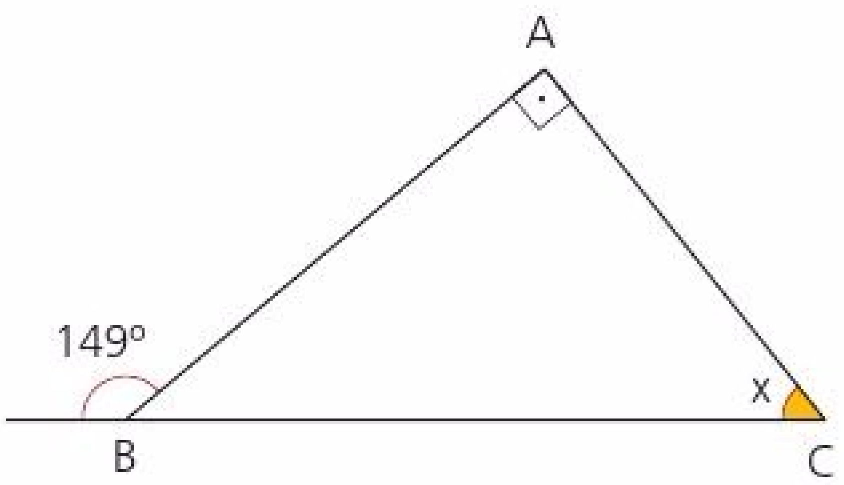
b) Num triângulo isósceles, as medidas dos lados iguais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, representadas pelas expressões **3x** e **x + 6**. Se o perímetro desse triângulo é igual a 26 cm, qual é a medida do lado $\overline{BC}$?

27. Determine o valor de **x** para cada triângulo a seguir.

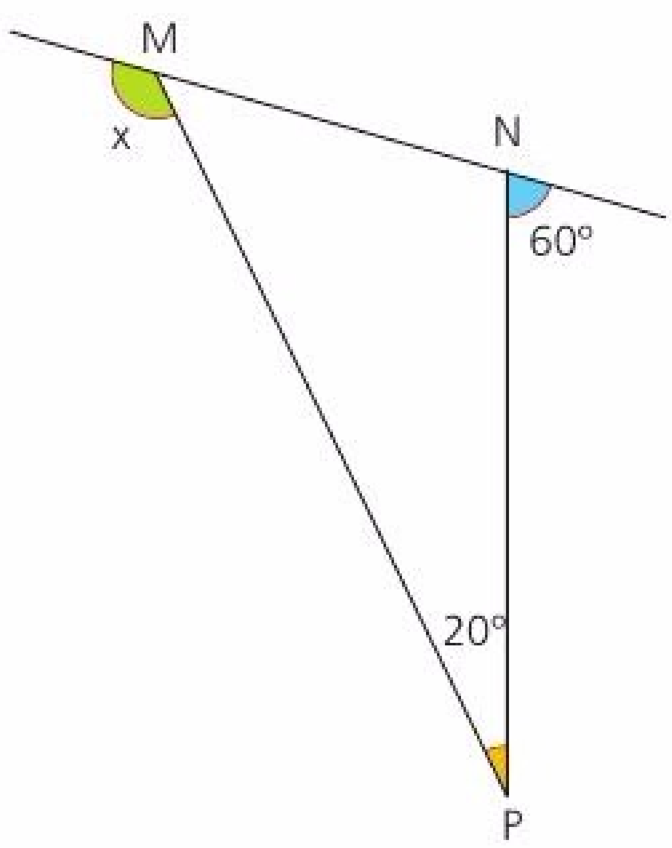
a)



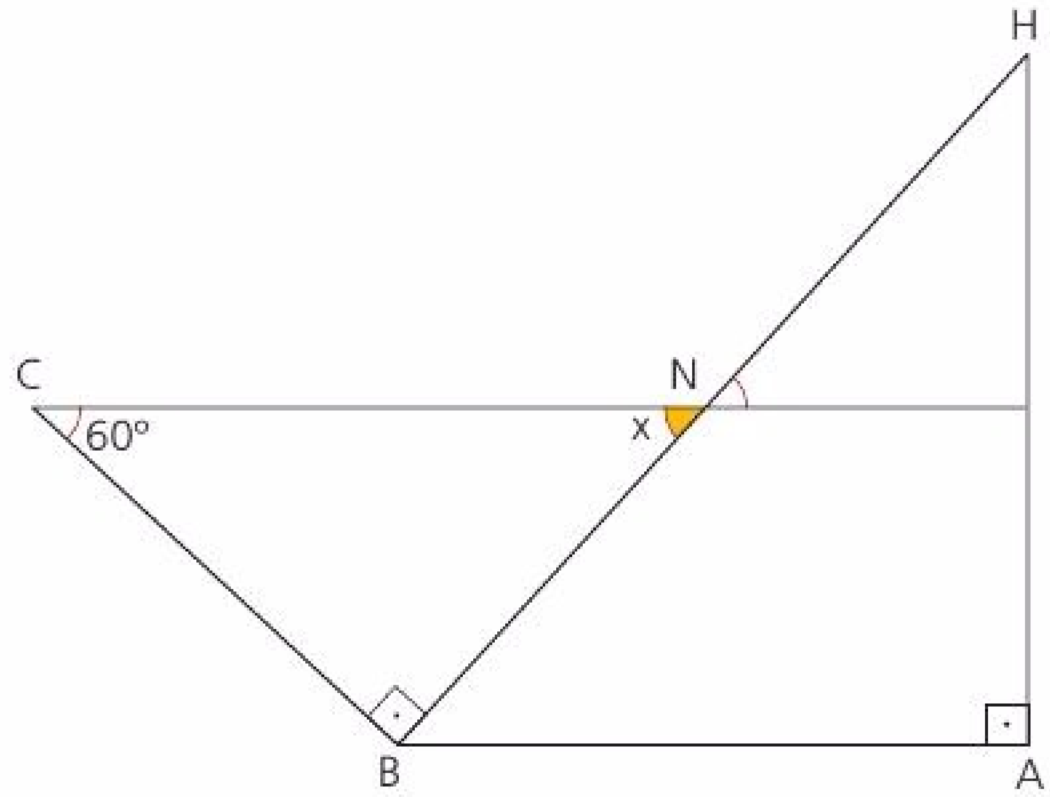
b)



c)

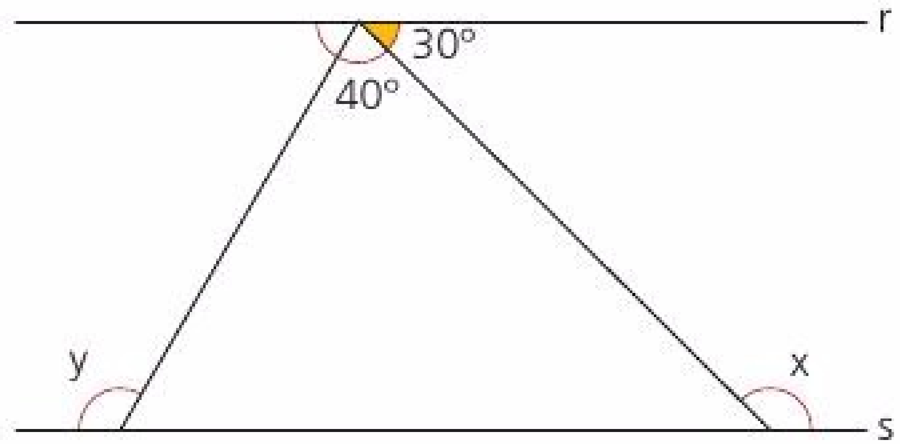


28. Na figura, $\overline{BH}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$. Determine **x** e os ângulos internos dos triângulos ABH e BNC.

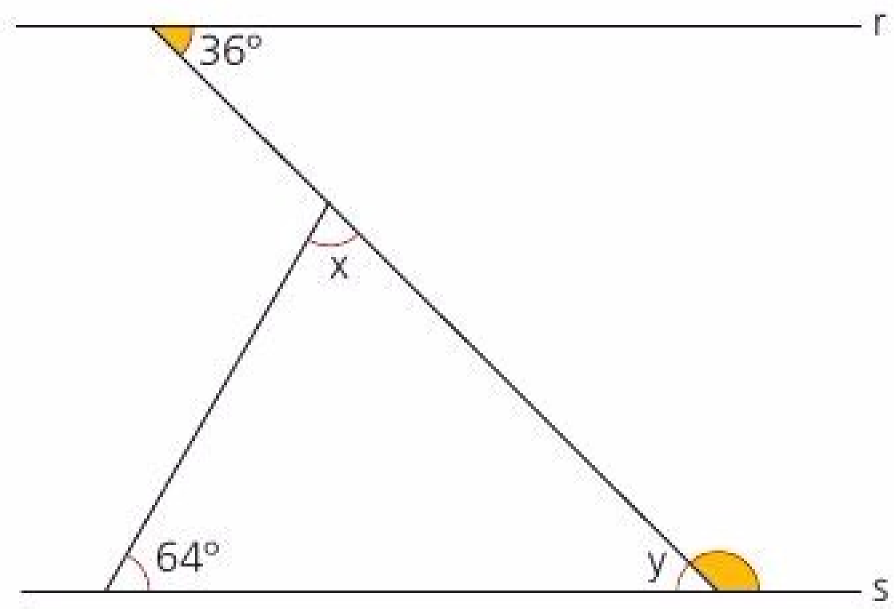


29. Considerando-se que r//s, determine **x** e **y** nas figuras:

a)



b)



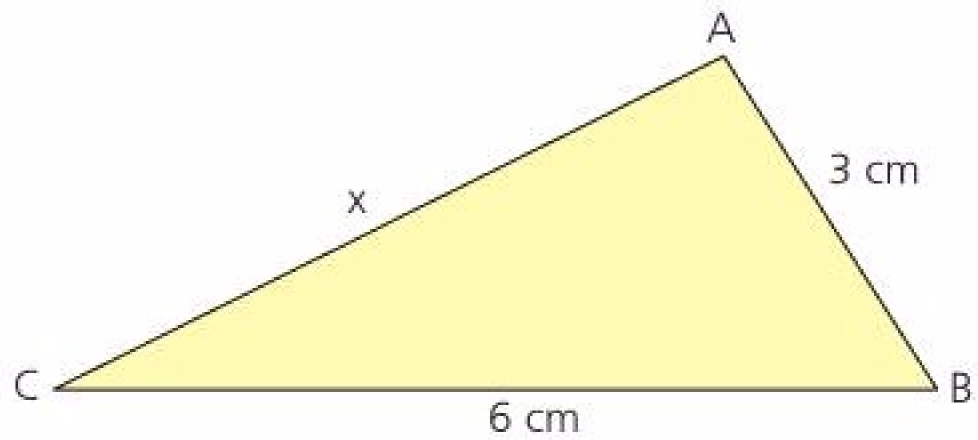
30. Responda a cada pergunta a seguir e justifique sua resposta.

a) É possível construir um triângulo com lados medindo 12 cm, 18 cm e 8 cm?

b) É possível construir um triângulo com lados medindo 1 cm, 2 cm e 5 cm?

c) É possível construir um triângulo com lados medindo 3 cm, 3cm e 5cm?

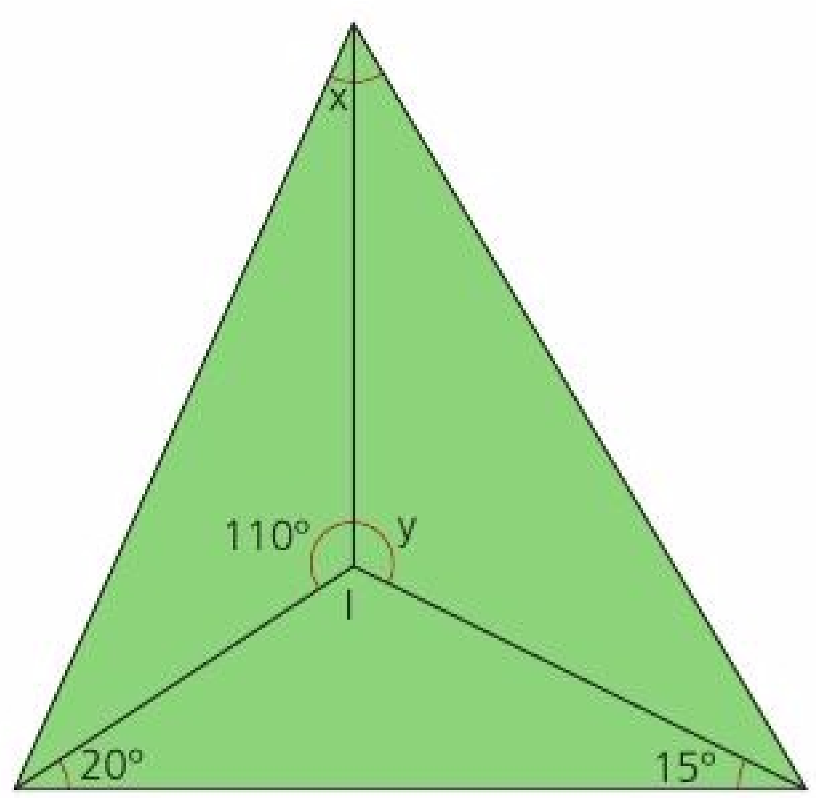
31. Na figura, $\overline{AB}$ é o menor lado do triângulo ABC e $\overline{BC}$ é o maior. Sabendo que a medida do lado **x** é um número inteiro, que valores ele pode assumir?



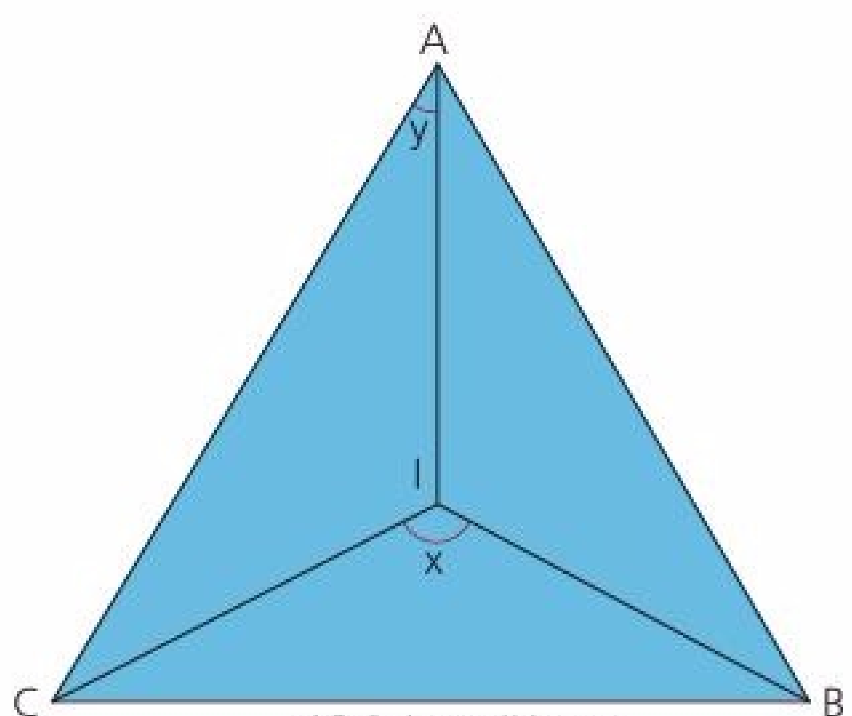
32. As medidas dos lados de um triângulo são números inteiros. O maior lado mede 20 cm e o menor lado 10 cm. Que valores pode ter o terceiro lado?

33. Determine **x** e **y** nas figuras, sabendo que o ponto **I**, em cada uma delas, é o incentro do triângulo.

a)

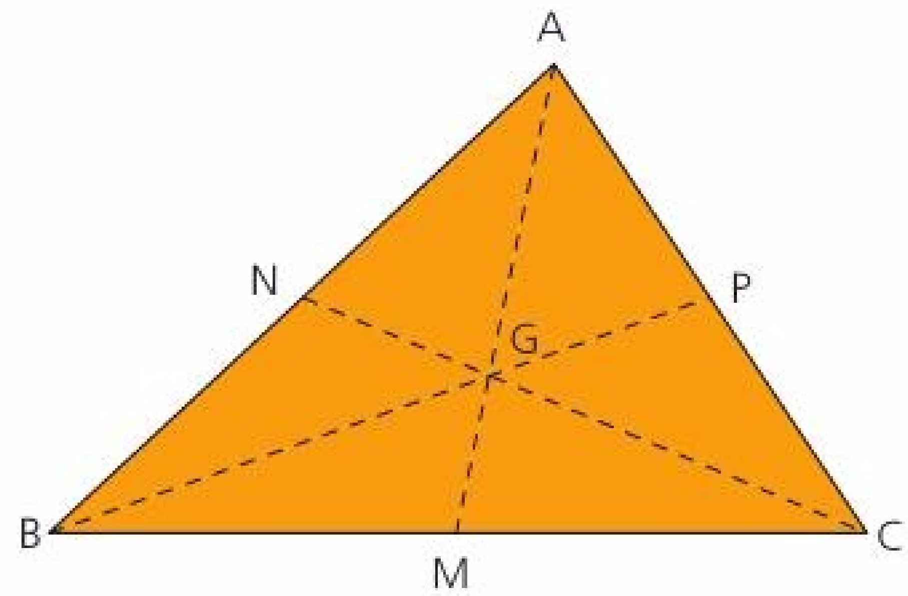


b)

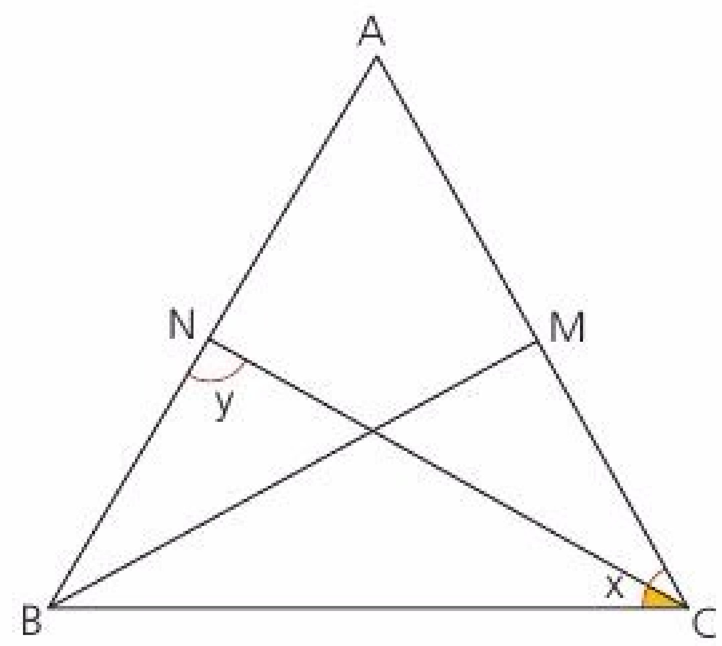


ABC é equilátero

34. Sendo, G o baricentro do triângulo ABC. Sabendo que $\overline{BP}$ = 3,9 cm e $\overline{CN}$ = 3,6 cm determine o perímetro do quadrilátero GNAP, sabendo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 4 e 3 cm.



35. Na figura, o triângulo ABC é equilátero. Sabendo que $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são medianas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, calcule os valores de **x** e **y**.

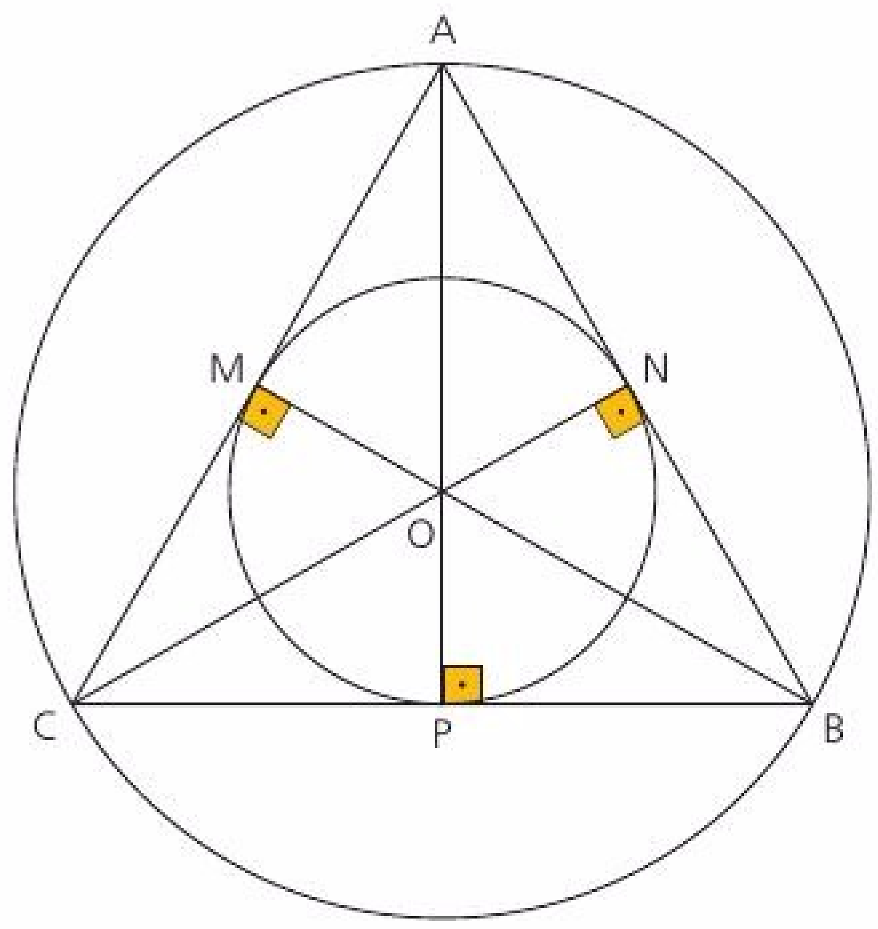


36. Desenhe a figura e resolva, os problemas a seguir:

a) O perímetro de um triângulo isósceles é 7 cm. Determine as medidas dos lados desse triângulo, sabendo que a medida da base é um terço da medida de cada um dos outros lados.

b) Em um triângulo isósceles, a medida do ângulo do vértice é 33° menor que a medida de cada ângulo da base. Calcule as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

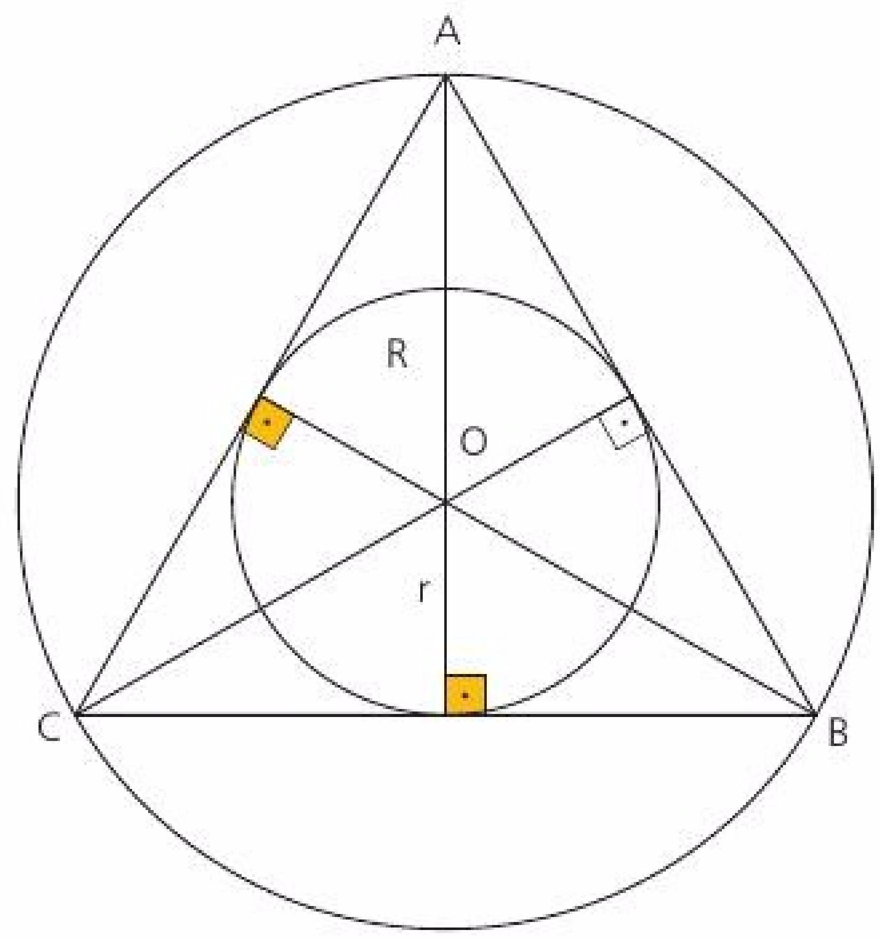
37. O triângulo ABC da figura é equilátero e os segmentos $\overline{AP}$ $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são as alturas relativas a cada um dos lados. Considerando essas alturas iguais a 9 cm, responda o que se pede.



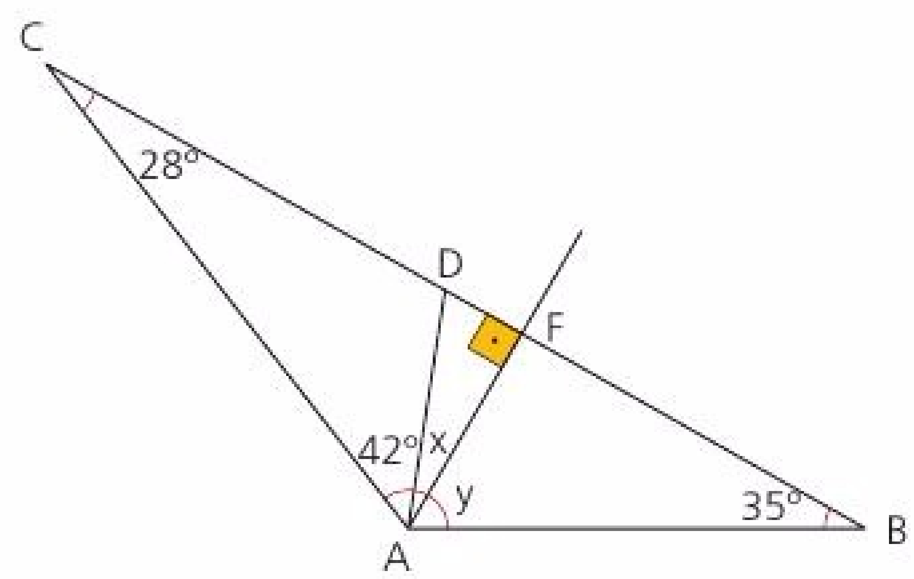
a) O raio da circunferência circunscrita.

b) O raio da circunferência inscrita.

38. Considere um triângulo equilátero de altura **h**. Determine a relação existente entre o raio **R** da circunferência circunscrita ao triângulo e o raio **r** da circunferência inscrita.
(Sugestão: lembre-se de que o incentro, o circuncentro e o baricentro coincidem no triângulo equilátero.)



39. Na figura a seguir, $\overline{CD} = \overline{DB}$.



a) Calcule o ângulo formado entre a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ e a altura relativa a esse lado.

b) Determine a medida dos três ângulos internos do triângulo ABC.

Desafio

Três famílias resolveram construir um poço artesiano que abasteça as suas três casas. Para não haver brigas, decidiram construir o poço de maneira que a sua localização tenha a mesma distância das portas de entrada das três casas.

Faça em seu caderno um desenho representando as três casas com um ponto na porta de cada uma e estabeleça o processo de marcação do ponto onde será construído o poço.

Resolução das atividades

1. a) $x + 78° = 180° \rightarrow x = 102°$

b) $x + 90° = 180° \rightarrow x = 90°$

c) $x + 21°\,28' = 180° \rightarrow x = 158°\,32'$

2. a) $x + 48° + 78° = 180° \rightarrow x = 54°$

b) $x + 68° + 32° = 180° \rightarrow x = 80°$

c) $2x + x + 90° = 180° \rightarrow 3x = 90°$

$x = 30°$

d) $2x + x + 20° + x = 180° \rightarrow 4x = 160°$

$x = 40°$

3. a) $2p = 3 \cdot 4{,}5 \rightarrow 2p = 13{,}5$ cm

b) $\overline{AB} = y$

$3x = x + 8 \rightarrow x = 4$

$26 = y + 12 + 12 \rightarrow y = 2$ cm

c) $23 = 8{,}3 + 6{,}4 + \overline{AC}$

$\overline{AC} = 8{,}3$ cm

O triângulo é isósceles

4. a) $x = 58° + 65° \rightarrow x = 123°$

b) $98° = x + 42° \rightarrow x = 56°$

c) $3x = 90° + x \rightarrow x = 45°$

d) $149° = x + 31° + x \rightarrow 2x = 118°$

$x = 59°$

5. a) $2x - 56° = x + (180° - 144°)$

$x = 56° + 36° \rightarrow x = 92°$

b) $x = 28° + (180° - 142°)36° \rightarrow x = 66°$

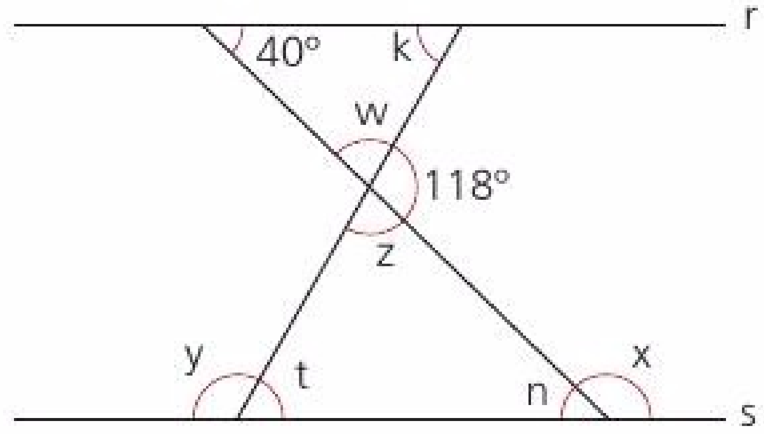
6. $x = 45° + 90 \rightarrow x = 135°$

$135° = \hat{B} + 45° \rightarrow B = 90°$

$\Delta ABH \rightarrow$ ângulos 45°, 45°, 90°

$\Delta BHC \rightarrow$ ângulos 45°, 45°, 90°

7. a)



$z = 180° - 118° \rightarrow z = 72°$

$z = w$ (o.p.v.) $\rightarrow w = 72°$

$k + w + 40° = 180°$

$k + 72° + 40° = 180° \rightarrow k = 68°$

n e 40° são alternos internos $\rightarrow n = 40°$

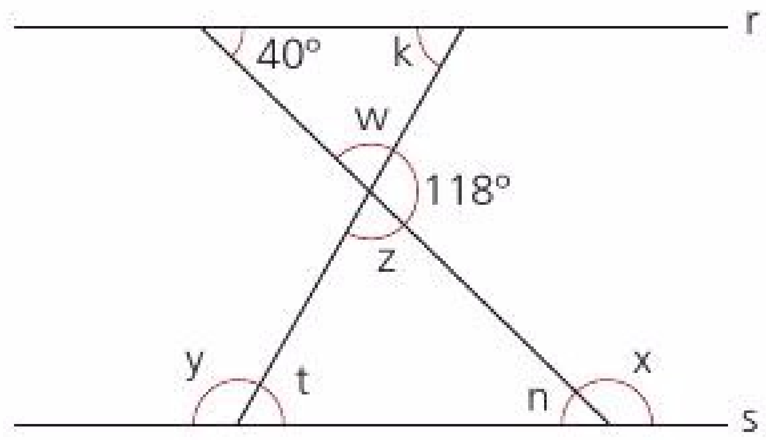
$x = 180° - 40° \rightarrow x = 140°$

$z + t = x \rightarrow t = x - z \rightarrow t = 140° - 72°$

$t = 68°$

$y = 180° - 68° \rightarrow y = 92°$

b)



n é alterno interno com 42° $\rightarrow n = 42°$

$y = 180° - 132° \rightarrow y = 48°$

$x + 48° + 42° = 180° \rightarrow x = 90°$

8. a) $2x = 180° - 48° \rightarrow 2x = 132° \rightarrow x = 66°$

b) $x + 140° = 180° \rightarrow x = 40°$

c) $x + 3x = 180° \rightarrow x = 45°$

d) $x + 40° = 180° \rightarrow x = 140°$

9. a) $x = \dfrac{B\hat{A}C}{2} \rightarrow x = 37°$

b) $x = \dfrac{90°}{2} \rightarrow x = 45°$

10. a) sim, pela regra da condição de existência

b) não, pela regra da condição de existência

$7 - 3 < 4 < 7 + 3$ errado

c) não, no Δ isósceles o terceiro lado não pode ser maior que a soma dos outros dois.

11. x pode ser 7 ou 8

12. 7,8 ou 9

13. $\overline{AM} = 2{,}1$ cm $\rightarrow$ $\overline{GM} = \frac{1}{3}\,\overline{AM} = 0{,}7$ cm

$\overline{CN} = 1{,}8$ cm $\rightarrow$ $\overline{GN} = \frac{2}{3}\,\overline{CN} = 1{,}2$ cm

$\overline{BC} = 2{,}6$ cm $\rightarrow$ $\overline{CM} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} = 1{,}3$

Perímetro Δ GCM = 3,2 cm

14. a) $\Delta ABH \rightarrow x + 14° + 90° = 180° \rightarrow x = 76°$

$\Delta AHC \rightarrow y + 42° + 90° = 180° \rightarrow x = 48°$

b) $\Delta ABC \rightarrow 2y + 90° = 180° \rightarrow x = 45°$

$\Delta ABC \rightarrow x + 82° + y = 180° \rightarrow x = 127°$

15. a) $\Delta AIB \rightarrow x + 30° + 29° = 180° \rightarrow x = 121°$

$\Delta AIC \rightarrow y + 29° + 26° = 180° \rightarrow x = 125°$

b) $\Delta BIC \rightarrow x + 33° + 33° = 180° \rightarrow x = 114°$

$\Delta ABC \rightarrow 2y + 66° + 66° = 180°$

$2y = 48° \rightarrow y = 24°$

16. Devemos usar os cruzamentos das rodovias como vértices do triângulo e assim traçar as bissetrizes internas do triângulo. A intersecção das bissetrizes será o incentro, lugar para construir a padaria, que é o ponto equidistante aos lados do triângulo que representam as rodovias.

17. ABC é equilátero $\rightarrow z = 60°$

$\overline{CM}$ é mediana de $\overline{AB}$ é bissetriz de $\hat{C} \rightarrow x = 30°$

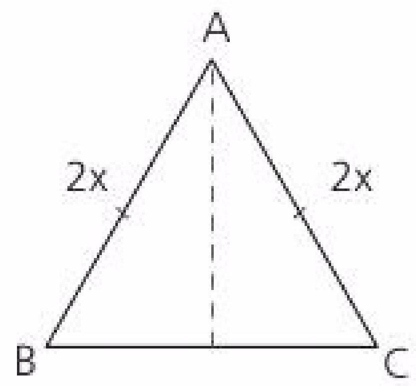
$\Delta AMC \rightarrow y + 60° + 30° = 180° \rightarrow y = 90°$

18. Se $\overline{CN}$ é altura relativa a $\overline{AB}$, $y = 90°$

Se $\overline{BM}$ é altura relativa a $\overline{AC}$ e o triângulo ABC é equilátero, $\overline{BM}$ é também bissetriz de $\hat{B}$. Logo: $\Delta BGC \rightarrow x + 30° + 30° = 180° \rightarrow x = 120°$

19. $\Delta ACD \rightarrow 60° = x + 36° \rightarrow x = 24°$
$x + 60° + y = 180° \rightarrow y = 180° - 84$
$y = 96°$

20. a)



Perímetro = 35

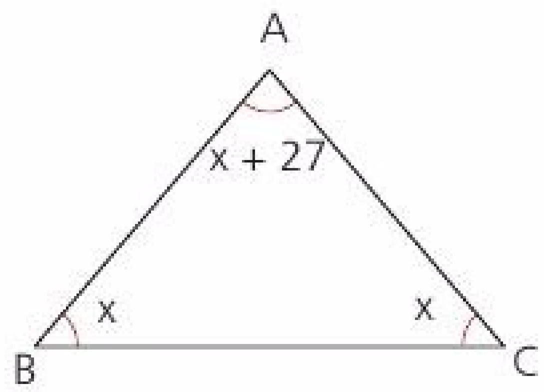
$5x = 35$

$x = 7$ cm

$\overline{AB} = \overline{AC} = 14$ cm

$\overline{BC} = 7$ cm

b)

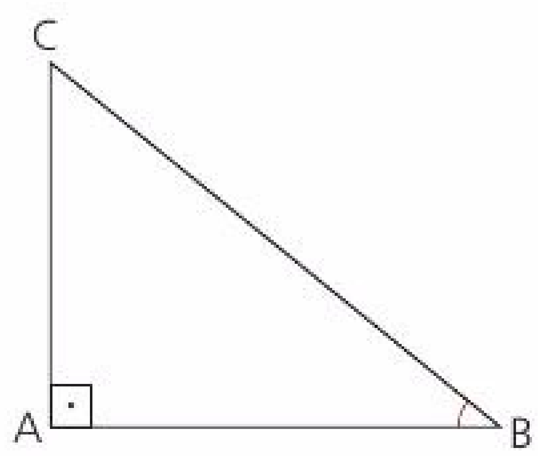


ΔABC isósceles

$\hat{B} = \hat{C} = 51°$

$\hat{A} = 78°$

c)



ΔABC retângulo

$\hat{B} = 42° = 28'$

$\hat{A} = 90°$

$\hat{C} = 47°\ 32'$

d) $2x + 3x + 4° + 6x - 22° = 180°$

$11x = 198$

$x = 18°$

os ângulos são 36°, 58° e 86°

21. med $\hat{R} + 90° + 23° = 180°$

med $\hat{R} = 67°$ → alternativa **d**

22. MNO é isósceles → $\hat{M} \equiv \hat{O}$

2 med $\hat{M} + 82° = 180°$ → med $\hat{M} + 49°$

med $\hat{O} = 49°$

23. a) $y + 70° + 60° = 180°$ → $y = 50°$

$x + y = 180°$ → $x = 180° - 50°$

$x = 130°$

b) $x + 46° + 90° = 180°$

$x = 44°$

$44° + 90° + y = 180°$

$y = 46°$

c) $x + 40°$ são alternos internos

$x = 40°$

$y = 48° + x$

$y = 88°$

Respostas da seção Para estudar

24. a) $x = 68°$

b) $x = 45°$

c) $x = 47°$

25. a) Os ângulos serão 40°, 105°, 35°

b) $x = 84°$

c) $x = 40°$

26. a) 24 cm

b) 8 cm

27. a) $x = 115°$

b) $x = 59°$

c) $x = 140°$

28. ΔBNC → 90°, 60°, 30°

ΔABH → 90°, 60°, 30°

29. a) $x = 150°$

b) $x = 80°$

30. a) sim

b) não

c) sim

31. **x** pode ser um número entre 3 e 9.

32. $10 < x < 30$

33. a) $x = 50°$

$y = 115°$

b) $y = 30°$

$x = 120°$

34. GNAP = 6 cm

35. $x = 30°$

$y = 90°$

36. 49°, 49°, 82°

37. a) R = 6 cm

b) r = 3 cm

38. **O** é o baricentro do triângulo. Logo:

$R = 2r$

39. a) $y = 55°$

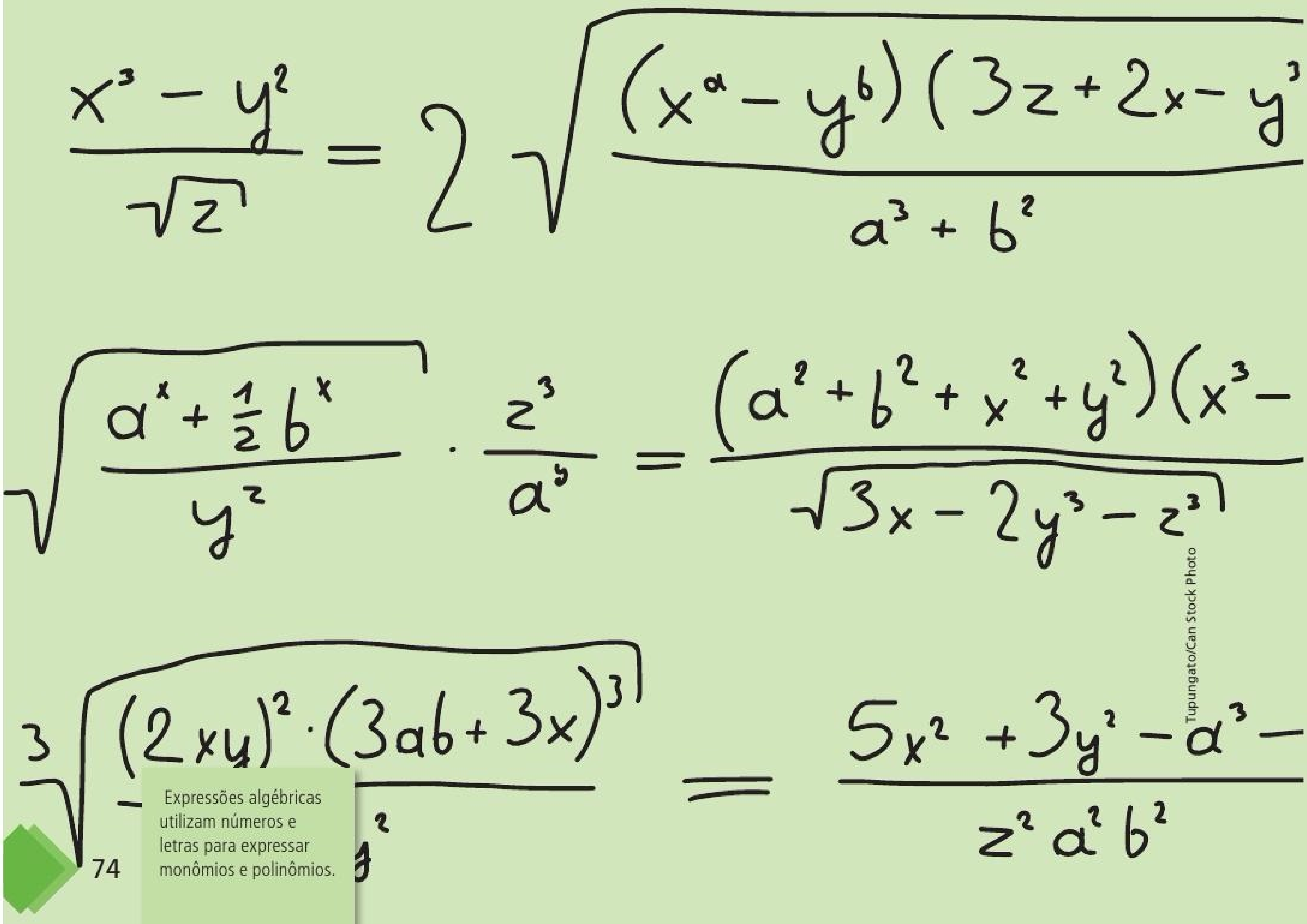
$x = 20°$

b) 35°, 28° e 117°

capítulo 3

Expressões Algébricas

- Produtos notáveis
- Fatoração de polinômios
- Frações algébricas



Tupungato/Can Stock Photo

Expressões algébricas utilizam números e letras para expressar monômios e polinômios.

Conversa Inicial

Explore o texto em sala de aula e discuta sobre as diferentes interpretações para os símbolos e expressões. A noção de variável e o sentido de símbolo é um dos pontos do currículo de Álgebra escolar onde se verificam sérias dificuldades por parte dos alunos.

No cotidiano, muitas vezes usamos expressões sem perceber que as mesmas representam expressões algébricas.

Numa papelaria, por exemplo, quando calculamos o preço de dois cadernos, somado ao preço de três canetas, estamos, em algum momento, montando uma expressão do tipo:

$$2x + 3y$$

Nessa expressão, o **x** representa o preço de um caderno e **y** o preço de uma caneta. Apesar de fazer a conta com números, usamos a ideia de variável que, nesse caso, é o preço **x** do caderno ou o preço **y** da caneta.

Usamos também as operações e outros símbolos ao expressarmos sentenças escritas na forma de expressões algébricas. Ao comprar um lanche, por exemplo, dispomos de um valor **v** em dinheiro e compramos um refrigerante, que custa **r** e um sanduíche, que custa **s**. O valor **t** do troco que iremos receber ao comprar o lanche será dado por uma expressão algébrica do tipo:

$$t = v - (r + s)$$

Há cerca de 2300 anos, o matemático grego Euclides, escreveu em um dos 11 livros que compõem sua obra clássica denominada *Os Elementos*:

"Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais."

Se utilizarmos letras para representar a frase de Euclides, teremos a seguinte expressão algébrica:

se $a = b$ e $x = y$, então **$a + x = b + y$**

Você já aprendeu no curso de Matemática que, numa multiplicação, se trocarmos a ordem dos números que estamos multiplicando, o resultado será o mesmo. De forma mais precisa, dizemos:

"A ordem dos fatores não altera o produto."

Novamente, usando letras para representar os dois números, esta propriedade fica assim resumida:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Nesta sentença matemática as letras **a** e **b** representam dois números quaisquer.

Veja outra situação: ao somarmos três números, podemos somar o primeiro com o segundo e o resultado obtido com o terceiro número. Podemos, também, somar o segundo com o terceiro número e o resultado desta soma ao primeiro. Enfim, os números podem ser associados de qualquer maneira, que a soma não irá se alterar. Essa é a propriedade associativa da adição que, utilizando letras e parênteses é escrita assim:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

Sem dúvida, apesar de muitos acharem o contrário, a linguagem algébrica simplifica a comunicação, pois é a mesma em qualquer país e em qualquer cultura, além de ser precisa e econômica. Você já parou para pensar como seria se tivéssemos que escrever por extenso a solução dos problemas de Matemática? Este livro, por exemplo, teria uma quantidade enorme de páginas.

Por isso, é importante aprofundar o estudo dessas expressões, conhecer melhor suas propriedades, aplicar o que já sabemos sobre monômios e polinômios e descobrir padrões que se repetem nas operações com essas expressões.

Produtos Notáveis

Algumas operações com polinômios, como a multiplicação, apresentam características importantes por sua regularidade e pelas relações que ficam estabelecidas entre os coeficientes do polinômio resultante. Esses produtos, em função das características notáveis dos coeficientes, são denominados **produtos notáveis**. São eles:

- **Quadrado da soma**
- **Quadrado da diferença**
- **Produto da soma pela diferença**

Quadrado da soma

Destaque que quando estudamos a propriedade comutativa da estávamos criando condições para fazer a adição de termos semelhantes numa expressão algébrica:

$ab = ba \rightarrow ab + ba = ab + ab = 2ab$.

Comente também que os produtos notáveis são sempre verdadeiros e valem inclusive para números:

$(4 + 3)^2 = 7^2 = 49$ e

$(4 + 3)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 =$

$= 16 + 24 + 9 = 49$.

Note o que ocorre quando elevamos uma soma (a + b) ao quadrado:

ab

ba

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a^2

b^2

A característica importante nesta operação está nas parcelas do polinômio resultante:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

quadrado do 1º termo + **duas vezes o 1º multiplicado pelo 2º** + **quadrado do 2º termo**

Observe alguns exemplos:

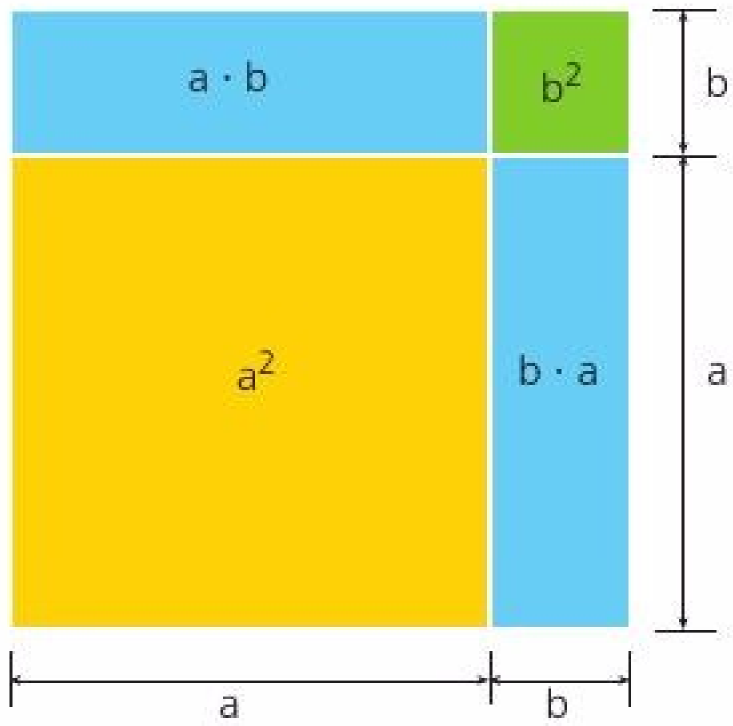
a) $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$

b) $(2a + 5)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot (5) + 5^2 = 4a^2 + 20a + 25$

c) $(x^3 + 4y)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot (4y) + (4y)^2 = x^6 + 8x^3y + 16y^2$

d) $\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = z^2 + \frac{2z}{3} + \frac{1}{9}$

Veja como podemos entender o quadrado de uma soma a partir de uma visão geométrica. Basta desenhar um quadrado de lado $(a + b)$, que o produto $(a + b)^2$ será a medida de sua área. Observe na figura as parcelas da área $(a + b)^2$:



É importante relacionar aplicações de produtos notáveis em diferentes contextos matemáticos. Exemplificamos a representação geométrica e obtivemos uma representação algébrica para a diferença de dois quadrados. Por meio de manipulação algébrica, ou geométrica, é possível concluir que o produto da soma pela diferença de dois termos é igual a diferença dos quadrados desses termos: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Uma contextualização interessante para este produto notável é dada para cálculos numéricos do tipo:
a) $51 \cdot 49 = (50 + 1)(50 - 1) = 502 - 12 = 2\,500 - 1 = 2499$
b) $37 \cdot 23 = (30 + 7)(30 - 7) = 302 - 72 = 900 - 49 = 851$
c) $46 \cdot 34 = (40 + 6)(40 - 6) = 402 - 62 = 1\,600 - 36 = 1564$

Quadrado da diferença

Fazemos o mesmo que foi feito com o quadrado da soma, pois $(a - b)^2$ pode ser entendido como $[a + (-b)]^2$. Observe que os termos elevados ao quadrado não se alteram e que o duplo produto fica negativo:

$-ab$

$-ba$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

a^2

b^2

A característica importante nesta operação está nas parcelas do polinômio resultante:

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

quadrado do 1º termo – **duas vezes o 1º multiplicado pelo 2º** + **quadrado do 2º termo**

Acompanhe alguns exemplos do quadrado de uma diferença:

- $(m - 3)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 3 + 9 = m^2 - 6m + 9$
- $(2x^2 - 3z)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot (2x^2) \cdot (3z) + (3z)^2 = 4x^4 - 12x^2z + 9z^2$
- $\left(\frac{3a}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{3}\right) + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{9a^2}{4} - ab + \frac{b^2}{9}$

Produto da soma pela diferença

Quando fizemos o quadrado da soma (produto da soma por ela mesma), somamos os quadrados dos termos e duas vezes o produto deles. Já no quadrado da diferença (produto da diferença por ela mesma), somamos os quadrados dos termos e subtraímos o duplo produto. Observe que, quando multiplicamos a soma pela diferença, ocorre a anulação dos produtos dos termos:

$-ab$

ba

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

a^2 b^2

quadrado do 1º termo – quadrado do 2º termo

Assim, o produto da soma pela diferença será igual à diferença entre os quadrados dos termos.

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Veja alguns exemplos:

a) $(z + 3)(z - 3) = z^2 - 9$

b) $(3a^3 + 2)(3a^3 - 2) = (3a^3)^2 - 4 = 3a^6 - 4$

Atividades

1. Efetue:

a) $(m + n)^2$ $m^2 + 2mn + n^2$

b) $(c + 2d)^2$ $c^2 + 4cd + 4d^2$

c) $(2a + 5)^2$ $4a^2 + 20a + 25$

d) $(3x + 4y)^2$ $9x^2 + 24xy + 16y^2$

2. Efetue:

a) $a^3 (a^2 + 6)^2 =$ $a^7 + 12a^5 + 36a^3$

b) $(x + 1)^2 - x(x - 2) =$ $2x + 3$

c) $(b + 2) + (b + 1)^2 - (b - 1)^2$ $5b + 2$

3. Efetue:

a) $(m^3 + 1)^2$ $m^6 + 2m^3 + 1$

b) $(n^4 + 3)^2$ $n^8 + 6n^4 + 9$

c) $(a^2 + 10)^2$ $a^4 + 20a^2 + 100$

d) $(2y^4 + 5)^2$ $4y^8 + 20y^4 + 25$

4. Efetue:

a) $(a - 7)^2$ $a^2 - 14a + 49$

b) $(a - 8)^2$ $a^2 - 16a + 64$

c) $(5b - 3)^2$ $25b^2 - 30b + 9$

d) $(5a - 3b)^2$ $25a^2 - 30ab + 9b^2$

e) $(a^2 - 3)^2$ $a^4 - 6a^2 + 9$

f) $(4a^2 - b^2)^2$ $16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$

5. Efetue:

a) $(x + 7)(x - 7)$ $x^2 - 49$

b) $(3a + 2b)(3a - 2b)$ $9a^2 - 4b^2$

c) $(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3})$ $a^2 - 3$

d) $(a^3 - \sqrt{2})(a^3 + \sqrt{2})$ $a^6 - 2$

6. Efetue:

a) $\left(2x^2 - \frac{1}{5}\right)\left(2x^2 + \frac{1}{5}\right)$ $4x^4 - \frac{1}{25}$

b) $\left(3m^2n - \frac{n^3}{2}\right)^2$ $9m^4n^2 - \frac{n^6}{4}$

7. Descubra o que deve substituir ▼ em cada igualdade a seguir:

a) $(a + 2)^2 = a^2 +$ ▼ $+ 4$ $4a$

b) $m^2 -$ ▼ $= \left(m + \frac{1}{3}\right)\left(m - \frac{1}{3}\right)$ $\frac{1}{9}$

c) $a^2 -$ ▼ $= (a + 4)(a - 4)$ 16

d) $y^2 - 12y +$ ▼ $= (y - 6)^2$ 36v

e) $(3a - 2)^2 =$ ▼ $- 12a + 4$ $9a^2$

8. Substitua cada polinômio a seguir por um produto:

a) $a^2 - 256 =$ $(a + 16)\,(a - 16)$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} =$ $\left[x - \frac{1}{2}\right]^2$

c) $4x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} =$ $4x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$ $\left[2x - \frac{1}{4}\right]^2$

d) $x^2 - y^8 =$ $(x + y^4)\,(x - y^4)$

Quando, quem e onde

Os símbolos da Álgebra

No final do século XV e início do século XVI, bem na época em que o Brasil foi descoberto, a Álgebra já apresentava uma evolução muito satisfatória. Existiam inúmeros processos de resolução de equações e problemas, assim como aplicações diversas na Astronomia, nas navegações e nas construções. Porém, o sistema de notação simbólica ainda era muito confuso, pois não existiam símbolos que fossem utilizados pelos matemáticos de diversos países.

Foi o matemático francês François Viète (1540-1603) quem deu a principal colaboração para uma organização das representações algébricas, pois foi o primeiro a utilizar letras para simbolizar incógnitas e constantes nas equações algébricas. Nessa mesma época, outro importante filósofo e matemático francês, denominado René Descartes (1596-1650), aprimorou a simbologia algébrica, utilizando em seus trabalhos uma forma de escrever as variáveis e constantes muito semelhante ao que utilizamos hoje.

Maria Platt-Evans/Science Photo Library/Latinstock

René Descartes

Fatoração de polinômios

O processo de fatoração que estudaremos a seguir pode ser entendido como o "caminho inverso" do que fizemos ao desenvolver produtos notáveis. Veja, por exemplo, os dois sentidos utilizados nas seguintes igualdades:

$(a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16$ → desenvolvemos o produto $(a - 4) \cdot (a - 4)$

$a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$ → transformamos o polinômio no produto $(a - 4) \cdot (a - 4)$

No último caso, fizemos a **fatoração** do polinômio $a^2 - 8a + 16$. Podemos dizer, então que:

> **Fatorar** um polinômio é escrevê-lo na forma de uma **multiplicação de polinômios**.

Fatorar uma expressão algébrica significa transformá-la em um produto de fatores. Destaque a utilização dos produtos notáveis com a leitura do texto e a exploração, no quadro, dos exemplos dados. Com essa abordagem você estará preparando o aluno para o estudo de equações.

As técnicas de fatoração de polinômios são extremamente úteis nas simplificações de expressões algébricas, muito comuns no cálculo algébrico. As principais técnicas que iremos estudar são:

- **Diferença de quadrados**
- **Trinômio quadrado perfeito**
- **Fator Comum**
- **Agrupamento**

Diferença de quadrados

Todo polinômio que pode ser expresso na forma de uma diferença de quadrados $a^2 - b^2$, pode ser fatorado a partir da igualdade $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Essa fatoração expressa que "a diferença entre dois quadrados é o produto da soma das bases dos quadrados pela diferença entre essas bases".

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{diferença de quadrados}} = \underbrace{(a + b)}_{\text{soma das bases}} \cdot \underbrace{(a - b)}_{\text{diferença das bases}}$$

Acompanhe os exemplos:

- Para fatorar $a^2 - 25$ observamos que $25 = 5^2$. Logo, $a^2 - 5^2 = (a + 5)(a - 5)$.
- Na fatoração de $64a^4 - 1$, observamos que $64a^4 = (8a^2)^2$ e $1 = 1^2$. Logo, a fatoração fica sendo $64a^4 - 1 = (8a^2 + 1)(8a^2 - 1)$.
- Observe as bases na fatoração de $a^2 - \frac{1}{4}$:

$$a^2 - \frac{1}{4} = a^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right).$$

Trinômio quadrado perfeito

A um polinômio de três termos denominamos **trinômio**. O polinômio $a^2 + 2ab + b^2$ é um trinômio quadrado perfeito, pois tem três termos e é o produto notável $(a + b)^2$.

Também é um trinômio quadrado perfeito o polinômio $a^2 - 2ab + b^2$, resultado de $(a - b)^2$.

A fatoração de um **trinômio quadrado perfeito** se dá fazendo a operação inversa dos produtos notáveis $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$. Assim:

$$\underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\textbf{trinômio quadrado perfeito}} = \underbrace{(a + b)^2}_{\textbf{quadrado da soma}} \quad \text{e} \quad \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\textbf{trinômio quadrado perfeito}} = \underbrace{(a - b)^2}_{\textbf{quadrado da diferença}}$$

A fatoração de um polinômio, utilizando-se o quadrado da soma ou o quadrado da diferença, só pode ser feita se identificarmos, através de seus coeficientes, que ele é um trinômio quadrado perfeito. Observe como isso é feito:

- Para verificar se $a^2 + 10a + 25$ é um trinômio quadrado perfeito, observamos, inicialmente se dois de seus termos são quadrados.
  Nesse caso, a^2 e 25 são quadrados, respectivamente de **a** e de **5**.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{quadrado} \\ \textbf{de a}}}{a^2} \quad + \quad 10a \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{quadrado} \\ \textbf{de 5}}}{25}$$

  Em seguida, verificamos se o terceiro termo do polinômio é o duplo produto das bases que identificamos. De fato:

$$2 \cdot a \cdot 5 = 10a$$

  Assim, podemos fatorar o polinômio $a^2 + 10a + 25$ como um trinômio quadrado perfeito:

$$a^2 + 10a + 25 = (a + 5)(a + 5)$$

- Observe, agora, que $9a^2 - 15a + 25$ tem dois termos quadrados:

$$9a^2 = (3a)^2 \ \text{ e } \ 25 = 5^2$$

  Porém, com as bases (3a) e 5, o duplo produto deveria ser $2 \cdot (3a) \cdot 5 = 30a$, que é diferente do termo $-15a$. Assim, o polinômio $9a^2 - 15a + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito.

- Para fatorar o polinômio $a^6 - 2a^3b + b^2$, observamos que as bases dos quadrados são $\mathbf{a^3}$ e **b** e que o terceiro termo é o duplo produto com sinal negativo. Logo:

$$a^6 - 2a^3b + b^2 = (a^3 - b)^2$$

Atividades

9. Fatore cada uma das expressões a seguir:

a) $a^2 - 9$ $(a + 3)(a - 3)$

b) $81a^2 - 64$ $(9a + 8)(9a - 8)$

c) $b^2 - 36$ $(b - 6)(b + 6)$

d) $b^2 - 25x^2$ $(b + 5x)(b - 5x)$

e) $9x^2 - 16$ $(3x + 4)(3x - 4)$

f) $4x^2 - 25y^2$ $(2x + 5y)(2x - 5y)$

10. Verifique se a expressão é um trinômio quadrado perfeito e, em caso afirmativo, faça a fatoração:

a) $a^2 - 7a + 12$ não

b) $a^2 - 4a - 1$ não

c) $3n^3 - 7n^2 + 5n + 12$ não

d) $a^2 - 4a + 4$ $(a - 2)^2$

e) $a^2 + 10a + 25$ $(a + 5)^2$

f) $a^7 + 2ab^3 + b^4$ não

11. As expressões seguintes são trinômios quadrados perfeitos. Fatore cada uma delas.

a) $x^2 + 8x + 16$ $(x + 4)^2$

b) $x^2 - 8x + 16$ $(x - 4)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25$ $(2x - 5)^2$

d) $9a^2 - 12a + 4$ $(3a - 2)^2$

e) $a^2 - 2a + 1$ $(a - 1)^2$

f) $121m^2 + 22m + 1$ $(11m + 1)$

12. Fatore:

a) $16b^6 - a^4$ $(4b^3 + a^2)(4b^3 - a^2)$

b) $25m^2 + 20m + 4$ $(5m + 2)^2$

c) $25a^2 - \frac{10x}{3} + \frac{1}{9}$ $[a - \frac{1}{3}]$

13. Fatore os polinômios no maior número de fatores possíveis:

a) $a^4 - 1$ $(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$

b) $a^{20} - 81$ $(a^{10} + 9)(a^5 + 3)(a^5 - 3)$

c) $81a^4 - 1$ $(9a^2 + 1)(3a + 1)(3a - 1)$

d) $625 - a^4$ $(25 + a^2)(5 + a)(5 - a)$

14. Considere que $\bigstar$ é um monômio positivo, determine-o, em cada caso, fazendo com que o polinômio seja um trinômio quadrado perfeito.

a) $a^2 + \bigstar + 100$ $20a$

b) $a^2 + \bigstar + 25$ $10a$

c) $a^4 + \bigstar + 25$ $10a^2$

d) $a^2 - \bigstar + 4$ $4a$

e) $16a^6 + \bigstar + 49$ $56a^3$

f) $a^4 - \bigstar + 9b^2$ $6a^2b$

15. Fatore o dividendo e simplifique as frações:

a) para $x \neq 7$, $\frac{x^2 - 14x + 49}{x - 7}$ $x - 7$

b) para $x \neq -4$, $\frac{x^2 - 16}{x + 4}$ $x - 4$

c) para $x \neq \frac{1}{5}$, $\frac{25x^2 - 10x + 1}{(5x - 1)^2}$ 1

d) para $x \neq -3$, $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$ $x + 3$

Fernanda Youssef

Fator comum

Em alguns polinômios, podemos encontrar fatores numéricos ou literais que aparecem em todos os termos.

Veja os exemplos:

- $4xy + 8 = \mathbf{4} \cdot xy + \mathbf{4} \cdot 2 \rightarrow$ o fator **4** é comum aos dois termos do binômio. Assim, podemos escrever:

$$4xy + 8 = 4(xy + 2).$$

- $2ab - 6a^2 + 2a = \mathbf{2a}b - \mathbf{2a} \cdot 3a + \mathbf{2a} \rightarrow$ o fator **2a** é comum a todos os termos do polinômio.

Quando todos os termos de um polinômio possuírem um **fator comum**, podemos colocá-lo em evidência e fatorar o polinômio, dividindo cada monômio pelo fator comum. Fazendo isso, o polinômio fatorado será o produto do fator comum pela expressão obtida ao dividir o polinômio por este fator comum.

Observe os seguintes exemplos:

- No polinômio $12x^3 + 8x^2$, o fator comum é $4x^2$.

  Logo:

$$12x^3 + 8x^2 = 4x^2 (3x + 2).$$

Leia o texto e destaque no quadro os principais pontos do texto. Um desafio interessante pode ser dado aos alunos: fatorar a seguinte expressão, $ay^2 - 10ay + 25a$, cujo resultado é $a(y^2 - 10ay + 25) = a(y - 5)^2$

- Na expressão $ax - ay + a$, o fator comum é **a**.
  Logo:

$$ax - ay + a = a (x - y + 1).$$

- Para fatorar $45a^4 - 25a^2b + 15a^3$, colocamos em evidência o fator comum $\mathbf{5a^2}$. Logo, o polinômio fatorado é:

$$45a^4 - 25a^2b + 15a^3 = 5a^2 (9a^2 - 5b + 3a).$$

Agrupamento

Nem sempre encontramos um fator comum a todos os termos de um polinômio. Pode ocorrer que parte dos termos tenha um fator comum e outra parte, um outro fator comum. Se fizermos as fatorações das partes que têm fatores comuns, pode ocorrer que encontremos um novo fator comum, o que permitirá fazer a fatoração final.

Esse processo, chamado de **fatoração por agrupamento**, fica mais fácil de ser entendido observando dos exemplos a seguir:

- Vamos fazer a fatoração do polinômio

$$ax + bx + 7a + 7b.$$

Observe que não há um fator comum a todos os termos do polinômio, mas os dois primeiros têm o fator comum **x** e os dois últimos têm o fator comum **7**. Podemos então escrever:

$$\underbrace{ax + bx}_{x} + \underbrace{7a + 7b}_{7} = x(a + b) + 7(a + b)$$

Note que "surgiu" um novo fator comum: (a + b). Colocando (a + b) em evidência, completamos a fatoração:

$$x(a + b) + 7(a + b) = (a + b)(x + 7)$$

- Veja, agora, como fazemos para fatorar $y^3 - 5y^2 + y - 5$:

$$y^3 - 5y^2 + y - 5 = y^2(y - 5) + 1(y - 5) = (y - 5)(y^2 + 1)$$

Atividades

16. Fatore, colocando o fator comum em evidência:

a) $mn^5 + 2n^3 + n^2 + n$ $n\,(mn^4 + 2\,n^2 + n + 1)$

b) $ab + \frac{a^3}{3}$ $a\,[b + \frac{a^2}{3}]$

c) $a^5 + a^3 + 3a$ $a\,(a^4 + a^2 + 3)$

d) $\frac{xyz}{2} + \frac{xz}{4} + \frac{x}{2} + \frac{xy}{8}$ $\frac{xy}{2}\,[z + \frac{1}{4}] + \frac{x}{2}\,[\frac{z}{2} + 1]$

e) $a^5 + 4a^3 + \frac{a^3}{3}$ $a^3\,[a^2 + \frac{1}{4}]$

f) $80a^5 + 64a^3$ $8a^3\,(10a^2 + 8)$

17. Fatore cada expressão, colocando o fator comum em evidência:

a) $a(a + 2) + b(a + 2)$ $(a + 2)\,(a + b)$

b) $a(a + 2b) + b(a + 2b) + 3(a + 2b)$ $(a + 2b)\,(a + b + 3)$

c) $m^2(m + b) - m(m + b) + b(m + b)$ $(m + b)\,(m^2 - m + b)$

18. Fatore:

a) $16b - a^2b$ $b\,(4 + a)\,(4 - a)$

b) $7a^2(a + b) - 14(a + b)$ $(a + b)\,(a^2 - 2) = 7$

c) $a^3 - 10a^2b + 3b^2a$ $a\,(a^2 - 10ab + 3b)$

d) $7a^7 - 21a^6 -7a^5$ $7a^5\,(a^2 - 3a - 1)$

19. Coloque o fator comum em evidência.

a) $a(a^2 + 1) + (a^2 + 1)$ $(a^2 + 1)\,(a + 1)$

b) $a(b - 3) - (b - 3)$ $(b - 3)\,(a - 1)$

c) $b(5a - y) - (5a - y)$ $(5a - y)\,(b - 1)$

d) $x(7m + n) + 7m + n$ $(7m + n)\,(x + 1)$

20. Fatore, por agrupamento:

a) $am + an + bm + bn$ $(a + b)\,(m + n)$

b) $b^3 - 3b^2 + 4b - 12$ $(b^2 + 4)\,(b - 3)$

c) $ax^2 - bx^2 + 3a - 3b$ $(x^2 + 3)\,(a - b)$

21. Fatore:

a) $abc + a^2b + 2a + 2c$ $(ab + 2)\,(c + a)$

b) $a^2b^2z + 2ab + 3abz + 6$ $(ab + 3)\,(abz + 2)$

c) $\frac{3x}{5} + ax + \frac{3y}{5} + ay$ $(x + y)\,[\frac{3}{5} + a]$

d) $a^2x + \frac{1}{4}x + 3a^2 + \frac{3}{4}$ $(x + 3)\,[a^2 + \frac{1}{4}]$

e) $ab + 2a + b + 2$ $(a + 1)\,(b + 2)$

f) $ab + a + b + 1$ $(b + 1) \cdot (a + 1)$

g) $a^2b - 2a + ab - 2$ $(a + 1)\,(ab - 2)$

h) $ab^2 - ba^2 + a - b$ $(b - a)\,(ab - 1)$

Frações Algébricas

Uma **fração algébrica** é uma expressão algébrica na forma de fração, na qual o numerador é um número real ou um polinômio qualquer e o denominador é obrigatoriamente um polinômio com uma ou mais variáveis.

Observe alguns exemplos:

- $-\dfrac{5}{x}$
- $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+7}$
- $\dfrac{2x+y}{x+y}$

Como qualquer fração, o denominador de uma fração algébrica deve ser um polinômio, cujo valor numérico seja diferente de zero para quaisquer valores das variáveis. Por exemplo, na fração $-\dfrac{5}{x}$, a variável **x** pode assumir qualquer valor real, exceto zero.

Para a fração $\dfrac{x+7}{2x-10}$ deveremos ter $2x - 10 \neq 0 \rightarrow x \neq 5$

Adição e subtração de frações algébricas

Assim como as frações comuns, as frações algébricas podem ser simplificadas através de fatorações do numerador e do denominador e podem também ser reduzidas a um mesmo denominador. Essas operações são bastante úteis nas operações com frações algébricas, necessárias para a resolução de equações onde aparecem essas frações. Suponha, por exemplo, que tenhamos a seguinte adição de frações algébricas:

$$\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x^2-4}$$

Devemos proceder como se tivéssemos a adição de duas frações comuns, reduzindo as frações algébricas a um mesmo denominador.

Os denominadores são:

$$x + 2 \quad \text{e} \quad x^2 - 4$$

Os denominadores passam a ser:

$$(x + 2) \;\text{ e }\; (x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)$$

Encontramos, assim o m.m.c dos denominadores das frações:

$$x^2 - 4 = (x + 2).(x - 2).$$

Com ele, podemos escrever:

$$\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} = \frac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{3}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} = \frac{5x-10+3}{(x+2)(x-2)} = \frac{5x-7}{x^2-4}$$

Leia o texto e ressalte no quadro que os valores das variáveis obedecem a regras de validade exigidas pelas operações como, por exemplo, a impossibilidade de se dividir por zero. Por exemplo, na expressão a seguir, x não pode ser nem 7 e nem $\frac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{x-7} + \dfrac{2x}{2x-1}$, $x \neq 7$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$

$x - 7 \neq 0 \rightarrow x \neq 7$

Além $x \neq 7$, temos $x \neq \frac{1}{2}$, pois:

$2x - 1 \neq 0$

$2x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Vamos ver também como podemos utilizar os processos de fatoração para a simplificação e a operação com frações algébricas.

Veja, por exemplo, a simplificação da seguinte fração algébrica;

$$\frac{x^2 - 36}{x^2 - 12x + 36} = \frac{(x + 6)(x - 6)}{(x - 6)^2}$$

Para $x \neq 6$, podemos escrever:

$$\frac{x^2 - 36}{x^2 - 12x + 36} = \frac{(x + 6)(x - 6)}{(x - 6)^2} = \frac{x + 6}{x - 6}$$

É importante que você compreenda que só foi possível simplificar a fração algébrica ao dividirmos numerador e denominador por $(x - 6)$, porque estabelecemos a condição $x \neq 6$. Caso essa restrição não fosse feita, poderia ocorrer uma divisão do numerador e denominador por zero, o que é uma operação impossível.

Esse tipo de restrição, relativa aos denominadores de frações algébricas, é denomidada **condição de existência** da fração algébrica. Esse nome é bastante apropriado, pois se o denominador for zero não existe a fração.

Atividades

22. Expresse na forma de frações algébricas cada um dos problemas propostos:

a) Considerando que uma latinha de um determinado refrigerante custa **x** reais, quantas latinhas é possível comprar com R$ 82,00? z latinhas = $\frac{82}{x}$

b) Quantas latinhas posso comprar com **y** reais? z latinhas = $\frac{y}{x}$

23. Cláudio deu **n** selos de sua coleção para serem repartidos entre seus **p** sobrinhos.

O mais velho pegou 12 selos e dividiu o restante em partes iguais.

a) Escreva em linguagem simbólica quantos selos cada sobrinho restante receberá. $\frac{n - 12}{p - 1}$

b) Calcule quantos selos cada sobrinho recebeu se Cláudio tinha 122 selos e, incluindo-se o mais velho, possui 6 sobrinhos? o mais velho 12 selos, os restantes 24 selos cada

24. Para cada fração algébrica a seguir, indique que valor **x** não pode assumir:

a) $\dfrac{x^2 - 5x}{3x}$ $\{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

b) $\dfrac{2x^2 + 3x}{x + 5}$ $\{x \in R \,/\, x \neq -5\}$

c) $\dfrac{2b^2 + 3x}{x - 5}$ $\{x \in R \,/\, x \neq 5\}$

d) $\dfrac{6a^2 - 2}{2x + 6}$ $\{x \in R \,/\, x \neq -3\}$

25. Simplifique as frações algébricas:

a) $\dfrac{84x^3y^2z}{12wx^2y}$ $\dfrac{7xyz}{w}$

b) $\dfrac{27x^5y^3z^3}{9x^6zy^5}$ $\dfrac{3z^2}{xy^2}$

26. Considerando denominadores não nulos e colocando fatores comuns em evidência, simplifique:

a) $\dfrac{2x^4 - 9x^3}{x^2}$ $x(2x - 9)$

b) $\dfrac{2x^3 - x^2y}{2xy - y^2}$ $\dfrac{x^2}{y}$

c) $\dfrac{ax + bx}{ay + by}$ $\dfrac{x}{y}$

d) $\dfrac{a^3x + axy}{a^3 + ay}$ x

e) $\dfrac{x + 4}{x^2 - 16}$ $\dfrac{1}{x - 4}$

f) $\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 - 4x + 1}$ $\dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

g) $\dfrac{1 - 9x^2}{1 + 6x + 9x^2}$ $\dfrac{1 - 3x}{1 + 3x}$

27. Considerando denominadores não nulos, simplifique as seguintes frações:

a) $\dfrac{ab + 3a + 2b + 6}{b + 3}$ $a + z$

b) $\dfrac{ab + 3a + 7b + 21}{b^2 - 9}$ $\dfrac{a + 7}{b - 3}$

c) $\dfrac{ax + bx + ay + by}{x^2 + 2xy + y^2}$ $\dfrac{a + b}{x + y}$

28. Determine o valor numérico de $\dfrac{x^8 - y^8}{x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6}$ para $x = 13$ e $y = 14$ (sugestão: fatore o numerador e o denominador para simplificar a fração antes de calcular o valor numérico pedido). 365

29. Simplifique as frações algébricas a seguir e calcule o valor numérico de cada uma para **x = 12** e **y = 8**.

a) $\dfrac{x^5y^5}{x^3y^7}$ $\dfrac{9}{4}$

b) $\dfrac{x^2 - y^2}{17x - 17y}$ $\dfrac{20}{17}$

c) $\dfrac{x^5 + x^4y}{2x^4}$ 10

d) $\dfrac{3x + 3y}{x^2 + 2xy + y^2}$ $\dfrac{3}{20}$

30. Considerando denominadores não nulos, reduza as frações a um denominador comum e efetue as adições:

a) $\dfrac{2}{x + 3} + \dfrac{5}{x^2 + 6x + 9}$ $2x + 11$

b) $\dfrac{7x + 35}{x^2 - 25} + \dfrac{x - 5}{x + 5}$ $x^2 - 3x + 60$

c) $\dfrac{5}{x^2 - 4} + \dfrac{4}{x^2 + 4x + 2}$ $\dfrac{5}{(x + 4)(x - 4)} + \dfrac{4}{x^2 + 4x - 2}$

Para estudar

31. Efetue:

a) $(a + b)^2$

b) $(c + d)^2$

c) $(x + 5)^2$

d) $(x + 4)^2$

e) $(y + 2)^2$

f) $(y + 1)^2$

32. Efetue:

a) $x^3 (x + 6)^2$

b) $(x + 1)^2 - x(x + 2)$

c) $(y + 2) + (y + 1)^2$

33. Efetue:

a) $(x^3 + 1)^2$

b) $(x^5 + 2)^2$

c) $(3x^2 + 10)^2$

d) $(2y^4 + 3)^2$

e) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2$

f) $\left(4y + \frac{1}{2}\right)^2$

34. Efetue:

a) $(x - 7)^2$

b) $(x - 3)^2$

c) $(5y - 1)^2$

d) $(5x - 2y)^2$

e) $(x^2 - 6)^2$

f) $(3x^2 - y2)^2$

35. Efetue:

a) $(x + 10)(x - 10)$

b) $(x + 3)(x - 3)$

c) $(5y + 1)(5y - 1)$

d) $(5x + 2y)(5x - 2y)$

e) $(x^3 - 2)(x^3 + 2)$

f) $(5x^2 - 3y)(5x^2 + 3y)$

36. Efetue:

a) $\left(2x^2 - \frac{3}{5}\right) 2x^2 + \frac{3}{5}$

b) $\left(3a^2b - \frac{a^3}{5}\right)^2$

37. Encontre o quociente da divisão de $8x^6 + 4x^5 + 20x^4$ por:

a) x^2

b) x^4

c) 4

d) $4x^4$

38. Efetue:

a) $\dfrac{2x^5 + 3x^4}{x^3}$

b) $\dfrac{3y^3 - 7y^2 + 8y}{y}$

c) $\dfrac{x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4}{xy^2}$

d) $\dfrac{12x^3y^4 - 18x^4y^3}{-6x^3y}$

39. Efetue:

a) $(3x^2 + 5x + 6) \div (3x^2 + 5x + 6)$

b) $(x + 4)(x + 3)(x + 2) \div (x + 4)(x + 3)$

40. Fatore as expressões:

a) $x^4 - 1$

b) $81a^4 - 1$

c) $x^{20} - 81$

d) $625 - x^4$

41. Fatore, colocando o fator comum em evidência:

a) $ax + bx + cx$

b) $x^2 + 7x$

c) $x^5 + 4x^3$

d) $ab + \frac{a}{3}$

e) $\frac{xyz}{2} + \frac{xz}{4} + \frac{x}{2}$

f) $80x^5 + 64x^3$

42. Fatore, colocando o fator comum em evidência:

a) $a(x + 2) + b(x + 2)$

b) $a(x + 2y) + b(x + 2y) + 3(x + 2y)$

c) $\frac{a + 1}{5} - 3x(a + 1)$

d) $x^2(a + b) - x(a + b) + y(a + b)$

43. Fatore:

a) $16y - a^2y$

b) $x^3 - 6x^2y + 9y^2x$

c) $x^2(a + b) - 4(a + b)$

d) $7x^7 - 14x^6 + 7x^5$

44. Coloque o fator comum em evidência.

a) $x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)$

b) $a(y - 3) - (y - 3)$

c) $b(5x - a) - (5x - a)$

d) $x(7m + n) + 7m + n$

45. Fatore, por agrupamento:

a) $am + an + bm + bn$

b) $2x + ay + 2y + ax$

c) $x^2y - 2x + xy - 2$

d) $ax^2 - bx^2 + a - b$

e) $y^3 - 3y^2 + 4y - 12$

f) $ax^2 - bx^2 + 3a - 3b$

46. Quais são os valores que as variáveis não podem assumir nas seguintes frações algébricas:

a) $\frac{x^2 - 5x}{3x}$

b) $\frac{2a^2 + 3b}{3a - 5}$

c) $\frac{2a^2 + 3b}{a + 5}$

d) $\frac{6a^2 - 2}{2x + 6}$

47. Colocando fatores comuns em evidência, simplifique:

a) $\frac{2x^4 - 9x^3}{x^2}$

b) $\frac{ax + bx}{ay + by}$

c) $\frac{2x^3 - x^2y}{2xy - y^2}$

d) $\frac{a^3x - axy}{a^3 + ay}$

48. Simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{ax - 5bx}{ay^3 - 5by^3}$

b) $\frac{7x + 35}{x^2 - 25}$

c) $\frac{4x^2 - 9}{4x^2 + 12x + 9}$

d) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{ax - 3a}$

e) $\frac{xy - 7y}{x^2 - 49}$

49. Reduza a um denominador comum e efetue as adições:

a) $\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{4}{x + 1}$

b) $\frac{1}{x - 4} + \frac{1}{x^2 - 16}$

c) $\frac{x}{2x - 4} + \frac{1}{x^2 - 4}$

Resolução das atividades

1. a) $m^2 + 2mn + n^2$

b) $c^2 + 4cd + 4d^2$

c) $4a^2 + 20a + 25$

d) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

2. a) $a^3 (a^4 + 12a^2 + 36) = a^7 + 12a^5 + 36a^3$

b) $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2 = 2x + 3$

c) $b + 2 + b^2 + 2b + 1 - b^2 + 2b - 1 = 5b + 2$

3. a) $m^6 + 2m^3 + 1$

b) $n^8 + 6n^4 + 9$

c) $a^4 + 20a^2 + 100$

d) $4y^8 + 20y^4 + 25$

4. a) $a^2 - 14a + 49$

b) $a^2 - 16a + 64$

c) $25b^2 - 30b + 9$

d) $25a^2 - 30ab + 9b^2$

e) $a^4 - 6a^2 + 9$

f) $16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$

5. a) $x^2 - 49$

b) $9a^2 - 4b^2$

c) $a^2 - 3$

d) $a^6 - 2$

6. a) $4x^4 - \frac{1}{25}$

b) $9m^4n^2 - \frac{n^6}{4}$

7. a) $4a$

b) $\frac{1}{9}$

c) 16

d) $36y$

e) $9a^2$

8. a) $a^2 - 256 = (a + 16) (a - 16)$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $4x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 4x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$

$4x^2 - x + \frac{1}{16} = \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2$

d) $x^2 - y^8 = (x + y^4) (x - y^4)$

9. a) $a^2 - 9 = (a + 3) (a - 3)$

b) $81a^2 - 64 = (9a + 8) (9a - 8)$

c) $b^2 - 36 = (b - 6) (b + 6)$

d) $b^2 - 25x^2 = (b + 5x) (b - 5x)$

e) $9x^2 - 16 = (3x + 4) (3x - 4)$

f) $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y) (2x - 5y)$

10. a) não b) não c) não

d) $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$

e) $a^2 + 10a + 25 = (a + 5)^2$

f) não

11. a) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

b) $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$

d) $9a^2 - 12a + 4 = (3a - 2)^2$

e) $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$

f) $|2|\ m^2 + 22\ m + 1 = (11\ m + 1)$

12. a) $16b^6 - a^4 = (4b^3 + a^2) (4b^3 - a^2)$

b) $25\ m^2 + 20\ m + 4 = (5\ m + 2)^2$

c) $25a^2 - \frac{10x}{3} + \frac{1}{9} = \left(5a - \frac{1}{3}\right)$

13. a) $a^4 - 1 = (a^2 + 1) (a^2 - 1) =$

$= (a^2 + 1) (a + 1) (a - 1)$

b) $a^{20} - 81 = (a^{10} + 9) (a^{10} - 9) =$

$= (a^{10} + 9) (a^5 + 3) (a^5 - 3)$

c) $81a^4 - 1 = (9a^2 + 1) (3a + 1) (3a - 1)$

d) $625 - a^4 = (25 + a^2) (5 + a) (5 - a)$

14. a) $20\,a$ d) $4\,a$
b) $10\,a$ e) $56\,a^3$
c) $10\,a^2$ f) $6\,a^2b$

15. a) $\dfrac{(x-7)^2}{(x-7)} = x - 7$

b) $\dfrac{(x+4)\,(x-4)}{(x+4)} = x - 4$

c) $\dfrac{(5x-1)^2}{(5x-1)^2} = 1$

d) $\dfrac{(x+3)^2}{(x+3)} = x + 3$

16. a) $n\,(mn^4 + 2\,n^2 + n + 1)$

b) $a\left(b + \dfrac{a^2}{3}\right)$

c) $a\,(a^4 + a^2 + 3)$

d) $\dfrac{xy}{2}\left(z + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{z}{2} + 1\right)$

e) $a^3\left(a^2 + 4 + \dfrac{1}{4}\right) =$

$= a^3\left(a^2 + \dfrac{1}{4}\right)$

f) $8a^3\,(10a^2 + 8)$

17. a) $(a + 2)\,(a + b)$
b) $(a + 2b)\,(a + b + 3)$
c) $(m + b)\,(m^2 - m + b)$

18. a) $b\,(16 - a^2) = b\,(4 + a)\,(4 - a)$
b) $(a + b)\,(7a^2 - 14) = (a + b)\,(a^2 - 2) = 7$
c) $a\,(a^2 - 10ab + 3b)$
d) $7a^5\,(a^2 - 3a - 1)$

19. a) $(a^2 + 1)\,(a + 1)$
b) $(b - 3)\,(a - 1)$
c) $(5a - y)\,(b - 1)$
d) $(7m + n)\,(x + 1)$

20. a) $m\,(a + b) + n\,(a + b) =$
$(a + b)\,(m + n)$
b) $b\,(b^2 + 4) - 3\,(b^2 + 4)$
$(b^2 + 4)\,(b - 3)$
c) $a\,(x^2 + 3) - b\,(x^2 + 3) =$
$(x^2 + 3)\,(a - b)$

21. a) $c\,(ab + 2) + a\,(ab + 2) =$
$(ab + 2)\,(c + a)$
b) $abz\,(ab + 3) + 2\,(ab + 3) =$
$(ab + 3)\,(abz + 2)$

c) $\dfrac{3}{5}\,(x + y) + a\,(x + y) =$

$(x + y)\left(\dfrac{3}{5} + a\right)$

d) $a^2(x + 3) + \dfrac{1}{4}(x + 3) =$

$(x + 3)\left(a^2 + \dfrac{1}{4}\right)$

e) $b\,(a + 1) + 2\,(a + 1) =$
$(a + 1)\,(b + 2)$

f) $a\,(b + 1) + (b + 1) =$
$(b + 1) \cdot (a + 1)$

g) $ab + (a + 1) - 2\,(a + 1) = (a + 1)\,(ab - 2)$
h) $ab\,(b - a) - (-\,a + b) = (b - a)\,(ab - 1)$

22. a) z latinhas $= \dfrac{82}{x}$

b) z latinhas $= \dfrac{y}{x}$

23. a) $\dfrac{n - 12}{p - 1}$

b) o mais velho 12 selos
Restantes
$\dfrac{122 - 12}{6 - 1}$ selos $\rightarrow$ 24 selos

24. a) $\frac{x^2 - 5x}{3x}$ $x \neq 0$

$\{x \in R / x \neq 0\}$

b) $\frac{2x^2 + 3x}{x + 5}$ $x \neq -5$

$\{x \in R / x \neq -5)$

c) $\frac{2b^2 + 3x}{x - 5}$ $x \neq 5$

$\{x \in R / x \neq 5\}$

d) $\frac{6a^2 - 2}{2x + 6} x \neq -3$

$\{x \in R / x \neq -3\}$

25. a) $\frac{7xyz}{w}$ b) $\frac{3z^2}{xy^2}$

26. a) $x(2x - 9)$

b) $\frac{x^2}{y}$

c) $\frac{x}{y}$

d) x

e) $\frac{1}{x - 4}$

f) $\frac{2x + 1}{2x - 1}$

g) $\frac{1 - 3x}{1 + 3x}$

27. a) $a + z$

b) $\frac{b(a + 7) + 3(a + 7)}{(b + 3)(b - 3)} =$

$\frac{(a + 7)(b + 3)}{(b + 3)(b - 3)} = \frac{a + 7}{b - 3}$

c) $\frac{a(x + y) + b(x + y)}{(x + y)^2} =$

$\frac{(x + y)(a + b)}{(x + y)^2} = \frac{a + b}{x + y}$

28. $\frac{(x^4 + y^4)(x^4 - y^4)}{x^4(x^2 - y^2) + y^4(x^2 - y^2)} =$

$\frac{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^4 + y^4)} =$

$= x^2 + y^2$ p / x = 13 e y = 14

$= 13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$

29. a) $\frac{x^5 y^5}{x^3 y^7} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{12^2}{8^2} = \frac{144}{64} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{(x + y)(x - y)}{17(x - y)} = \frac{12 + 8}{17} = \frac{20}{17}$

c) $\frac{x^4(x + y)}{2x^4} = \frac{x + y}{2} = \frac{12 + 8}{2} = \frac{20}{2} = 10$

d) $\frac{3x(x + y)}{(x + y)} = \frac{3}{x + y} = \frac{3}{12 + 8} = \frac{3}{20}$

30. a) $\frac{2}{x + 3} + \frac{5}{(x + 3)^2} =$

$2(x + 3) + 5 =$

$2x + 6 + 5 =$

$2x + 11$

b) $\frac{7(x + 5)}{(x + 5)(x - 5)} + \frac{(x - 5)}{(x + 5)}$

$7(x + 5) + (x - 5)^2$

$7x + 35 + x^2 - 10x + 25 =$

$x^2 - 3x + 60$

c) $\frac{5}{(x + 4)(x - 4)} + \frac{4}{x^2 + 4x + 2}$

Respostas da seção Para estudar

31. a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $c^2 + 2cd + d^2$

c) $x^2 + 10x + 25$

d) $y^2 + 4y + 4$

e) $y^2 + 2y + 1$

32. a) $x^5 + 12x^4 + 6x^3$

b) 1

c) $y^2 + 3y + 3$

33. a) $x^6 + 2x^3 + 1$

b) $x^{10} + 4x^5 + 4$

c) $9x^4 + 60x^2 + 100$

d) $4y^8 + 12y^4 + 9$

e) $y^2 + y + \frac{1}{4}$

f) $16y^2 + 4y + \frac{1}{4}$

34. a) $x^2 - 14x + 49$
b) $x^2 - 6x + 9$
c) $25y^2 - 10y + 1$
d) $25x^2 - 20xy + 4y^2$
e) $x^4 - 12x^2 + 36$
f) $9x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

35. a) $x^2 - 100$
b) $x^2 - 9$
c) $25y^2 - 1$
d) $25x^2 - 4y^2$
e) $x^6 - 4$
f) $25x^4 - 9$

36. a) $4x^4 - \frac{6x^2}{5} + \frac{3}{5}$
b) $9a^4b^2 - \frac{6a^5b}{5} + \frac{a^6}{25}$

37. a) $8x^4 + 4x^3 + 20x^2$
b) $8x^2 + 4x + 20$
c) $2x^6 + x^5 + 5x^4$
d) $2x^2 + x + 5$

38. a) $2x^2 + 3x$
b) $3y^2 - 7y + 8$
c) $x^2 - xy + y^2$
d) $-2y^3 + 3xy^2$

39. a) 1
b) $x + 2$

40. a) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
b) $(9a^2 + 1)(3a + 1)(3a - 1)$
c) $(x^{10} + 9)(x^5 + 3)(x^5 - 3)$
d) $(25 + x^2)(5 + x)(5 - x)$

41. a) $x(a + b + c)$
b) $x(x + 7)$
c) $x^3(x2 + 4)$
d) $a\left(b + \frac{1}{3}\right)$
e) $\frac{x}{2}\left(yz + \frac{z}{2} + 1\right)$
f) $16x^3(5x^5 + 4)$

42. a) $(x + 2)(a + b)$
b) $(x + 2y)(a + b + 3)$
c) $(a + 1)\left(\frac{1}{5} - 3x\right)$
d) $(a + b)(x^2 - x + y)$

43. a) $y(4 + a)(4 - a)$
b) $x(x - 1)^2$
c) $(a + b)(x + 2)(x - 2)$
d) $7x^5(x - 1)^2$

44. a) $(x^2 + 1)(x + 1)$
b) $(y - 3)(a - 1)$
c) $(5x - a)(b - 1)$
d) $(7m + n)(x + 1)$

45. a) $(m + n)(a + b)$
b) $(x + y)(2 + a)$
c) $(xy - 2)(x + 1)$
d) $(x^2 + 1)(a - b)$
e) $(y - 3)(y + 2)(y - 2)$
f) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(a - b)$

46. a) $x \neq 0$
b) $a \neq \frac{5}{3}$
c) $a \neq -5$
d) $x \neq -3$

47. a) $x(2x - 9)$
b) $\frac{x}{y}$
c) $\frac{x^2}{y}$
d) x

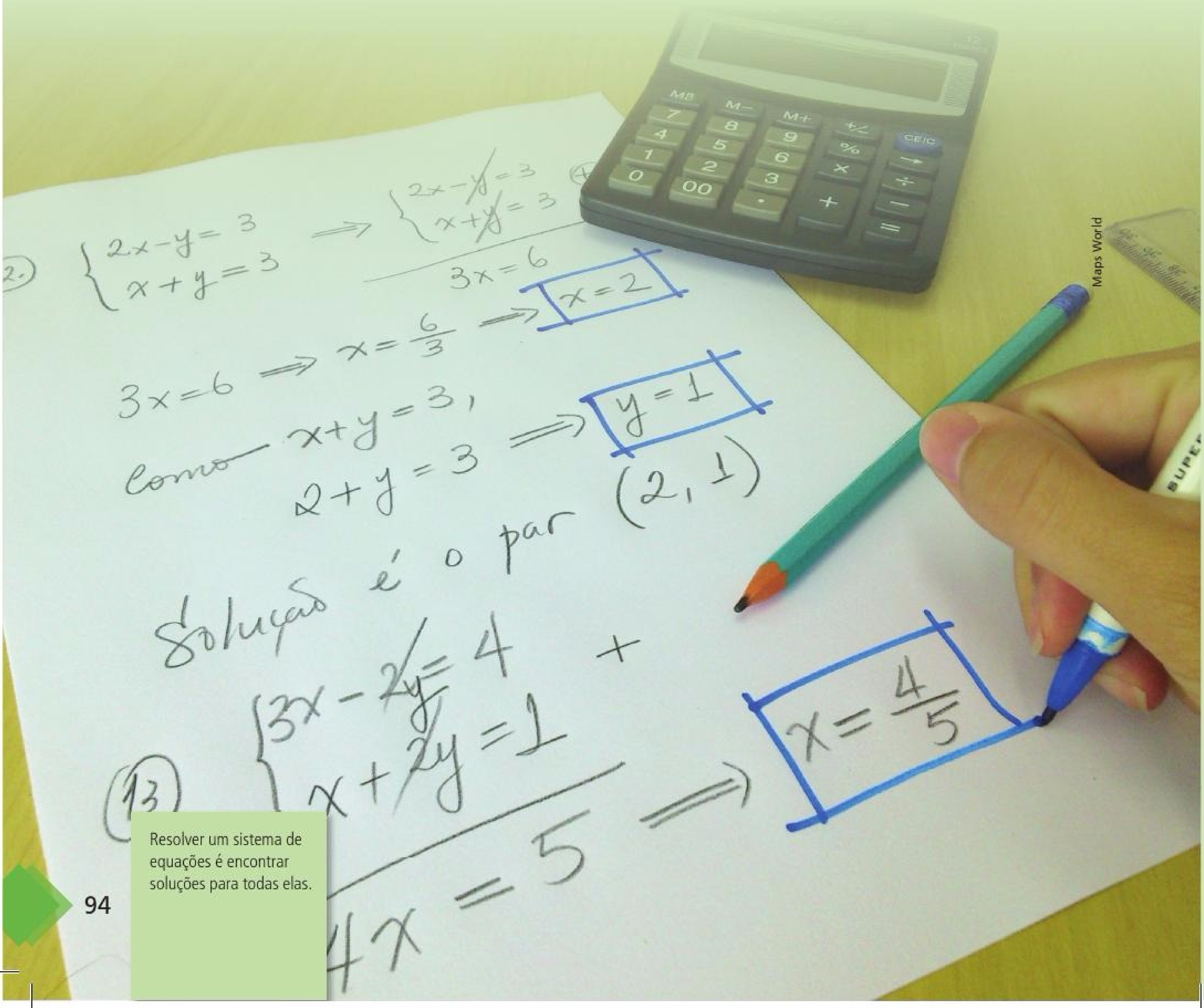
48. a) $\frac{x}{y^3}$
b) $\frac{7}{x - 5}$
c) $\frac{2x - 3}{2x + 3}$
d) $\frac{x^2 + 2}{a}$
e) $\frac{7}{x + y}$

49. a) $\frac{4x - 1}{x^2 - 1}$
b) $\frac{x - 5}{x^2 - 16}$
c) $\frac{(x + 4)(x + 1)}{2(x^2 - 4)}$

capítulo 4

Sistemas de equações

- Recordando equações de primeiro grau
- Sistemas de Equações



Maps World

Resolver um sistema de equações é encontrar soluções para todas elas.

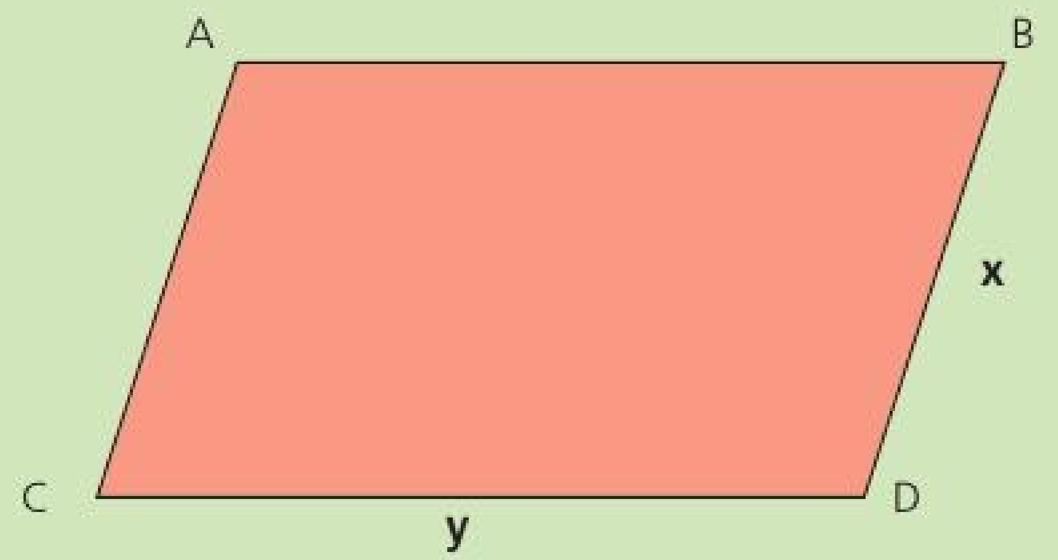
Conversa Inicial

Já vimos em momentos anteriores de nosso curso como é feita a resolução de diversos problemas, utilizando-se a linguagem simbólica para representar, em uma equação, a "incógnita" ou a "resposta que procuramos encontrar". Esse processo de escrever uma equação para depois resolvê-la deu origem à expressão "equacionar o problema".

Até agora, trabalhamos com equações que possuíam apenas uma incógnita e desenvolvemos processos para resolvê-las. Porém, existem situações de problemas que envolvem mais do que um valor desconhecido, de tal forma que as resoluções apresentam equações com duas ou mais incógnitas.

Veja, por exemplo, a determinação dos lados de um paralelogramo para o qual temos as seguintes informações:

- **O lado maior tem 8 cm a mais que o menor.**
- **O perímetro do paralelogramo é 32 cm.**



Se chamarmos o lado menor de **x** e o maior de **y**, as duas informações podem ser traduzidas em duas sentenças matemáticas. Cada uma delas é uma equação com duas incógnitas. Observe:

O lado maior tem 8 cm a mais que o menor. $\rightarrow$ $\mathbf{y = x + 8}$

O perímetro do paralelogramo é 32 cm. $\rightarrow$ $x + x + y + y = 32$ ou $\mathbf{2x + 2y = 32}$

Temos, portanto, duas equações com duas incógnitas. Nenhuma das duas pode ser resolvida individualmente. Basta que você entenda que a primeira $\mathbf{y = x + 8}$, pode ter infinitas soluções, tais como $y = 8$ e $x = 0$, $y = 9$ e $x = 1$, $y = 21$ e $x = 13$ e assim indefinidamente. O mesmo ocorre com a segunda.

O que configura um **Sistema de Equações** é que as soluções de uma equação devem ser, **também**, soluções das demais.

No caso do paralelogramo ABCD, o sistema de equações é representado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y = x + 8 \\ 2x + 2y = 32 \end{cases} \quad \text{que pode ser simplificado em} \quad \begin{cases} x - y = 8 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

Vamos estudar neste capítulo os diferentes processos de resolução de sistemas de equações do primeiro grau, por enquanto, com duas equações e duas incógnitas.

Apenas para matar a curiosidade, um dos métodos que vamos estudar, aplicado ao problema do paralelogramo, nos permite calcular que o lado maior mede 12 cm e o menor 4 cm. Faça as contas e veja que essas medidas satisfazem as duas condições que determinam as duas equações do sistema.

Recordando equações de primeiro grau

Denominamos equações de primeiro grau aquelas nas quais a incógnita está elevada ao expoente 1. Para resolvê-las, podemos usar diversos recursos, todos eles baseados na manutenção da igualdade proposta na sentença original da equação. Os principais recursos utilizados na resolução de equações são:

- multiplicar ou dividir os dois membros da igualdade por um mesmo número diferente de zero;
- somar ou subtrair aos dois membros da igualdade por um mesmo valor numérico.

É fundamental a recordação dos recursos utilizados na resolução de equações, principalmente para que seja possível a utilização das técnicas de resolução de sistemas.

Essas operações, quando realizadas nos dois membros da equação, não alteram a igualdade que ela estabelece.

Muitas vezes, para simplificar os passos de resolução da equação, realizamos as operações acima de maneira direta. Veja, por exemplo, a equação:

$$5x = x + 12$$

Em vez de fazermos a subtração de **x** em ambos os membros, podemos, simplesmente, "passar" o **x** para o primeiro membro, trocando o sinal.

Veja como essas operações se equivalem:

a) subtraindo **x** dos dois membros;

$5x = x + 12 \rightarrow 5x - \mathbf{x} = \cancel{x} + 12 - \cancel{\mathbf{x}}$

$5x - x = 12$

$4x = 12$

b) $5x = x + 12 \rightarrow 5x - x = 12 \rightarrow 4x = 12$

O **x** passa para o outro lado e troca de sinal

Ao passar uma parcela de um lado para o outro trocamos seu sinal. Isso equivale a dizer que "fazemos a operação inversa" àquela que a parcela está submetida no membro original.

Caso uma parcela esteja sendo adicionada, ela passa para o outro membro sendo subtraída e vice-versa.

Da mesma forma, se em um membro um valor está sendo multiplicado, ele passa para o outro lado sendo dividido e vice-versa.

Veja ainda os exemplos a seguir:

$$\frac{x}{7} = 5 \rightarrow x = 5 \cdot 7$$

O **7** passa para o segundo membro sendo multiplicado

Ao invés de multiplicar ambos os membros por 7, usamos a operação inversa: se **x** dividido por 7 resulta 5, isso equivale a dizer que **x** é igual a sete vezes cinco:

$$x = 5 \cdot 7$$

$$x = 35$$

Existem também vários outros procedimentos que, dependendo da equação, precisam ser utilizados. É o caso, por exemplo, da necessidade de reduzirmos os dois membros ao mesmo denominador.

Veja o exemplo a seguir:

$$\frac{2x - 2}{3} = \frac{x}{2} + 1$$

Reduzimos os dois membros a um mesmo denominador, que é o mmc (2,3) = 6:

$$\frac{2(2x - 2)}{6} = \frac{3x + 6}{6}$$

Podemos, então, eliminar os denominadores e resolver a equação a partir da igualdade dos denominadores:

$$2(2x - 2) = 3x + 6$$

$$4x - 4 = 3x + 6$$

Em seguida, reunimos em um único membro os termos em **x** e no outro os termos independentes.

$$4x - 3x = + 6 + 4$$

$$x = 10$$

Assim, o conjunto solução dessa equação é:

$$S = \{ 10 \}$$

Atividades

Interpretar texto

1. Numa balança, existem 3 laranjas de peso **x** cada uma e um "peso" de 400 g em um prato, equilibrados por 2 pesos de 400 g e um de 50 g no outro. Escreva a equação que representa a situação e calcule **x**. $x = 150g$

2. Ao dobro de um número soma-se 4 e obtém-se 12. Escreva a equação que permite calcular o número e calcule-o. $x = 4$

3. Considere a equação $3(x - 2) = 2x - 1$. Verifique se 5 é solução dessa equação. sim

4. Calcule a solução das equações a seguir:
   a) $5x - 6 = 2x + 3$ $x = 3$
   b) $7(x + 2) = 2x - 6$ $x = -4$
   c) $\dfrac{2x + 1}{3} = 3$ $x = 4$
   d) $\dfrac{3x + 2}{5} = \dfrac{x - 1}{4}$ $\dfrac{x-1}{4}$

5. Um retângulo tem lados medindo **x** e $(x - 1)$ centímetros. O perímetro desse retângulo é 14 centímetros. Determine o valor dos lados do retângulo. 4, 4, 3 e 3

6. Determine **x** na equação:
$$\frac{3x - 5}{2} - \frac{x + 5}{3} = 4$$ $x = 7$

7. Resolva:
$$\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 3}{3} = \frac{1}{2}$$ -6

8. Resolva:
$$\frac{x + 1}{2} + \frac{x + 2}{3} = x$$ 7

Raciocínio lógico

9. Um armazém recebe sacos de açúcar de 24 kg para que sejam empacotados em embalagens menores. O único objeto disponível para pesagem é uma balança de 2 pratos, sem os pesos metálicos. Realizando uma única pesagem, é possível montar pacotes de:
   a) 3 kg
   b) 4 kg
   c) 6 kg
   d) 8 g
   x e) 12 kg

Sistemas de Equações

Sistema de equações é a associação de duas ou mais equações, cada uma delas com mais de uma incógnita. Vamos estudar aqui os sistemas de duas equações com duas incógnitas, que montamos quando temos duas sentenças matemáticas com as mesmas duas incógnitas. Veja, por exemplo, o problema a seguir.

Vamos determinar dois números cuja soma seja 8 e que o triplo do primeiro subtraído do segundo resulte 4.

Se chamarmos os dois números de incógnitas **x** e **y** e escrevermos as duas proposições do problema, teremos um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Um sistema é representado pelas equações e pela chave. Essa representação indica que os valores de **x** e **y**, que encontrarmos como solução do sistema, devem satisfazer às duas equações simultaneamente.

Existem diversos processos de resolução de um sistema de equações, ou seja, encontrarmos o par de valores (x, y) que satisfaça ambas as equações. Vamos, inicialmente, estudar os processos que denominamos de **métodos algébricos**: método da **substituição** e da **adição**.

Método da substituição

O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma equação para substituí-la na outra equação, de tal maneira que tenhamos apenas uma incógnita nessa última.

Acompanhe o método da substituição no exemplo a seguir:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \quad (1) \\ 2x - 3y = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Enfatize que, ao utilizarmos o método da substituição, é necessário muito cuidado para a aplicação das propriedades operacionais estudadas até aqui.

a) Isolar uma das incógnitas:

Vamos isolar a incógnita **x** a partir da equação (1):

$$x - 2y = 2$$
$$x = 2 + 2y$$

Em seguida, vamos trocar **x** por **2 + 2y** na equação (2).

b) Substituir a incógnita isolada e resolver a equação obtida:

Na equação (2) obtemos:

$$2x - 3y = 6$$
$$2(2 + 2y) - 3y = 6$$
$$4 + 4y - 3y = 6$$
$$y = 6 - 4$$
$$y = 2$$

c) A partir da incógnita encontrada, determinamos o valor da outra:

Vimos que $x = 2 + 2y$. Substituindo o valor de **y** em $x = 2 + 2y$, temos:

$$x = 2 + 2 \cdot (2)$$
$$x = 2 + 4$$
$$x = 6$$

A solução do sistema em que x = 6 e y = 2 é representada pelo par (6 ; 2). Esse tipo de par é denominado **par ordenado**, pois, nele, a ordem em que os valores aparecem tem importância: **o primeiro valor é x** e **o segundo é y**.

Assim, a solução do sistema é S = {(6 ; 2)}

Acompanhe, agora, outro exemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ 5x + 4y = 7 & (2) \end{cases}$$

a) Isolar uma incógnita.

Vamos isolar **y** na equação (1)

$3x + 2y = 4$

$2y = 4 - 3x$

$y = \dfrac{4 - 3x}{2}$

b) Substituir a incógnita isolada.

Substituímos esse valor de **y** na equação (2), temos:

$5x + 4y = 7$

$5x + 4 \cdot \left(\dfrac{4 - 3x}{2}\right) = 7$

Resolvendo essa equação, encontraremos o valor de **x**:

$5x + {}^{2}\cancel{4} \cdot \dfrac{(4 - 3x)}{\cancel{2}_{1}} = 7$

$5x + 2 \cdot (4 - 3x) = 7$

$5x + 8 - 6x = 7$

$-x = 7 - 8$

$-x = -1 \rightarrow x = 1$

Substituindo x = 1 em $y = \dfrac{4 - 3x}{2}$ obteremos **y**:

$y = \dfrac{4 - 3x}{2} \rightarrow y = \dfrac{4 - 3 \cdot 1}{2} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

Assim, a solução do sistema é $S = \left\{\left(1 ; \dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Atividades

Interpretar texto

10. Sabendo que um abacaxi de **x** gramas tem o mesmo peso de 6 maçãs de **y** gramas e que o abacaxi mais 3 maçãs, juntos, pesam 630 gramas, calcule quanto pesa o abacaxi e cada maçã. abacaxi 420g maçãs 70g

11. Faça cada um dos procedimentos a seguir e resolva o sistema: $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 8 \end{cases}$

a) Coloque o valor no lugar de **x**, na 2ª equação. 8

b) Resolvendo a equação obtida, encontre o valor de **y**. y = 2

c) Sabendo o valor de **y**, calcule **x**. x = 6

12. Resolva os seguintes sistemas, pelo método da substituição:

a) $\begin{cases} x = 5y \\ x + y = 3 \end{cases}$ $\frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$ y = 1 x = 3

c) $\begin{cases} x = y + 6 \\ x + y = 56 \end{cases}$ y = 25 x = 31

d) $\begin{cases} x = y - 4 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$ y = 26 x = 22

e) $\begin{cases} x = 4y \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$ $y = \frac{1}{4}$ x = 1

f) $\begin{cases} x = y + 1 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases}$ y = 4 x = 5

Linguagem matemática

13. Escreva o sistema de equações e determine **x** e **y** nos problemas a seguir:

a) O número **x** é o dobro do número **y**. A soma dos dois é 6. y = 2 x = 4

b) Um número **x** tem duas unidades a mais que o número **y**. A soma desses dois números é igual a –2. Quais são eles? x = – 2 y = 0

14. Resolva os sistemas, pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$ y = 3 x = 5

b) $\begin{cases} x = 4y \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ $y = \frac{1}{12}$ $x = \frac{1}{3}$

15. Utilize o método da substituição e resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} x + 5 = y \\ y - 2x = 25 \end{cases}$ x = – 20 y = – 15

b) $\begin{cases} x + y = 5 + x \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$ y = 5 x = 2

Linguagem matemática

16. Um pai tem o triplo da idade de seu filho e a diferença entre as idades do pai e do filho é de 36 anos. Escreva o sistema que representa a situação e calcule a idade dos dois. y = 18 x = 54

17. Resolva o sistema:

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$ y = – 1 x = 4

18. Resolva o sistema:

$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$ y = 3 x = – 2

19. Simplifique as duas equações e resolva o sistema:

$\begin{cases} 4(x + 2y) = 7(2x + y) + 5 \\ 3x - 5y + 11 = 4(5x - 2y) \end{cases}$ x = –2 y = –15

20. Resolva os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} 4(x + 1) = 2y + 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{3}{2}$ $y = \frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} 3x + 2 = y + 4 \\ x + y = 2x \end{cases}$ x = 1 y = 1

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 7 \\ 3x + y = x + 13 \end{cases}$ y = 5 x = 4

Método da adição

Outro método algébrico de grande utilidade na resolução de sistemas de equação é o **método da adição**. Da mesma forma que no método da substituição, o objetivo aqui é encontrarmos, a partir das duas equações, uma terceira com apenas uma incógnita. Para isso, utilizamos um procedimento que consiste em transformar uma ou ambas as equações de tal forma que, ao adicioná-las, eliminamos uma das incógnitas.

Veja, por exemplo, a resolução dos sistemas a seguir pelo método da adição:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 3y = 12 & (1) \\ x + 3y = 3 & (2) \end{cases}$$

Observe que a equação (1) possui o termo **–3y** e a equação (2) possui o termo oposto **3y**. Nesse caso, podemos obter uma só equação sem a incógnita **y**, se somarmos as duas equações membro a membro.

Acompanhe:

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 12 \\ \underline{x} & \underline{+} & \underline{3y} & = & \underline{3} \\ 5x & + & 0 & = & 15 \end{array} \quad (+) \quad \rightarrow \quad 5x = 15 \rightarrow x = 3$$

Observe que, ao fazermos $-3y + 3y = 0$, a incógnita **y** desapareceu. Agora, basta substituir o valor de **x** em uma das equações do sistema:

$4x - 3y = 12$

$4 \cdot 3 - 3y = 12$

$-3y = 12 - 12$

$-3y = 0$

$y = 0$

Relembre para os alunos o conceito de sentença equivalente.

A solução do sistema é:

$S = \{(3; 0)\}$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 8 & (1) \\ 3x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

Neste caso, não temos dois termos opostos em cada uma das equações. Por essa razão, precisamos transformar as equações, de tal forma que possamos obtê-los.

Observe que a equação (2) tem o termo – 2y e a equação (1) tem o termo y. Se multiplicarmos ambos os membros de (1) por 2, obteremos os termos opostos 2y e –2y:

Multiplicamos a equação (1) por 2

$$\begin{cases} 2x + y = 8 & (1) \\ 3x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (2x + y) = 2 \cdot 8 & (1) \\ 3x - 2y = 5 & (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 16 & (1) \\ 3x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

Agora podemos somar as duas equações e eliminar **y**:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x + 2y & = & 16 & & \\ 3x - 2y & = & 5 & + & \\ \hline 7x + 0 & = & 21 & \rightarrow & 7x = 21 \rightarrow x = 3 \end{array}$$

Substituindo **x** numa das equações, encontraremos **y:**

$$2x + y = 8$$

$$2 \cdot 3 + y = 8$$

$$y = 2$$

A solução do sistema é:

$$S = \{(3; 2)\}$$

No primeiro exemplo, aplicamos diretamente o método da adição, pois havia termos opostos nas duas equações. Por isso bastou somar as duas equações para eliminar uma das incógnitas. Já no segundo exemplo, isso não aconteceu. Foi preciso multiplicar os dois membros da primeira equação por 2 para depois somarmos as equações e eliminarmos uma das incógnitas, ou seja, transformamos apenas uma das equações.

Observe, agora, um exemplo de sistema em que precisamos transformar as duas equações para obtermos termos opostos e aplicarmos o método da adição:

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 3 & (1) \\ 3x - 2y = 10 & (2) \end{cases}$

Nesse caso, para eliminarmos a incógnita **x**, precisamos multiplicar a equação (1) pelo coeficiente de **x** na equação (2) com o sinal trocado e multiplicarmos a equação (2) pelo coeficiente de **x** na equação (1), mantendo-se o sinal. Assim encontraremos dois termos opostos em cada uma das equações.

Observe o esquema:

Multiplicamos a equação (1) por –3

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 & (1) \\ 3x - 2y = 10 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (2) por 2

Fazendo isso iremos obter:

$$\begin{cases} (-3)(2x - 5y) = (-3) \cdot 3 & (1) \\ 2(3x - 2y) = -2 \cdot 10 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 15y = -9 & (1) \\ \ \ 6x - \ \ 4y = 20 & (2) \end{cases}$$

Somando-se (1) e (2), membro a membro, eliminaremos a incógnita **x**:

$$\begin{array}{rcrcr} -6x & + & 15y & = & -9 \\ \underline{6x} & \underline{-} & \underline{4y} & = & \underline{20} \quad + \\ 0 & + & 11y & = & 11 \rightarrow \quad y = 1 \end{array}$$

Substituindo **y** numa das equações, encontraremos **x:**

$2x - 5y = 3 \rightarrow 2x - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x = 4$

A solução do sistema é: $S = \{(4\,;1)\}$.

Atividades

21. Resolva pelo método da adição:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $x = 7$, $y = 3$

b) $\begin{cases} x + 2y = 17 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ $x = 9$, $y = 4$

22. Resolva pelo método da adição.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $x = 3$, $y = -1$

b) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$ $y = 9$, $x = -2$

c) $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 2x + 6y = -10 \end{cases}$ $x = 22$, $y = -9$

23. Resolva pelo método da adição:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 21 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$ $x = 5$, $y = 2$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$ $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$

24. A diferença entre dois números é 72 e sua a soma é 280. Calcule-os. $x = 176$, $y = 104$

25. O preço de uma calça *jeans* é **x**, e o de uma camiseta é **y**. Sabendo que a calça *jeans* custa R$ 84,00 a mais que a camiseta e que as duas juntas custam R$ 160,00, determine quanto custa cada peça de roupa. $x = 122$, $y = 38$

Para estudar

26. Resolva os seguintes sistemas, pelo método da substituição:

a) $\begin{cases} x = 5y \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = y + 6 \\ x + y = 56 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = y - 4 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$

27. Resolva os sistemas, pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5 = y \\ y - 2x = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4y \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 + x \\ x + 2y = 16 \end{cases}$

Linguagem matemática

28. A mãe tem o triplo da idade da filha. A diferença entre as duas idades é de 24 anos.

a) Chamando de **x** a idade da mãe e de **y** a idade da filha, escreva o sistema de equações que corresponde a essa situação.

b) Resolva o sistema e encontre a idade de cada uma.

29. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$

30. Simplifique as expressões e resolva os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} 4(x + 1) = 2y + 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2 = y + 4 \\ x + y = 2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 7 \\ 3x + y = x + 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 2x + 3y \\ 3x - 5y = 16 \end{cases}$

31. Resolva os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -18 \\ 5x + 7y = -43 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3y + 9 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

32. Um sorvete de chocolate custa **x** e um sorvete de limão custa **y**. Márcia comprou um sorvete de chocolate e um de limão pagando R$ 3,00. Alessandra comprou dois sorvetes de chocolate e três de limão pagando R$ 7,40.

a) A compra de Márcia pode ser representada pela equação $x + y = 3$. Represente, então, a compra de Alessandra.

b) Resolva o sistema obtido e apresente o preço de cada sorvete.

33. Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} 10y = 10x + 30 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + \frac{x}{2} = \frac{-1}{3} \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x + 3y = 7 \\ 2y + 3(x + 1) = 8 \end{cases}$

34. Resolva os sistemas abaixo pelo método da adição.

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 17 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

35. Usando o método da adição, resolva:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 2x + 6y = -10 \end{cases}$

(Sugestão: nesses sistemas, multiplique os membros da 2ª equação por –1.)

36. Resolva pelo método da adição:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 21 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x + 3y = 7 \\ 3(x + 1) = 8 + x - 2y \end{cases}$

Linguagem matemática

37. O preço de uma lapiseira é **x**, e o de uma da caneta é **y**. A lapiseira custa R$ 12,00 a mais que a caneta, e as duas juntas custam R$ 25,00.

a) Escreva um sistema de equações para as incógnitas **x** e **y**.

b) Encontre os preços da lapiseira e da caneta.

Georgios Alexandris/Dreamstime

38. Resolva pelo método da adição:

a) $\begin{cases} x - 4y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 17x + 2y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases}$

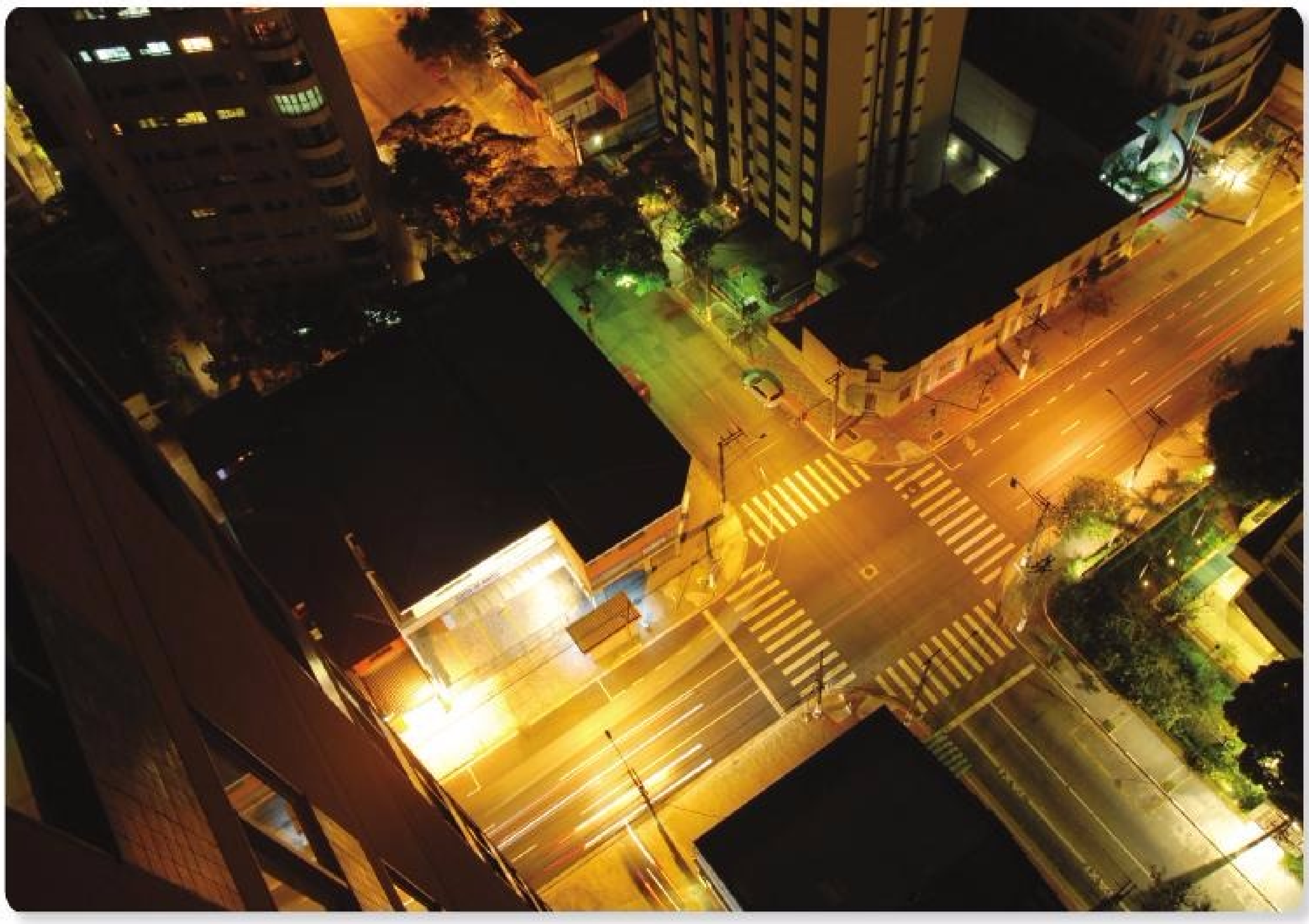
39. Resolva os sistemas, pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 4y \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5 = y \\ y - 2x = 25 \end{cases}$

40. Numa cidade, os quarteirões são retangulares, todos têm comprimento **x** e largura **y**.



Felipe Lopez/Opção Brasil Imag

a) O comprimento **x** tem 30 m a mais que a largura **y**. Represente isso em uma igualdade algébrica.

b) Calcule o comprimento do quarteirão, sabendo que ele é o dobro da largura.

41. Resolva pelo método da adição:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 21 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

Resolução das atividades

1. $3x + 400 = 2.400 + 50$

$3x + 400 = 850$

$3x = 450$

$x = 150g$

2. $2x + 4 = 12$

$2x = 8$

$x = 4$

3. $3(x - 2) = 2x - 1$

p / $x = 5$

$3(5 - 2) = 2 \cdot 5 - 1$

$9 = 9$

sim 5 é a solução

4. a) $5x - 6 = 2x + 3$

$x = 3$

b) $7(x + 2) = 2x - 6$

$7x + 14 = 2x - 6$

$x = -4$

c) $\frac{2x + 1}{3} = 3$

$2x + 1 = 9$

$x = 4$

d) $\frac{3x + 2}{5} = \frac{x - 1}{4}$

e) $12x + 8 = 5x - 5$

$7x = -13$

$x = -\frac{13}{7}$

5. $2x + 2x - 2 = 14$

$4x - 2 = 14$

$x = 4$

Os lados são 4, 4, 3 e 3

6. $\frac{3x - 5}{2} - \frac{x + 5}{3} = 4$

$9x - 15 - 2x - 10 = 24$

$7x = 49$

$x = 7$

7. $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 3}{3} = \frac{1}{2}$

$\frac{3x + 3}{6} - \frac{2x - 6}{6} = \frac{3}{6}$

$3x + 3 - 2x + 6 = 3$

$x = -6$

8. $\frac{x + 1}{2} + \frac{x + 2}{3} = x$

$3x + 3 + 2x + 4 = 6x$

$x = 7$

9. Se é possível apenas uma pesagem, divide-se os sacos ao meio. Logo, a alternativa correta é a **e**.

10. abacaxi = x

maças = y

$\begin{cases} x = 6y \\ x + 3y = 630 \end{cases}$

$6y + 3y = 630$

$y = 70g$

$x = 6 \cdot 70 = 420g$

abacaxi 420g

maças 70g

11. $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 8 \end{cases}$

a) $3y + y = 8$

b) $4y = 8$

$y = 2$

c) $x = 3 \cdot 2$

$x = 6$

12. a) $\begin{cases} x = 5y \\ x + y = 3 \end{cases}$

$y = \frac{1}{2}$

$x = \frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$

$y = 1$

$x = 3$

c) $\begin{cases} x = y + 6 \\ x + y = 56 \end{cases}$

$y = 25$

$x = 31$

d) $\begin{cases} x = y - 4 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$

$y = 26$

$x = 22$

e) $\begin{cases} x = 4y \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$

$y = \frac{1}{4}$

$x = 1$

f) $\begin{cases} x = y + 1 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases}$

$y = 4$

$x = 5$

13. a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 6 \end{cases}$

$y = 2$

$x = 4$

b) $\begin{cases} x + 2 = y \\ x + y = -2 \end{cases}$

$x = -2$

$y = 0$

14. a) $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

$2(y + 2) + 2y = 16$

$2y + 4 + 2y = 16$

$y = 3$

$x = 5$

b) $\begin{cases} x = 4y \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$

$y = \frac{1}{12}$

$x = \frac{1}{3}$

15. a) $\begin{cases} x + 5 = y \\ y - 2x = 25 \end{cases}$

$x + 5 - 2x = 25$

$x = -20$

$y = -15$

b) $\begin{cases} x + y = 5 + x \\ 3x + 2y = 16 \end{cases} \rightarrow \quad y = 5$

$x = 2$

16. $\begin{cases} x = 3y \\ x - y = 36 \end{cases}$

$y = 18$

$x = 54$

17. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$

$2(5 + y) + 7y = 1$

$10 + 2y + 7y = 1$

$y = -1$

$x = 4$

18. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$

$y = 3$

$x = -2$

19. $\begin{cases} 4(x + 2y) = 7\,(2x + y) + 5 \\ 3x - 5y + 11 = 4\,(5x - 2y) \end{cases}$

$4x + 8y = 14x + 7y + 5$

$4x - 14x + 8y - 7y = 5$

$-10 + y = 5$

$3x - 5y + 11 = 20x - 8y$

$3x - 20x - 5y + 8y = -11$

$-17x + 3y = -11$

$\begin{cases} -10x + y = 5 \\ -17x + 3y = -11 \end{cases} \quad x\,(-3)$

$$\begin{array}{rl} 30x - 3y = -15 & + \\ -17x + 3y = -11 & \\ \hline 13x \quad = -26 & \\ x = -2 & \end{array}$$

$-10x + y = 5$

$+20x + y = 5$

$y = -15$

20. a) $\begin{cases} 4(x + 1) = 2y + 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

$4x + 4 = 2y + 5$
$4x - 2y = 1$

$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad x\ (2)$

$$\begin{array}{l} 4x - 2y = 1 \quad + \\ 2x + 2y = 8 \\ \hline 6x \quad = 8 \end{array}$$

$x = \frac{3}{2}$

$y = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8 - 3}{2} = \frac{5}{2}$

$y = \frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} 3x + 2 = y + 4 \\ x + y = 2x \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - y = 2 \quad + \\ -x + y = 0 \end{cases} \\ \hline 2x \quad = 2 \end{array}$$

$x = 1$
$y = 1$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 7 \rightarrow x + 2y = 14 \\ 3x + y = x + 13 \rightarrow 2x + y = 13 \end{cases} \quad x\ (-2)$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -2x - 4y = -28 \quad + \\ 2x + y = 13 \end{cases} \\ \hline -3y = -15 \end{array}$$

$y = 5$
$x = 4$

21. a) $$\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 10 \quad + \\ x - y = 4 \end{cases} \\ \hline 2x \quad = 14 \end{array}$$

$x = 7$
$y = 3$

b) $$\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y = 17 \quad + \\ x - 2y = 1 \end{cases} \\ \hline 2x \quad = 18 \end{array}$$

$x = 9$
$y = 4$

22. a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad x\ (-1)$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 5 \quad + \\ -x - y = -2 \end{cases} \\ \hline x \quad = 3 \end{array}$$

$y = -1$

b) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \quad x\ (-1)$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -3x - y = -3 \quad + \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \\ \hline 3y = 27 \end{array}$$

$y = 9$
$x = -2$

c) $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 2x + 6y = -10 \end{cases} \quad x\ (-1)$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 6y = 12 \quad + \\ -2x - 6y = 10 \end{cases} \\ \hline x \quad = 22 \end{array}$$

$y = -9$

23. a) $\begin{cases} 5x - 2y = 21 \quad x\ (3) \\ 2x + 3y = 16 \quad x\ (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 15x - 6y = 63 \quad + \\ 4x + 6y = 32 \end{cases} \\ \hline 19x = 95 \end{array}$$

$x = 5$

$y = 2$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \quad x\ (2)$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 14x - 4y = 12 \quad + \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \\ \hline 17x \quad = 17 \end{array}$$

$x = 1$

$y = \frac{1}{2}$

24. $\begin{cases} x - y = 72 \\ x + y = 280 \end{cases}$ +

$2x \quad = 352$

$x = 176$

$y = 104$

25. jeans x

camiseta y

$\begin{cases} x - y = 84 \\ x + y = 160 \end{cases}$ +

$2x \quad = 244$

$x = 122$

$y = 38$

Respostas da seção Para estudar

26. a) $S = \left\{\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$

b) $S = \{(3, 1)\}$

c) $S = \{(31; 25)\}$

d) $S = \{(22; 26)\}$

27. a) $S = \{(5; 3)\}$

b) $S = \{(-20; -15)\}$

c) $S = \{(4; 1)\}$

d) $S \{(1; 5)\}$

28. a) $\begin{cases} x = 3y \\ x - y = 24 \end{cases}$

b) A mãe tem 36 anos e a filha 12.

29. a) $S = \{(4; -1)\}$

b) $S = \{(-2; 3)\}$

c) $S = \{(5; 7)\}$

d) $S = \left\{\left(1; \frac{1}{4}\right)\right\}$

30. a) $S = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)\right\}$

b) $S\{(2; -2)\}$

31. a) $S = \{(4; 6)\}$

b) $S = \{(-3; -4)\}$

c) $S\{(3; -2)\}$

32. a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 7{,}4 \end{cases}$

b) $S\{(1{,}6; 1{,}4)\}$

33. a) $S = \{(-1; 2)\}$

b) $S = \left\{\left(\frac{6}{5}; -\frac{14}{15}\right)\right\}$

c) $S = \{(-1; 1)\}$

34. $S = \{(7; 3)\}$

35. a) $S = \{(3; -1)\}$

b) $S = \{(9; -2)\}$

c) $S = \{(22; -5)\}$

36. a) $S = \{(5; 2)\}$

b) $S = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$

c) $S = \left\{\left(\frac{1}{14}; \frac{17}{7}\right)\right\}$

37. a) $\begin{cases} x + y = 25 \\ y = x + 12 \end{cases}$

b) x = R$ 6,50

y = R$ 5,50

38. a) $S = \{(1; 1)\}$

b) $S = \{(1; 0)\}$

c) $S = \{(2; 1)\}$

d) $S = \{(0; 0)\}$

39. a) $S = \{(3; 1)\}$

b) $S = \{(4; 1)\}$

c) $S = \{(-20; -15)\}$

40. a) $x = y + 30$

b) O comprimento é 60 m.

41. a) $S = \{(2; -1)\}$

b) $S = \{(1; 4)\}$

capítulo 5

Congruência de triângulos

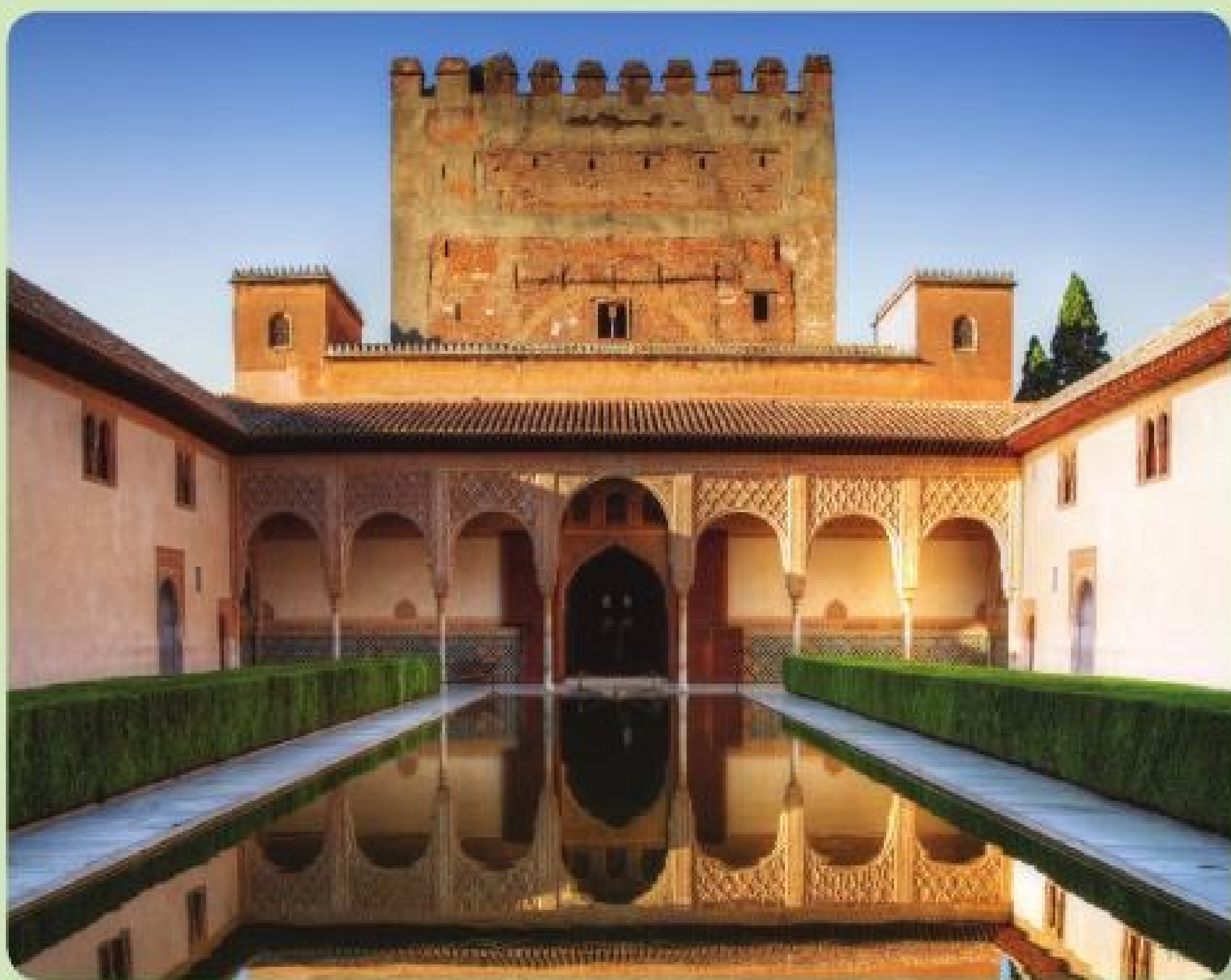
- Translação, rotação e simetria
- Congruência de triângulos
- Casos de congruência entre triângulos

Detalhe da geodésica montada em 1967 na Exposição Mundial de Montreau, Canadá.

Conversa Inicial

Quais são as características das figuras planas que nos permitem relacionar suas medidas, calcular suas áreas e resolver problemas onde elas estão envolvidas? A resposta a esta pergunta não se relaciona apenas às medidas dos lados e dos ângulos destas. Outras variáveis estão envolvidas quando discutimos as características de figuras planas.

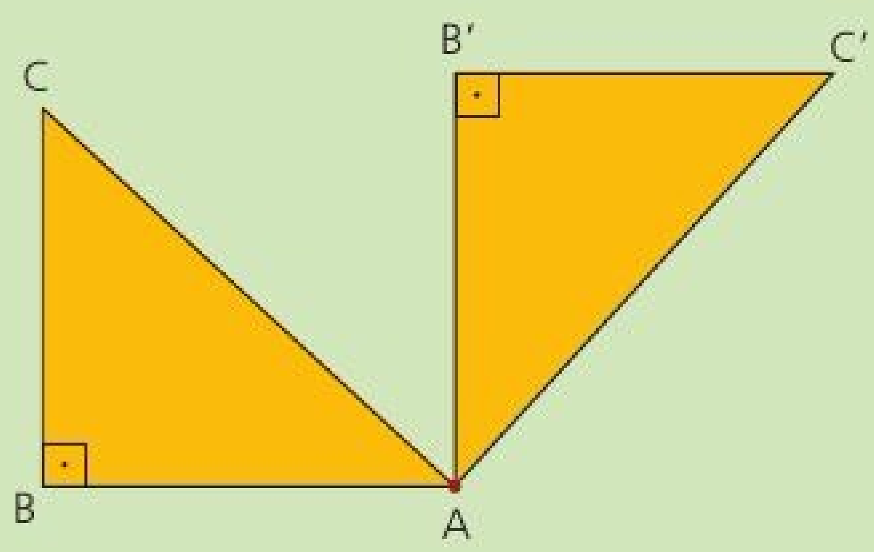
Questões como semelhança e congruência, além de transformações como translações, rotações e reflexões de uma figura, têm grande importância na solução de problemas geométricos.



Auris/Dreamstime

A reflexão ou simetria é uma transformação que uma figura pode sofrer. Observe a reflexão da fachada interna do Palácio de Alhambra, Granada, Espanha, 2010.

O estudo das transformações que as figuras planas podem sofrer, aliado à compreensão das características geométricas destas figuras, nos permite estudá-las com mais profundidade e, principalmente, estabelecer relações entre as suas medidas.



O triângulo ABC sofreu uma rotação de 90º em torno do ponto A, gerando o triângulo AB'C'.

Vamos dedicar este capítulo a aprender como identificar triângulos congruentes. Eles podem estar nas mais diversas posições dentro de uma figura geométrica em que precisamos realizar cálculos de dimensões. Vamos procurar maneiras de estabelecer relações entre as medidas de seus lados e de seus ângulos.

Translação, Rotação e Simetria

Para que o motorista de um veículo que esteja trafegando à frente de uma ambulância possa ler em seu retrovisor palavras como AMBULÂNCIA, EMERGÊNCIA e BOMBEIROS, elas são escritas de forma espelhada nesses veículos.

Sérgio Vale/Agência de Notícias do Acre

As palavras AMBULÂNCIA está escrita de forma espelhada

Se considerarmos a palavra **AMBULÂNCIA** como uma figura, dizemos que, ao ser escrita de forma espelhada, temos uma figura que equivale a uma transformação da figura inicial.

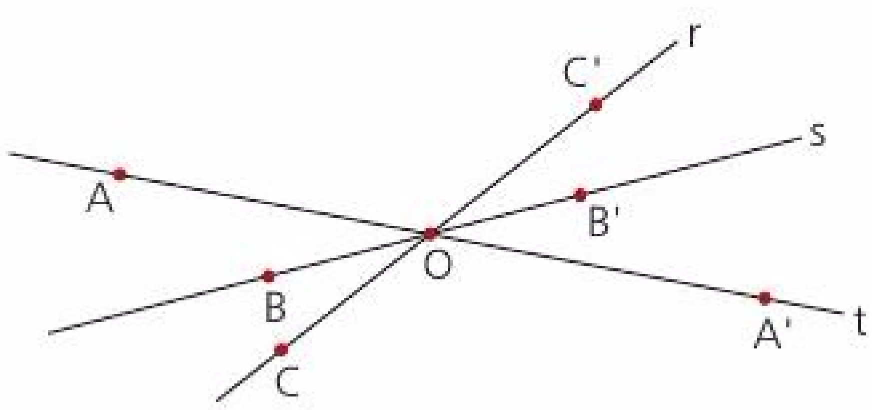
Isometrias são transformações geométricas que não alteram o tamanho da figura, mas alteram a sua posição. Significado da palavra: ISO = igual e METRIA = medida.

AMBULÂNCIA | **AIϽNÂJUBMA**

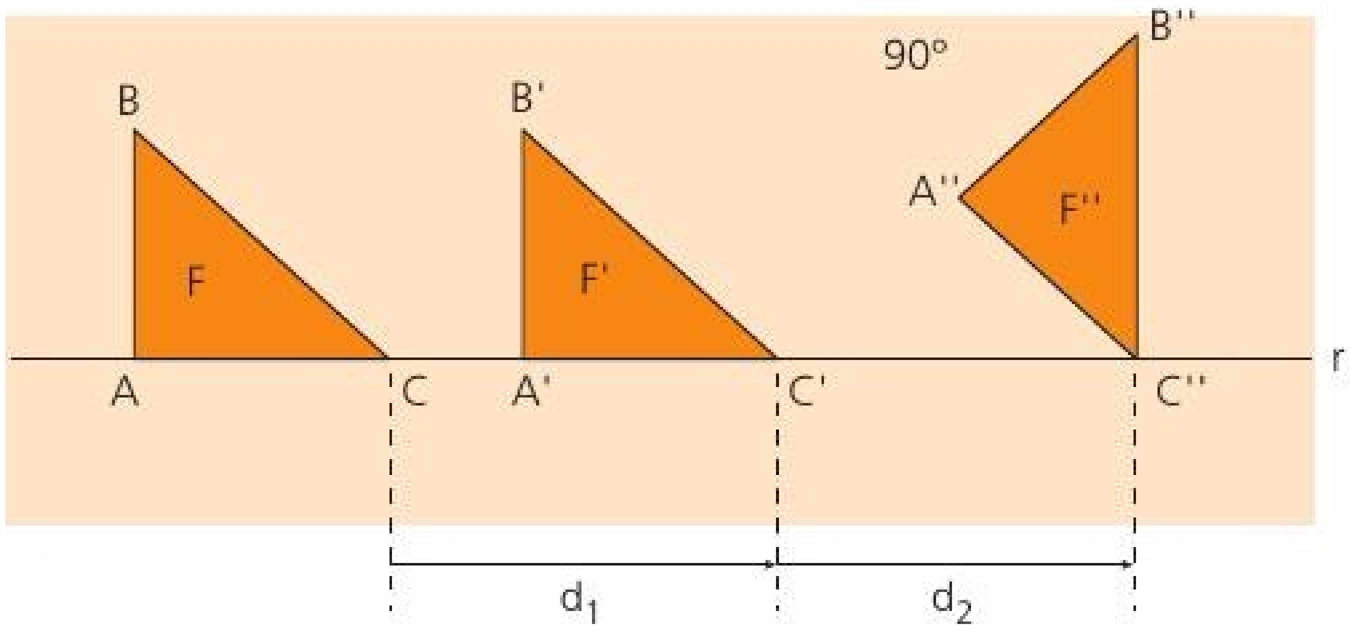
Transformação

Transformações ou Isometrias

Se a cada ponto de um plano fizermos, por meio de qualquer processo, corresponder um outro, obteremos uma transformação desse ponto. Observe, como exemplo, o que ocorre com os pontos A, B e C, pertencentes, respectivamente, às retas **t**, **s** e **r**, que se cruzam no ponto O. Se marcarmos em cada uma das retas os pontos que, assim como A, B e C, mantêm a mesma distância de O, obteremos A', B' e C', que são simétricos a A, B e C, em relação a O. Neste caso, obtivemos transformações por simetria.



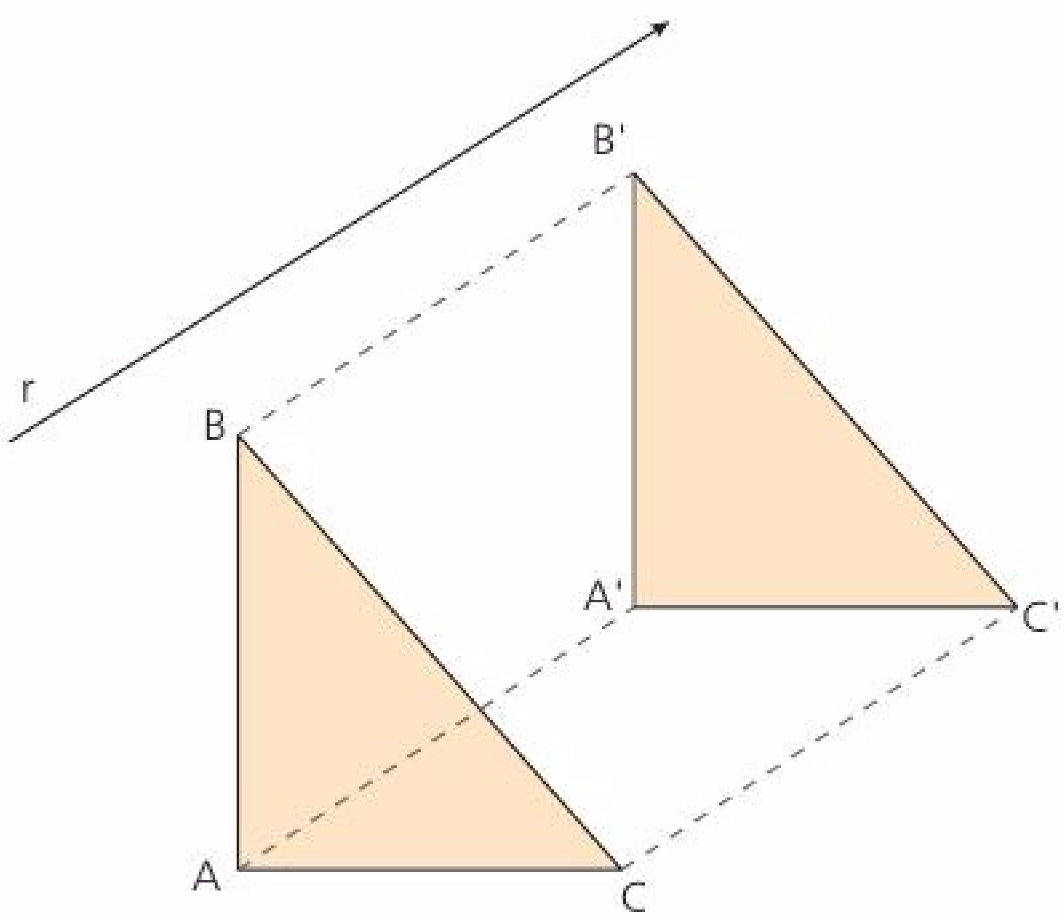
Observe agora os vários pontos que formam o triângulo retângulo isósceles **ABC** da figura **F**. Se deslocarmos o ponto **C** a uma distância $\mathbf{d_1}$ sobre a reta **r**, todos os demais pontos também se deslocarão e obteremos o triângulo **A'B'C'** da figura **F'**, que é uma **transformação por translação** da figura F. Se deslocarmos agora o ponto **C'** a uma distância $\mathbf{d_2}$ sobre a reta **r** e fizermos uma rotação de 45º em torno de **C''**, obteremos o triângulo **A"B"C"** da figura **F"**, que é uma **transformação por translação e rotação** de **F'**.



É importante notar que os lados e os ângulos internos dos três triângulos obtidos permanecem os mesmos após as transformações.

Translações

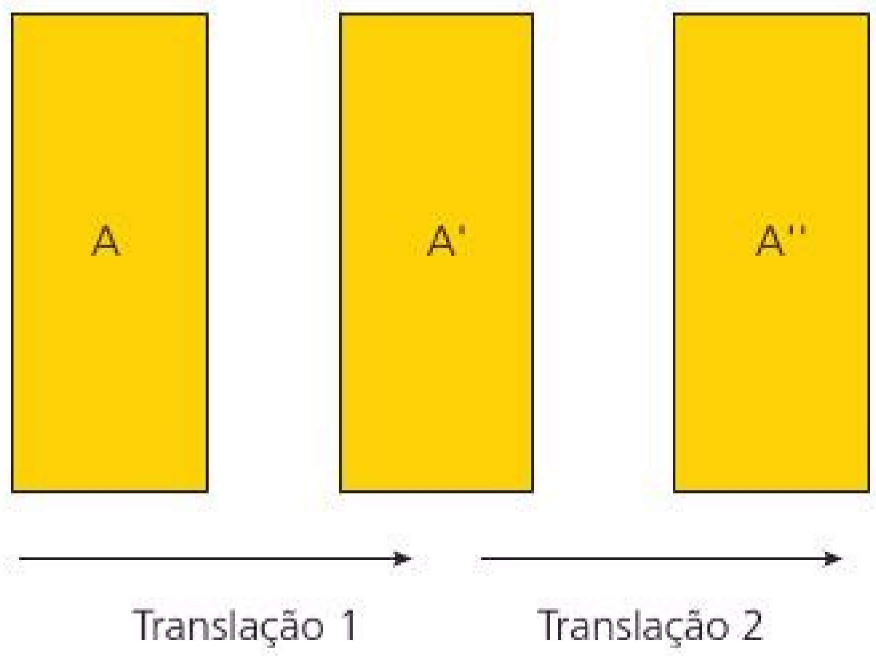
Observe o deslocamento do triângulo ABC, de tal forma que $\overline{BB'}$, $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$ sejam paralelos à reta **r**, na qual indicamos o sentido do movimento.



O triângulo ABC e o triângulo A'B'C' são iguais, têm as mesmas medidas de lados e de ângulos internos. Nesse caso, dizemos que houve uma transformação por simples translação de ABC.

Translações sucessivas

Vamos aplicar agora duas translações seguidas ou sucessivas a uma figura A. Primeiramente, na translação 1, obtemos A'. Em seguida, a partir da translação 2, obtemos A''.



Nas translações sucessivas, podemos dizer que as figuras obtidas são todas iguais, em medidas e em forma, à figura original.

Atividades

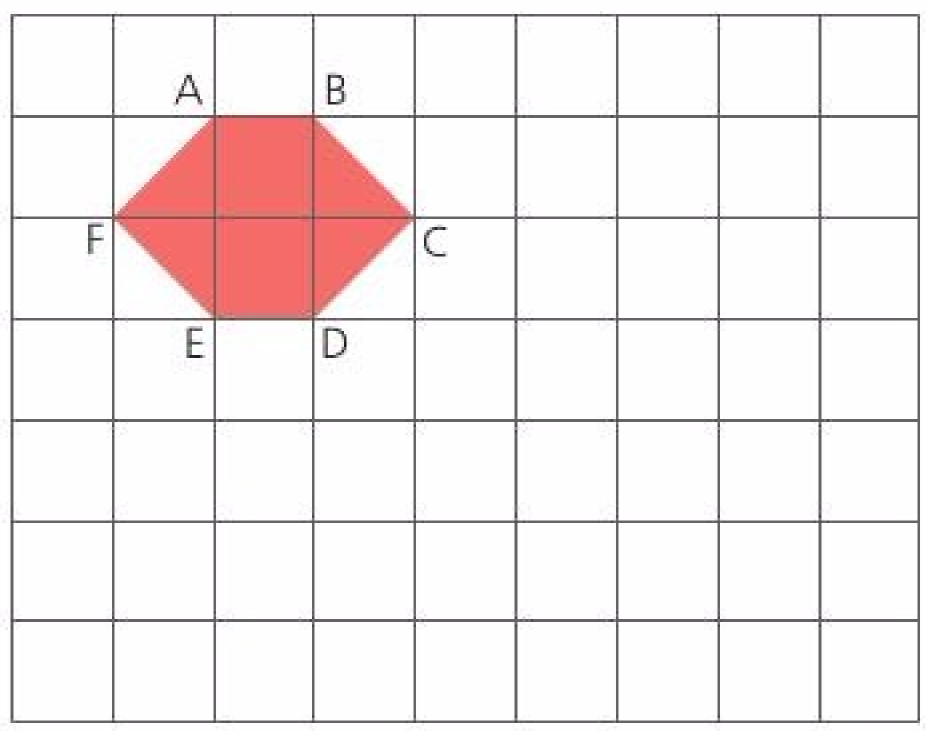
Interpretar posições

1. Copie a malha quadriculada da figura em seu caderno e obtenha um hexágono A'B'C'D'E'F' fazendo as seguintes translações de ABCDEF:

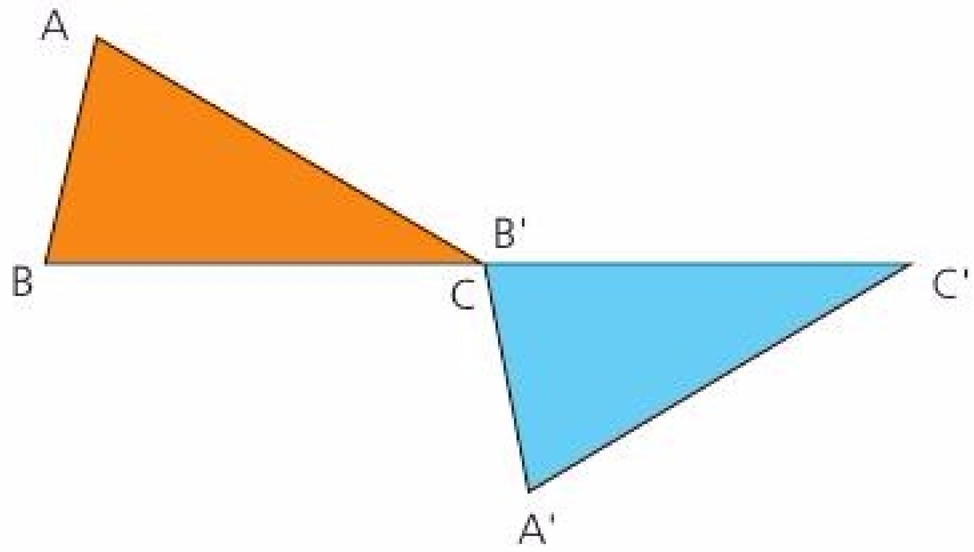
– quatro unidades para a direita sobre a reta suporte de $\overline{ED}$;

– uma unidade para baixo, paralelamente a uma reta perpendicular a $\overline{ED}$.

Construção no caderno



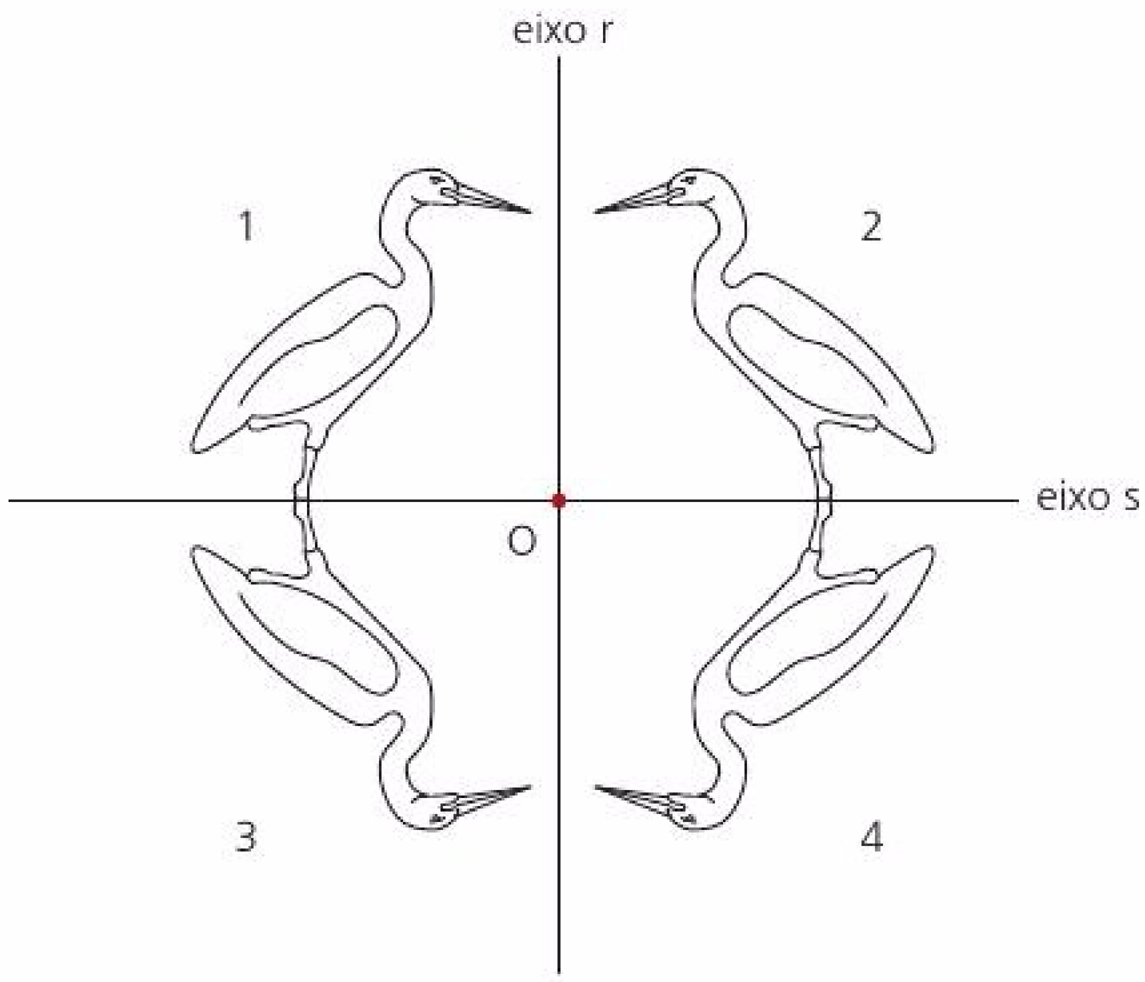
2. Descreva a translação e a rotação que permitem a obtenção do triângulo A'B'C' da figura abaixo, a partir do triângulo ABC. Resposta pessoal.



Simetria

Podemos definir simetria como a correspondência entre pontos, em relação a um ponto central fixo, a um eixo ou a um plano. Assim, a cada ponto de uma figura, corresponde outro, a igual distância, no sentido contrário em relação a um ponto central, um eixo ou um plano.

Observe atentamente a figura a seguir.

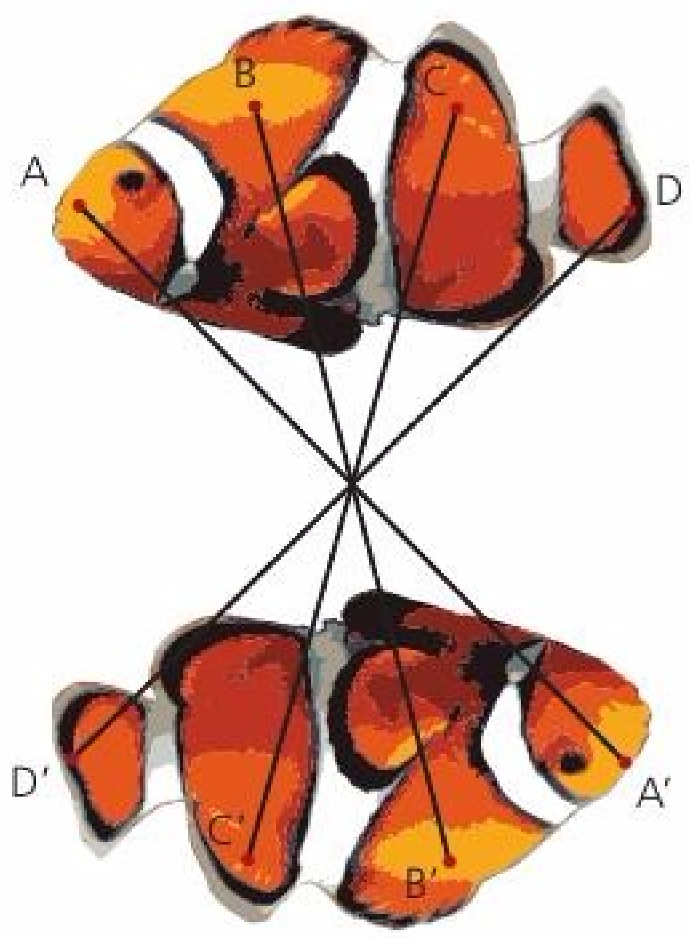


Algumas figuras possuem apenas um eixo de simetria, como por exemplo, o rosto humano. Outas possuem vários, como o hexágono regular. E algumas não apresentam nenhum e são chamadas de assimétricas.

As figuras 1 e 2 são simétricas em relação ao **eixo r** e o mesmo acontece com as figuras 3 e 4. Já as figuras 1 e 3, são simétricas em relação ao **eixo s** e o mesmo ocorre com 2 e 4. Se considerarmos as figuras 1 e 4, podemos dizer que elas são simétricas em relação ao ponto O, assim como as figuras 2 e 3.

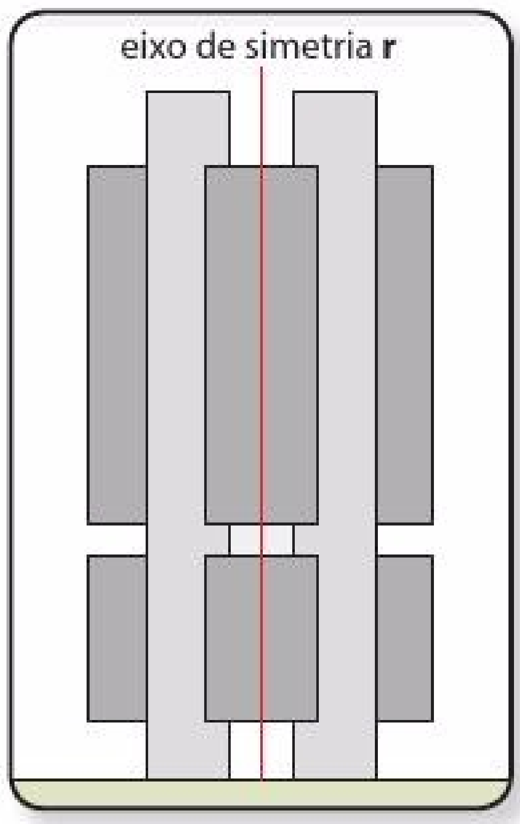
Veja outros exemplos de simetria:

- As figuras dos dois peixes são simétricas em relação ao ponto **O**. Neste caso dizemos que elas possuem **simetria central**.



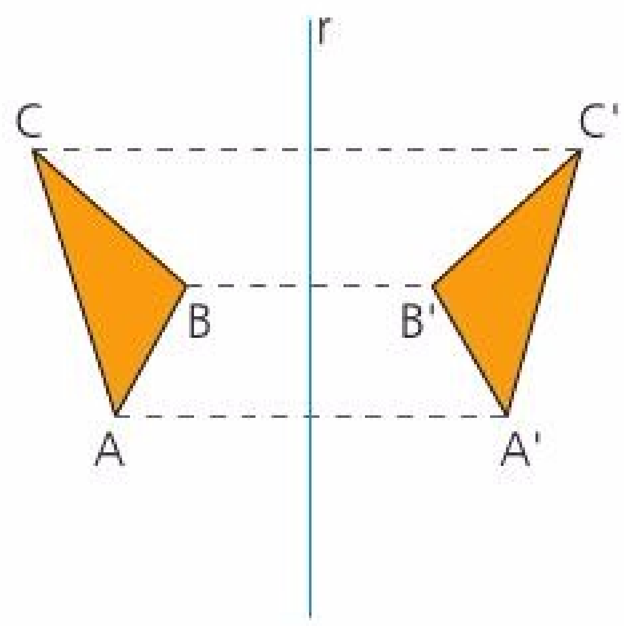
simetria central

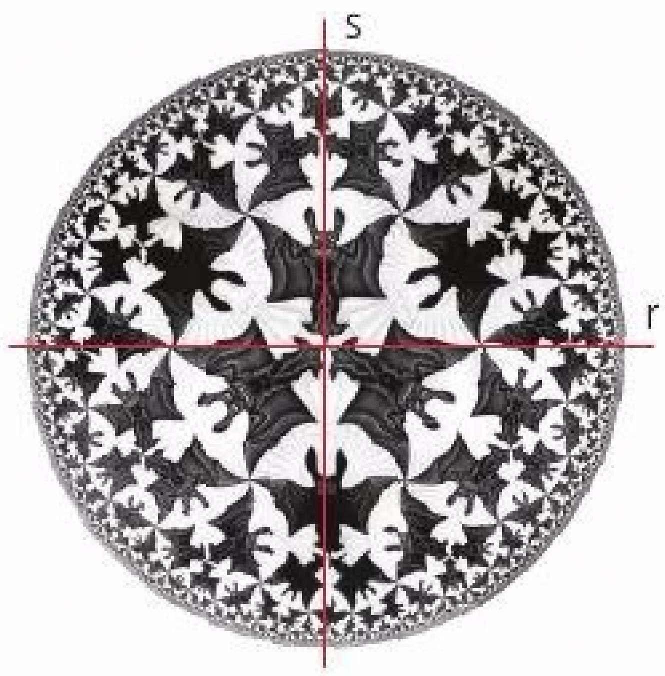
- O desenho da fachada do edifício do Banco Central em Brasília, visto de frente, é simétrico em relação ao eixo **r**. Quando existe um eixo de simetria, dizemos que ocorre uma **simetria axial**.



- Os triângulos ABC e A'B'C' são simétricos em relação ao eixo **r** e a gravura do artista gráfico holandês Maurits C. Escher (1898-1972) é simétrica em relação aos eixos **r** e **s** que passam pelo centro do círculo.

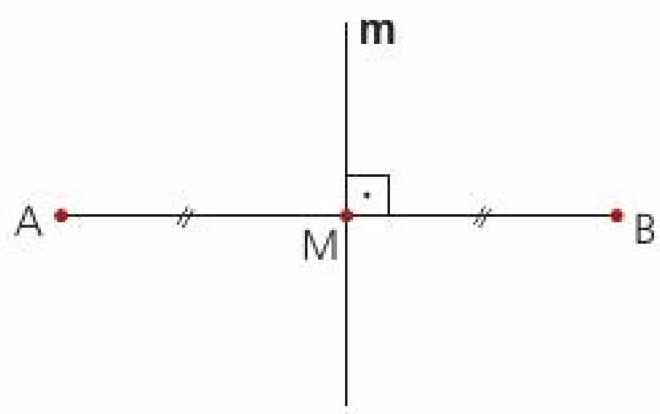
Mautis Cornelis Escher foi um artista gráfico conhecido pelas suas xilogravuras, litografias e meio-tons, que tendem a representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses – padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes. Ele também era conhecido pela execução de transformações geométricas (isometrias) nas suas obras.

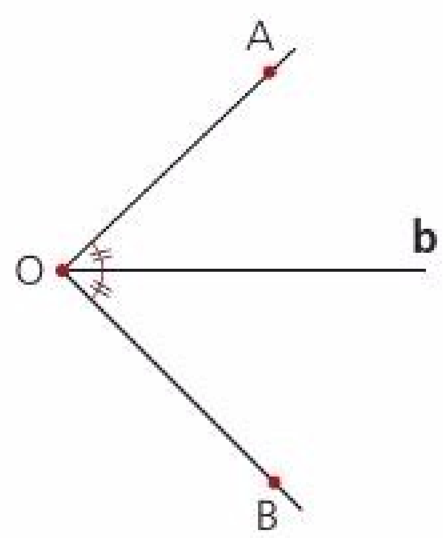




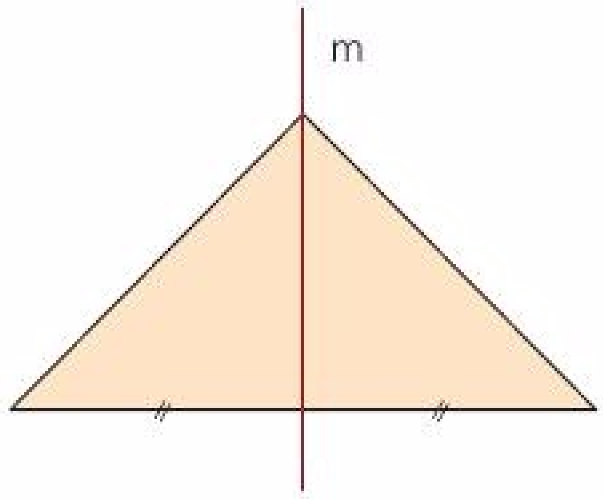
A identificação das simetrias existentes numa figura é importante para a resolução de diversos problemas geométricos. Algumas importantes figuras geométricas admitem um ou mais eixos de simetria. Por exemplo:

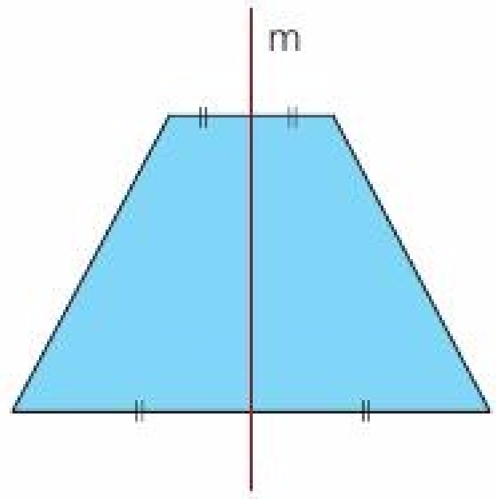
- O segmento $\overline{AB}$ tem como eixo de simetria a mediatriz **m** que o divide em dois segmentos iguais ($\overline{AM}$ e $\overline{MB}$) e o ângulo AÔB tem como eixo de simetria a bissetriz **b**:



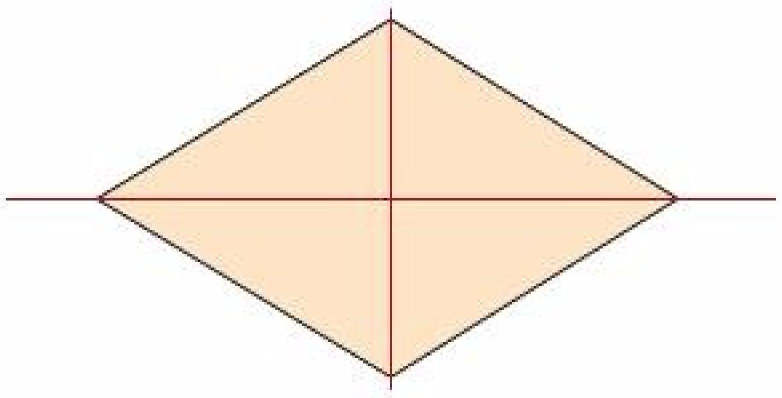


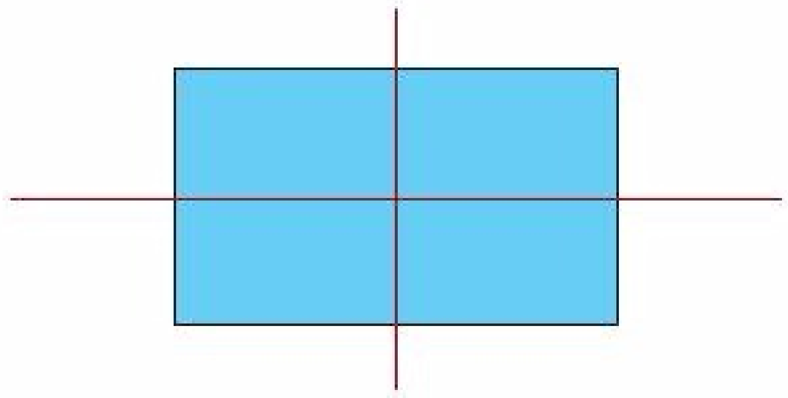
- O triângulo isósceles e o trapézio isósceles também admitem um eixo de simetria. Nos dois casos, o eixo é a mediatriz **m** de suas bases:



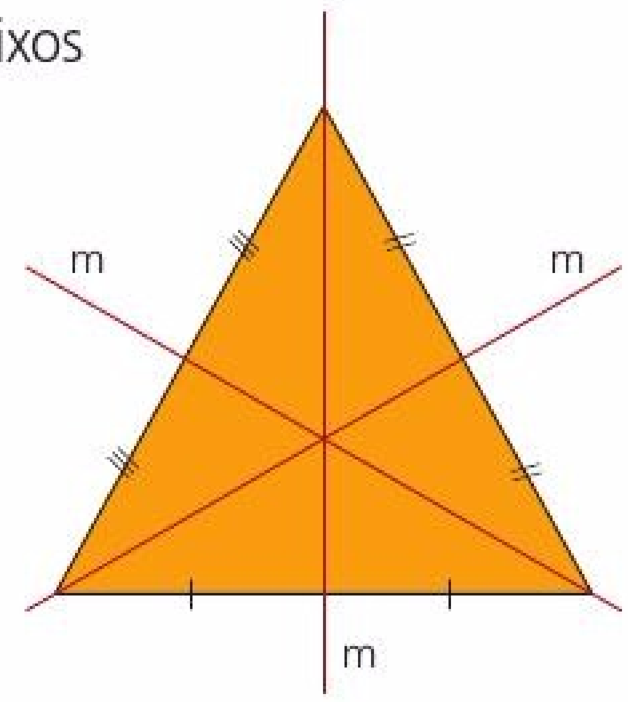


- O losango e o retângulo possuem dois eixos de simetria. No losango, os eixos são as retas suportes das diagonais e no retângulo as mediatrizes dos lados:





- O triângulo equilátero tem três eixos de simetria. Cada um deles é a mediatriz **m** dos lados do triângulo:



Atividades

Identificar figuras

3. Quantos eixos de simetria possui um quadrado? Justifique sua resposta com um desenho em seu caderno. 4 eixos de simetria, duas mediatrizes e duas diagonais.

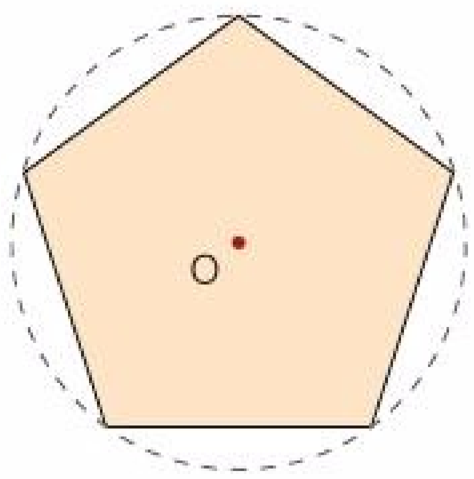
4. Num triângulo isósceles ABC, a altura $\overline{CD}$, relativa à base $\overline{AB}$, está sobre um eixo de simetria do triângulo. Sabendo-se que um dos lados mede 4 cm, que metade da base mede 3,4 cm e que um dos ângulos da base mede 40°, desenhe o triângulo em seu caderno e determine:

a) As medidas dos ângulos internos do triângulo ABC. 40°, 40° e 100°

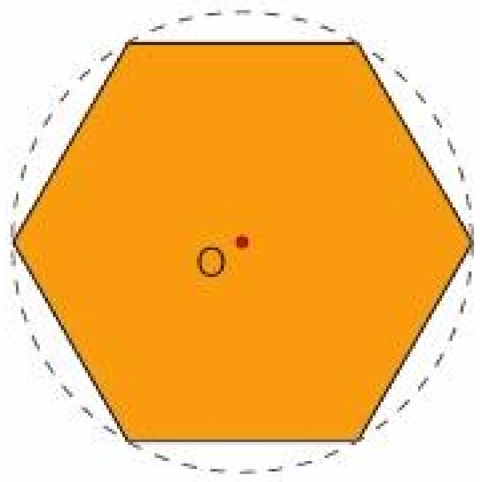
b) As medidas dos lados do triângulo ABC. 4 cm, 4 cm e 6,8 cm

5. Um polígono regular de **n** lados pode sempre ser inscrito numa circunferência de centro **O**. Indique quantos eixos de simetrias possuem os seguintes polígonos regulares. Copie cada um deles em seu caderno e desenhe os eixos de simetria.

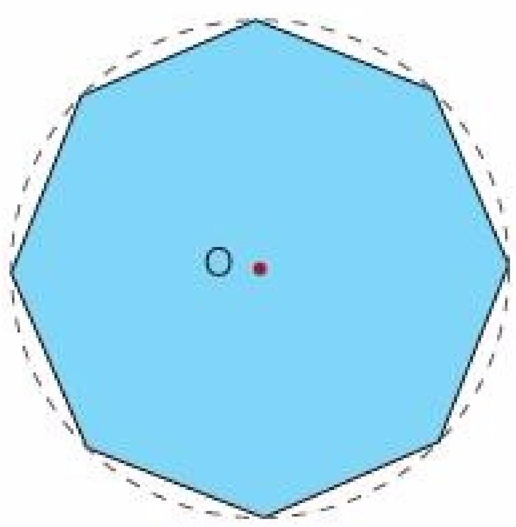
a) pentágono regular 5 mediatrizes



b) hexágono regular 3 diagonais e 3 mediatrizes



c) octógono regular 4 diagonais e 4 mediatrizes

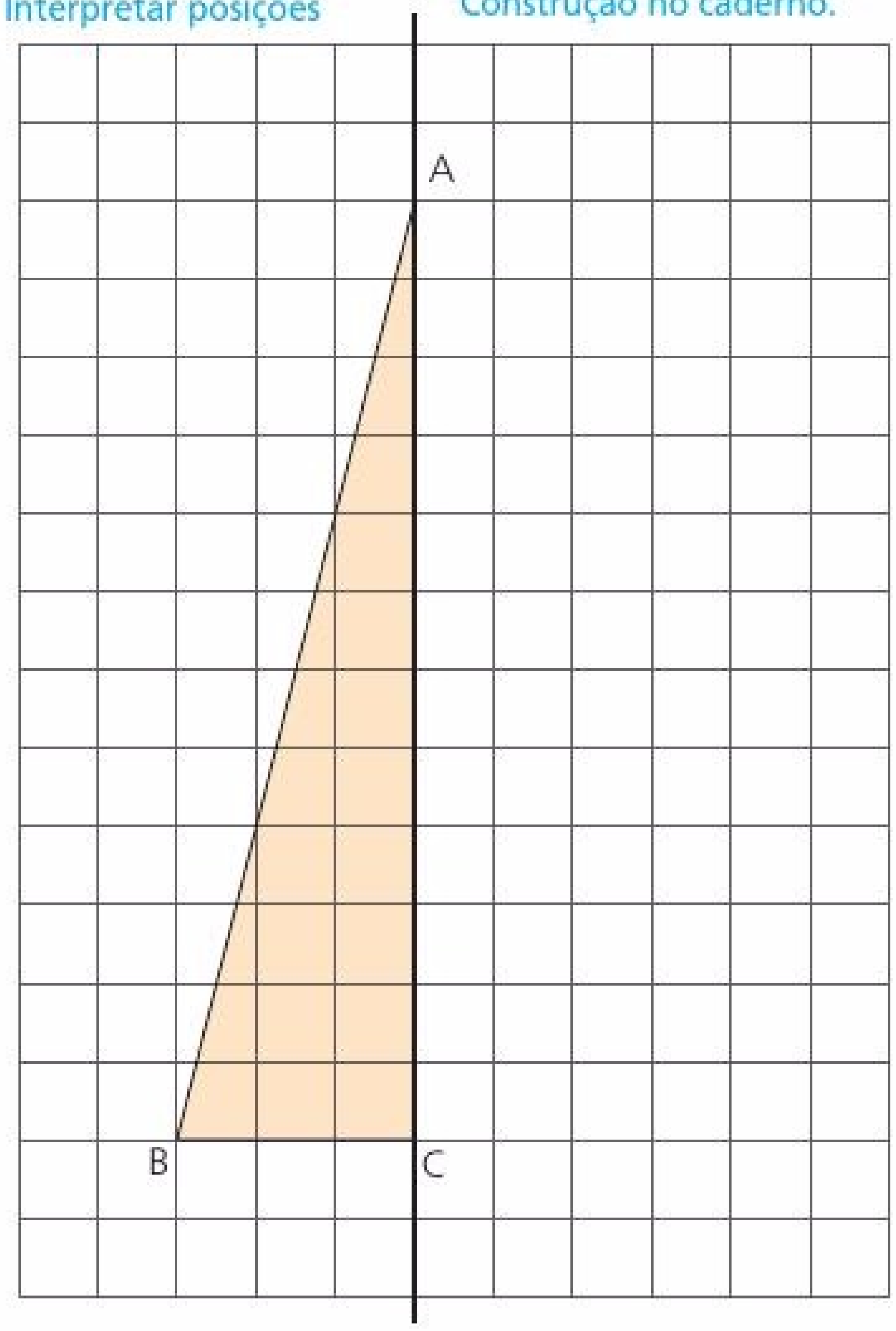


6. Observando o exercícios anterior, que relação você pode estabelecer entre o número de eixos de simetria e a forma do polígono?
Nos polígonos regulares, o número de eixos de simetria é igual ao número de lados do polígono.

7. Copie a malha quadriculada da figura em seu caderno, desenhe o triângulo ABC e, em seguida, o simétrico do triângulo ABC, em relação à reta suporte do lado $\overline{AC}$.

Interpretar posições

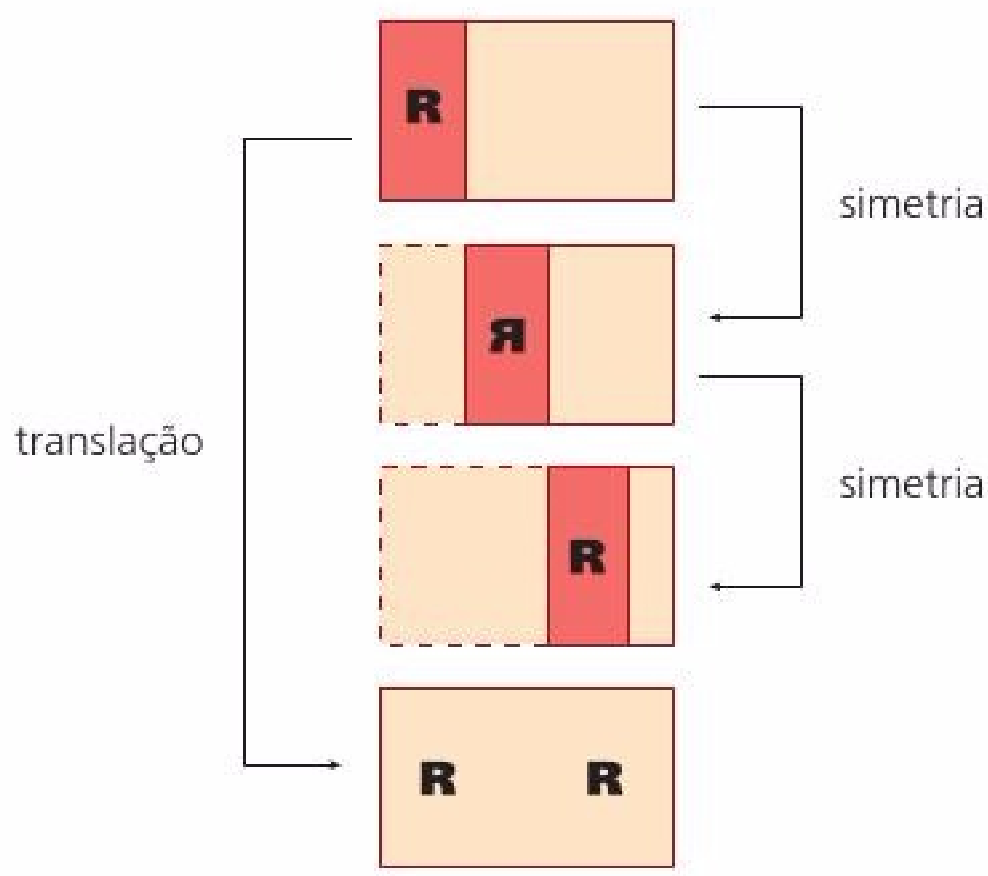
Construção no caderno.



Translação e simetria

Duas simetrias de eixos paralelos são equivalentes a uma translação. A figura ao lado, representa a situação em que marcamos a letra **R** numa folha de papel e realizamos duas dobras seguidas com eixos paralelos.

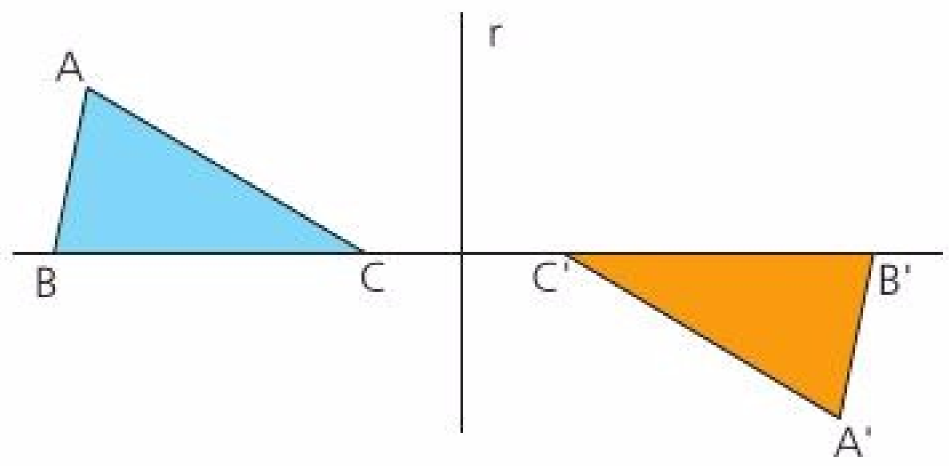
Note que as duas simetrias consecutivas com eixos paralelos correspondem a uma translação da letra **R**.



Atividades

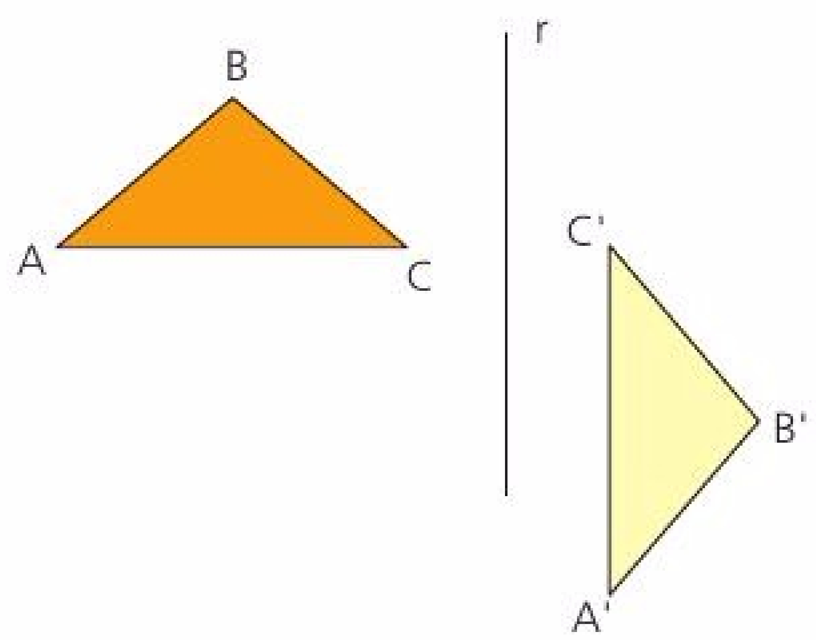
Compreender transformações

8. Sabendo-se que C e C′ são equidistantes da reta **r**, descreva as duas simetrias utilizadas para encontrarmos o triângulo A′B′C′. Resposta pessoal.

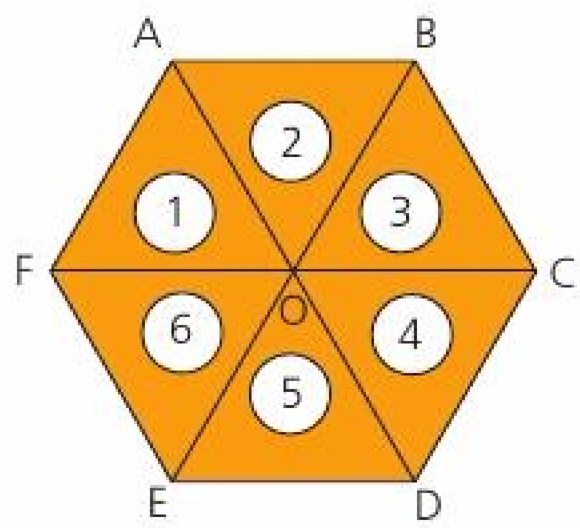


As atividades desta página pedem a descrição das situações propostas. Converse com os alunos sobre o significado de descrever, eles devem explicar minuciosamente as suas resoluções para cada situação.

9. Se os pontos C e C′ são simétricos em relação a **r**, descreva as transformações que darão origem à figura A′′B′′C′′. Processo análogo à atividade 6.



10. Os triângulos equiláteros 1, 2, 3, 4, 5 e 6 compõem o hexágono regular ABCDEF. Analise a figura e responda as perguntas a seguir.

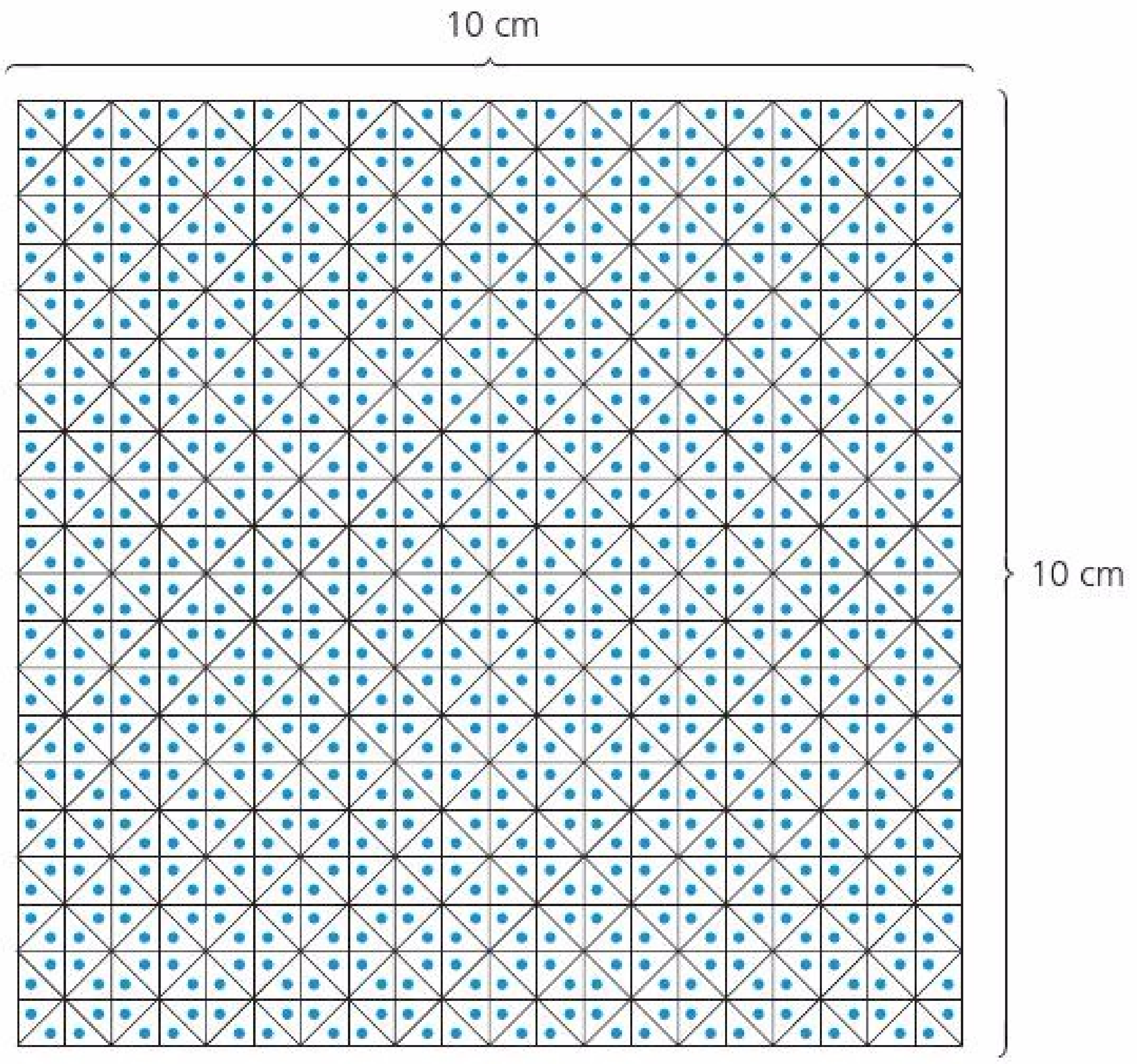


a) Qual rotação deve ser aplicada ao triângulo 1 para se obter o triângulo 2? a rotação sobre o eixo $\overleftrightarrow{AD}$

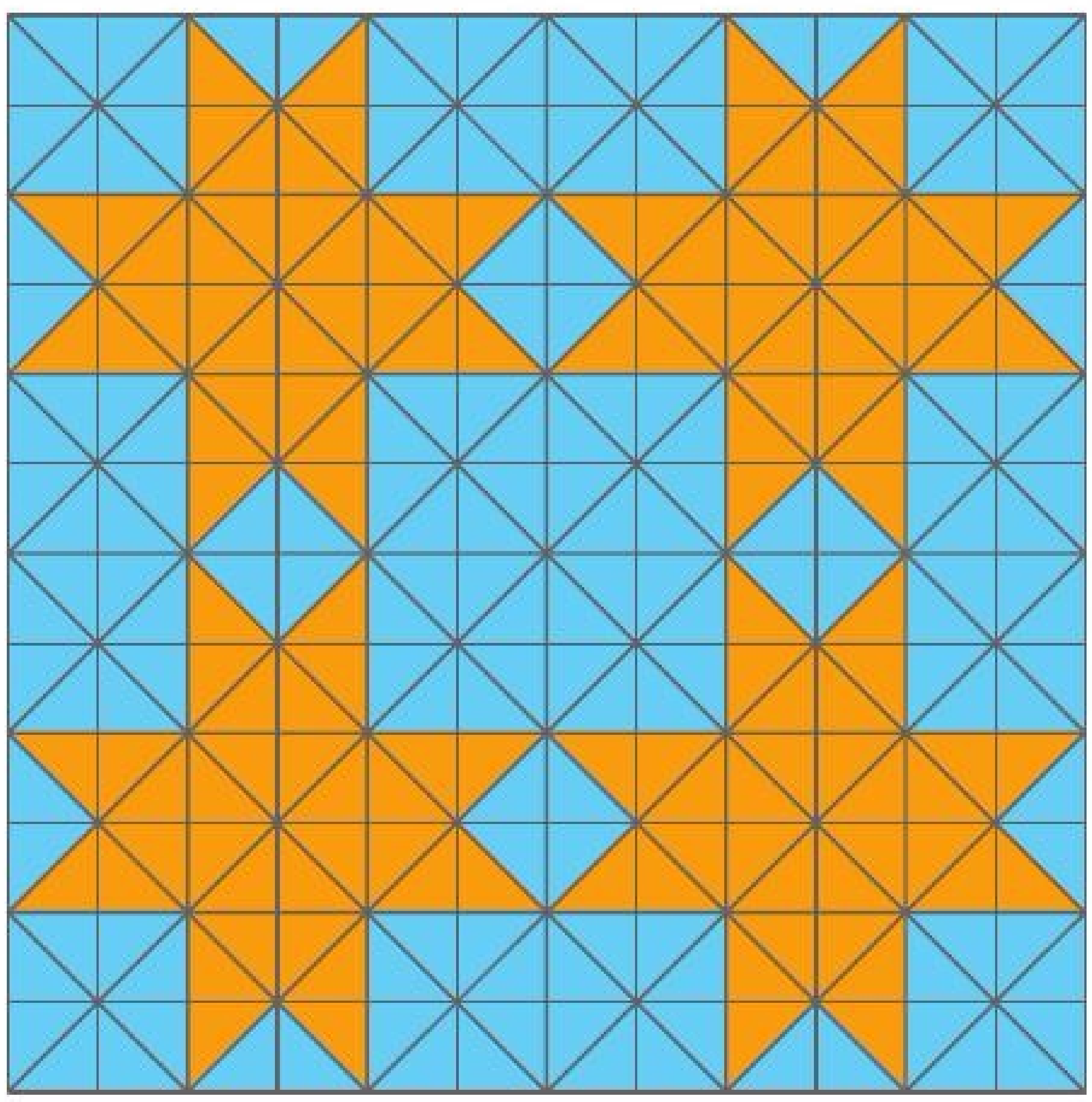
b) Qual é o eixo de simetria entre os triângulos 3 e 6? E entre 3 e 4? $\overline{AD}$ (entre 3 e 6) $\overline{CF}$ (entre 3 e 4)

c) Quais pares de triângulos têm simetria central em relação ao ponto O? 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6

11. Copie cuidadosamente, em seu caderno, a malha quadriculada de 10 cm de lado e 10 cm de altura, representada na figura abaixo, desconsiderando os pontinhos azuis. A seguir, utilizando dois lápis coloridos, reproduza o mosaico sugerido pela figura.
Produção pessoal



Mosaico

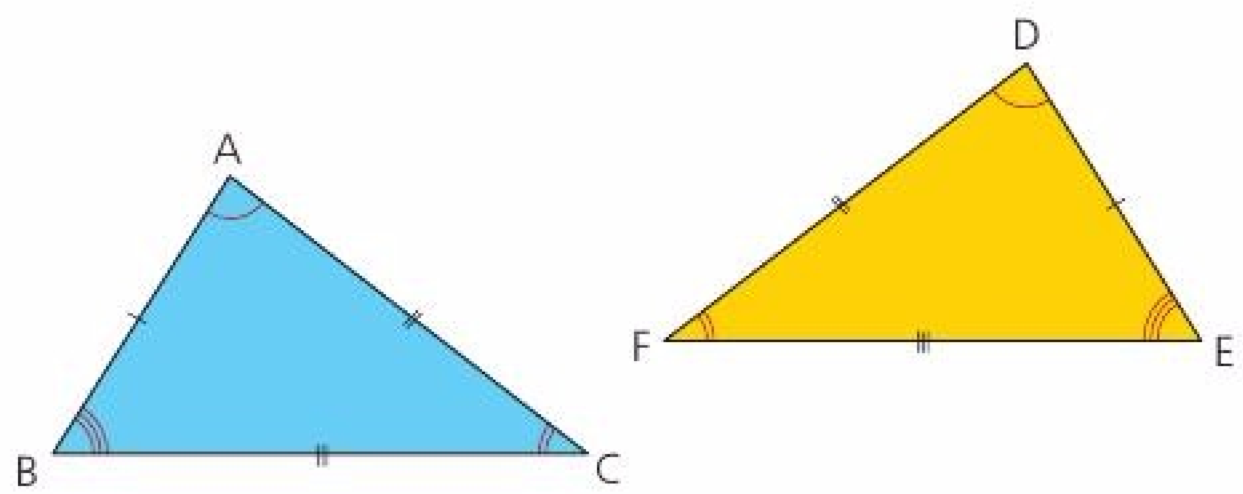


Congruência de triângulos

Já conhecemos as principais características dos triângulos, bem como as relações entre seus lados e seus ângulos internos. Vamos, agora, verificar como podemos utilizar essas relações para estabelecer as condições em que dois triângulos são **congruentes**, independentemente de suas posições no plano.

Dizemos que dois triângulos são **congruentes** quando tiverem lados correspondentes e com as mesmas medidas e ângulos correspondentes com as mesmas medidas.

Observe, por exemplo, os triângulos ABC e DEF da figura a seguir.



Desenhe no quadro os triângulos ao lado e discuta sobre o significado de congruência e suas características.

Os triângulos ABC e DEF têm ângulos e lados correspondentes iguais. Por essa razão, dizemos que eles são congruentes e indicamos **ΔABC** $\equiv$ **ΔDEF**, onde o símbolo $\equiv$ significa "**congruente**". Ainda que tenha o mesmo sentido de "**igual**", para grandezas geométricas é mais correto utilizarmos o termo "**congruente**".

Quando, por exemplo, dois segmentos são congruentes, eles têm medidas iguais. Aí sim, é mais correto utilizarmos o termo "iguais", pois as medidas são grandezas numéricas.

Para indicar dois lados congruentes, indicamos ambos com o mesmo sinal e fazemos o mesmo para indicar que dois ângulos são congruentes.

Dizemos que dois lados de dois triângulos congruentes são c**orrespondentes** se eles tiverem a mesma medida e a mesma posição relativa em cada triângulo. Também chamamos de **ângulos correspondentes** aqueles que têm a mesma medida. Nos dois triângulos da figura verificamos que:

- $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$; $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ são pares de lados **correspondentes**;
- $\hat{A}$ e $\hat{D}$; $\hat{B}$ e $\hat{E}$; $\hat{C}$ e $\hat{F}$ são pares de ângulos **correspondentes**.

Note que nos dois triângulos os pares de lados congruentes são opostos aos pares de ângulos congruentes. Assim:

- $\overline{AB}$ é oposto a $\hat{C}$ e $\overline{DE}$ é oposto a $\hat{F}$;
- $\overline{BC}$ é oposto a $\hat{A}$ e $\overline{EF}$ é oposto a $\hat{D}$;
- $\overline{AC}$ é oposto a $\hat{B}$ e $\overline{DF}$ é oposto a $\hat{E}$.

Podemos, então, estabelecer uma condição geral para os lados e os ângulos de dois triângulos congruentes a partir dessas características.

Se dois triângulos são congruentes,

- **os lados opostos a ângulos congruentes são congruentes**;
- **os ângulos opostos a lados congruentes são congruentes**.

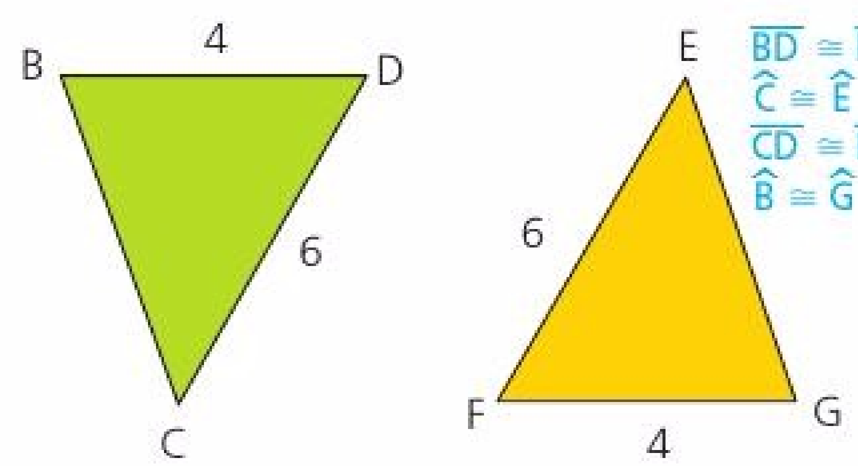
Atividades

É interessante que você leia os enunciados com seus alunos e desenhe as figuras no quadro.

Interpretar figuras

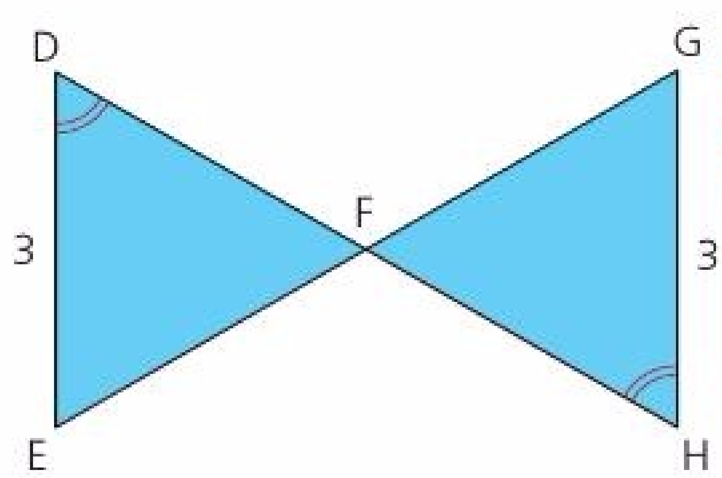
12. Indique os lados e os ângulos congruentes em cada par de triângulos congruentes a seguir.

a)



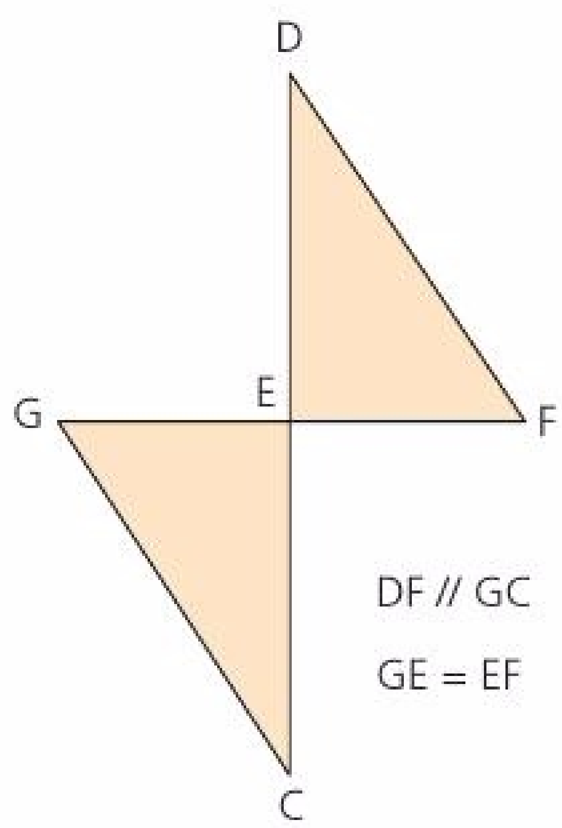
$\overline{BD} \cong \overline{FG}$
$\hat{C} \cong \hat{E}$
$\overline{CD} \cong \overline{EF}$
$\hat{B} \cong \hat{G}$

b)



$\overline{DE} \cong \overline{GH}$
$\hat{F} \cong \hat{F}$
$\hat{D} \cong \hat{H}$
$\overline{EF} \cong \overline{FH}$

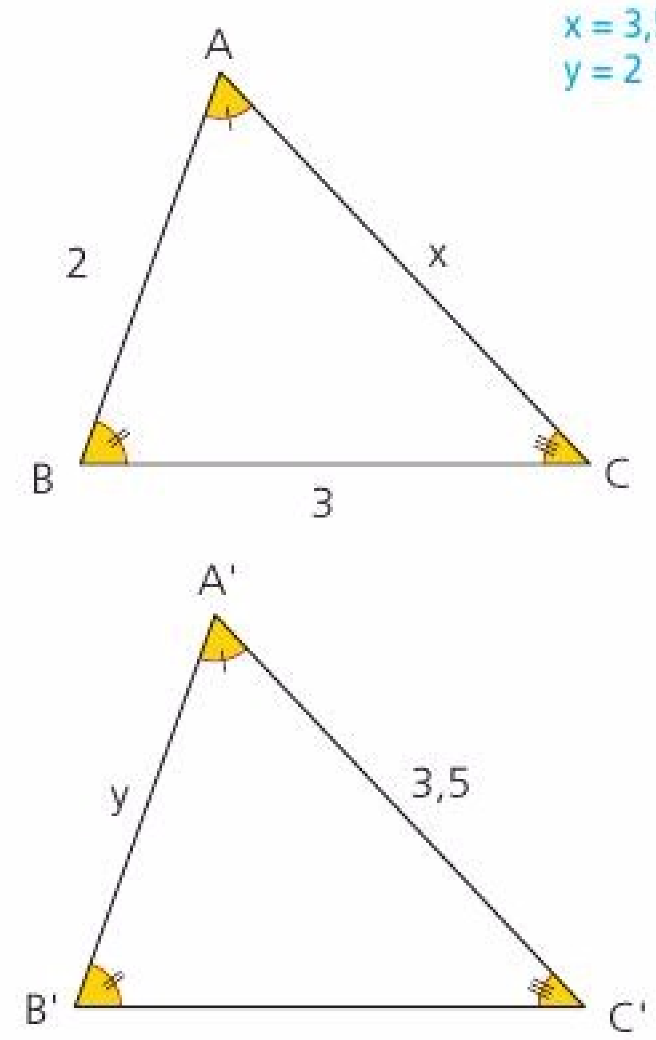
c)



$\hat{E} \cong \hat{E}$
$\overline{DF} \cong \overline{CG}$
$\overline{GE} \cong \overline{EF}$
$\hat{C} \cong \hat{D}$

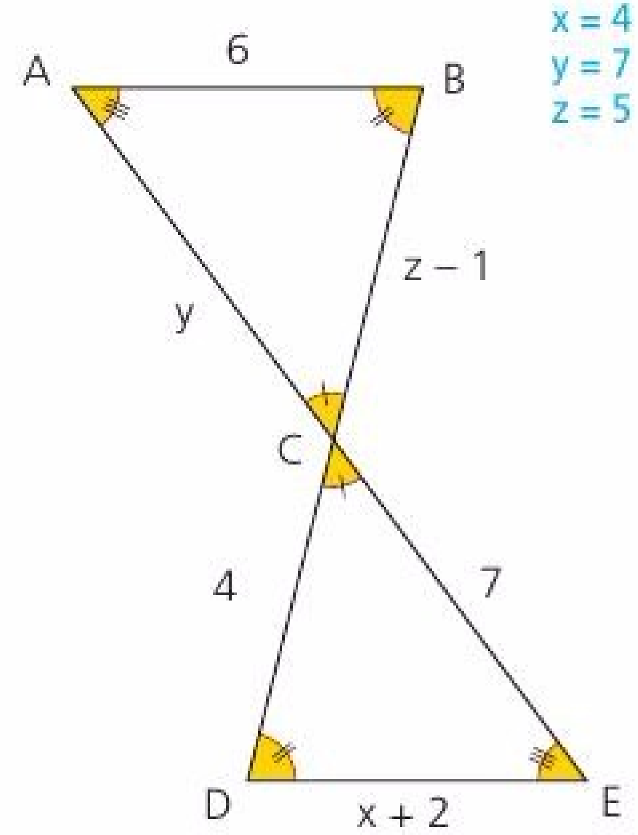
13. Calcule **x**, **y** e **z** para cada par de triângulos congruentes a seguir, onde os ângulos e lados congruentes estão indicados.

a)



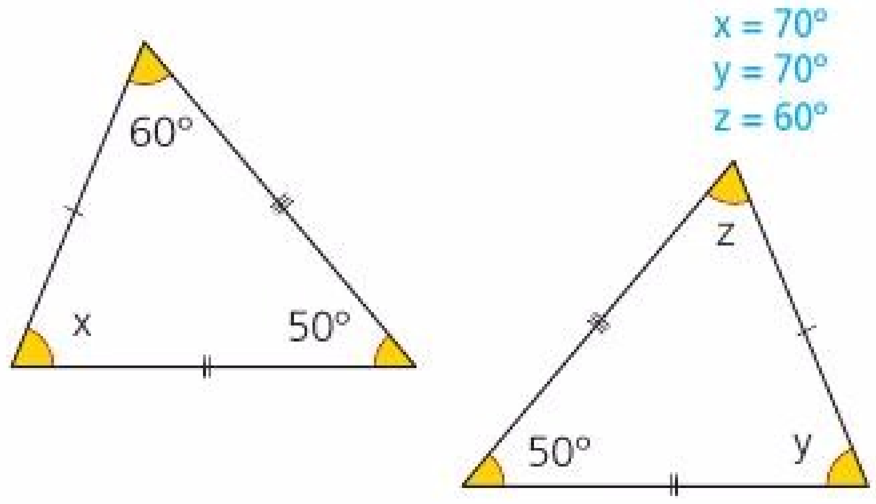
x = 3,5
y = 2

b)



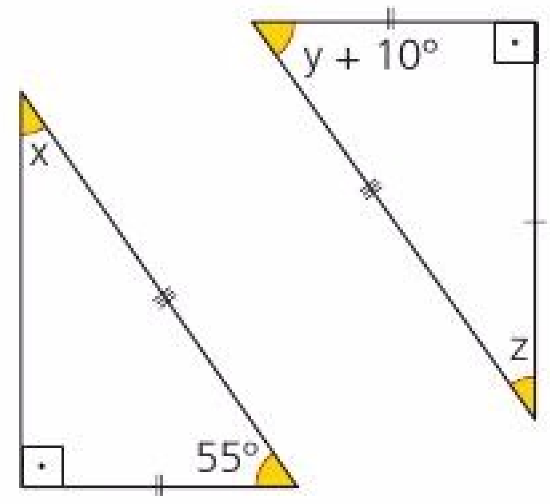
x = 4
y = 7
z = 5

c)



$x = 70°$
$y = 70°$
$z = 60°$

d)



$x = 35°$
$y = 45°$
$z = 35°$

Casos de congruência entre triângulos

Já sabemos que dois triângulos são congruentes quando possuírem:

- os três lados respectivamente congruentes;
- os três ângulos internos respectivamente congruentes.

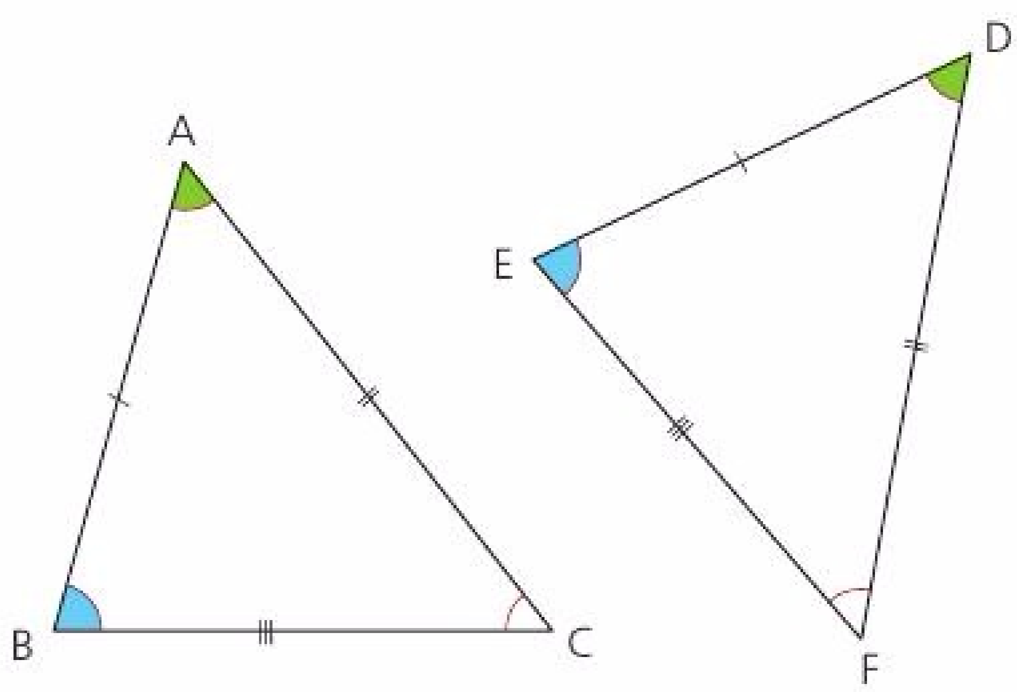
Para verificarmos a congruência entre dois triângulos, precisamos encontrar um conjunto de condições mínimas que nos permitam concluir que os três lados e os três ângulos internos são respectivamente iguais. Essas condições mínimas podem sempre ser estabelecidas a partir de um lado e outros dois elementos quaisquer do triângulo.

Assim, teremos quatro casos possíveis para o estabelecimento da congruência de dois triângulos, que estudaremos a seguir.

Para escrever a congruência existente entre dois triângulos, devemos escrever os vértices correspondentes em posições correspondentes. Veja o exemplo dado observando os triângulos do 1º lado de congruência: $\triangle ACB \equiv \triangle DFE$

1º Caso: LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos ABC e DEF têm os lados correspondentes congruentes, então eles são congruentes. Isso significa que os ângulos correspondentes nos dois triângulos também serão congruentes.

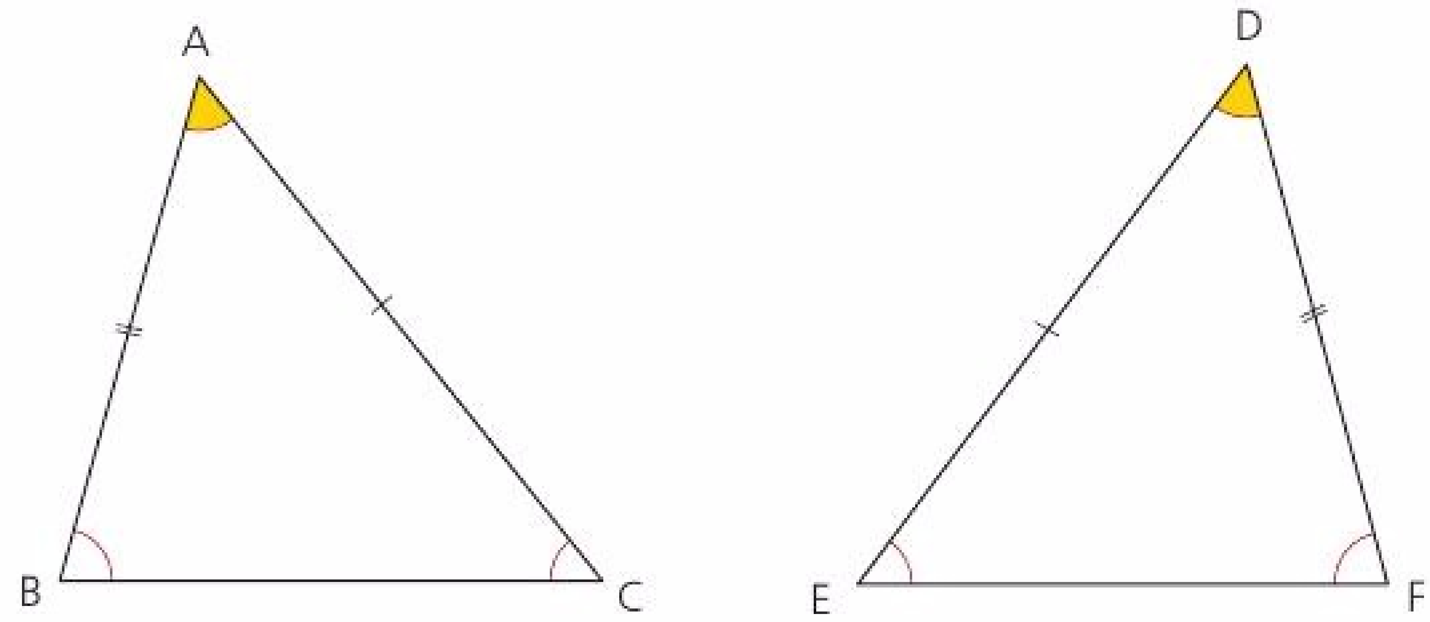


$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF}\end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF \rightarrow \hat{A} \equiv \hat{D};\ \hat{B} \equiv \hat{E} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{F}$$

2º Caso: LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos ABC e DEF têm dois lados correspondentes congruentes e os ângulos compreendidos por esses lados também são congruentes, então eles serão congruentes.

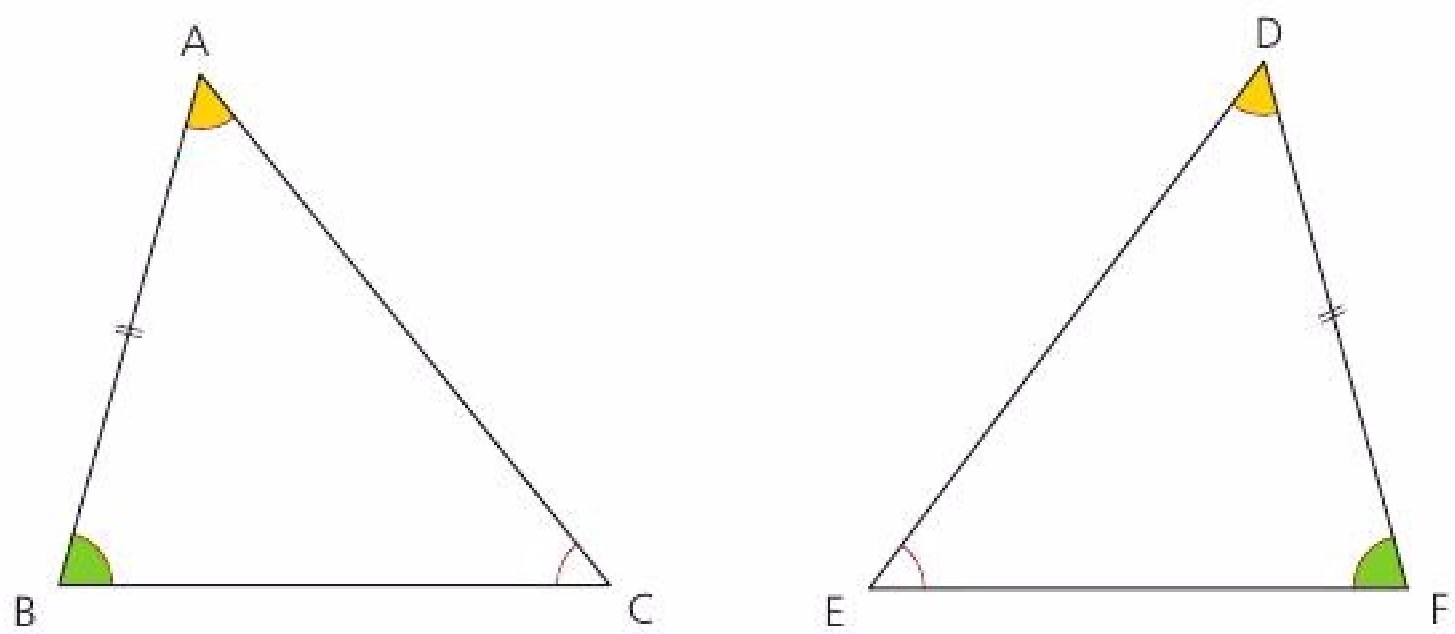
Leia os casos de congruência de triângulos com os alunos e se achar pertinente, reproduza os triângulos no quadro para explorar as relações entre lados e ângulos que nos levam aos quatro casos de congruência entre triângulos.



$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB} \equiv \overline{DF} \\ \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DE}\end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF \rightarrow \overline{BC} \equiv \overline{EF};\ \hat{B} \equiv \hat{F} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{E}$$

3º Caso: ALA (ângulo, lado, ângulo)

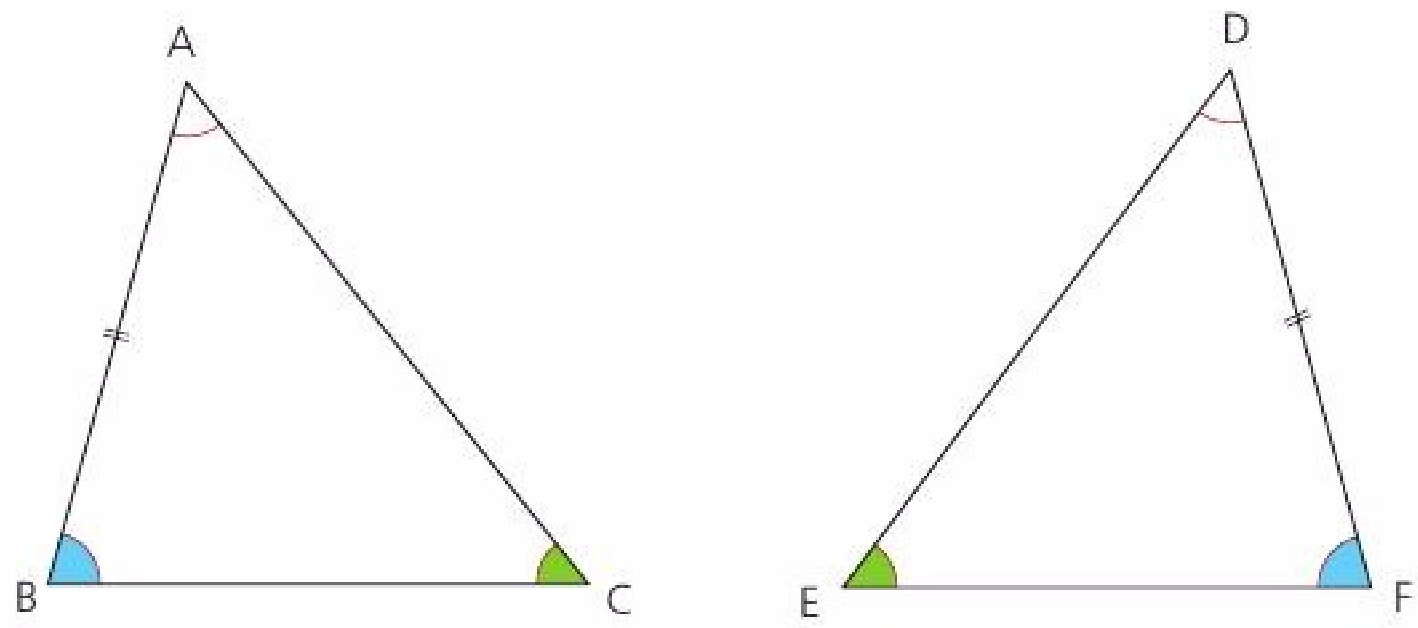
Se dois triângulos ABC e DEF têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes e os lados compreendidos por esses ângulos também congruentes, então eles serão congruentes.



$$\left.\begin{array}{c}\hat{A} \equiv \hat{D} \\ \overline{AB} \equiv \overline{DF} \\ \hat{B} \equiv \hat{F}\end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF \rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{DE};\ \hat{C} \equiv \hat{E} \text{ e } \overline{BC} \equiv \overline{EF}$$

4º Caso: LAA_o (lado, ângulo adjacente, ângulo oposto)

Se dois triângulos ABC e DEF têm respectivamente um lado, um ângulo adjacente a este lado e o ângulo oposto a este lado, congruentes, então eles serão congruentes.

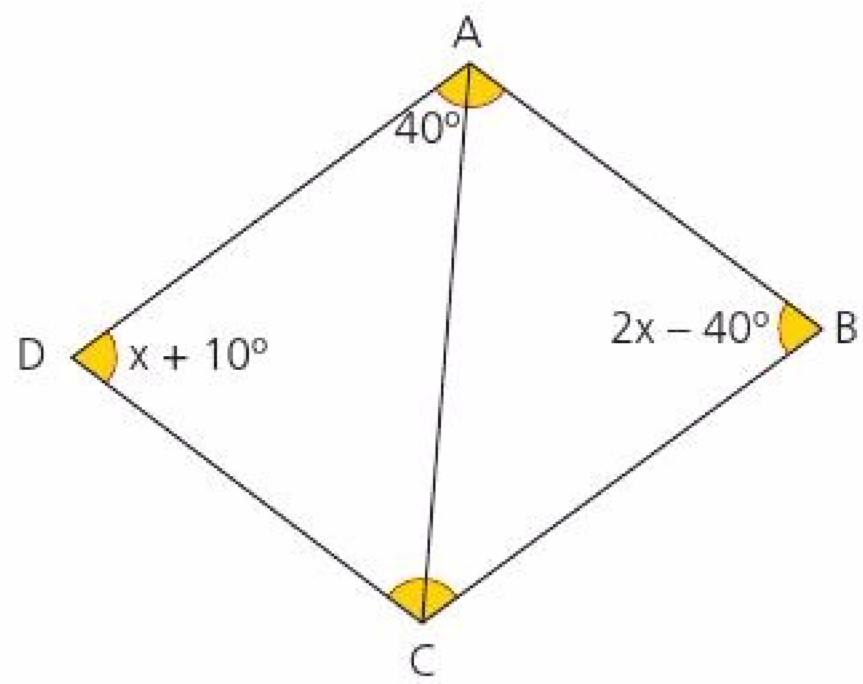


$$\left.\begin{array}{c} \overline{AB} \equiv \overline{DF} \\ \hat{B} \equiv \hat{F} \\ \hat{C} \equiv \hat{E} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF \rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{DE};\ \hat{A} \equiv \hat{D} \text{ e } \overline{BC} \equiv \overline{EF}$$

Acompanhe agora alguns exemplos de aplicação dos casos de congruência de triângulos.

Ao concluir que dois triângulos são congruentes, precisamos dizer por qual caso de congruência eles o são, por isso é importante que o aluno compreenda e diferencie os casos de congruência.

- Vamos determinar as medidas dos ângulos internos dos triângulos ABC e ADC da figura, sabendo que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e que $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$.



A partir da figura e das informações $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ temos:

$$\left.\begin{array}{c} \overline{AC} \text{ lado comum} \\ \overline{AD} \equiv \overline{BC} \\ \overline{AB} \equiv \overline{DC} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ADC \equiv \Delta ACB \text{ pelo caso LLL}$$

Logo, os ângulos correspondentes nos dois triângulos são congruentes.

Assim:

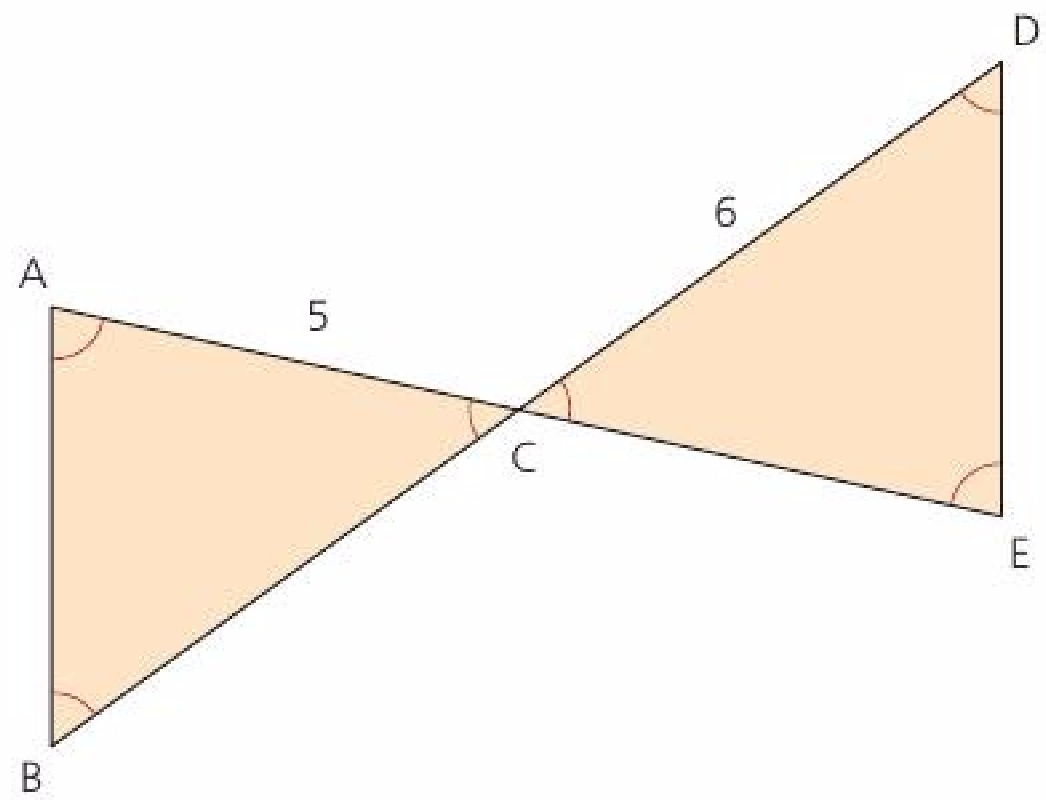
$x + 10° = 2x - 40° \rightarrow x = 50°$
$\hat{D} = 50° + 10° \rightarrow \hat{D} = 60° \rightarrow \hat{B} = 60°$

Como $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são ângulos correspondentes nos triângulos ADC e ACB, respectivamente, temos $\hat{A} \equiv \hat{C}$, logo, suas medidas são iguais.

Assim, podemos escrever: med $(\hat{A})$ = med $(\hat{B})$ = 40°.

Comente com os alunos que para simplificar, quando med $(\hat{A})$ = med $(\hat{B})$, podemos escrever $\hat{A} = \hat{B}$

- Na figura a seguir, vamos determinar os lados $\overline{CE}$ e $\overline{CB}$ dos triângulos ABC e DCE, sabendo que $\overline{AB} // \overline{DE}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$.



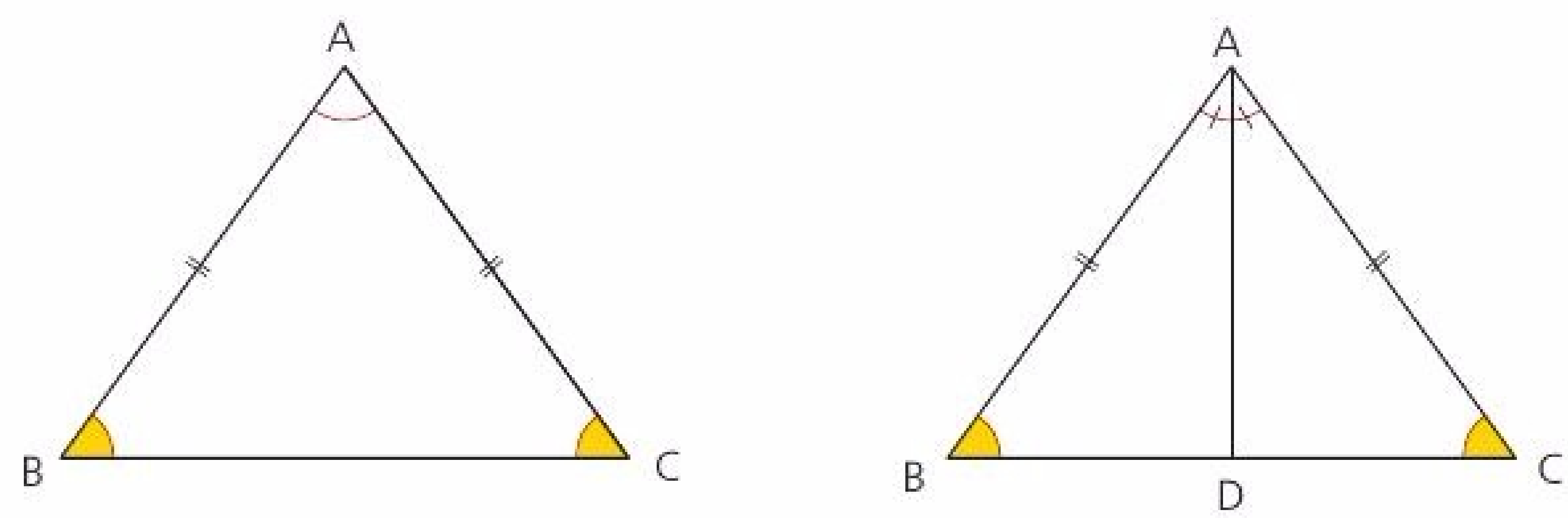
Se $\overline{AB} // \overline{DE}$, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são alternos internos, assim como $\hat{A}$ e $\hat{E}$. Logo:

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \equiv \hat{D} \\ \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \hat{A} \equiv \hat{E} \end{matrix}\right\} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DCE \text{ pelo caso ALA}$$

Se os triângulos são congruentes, seus lados correspondentes são congruentes. Portanto, $\overline{CE} = 5$ e $\overline{CB} = 6$ (lados correspondentes a $\overline{CE}$ e $\overline{CD}$).

- Vamos agora demonstrar que os ângulos da base de um triângulo isósceles ABC são congruentes.

As demonstrações são um grande alicerce para a construção do conhecimento matemático. Faça as demonstrações sugeridas nos textos para que o aluno acompanhe a linha de raciocínio e não decore regras.



Em primeiro lugar, traçamos a bissetriz do ângulo do vértice do triângulo, determinando o ponto D e os triângulos ABD e ACD. Se provarmos que esses triângulos são congruentes, teremos como consequência que os ângulos da base de ABC são iguais. De fato:

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{AC} \text{ (pois ABC é isósceles)} \\ \dfrac{\widehat{A}}{2} \equiv \dfrac{\widehat{A}}{2} \text{ em ABD e ADC} \\ \overline{AD} \text{ é lado comum a ABD e ADC} \end{cases}$$

$\Delta ABD \equiv \Delta ADC$ pelo caso LAL $\rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{C}$

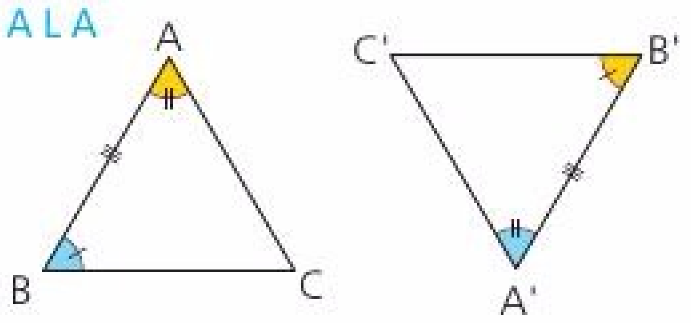
Fernanda Youssef

Atividades

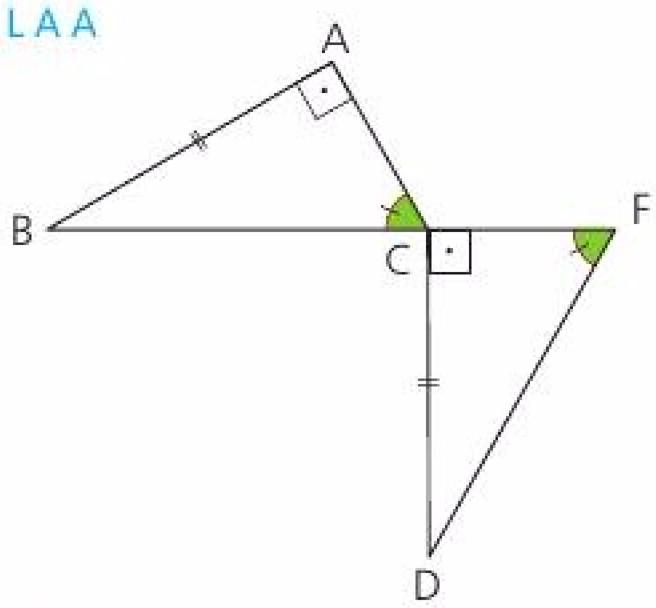
As atividades a seguir trabalham o reconhecimento e a aplicação dos casos de congruência e isometrias entre triângulos. Reforce a importância dos registros claros e organizados no desenvolvimento das atividades.

14. Em cada figura a seguir, observe as indicações de congruência e escreva qual o caso de congruência entre os triângulos:

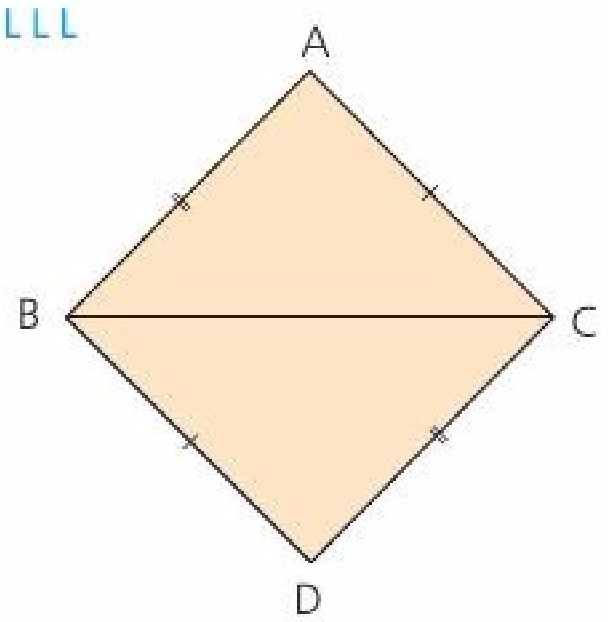
a) A L A



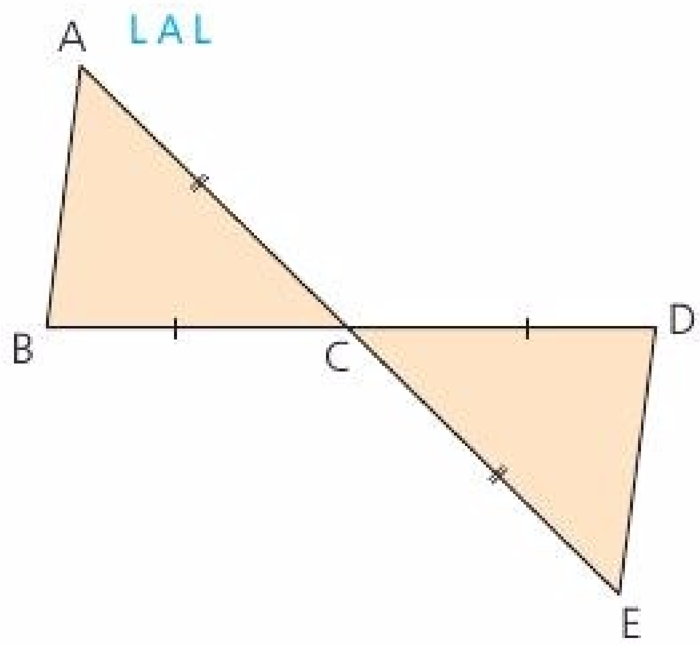
b) L A A



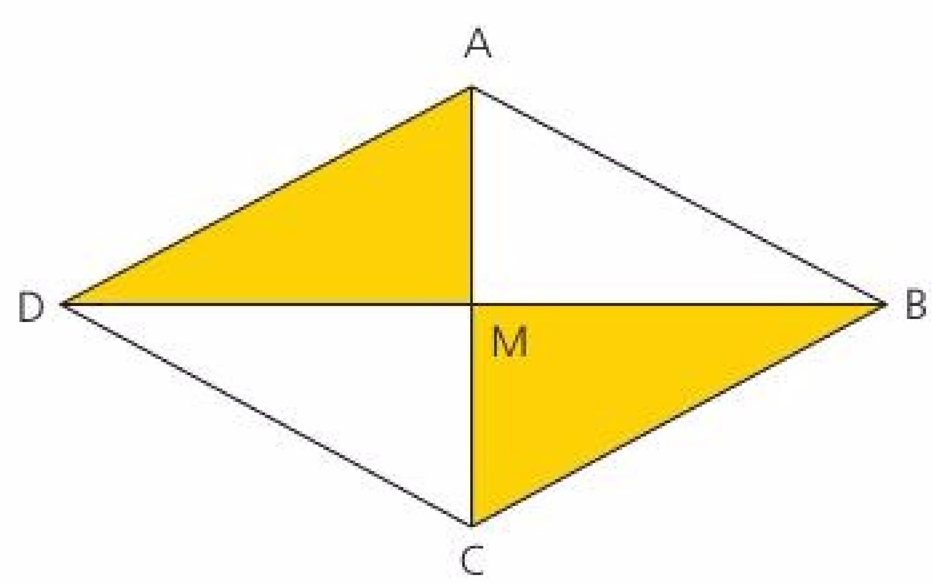
c) L L L



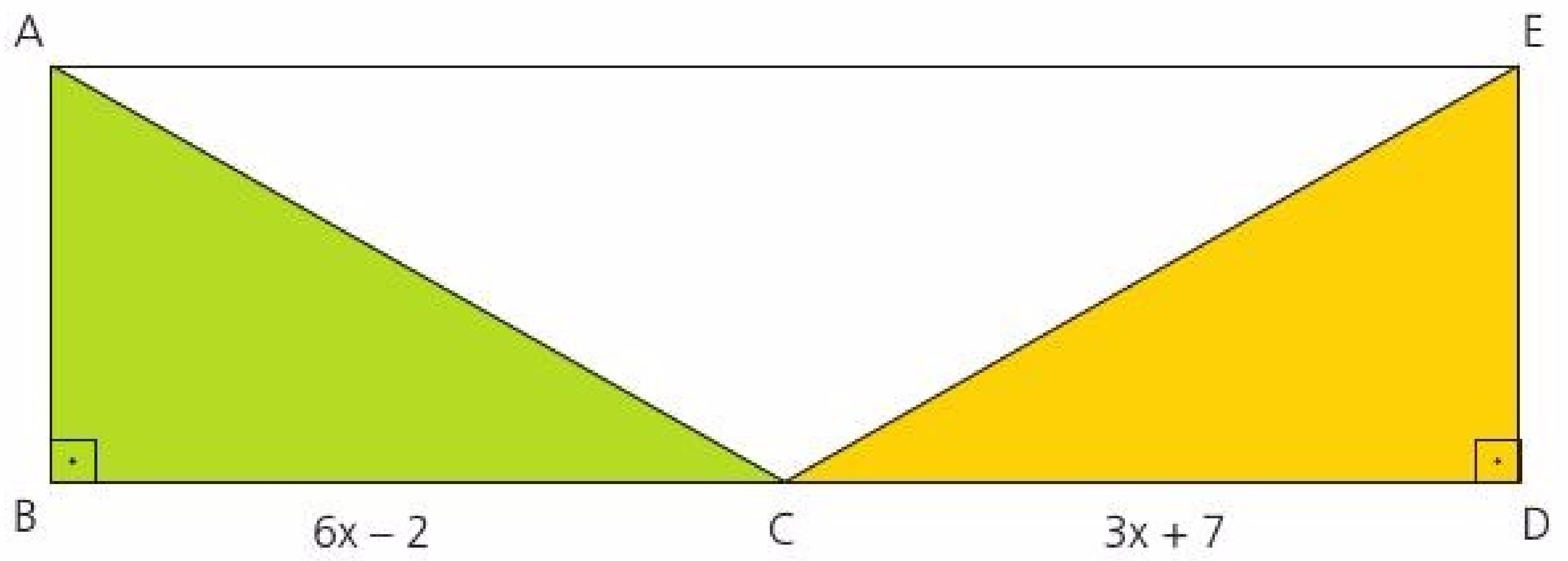
d) L A L



15. Sabendo que ABCD é um losango, demonstre que os triângulos ADM e BMC são congruentes e que, como consequência, as diagonais de um losango se cruzam em seus pontos médios. Demonstração no caderno.

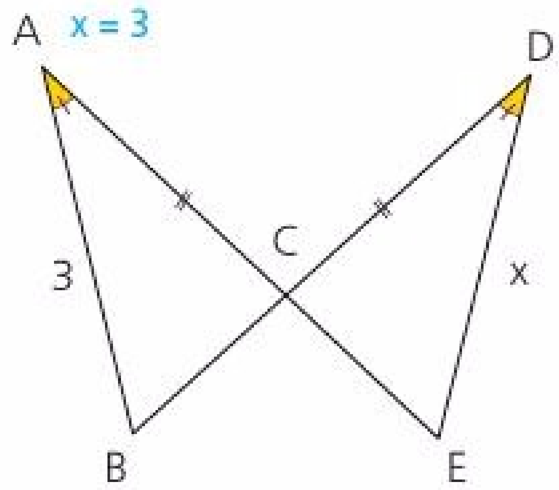


16. Sabendo-se que ABDE é um retângulo e que C é ponto médio de $\overline{BD}$, prove que os triângulos ABC e ECD são congruentes e determine a medida em cm de $\overline{BC}$. $\overline{BC}$ mede 16 cm

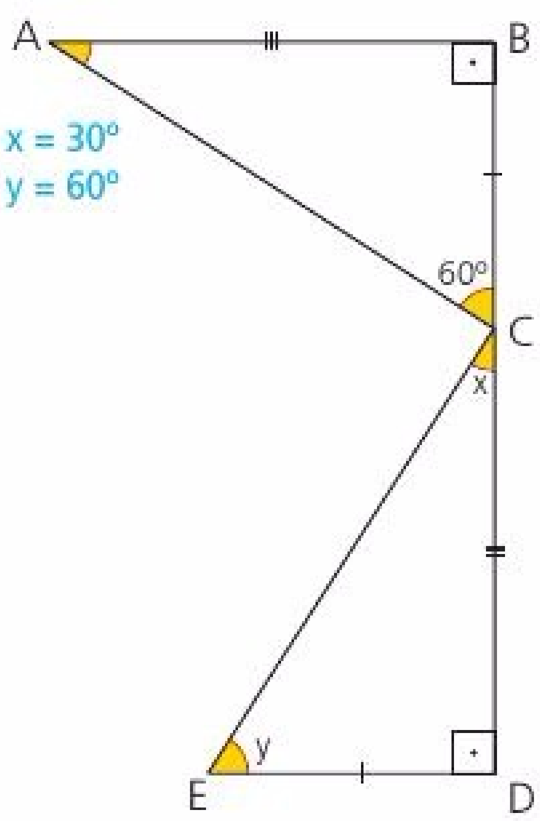


17. Determine o caso de congruência para cada par de triângulos a seguir e calcule os valores de **x** e **y**.

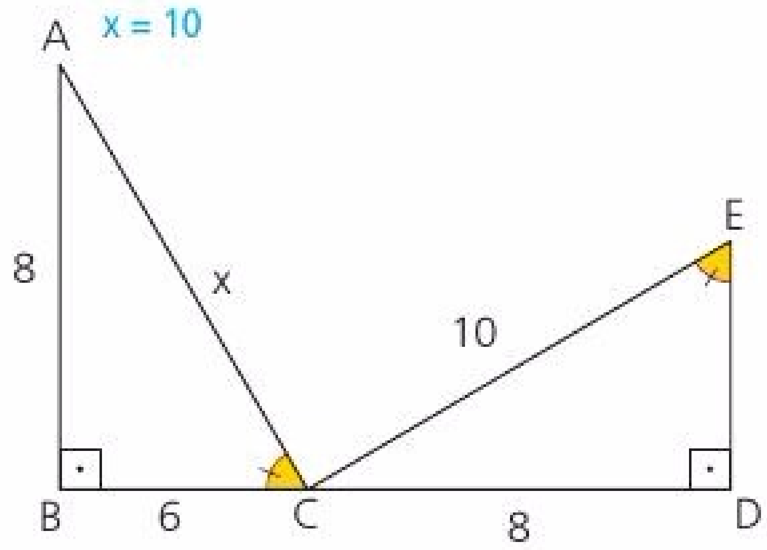
a) x = 3



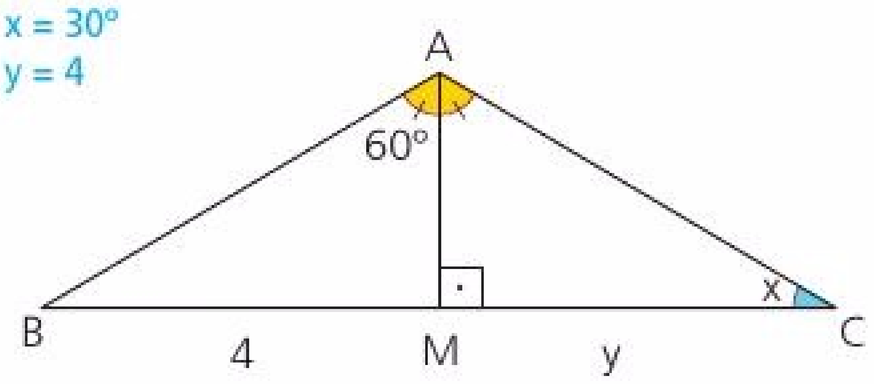
b) x = 30°
y = 60°



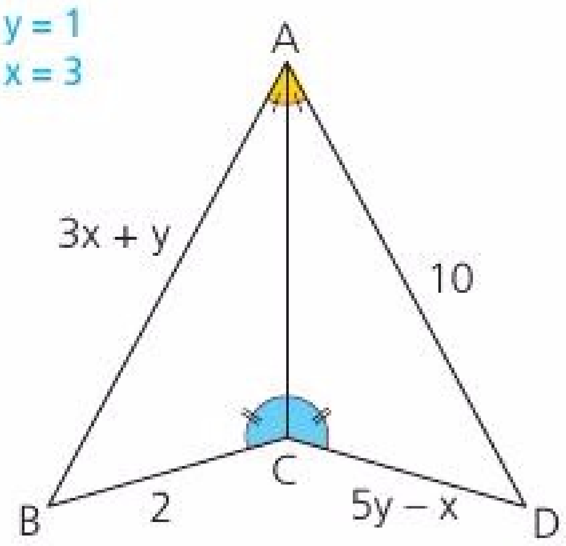
c) x = 10



d) x = 30°
y = 4



e) y = 1
x = 3



Interpretar figuras

Para estudar

18. Em cada caso, diga a isometria ou conjunto de isometrias sofrida pela figura para produzir a segunda.

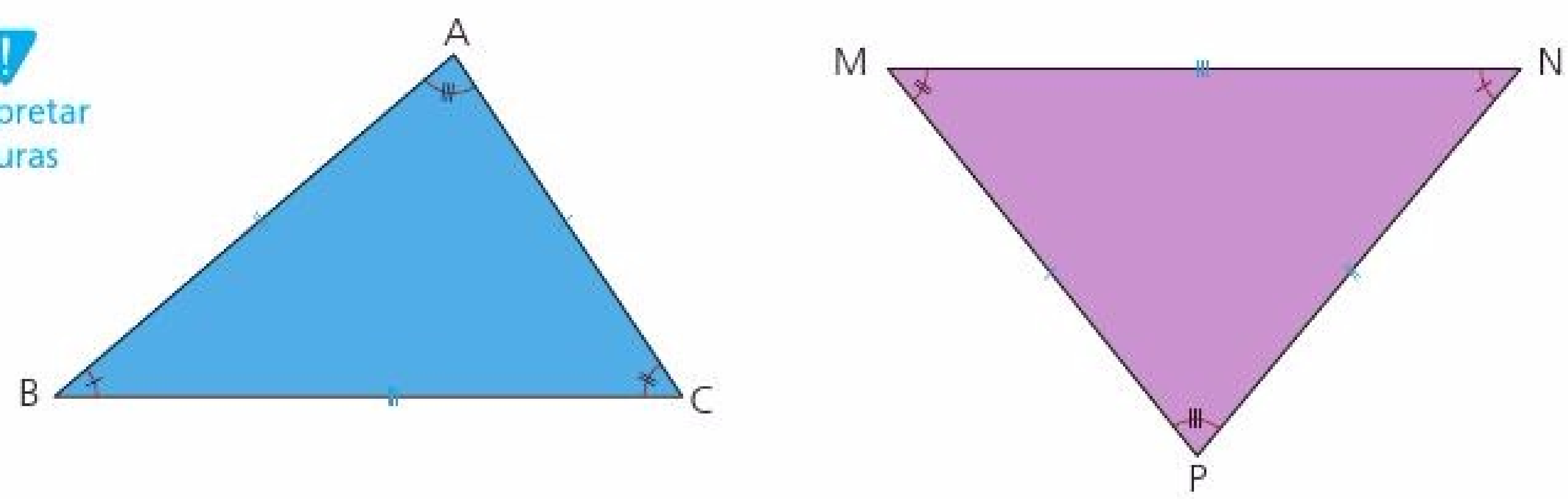
a) 

b) 

c) 

19. Indique os lados correspondentes nos triângulos ABC e MNP da figura.

Interpretar figuras



20. Os triângulos EAC e RBM são congruentes.

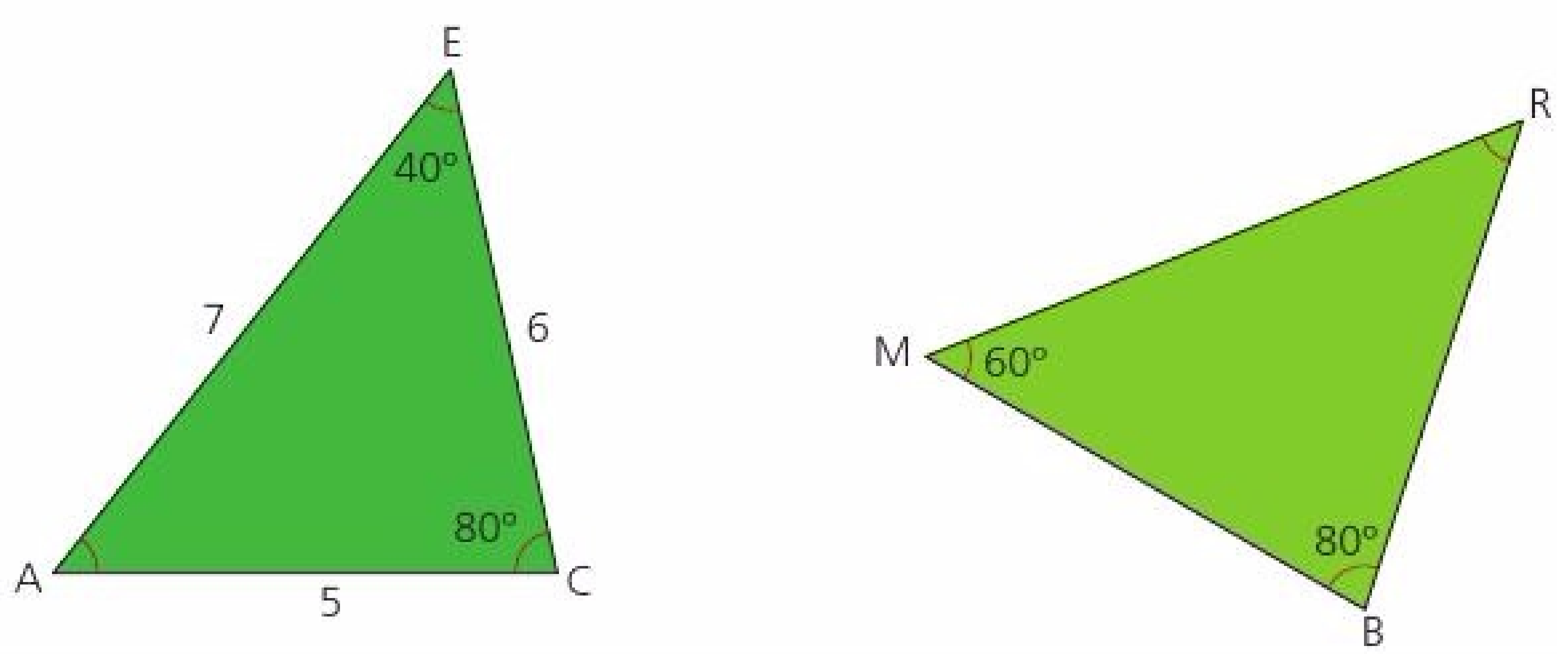
Dê o valor de:

a) RM

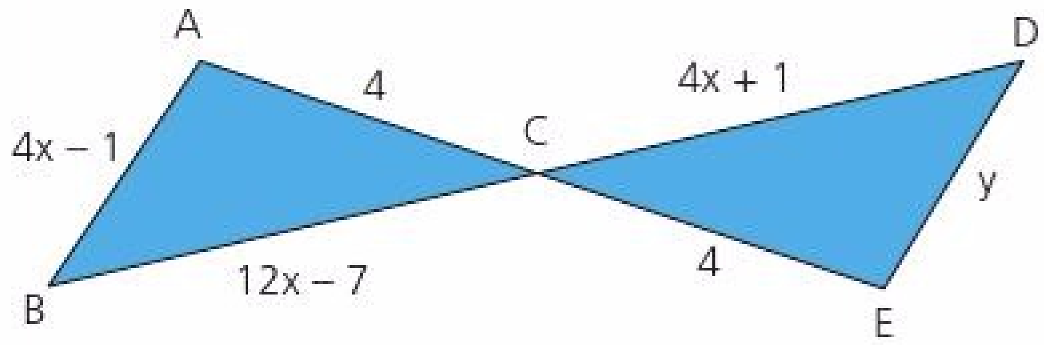
b) RB

c) $\hat{A}$

d) $\hat{R}$

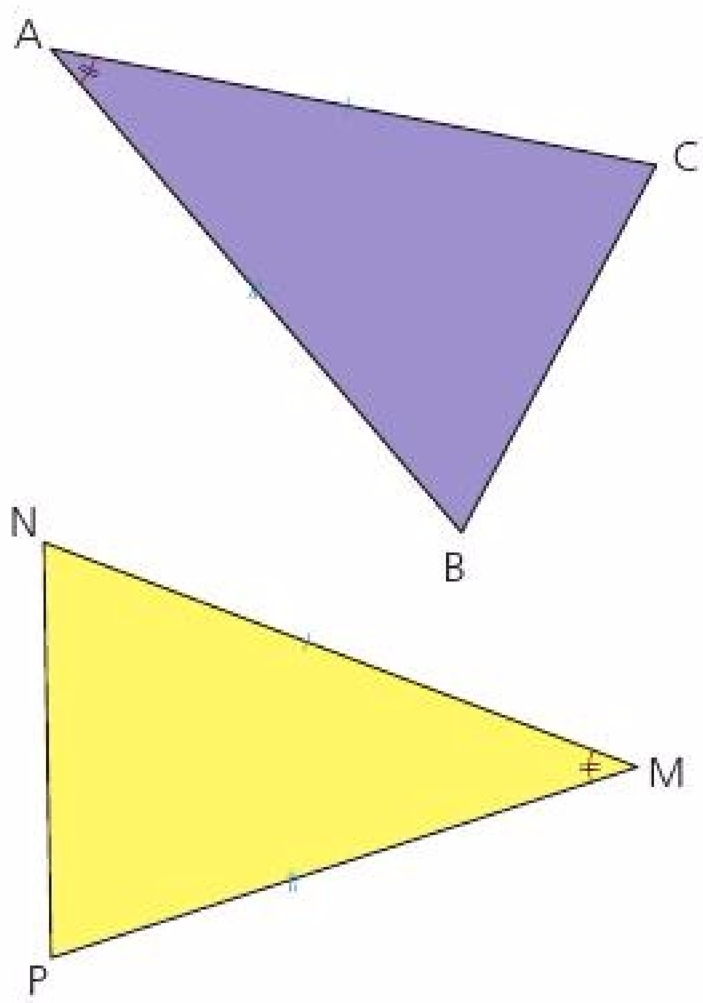


21. Os triângulos ABC e CDE da figura são congruentes. Determine **x** e **y**.

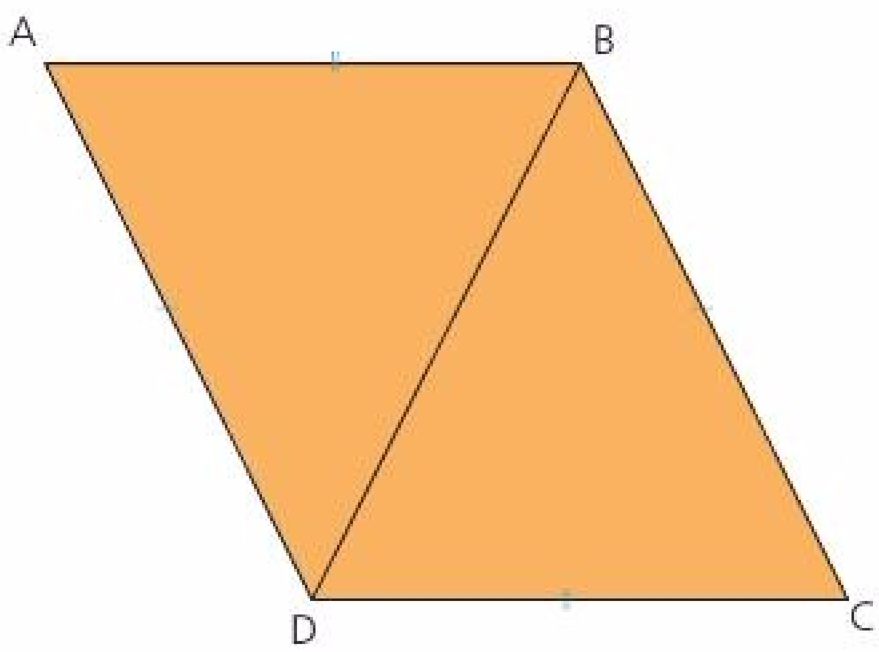


22. Em cada figura a seguir, identifique o caso de congruência entre os triângulos:

a)



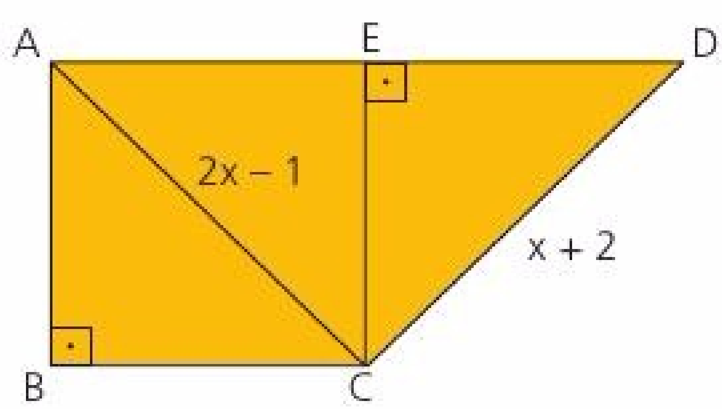
b)



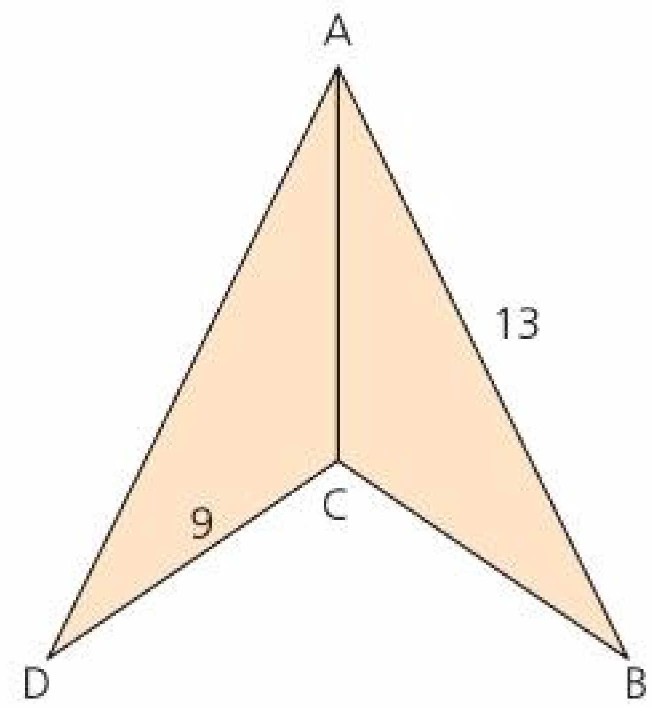
23. Determine **x** na figura. Observe que:

$\overline{BC} // \overline{AE}$

$\overline{AB} \equiv \overline{BC}$



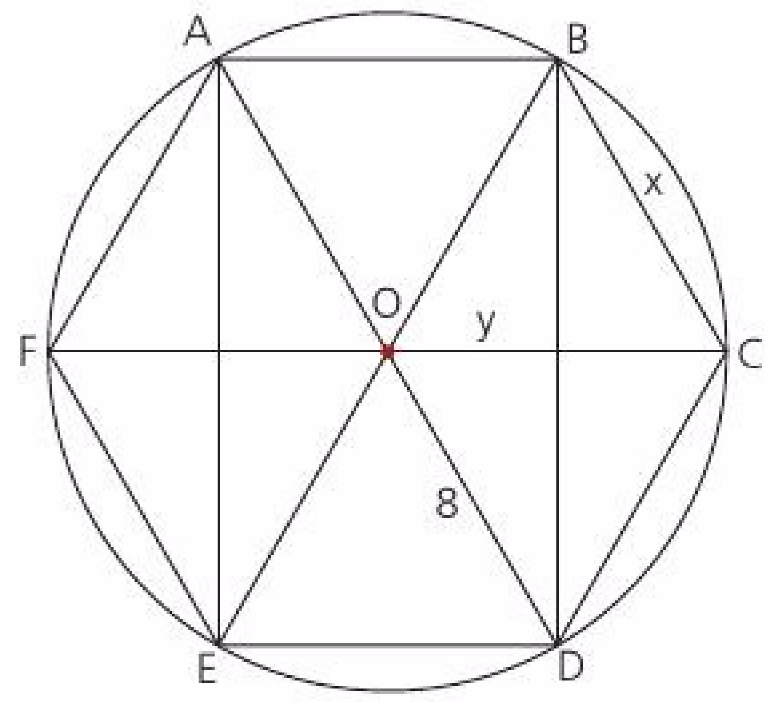
24. Determine a medida de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, sabendo que $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$



25. Calcule **x** e **y** nas figuras:

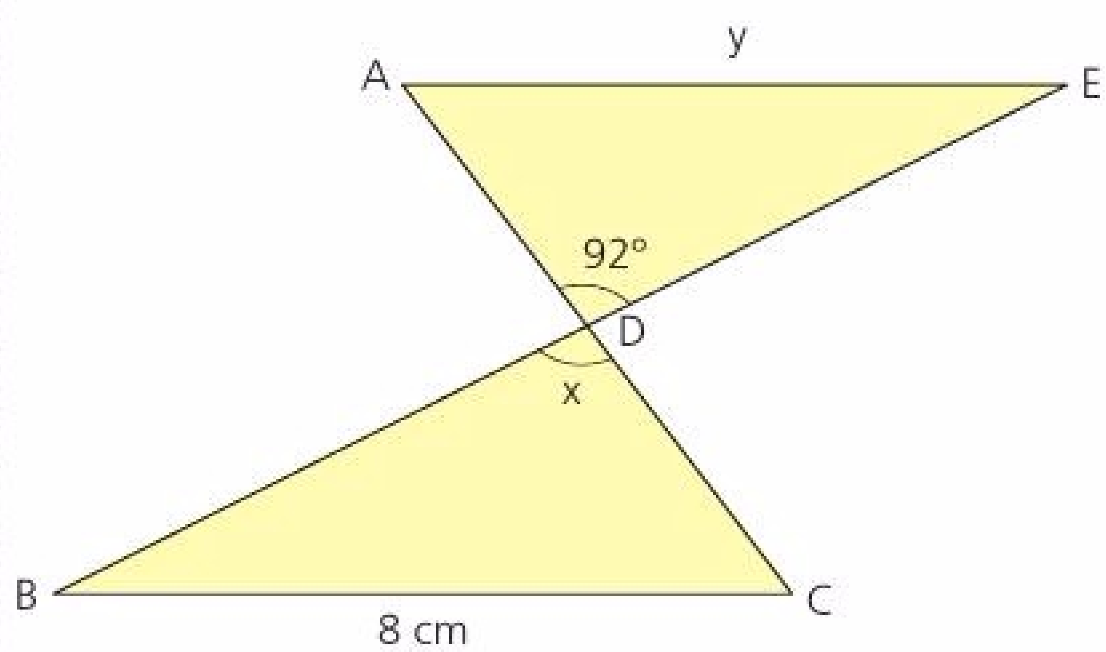
Interpretar figuras

a)



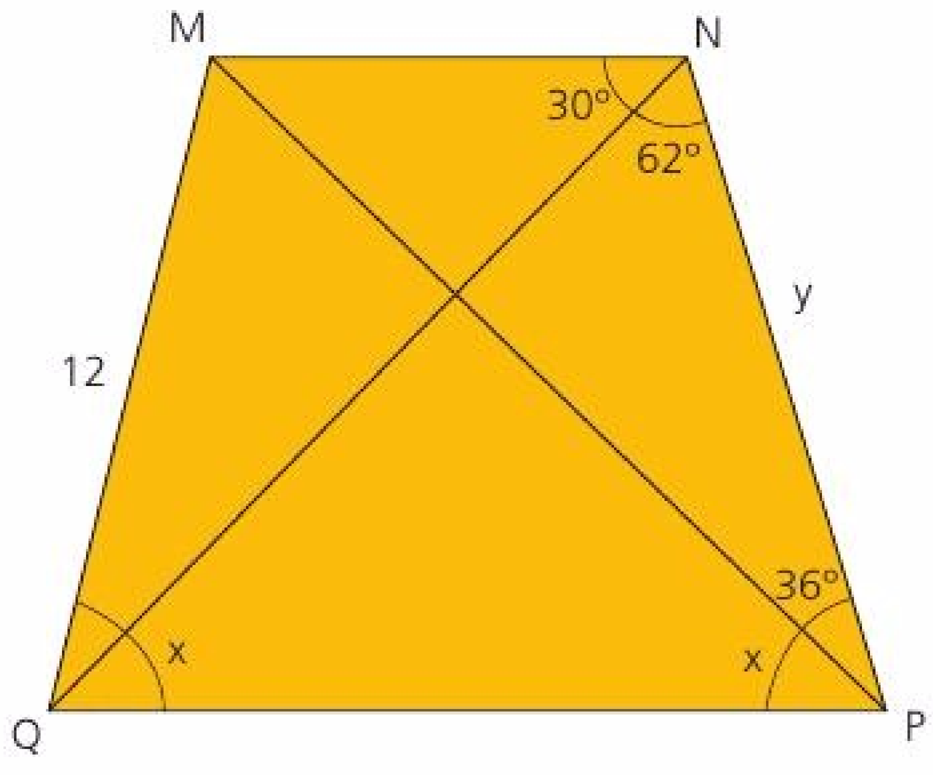
ABCDEF é um hexágono regular inscrito na circunferência

b)



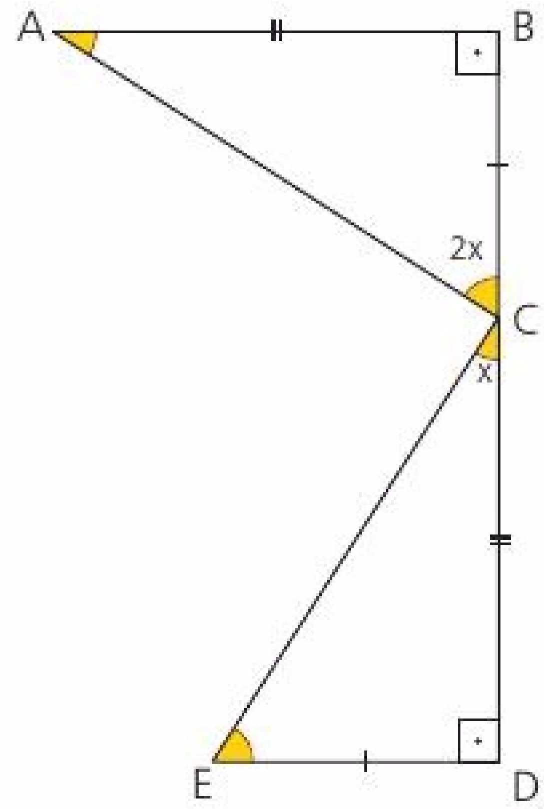
$\overline{AE} // \overline{BC}$

c)



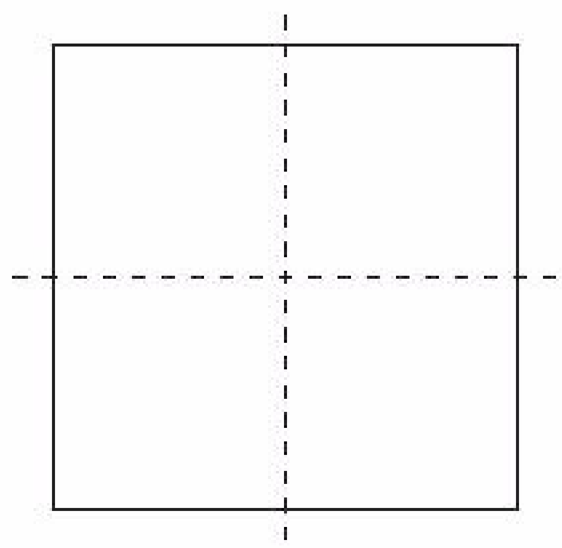
MNPO é um trapézio isósceles

d)



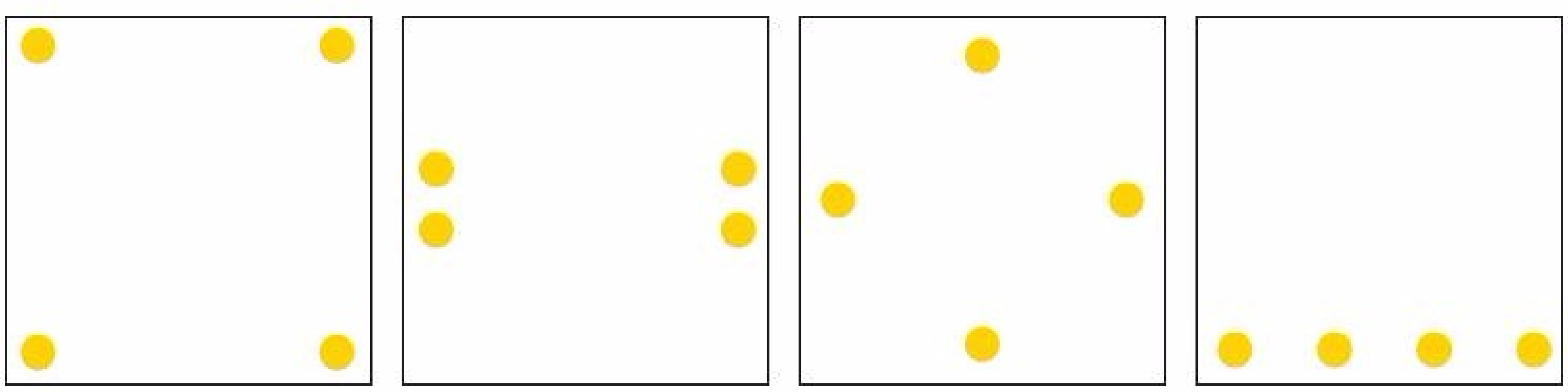
Desafio

1. Dobre um quadrado de papel duas vezes como está indicado na figura. Depois faça um furo circular como também está indicado.



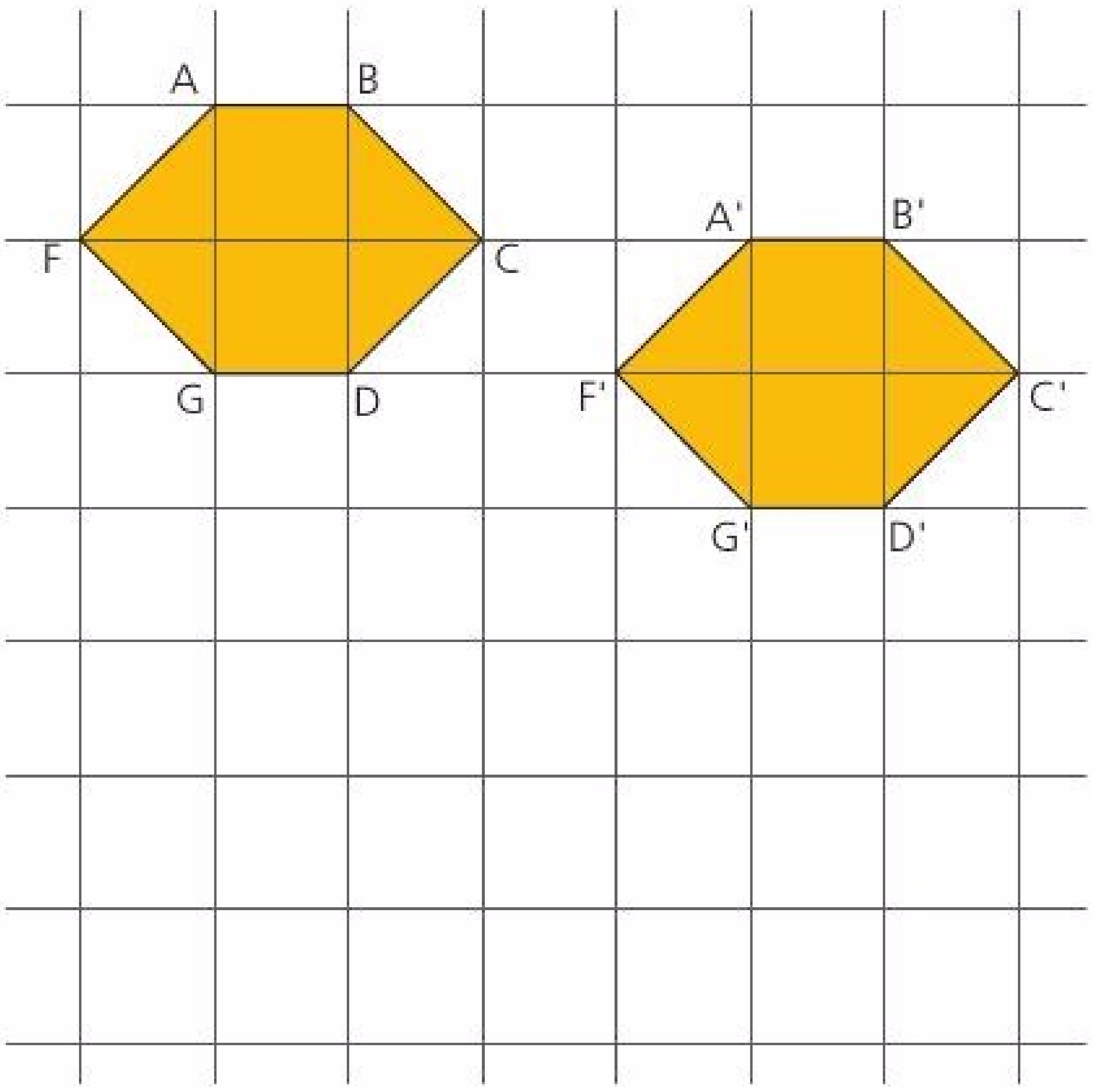
2. Desenhe, em seu caderno, o que você acha que vai ver quando abrir o papel. Abre o papel e verifique.

3. Para produzir cada uma das figuras que se seguem, dobrou-se um quadrado duas vezes e depois foi feito um furo circular. Desenha as linhas de dobragem e marque onde foi feito o furo para se obter cada uma das figuras ao desdobrar.



Resolução das atividades

1.



2. Sobre a reta suporte do lado $\overline{BC}$ faz-se a translação do ponto B para a direita sobre o ponto C e o obtem-se o ponto B′, ponto C translada sobre a mesma reta e a mesma distância de $\overline{BC}$ a partir de B′ e obtem-se C′. O ponto A′ obtem-se fazendo a translação do ponto A para direita com a mesma altura e distância o ΔA′B′C′ obtem-se fazendo a notação de 180° sobre o eixo B′C′.

3. 4 eixos de simetria, duas mediatrizes e duas diagonais.

4. a) 40°, 40° e 100°
   b) 4 cm, 4 cm e 6,8 cm

5. a) 5 mediatrizes
   b) 3 diagonais e 3 mediatrizes
   c) 4 diagonais e 4 mediatrizes

6. Nos polígonos regulares, o número de eixos de simetria é igual ao número de lados do polígono.

7. Construção no caderno.

8. Em primeiro lugar, faz-se uma rotação sobre o eixo da reta r em 180° da figura do ΔABC, em seguida, nova rotação desta vez sobre o eixo B′C′ e obtem-se o simétrico ΔA′B′C′

9. Processo análogo à atividade 6.

10. a) a rotação sobre o eixo Ad
    b) $\overline{AD}$ (entre 3 e 6)
    $\overline{CF}$ (entre 3 e 4)
    c) 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6

11. Produção pessoal

12. a) $\overline{BD} \cong \overline{FG}$
    $\hat{C} \cong \hat{E}$
    $\overline{CD} \cong \overline{EF}$
    $\hat{B} \cong \hat{G}$
    b) $\overline{DE} \cong \overline{GH}$
    $\hat{F} \cong \hat{F}$
    $\hat{D} \cong \hat{H}$
    $\overline{EF} \cong \overline{FH}$
    c) $\hat{E} \cong \hat{E}$
    $\overline{DF} \cong \overline{CG}$
    $\overline{GE} \cong \overline{EF}$
    $\hat{C} \cong \hat{D}$

13. a) $x = 3{,}5$
    $y = 2$
    b) $x + 2 = 6$
    $x = 4$
    $y = 7$
    $z - 1 = 4$
    $z = 5$
    c) $x = 70°$
    $y = 70°$
    $z = 60°$
    d) $x = 35°$
    $y = 45°$
    $z = 35°$

14. a) A L A

b) L A A

c) L L L

d) L A L

15. $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ e $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

portanto $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ porque as diagonais $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ portanto M é o ponto médio das diagonais, sendo assim ΔADM ΔBCM.

16. Se C é ponto médio de $\overline{BD}$, $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ (retângulo); B ≡ D portanto $\Delta ABC \equiv \Delta CDE$.

$6x - 2 = 3x + 7$

$3x = 9$

$x = 3$

$\overline{BC}$ mede 16 cm

17. a) $x = 3$

b) $x = 30°$

$y = 60°$

c) $x = 10$

d) $x = 30°$

$y = 4$

e) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5y - x = 2 \end{cases}$ $\quad x\,(3)$

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 15y - 3x = 6 \end{cases} +$$

$$16y = 16$$

$y = 1$

$x = 3$

Respostas da seção Para estudar

18. a) reflexão ou simetria

b) reflexão e rotação

c) reflexão e rotação

19. $\overline{AB}$ é correspondente de $\overline{NP}$

$\overline{AC}$ é correspondente de $\overline{MP}$

$\overline{BC}$ é correspondente de $\overline{MN}$

20. a) $\overline{RM} = 7$

b) $\overline{RB} = 6$

c) $\hat{A} = 60°$

d) $\hat{E} = 40°$

21. $x = 1$

$y = 3$

22. a) LAL

b) LAL

23. $x = 3$

24. $\overline{AD} = 13$

$\overline{BC} = 9$

25. a) $x = 8$

$y = 4$

b) $y = 8$ cm

$x = 92°$

c) $y = 12$

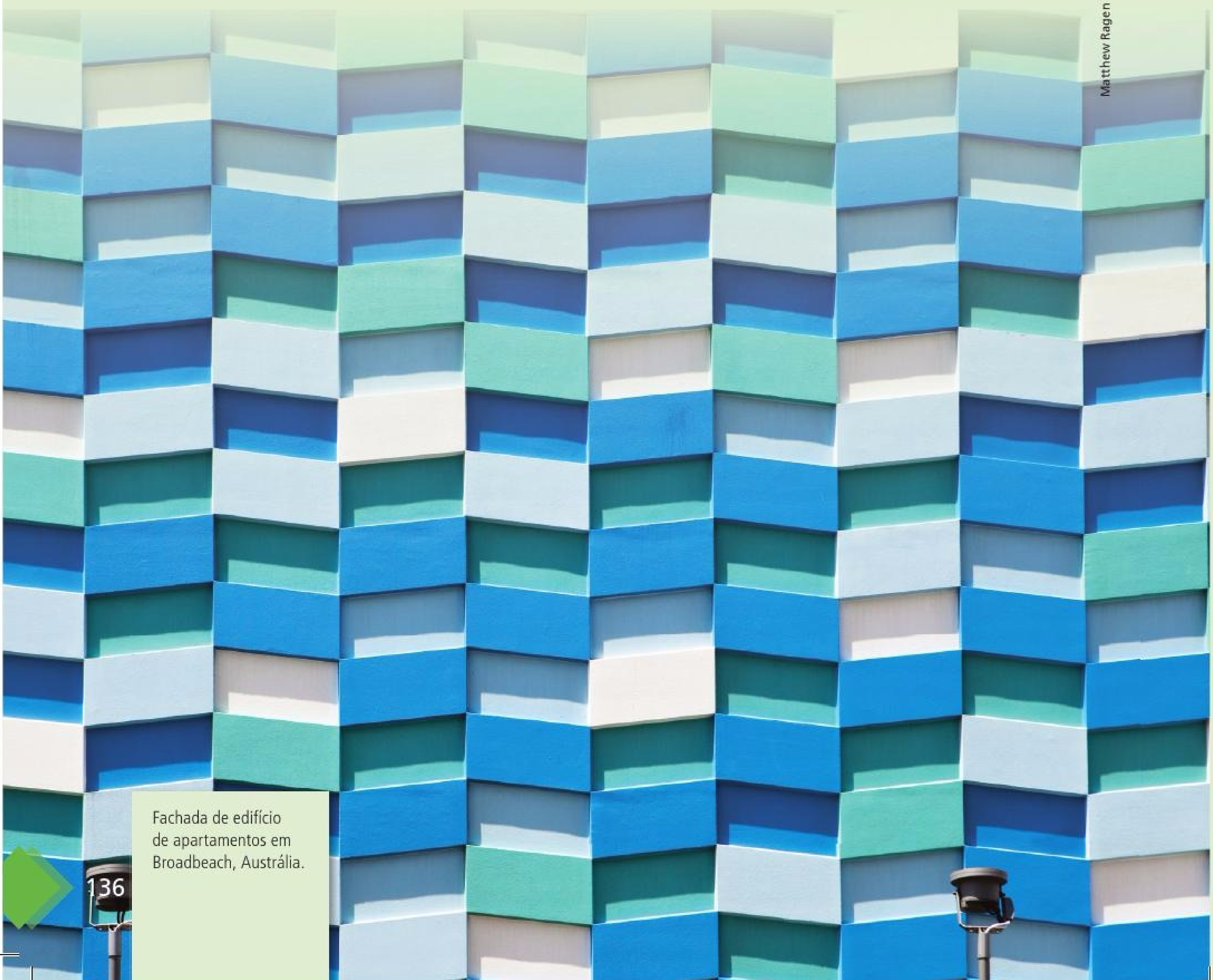
$x = 51°$

d) $x = 30°$

capítulo 6

Estudo dos Quadriláteros

- Quadriláteros
- Trapézios
- Paralelogramos



Matthew Ragen

Fachada de edifício de apartamentos em Broadbeach, Austrália.

Conversa Inicial

Observando as formas ao seu redor, você irá perceber que os quadriláteros estão presentes na maioria dos objetos que nos cercam. Veja que eles estão presentes nas fachadas dos edifícios, no formato das portas e janelas, bem como nas faces de caixas de embalagens. A maioria dos campos onde se pratica esportes, os cartões magnéticos, as telas de televisão e os monitores de computadores têm, também, a forma de quadriláteros.

As imagens não são proporcionais entre si.

Krasimir Kanev/Dreamstime

Caixas em depósito de mercdorias.

Francesco Scali/Dreamstime

Porta e janelas em uma residência.

Valeria Cantone/Dreamstime

Quadra de vólei.

Emin Oskan/Dreamstime

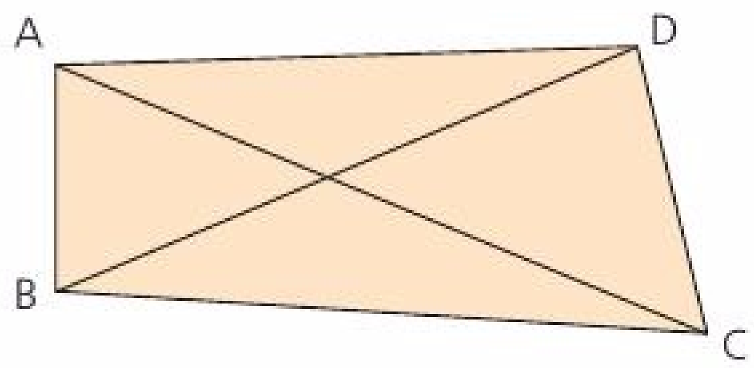
Tela plana de TV.

Os quadriláteros têm características marcantes, que determinam variáveis como a soma de seus ângulos internos, a soma dos externos e as relações existentes entre seus lados. Alguns quadriláteros têm ângulos internos retos, como as faces das caixas de papelão empilhadas em um depósito. Nesse caso, as caixas têm uma forma que chamamos de paralelepípedo retângulo, cujas faces são retângulos. Outros quadriláteros têm lados opostos paralelos, como os paralelogramos. Existem aqueles que têm os quatro lados iguais e existem outros que têm todas essas características juntas.

Vamos estudar as diferenças existentes entre os principais quadriláteros, bem como suas características e as relações geométricas entre lados e ângulos.

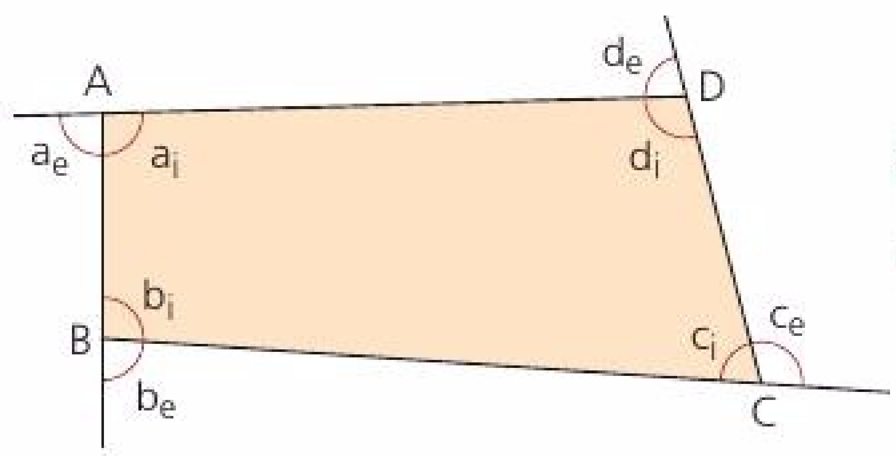
Quadriláteros

Quando um polígono convexo tem quatro lados ele é chamado de **quadrilátero**. Vamos considerar o polígono ABCD da figura a seguir, que é um quadrilátero.



- A, B, C e D são vértices;
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ são os lados;
- $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais.

Se fizermos os prolongamentos dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, obtemos os ângulos externos (a_e, b_e, c_e e d_e) do quadrilátero.



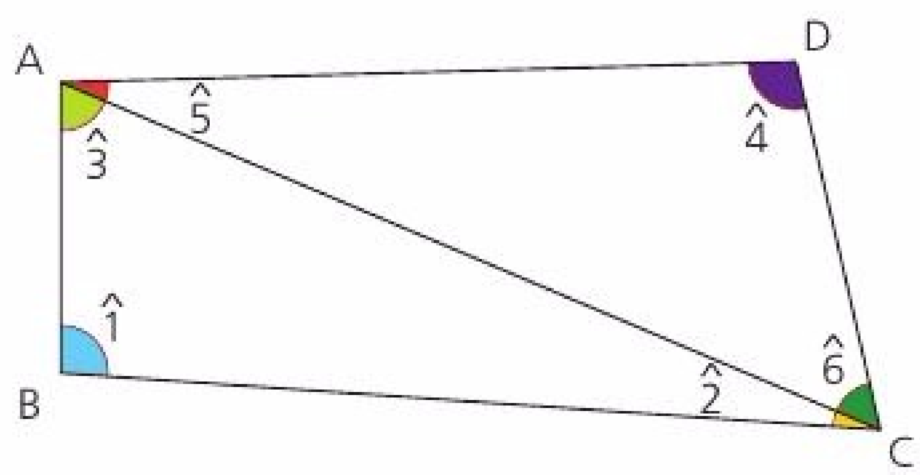
- a_i; b_i; c_i; d_i são os ângulos internos;
- a_e; b_e; c_e; d_e são os ângulos externos;

Note que os pares de ângulos internos e externos são suplementares, isto é, somam 180°. Em função disso, podemos escrever:

$$\underbrace{a_i + a_e}_{180°} + \underbrace{b_i + b_e}_{180°} + \underbrace{c_i + c_e}_{180°} + \underbrace{d_i + d_e}_{180°} = 4 \cdot 180° = 720°$$

Se considerarmos agora a diagonal $\overline{AC}$ do quadrilátero, veremos que ela divide o quadrilátero em dois triângulos ABC e ADC:

Cada um dos triângulos tem soma dos ângulos internos igual a 180°. Podemos, então, escrever:



$$\underbrace{(\hat{1}) + (\hat{2}) + (\hat{3})}_{180°} + \underbrace{(\hat{4}) + (\hat{5}) + (\hat{6})}_{180°} = 2 \cdot 180° = 360°$$

Como a soma dos três ângulos internos do triângulo ABC com os três ângulos internos do triângulo ADC equivale à soma dos ângulos internos do quadrilátero ABCD, podemos concluir que essa soma é sempre 360°. Outra forma de chegar a esta conclusão é observar que:

$$\begin{aligned}
&\hat{3} + \hat{5} = \hat{a}_i \\
&\hat{1} = \hat{b}_i \\
&\hat{2} + \hat{6} = \hat{c}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} = 360° \\
&\hat{4} = \hat{d}_i \qquad\qquad\quad\; \underbrace{\hat{1}}_{\hat{b}_i} + \underbrace{\hat{3} + \hat{5}}_{\hat{a}_i} + \underbrace{\hat{2} + \hat{6}}_{\hat{c}_i} + \underbrace{\hat{4}}_{\hat{d}_i} = 360°
\end{aligned}$$

$$\hat{b}_i + \hat{a}_i + \hat{c}_i + \hat{d}_i = 360°$$

Vimos também que a soma dos ângulos internos com os ângulos externos é 720°, o que nos permite concluir que a soma dos ângulos externos também é 360°.

Em resumo:

Para qualquer quadrilátero ABCD

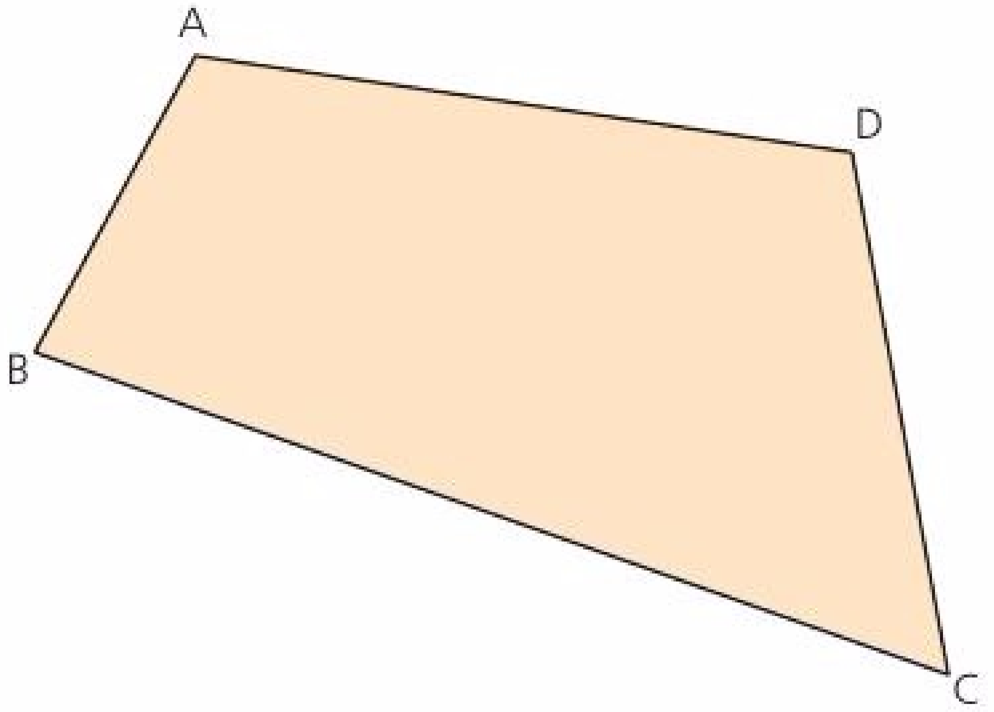
- **A soma dos ângulos internos é 360°**;
- **A soma dos ângulos externos é 360°**.

Na prática

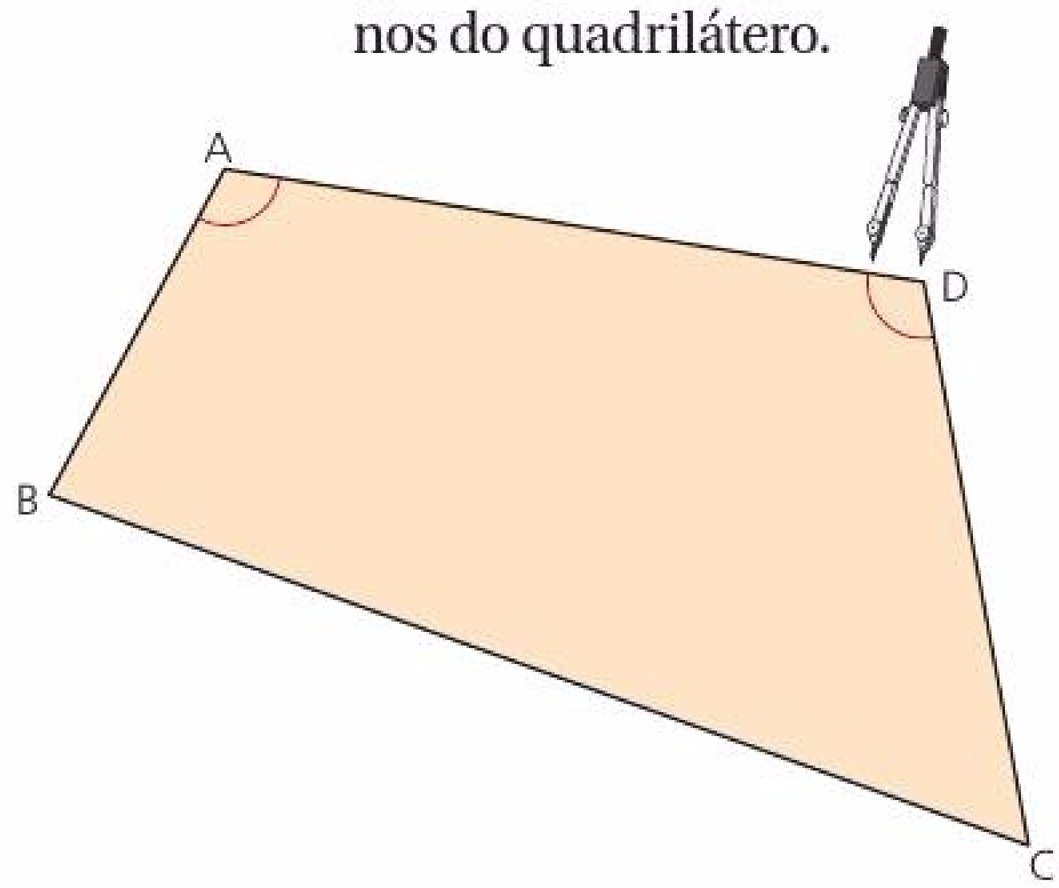
Solicite aos alunos que explorem as relações angulares das figuras.

Essa atividade tem como objetivo verificar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Você vai precisar de uma folha de sulfite, um lápis comum, quatro lápis de cores diferentes, seu compasso e uma tesoura. Mãos à obra!

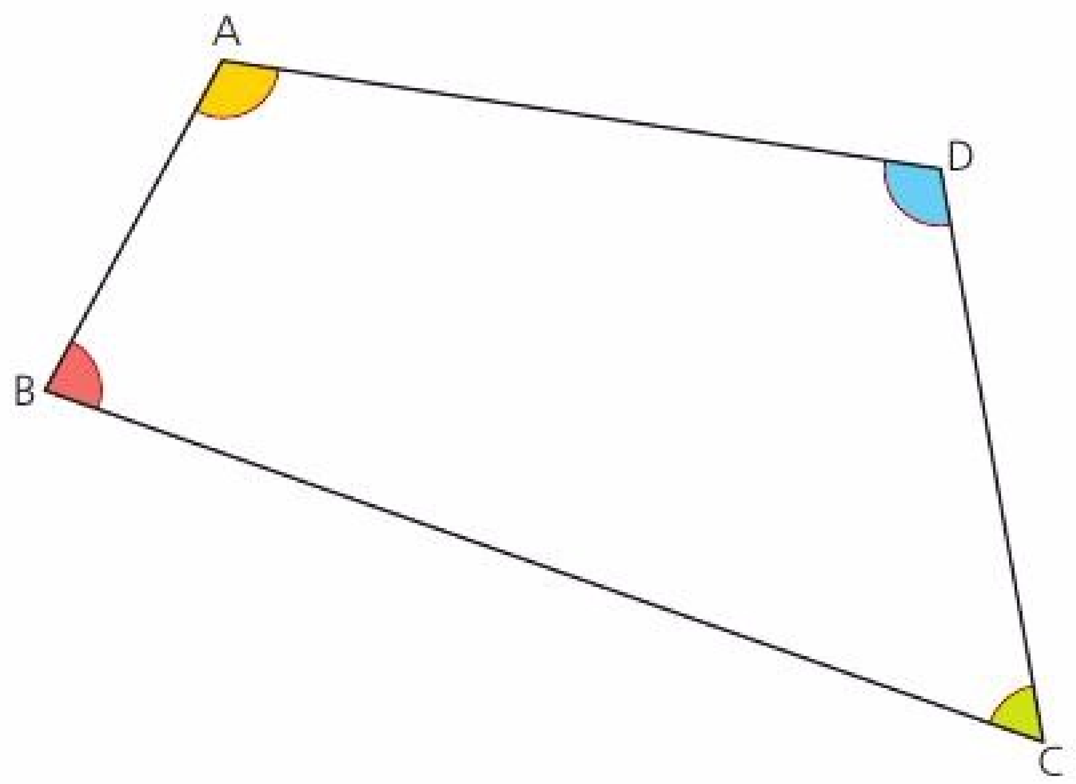
A. Desenhe um quadrilátero ABCD qualquer na folha de sulfite, ocupando o máximo de sua superfície.



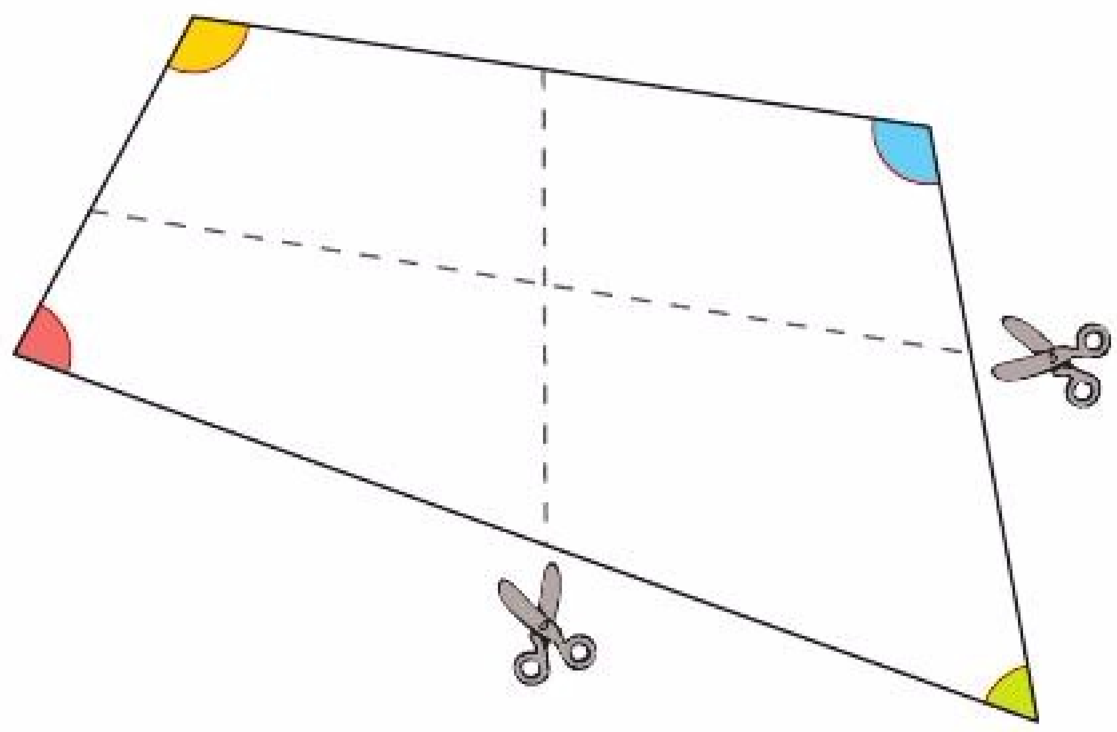
B. Utilizando sempre a mesma abertura do compasso, marque os quatro ângulos internos do quadrilátero.



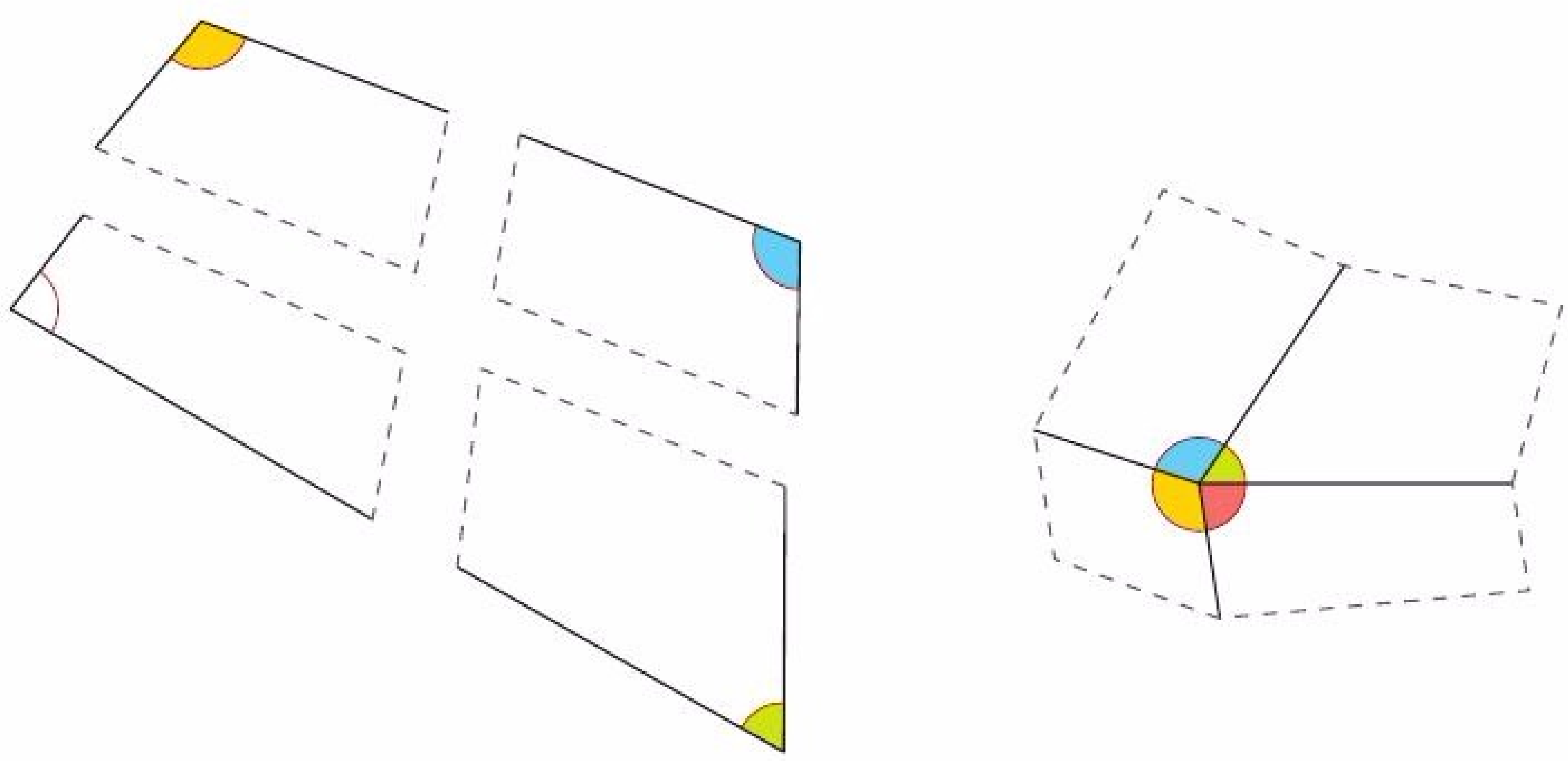
C. Em seguida, pinte cada ângulo interno com uma cor diferente.



D. Agora, recorte o quadrilátero ao longo de seus lados e, em seguida, divida-o em quatro partes recortando-o através de duas linhas internas que não passem pelos ângulos que você pintou.



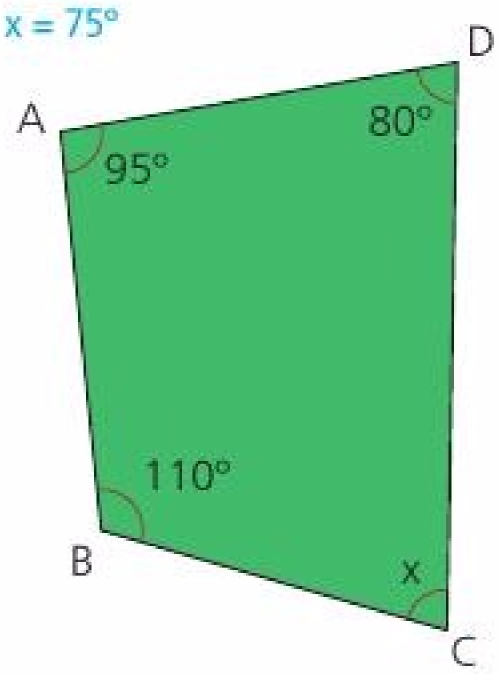
E. Separe as quatro partes obtidas, faça coincidir os quatro vértices dos ângulos internos do quadrilátero e verifique que sua soma é 360º.



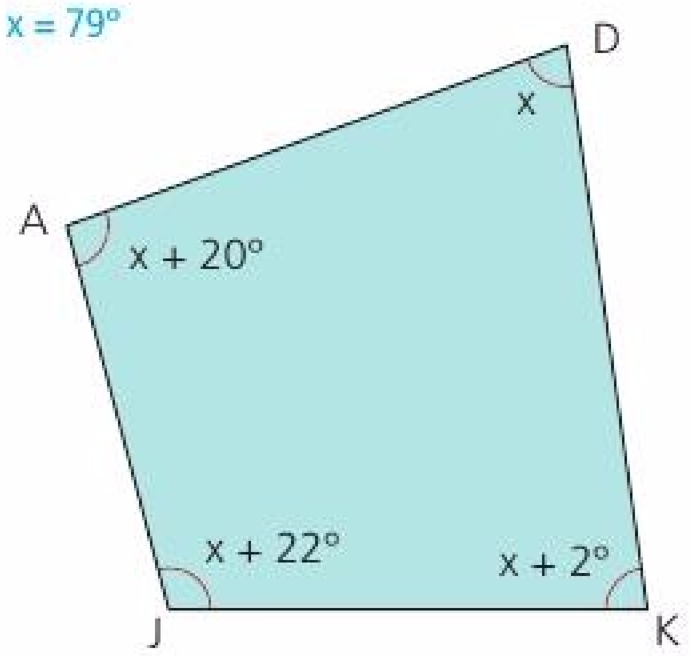
Atividades

1. Calcule o valor de **x** em cada figura e determine os ângulos internos de cada quadrilátero:

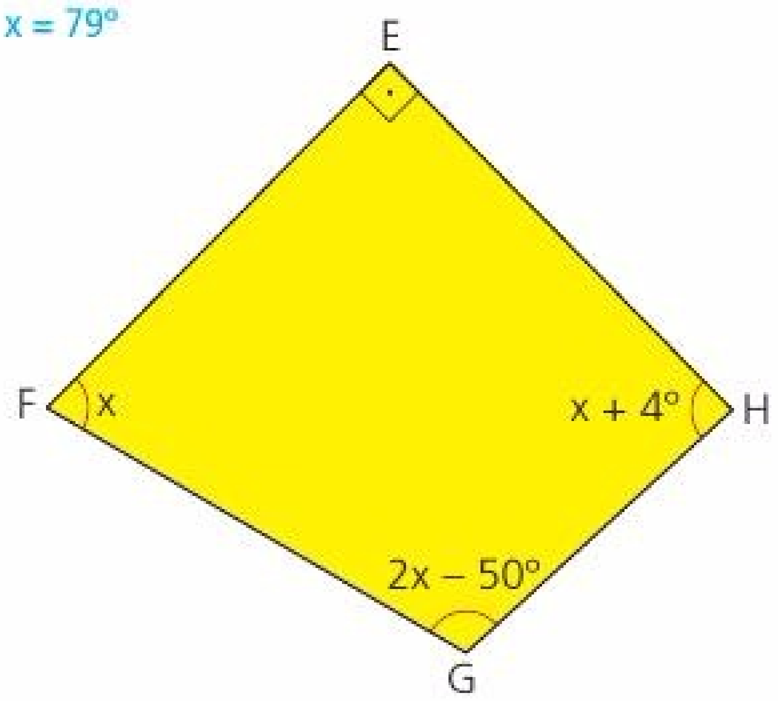
a) x = 75°



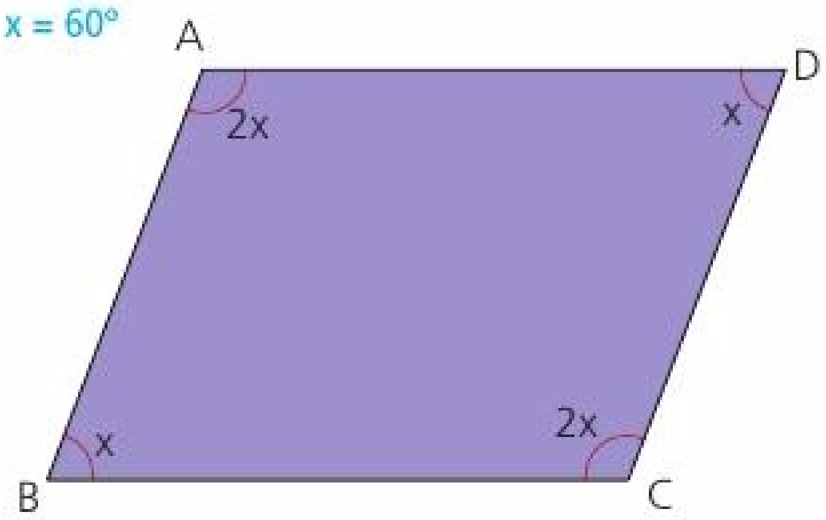
b) x = 79°



c) x = 79°



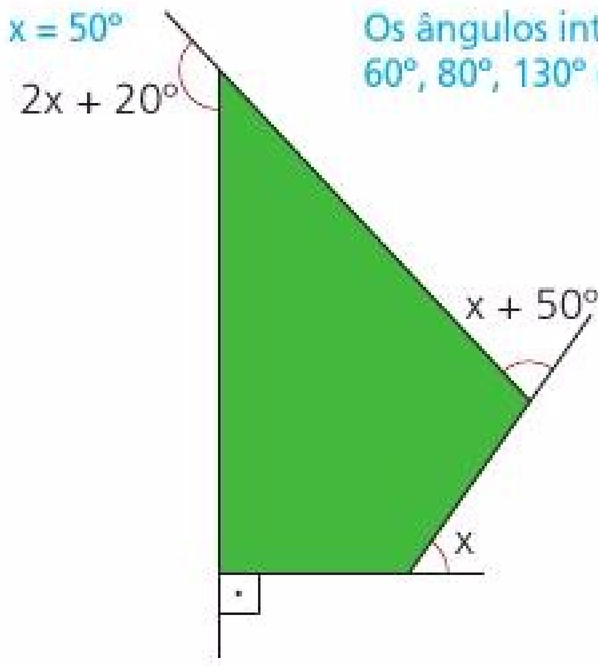
d) x = 60°



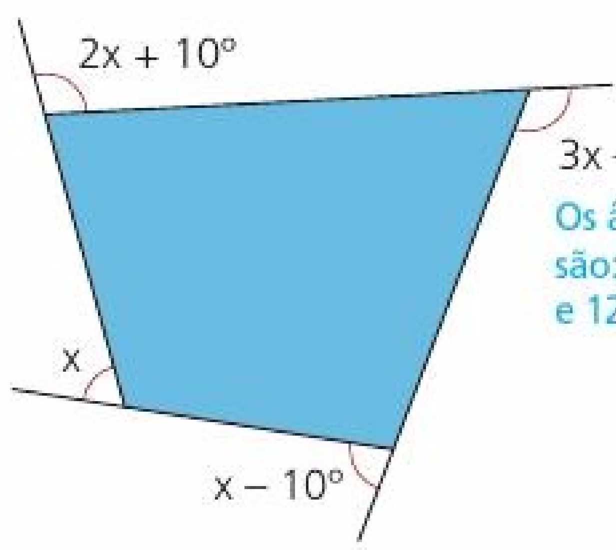
2. Encontre o valor de **x** em cada figura e determine os ângulos internos de cada quadrilátero.

a) x = 50°

Os ângulos internos são: 60°, 80°, 130° e 90°

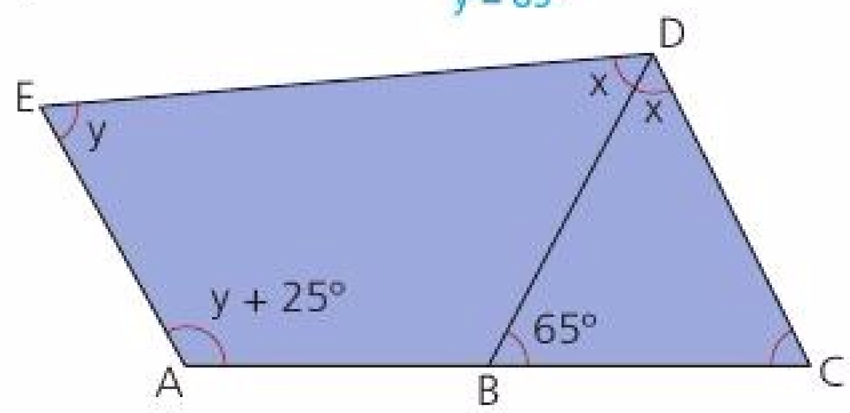


b) x = 60°

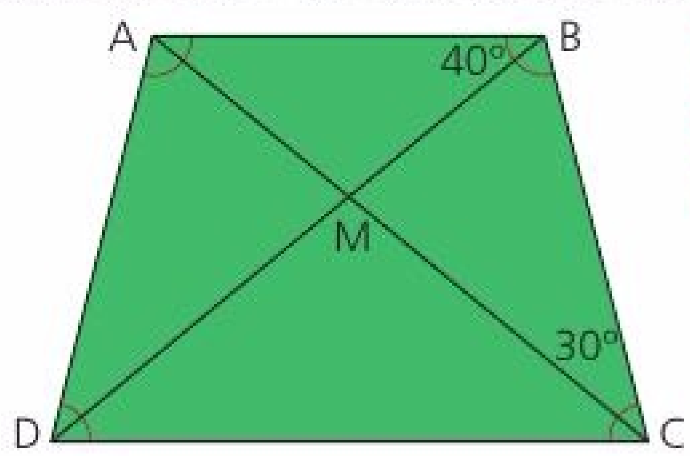


Os ângulos internos são: 70°, 60°, 130° e 120°

3. Na figura, o triângulo DBC é isósceles de base $\overline{BC}$. Determine os ângulos internos do quadrilátero EDAC. x = 50° y = 85°



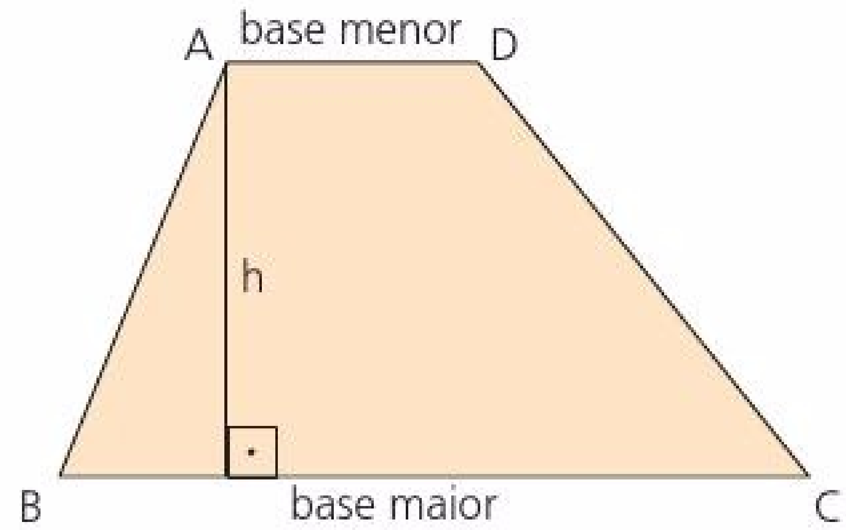
4. No quadrilátero da figura, $\overline{AB}$//$\overline{DC}$ e os triângulos AMB e DMC são isósceles, com bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, respectivamente. Determine os ângulos internos do quadrilátero ABCD.



$\hat{A}$ = 70°
$\hat{B}$ = 70°
$\hat{D}$ = 110°
$\hat{C}$ = 110°

Trapézios

Trapézios são quadriláteros que têm dois lados opostos paralelos. Considere o trapézio da figura a seguir:



- Os lados opostos paralelos ($\overline{AD}$ e $\overline{BC}$) são denominados **bases do trapézio**;
- A **altura h** é a distância entre as bases do trapézio (o segmento de medida **h** é perpendicular às bases).

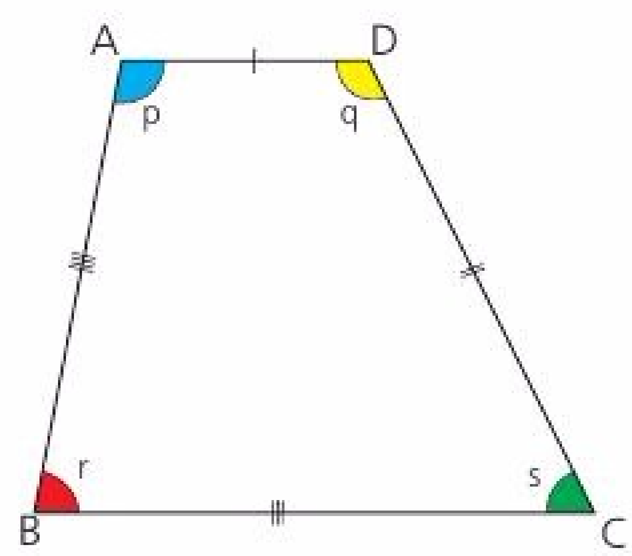
De acordo com as medidas de seus lados e de seus ângulos internos, um trapézio pode ser classificado como:

- trapézio escaleno
- trapézio isósceles
- trapézio retângulo

Vamos estudar as características de cada um deles.

Trapézio escaleno

É o trapézio que tem quatro lados diferentes entre si e quatro ângulos internos também diferentes entre si. Sua característica mais importante é ter as duas bases paralelas.

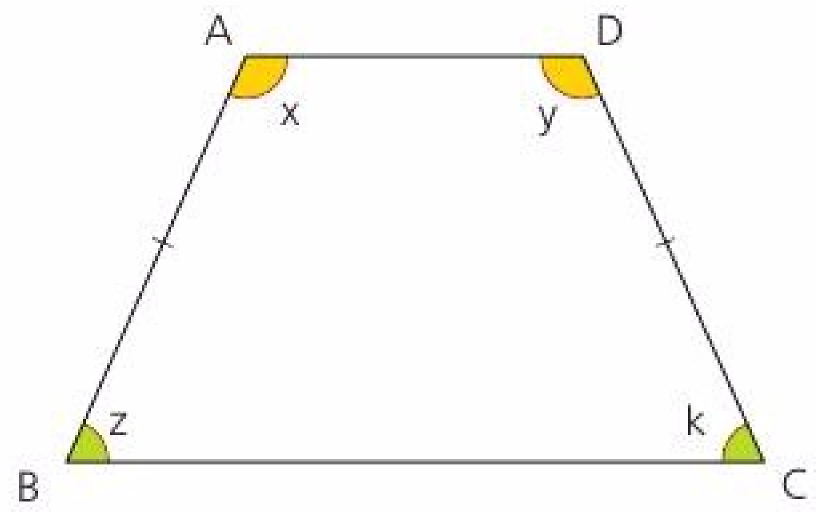


$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{AD} \not\equiv \overline{CD} \not\equiv \overline{BC} \not\equiv \overline{AB} \rightarrow p \not\equiv q \not\equiv s \not\equiv r$$

O símbolo $\not\equiv$ quer dizer **não congruente** (medidas diferentes).

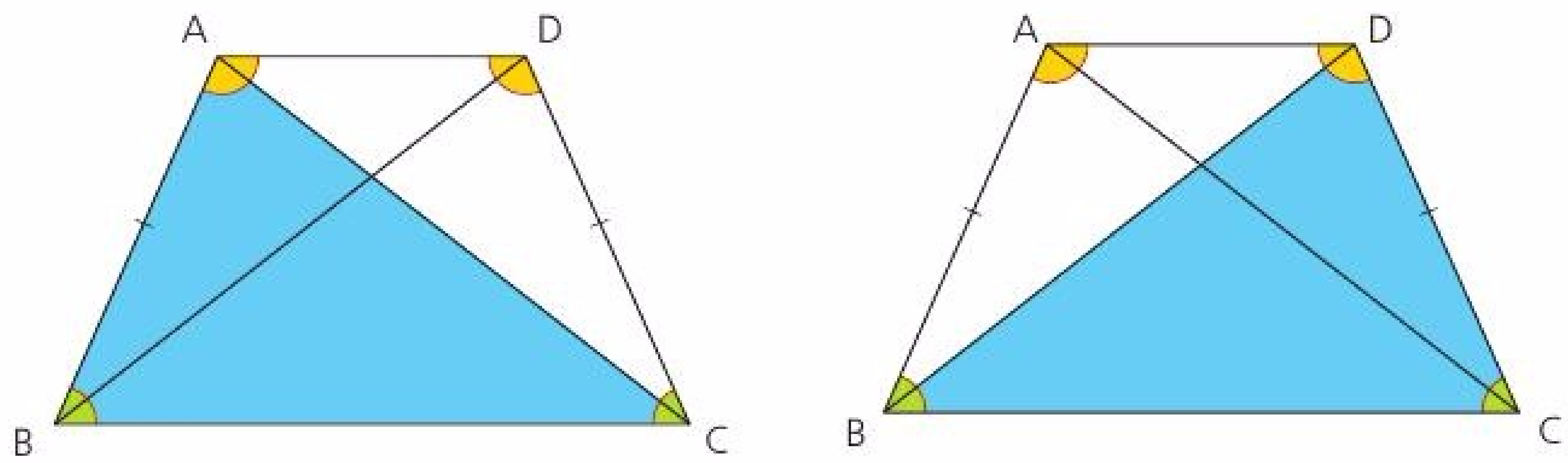
Trapézio isósceles

É aquele em que os lados opostos não paralelos têm a mesma medida. Nesse caso, os ângulos das bases do trapézio serão, dois a dois, **congruentes**.



$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{DC} \rightarrow x \equiv y \text{ e } z \equiv k$$

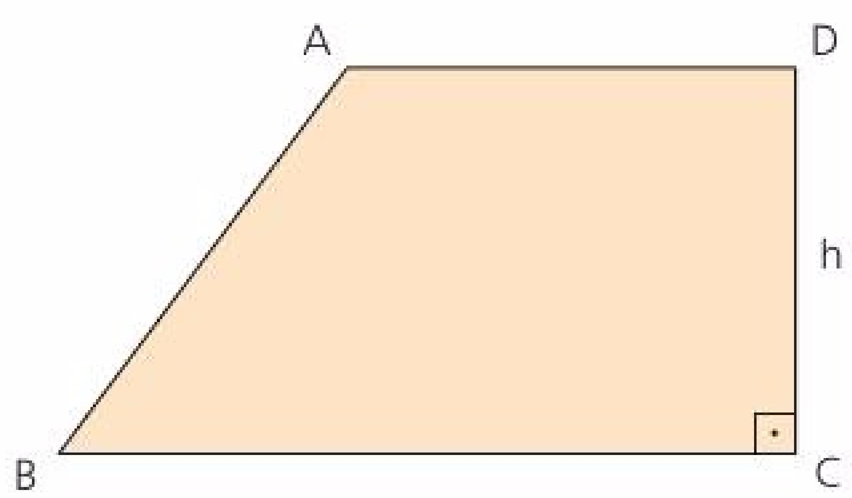
Como consequência da congruência dos ângulos das bases, o trapézio isósceles possui duas diagonais congruentes.



Como as diagonais são congruentes, a base $\overline{BC}$ é comum e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes, podemos concluir que os triângulos ABC e DBC são congruentes.

Trapézio retângulo

É todo trapézio que tem um ângulo reto. Note que no trapézio retângulo um dos lados não paralelos corresponde à altura do triângulo.



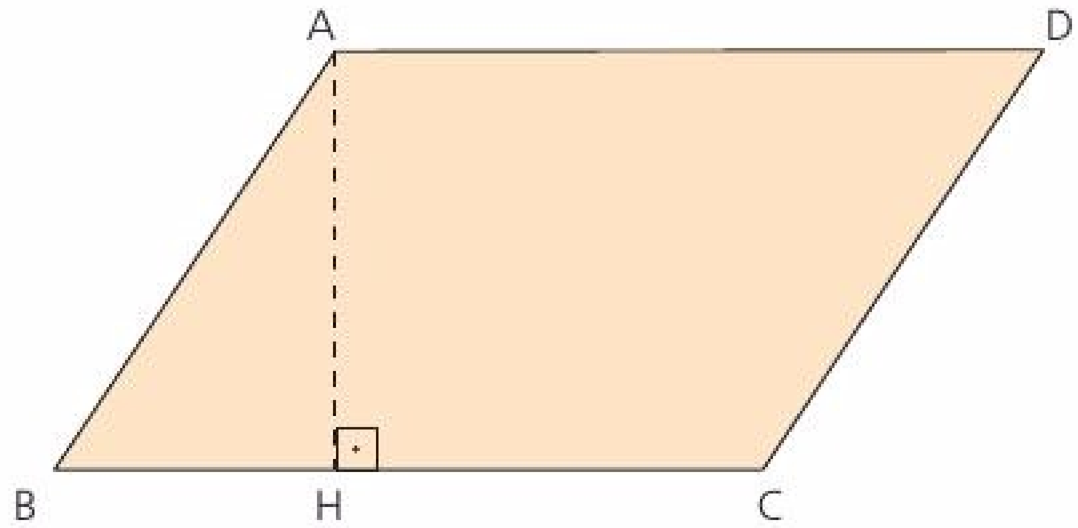
$$h = \overline{DC}$$

O lado $\overline{DC}$ tem a mesma medida da altura **h** do trapézio.

Desenhe cada paralelogramo e explore os seus elementos.

Paralelogramos

Paralelogramo é todo quadrilátero que tem os lados opostos paralelos dois a dois.



Observe no paralelogramo ABCD da figura os principais elementos deste quadrilátero:

- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ são os lados;
- $\overline{AD} // \overline{BC}$ e $\overline{AB} // \overline{CD}$ são os lados opostos paralelos;
- AH é a altura do paralelogramo;
- $\hat{B} \equiv \hat{D}$ são ângulos opostos congruentes;
- $\hat{A} \equiv \hat{C}$ são ângulos opostos congruentes;

Note que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, assim como acontece com os ângulos opostos. Essas condições são determinadas pelo paralelismo dos lados opostos.

Alguns paralelogramos possuem características específicas que recebem nomes particulares. O retângulo, o losango e o quadrado também são paralelogramos. Vamos analisar essas características.

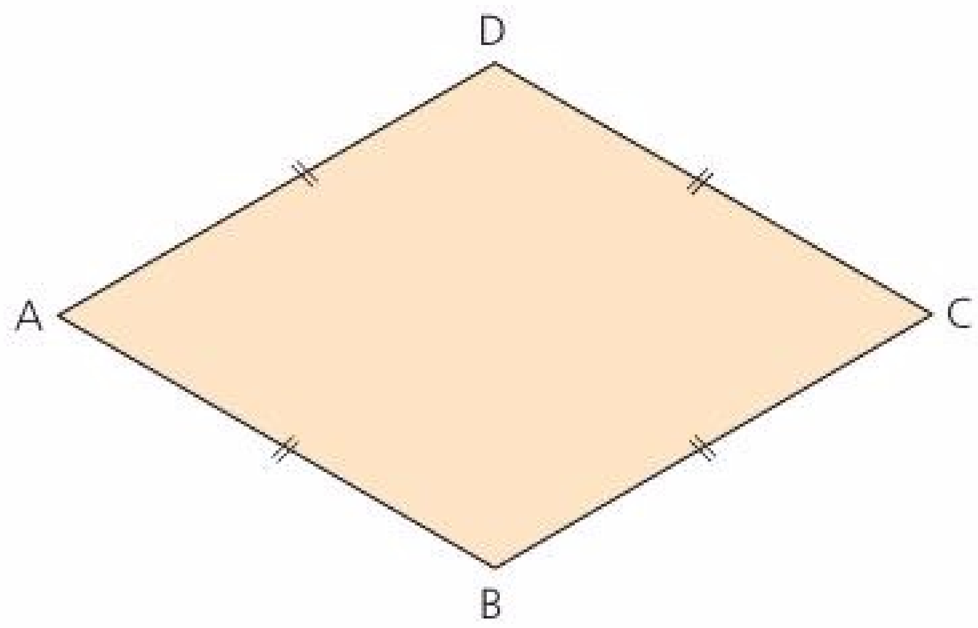
Retângulo

O retângulo é um paralelogramo que tem os quatro ângulos internos congruentes. Como todo quadrilátero tem soma dos ângulos internos igual a 360º, o retângulo tem quatro ângulos internos iguais a 90º.

$$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv 90^\circ$$

Losango

O losango é um paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

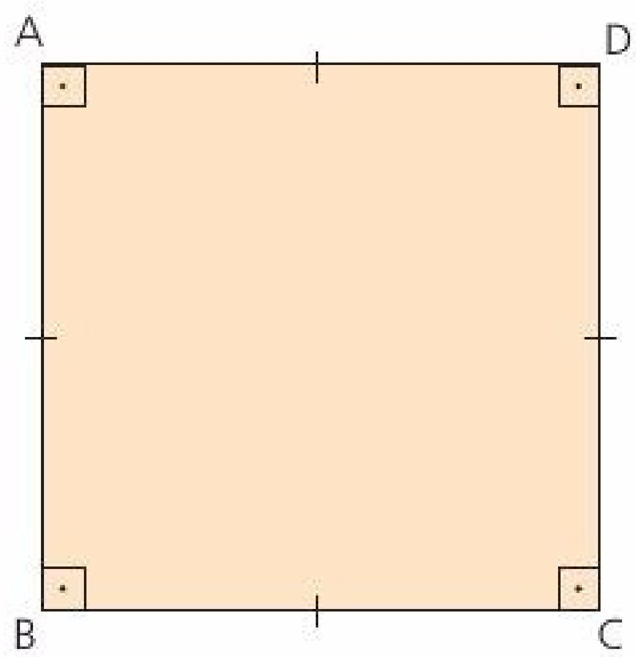


Explore em discussão as semelhanças e as diferenças entre losangos e quadrados.

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

Quadrado

O quadrado é um paralelogramo que tem as características do retângulo e do losango, ou seja, tem os quatro ângulos retos e quatro lados congruentes.



$$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv 90°$$

e

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

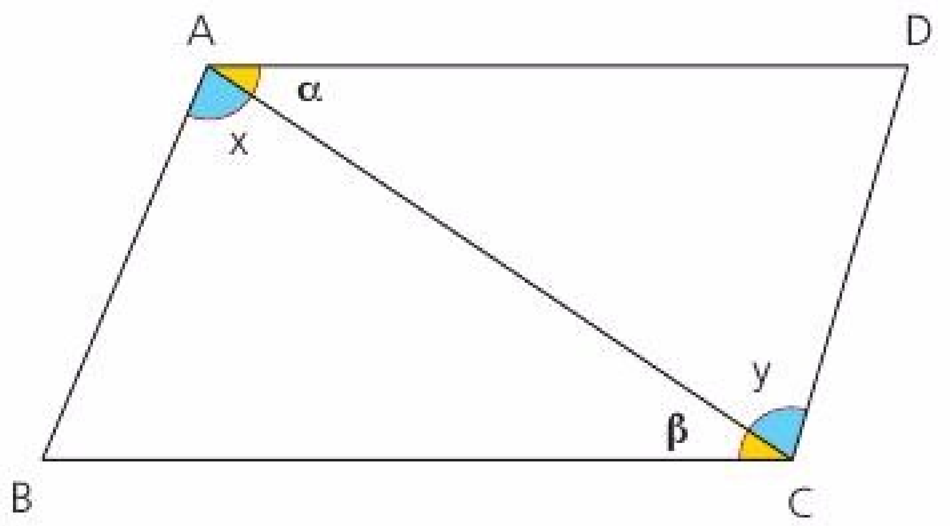
Propriedades dos paralelogramos

Explore as propriedades.

Os paralelogramos, por terem lados opostos paralelos e congruentes e ângulos opostos congruentes, possuem algumas propriedades bastante úteis na solução de problemas geométricos. Vamos enunciar as principais propriedades e demonstrá-las utilizando o que aprendemos sobre ângulos e sobre congruência de triângulos.

1ª propriedade

Uma diagonal de um paralelogramo determina dois triângulos congruentes neste paralelogramo.



No paralelogramo ABCD, no qual $\overline{AC}$ é uma diagonal, temos:

$\alpha \equiv \beta$, pois são ângulos alternos internos ($\overline{AD}//\overline{BC}$);

$\overline{AC}$ é um lado comum dos triângulos ACD e ACB;

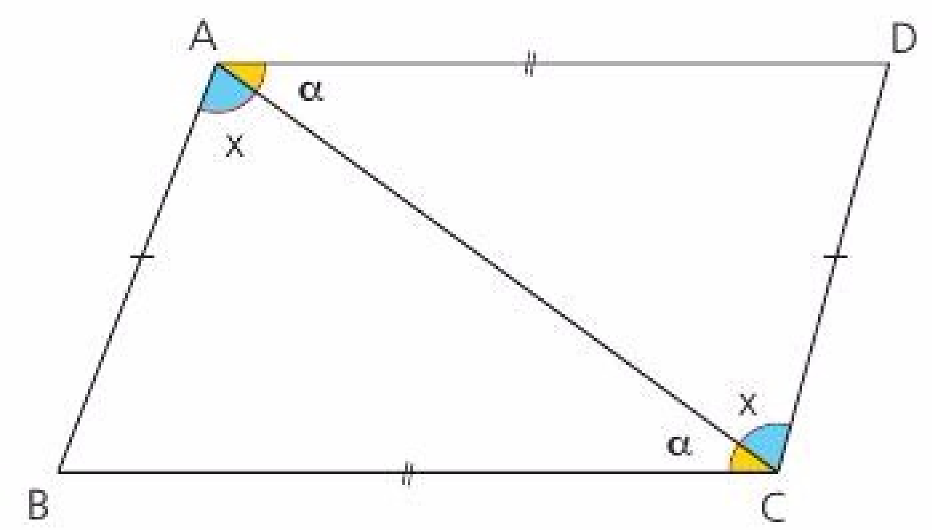
$x \equiv y$, pois são ângulos alternos internos ($\overline{AD}//\overline{BC}$).

Além dessas congruências, temos $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$. Isso nos permite concluir que os triângulos ABC e ADC são congruentes.

Lembre-se de enfatizar as relações angulares.

2ª propriedade

Em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes.



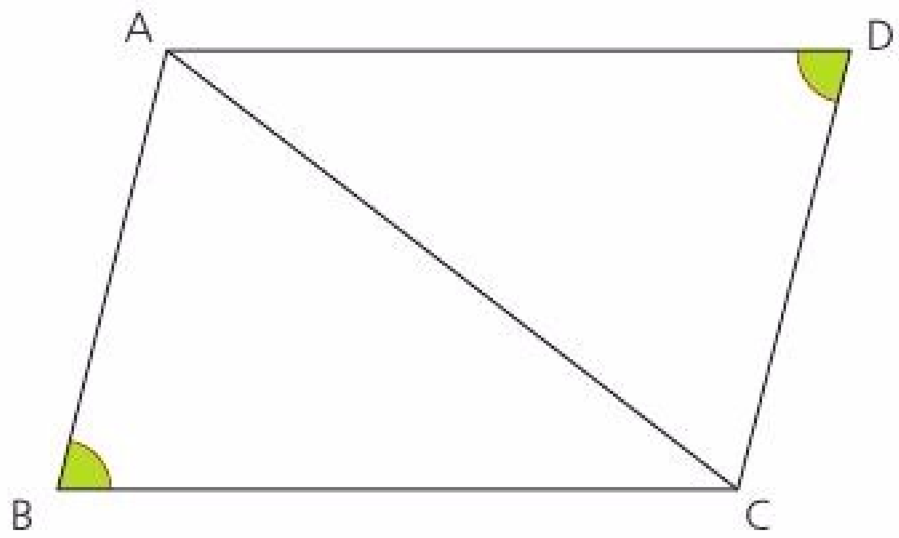
Já sabemos que os triângulos do ABC e ADC, do paralelogramo ABCD são congruentes, tendo, portanto, ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes congruentes.

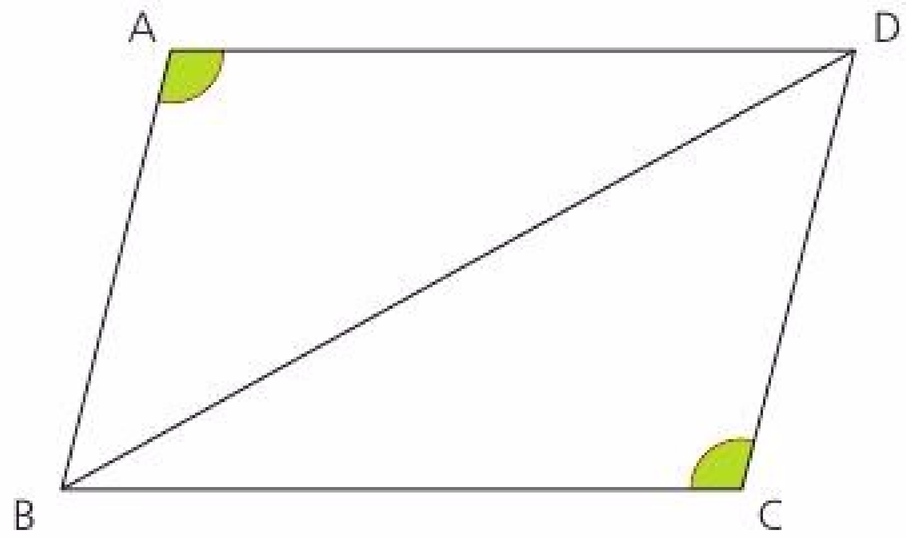
Assim, considerando o paralelogramo ABCD, temos:

- $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois ambos são opostos ao ângulo x;
- $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$, pois ambos são opostos ao ângulo α.

3ª propriedade

Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes



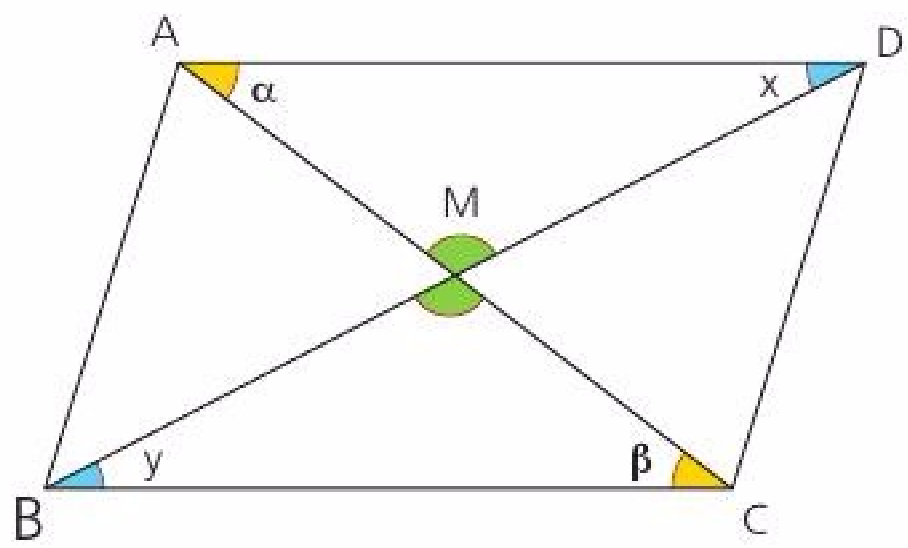


Os triângulos ABC e ADC do paralelogramo ABCD são congruentes e o mesmo ocorre com ABD e BCD. Logo:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \quad \text{e} \quad \hat{A} \equiv \hat{C}$$

4ª propriedade

As diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seus pontos médios.



No paralelogramo ABCD, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais. Temos, portanto:

$\alpha \equiv \beta$, pois são ângulos alternos internos ($\overline{AD} // \overline{BC}$);

$\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois são lados opostos do paralelogramo;

$x \equiv y$, pois são ângulos alternos internos ($\overline{AD} // \overline{BC}$).

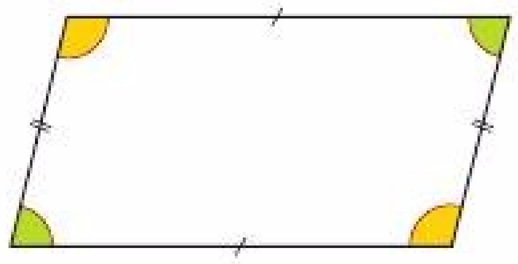
Considerando, também, que em M teremos dois ângulos opostos pelo vértice, os triângulos AMD e BMC são congruentes, o que nos permite concluir que as diagonais cortam-se ao meio, pois:

$\overline{AM} \equiv \overline{MC} \rightarrow$ M é ponto médio de $\overline{AC}$

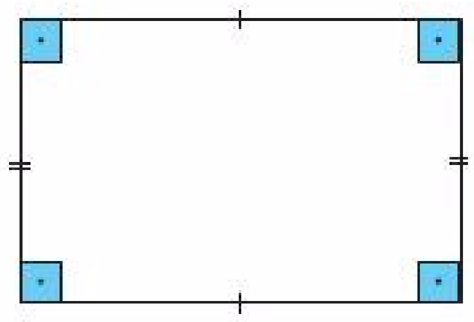
$\overline{BM} \equiv \overline{MD} \rightarrow$ M é ponto médio de $\overline{BD}$

Considerando todas as características e propriedades dos paralelogramos, podemos ordená-los da seguinte forma:

Paralelogramo

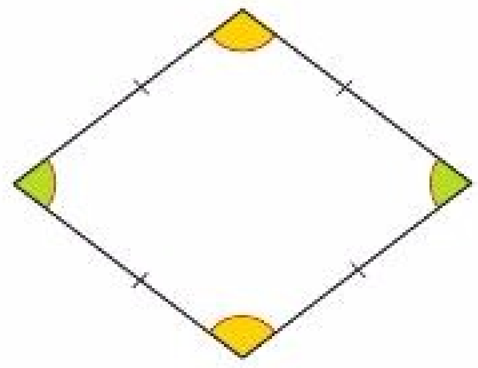


Retângulo



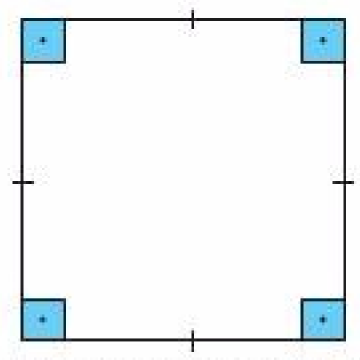
Paralelogramo com quatro ângulos internos congruentes

Losango



Paralelogramo com quatro lados congruentes

Quadrado



Paralelogramo com quatro ângulos internos congruentes e quatro lados congruentes

Observe que o quadrado reúne todas as características do retângulo e do losango, que são tipos específicos de paralelogramos.

Atividades

5. Utilizando os códigos da tabela de quadriláteros abaixo, associe cada propriedade a seguir a um ou mais quadriláteros.

I.	Paralelogramo	IV.	Trapézio isósceles
II.	Trapézio	V.	Quadrado
III.	Retângulo	VI.	Losango

a) Lados opostos congruentes. I; III; V; VI

b) As diagonais têm a mesma medida. III, V

c) Ângulos opostos congruentes. I, III, V; VI

d) As diagonais se cruzam no ponto médio. I, III, IV, V, VI

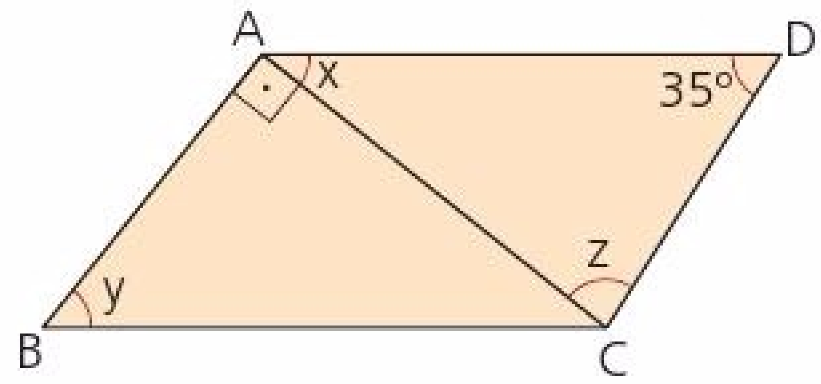
e) Os ângulos adjacentes a um lado contido numa mesma transversal são suplementares. I, II, III, IV, V, VI

f) As diagonais são perpendiculares entre si. V, VI

g) As diagonais cortam-se ao meio, são congruentes e são perpendiculares entre si. V, VI

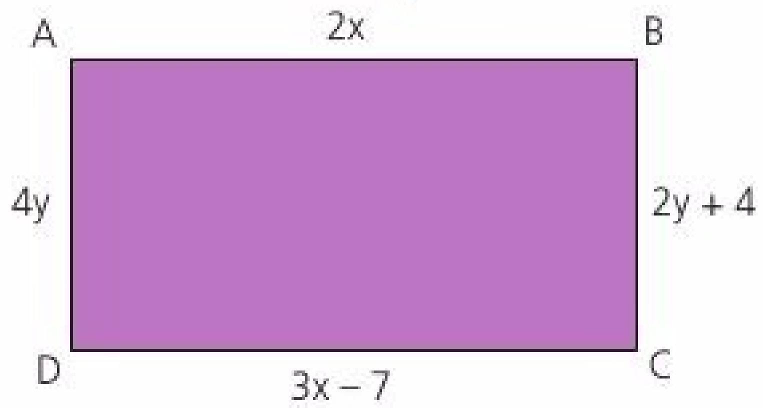
h) Os ângulos adjacentes a uma mesma base são congruentes. III, V

6. Determine o valor de **x**, **y** e **z** no paralelogramo ABCD: $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 90°$



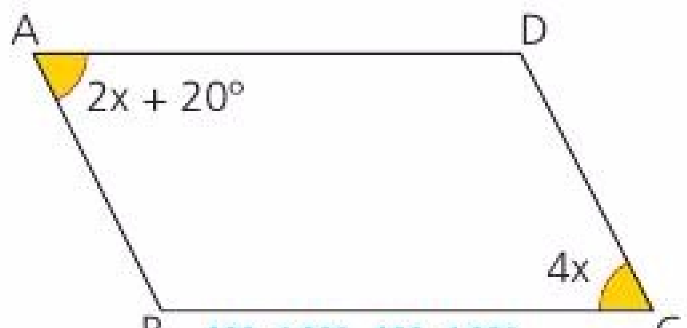
7. Determine, em cm, os valores de **x** e **y** e, em seguida, o perímetro do paralelogramo da figura .

x = 7 cm
y = 2 cm
Perímetro 2p = 18 cm



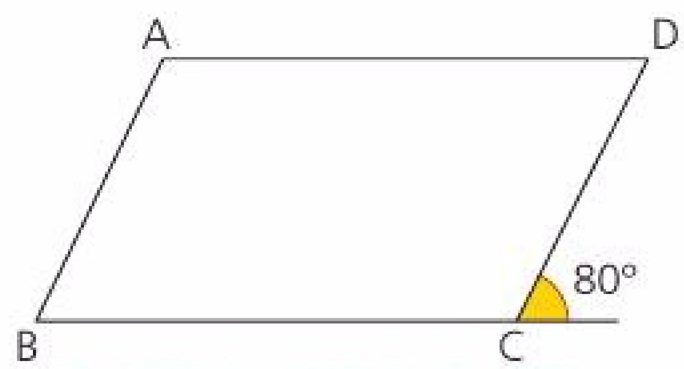
8. Em cada caso, determine as medidas dos ângulos internos dos paralelogramos:

a)



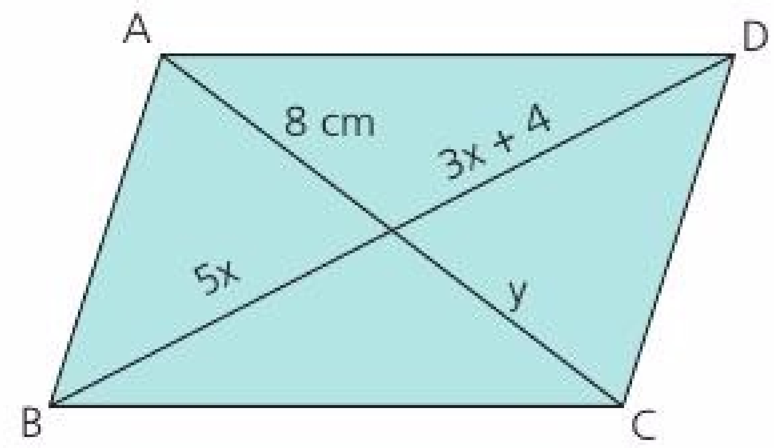
40°, 140°, 40°, 140°

b)



C = 100°, A = 100°, B = D = 80°

9. Calcule a medida em cm das diagonais do paralelogramo da figura a seguir: 16 e 20

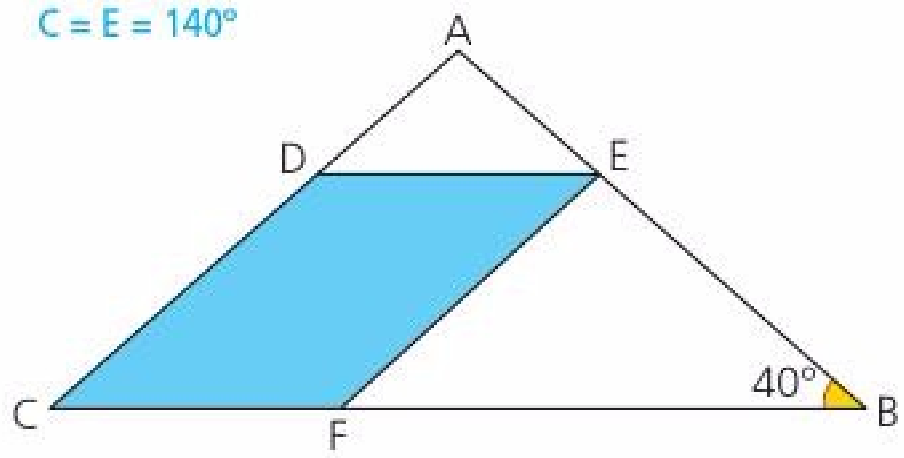


10. Um paralelogramo ABCD tem perímetro de 44 cm e a diferença entre dois lados consecutivos é 2 cm. Determine seus lados.

y = 10 e x = 12

11. O triângulo ABC da figura é isósceles, $\overline{DE}//\overline{CF}$ e $\overline{EF}//\overline{DC}$. Determine a medida dos ângulos internos do paralelogramo DEFC.

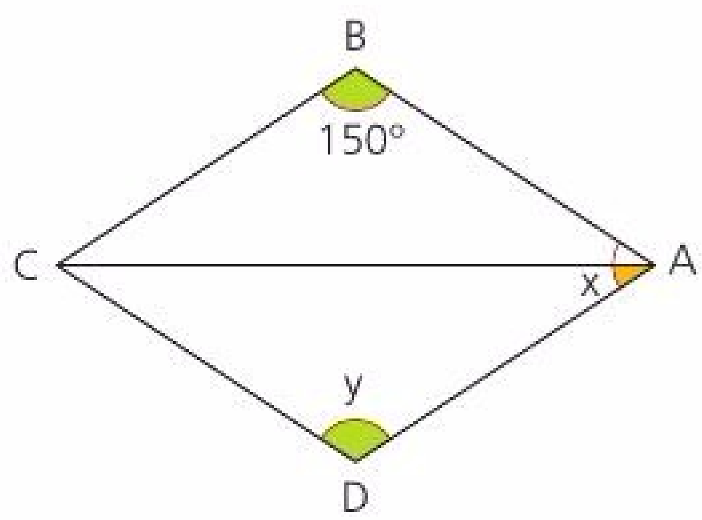
D = F = 140°
C = E = 140°



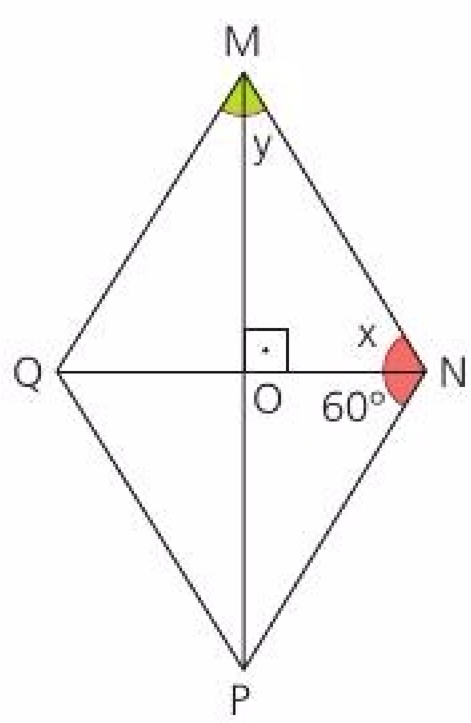
Para estudar

12. Determine **x** e **y** em cada losango.

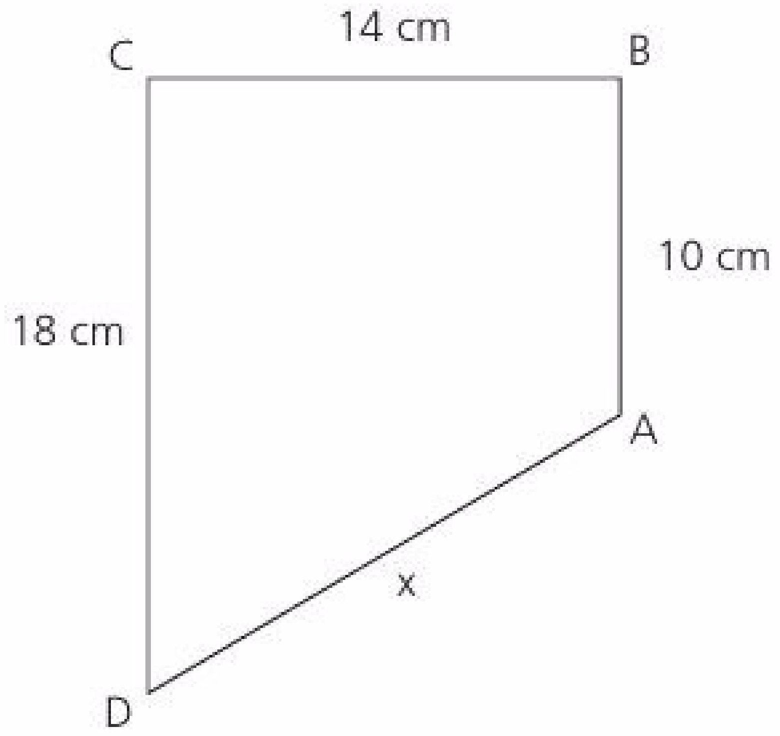
a)



b)

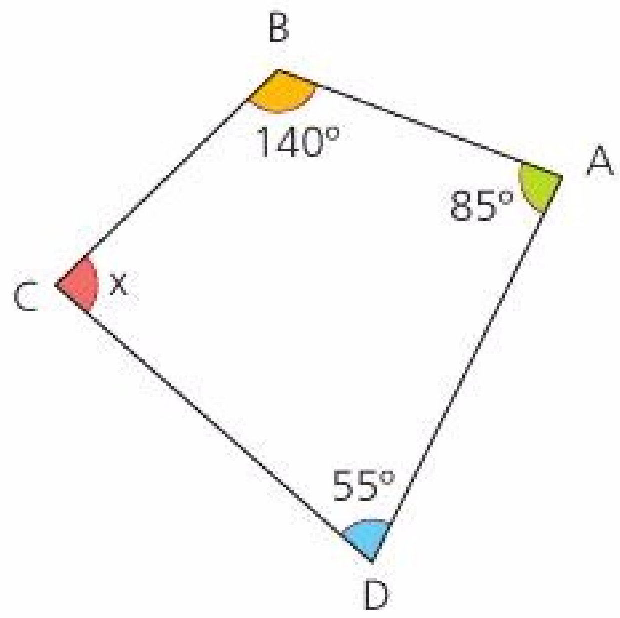


13. Determine o valor de **x** sabendo que o perímetro do quadrilátero ABCD é 58 cm.

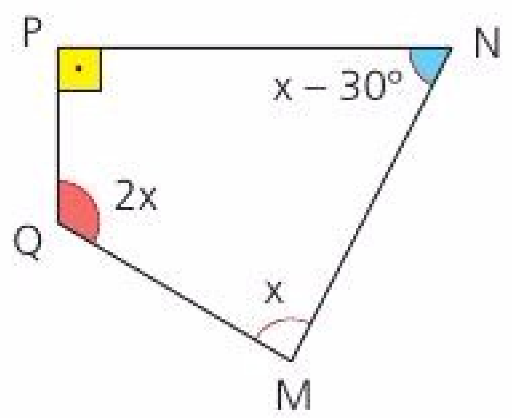


14. Determine o valor de **x** em cada caso.

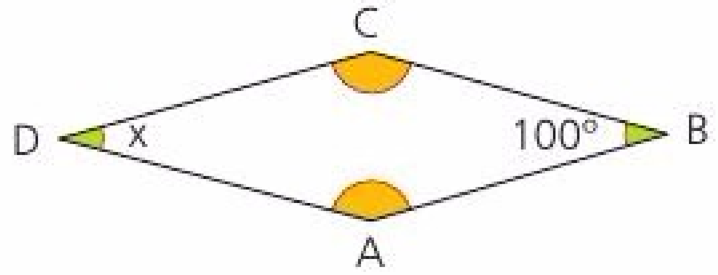
a)



b)

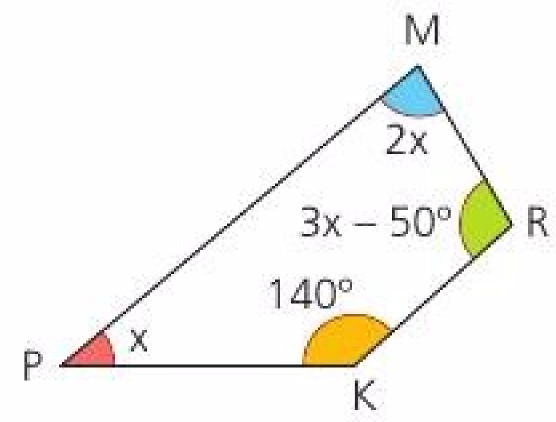


c)

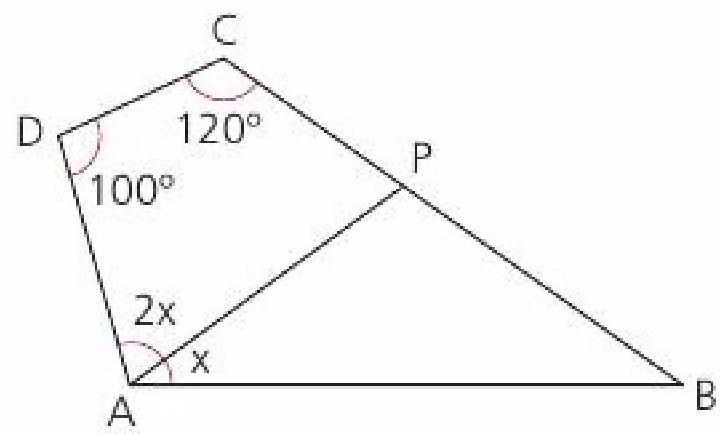


$\overline{AB} // \overline{DC}$ e $\overline{CB} // \overline{AD}$

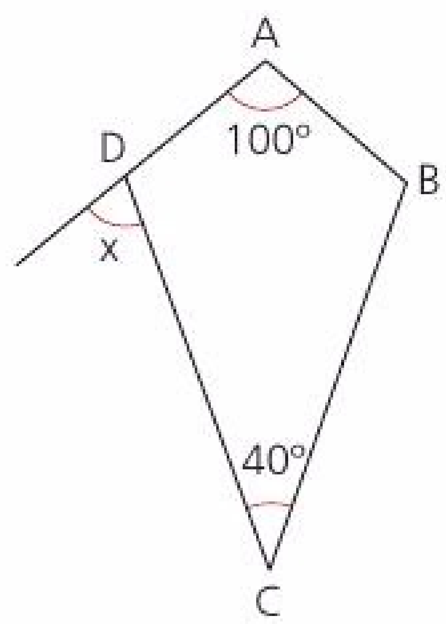
d)



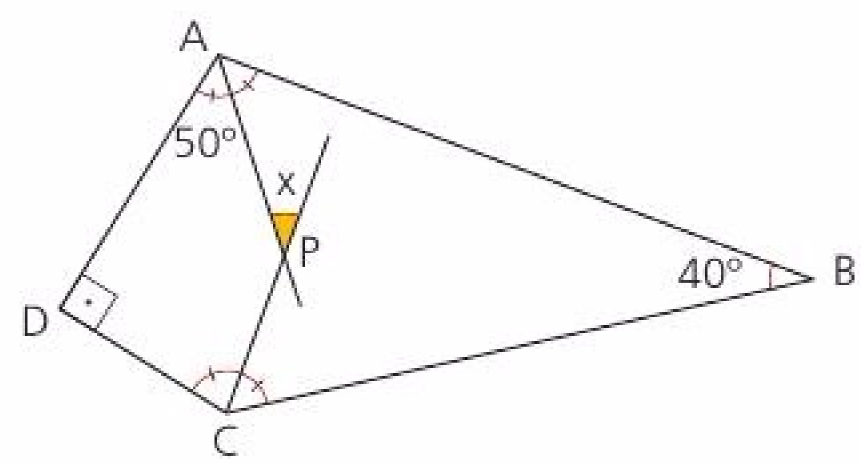
15. Determine o valor **x**, sabendo que os lados $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são congruentes.



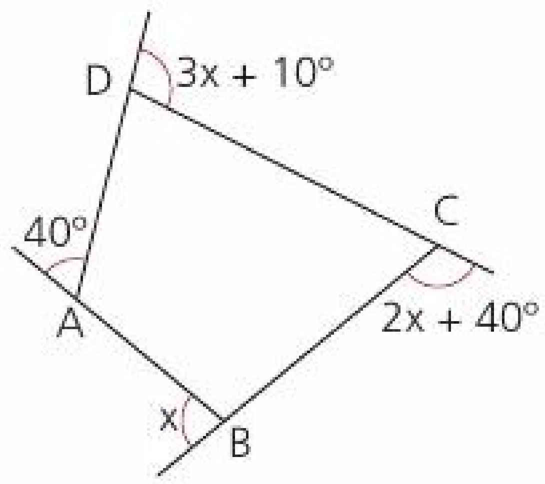
16. Na figura a seguir, $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{BC}$. Determine a medida **x**.



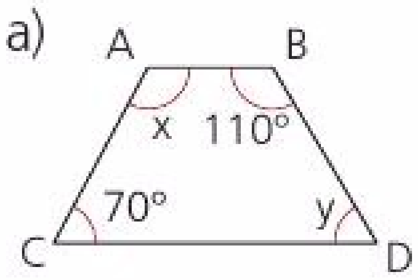
17. Na figura a seguir as semirretas $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{CP}$ são bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$. Encontre o valor do ângulo **x** formado pelo cruzamento dessas bissetrizes.

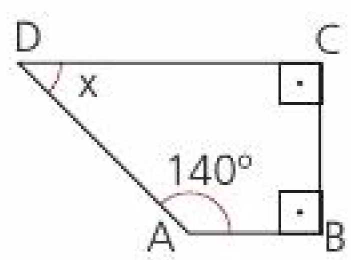


18. Encontre o valor de **x** e determine os ângulos internos do quadrilátero ABCD.



19. Cada um dos quadriláteros a seguir é um trapézio. Determine os valores de **x** e **y**.

a)


b)


20. Determine as medidas dos ângulos de um paralelogramo no qual cada um dos ângulos agudos é metade do ângulo obtuso a ele oposto.

21. Num trapézio retângulo, o ângulo agudo tem medida igual a $\frac{1}{4}$ do ângulo obtuso. Determine as medidas dos ângulos internos desse trapézio.

22. Determine o que se pede em cada caso a seguir.

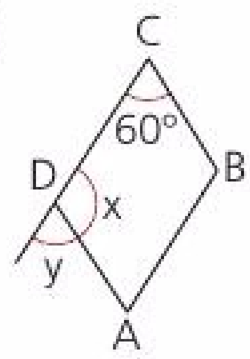
a) Os lados de um paralelogramo de perímetro 96 cm, no qual um lado é o dobro do outro.

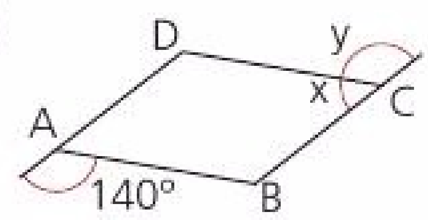
b) Os lados de um paralelogramo de perímetro 56 cm, no qual um lado é o triplo do outro.

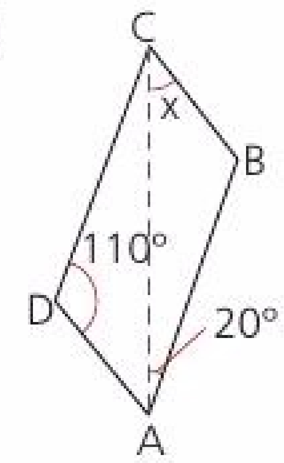
c) Os lados de um losango de perímetro 100 m.

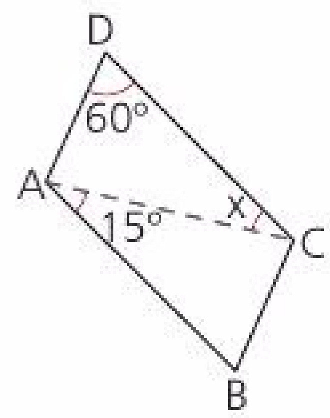
d) Os lados de um trapézio isósceles de perímetro 24 cm, base menor 4 cm e lados iguais de 5 cm.

23. Calcule as medidas **x** e **y** em cada paralelogramo a seguir.

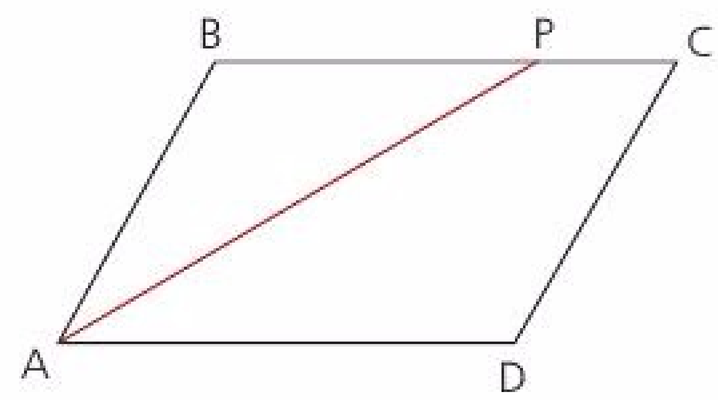
a)


c)


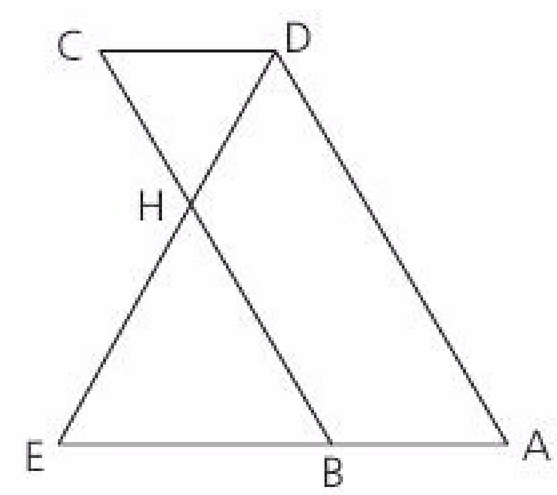
b)


d)


24. No paralelogramo a seguir, $\overline{AP}$ é um segmento contido na bissetriz de $\hat{A}$. Sabendo-se que $\overline{AB}$ = 6 cm e $\overline{PC}$ = 3 cm, determine o perímetro do paralelogramo ABCD.



25. Determine o perímetro do paralelogramo ABCD.



$\overline{BH} = \overline{EB}$

$\overline{AD}$ = 20 cm

$\overline{BH}$ = 12 cm

DAE é equilátero

Resolução das atividades

1. a) $x + 110° + 95° + 80° = 360°$

$x = 75°$

b) $x + 20° + x + x + 2° + x + 22° = 360°$

$4x + 44° = 360°$

$4x = 316° \rightarrow x = 79°$

c) $x + 90° + x + 4° + 2x - 50° = 360°$

$4x + 44° = 360° \rightarrow x = 79°$

d) $6x = 360°$

$x = 60°$

2. a) $2x + 20° + x + 50° + x + 90° = 360°$

$4x + 160° = 360° \rightarrow x = 50°$

Os ângulos internos são: 60°, 80°, 130° e 90°

b) $2x + 10° + 3x - 60° + x - 10° + x = 360°$

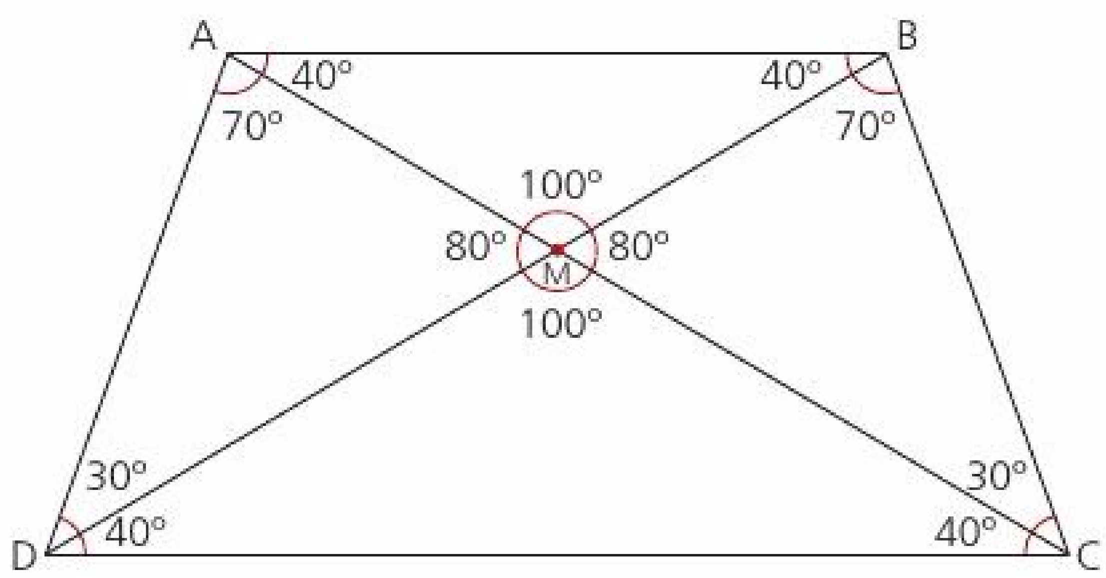
$7x = 420° \rightarrow x = 60°$

Os ângulos internos são: 70°, 60°, 130° e 120°

3. $x + 65° + 65° = 180° \rightarrow x = 50°$

$y + y + 25° + 50° + 135° = 360° \rightarrow y = 85°$

4. Os ângulos internos são:



$\hat{A} = 70°$

$B = 70°$

$D = 110°$

$C = 110°$

5. a) I; III; V; VI

b) III, V

c) I, III, V; VI

d) I, III, IV, V, VI

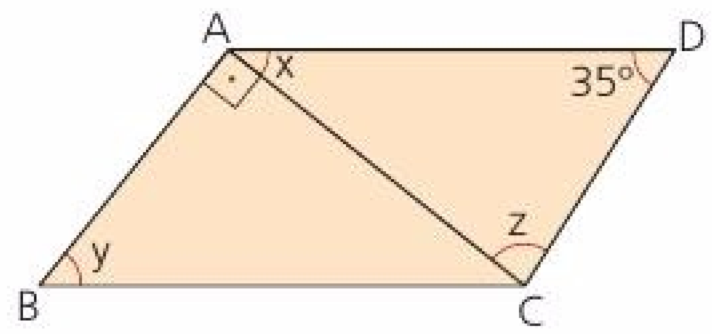
e) I, II, III, IV, V, VI

f) V, VI

g) V, VI

h) III, V

6.



$x = 55°$ $y = 35°$

$y = 35°$ $\Delta ABC \rightarrow 90° + 35° + x = 180°$

$z = 90°$ $x = 55°$

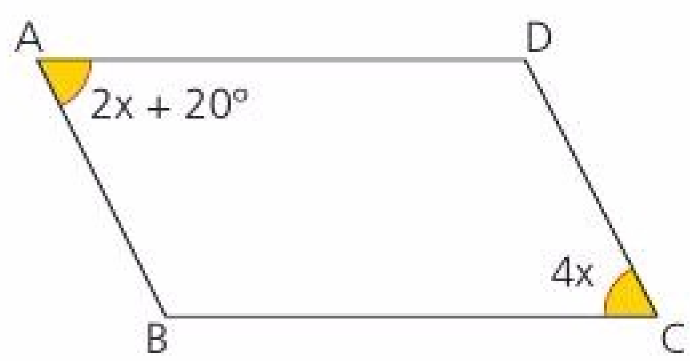
$\Delta ACD \rightarrow z = 90°$

7. $2x = 3x - 7 \rightarrow x = 7$ cm

$4y = 2y + 4 \rightarrow z = 2$ cm

$2p = 14 + 4 \rightarrow 2p = 18$ cm

8. a)

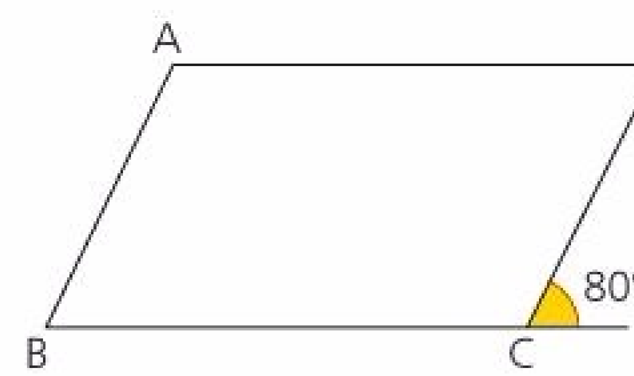


$2x + 20° = 4x \rightarrow x = 10°$.

Medidas dos ângulos internos:

40° e 140°.

b)



$\hat{C} = 100° \rightarrow \hat{A} = 100°$ e $\hat{B} = \hat{D} = 80°$.

9. $y = 8$ cm $\rightarrow \overline{AC} = 16$ cm

$5x = 3x + 4$

$2x = 4$

$x = 2$ cm

$\overline{BD} = 10 + 10 \rightarrow \overline{BD} = 20$ cm

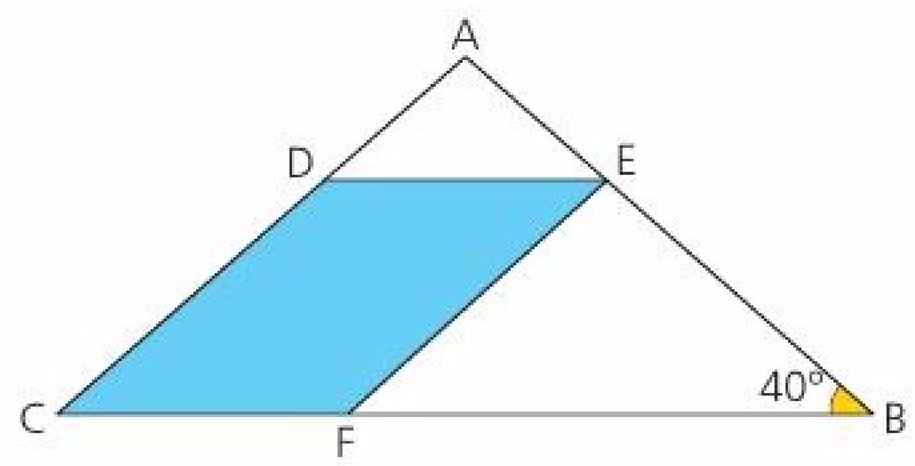
10. $x + x + y + y = 44$

$2x + 2y = 44 \rightarrow x + y = 22$

$x - y = 2 \rightarrow x = 2 + y$

$2 + y + y = 22 \rightarrow y = 10$ e $x = 12$

11.



$\hat{D} = \hat{F} = 140°$

$\hat{C} = \hat{E} = 140°$

Respostas da seção Para estudar

12. a) $x = 15°$

$y = 150°$

b) $x = 60°$

$y = 30°$

13. $x = 16$

14. a) $x = 80°$

b) $x = 90°$

c) $x = 100°$

d) $x = 45°$

15. $x = 35°$

16. $x = 70°$

17. $\hat{C} = 130°$

$x = 25°$

18. $x = 45°$

19. a) $x = 110°$ e $y = 70°$

b) $x = 40°$

20. $x = 120°$, $y = 60°$

21. $x = 144°$

Os ângulos internos são 144°, 36°, 90° e 90°

22. a) $x = 16$ cm

Os lados têm 16 cm, 16 cm, 16 cm e 32 cm

b) $x = 7$ cm

Os lados têm 7 cm, 7 cm, 21 cm e 21 cm

c) Os lados têm 25 m

d) $x = 7{,}5$ cm

Os lados são 7,5 cm; 7,5 cm; 4 cm; 5 cm

23. a) $x = 120°$ e $y = 60°$

b) $x = 50°$

c) $x = 40°$ e $y = 140°$

d) $x = 15°$

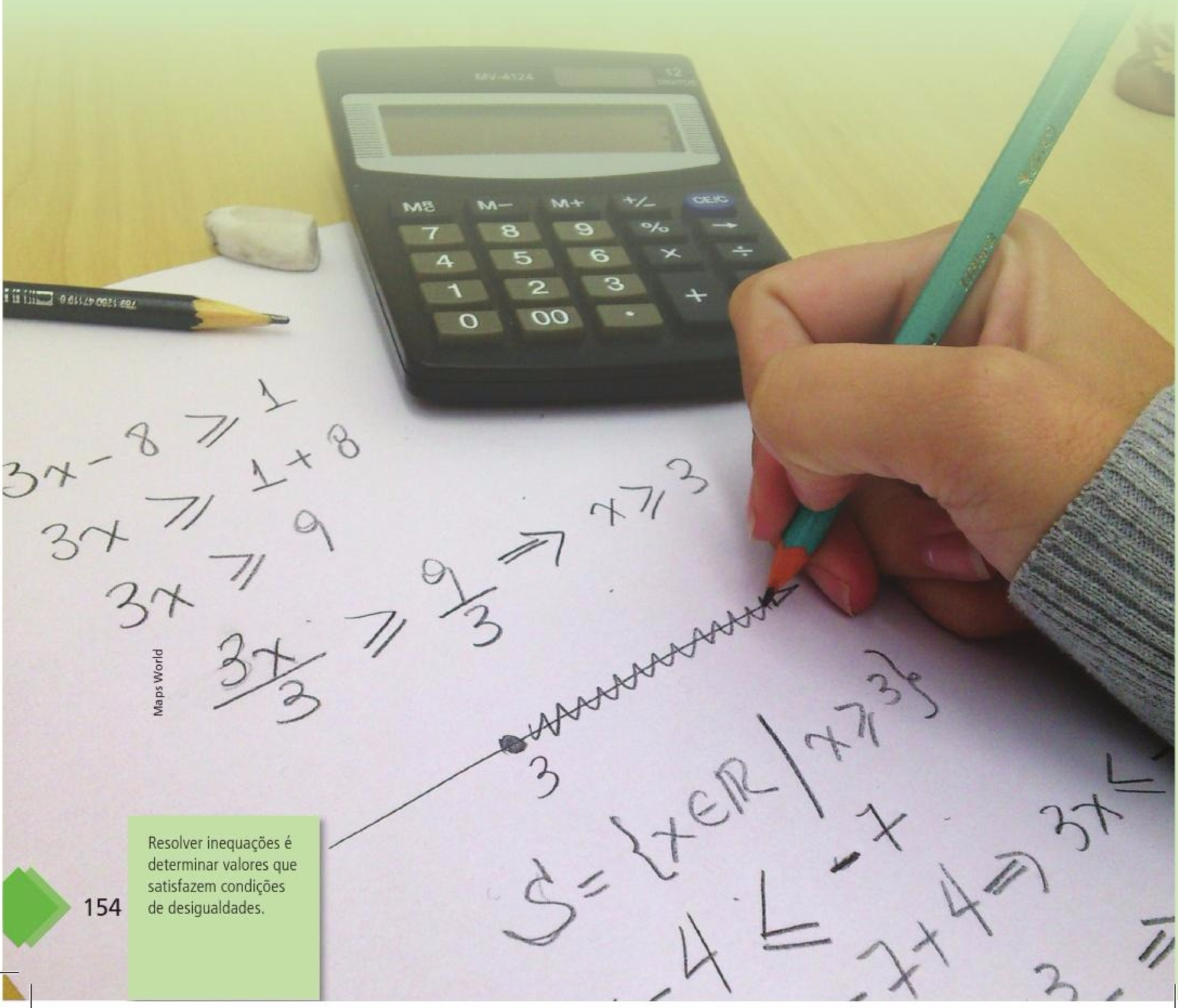
24. $2p = 30$ cm

25. $2p = 56$ cm

capítulo 7

Inequações de 1º grau

- Inequações de 1º grau
- Representação geométrica da solução de uma inequação
- Sistema de inequações de 1º grau



Maps World

Resolver inequações é determinar valores que satisfazem condições de desigualdades.

Conversa Inicial

Já vimos durante o nosso curso de Matemática que uma **equação** é uma sentença que se define por uma igualdade. Porém, existem inúmeras situações em que nos deparamos com sentenças matemáticas que não estabelecem igualdades. São sentenças que estabelecem **desigualdades** do tipo maior, menor, maior ou igual ou, ainda, menor ou igual. Essas sentenças são denominadas **inequações**.

Vamos analisar uma situação em que uma família de quatro pessoas (pai, mãe e dois filhos) decide ir ao cinema. Eles sabem que deverão gastar R$ 10,00 no estacionamento onde irão parar o carro e que dispõem de, no máximo, R$ 118,00 para fazer todo o programa, incluindo o lanche depois do cinema.

Antes de sair de casa, já reservaram R$ 48,00 para o lanche da família (R$ 12,00 por pessoa).

Qual é o valor máximo que podem pagar pelos ingressos, se os dois filhos pagam metade?

Organizamos a sentença matemática que representa a situação da seguinte maneira:

Valor máximo para gastar = 118 – 48 = 70

Estacionamento = 10

Valor do ingresso dos pais = x

Valor do ingresso dos filhos = $\mathbf{\frac{x}{2}}$

Leia o texto da página e escreva no quadro o processo de conversão do texto escrito em um modelo matemático, como representado na situação problema. Explore o tema e promova a discussão em sala de aula.

$$\underbrace{2 \cdot x}_{\text{ingresso dos pais}} + \underbrace{2 \cdot \frac{x}{2}}_{\text{ingresso dos filhos}} + \underbrace{10}_{\text{estacionamento}} \underbrace{\leq}_{\text{deve ser menor ou igual}} \underbrace{70}_{\text{valor máximo para gastar}}$$

Vamos ler essa sentença para compreender o significado da uma inequação. A primeira coisa que percebemos é que esta é uma desigualdade. Podemos ver , também, que apesar de dispor de R$ 118,00 para o programa, a família reservou R$ 48,00 para o lanche, restando R$ 70,00 para cobrir os ingressos do cinema e o estacionamento.

O processo de resolução de uma inequação é o mesmo que utilizamos para resolver equações, salvo algumas variações que você irá aprender nesse capítulo. No caso da família do nosso problema, a resolução é simples. Acompanhe:

$$2 \cdot x + 2 \cdot \frac{x}{2} + 10 \leq 70$$

$$2x + x + 10 \leq 70$$

$$3x \leq 60 \rightarrow x \leq 20.$$

A conclusão é que o valor do ingresso do cinema deve ser menor ou igual a R$ 20,00, o que é o mesmo que dizer que deve ser de **no máximo**, R$ 20,00. Dessa forma, sobrará dinheiro para tomar um lanche gostoso depois do filme e não ultrapassar o limite de gastos que estava estabelecido quando saíram de casa.

Como dissemos, salvo algumas questões específicas relativas aos processos de operação inversa, os processos de resolução de inequações são os mesmos utilizados ao resolver equações.

Inequações de 1º grau

Inequação de 1º grau é toda desigualdade que pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$ax + b > 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$, com $a \in R^*$ e $b \in R$

Cada uma das formas definidas acima é uma **forma geral** da inequação, ou seja, é uma desigualdade em relação ao zero. Veja alguns exemplos de inequações e como elas são reduzidas para sua forma geral pelos mesmos processos que utilizamos ao resolver equações:

- $3x - 1 > x + 2 \rightarrow 2x - 3 > 0$
- $4x + 7 \leq 3 \rightarrow 4x + 4 \leq 0$
- $3(x - 2) > 2 - x \rightarrow 3x - 6 > 2 - x \rightarrow 4x - 8 > 0$

Resolução de inequações de 1º grau

Para descobrir se um número real é ou não solução de uma inequação, basta substituí-lo nas expressões envolvidas e verificar se a desigualdade é satisfeita. Em geral, não queremos saber apenas se um número é solução de uma desigualdade, mas resolvê-la, ou seja, encontrar todos os valores da variável que fazem com que a desigualdade seja verdadeira.

Uma inequação de 1º grau pode ser resolvida da seguinte forma:

- reduz-se a inequação para a forma geral;
- utilizando os processos de operação inversa, isolamos **x**, tomando cuidado com o que ocorre com a desigualdade quando multiplicamos ou dividimos os dois membros por valores negativos;
- escolhe-se o intervalo que satisfaz a inequação;
- dá-se o conjunto solução.

Observe atentamente os exemplos:

- Vamos resolver a inequação $3x - 12 \geq 0$.

$$3x - 12 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 12 \rightarrow x \geq 4$$

Neste caso, dividimos os dois membros por 3, o que não alterou o sentido da desigualdade.

Assim, a solução é $S = \{x \in R \,/\, x \geq 4\}$.

Note que o conjunto solução indica que qualquer número real **x**, **maior ou igual a 4**, irá satisfazer a desigualdade $3x - 12 \geq 0$.

- Vamos agora encontrar o conjunto solução da inequação

$$-4x + 7 < 5(2 - x).$$

Escrevemos a inequação na forma geral:

$-4x + 7 < 5(2 - x) \rightarrow -4x + 7 < 10 - 5x$

$x - 3 < 0 \rightarrow x < 3$

$\mathbf{S = \{x \in R \ / \ x < 3\}}$.

- Veja, agora, o que ocorre quando resolvemos a inequação $2x - 6 > 3x - 8$:

$2x - 6 > 3x - 8 \rightarrow 2x - 3x - 6 + 8 > 0$

$-x + 2 > 0 \rightarrow -x > -2 \rightarrow x < 2 \rightarrow \mathbf{S = \{x \in R \ / \ x < 2\}}$.

Note que na última passagem da resolução invertemos o sinal da desigualdade, pois multiplicamos ambos os membros por -1. Isso ocorre porque, para quaisquer dois números reais, se tivermos $a > b$, seus simétricos serão tais que $-a < -b$.

Observe os exemplos:

a) $5 > 2 \rightarrow$ multiplicando por $(-1) \rightarrow -5 < -2$

b) $-8 < -2 \rightarrow$ dividindo por $(-2) \rightarrow 4 > 1$

c) $\dfrac{3}{2} > 0 \rightarrow$ multiplicando por $(-1) \rightarrow -\dfrac{3}{2} < 0$

Fernanda Youssef

Atividades

1. Dê o conjunto solução das inequações:

a) $2x - 6 > 8$ $S = \{x \in R \ / \ x > 7\}$

b) $2x + 18 < 0$ $S = \{x \in R \ / \ x < -9\}$

c) $-5x + 5 \geq 0$ $S = \{x \in R \ / \ x \leq 1\}$

d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{3} \leq 2$ $S = \left\{x \in R \ / \ x \leq \dfrac{20}{3}\right\}$

e) $6x + 3 < 3x + 18$ $S = \{x \in R \ / \ x < 5\}$

f) $8(x + 3) > 12\,(1 - x)$ $S = \left\{x \in R \ / \ x > -\dfrac{3}{5}\right\}$

g) $(x + 10) > (-x + 6)$ $S = \{x \in R \ / \ x > -2\}$

2. Resolva as inequações:

a) $3x - 5 \geq -2x + 1$ $S = \left\{x \in R \ / \ x \geq \dfrac{6}{5}\right\}$

b) $-4x + 3 \leq 2(x + 1)$ $S = \left\{x \in R \ / \ x \geq \dfrac{1}{6}\right\}$

c) $-3x + 5(2x + 8) \leq 3x - 8$ $S = \{x \in R \ / \ x \leq -12\}$

d) $-\dfrac{2}{3}x + 4 > \dfrac{1}{2}x + 1$ $S = \left\{x \in R \ / \ x < \dfrac{18}{7}\right\}$

Representação geométrica da solução de uma inequação

Quando encontramos o conjunto solução de uma inequação, podemos representá-lo na reta numérica. Saber representar o conjunto solução na reta numérica é extremamente importante para a solução de sistemas de inequações.

Observe os exemplos de representação:

- Vamos resolver a inequação $4x - 12 \geq 0$.

$$4x - 12 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 12 \rightarrow x \geq 3$$

Para chamar a atenção sobre "bolas cheias" e "bolas vazias", levante a questão da indivisibilidade por zero. A divisão por um número x é válida em toda a reta real, exceto em x = 0, como pode ser diagramado na figura abaixo.

Assim, a solução é $S = \{x \in R \,/\, x \geq 3\}$, que é representado na reta numérica da seguinte forma:

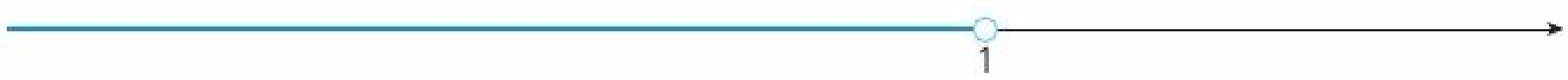
Note na representação geométrica que $x = 3$ faz parte da solução. Por essa razão, indicamos o 3 com "bola cheia".

- Veja, agora a representação geométrica da solução da inequação

$$8x - 1 < 2x + 5$$

$$8x - 2x - 1 - 5 < 0 \rightarrow 6x < 6 \rightarrow x < 1 \rightarrow S = \{x \in R \,/\, x < 1\}$$

Nesse caso, representaremos o valor $x = 1$ com "bola vazia"



Atividades

3. Resolva cada inequação a seguir e represente o conjunto solução na reta numérica.

a) $2x + 1 \leq x + 6$ $x \leq 5$

b) $2 - 3x > x + 14$ $x < -4$

c) $2(x + 3) > 3\,(1 - x)$ $x > -\frac{3}{5}$

d) $3(1 - 2x) < 2(x + 1) + x - 7$ $x > \frac{8}{9}$

e) $\frac{x}{3} - \frac{(x + 1)}{2} < \frac{(1 - x)}{4}$ $x < 9$

f) $(x + 3) > (-x-1)$ $x > -2$

g) $[1 - 2(x-1)] < 2$ $x > \frac{1}{2}$

Sistema de inequações de 1º grau

Duas ou mais inequações de 1º grau formam o que chamamos **sistema de inequações do 1º grau**.

O conjunto solução de um sistema de inequações é determinado pelas soluções comuns a cada inequação. Esse conjunto de soluções comuns é chamado de **intersecção dos conjuntos solução S_1 e S_2** e é representado por $S = S_1 \cap S_2$.

Isso significa que, para achar o conjunto solução, devemos representar as soluções das duas inequações na reta numérica e verificar se ambas possuem um intervalo de intersecção.

Acompanhe os exemplos para aprender como encontrar o conjunto solução de um sistema de inequações:

- Vamos resolver o sistema de inequações dado por:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 5 \\ 4x - 18 < 6 \end{cases}$$

Considerando a 1ª inequação:

$$2x - 3 \geq 5$$

$$2x - 8 \geq 0 \rightarrow 2x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

$$S_1 = \{x \in R \mid x \geq 4\}$$

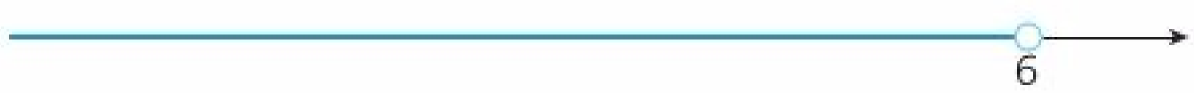
Ao contrário do sistema de equações do primeiro grau, um sistema de inequações do primeiro grau não pressupõe duas variáveis. Basicamente, é a intersecção de dois conjuntos, S1 e S2, que representam soluções de duas desigualdades.

Considerando a 2ª inequação:

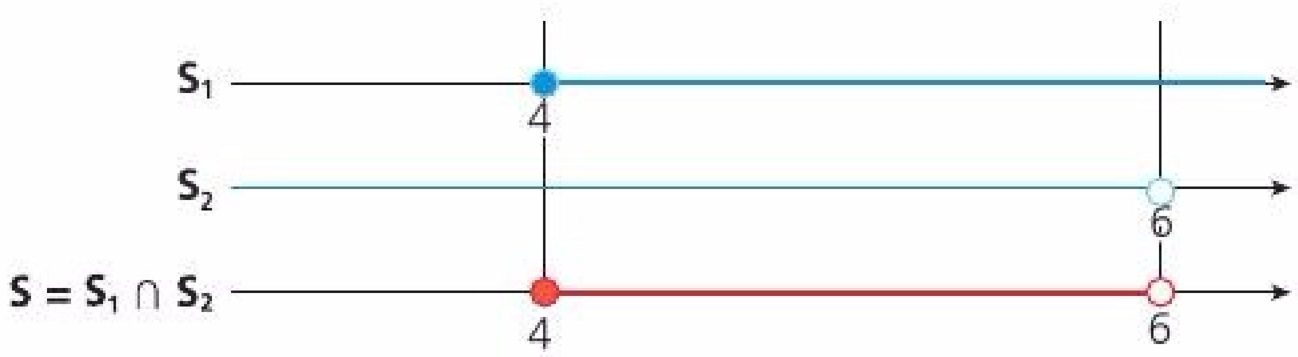
$$4x - 18 < 6$$

$$4x - 24 < 0 \rightarrow 4x < 24 \rightarrow x < 6$$

$$S_2 = \{x \in R \mid x < 6\}$$



Fazendo a intersecção entre o conjunto solução da 1ª inequação e da 2ª, temos:



Logo, $\mathbf{S = \{x \in R \mid 4 \leq x < 6\}}$.

- Agora, vamos resolver uma inequação que é denominada de **inequação simultânea**, pois estabelece duas desigualdades simultaneamente:

$$2 \leq 3x + 4 \leq 7.$$

Para isso, inicialmente desdobramos em duas inequações e formamos um sistema de duas inequações:

$$\begin{cases} 3x + 4 \geq 2 \\ 3x + 4 \leq 7 \end{cases}$$

Resolvendo a 1ª inequação:

$$3x + 4 \geq 2$$

$$3x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

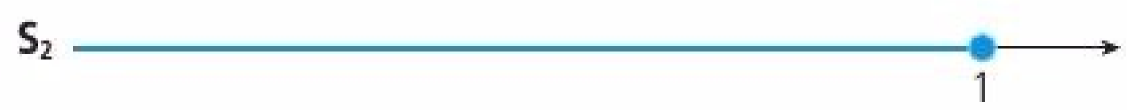
$$S_1 = \left\{x \in R \;/\; x \geq -\frac{2}{3}\right\}$$

Resolvendo a 2ª inequação:

$$3x + 4 \leq 7$$

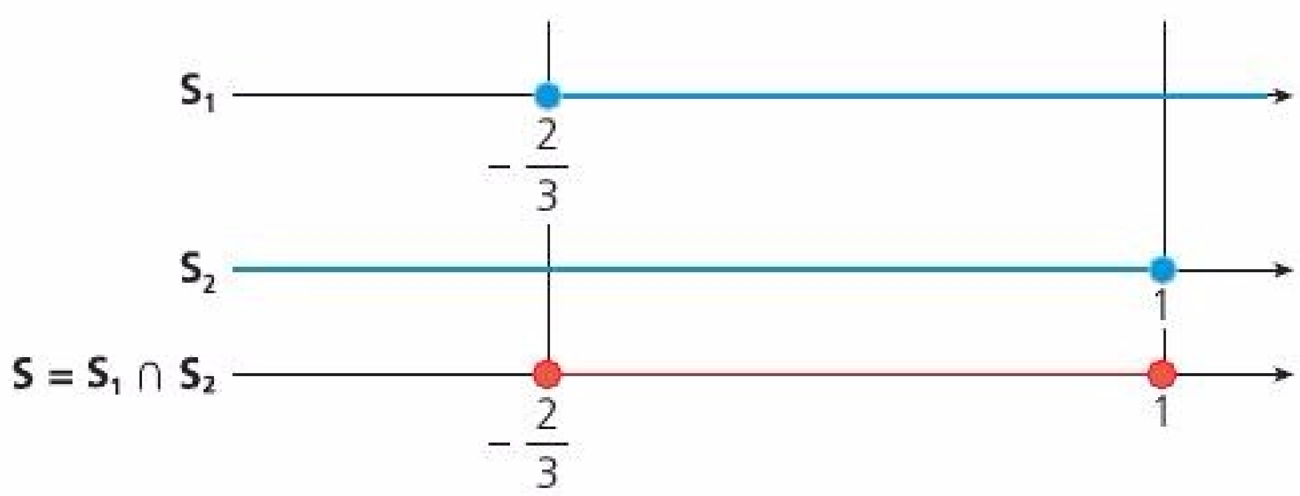
$$3x - 3 \leq 0 \rightarrow 3x \leq 3 \rightarrow x \leq 1$$

$$S_2 = \{x \in R \;/\; x \leq 1\}$$



Fazendo a intersecção entre os conjuntos soluções, temos:

Para exercitar o conceito de maior ou menor com números negativos, peça ao aluno para testar a inequação: escolha um número $x_1 < \frac{2}{3}$ (por exemplo, −1), um número x_2 tal que $\frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1$ (por exemplo, 0) e um número $x_3 > 1$ (por exemplo 2). Com isto, mostra-se que para os valores x_1 e x_3 as desigualdades são falsas em pelo menos uma delas e para os valores x desigualdades são verdadeiras.



$$\mathbf{S = \left\{x \in R \;/\; -\frac{2}{3} \leq x \leq 1\right\}}$$

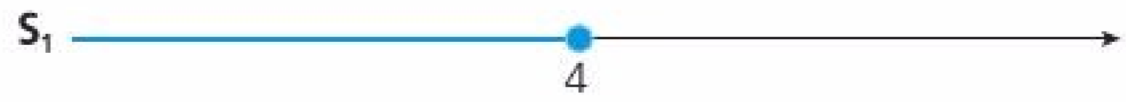
- Observe, agora, o que acontece com o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 5 \\ 4x - 18 > 6 \end{cases}$$

A primeira inequação tem o seguinte conjunto solução:

$2x - 3 \leq 5 \rightarrow x \leq 4$

$S_1 = \{x \in R \,/\, x \leq 4\}$

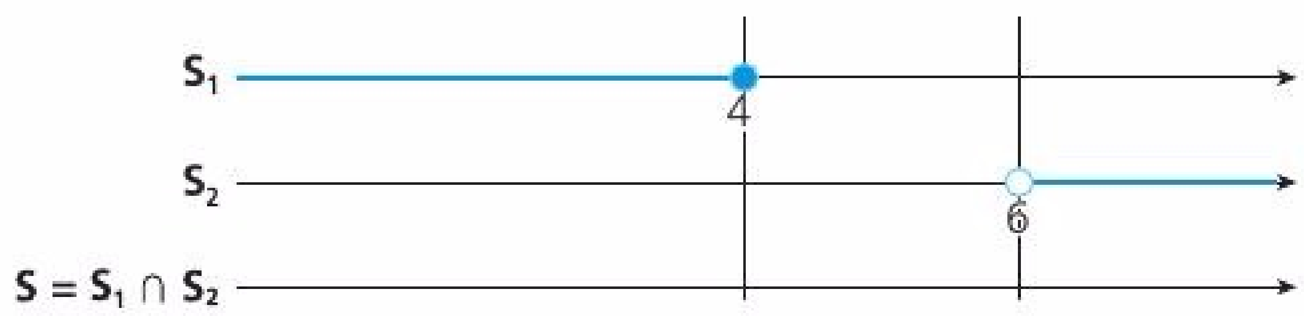


A segunda inequação terá o seguinte conjunto solução:

$4x - 18 > 6 \rightarrow 4x \geq 24 \rightarrow x > 6$

$S_1 = \{x \in R \,/\, x > 6\}$

Ao buscarmos a intersecção entre S_1 e S_2, veremos que ela é o conjunto vazio, pois não existe nenhum número que é, simultaneamente, menor ou igual a 4 e maior que 6. Observe que não há intervalo numérico comum nas duas representações.



Logo, a solução do sistema de inequações é **S = Ø**.

Atividades

4. Resolva os sistemas de inequações do 1º grau:

a) $\begin{cases} 3x + 1 \geq 13 \\ x - 3 < 8 \end{cases}$ $S = \{x \in R \,/\, 4 \leq x < 11\}$

b) $\begin{cases} 4 - x < 6 \\ 2x - 3 \geq 5 \end{cases}$ $S = \{x \in R \,/\, x \geq 4\}$

c) $\begin{cases} 3x - 1 < 17 \\ 2x - 3 > 5 \end{cases}$ $S = \{x \in R \,/\, 4 < x < 6\}$

d) $\begin{cases} -x - 1 > 1 \\ 2x - 3 > 5 \end{cases}$ $S = \varnothing$

5. Resolva as inequações:

a) $4 \leq 2x + 1 \leq 6$ $S = \left\{x \in R \,/\, \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$

b) $9 - x \leq 2x - 4 \leq 6$ $S = \left\{x \in R \,/\, \frac{13}{3} \leq x \leq 5\right\}$

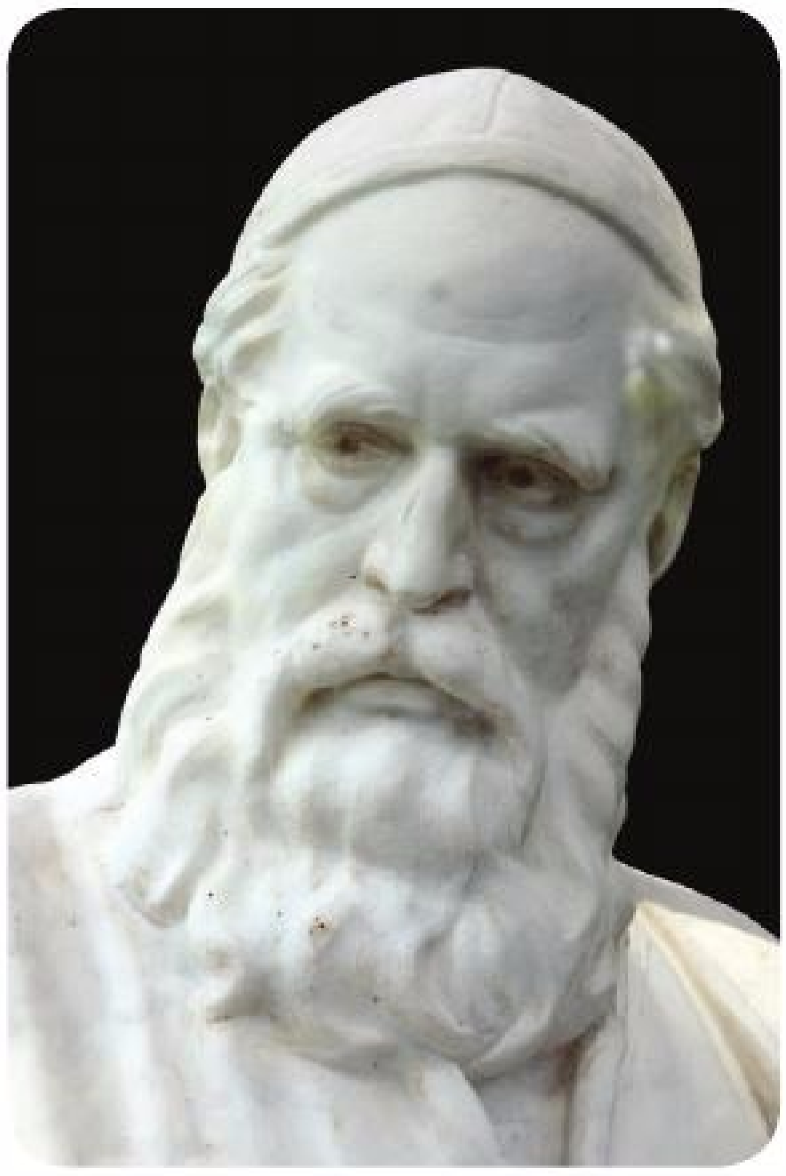
c) $5x \leq 7x + 3 \leq x - 2$ $S = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{5}{6}\right\}$

d) $3 - 2x \leq 6x + 1 \leq 2x + 4$
$S = \left\{x \in R \,/\, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$

Quando, quem e onde

A arte de resolver equações

Na Idade Média, os árabes conseguiram expressivos avanços no estudo da álgebra. Já no princípio do século IX, existia em Bagdá uma espécie de universidade que era chamada de "Casa da Sabedoria". Entre seus membros mais destacados encontrava-se Al-Khowarizmi (780-850 da era cristã), considerado por muitos como o precursor da Álgebra. Mais adiante, ainda em Bagdá, destacou-se outro matemático árabe de grande importância. Seu nome era Omar Khayyam e se tornou notável por ter proposto métodos bastante inovadores para a época para a resolução de equações. É de Omar Khayyam a célebre frase que define a álgebra como "*a arte de resolver equações*". Esta definição e o grande desenvolvimento da álgebra pelos árabes manteve-se durante séculos e difundiu-se em toda a Europa a partir da presença árabe no sul da Espanha.


Muhamed Madi Kalim

Omar Khayyam (1050 – 1123)

Para estudar

6. Dê o conjunto solução das inequações:

a) $3x - 6 > 6$

b) $3x - 18 < 0$

c) $-x + 3 \geq 0$

d) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{3} \leq 2$

e) $5x + 3 < -3x - 2$

f) $7(x - 3) > 2\ (3 - x)$

g) $3(x + 1) > (-2x + 6)$

7. Resolva as inequações:

a) $2x - 5 \geq -6x + 35$

b) $-3x + 1 \leq 4(x + 1)$

c) $-2x + 3(2x - 8) \leq 2x - 8$

8. Resolva cada inequação a seguir e represente o conjunto solução na reta numérica.

a) $3x - 1 \leq 2x + 6$

b) $5 - 4x > x + 15$

c) $4(x - 1) > 3(1 - x)$

9. Resolva os sistemas de inequações do 1º grau:

a) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 11 \\ x - 3 < 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 - x < 5 \\ 3x - 4 \geq 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 < 14 \\ 2x - 1 > 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 1 > 8 \\ 2x - 3 > 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 1 > 0 \\ 2x + 3 > 1 \end{cases}$

10. Resolva as inequações:

a) $7 \leq 3x + 1 \leq 4$

b) $8 - x \leq 2x - 4 \leq 4$

c) $6x \leq 7x + 3 \leq 2x - 2$

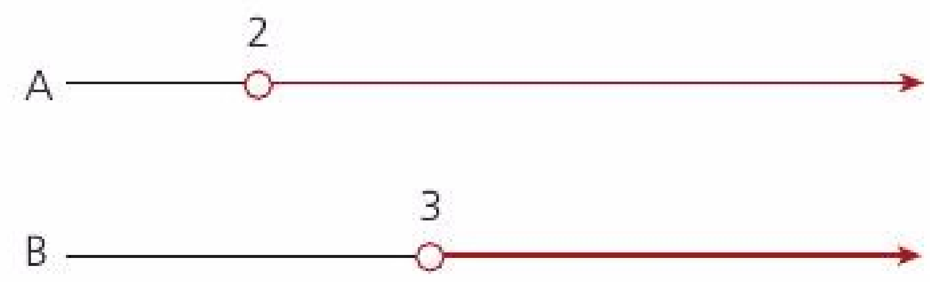
d) $-2x \leq 6x + 1 \leq 2x + 8$

e) $3x + 3 \geq x - 1 \geq \frac{x}{2}$

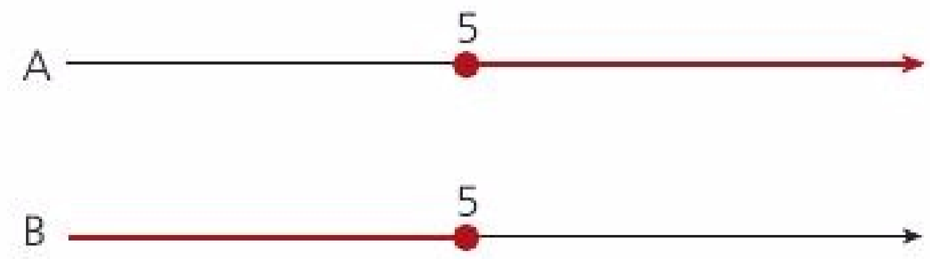
f) $2x - 1 > \frac{x}{2} \geq 3$

11. Dados os diagramas a seguir, indique o conjunto intersecção dos intervalos:

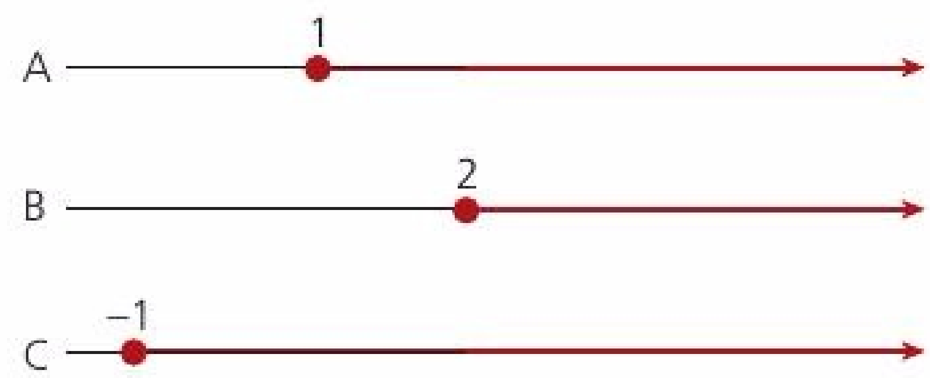
a)



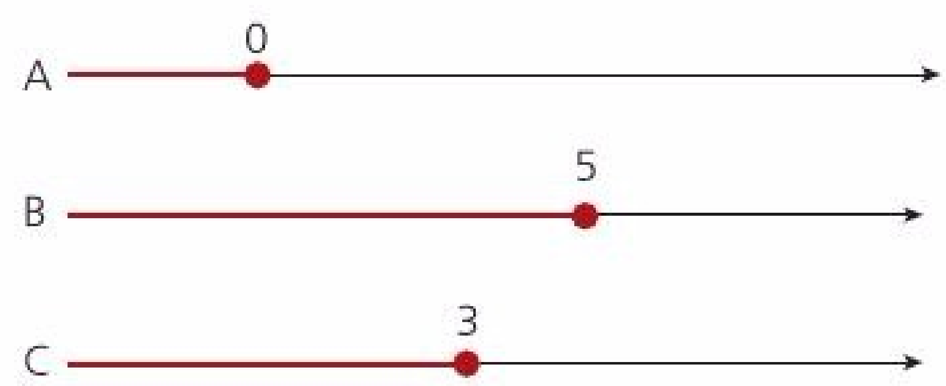
b)



c)



d)



12. Para que uma raiz de índice par, possa existir é necessário que o radicando seja positivo ou nulo. Determine **x** para que existam:

a) $\sqrt{2x - 6}$

b) $\sqrt{\frac{x}{2} - 2}$

Resolução das atividades

1. a) $2x - 6 > 8$

$2x > 14$

$x > 7$

$S = \{x \in R / x > 7\}$

b) $2x + 18 < 0$

$x < -9$

$S = \{x \in R / x < -9\}$

c) $-5x + 5 \geq 0$

$-5x \geq -5$

$x \leq 1$

$S = \{x \in R / x \leq 1\}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{4}{3} \leq 2$

$3x - 8 \leq 12$

$3x \leq 20$

$x \leq \frac{20}{3}$

$S = \left\{x \in R / x \leq \frac{20}{3}\right\}$

e) $6x + 3 < 3x + 18$

$3x < 15$

$x < 5$

$S = \{x \in R / x < 5\}$

f) $8(x + 3) > 12(1 - x)$

$8x + 24 > 12 - 12x$

$20x > -12$

$x \geq -\frac{3}{5}$

$S = \left\{x \in R / x \geq -\frac{3}{5}\right\}$

g) $(x + 10) > (-x + 6)$

$2x > -4$

$x > -2$

$S = \{x \in R / x > -2\}$

2. a) $3x - 5 \geq -2x + 1$

$5x \geq 6$

$x \geq \frac{6}{5}$

$S = \left\{x \in R / x \geq \frac{6}{5}\right\}$

b) $-4x + 3 \leq 2(x + 1)$

$-6x \leq -1$

$x \geq \frac{1}{6}$

$S = \left\{x \in R / x \geq \frac{1}{6}\right\}$

c) $-3x + 5(2x + 8) \leq 3x - 8$

$-3x + 10x + 40 \leq 3x - 8$

$4x \leq -48$

$x \leq -12$

$S = \{x \in R / x \leq -12\}$

d) $-\frac{2}{3}x + 4 > \frac{1}{2}x + 1$

$-4x + 24 > 3x + 6$

$-7x > -18$

$x < \frac{18}{7}$

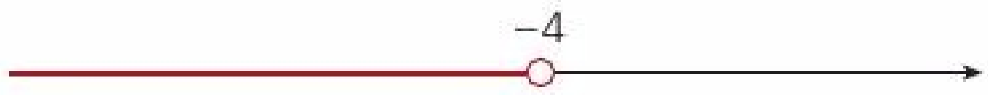
$S = \left\{x \in R / x < \frac{18}{7}\right\}$

3. a) $2x + 1 \leq x + 6$

$x \leq 5$

b) $2 - 3x > x + 14$

$x < -4$

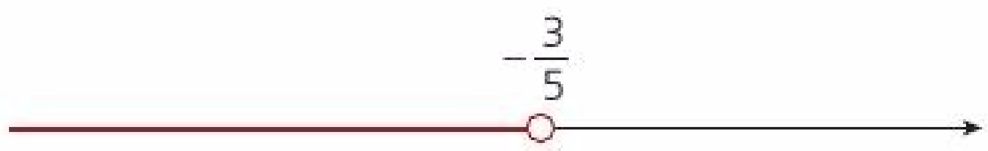


c) $2(x + 3) > 3(1 - x)$

$2x + 6 > 3 - 3x$

$5x > -3$

$x > -\frac{3}{5}$

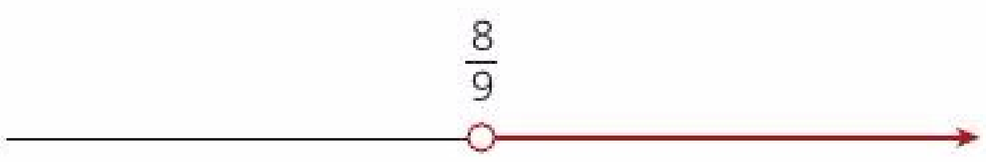


d) $3(1 - 2x) < 2(x + 1) + x - 7$

$3 - 6x < 2x + 2 + x - 7$

$-9x < -8$

$x > \frac{8}{9}$



e) $\frac{x}{3} - \frac{(x + 1)}{2} < \frac{(1 - x)}{4}$

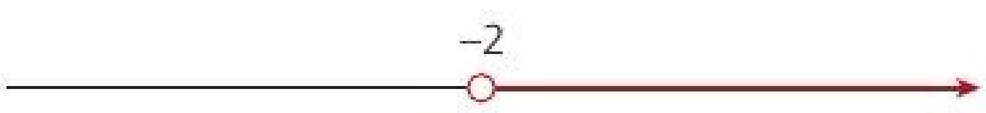
$4x - 6x - 6 < 3 - 3x$

$x < 9$

f) $(x + 3) > (-x - 1)$

$2x > -4$

$x > -2$

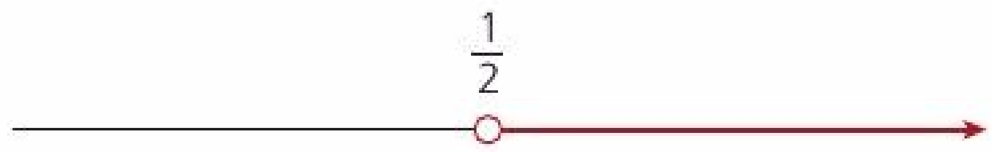


g) $[1 - 2(x - 1)] < 2$

$1 - 2x + 2 < 2$

$-2x < -1$

$x > \frac{1}{2}$

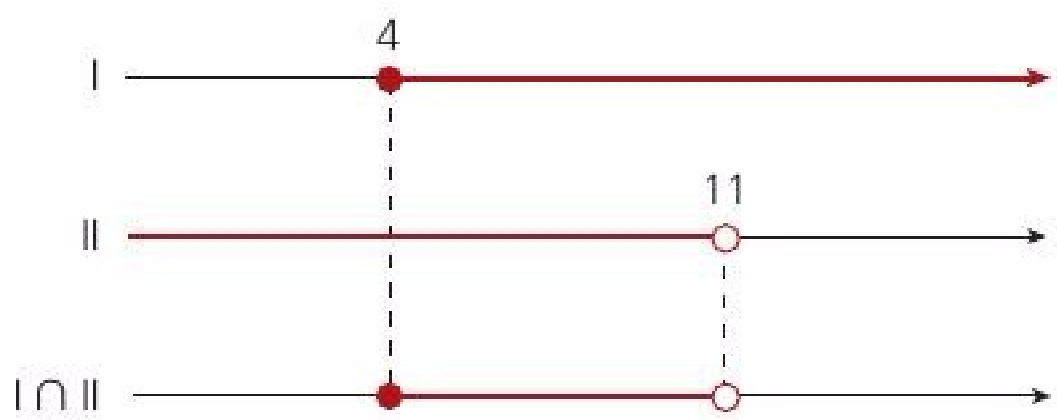


4. a) $\begin{cases} 3x + 1 \geq 13 & \text{I} \\ x - 3 < 8 & \text{II} \end{cases}$

I) $3x \geq 12$

II) $x < 11$

$x \geq 4$



$S = \{x \in R \,/\, 4 \leq x < 11\}$

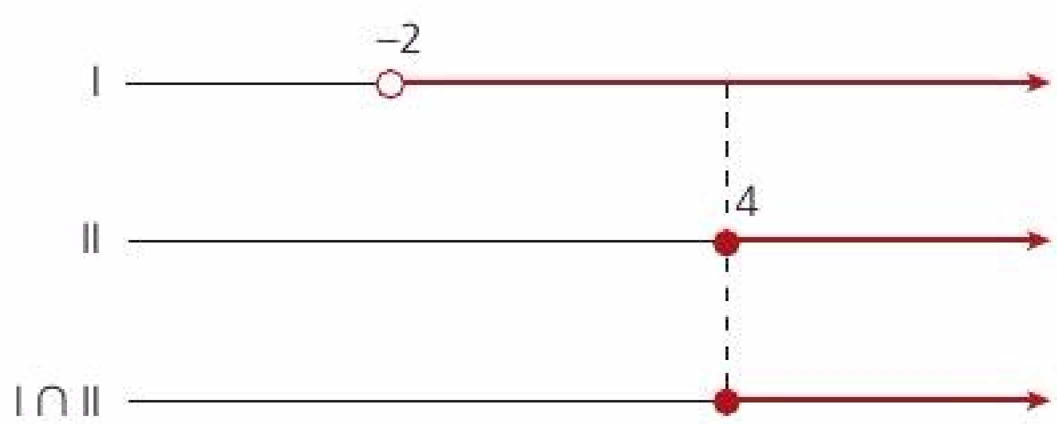
b) $\begin{cases} 4 - x < 6 & \text{I} \\ 2x - 3 \geq 5 & \text{II} \end{cases}$

I) $-x < 2$

$x > -2$

II) $2x \geq 8$

$x \geq 4$

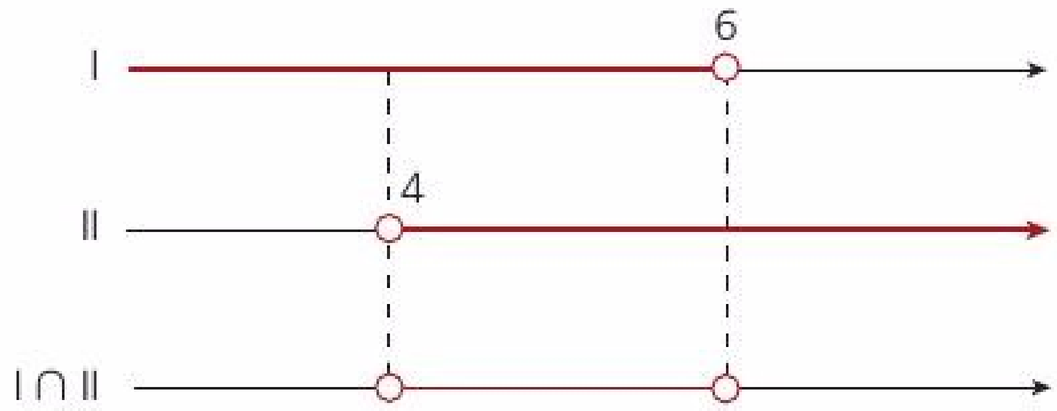


$S = \{x \in R \,/\, x \geq 4\}$

c) $\begin{cases} 3x - 1 < 17 & \text{I} \\ 2x - 3 > 5 & \text{II} \end{cases}$

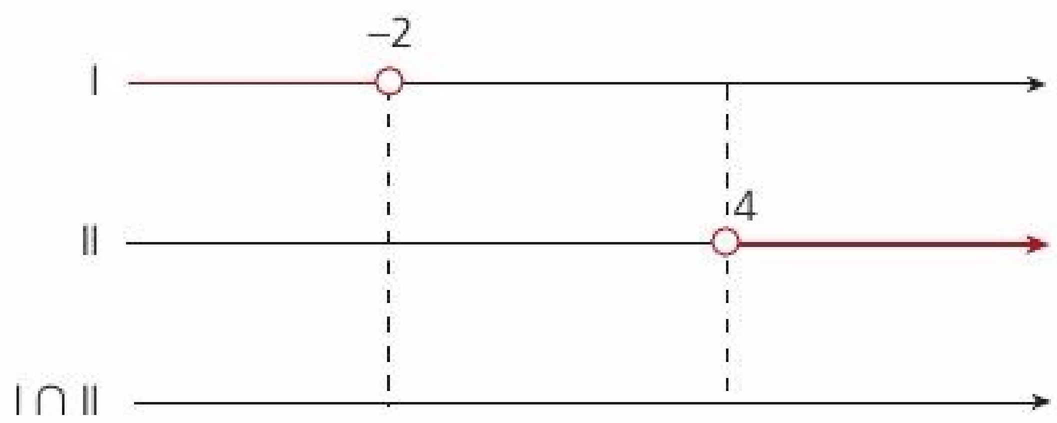
I) $3x < 18$ II) $2x > 8$

$x < 6$ $x > 4$



$S = \{x \in R \,/\, 4 < x < 6\}$

d) $\begin{cases} -x - 1 > 1 & \text{I} & x < -2 \\ 2x - 3 > 5 & \text{II} & x > 4 \end{cases}$



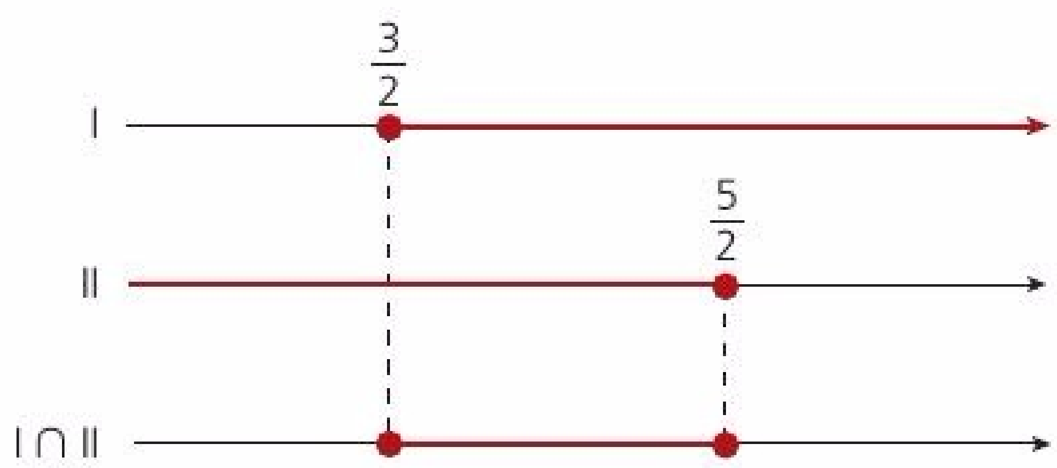
$S = \varnothing$

5. a) $4 \le 2x + 1 \le 6$

I) $4 \le 2x + 1$ II) $2x + 1 \le 6$

$3 \le 2x$ $2x \le 5$

$x \ge \frac{3}{2}$ $x \le \frac{5}{2}$



$S = \left\{x \in R \,/\, \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$

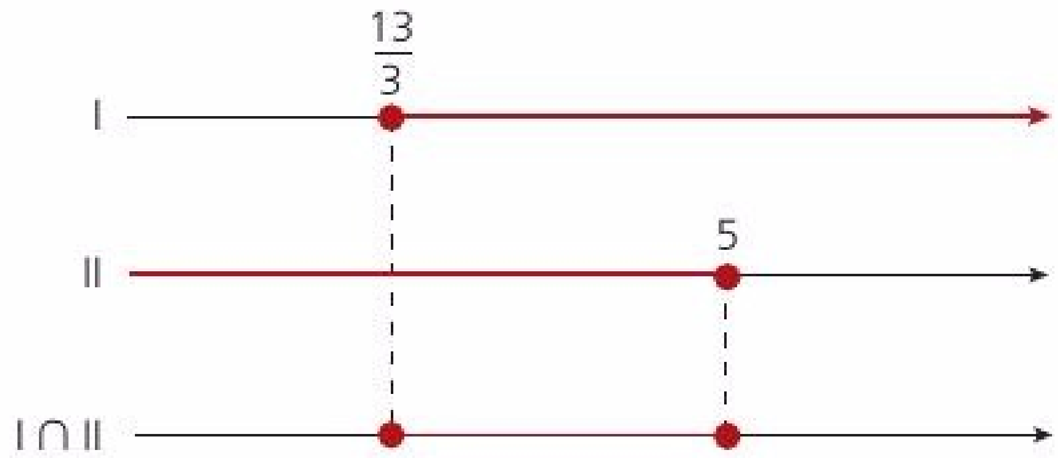
$S = \left\{x \in R \,/\, \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$

b) $9 - x \le 2x - 4 \le 6$

I) $9 - x \le 2x - 4$ II) $2x - 4 \le 6$

$13 \le 3x$ $2x \le 10$

$x \ge \frac{13}{3}$ $x \le 5$



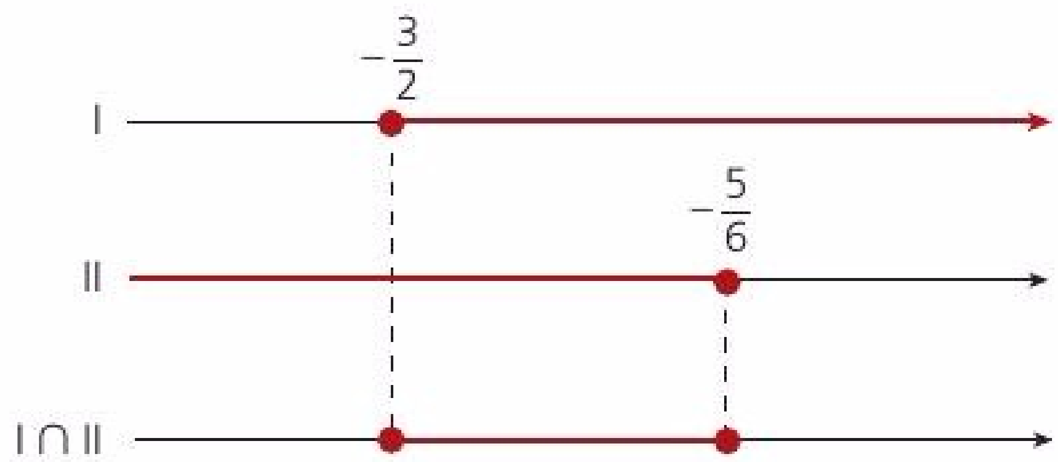
$S = \left\{x \in R \,/\, \frac{13}{3} \le x \le 5\right\}$

c) $5x \le 7x + 3 \le x - 2$

I) $5x \le 7x + 3$ II) $7x + 3 \le -2$

$-2x \le 3$ $6x \le -5$

$x \ge -\frac{3}{2}$ $x \le -\frac{5}{6}$



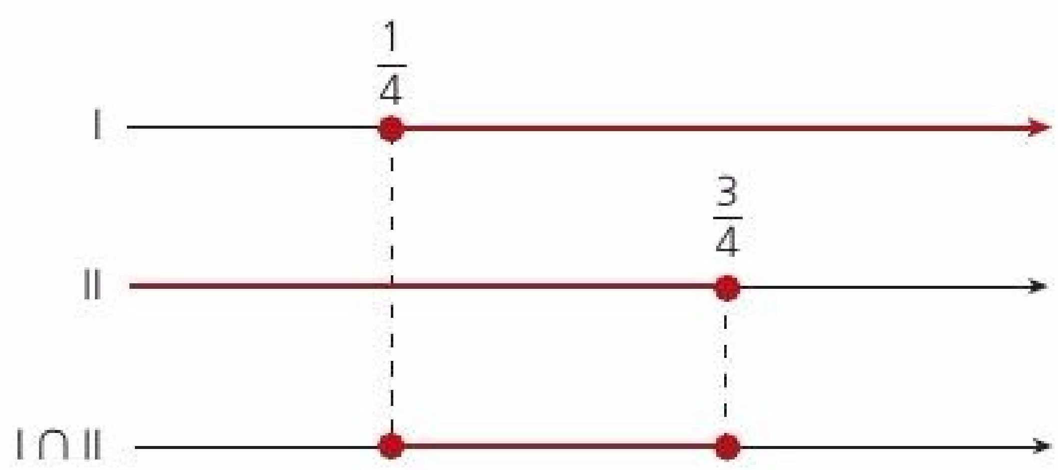
$S = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \le x \le -\frac{5}{6}\right\}$

d) $3 - 2x \le 6x + 1 \le 2x + 4$

I) $3 - 2x \le 6x + 1$ II) $6x + 1 \le 2x + 4$

$2x \le 8x$ $4x \le 3$

$x \ge \frac{1}{4}$ $x \le \frac{3}{4}$



$S = \left\{x \in R \,/\, \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\right\}$

Respostas da seção Para estudar

6. a) $S = \{x \in R / x > 4\}$

b) $S = \{x \in R / x < 9\}$

c) $S = \{x \in R / x \leq 3\}$

d) $S = \left\{x \in R / x \leq \frac{14}{9}\right\}$

e) $S = \left\{x \in R / x < -\frac{5}{8}\right\}$

f) $S = \{x \in R / x > 3\}$

g) $S = \left\{x \in R / x > \frac{9}{5}\right\}$

7. a) $S = \{x \in R / x \geq 5\}$

b) $S = \left\{x \in R / x \geq -\frac{3}{7}\right\}$

c) $S = \{x \in R / x \leq 8\}$

8. a) $x \leq 7$

b) $x < 2$

c) $x > 1$

9. a) $S = \{x \in R / 5 \leq x < 9\}$

b) $S = \{x \in R / x \geq 4\}$

c) $S = \{x \in R / 3 < x < 4\}$

d) $S = \{x \in R / x > 5\}$

e) $S = \{x \in R / -1 \leq x < 1\}$

10. a) $S = \{x \in R / x \leq 1$ ou $x \geq 2\}$

b) $S = \{4\}$

c) $S = \{x \in R / -3 \leq x \leq 1\}$

d) $S = \left\{x \in R / x \geq \frac{7}{4}\right\}$

e) $S = \{x \in R / x \geq 2\}$

f) $S = \{x \in R / x \geq 6\}$

11. a) $S = \{x \in R / x > 3\}$

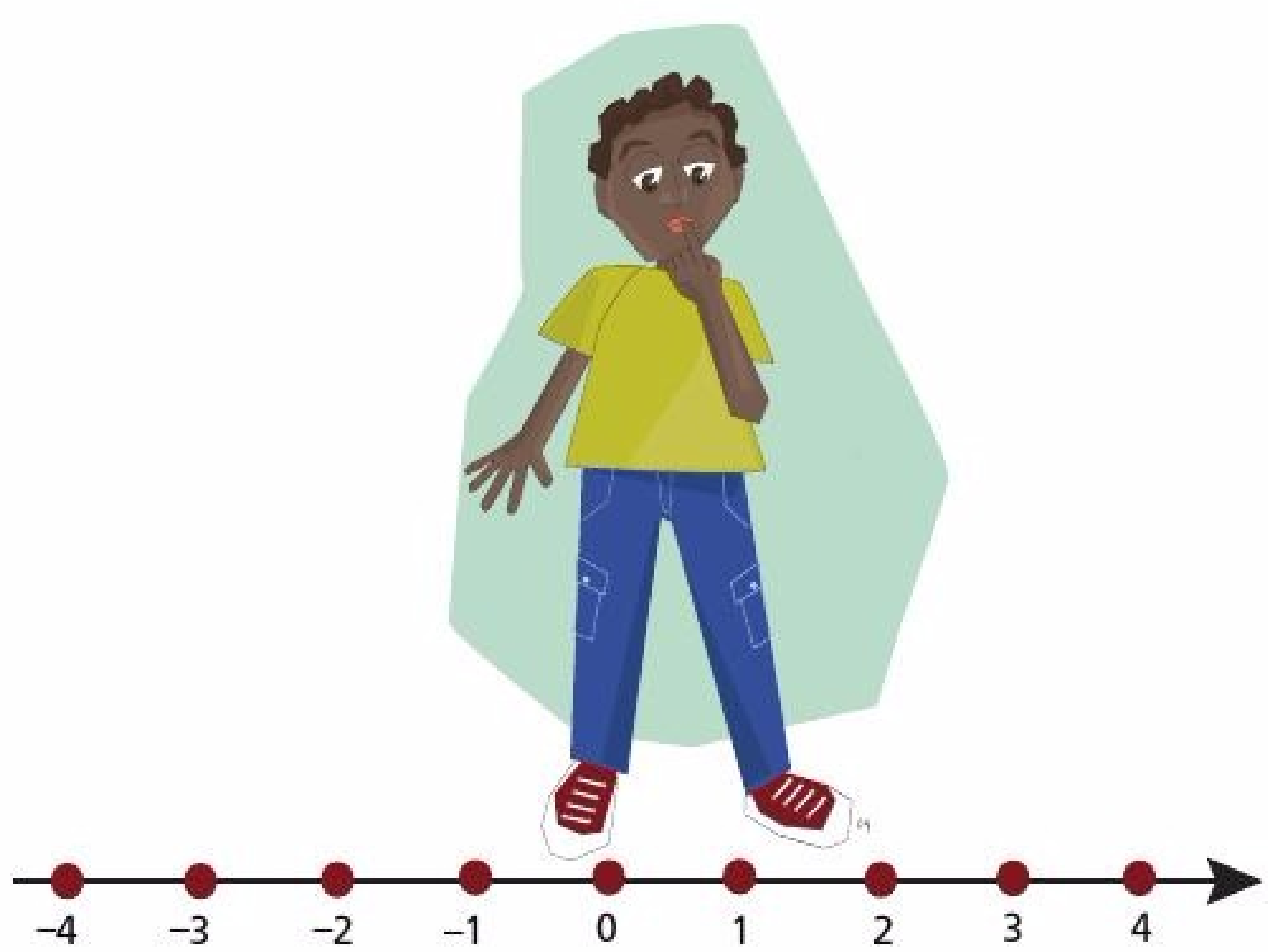
b) $S = \{5\}$

c) $S = \{x \in R / x \geq 2\}$

d) $S = \{x \in R / 0 \leq x \leq 3\}$

12. a) $x \geq 3$

b) $x \geq 4$



capítulo 8

Áreas de figuras planas

- Área de um polígono
- Área de um retângulo
- Área de um paralelogramo
- Área de um losango
- Área de um triângulo
- Área de um trapézio

Ricardo Azoury/Olhar imag

Topógrafo, utilizando um teodolito, mede ângulos de distâncias para determinar áreas nas obras do estádio Olímpico João Havelange (Engenhão), no Rio de Janeiro, em 2007.

Conversa Inicial

Até aqui, estudamos algumas das principais características lineares e angulares de polígonos. Fizemos isso investigando medidas de lados e de ângulos, e como elas se relacionam.

Vamos iniciar o estudo das áreas delimitadas pelos lados do polígono.

O cálculo de áreas é, aliás, uma das mais antigas preocupações dos matemáticos. Desde o antigo Egito, há cerca de 3500 anos, os matemáticos estudavam maneiras de dividir as áreas situadas às margens do rio Nilo para planejar adequadamente a agricultura.

Luke Daniek/iStockphoto

Após as enchentes, as áreas às margens do rio Nilo, muito férteis, eram aproveitadas para a agricultura.

Calcular áreas é de especial importância para algumas atividades como a Arquitetura e Engenharia. Para isso, diversos métodos foram desenvolvidos até se chegar a processos que envolvem sofisticados equipamentos eletrônicos como, por exemplo, um moderno aparelho para medidas angulares, denominado **teodolito**.

Apesar da evolução dos métodos e dos equipamentos, o cálculo de área será sempre baseado nas figuras fundamentais da Geometria: o paralelogramo e o triângulo. Estudaremos os processos de cálculos dessas áreas para compreender melhor o cálculo das demais.

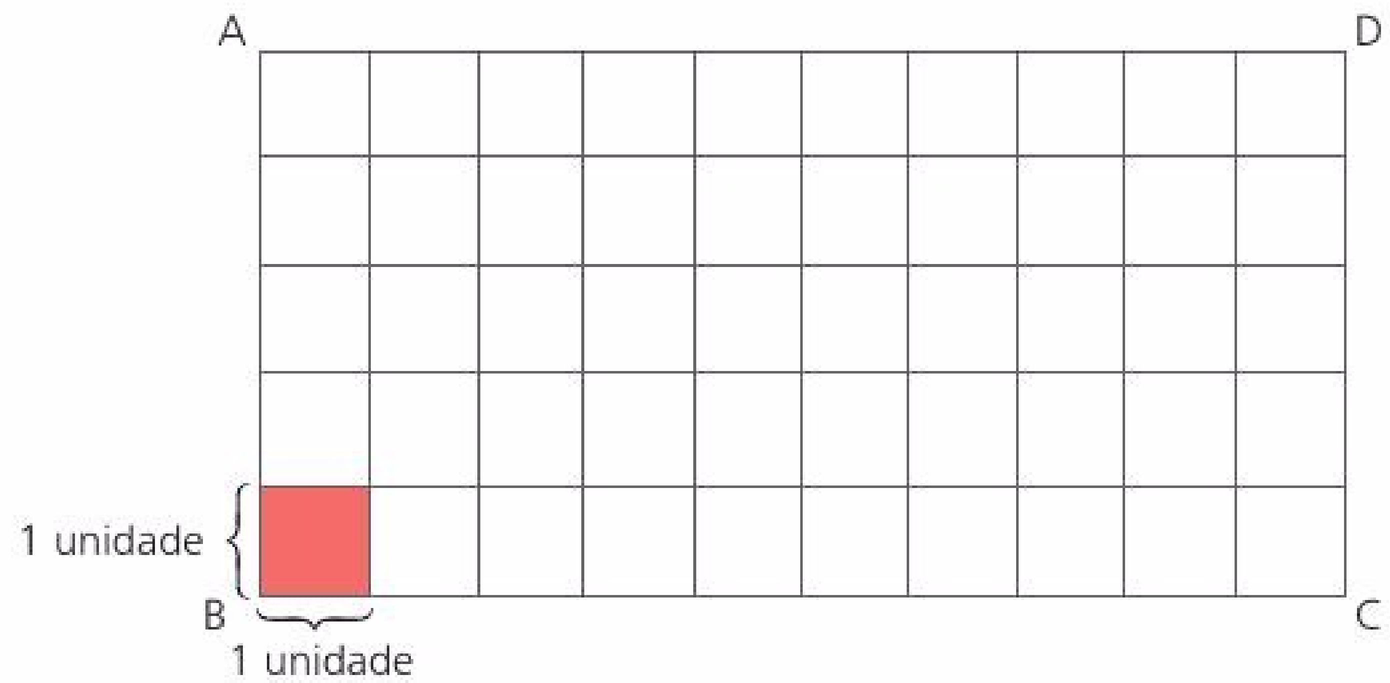
Kadmy/Can Stock Photo

Os modernos teodolitos apresentam medidas angulares utilizadas para cálculos de áreas.

Área de um polígono

Vamos recordar o conceito de unidade de medida de área.

A medida da área, ou superfície, de um polígono é feita a partir de uma **unidade de área**. Considere o retângulo:



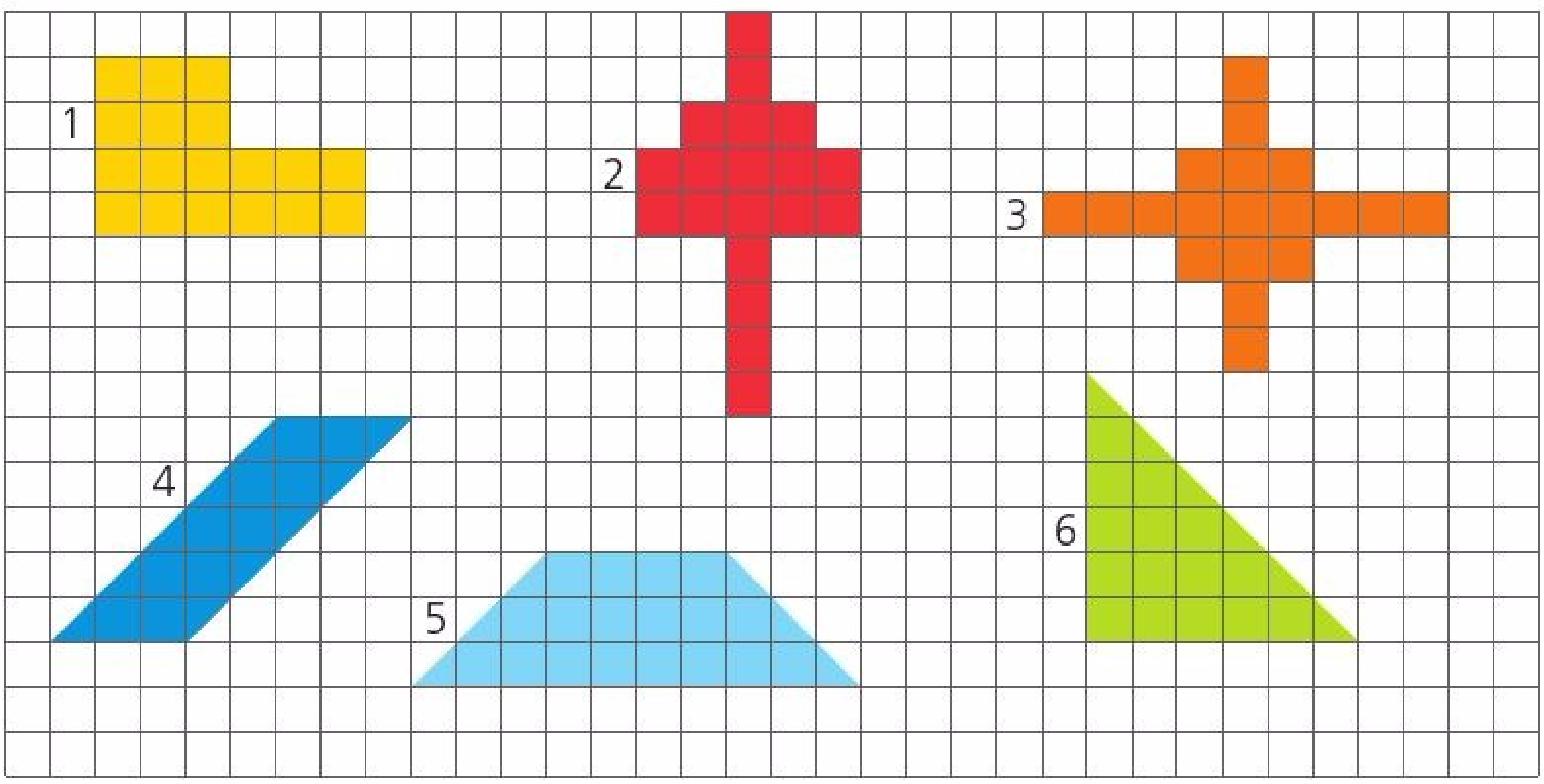
Dividindo-se o comprimento e a altura em medidas de 1 unidade, teremos um pequeno quadrado que será **1 unidade quadrada**. Se a unidade em que dividimos os lados for o **metro**, a unidade de área será **1 m²**, se for o **centímetro**, a área unitária será **1 cm²**.

Comente a relação do conceito de medida de área com a área de uma figura plana.

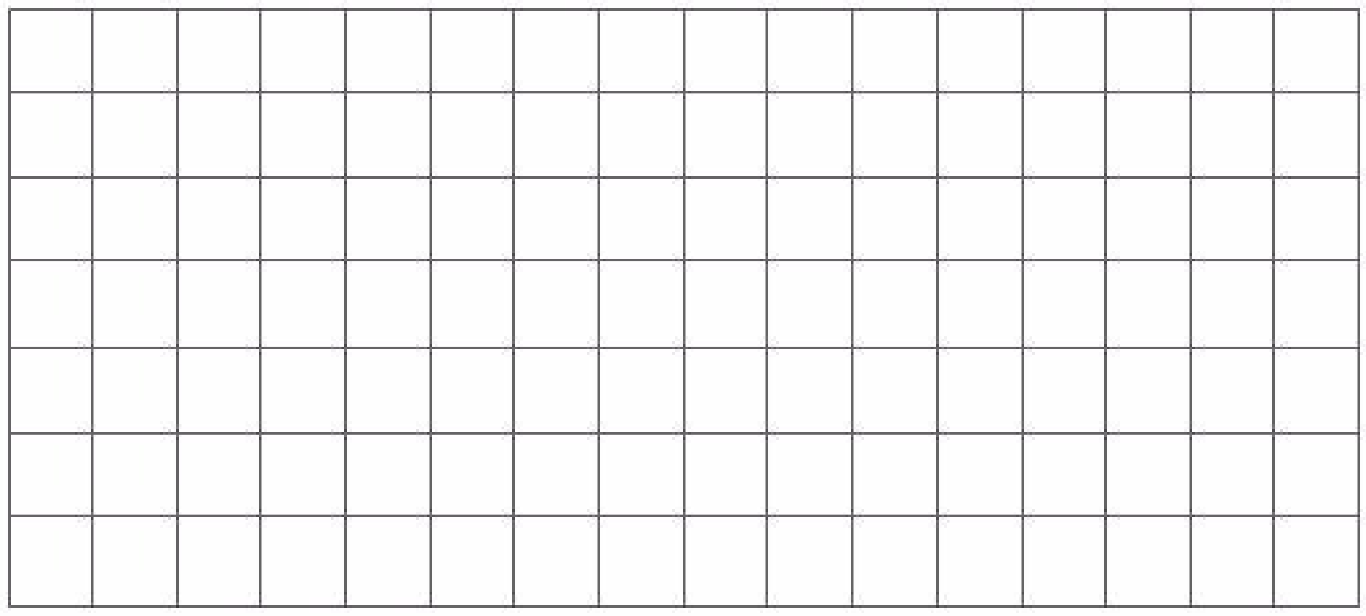
Atividades

1. Suponha que a medida do lado de cada quadradinho seja 1 cm. Observe a superfície ocupada pelas figuras desenhadas nesse quadriculado e determine suas áreas.

1) 18 cm² 2) 19 cm² 3) 19 cm² 4) 15 cm² 5) 21 cm² 6) 18 cm²

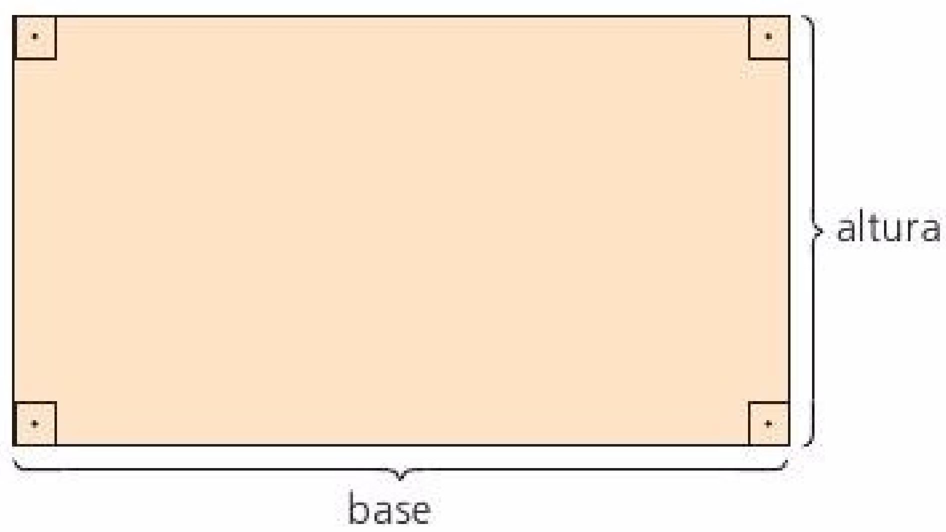


2. Faça em seu caderno uma malha quadriculada como a que se segue. Cada quadradinho deverá medir 1 cm de lado. Em seguida, desenhe, nessa malha, três quadriláteros diferentes cujas áreas sejam de 12 cm^2. Resposta Pessoal.



Área de um retângulo

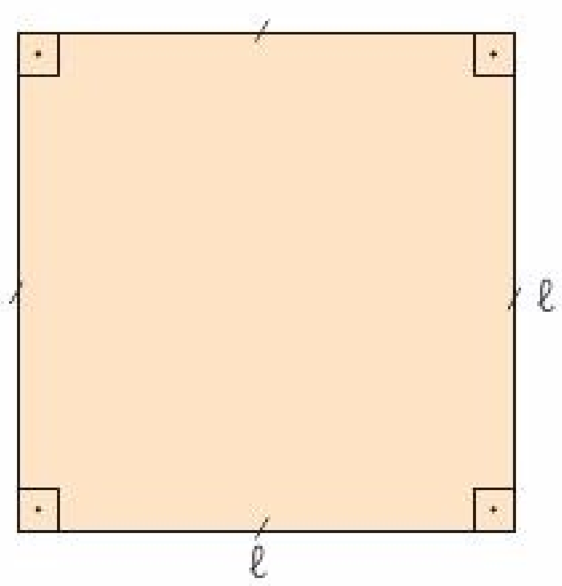
Chamando as dimensões de um retângulo de largura e comprimento ou, ainda, base e altura, sua área será dada pelo produto dessas dimensões.



Desenhe o retângulo e o quadrado no quadro de giz. Defina a área dessas figuras com seus alunos.

$$A_{retângulo} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

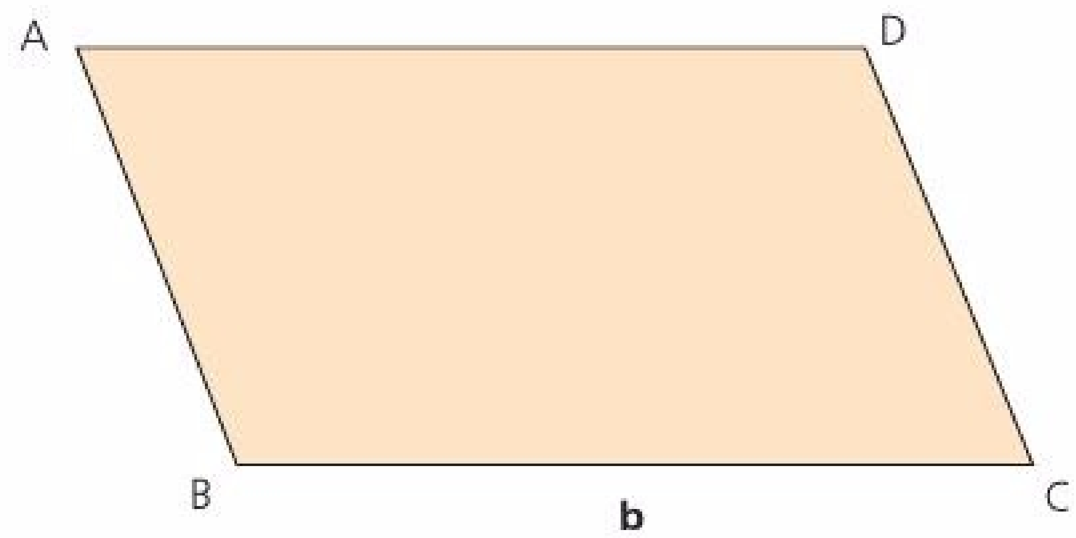
O quadrado é um tipo particular de retângulo no qual base e altura têm a mesma medida e são chamadas de lado ℓ do quadrado.



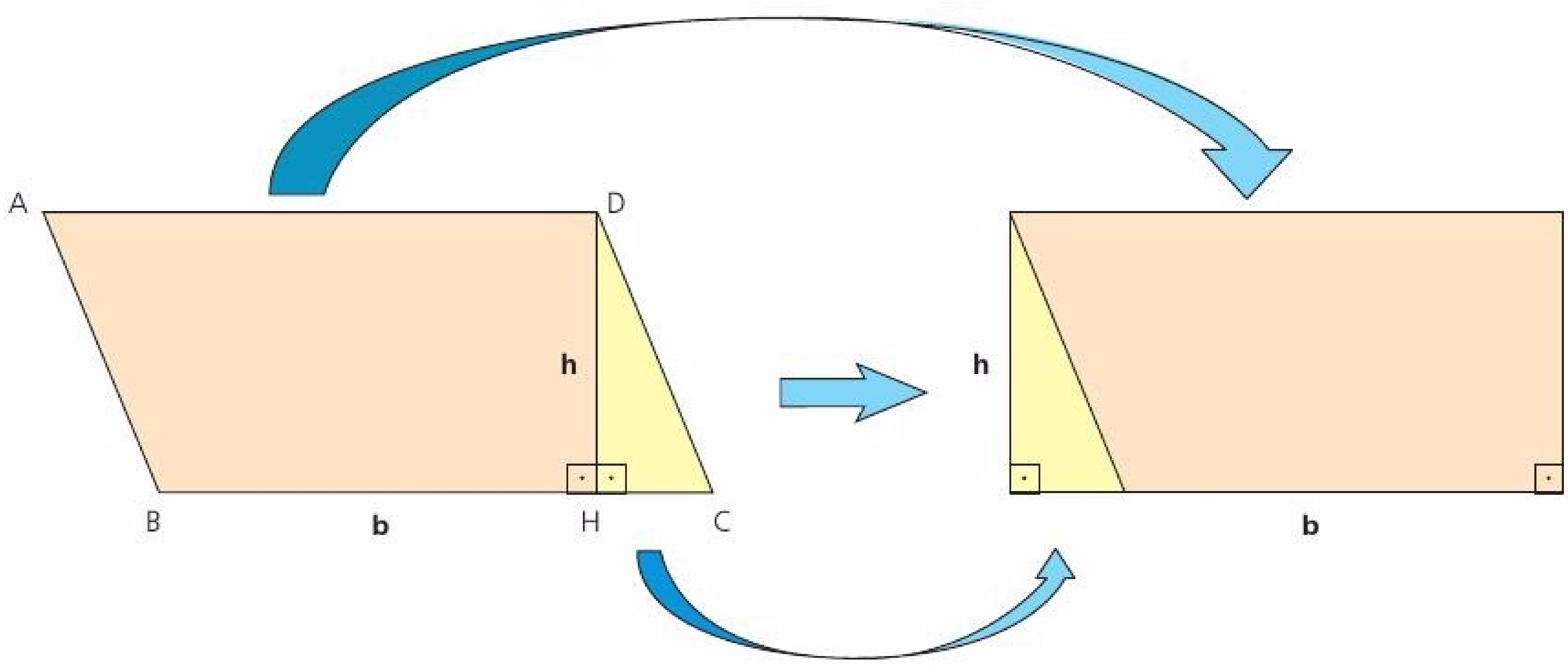
$$A_{quadrado} = \text{lado} \cdot \text{lado} = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

Área de um paralelogramo

Você já aprendeu que um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. Aprendeu, também, como se calcula a área de dois paralelogramos muito especiais: **o retângulo e o quadrado**. Suponha, agora, um paralelogramo qualquer ABCD, com base $\mathbf{b = \overline{BC}}$.



Se traçarmos por D uma perpendicular a $\overline{BC}$, obteremos o triângulo DHC e o segmento $\overline{DH}$, que é a altura do paralelogramo. Se "recortarmos" o triângulo DHC e o "colarmos" com o vértice D coincidindo com o vértice A do paralelogramo, obtemos um retângulo de mesma área, mesma altura $\overline{DH}$ e mesma base $\overline{BC}$.



Assim, a área de um paralelogramo qualquer é igual à área de um retângulo de mesma base $\mathbf{b = \overline{BC}}$ e mesma altura **h** que o paralelogramo.

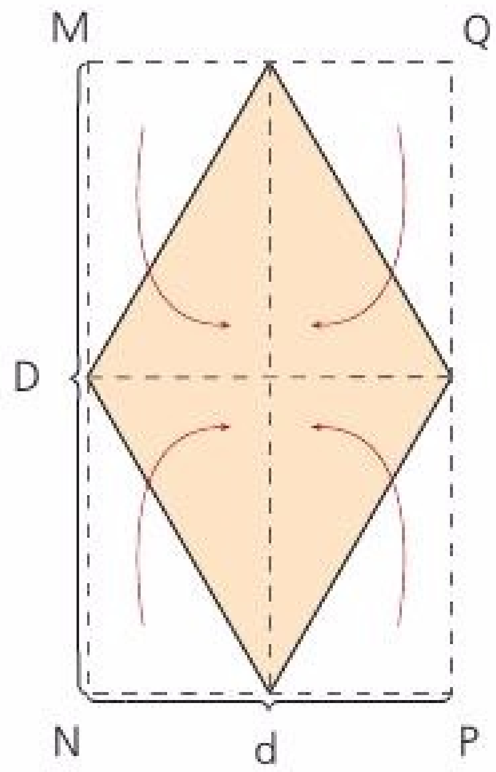
$$\mathbf{A_{paralelogramo} = b \cdot h}$$

Área de um losango

O losango é um paralelogramo que tem quatro lados congruentes e sua área pode ser calculada como se faz com qualquer paralelogramo. No entanto, podemos calcular sua área também a partir de suas diagonais **D** e **d**.

Observe que o losango da figura a seguir está envolvido por um retângulo MNPQ cujos lados são iguais as suas diagonais **D** e **d**.

A área do losango corresponde à metade da área deste retângulo. Para compreender essa relação, observe que o retângulo MNPQ está dividido em oito triângulos retângulos e que o losango é formado por quatro deles.



Uma forma interessante de mostrar a relação entre as diagonais de um losango é desenhá-lo numa cartolina ou folha A3 e fazer duas dobras.

Assim, como a área de um retângulo é a base multiplicada pela altura, o retângulo MNPQ acima terá área:

$$A_{\text{retângulo}} = d \cdot D$$

Como a área do losango é metade da área do retângulo MNPQ, temos:

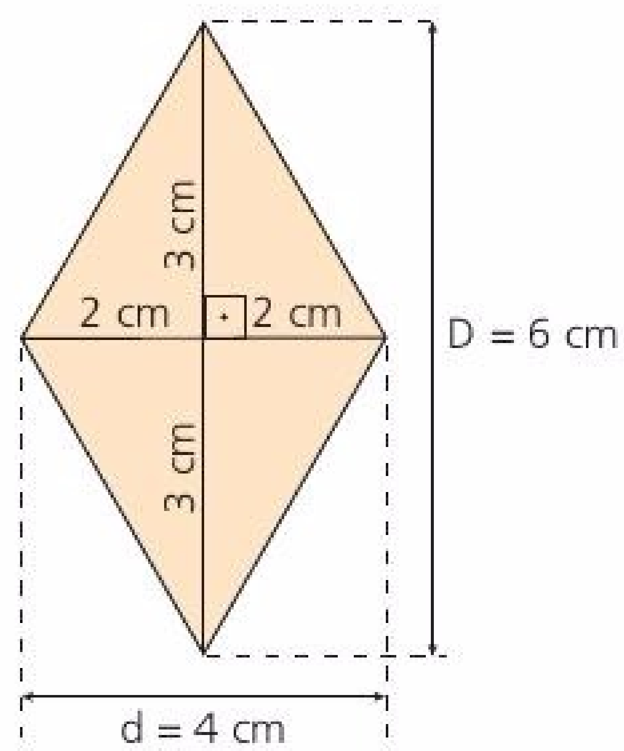
$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Exemplo:

- O losango da figura tem diagonais de medidas 6 e 4 cm.

  Note que as diagonais **D** e **d** do losango cortam-se em seus pontos médios e são perpendiculares. A área do losango será:

  $$A = \frac{6 \cdot 4}{2} \rightarrow A = \frac{24}{2} \rightarrow A = 12 \text{ cm}^2$$



Na prática

Organize-se com seus colegas em um grupo de quatro alunos. Encontrem uma trena como a da figura, para poder realizar esta atividade. Se você e seus amigos encontrarem medidas que não sejam exatas, utilizem um arredondamento para cima ou para baixo, dependendo da medida inteira mais próxima.

Em um momento adequado, logo após o período de aulas, por exemplo, realize as seguintes medidas:

1. Meça o comprimento (maior lado) da sala de aula;
2. Meça a largura e também a altura da sala de aula;
3. Faça um desenho representando a "planta" da sala de aula.


Mibseo/Dreamstime
Trena

Em seguida, calcule:

a) A área da sala de aula.

b) A área das paredes da sala de aula (desconsidere as janelas).

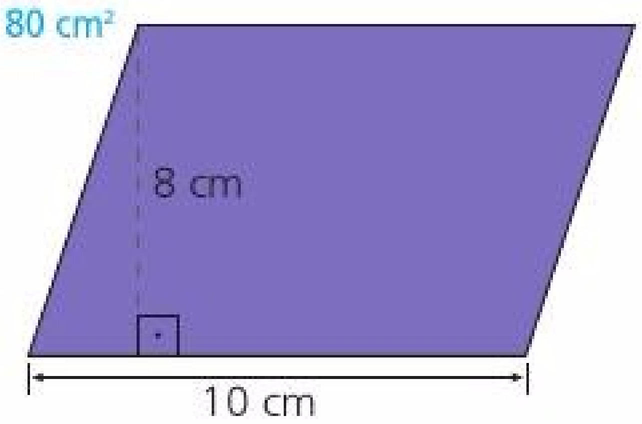
c) Divida a área da sala de aula pela quantidade de alunos. Fazendo isso, você irá obter o número de alunos por metro quadrado.

d) Discuta com seus colegas se o número é alto ou baixo, lembrando que se recomenda que cada aluno ocupe 1 m² numa sala de aula.

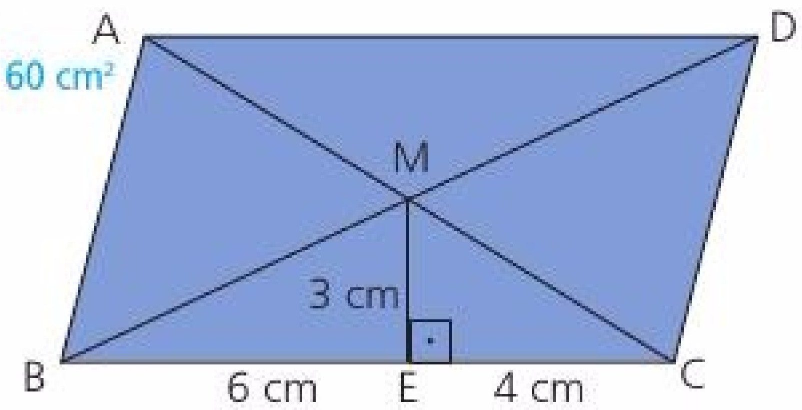
Atividades

3. Calcule a área dos seguintes paralelogramos:

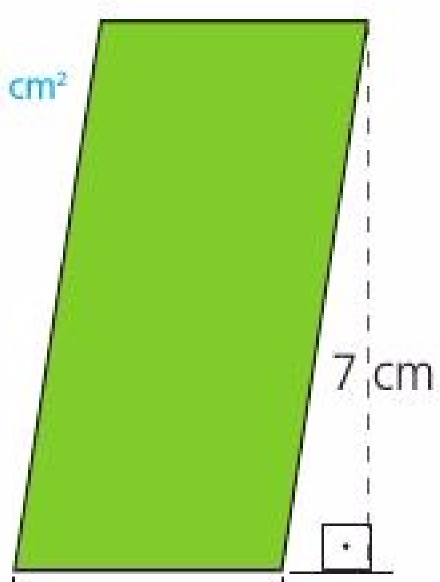
a) 80 cm²



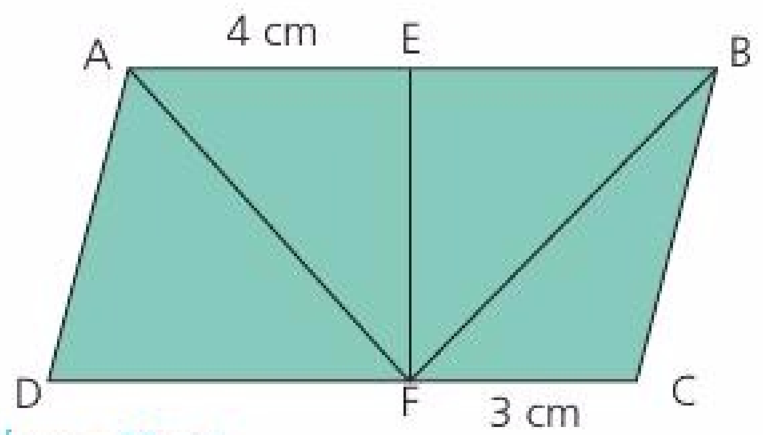
b) 60 cm²



c) 21 cm²



4. Calcule a área do paralelogramo ABCD da figura a seguir, sabendo-se que o segmento $\overline{EF}$ divide o lado $\overline{AB}$ em duas partes iguais, é perpendicular a $\overline{DC}$ em F e mede 5 cm.



Área = 20 cm²

5. Considerando a mesma figura do exercício anterior, responda:

a) Qual é a medida de $\overline{DF}$? $\overline{DF}$ = 5 cm

b) Qual é a área de um paralelogramo cuja base é $\overline{DF}$ e a altura é $\overline{EF}$? A = 25 cm²

c) Que tipo de paralelogramo tem base $\overline{DF}$ e altura $\overline{EF}$? um quadrado

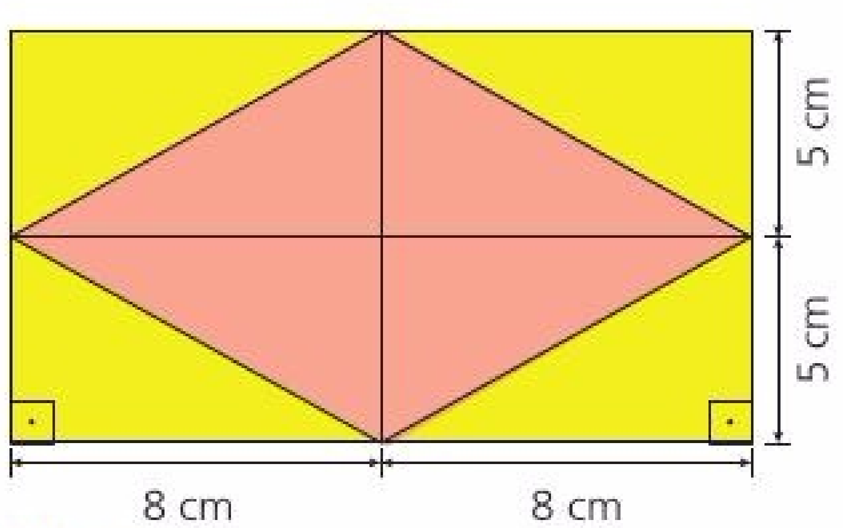
6. Em seu caderno, faça um esboço da figura relativa a cada problema a seguir e:

a) Determine a área de um paralelogramo cuja base mede 4 m e a altura 3 m. A = 12 m²

b) Calcule a altura de um paralelogramo que tem 64 cm² de área, sabendo que sua base mede 4 cm. A = 64 cm² h = 16 cm

c) Calcule a área de um paralelogramo que tem 20 cm de base, sabendo que sua altura é a metade da base. A = 200 cm²

7. A figura abaixo é a de um losango que tem vértices nos pontos médios de um retângulo. Calcule a área desse losango.

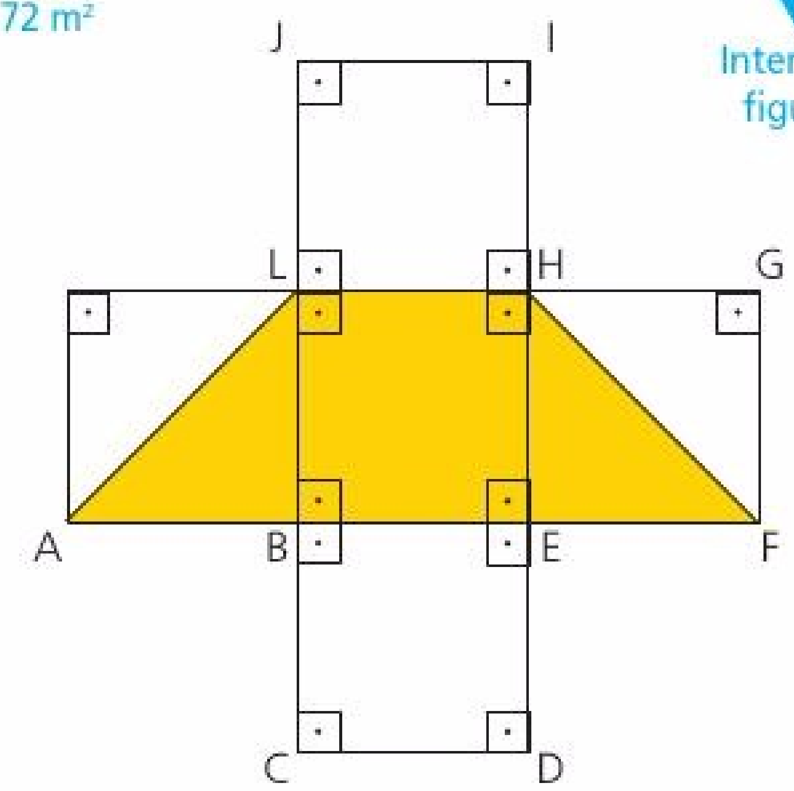


80 cm²

8. Cinco quadrados de lados iguais a 6 cm compõem a cruz da figura a seguir. Qual é a área do quadrilátero ALHF?

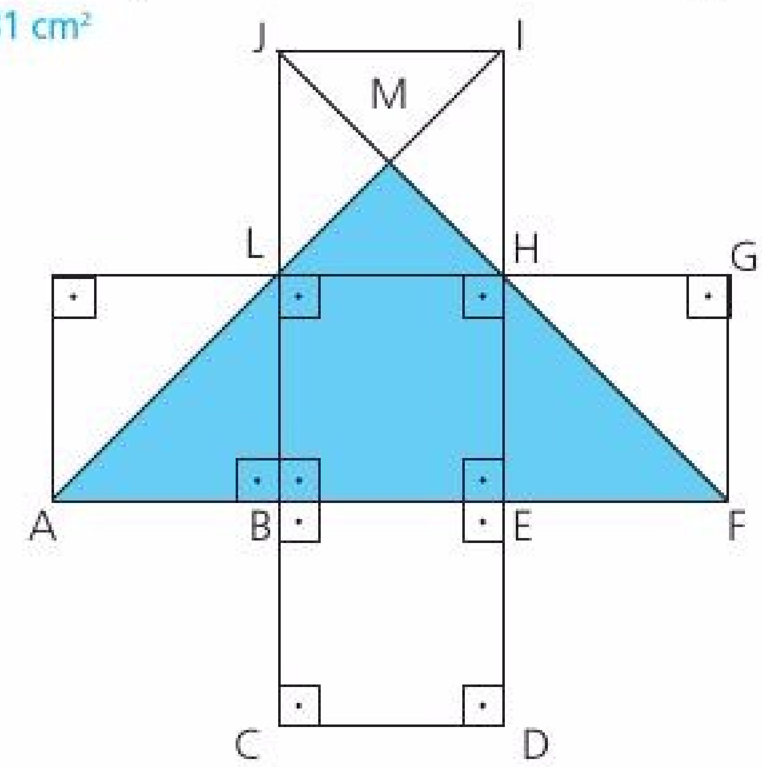
Interretar figuras

72 m²



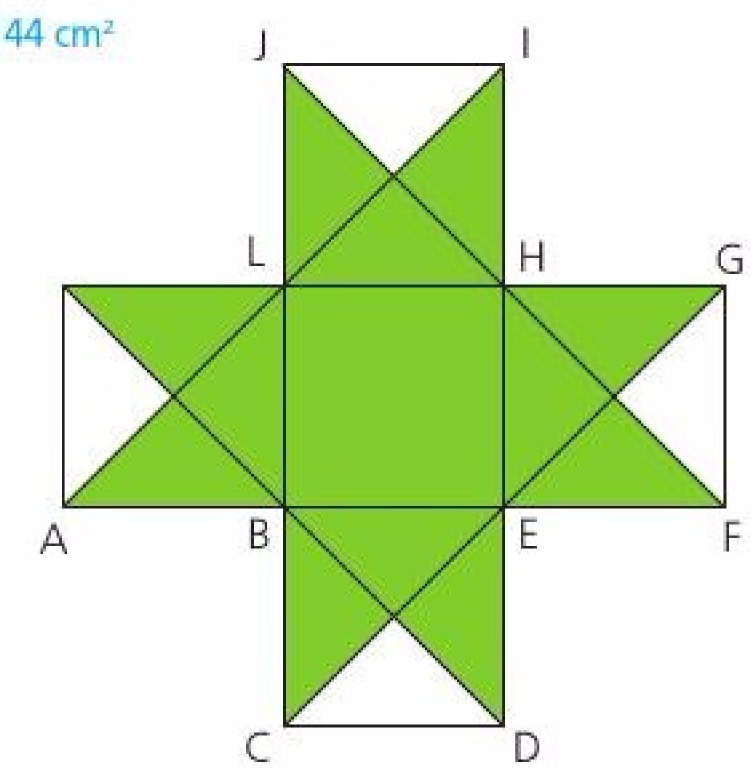
9. Considerando a mesma cruz do exercício anterior, determine a área do triângulo AMF.

81 cm²



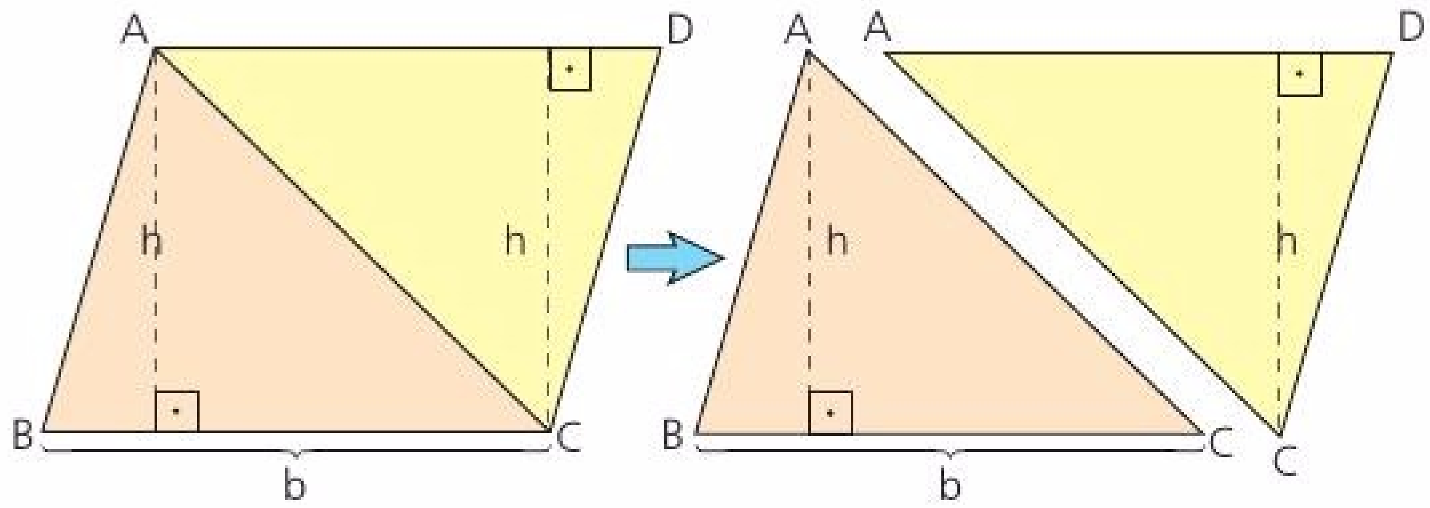
10. Utilizando novamente a cruz formada por quadrados de lados 6 cm, determine a área da estrela formada quando traçamos as diagonais dos quatro quadrados exteriores.

144 cm²



Área de um triângulo

Novamente, vamos partir de um paralelogramo ABCD. Já sabemos que sua área é dada pelo produto da base **b** pela altura **h**. Traçando-se a diagonal $\overline{AC}$, dividimos o paralelogramo em dois triângulos com mesmas bases **b** e mesmas alturas **h** que o paralelogramo, cuja área será metade da área deste.

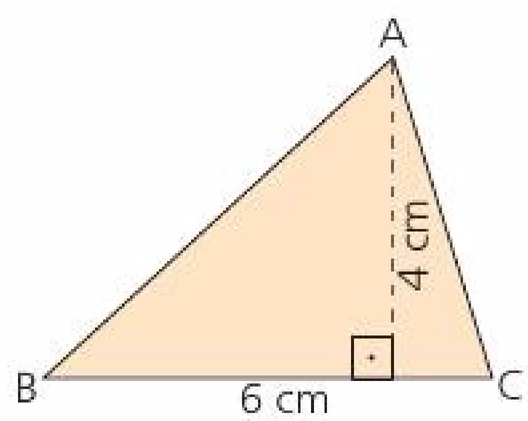


Dessa maneira, se a área do paralelogramo é base · altura **(b · h)**, a área do triângulo será:

$$\mathbf{A_{triângulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{b \cdot h}{2}}$$

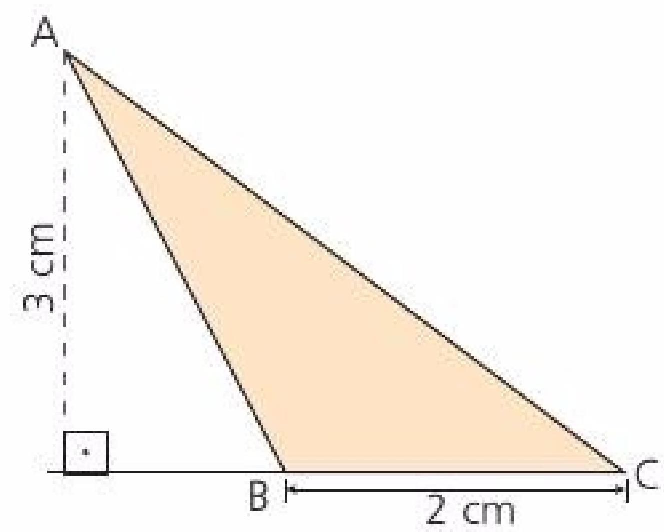
Observe os exemplos:

- O triângulo ABC da figura tem base 6 cm e altura 4 cm.



Sua área será $A = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$.

- Pode ocorrer que o segmento correspondente à altura relativa a uma base seja externo ao triângulo.



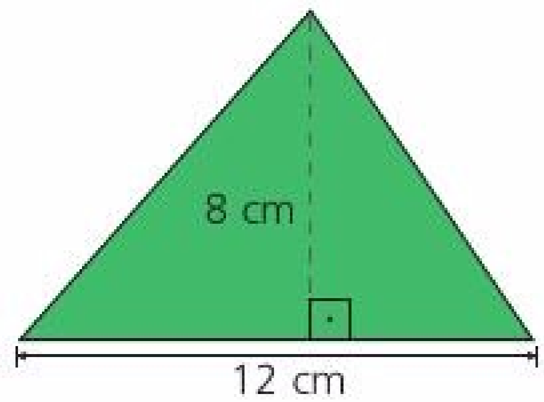
Mesmo assim, o cálculo da área se dá pela fórmula $\dfrac{b \cdot h}{2}$:

$$A = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

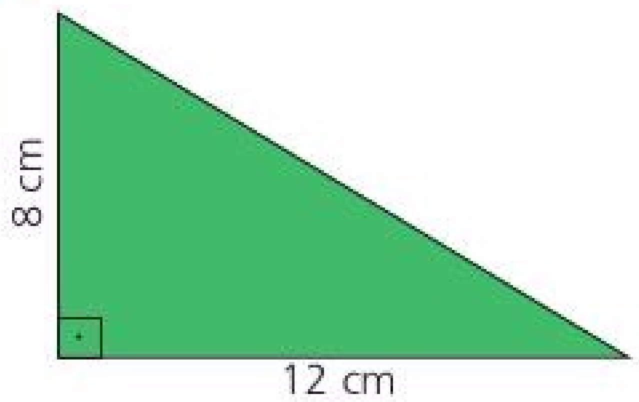
Atividades

11. Calcule a área dos triângulos.

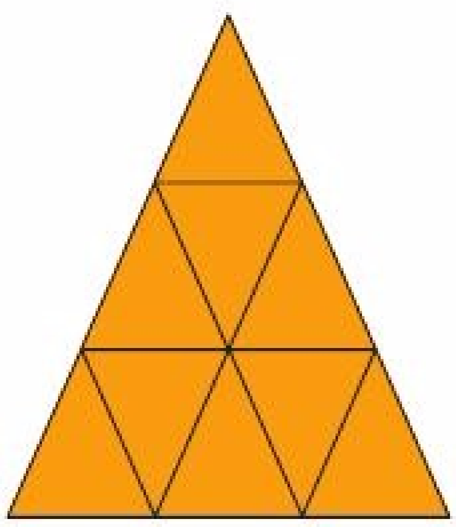
a) 48 cm²



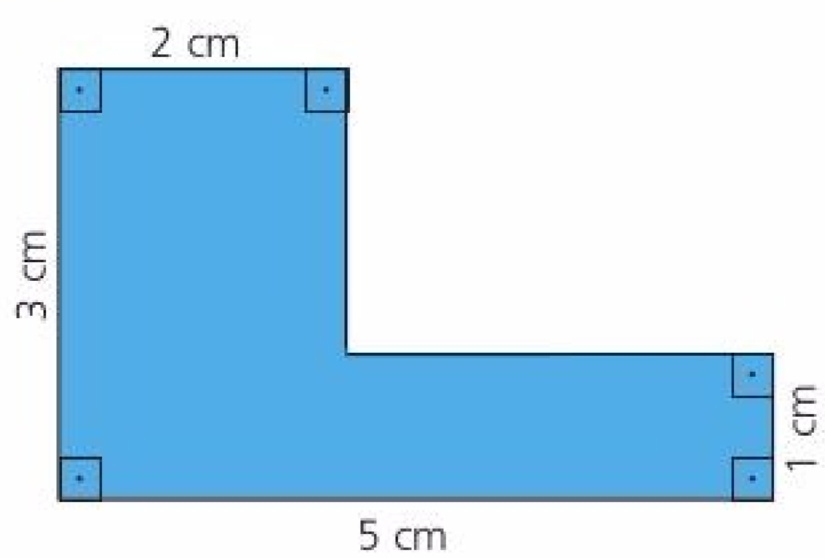
b) 48 cm²



12. Calcule a área da figura a seguir, sabendo-se que cada um dos triângulos menores é isósceles, com base 2 cm e altura 3 cm. 27 cm².

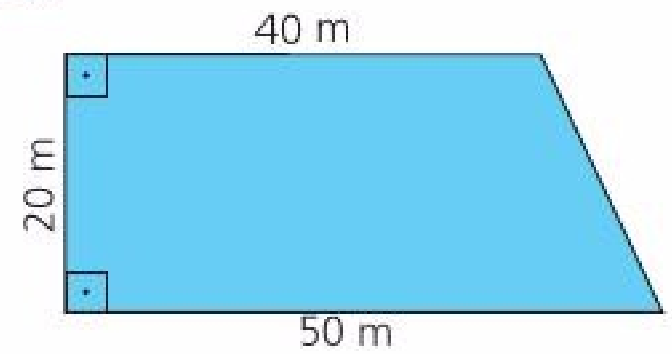


13. Calcule a área total da figura abaixo:
9 cm²

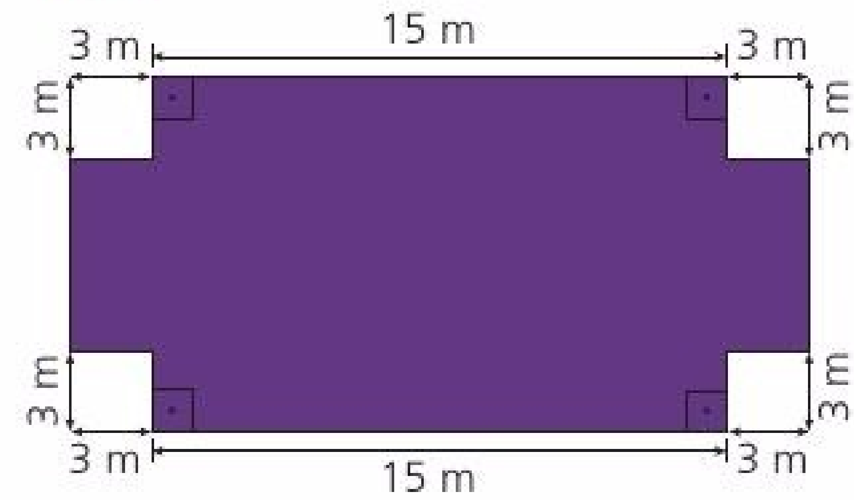


14. As figuras, a seguir representam plantas de alguns terrenos. Decompondo essas figuras em figuras de áreas conhecidas, calcule a área total de cada terreno.

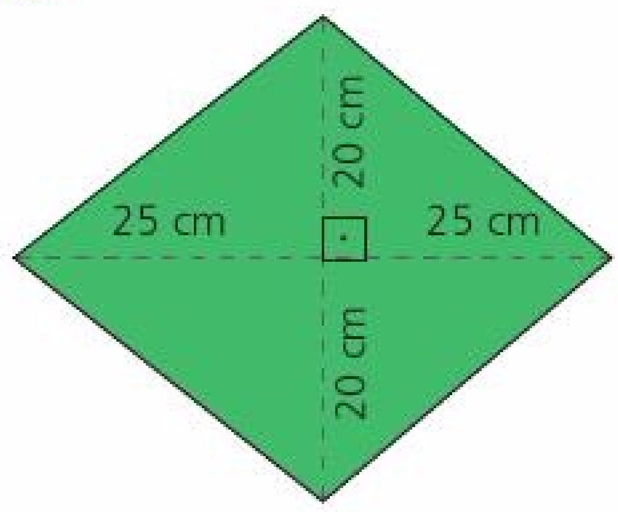
a) 900 m²



b) 174 m²

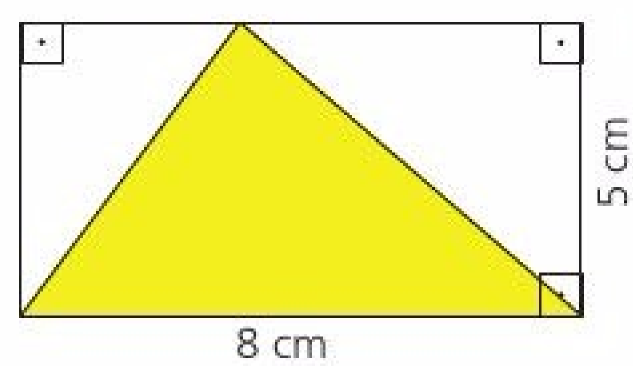


c) 1 000 cm²

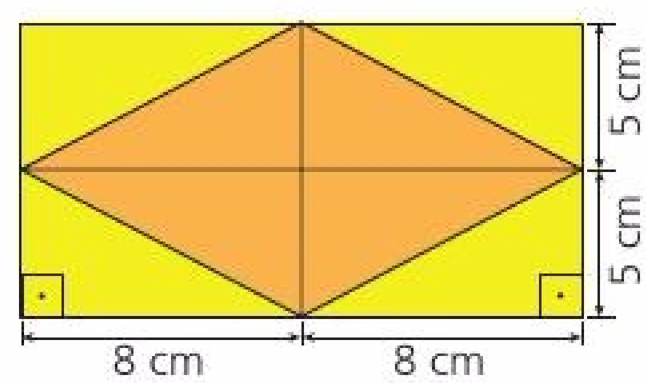


15. Calcule a área da região colorida em cada figura.

a) 20 cm²

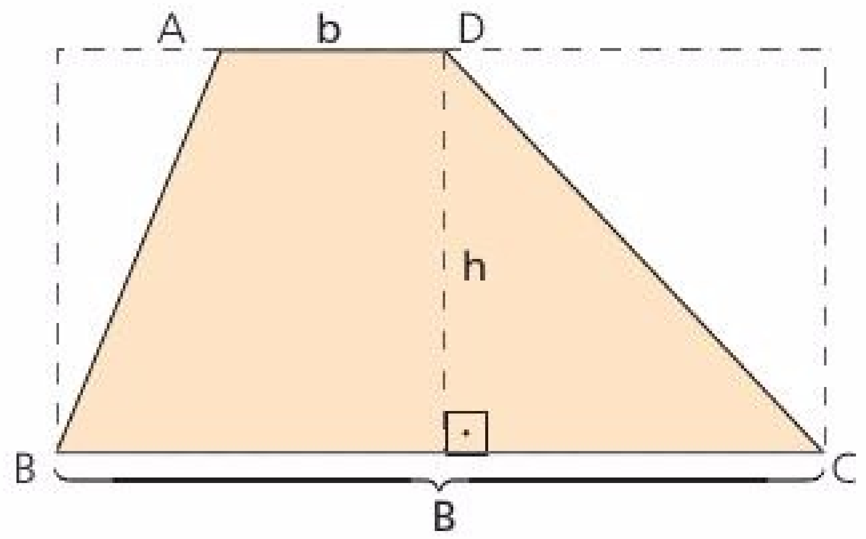


b) 48 cm²



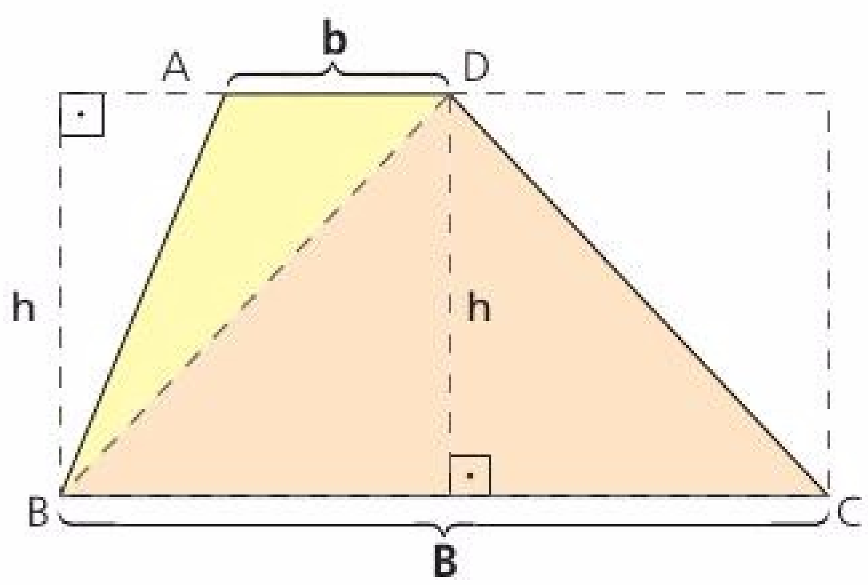
Área de um trapézio

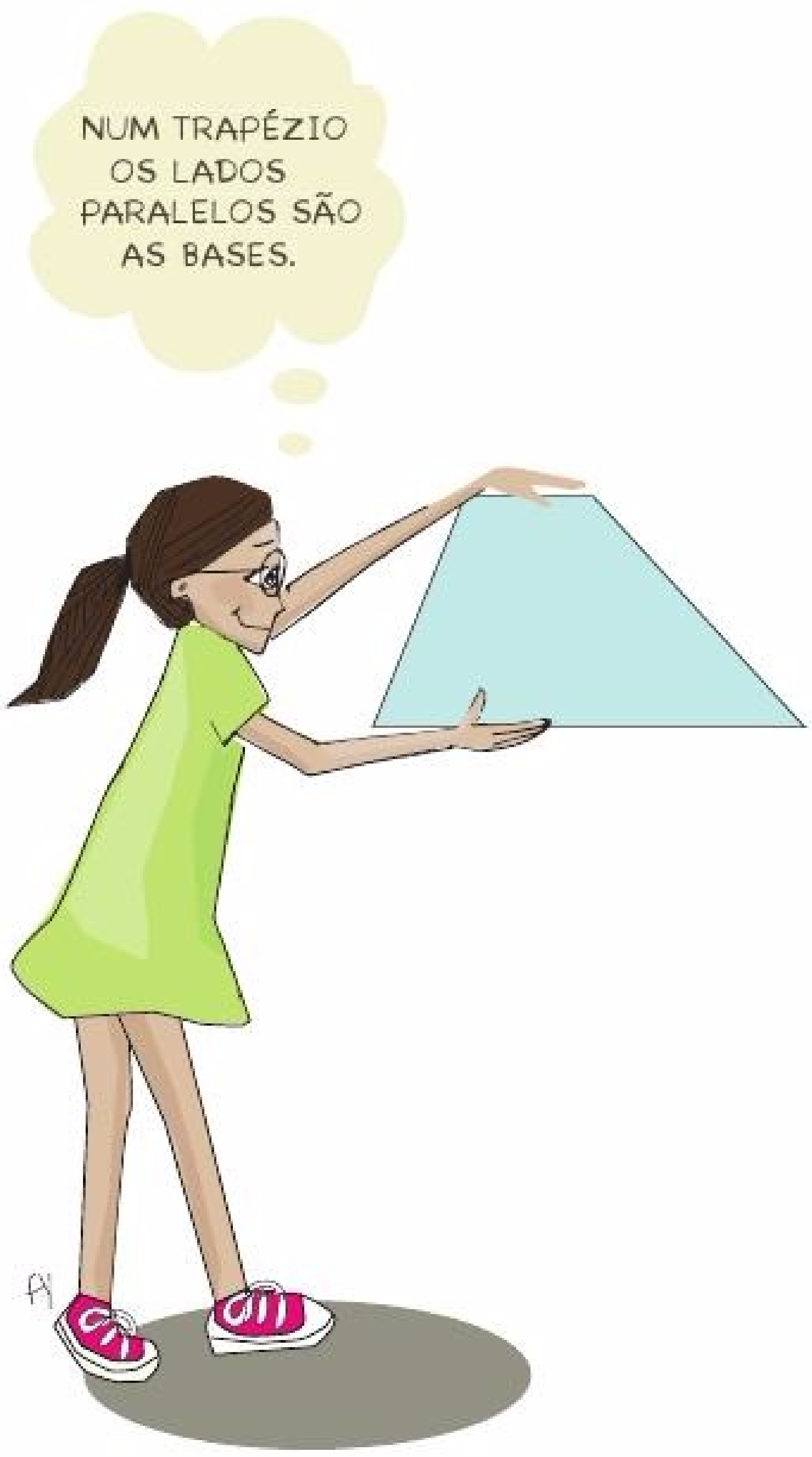
O trapézio é um quadrilátero que possui dois lados paralelos chamados **bases**. Para a determinação da área de um trapézio qualquer, vamos considerar o trapézio ABCD da figura a seguir. Nesse trapézio, $\overline{AD}$ é a **base menor b** e $\overline{BC}$ a **base maior B**.



A altura **h** do trapézio ABCD corresponde à distância entre a base maior e a base menor.

Uma forma de determinar a área deste trapézio de altura **h** é dividi-lo em dois triângulos, obtidos quando traçamos a diagonal $\overline{DB}$. Fazendo isso, a área do trapézio será a soma das áreas dos triângulos BDC e ADB.





Fernanda Youssef

- A área do ΔBDC é $A_1 = \dfrac{B \cdot h}{2}$
- A área do ΔADB é $A_2 = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Portanto:

$$A_{trapézio} = A_1 + A_2$$

$$A_{trapézio} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

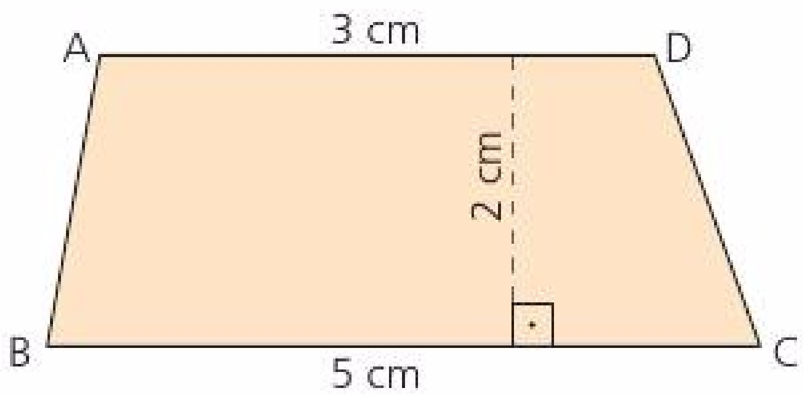
$$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Dizemos, então, que a área de um trapézio é dada pela metade da soma das bases, multiplicada por sua altura:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{\textbf{(base maior + base menor)} \cdot \textbf{altura}}{2}$$

Exemplo:

- No trapézio ABCD da figura, as bases medem 3 cm e 5 cm e a altura mede 2 cm.

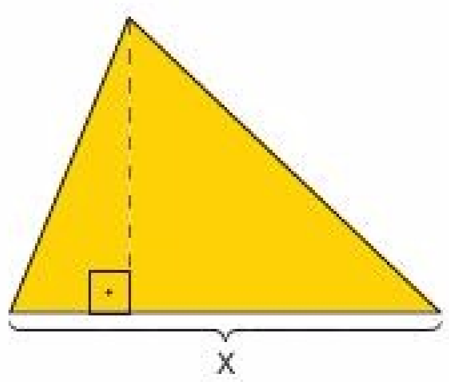


Veja como calculamos sua área:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \rightarrow A_{\text{trapézio}} = \frac{(5 + 3) \cdot 2}{2} \rightarrow A_{\text{trapézio}} = 8 \text{ cm}^2$$

Atividades

16. Um triângulo tem área de 30 cm² e altura relativa à base **x** medindo 6 cm. Determine a medida da base. x = 10 cm

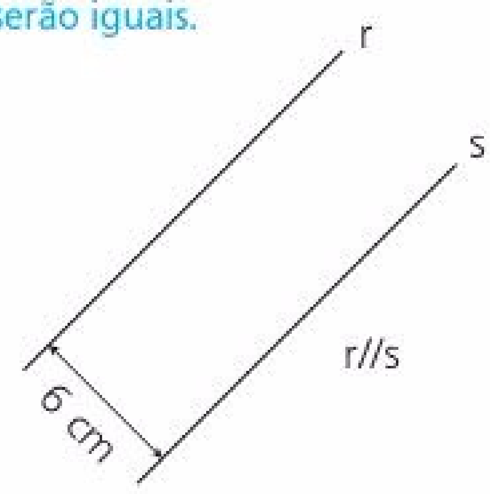


17. Para fazer esta atividade você deverá ler a descrição da figura, desenhá-la no caderno e calcular o que se pede.

Desenhar figura

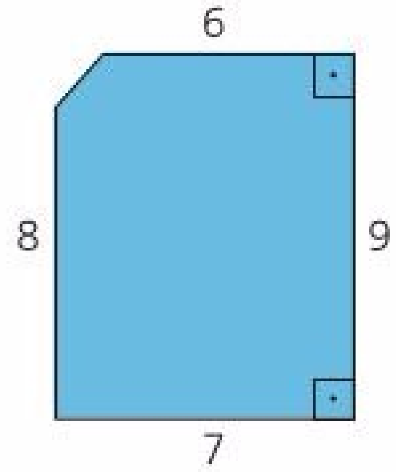
As duas retas paralelas **r** e **s** da figura mantêm entre si uma distância de 6 cm. Um triângulo ABC tem os vértices A e B na reta **r** e o vértice **C** na reta **s**. Se o comprimento do lado $\overline{AB}$ do triângulo é 8 cm, qual será a área do triângulo ABC? Se mantivermos o lado $\overline{AB}$ e construirmos um outro triângulo ABD, cujo vértice D encontra-se também na reta **s**, em uma posição diferente de **C**, qual será a área desse triângulo?

As áreas serão iguais.
24 cm²
24 cm²



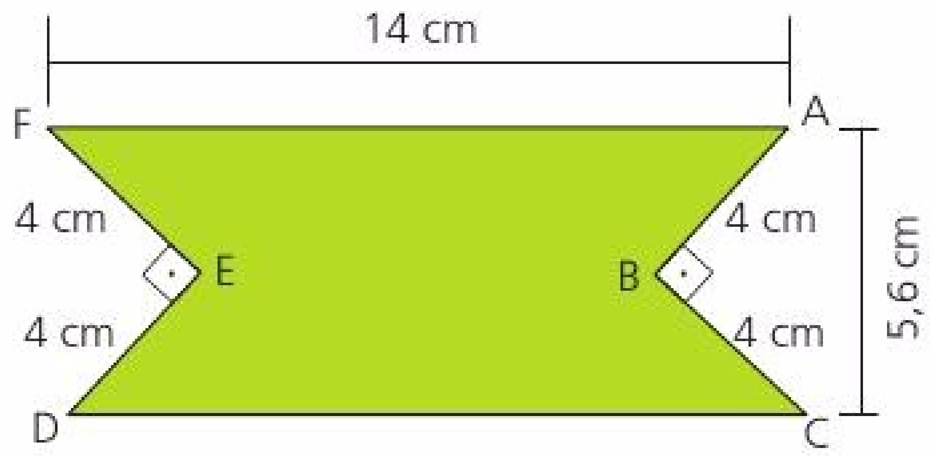
18. Determine a área da figura a seguir, cujas medidas são dadas em centímetros.

62,5 cm²



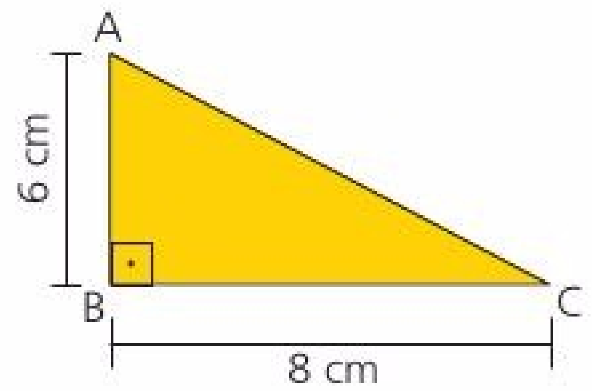
Para estudar

19. Determine a área do polígono côncavo ABCDEF, considerando que os ângulos $A\hat{B}C$ e $F\hat{E}D$ medem 90°.

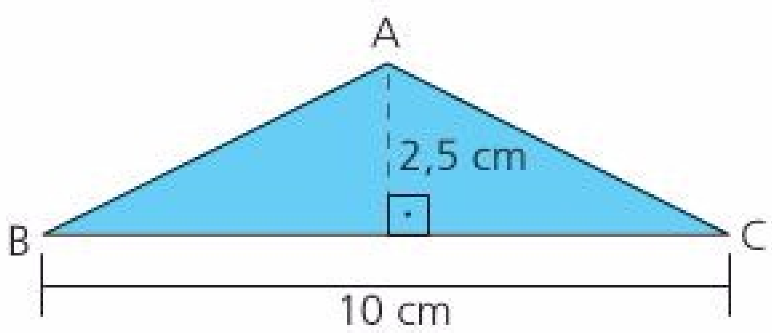


20. Calcule a área de cada um dos triângulos das figuras:

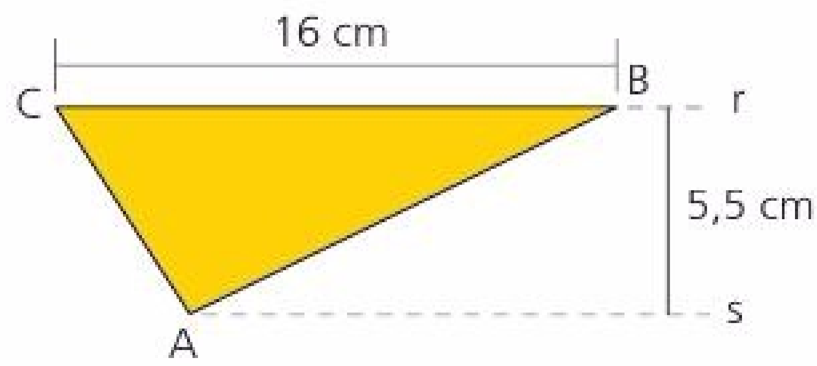
a)



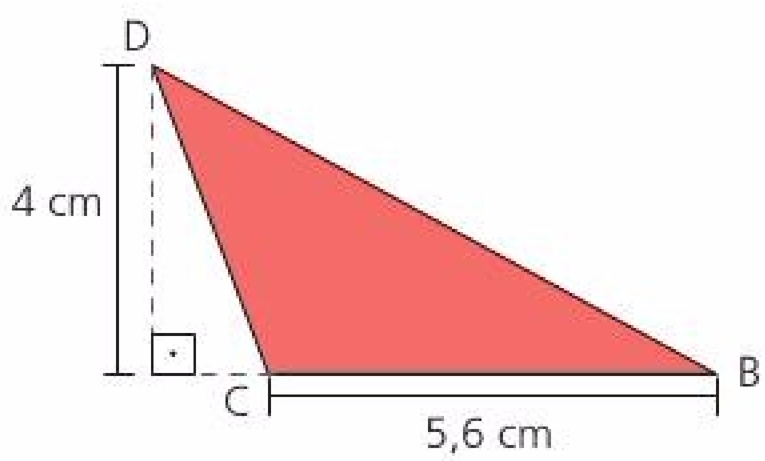
b)



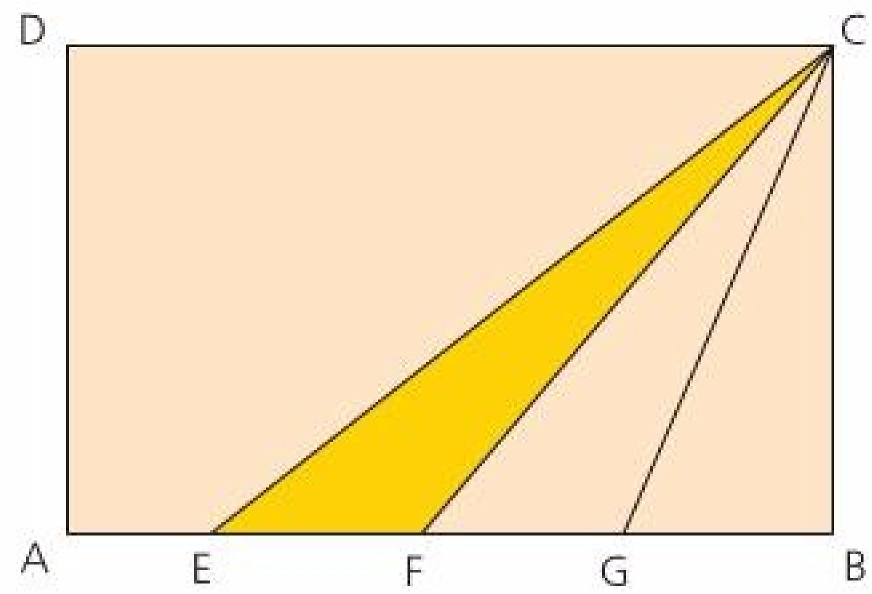
c)



d)



21. A base do retângulo ABCD da figura mede 12 cm e foi dividida em quatro partes iguais. Sabendo que a altura BC do retângulo mede 8 cm, responda o que se pede.



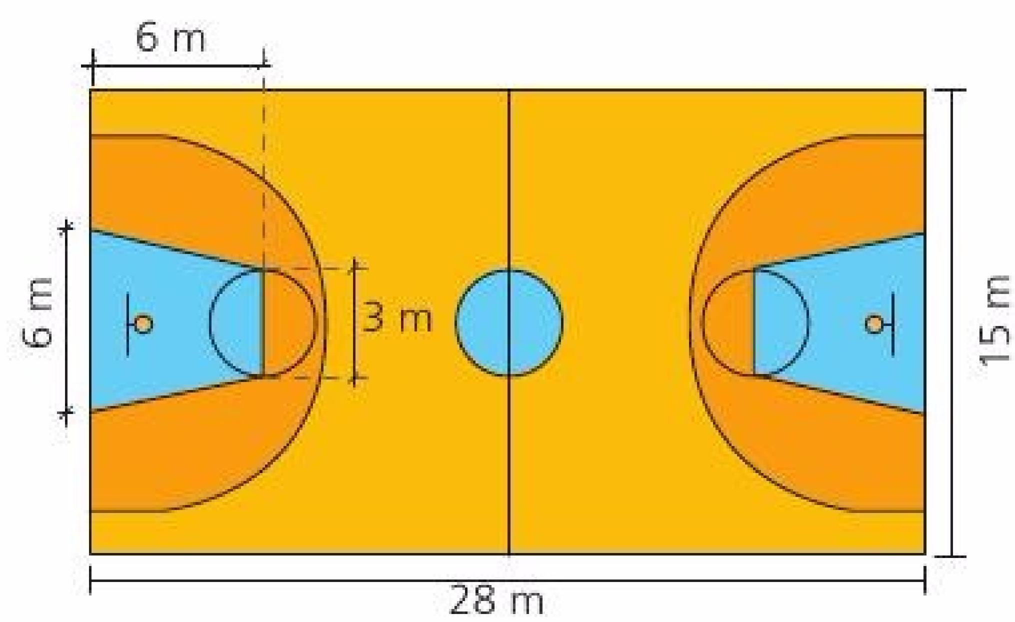
a) A área do triângulo CEF.

b) A área do triângulo CEG.

c) A área do triângulo CEB.

d) A área do trapézio DAEC

22. Uma quadra de basquete tem medidas oficiais de 28 m de comprimento por 15 m de largura. A figura a seguir, mostra também as dimensões do trapézio delimitado em cada "garrafão" (área sob as tabelas). Calcule:

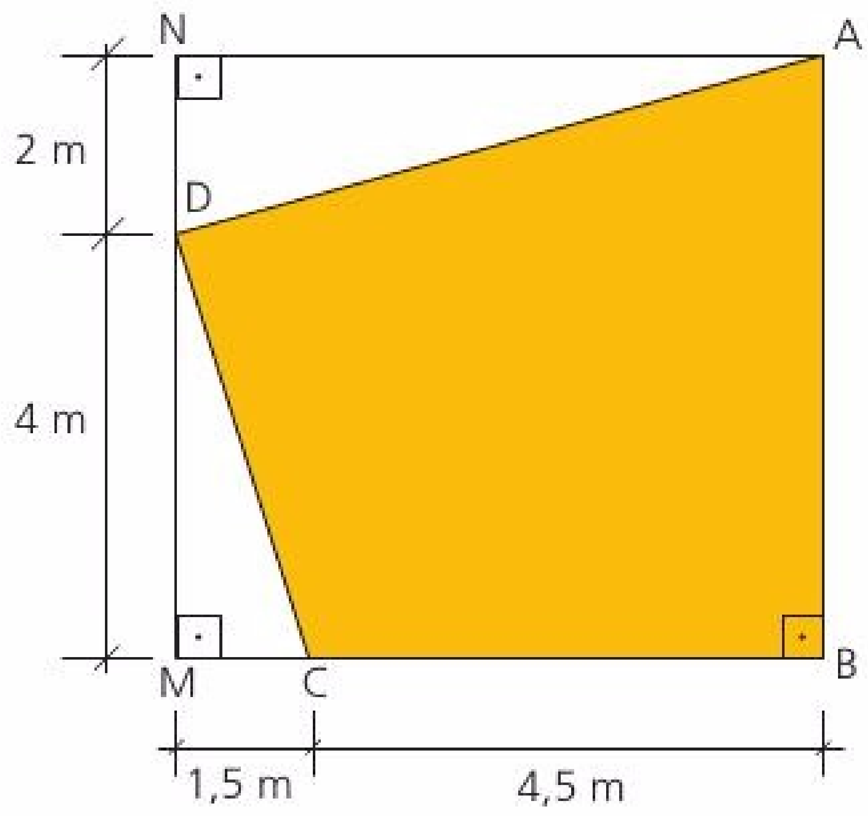


Calcule:

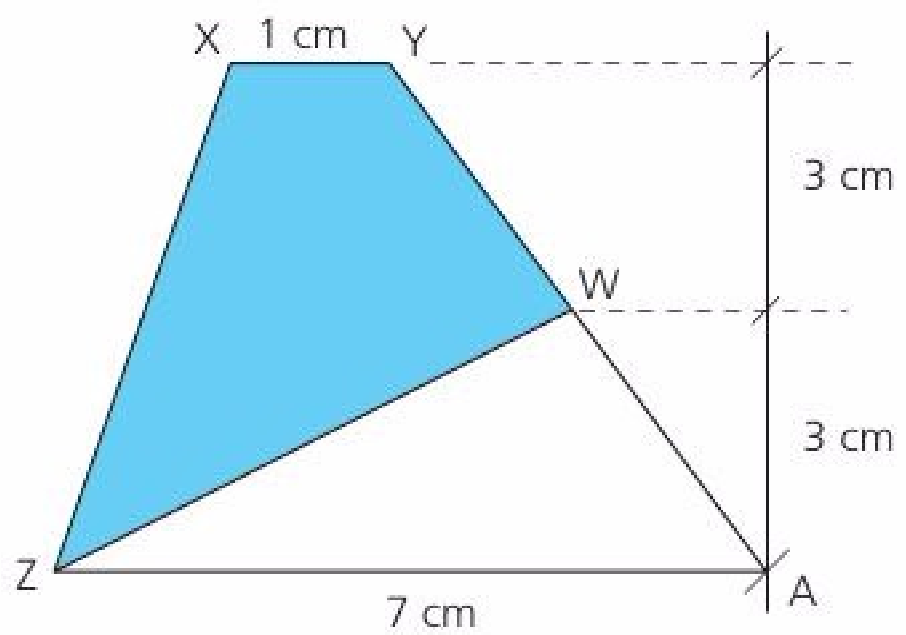
a) A área da quadra de basquete.

b) A área do trapézio delimitado no garrafão.

23. Qual é a área do quadrilátero ABCD, que é parte da área do quadrado ABMN da figura a seguir?



24. Considere a figura a seguir e as medidas indicadas.



Calcule:

a) A área do trapézio XYZA

b) A área do quadrilátero XYWZ

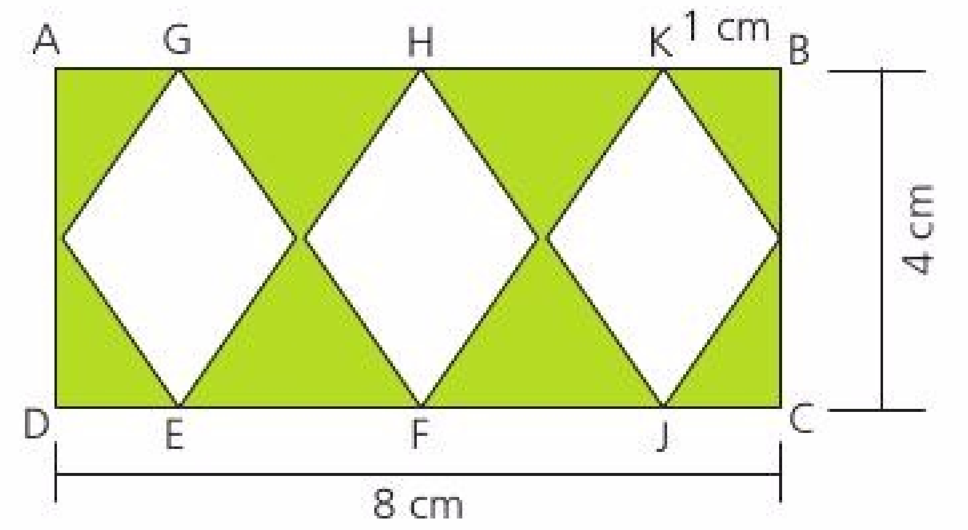
c) A área do triângulo WZA

25. Na figura a seguir:

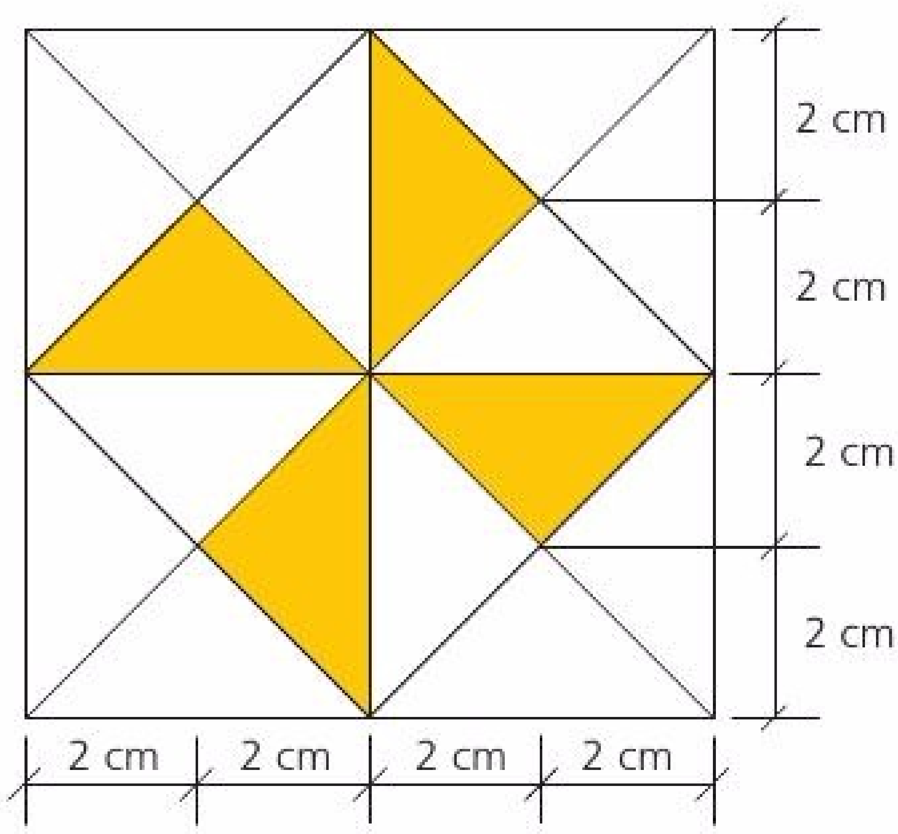
$AG \equiv KB \equiv DE \equiv JC$

$GH \equiv HK \equiv EF \equiv FJ$

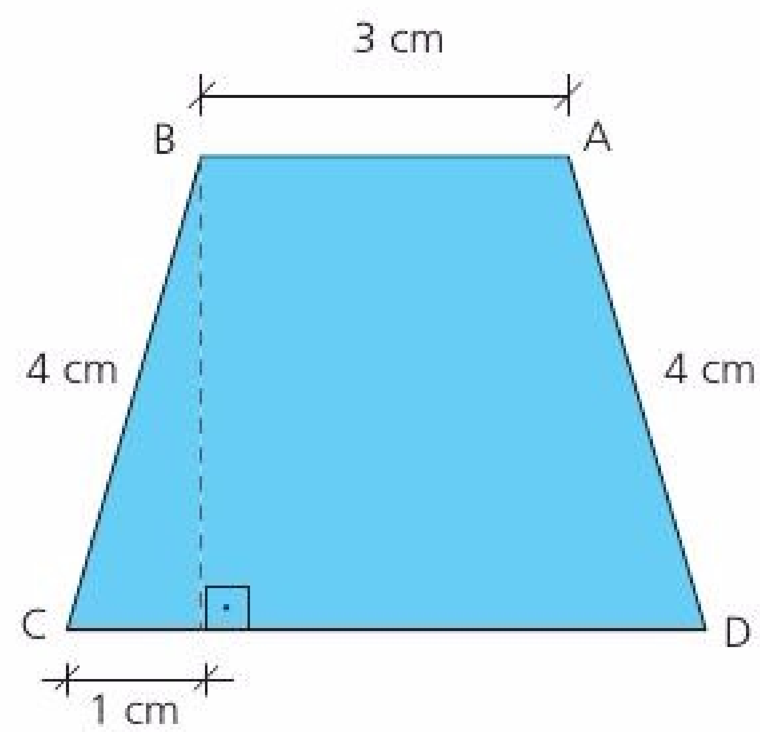
Determine a área pintada:



26. Determine a área pintada desta figura:



27. Calcule a área do trapézio isósceles da figura a seguir.



Resolução das atividades

1. 1) 18 cm² 4) 15 cm²
2) 19 cm² 5) 21 cm²
3) 19 cm² 6) 18 cm²

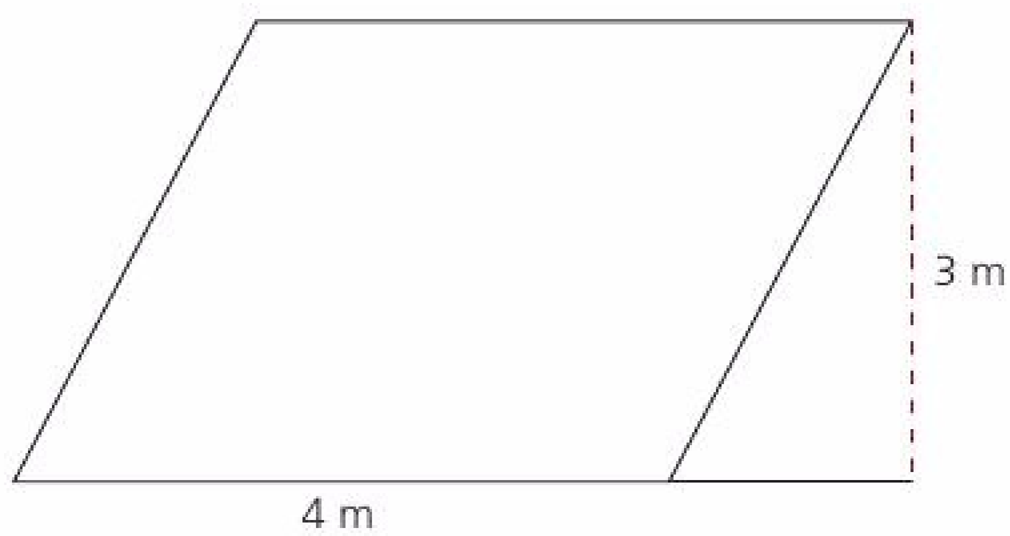
2. Resposta Pessoal.

3. a) 80 cm²
b) 60 cm²
c) 21 cm²

4. $\overline{AE} = \overline{EB} = 4$ cm.
h = 5 cm
Área = 20 cm²

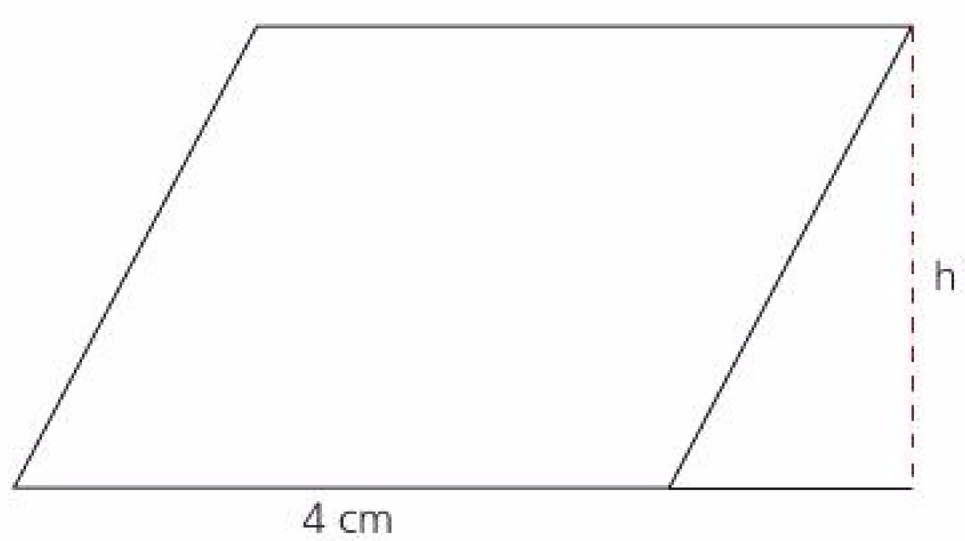
5. a) como $\overline{AB} = \overline{DC} = 8$ cm temos
$8 = \overline{DF} + 3 \text{ cm} \rightarrow = \overline{DF} = 5$ cm
b) A = 5 x 5
A = 25 cm²
c) um quadrado

6. a)



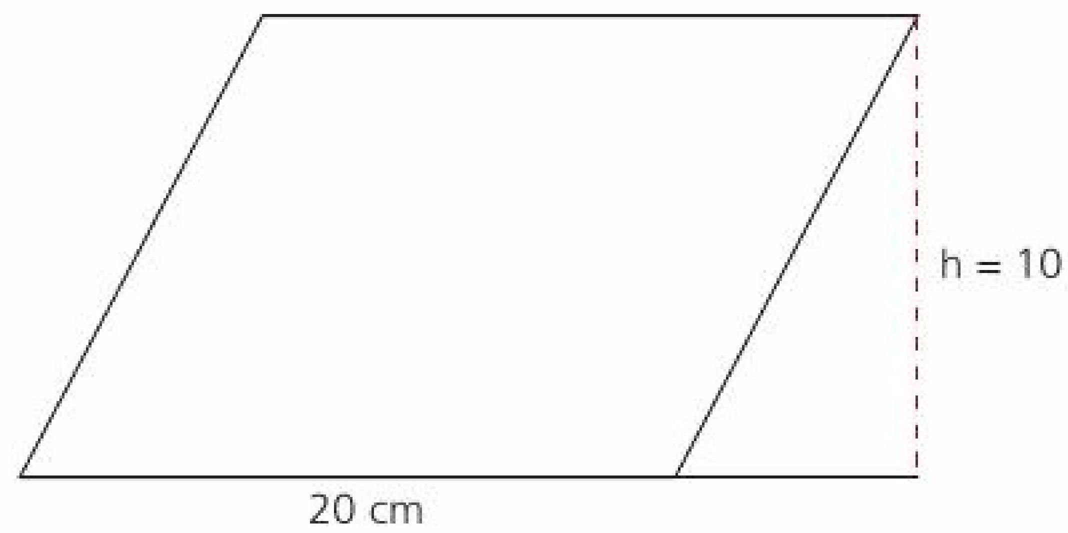
A = 12 m²

b)



A = 64 cm²
h = 16 cm

c)



A = 200 cm²

7. 80 cm²

8. 72 m²

9. 81 cm²

10. 144 cm²

11. a) 48 cm²
b) 48 cm²

12. Cada triângulo tem área igual a 3 cm². Logo a área de 9 triângulo é 27 cm².

13. 9 cm²

14. a) 900 m²
b) Área = 21 x 10 – 4 x 3 x 3
Área = 174 m²
c) 1 000 cm²

15. a) 20 cm²
b) 48 cm²

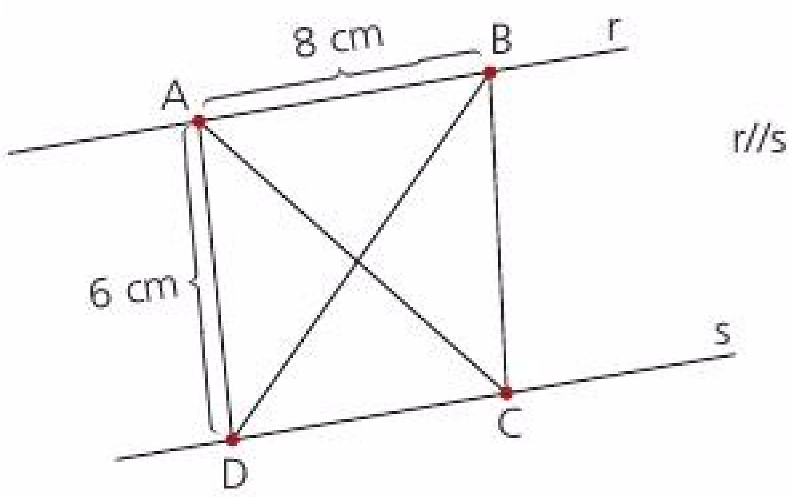
16. A = 30 cm²
altura = 6 cm
base = x

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$30 = \frac{x \cdot 6}{2}$$

x = 10 cm

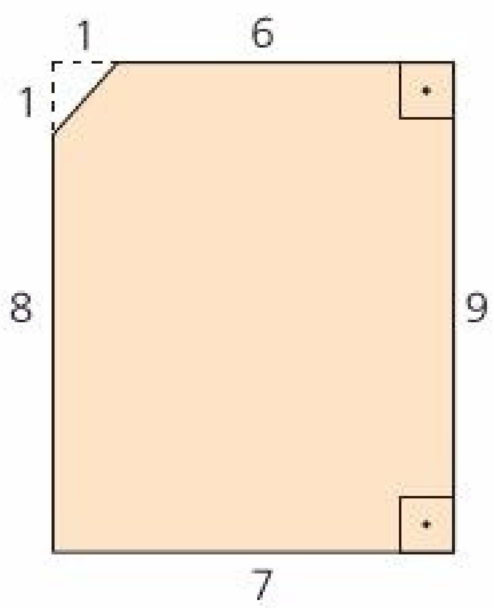
17.



As áreas serão iguais.

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$ e $A_{\Delta ABD} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

18.



A_1 = área do retângulo de lados 7 e 9.

$A_1 = 63 \text{ cm}^2$

A_2 = área do triângulo de lado 1 e altura 1

$A_2 = \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$A = A_1 - A_2 = 63 - \dfrac{1}{2}$

$A = 62{,}5 \text{ cm}^2$

Respostas da seção Para estudar

19. $62{,}4 \text{ cm}^2$

20. a) 24 cm^2

b) $12{,}5 \text{ cm}^2$

c) 88 cm^2

d) $11{,}2 \text{ cm}^2$

21. a) 12 cm^2 c) 36 cm^2

b) 24 cm^2 d) 60 cm^2

22. a) 420 m^2 b) 27 m^2

23. 27 m^2

24. a) 24 m^2

b) $\dfrac{21}{2} \text{ cm}^2$

c) $13{,}5 \text{ cm}^2$

25. 4 cm^2

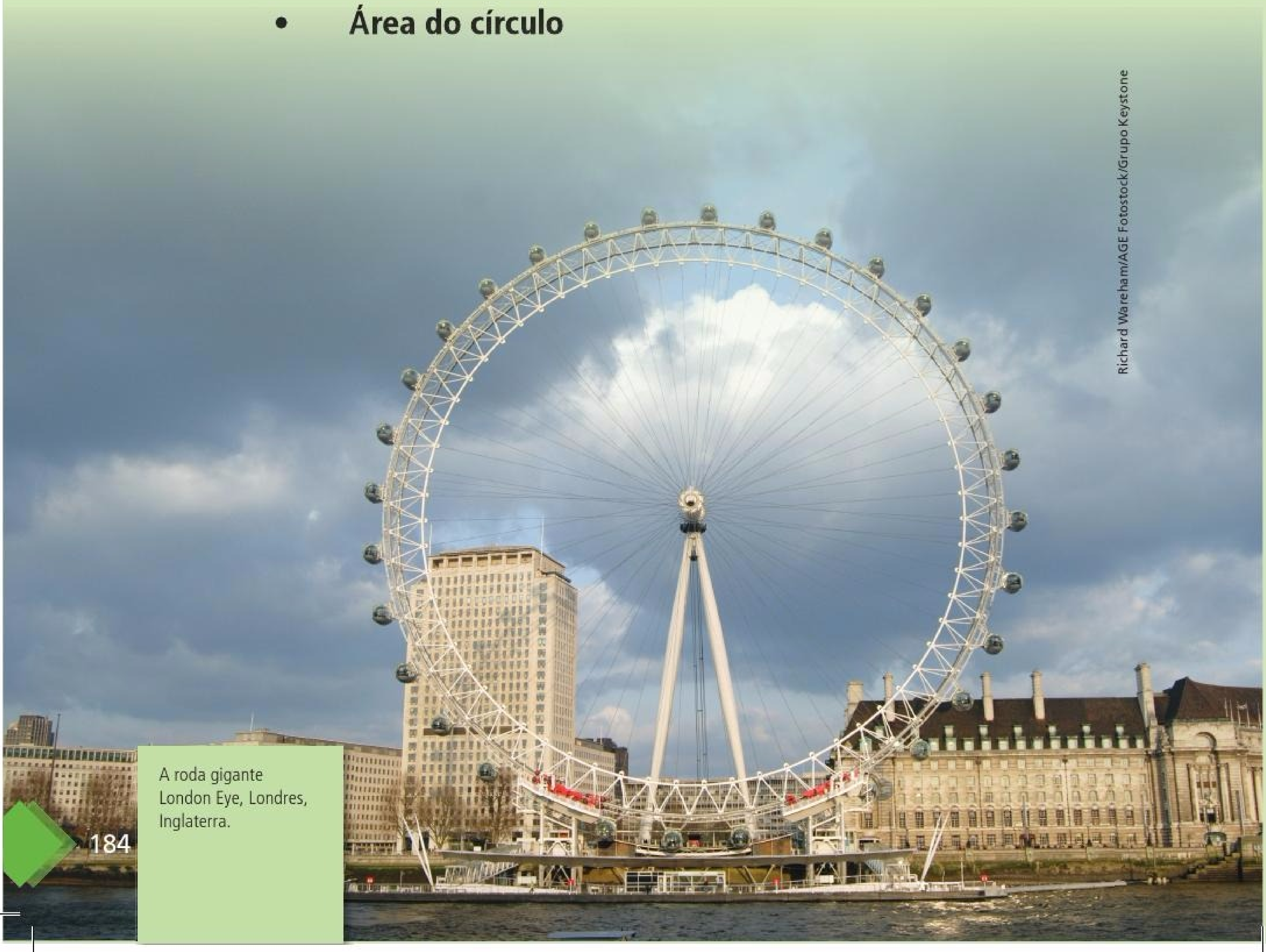
26. 16 m^2

27. 16 m^2

capítulo 9

Circunferência e círculo

- Circunferência e círculo
- Lugar geométrico
- Propriedades das cordas de uma circunferência
- Polígonos circunscritos e inscritos numa circunferência
- Comprimento da circunferência
- Área do círculo



Richard Wareham/AGE Fotostock/Grupo Keystone

A roda gigante London Eye, Londres, Inglaterra.

Conversa Inicial

Entre as formas geométricas que podemos observar ao nosso redor e na natureza, a forma circular talvez tenha sido aquela que mais despertou a curiosidade dos seres humanos desde os tempos mais remotos.

Não há como imaginar que nossos ancestrais não tenham sido estimulados em sua curiosidade observando as formas do Sol e da Lua, por exemplo. Mais adiante, ao observar os astros, os homens perceberam suas formas circulares, associaram seus movimentos a circunferências e estabeleceram processos de cálculos angulares, que permitiram sofisticadas navegações, com base nas posições das estrelas.

Ao medir uma circunferência, descobriram a "magia" do número **π** e, depois, conseguiram determinar a forma circular da Terra.

Carlos-bcn/PhotoXpress

Stefan Häuselmann/PhotoXpress

NASA

O Sol, a Terra e a Lua, formas circulares que sempre despertaram a curiosidade dos seres humanos.

Você já ouviu a expressão...

... "Não é preciso reinventar a roda"?

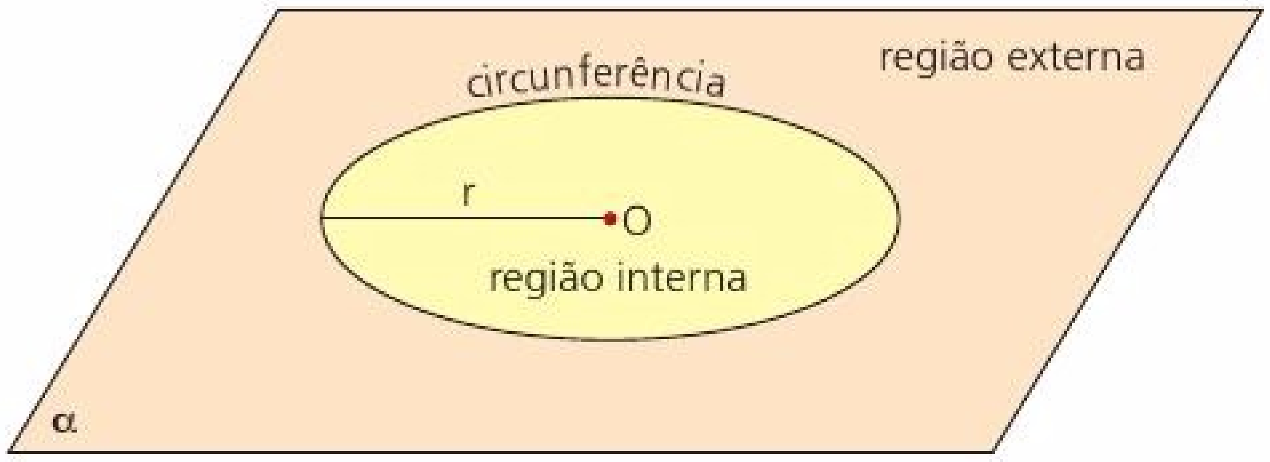
Essa é uma expressão muito antiga. Faz referência à roda, que traduz a importância que a forma circular teve na história dos seres humanos, por viabilizar os meios de transporte e os processos que facilitaram movimentação de grandes cargas. A roda é considerada uma invenção que é propriedade de todos e, de tão perfeita e óbvia, não precisa ser reinventada. Essa é a ideia da expressão.

Quais seriam as medidas geométricas e as relações que determinam as diferenças entre os diversos círculos ou circunferências? Como podemos estabelecer a forma de construir determinados polígonos a partir da circunferência? Vamos investigar as respostas a essas perguntas e conhecer melhor essa forma geométrica tão perfeita.

Circunferência e círculo

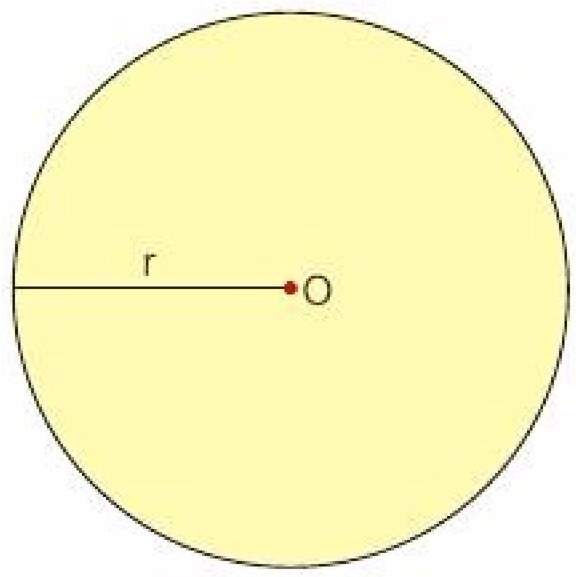
Toda circunferência determina em um plano duas regiões: a interna e a externa. A região interna mais os pontos pertencentes à circunferência é denominada de **círculo**.

Na figura a seguir, representamos o plano α e a circunferência em perspectiva.



Observando de cima o plano α, teremos o círculo de centro **O**, formado pelos pontos da circunferência e os pontos da região interna.

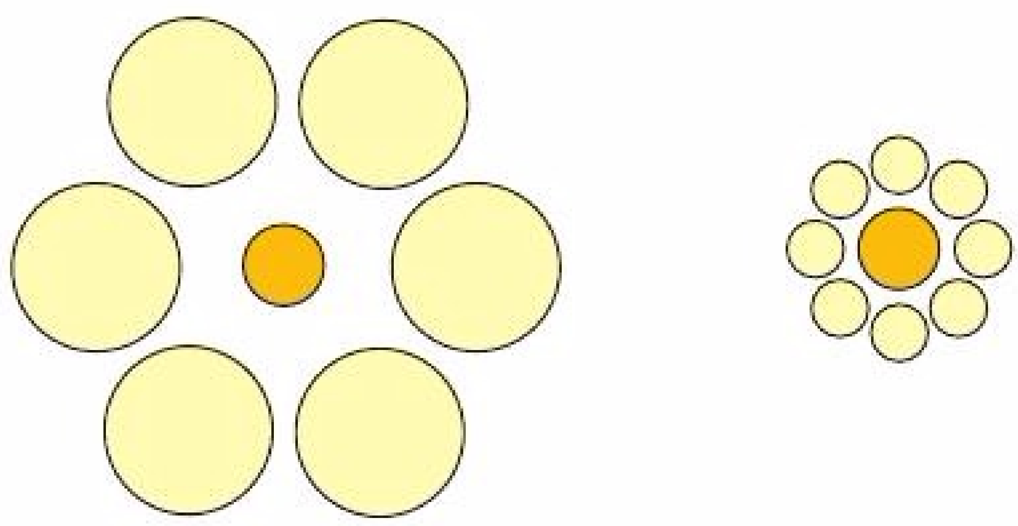
Vale a pena destacar que todos os pontos de uma circunferência pertencem ao círculo.



O círculo pode também ser definido como o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo **O** é **menor ou igual** a uma distância **r** dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto.

Desafio

Qual dos dois círculos internos é maior na figura ao lado? Tente responder sem fazer nenhum tipo de medida. Utilize apenas sua impressão visual.



Elementos de uma circunferência

Os brincos de argola e as moedas nas imagens a seguir nos lembram, respectivamente, a circunferência e o círculo.

Radius Images/Glow Images

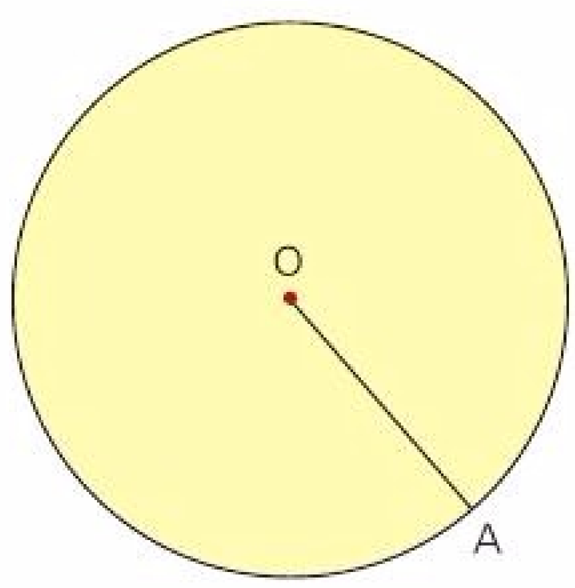
Horatiu Bota/Dreamstime

A figura geométrica formada pelos pontos de um plano que mantêm a mesma distância de um ponto **O** é denominada **circunferência** e o ponto **O** é seu centro.

Solicite que os alunos construam uma circunferência, utilizando compasso, e chequem que os pontos dessa circunferência construída são equidistantes ao centro da mesma.

Podemos dizer também que a circunferência é a "linha que delimita o círculo".

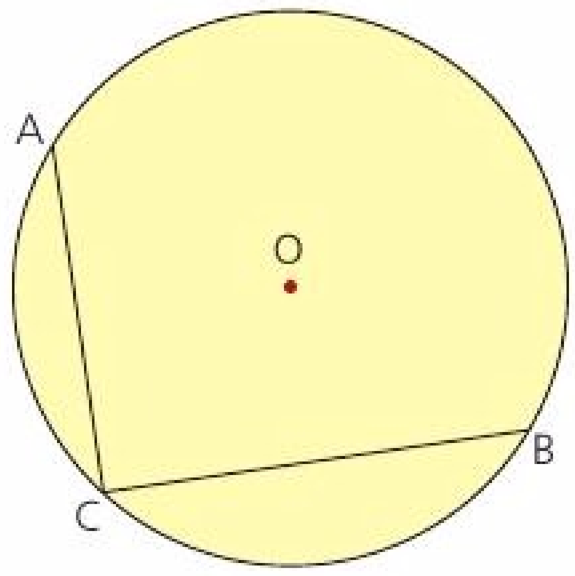
Na circunferência a seguir, **O** é o centro e o segmento $\overline{AO}$, cujas extremidades são o centro **O** e um ponto **A** qualquer da circunferência. Este segmento é denominado **raio da circunferência.**



Corda e diâmetro de uma circunferência

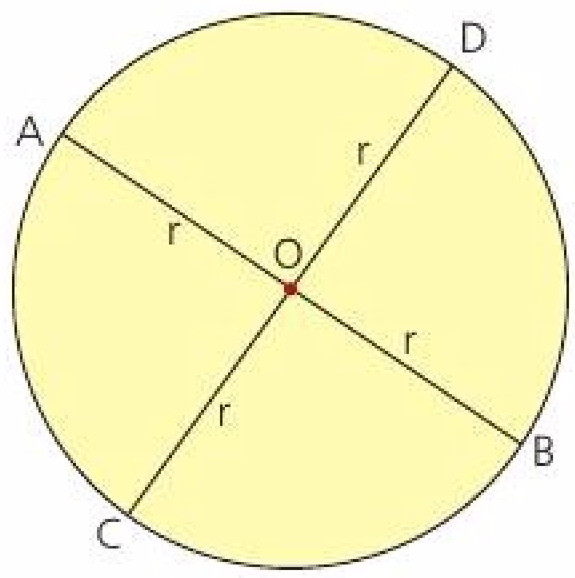
Corda de uma circunferência é qualquer um dos segmentos cujas extremidades são dois pontos distintos da circunferência.

Na circunferência da figura, $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ são cordas da circunferência.



Quando uma corda contém o centro O da circunferência, ela é denominada **diâmetro**. Na circunferência a seguir $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são diâmetros da circunferência.

Para falarmos de uma circunferência de centro em O e raio r, podemos usar a notação C (O, r).



Note que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio **r** da circunferência.

$$\overline{AB} = \overline{DC} = 2r$$

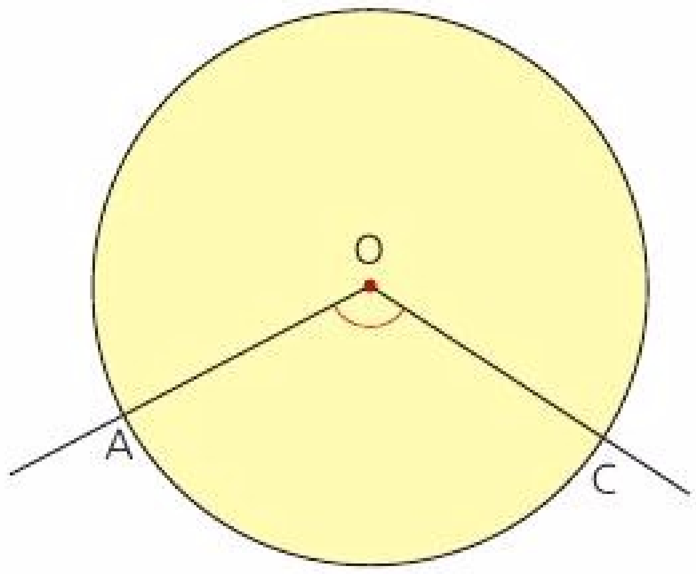
Ângulos e arcos de uma circunferência

Agora, vamos analisar as propriedades dos ângulos e arcos determinados sobre uma circunferência.

Ângulo Central

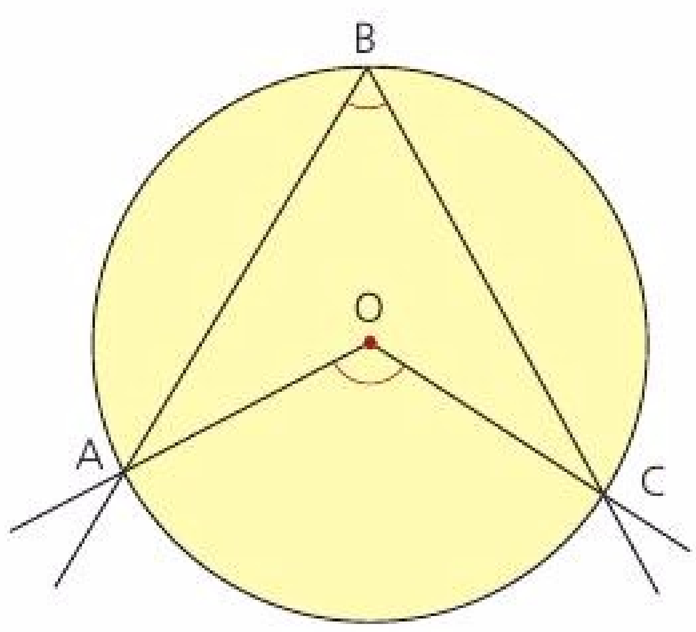
Considerando-se uma circunferência qualquer, chamamos de ângulo central a todo ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Na figura a seguir, AÔC é um ângulo central.



Ângulo inscrito

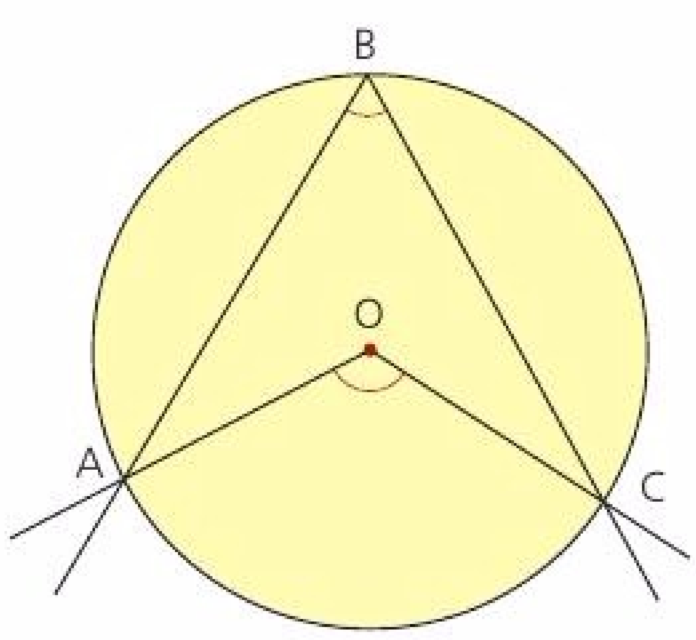
Chamamos de ângulo inscrito a todo ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e cujos lados cortam a circunferência em outros dois pontos. Na figura a seguir, $A\hat{B}C$ é um ângulo inscrito na circunferência.



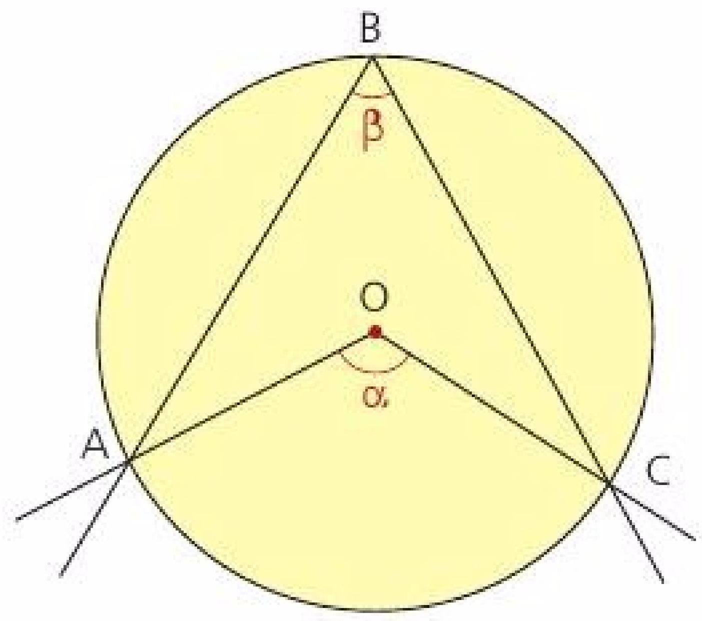
Arco de uma circunferência

Chama-se arco de circunferência a qualquer uma das partes determinadas na circunferência por um ângulo inscrito ou por um ângulo central.

Assim, na figura a seguir, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ e $\overset{\frown}{BA}$ são exemplos de arcos na circunferência de centro O.



Observe na figura que para um determinado ângulo inscrito β, corresponde um ângulo central α.

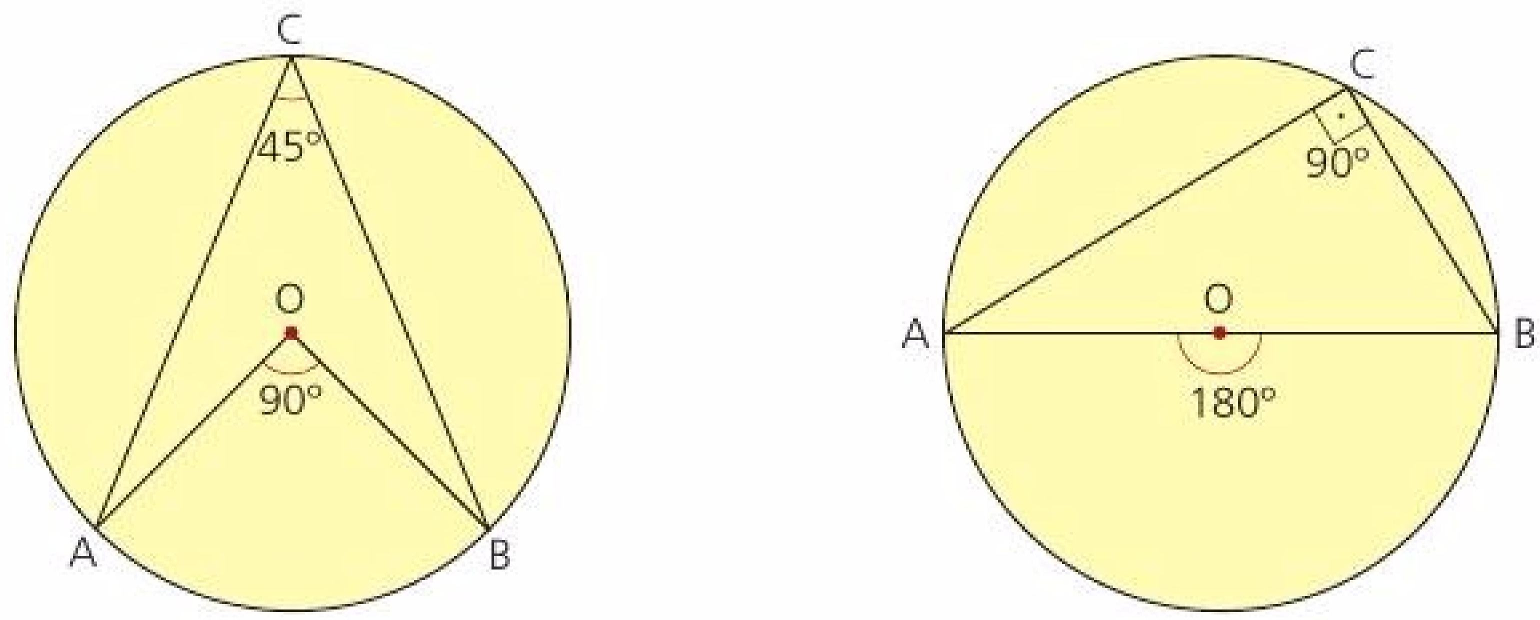


Um ângulo central α terá como medida o dobro do ângulo inscrito β a ele correspondente. Assim:

$$\alpha = \mathbf{2}\beta$$

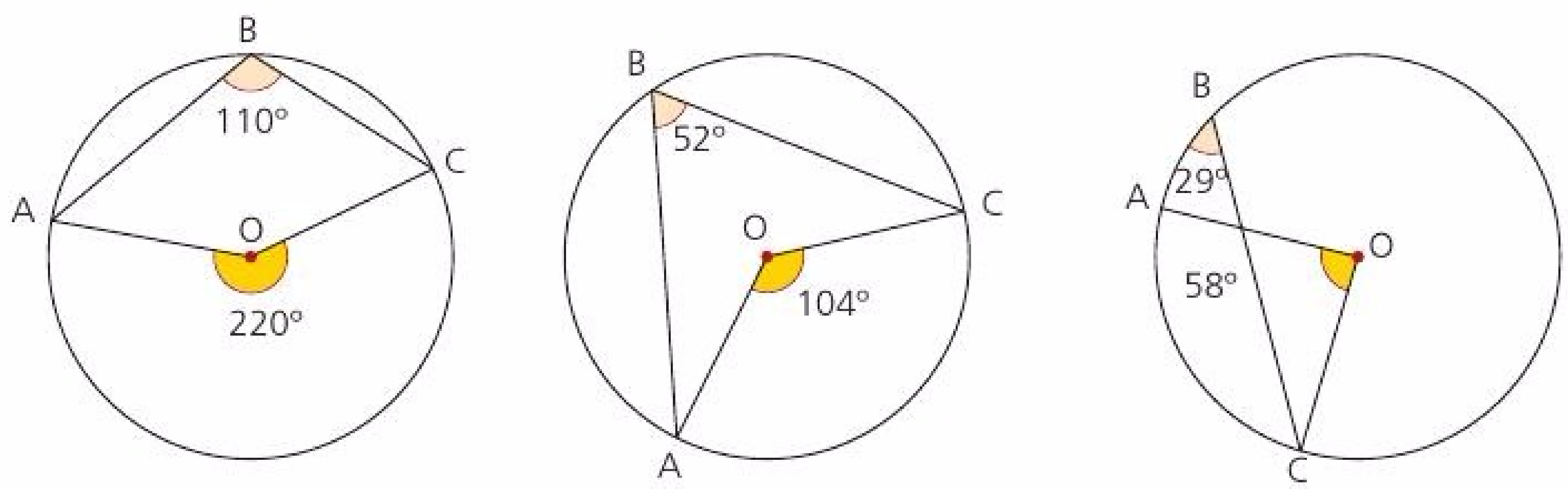
Chamamos de ângulo convexo qualquer ângulo cuja medida esteja entre 0° e 180°, e os ângulos côncavos, ou não convexos, são aqueles que têm medidas entre 180° e 360°.

Exemplos:

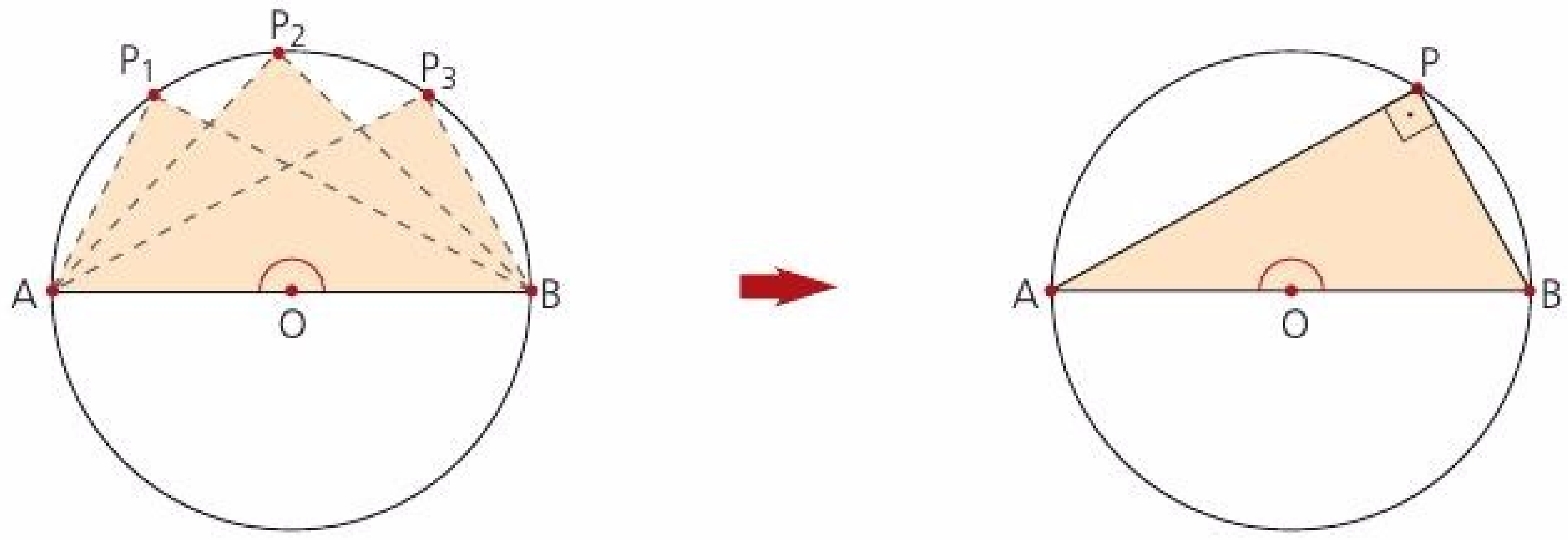


Observe na figura à direita, acima, que um ângulo inscrito de 90° irá corresponder a um ângulo central de 180°. Assim, o triângulo ABC, formado pelos lados do ângulo inscrito e do ângulo central, é um triângulo retângulo.

Veja outros exemplos da relação entre um ângulo inscrito e o correspondente ângulo central.



Uma consequência bastante importante da relação entre as medidas do ângulos inscrito e central é a que se verifica quando este é de 180°. Note que, qualquer que seja o ponto P pertencente à circunferência, o ângulo inscrito será 90° e, portanto, o triângulo APB será retângulo.



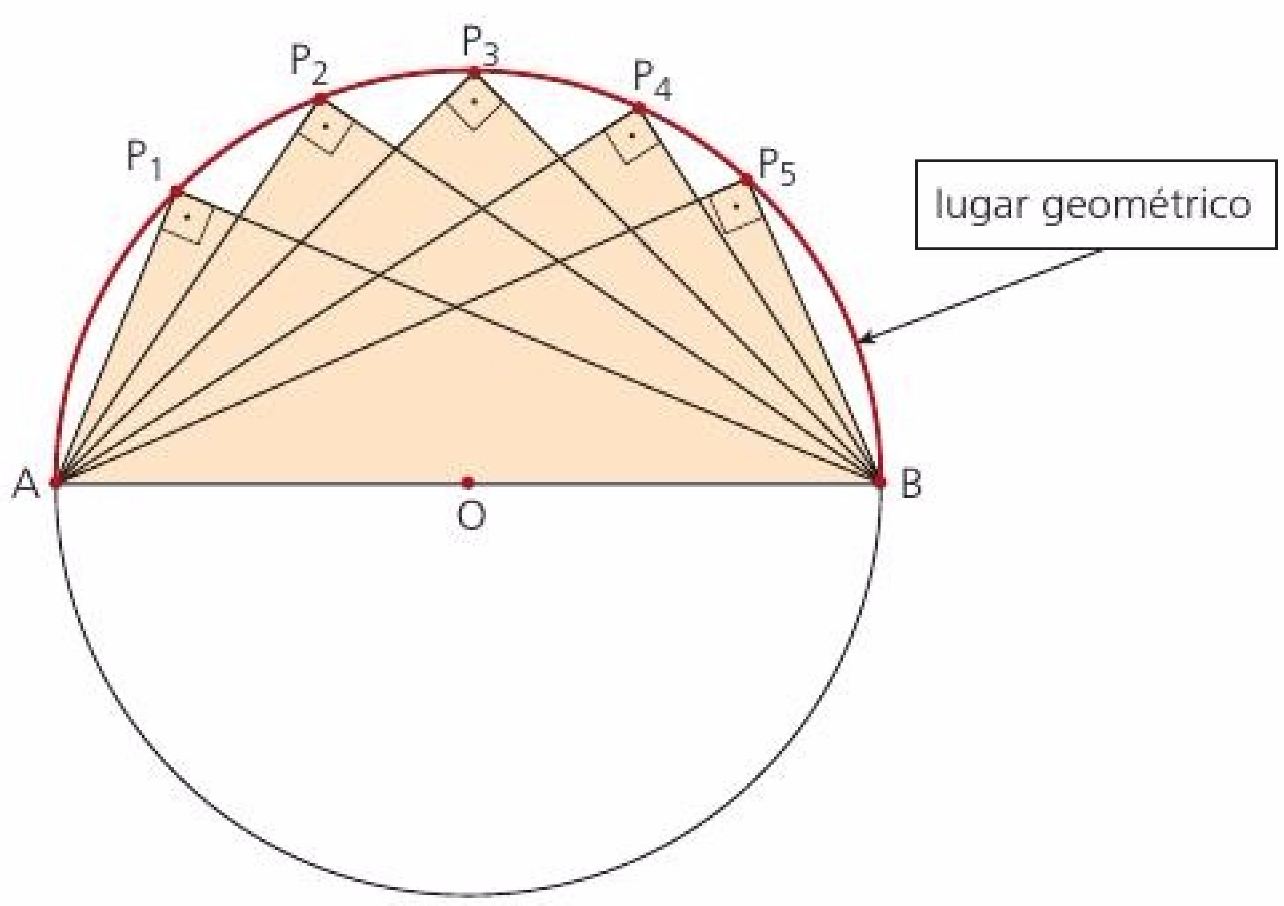
Esta consequência pode, também, ser enunciada da seguinte forma:

Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

Lugar geométrico

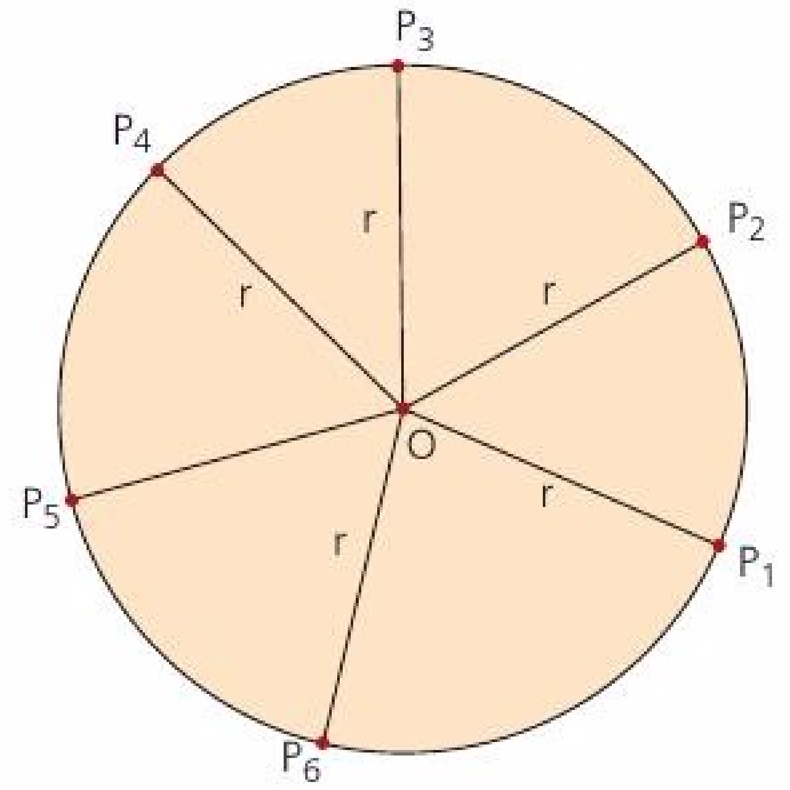
Vimos que todos os pontos da semicircunferência de extremidades A e B têm a propriedade de "enxergar" o diâmetro AB sob um ângulo de 90°. Quando uma figura geométrica é formada por pontos que possuem, todos, a mesma propriedade, dizemos que esta figura é um **lugar geométrico**.

Assim, a semicircunferência é o lugar geométrico dos pontos que são vértices de ângulos inscritos de 90°. Na figura a seguir, os triângulos com vértices em P_1, P_2, ...,P_n e nos extremos A e B do diâmetro da circunferência são retângulos.



Existem vários lugares geométricos, no entanto, cinco são considerados os mais importantes. São eles: circunferência, mediatriz, bissetriz, paralela e arco-capaz.

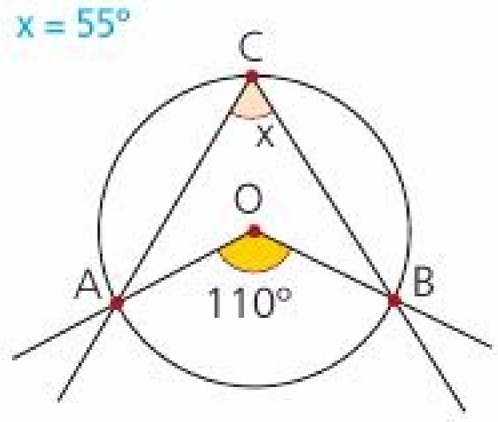
A partir do conceito de lugar geométrico, podemos também dizer que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos que mantêm a mesma distância de outro ponto chamado centro. Essa distância é o raio da circunferência de centro O.



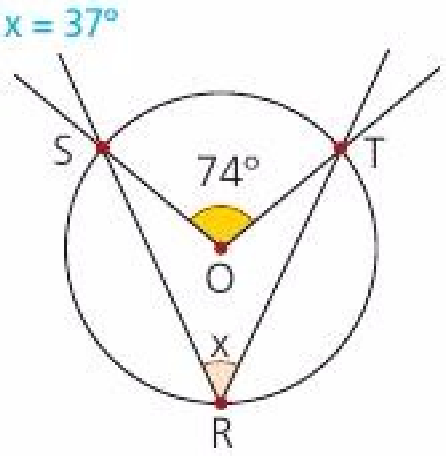
Atividades

1. Nas figuras a seguir, determine o valor de **x** e **y**:

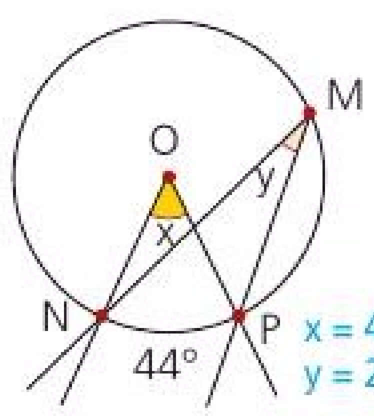
a) x = 55°



b) x = 37°



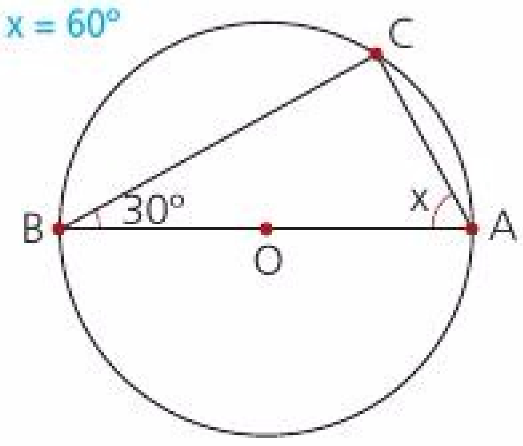
c)



x = 44°
y = 22°

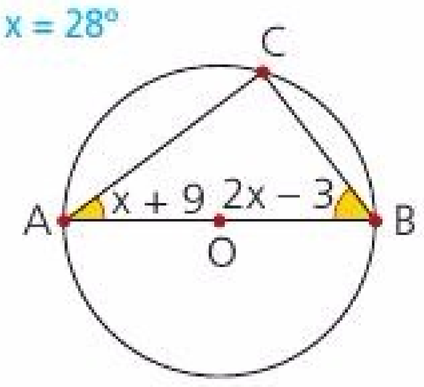
Analisar figuras

d) x = 60°

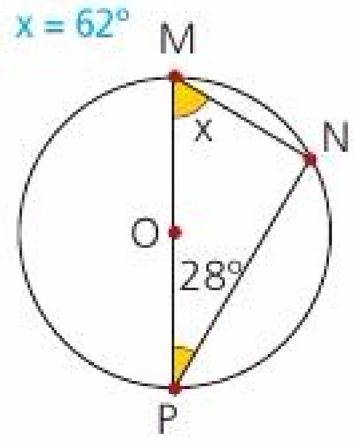


2. Determine o valor de **x** e o valor dos ângulos internos dos triângulos nas figuras a seguir:

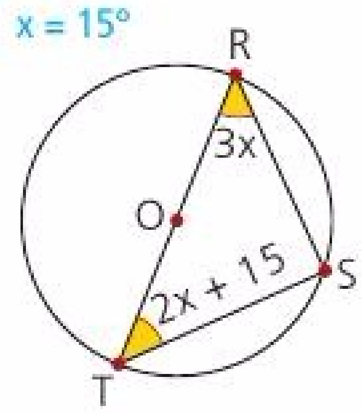
a) x = 28°



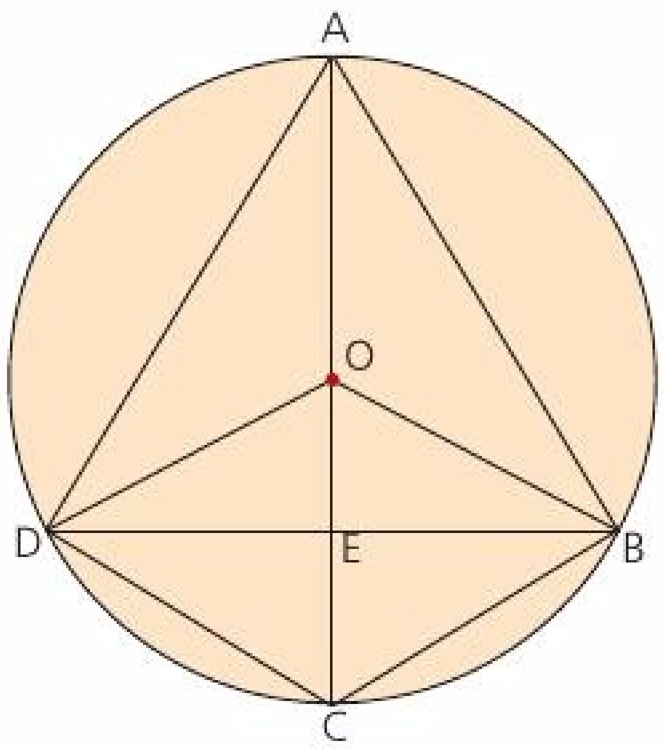
b) x = 62°



c) x = 15°



3. Na figura a seguir, $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{AD}$ e O é o centro da circunferência de raio 4 cm.



a) Determine os ângulos internos do quadrilátero ABCD. $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 120°$, $\hat{D} = 90°$

b) Qual é a natureza do quadrilátero DOBC? losango

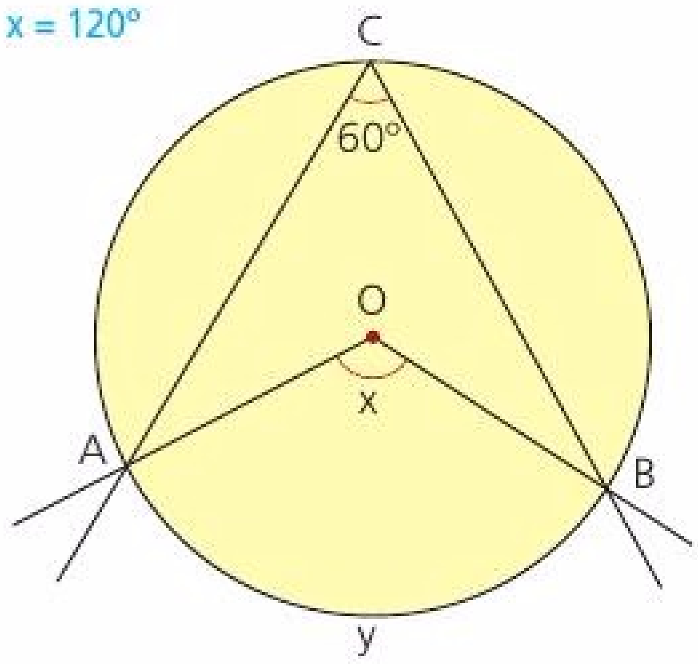
c) Determine a área do quadrilátero DOBC. $4\sqrt{3}$ cm²

d) Determine a área do quadrilátero ABCD. $8\sqrt{3}$ cm²

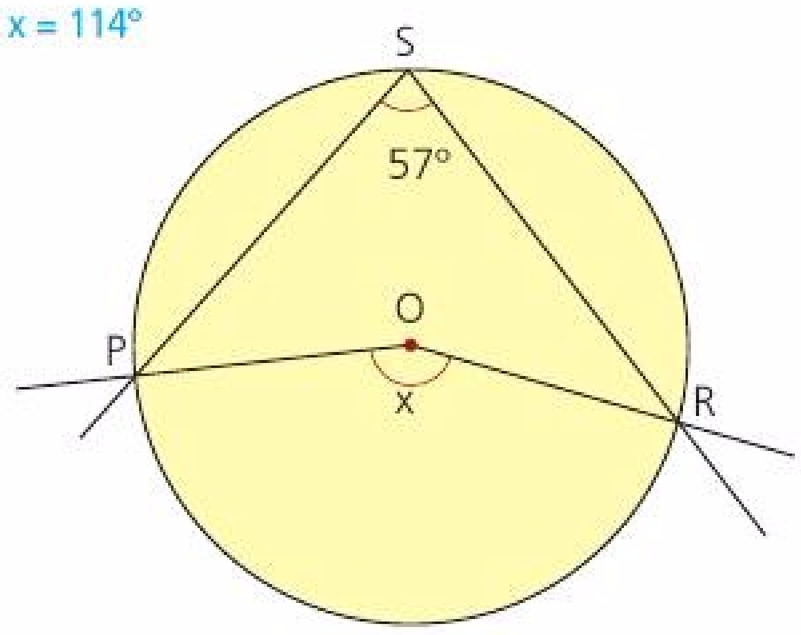
Analisar figuras

4. Determine os valores de **x** e **y** nas figuras a seguir:

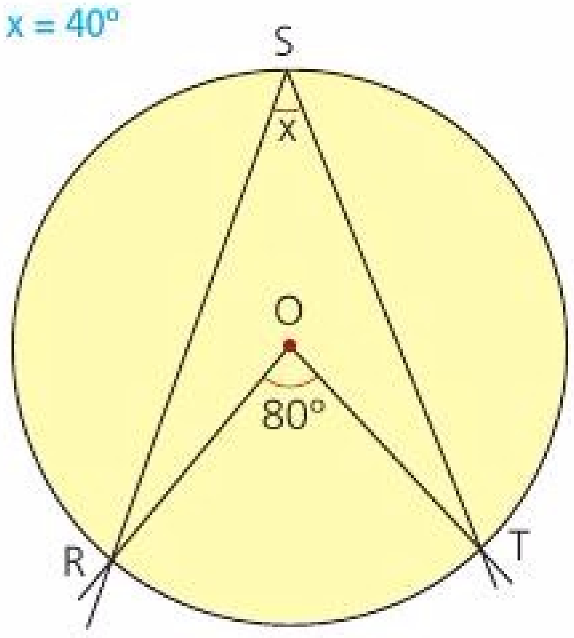
a) x = 120°



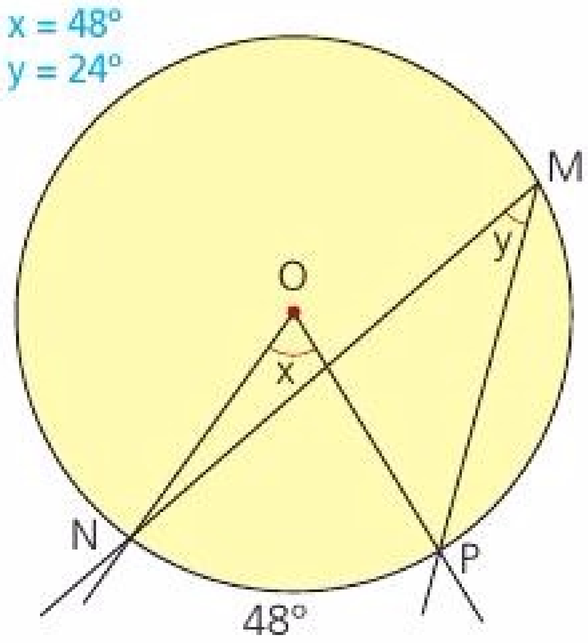
c) x = 114°



b) x = 40°



d) x = 48°
y = 24°

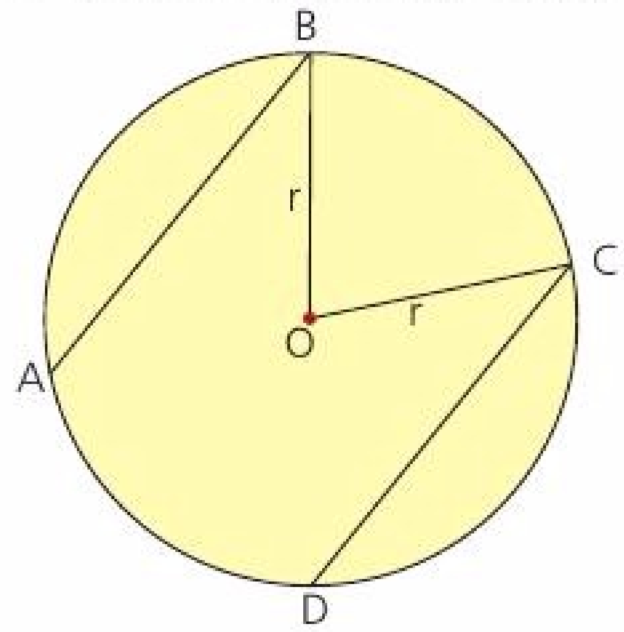


5. Qual é a medida do maior lado de um triângulo retângulo inscrito numa circunferência de raio 5 cm? 10 cm

Propriedades das cordas de uma circunferência

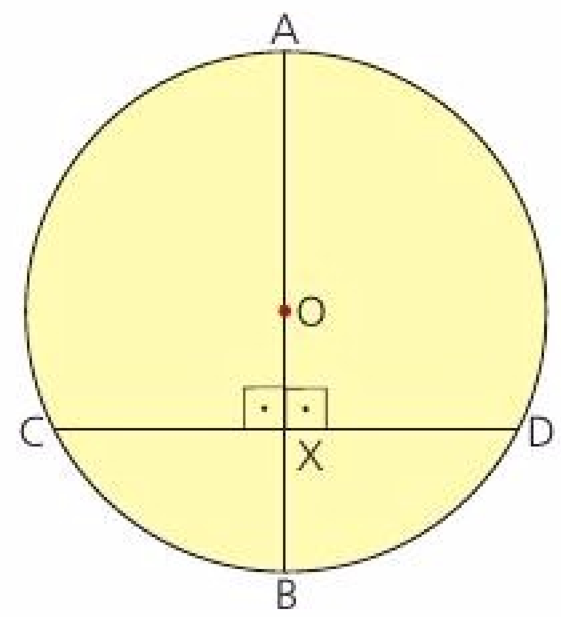
Existem diversas propriedades que relacionam cordas e os arcos por elas determinados. Entre as principais propriedades, destacam-se:

1. Numa circunferência, cordas congruentes, ou seja, de mesma medida, determinam arcos congruentes e arcos congruentes determinam cordas congruentes. Indicamos a medida de um segmento $\overline{AB}$ por med$\overset{\frown}{AB}$.



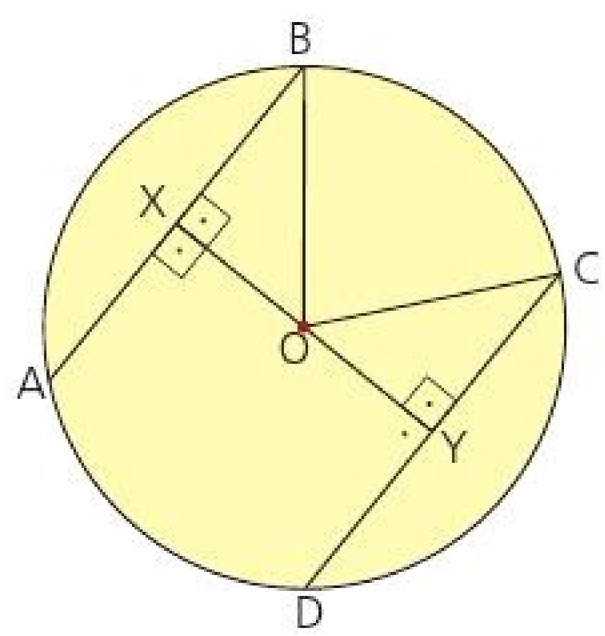
$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \leftrightarrow \text{med}\overset{\frown}{AB} = \text{med}\overset{\frown}{CD}$$

2. Se o diâmetro de uma circunferência é perpendicular a uma corda, ele dividirá a corda e o arco a ela correspondente ao meio.



$$\overline{AB} \text{ é perpendicular a } \overline{CD} \rightarrow \overline{CX} \equiv \overline{XD} \text{ e med}\overset{\frown}{CB} = \text{med}\overset{\frown}{BD}$$

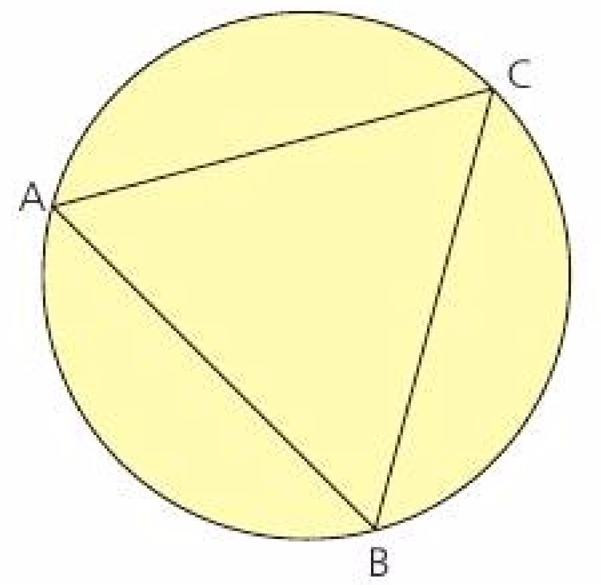
3. Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas que possuem a mesma distância do centro são congruentes.



$$\overline{XO} \equiv \overline{OY} \leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$$

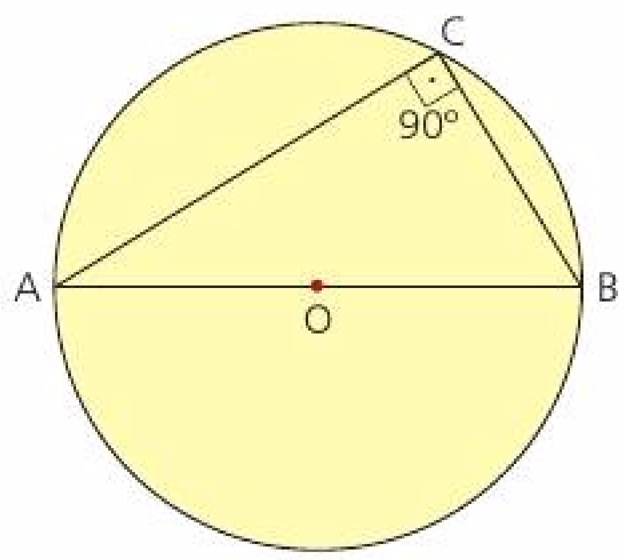
Triângulo inscrito numa circunferência

Dizemos que um triângulo está inscrito numa circunferência quando os três vértices desse triângulo pertencerem à circunferência. Na figura a seguir, o triângulo ABC está inscrito na circunferência.



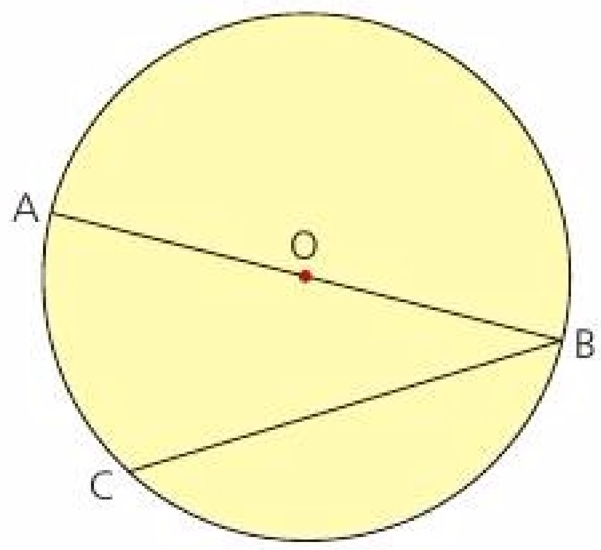
Retome com os alunos a construção do circuncentro de um triângulo, visto por eles que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Já vimos que todo triângulo inscrito que tem um dos lados passando pelo centro da circunferência é um triângulo retângulo.



Atividades

6. Copie em seu caderno a figura a seguir e os pontos nela assinalados.



Dê o nome de cada um dos elementos a seguir:

a) Ponto O centro da circunferência

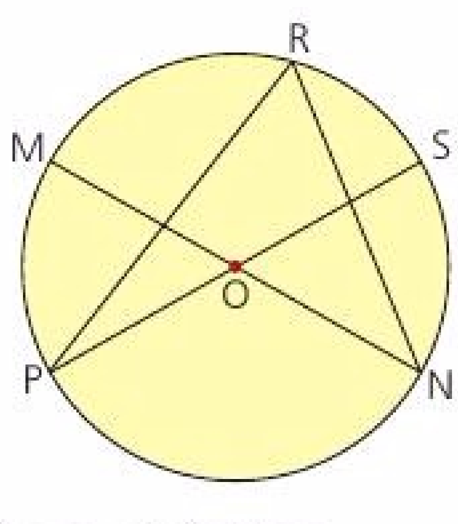
b) Segmento $\overline{AO}$ raio

c) Segmento $\overline{BO}$ raio

d) Segmento $\overline{AB}$ diâmetro

7. Considere a circunferência a seguir, na qual $\overline{OM}$ = 5 cm.

Analisar figuras



Responda no caderno:

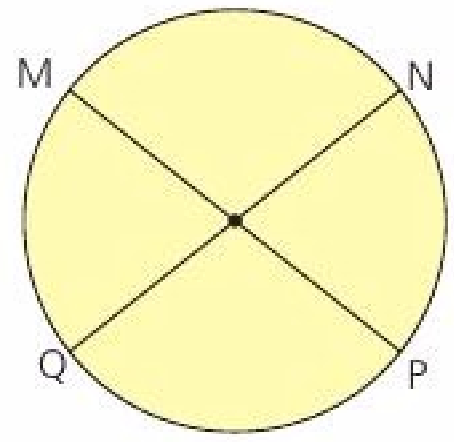
a) Qual é o comprimento de $\overline{OS}$? 5 cm

b) Qual o comprimento do diâmetro da circunferência? 10 cm

c) Quais são as cordas indicadas na figura? $\overline{MN}$, $\overline{SP}$, $\overline{NR}$, $\overline{PR}$

d) Quais são os diâmetros indicados na figura? $\overline{MN}$ e $\overline{PS}$

8. Na figura a seguir, os pontos M, N, P e Q determinam os diâmetros $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ e dividem a circunferência em quatro partes iguais.



Sabendo que a corda $\overline{MN}$ mede 3 cm, responda em seu caderno e justifique.

a) O valor das cordas $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QM}$. 3 cm

b) Que polígono fica formado se considerarmos as cordas $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QM}$? Quais os valores dos lados desse polígono? quadrado, 3 cm

Argumentar

9. Uma pizza tem o formato de um disco de circunferência, cujo raio é de 18 cm.

Quais devem ser as dimensões mínimas de uma caixa para acomodar a pizza?

Interpretar textos

Se quadrado, mínimo 36 cm de lado
Se circular, com raio mínimo de 18 cm.

10. Um prato tem 25 cm de diâmetro.

a) Qual deve ser a medida do lado de uma mesa quadrada onde se possa colocar 16 pratos, dispostos um ao lado do outro, ocupando toda a área da mesa? 1 m x 1 m

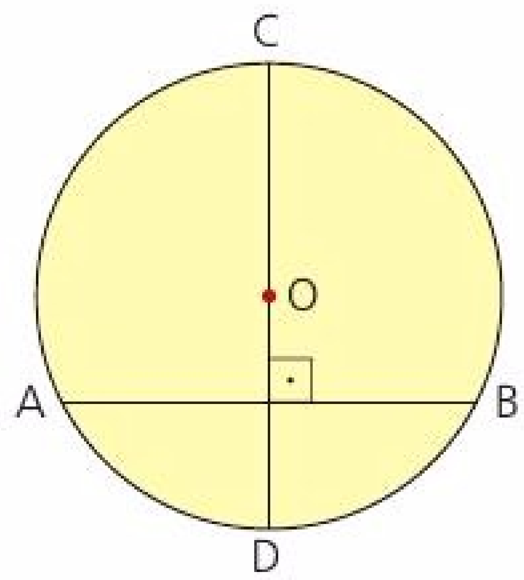
b) Se a mesa for retangular com 1,5 m de comprimento, qual deverá ser sua largura mínima? 0,75 m

11. A prateleira de um forno, em um restaurante, tem forma quadrada. Cada lado mede 40 cm. O chefe da cozinha vai assar tortas que estão em formas redondas de 10 cm de raio. Calcule quantos dessas formas ele pode colocar nesse forno, uma ao lado da outra. 4 formas

12. Antes de existir o CD, os discos de músicas eram feitos de vinil e tinham 15 cm de raio. As capas desses discos tinham forma quadrada com 1 cm a mais que o disco, no comprimento e na largura. Qual era a medida do lado da capa? 31 cm x 31 cm

13. Na circunferência da figura, o diâmetro $\overline{CD}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$ no ponto M, que é o ponto médio do raio $\overline{OD}$. Sabendo-se que o comprimento do raio da circunferência é 5 cm, responda:

Argumentar



a) Qual é o comprimento das cordas $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$? Justifique. 5 cm

b) Que tipo de quadrilátero é AOBD? losango

c) Que tipo de triângulo é ODB? isósceles

d) Quais os perímetros de AOBD e ODB? AOBD = 20 cm ODB = 15 cm

14. Copie as afirmações em seu caderno e classifique-as em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) (F) Toda corda é um raio

b) (F) Todo raio é uma corda.

c) (V) Todo diâmetro é uma corda.

d) (V) Qualquer segmento de reta com extremidades no centro e em um ponto da circunferência é chamado de raio.

e) (V) O dobro da medida do raio é igual a medida do diâmetro.

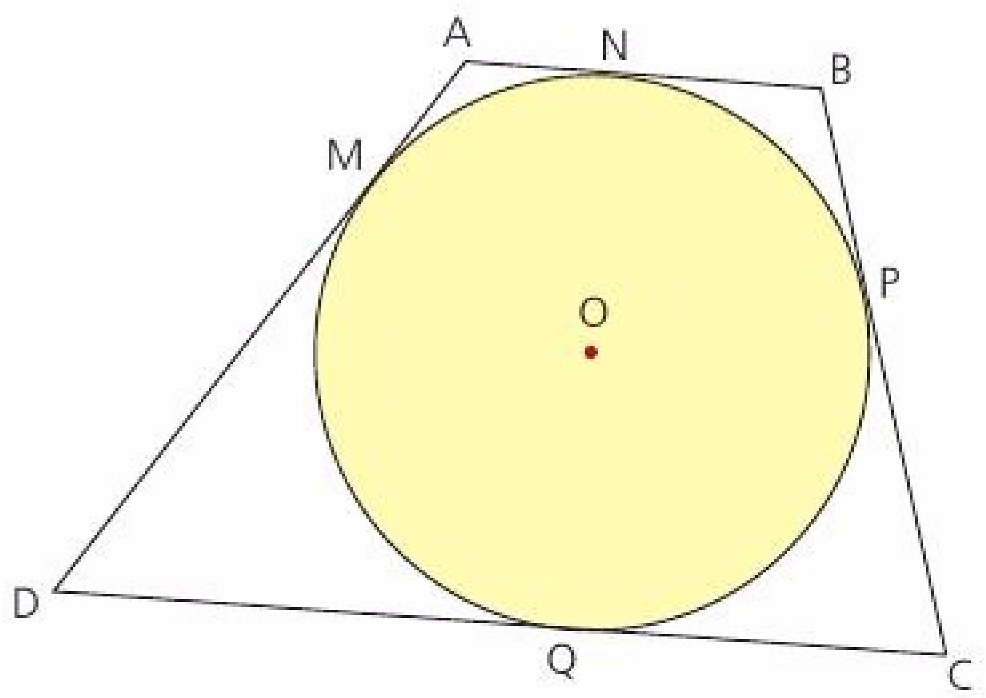
Professor: Discuta com os alunos fazendo esquemas no quadro para as atividades 10, 11 e 12.

Polígonos circunscritos e inscritos numa circunferência

Polígonos circunscritos à circunferência

Dizemos que um polígono é circunscrito a uma circunferência quando seus lados forem tangentes à circunferência. Isso significa que cada lado do polígono tem um ponto em comum com a circunferência. Observe os exemplos:

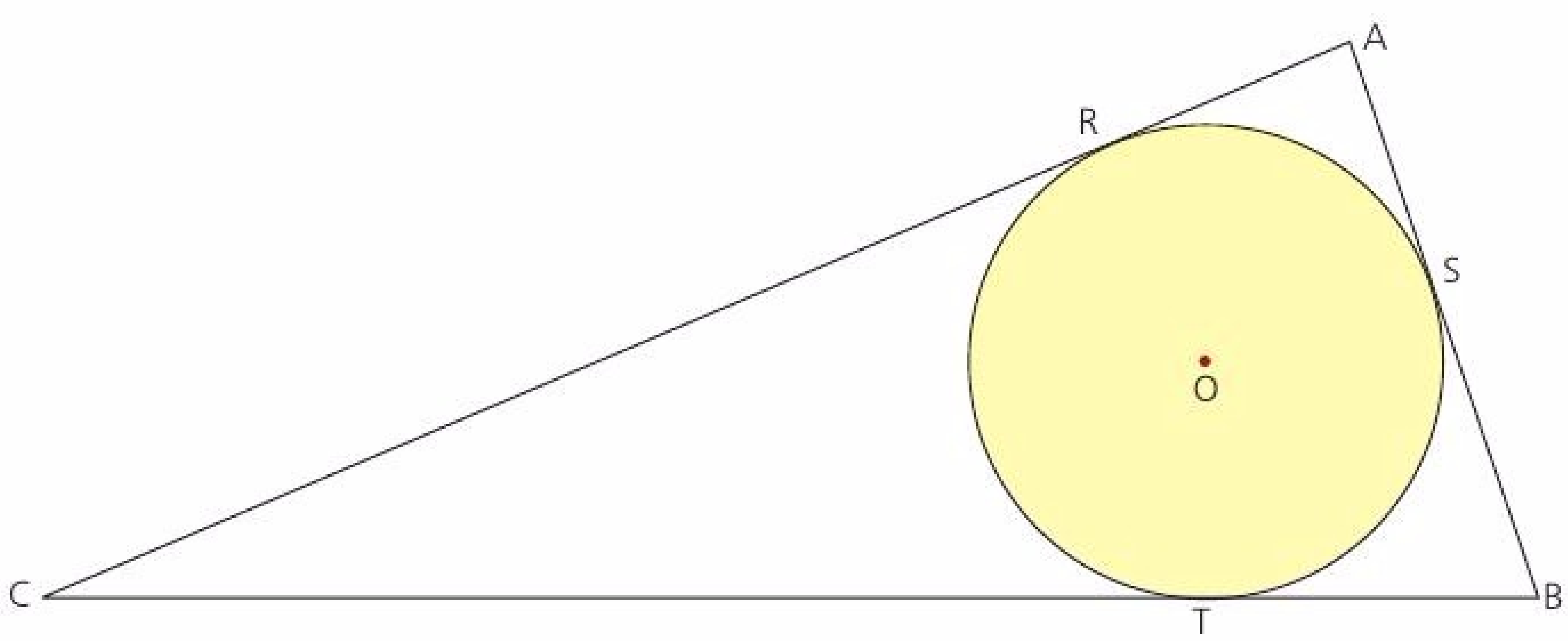
a) Os lados do quadrilátero ABCD tangenciam a circunferência nos pontos M, N, P e Q. Portanto o quadrilátero ABCD é circunscrito à circunferência.



Qualquer polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

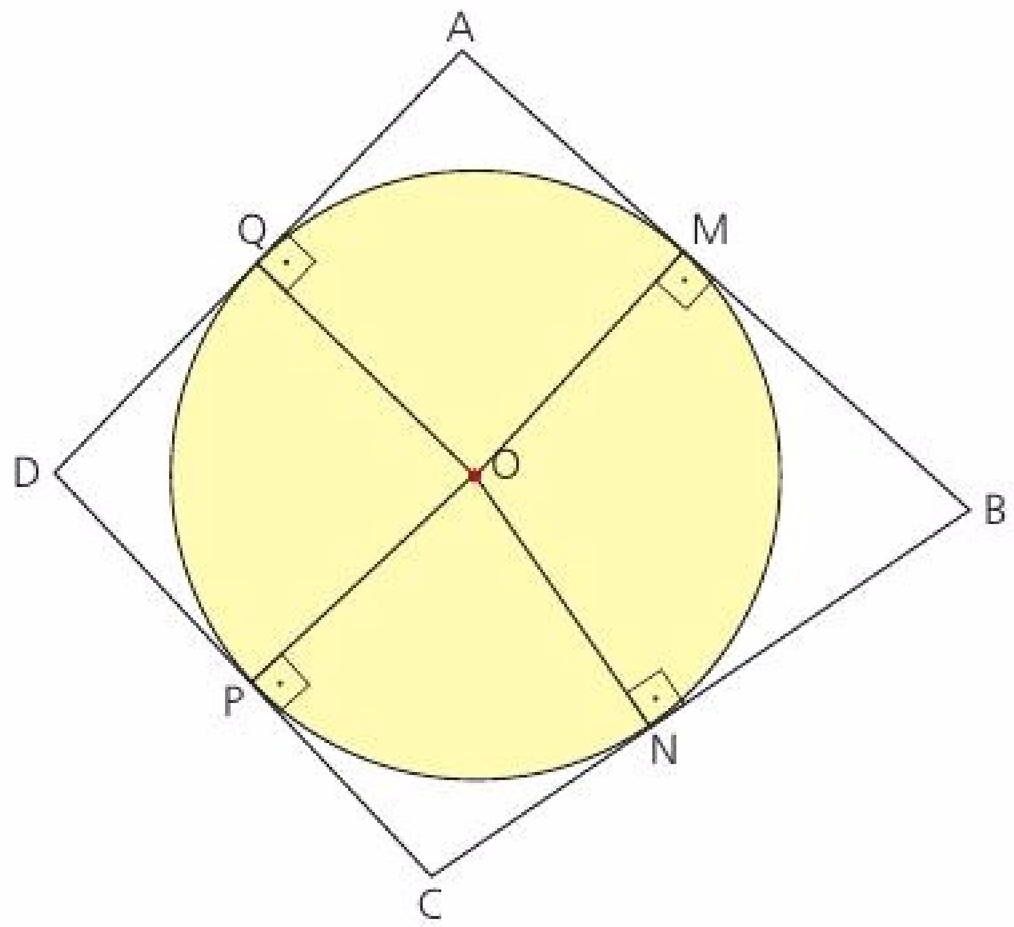
Neste caso, podemos também dizer que a circunferência está inscrita no quadrilátero ABCD,

b) Os lados do triângulo ABC tangenciam a circunferência de centro O. Portanto, o triângulo é circunscrito à circunferência ou esta é inscrita no triângulo.



Propriedade dos polígonos circunscritos à circunferência

Sempre que um polígono for circunscrito a uma circunferência, o raio desta é perpendicular a cada um dos lados no ponto de tangência. Observe esta perpendicularidade no caso do quadrilátero circunscrito.

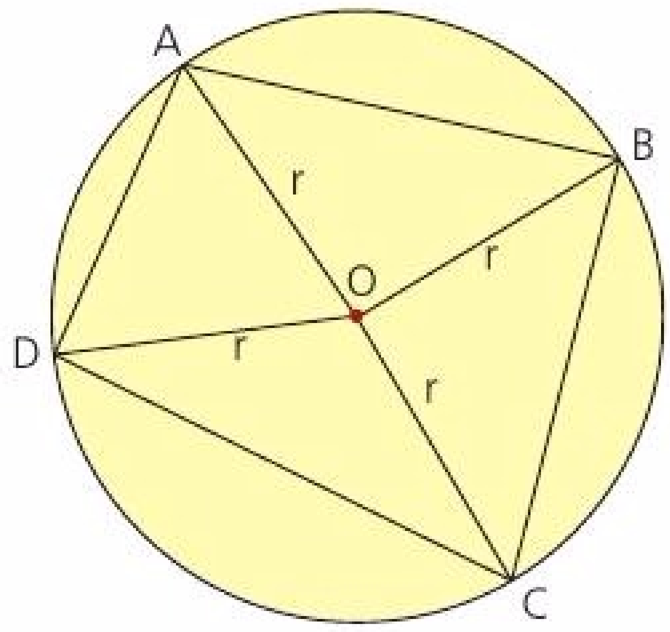


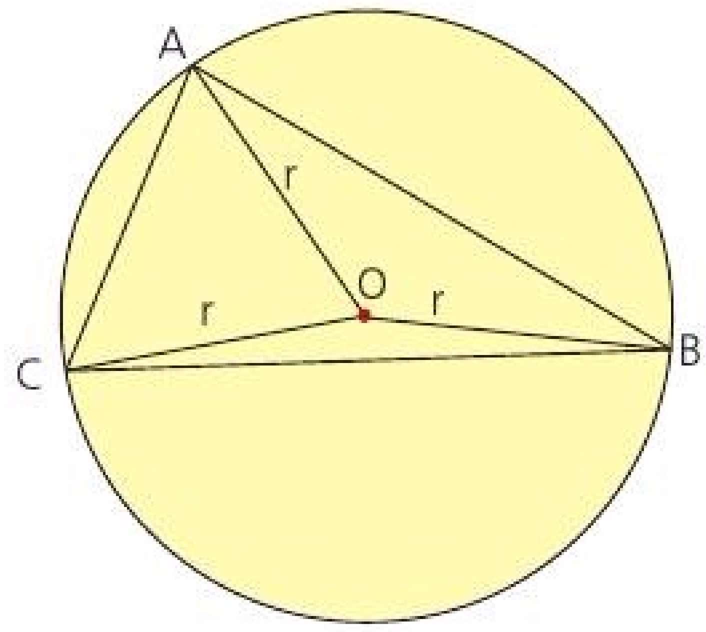
Utilizando-se o símbolo ⊥ para representar a perpendicularidade, podemos escrever para o quadrilátero ABCD, circunscrito à circunferência;

$$\overline{OM} \perp \overline{AB},\ \overline{ON} \perp \overline{BC},\ \overline{OP} \perp \overline{CD} \text{ e } \overline{OQ} \perp \overline{DA}$$

Polígonos inscritos na circunferência

Dizemos que um polígono é inscrito numa circunferência quando cada um de seus vértices são pontos da circunferência. Note no quadrilátero e no triângulo, inscritos na circunferência, que a distância do centro aos vértices dos polígonos é sempre igual ao raio das circunferências.

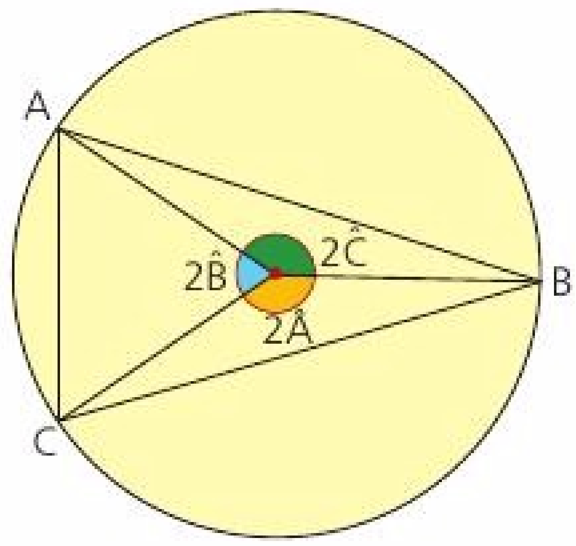




Nestes casos, podemos também afirmar que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Soma dos ângulos internos do triângulo e do quadrilátero

Já sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Você pode, mais uma vez, verificar este fato no triângulo inscrito da figura:

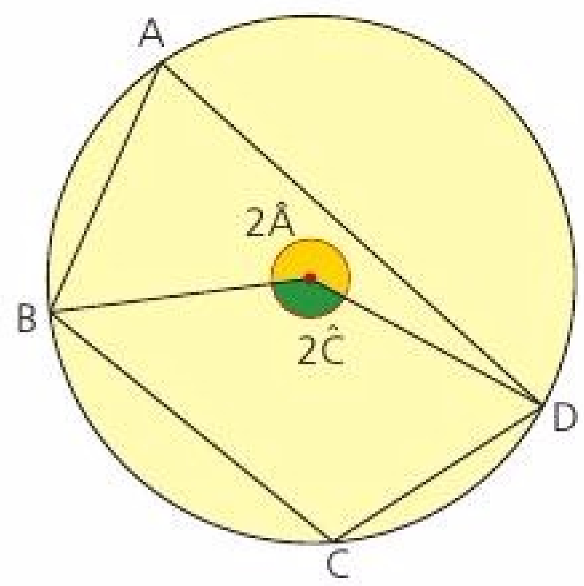


Desenhe as figuras no quadro de giz para estabelecer, junto aos alunos, as conclusões sobre a soma dos ângulos internos.

Traçamos o ângulo central de cada um dos ângulos inscritos, cujos vértices são os vértices do triângulo ABC. Como um ângulo central é o dobro do ângulo inscrito, obtemos três ângulos duplos com vértice no centro da circunferência. Logo:

$$2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C} = 360° \rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Vamos analisar, agora, o que ocorre com o quadrilátero ABCD, inscrito na circunferência da figura a seguir. Se traçarmos os ângulos centrais dos ângulos inscritos com vértices em A e C, obteremos dois ângulos duplos com vértice no centro da circunferência.



Fazendo isso, podemos escrever:

$$2\hat{A} + 2\hat{C} = 360° \rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180°$$

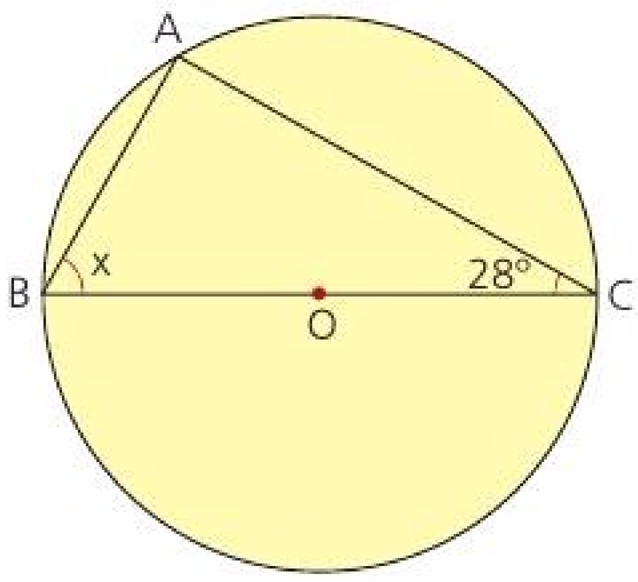
Isso nos permite concluir que num quadrilátero, os ângulos opostos são suplementares, ou seja, somam 180°.

Se fizermos a mesma construção para os ângulos opostos $\hat{B}$ e $\hat{D}$, iremos concluir que eles também são suplementares, ou seja, $\hat{B} + \hat{D} = 180°$. Se somarmos, agora, os quatro ângulos internos do quadrilátero, teremos:

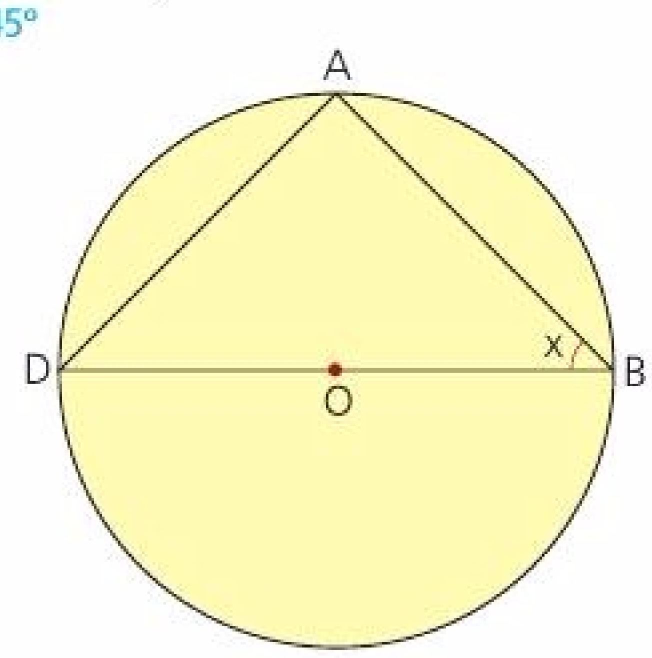
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180° + 180° \rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

Atividades

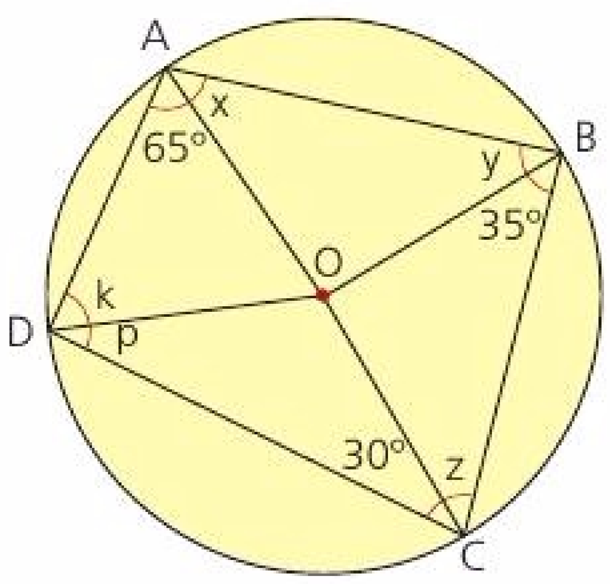
15. Determine a medida do ângulo **x** na figura a seguir: x = 62°



16. Sabendo-se que o triângulo ABC da figura é isósceles, determine o valor do ângulo **x**.
x = 45°



17. A figura mostra uma circunferência de raio 6 cm e um quadrilátero ABCD nela inscrito. Analise a figura e responda:



a) O nome do segmento $\overline{OA}$. raio

b) Os nomes possíveis para o segmento $\overline{AB}$. corda

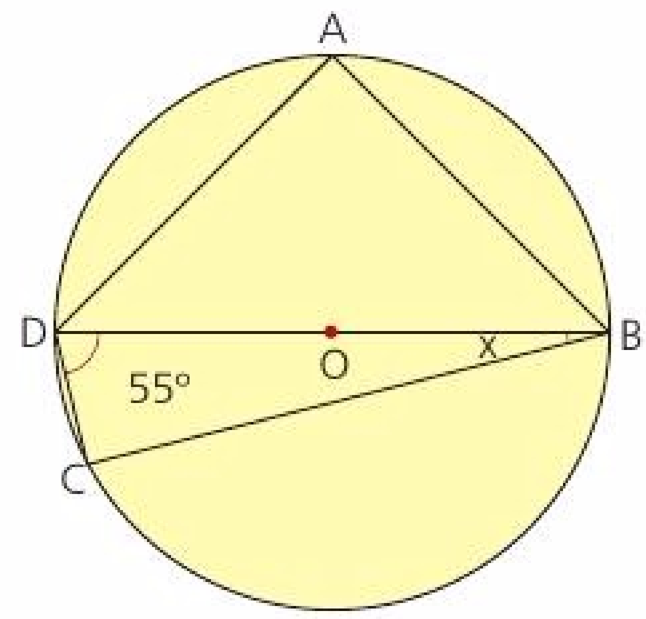
c) A medida do segmento $\overline{OC}$. 6 cm

d) Quais são os tipos dos triângulos AOB e DOC? isósceles

e) O valor dos ângulos x, y, z, p e k.
x = 50°, y = 50°, z = 35°, k = 65°, p = 30°

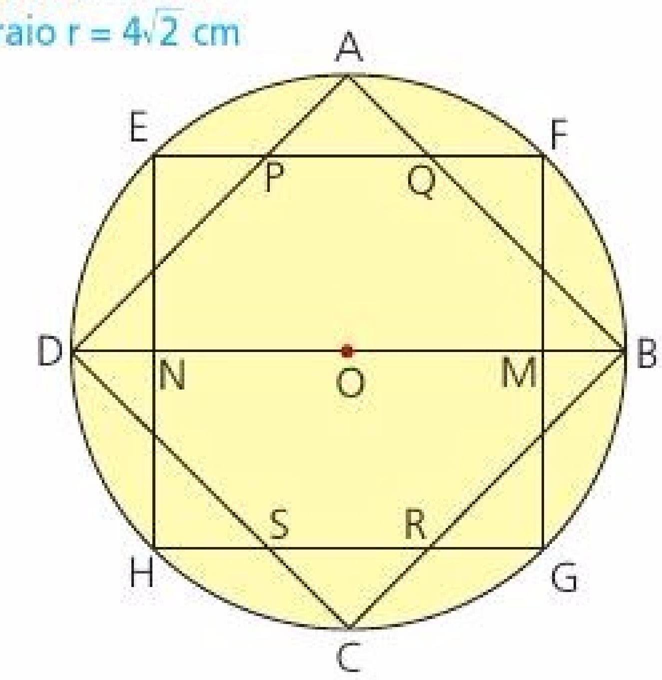
f) Determine o valor de cada um dos ângulos internos do quadrilátero ABCD. $\hat{A}$ = 115°, $\hat{B}$ = 85°, $\hat{C}$ = 65°, $\hat{D}$ = 95°

18. Determine a medida do ângulo **x** e os ângulos internos do quadrilátero ABCD na figura a seguir. x = 35°



19. Na figura a seguir, obtivemos uma estrela de oito pontas pela superposição de dois quadrados inscritos na circunferência de centro O. Sabendo-se que a medida do segmento $\overline{MB}$ é 2 cm e a do segmento $\overline{MG}$ é 4 cm, determine o raio da circunferência e o lado de cada um dos quadrados inscritos.
lado ℓ = 8 cm
raio r = $4\sqrt{2}$ cm

Analisar figuras



Comprimento da circunferência

Para uma circunferência, o cálculo do perímetro equivale à determinação de seu comprimento. O comprimento da circunferência é dado em função de seu raio. É fácil perceber que, quanto maior o raio, maior será o comprimento total da circunferência. Considere a circunferência de raio **r** e suponha que "cortamos" a circunferência em P e "esticamos" a circunferência. O segmento obtido será o perímetro ou comprimento (C) dessa circunferência.

A notação com a letra grega π foi usada pela primeira vez em 1706 pelo matemático William Jones e popularizada pelo matemático Leonhard Euler, em sua obra "Introdução ao cálculo infinitesimal" de 1748.

O comprimento C da circunferência é dado pelo produto de seu diâmetro 2r pelo número irracional π, cujo valor é, aproximadamente 3,14.

$$\mathbf{C = 2r \cdot \pi \rightarrow C = 2\pi r}$$

Observe alguns exemplos de cálculo do comprimento da circunferência.

- Uma circunferência de 5 cm de raio terá comprimento aproximado de:

$$\mathbf{C = 2\pi r \rightarrow = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \rightarrow C = 31{,}4\ cm}$$

- Um veículo tem pneu com 40 cm de raio. Quantos metros percorre, aproximadamente, para dar uma volta completa?

Antes, vamos transformar 40 cm em 0,4 m. Agora basta aplicarmos a expressão do comprimento de uma circunferência.

$$\mathbf{C = 2\pi r \rightarrow = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4 \rightarrow C = 2{,}5\ m}$$

O pneu percorre 2,5 m para dar uma volta completa.

- Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 600 km sobre uma pista circular cujo raio é 100 m. Qual o número aproximado de voltas que ele dará?

Se o raio da pista é de 100m, vamos inicialmente calcular seu comprimento;

$$\mathbf{C = 2\pi r \rightarrow = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100 \rightarrow C = 628\ m}$$

Como 600 km equivalem a 600 000 m, o ciclista dará o seguinte número de voltas na pista:

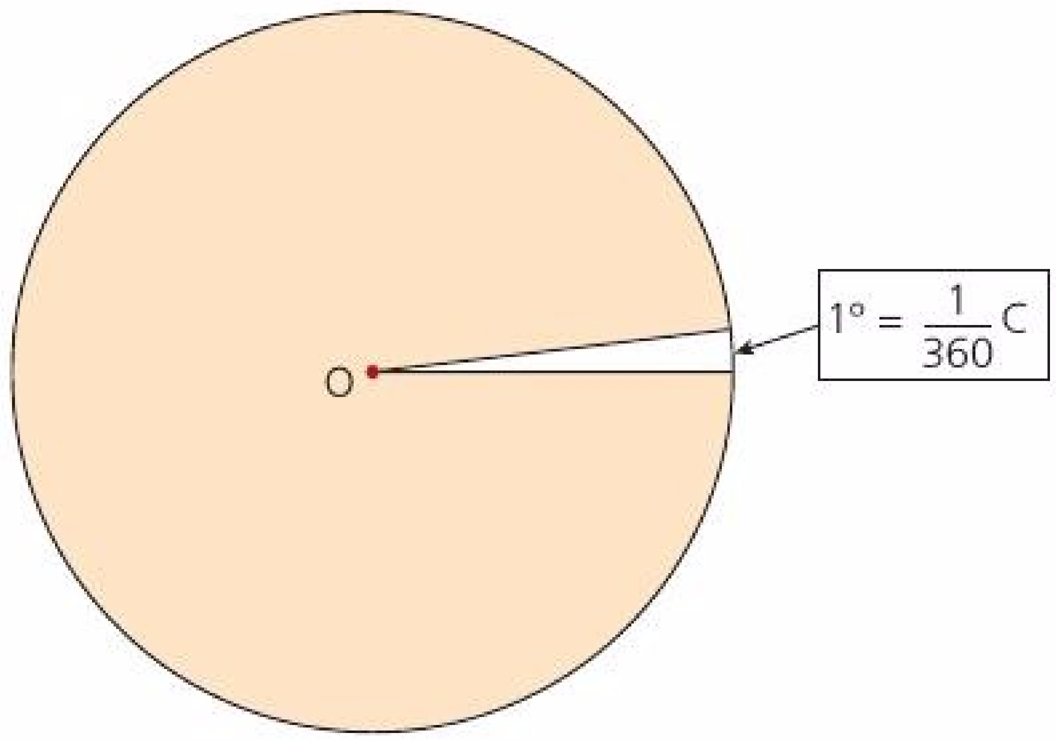
$$\text{número de voltas} = \frac{600\,000\ \text{m}}{628\ \text{m}} \cong 955{,}4$$

Ou seja, o ciclista dará, aproximadamente 955 voltas na pista de 100 m de raio, para completar a prova de 600 km.

Grau e radiano

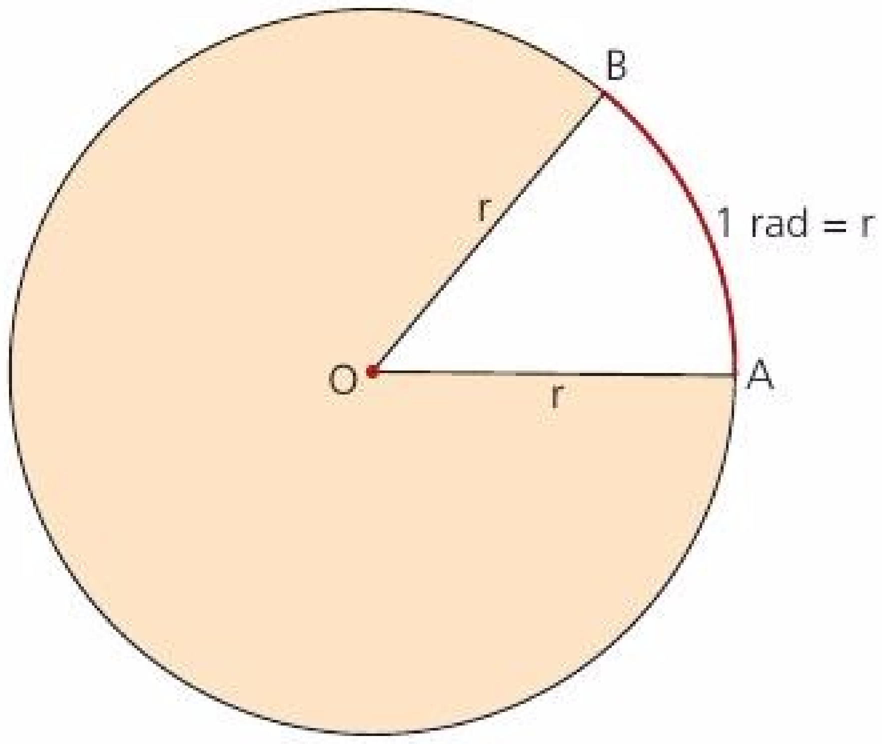
As unidades de medidas de ângulos e arcos são, respectivamente, o **grau** e o **radiano**.

Arco de um grau (1º) é aquele cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento C da circunferência. O arco de uma volta corresponde, portanto, a C = 360º.



$$\mathbf{1° = \frac{C}{360}}$$

Arco de um radiano (1 rad) é aquele cujo comprimento é igual ao raio da circunferência em que está contido. A palavra **radiano** vem do grego e significa **raio**.



$\widehat{AB}$ (lê-se arco AB)

$$\widehat{AB} = r$$
$$\widehat{AB} = 1 \text{ rad}$$

Se 1 radiano é a medida de um arco cujo comprimento (retificado) é igual a 1r, então 2 radianos é a medida de um arco de comprimento igual a 2r. Usando o mesmo raciocínio, dizemos que π rad é a medida de um arco de comprimento igual a π r e 2π rad é a medida de um arco de comprimento igual a 2π r.

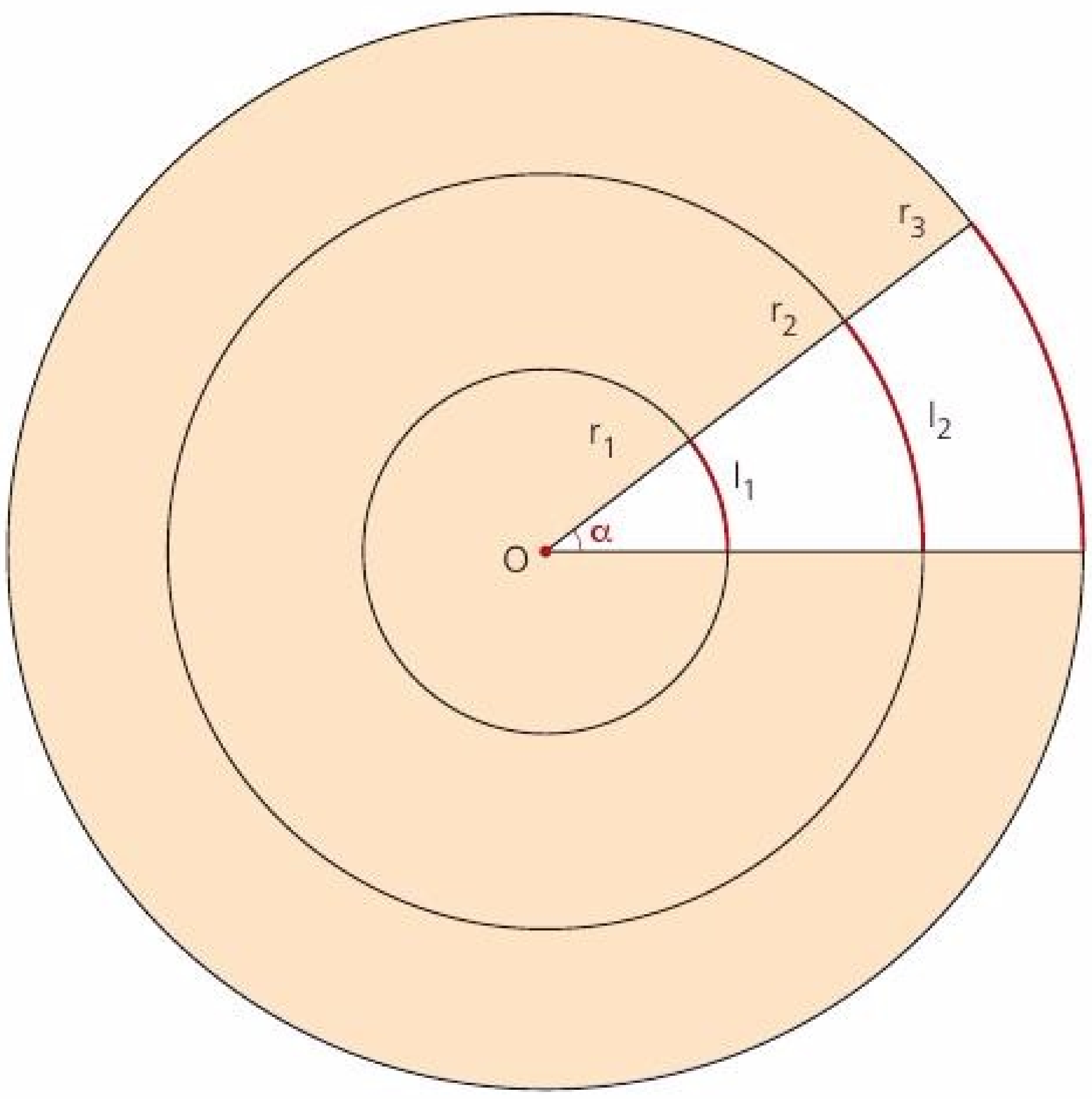
O arco de uma volta corresponde, portanto, a $C = 2\pi r$. Logo, a expressão do comprimento de uma circunferência em radianos é:

$$\mathbf{C = 2\pi \ rad}$$

Denomina-se **medida de um arco em radianos** a razão entre seu comprimento e o comprimento do raio da circunferência em que está contido, ambos na mesma unidade de medida.

$$\widehat{AB} = \left(\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}}\right) \text{rad}$$

Para um mesmo ângulo α, temos:



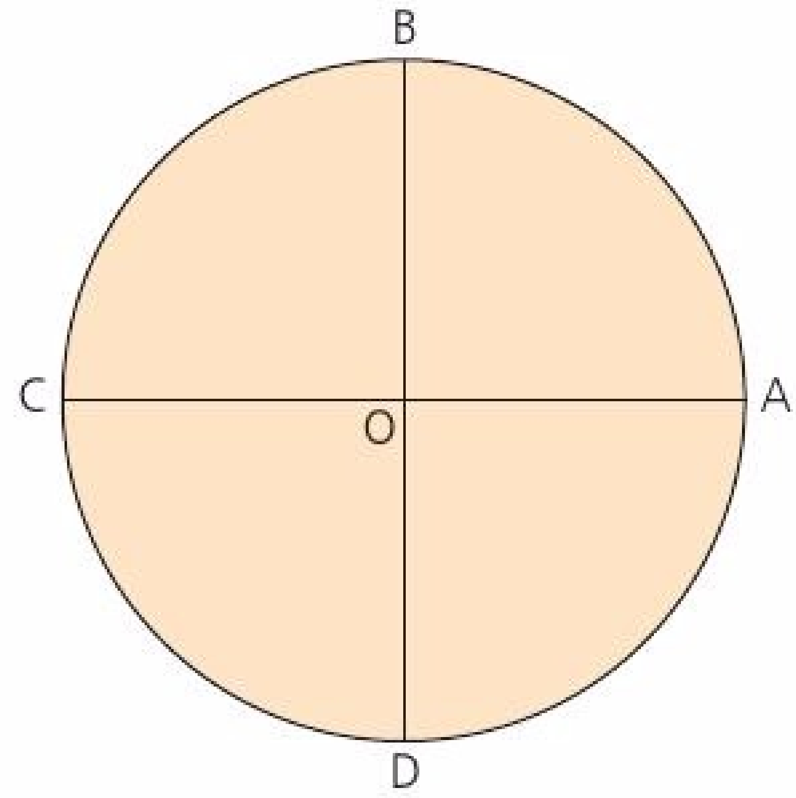
A medida de um ângulo em radiano não depende da unidade de comprimento considerada, desde que, obviamente, tomemos o comprimento do raio e do arco correspondentes nas mesmas unidades.

Acompanhe alguns exemplos de utilização da medida de um arco em radianos.

- Vamos determinar a medida em radianos de um arco de 3 cm numa circunferência de raio 2 cm.

$$\widehat{AB} = \frac{3\text{cm}}{2\text{cm}} \rightarrow \widehat{AB} = 1{,}5 \text{ rad}$$

- Na figura a seguir, traçamos dois diâmetros perpendiculares, que dividem a circunferência em quatro arcos.



Faça as representações no quadro para determinar os arcos em radianos. Se achar conveniente relacione os mesmos exemplos para determinar os arcos em graus e assim estabelecer relações entre as unidades graus e radianos.

Vamos determinar, em radianos, o comprimento dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$:

- $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{C}{4}$

Como C = 2π rad, temos $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{4} \rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

- Como $\overset{\frown}{AC} = 2 \cdot \overset{\frown}{AB} \rightarrow \overset{\frown}{AC} = \pi$ rad

Podemos, então, escrever para qualquer circunferência de raio r:

$$\frac{1}{4}C = \frac{\pi}{2}\text{rad};\quad \frac{1}{2}C = \pi \text{ rad};\quad \frac{3}{4}C = \frac{3\pi}{2}\text{ rad};\quad C = 2\pi \text{ rad}$$

Como o comprimento da circunferência equivale a 360° ou 2π rad, temos a seguinte correspondência entre graus e radianos:

$$\mathbf{360° \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}}$$

Assim, se quisermos converter, por exemplo, um arco de 30° para radianos, fazemos:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ rad} \\ 30° \text{ —— } x \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

Logo, $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

Atividades

20. Determine o comprimento de uma circunferência de raio r = 5 cm.
C = 31,4 cm

21. Calcule a medida do raio de uma circunferência de comprimento igual a 1 m.
15,9 cm

22. É dado um arco de $\frac{3\pi}{4}$ rad. Determine a medida deste arco em graus: 135°

23. Em cada caso a seguir, são dados o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ e o raio **r** da circunferência. Calcule a medida do arco em radianos:

a) ℓ = 0,5 m, r = 0,25 m 2 rad

b) ℓ = 2 cm, r = 0,04 m 0,5 rad

c) ℓ = 6 cm, r = 2 cm 3 rad

d) ℓ = 0,105 cm, r = 0,42 cm 0,25 rad

24. Qual é o raio de uma circunferência na qual um arco de 6 rad mede 2 cm?
$r \cong 0,\overline{3}$ cm

25. Converta em graus as medidas dadas em radianos:

a) $\frac{4\pi}{3}$ rad 240°

b) $\frac{\pi}{8}$ rad 22° 30′

c) $\frac{7\pi}{6}$ rad 210°

d) $\frac{\pi}{12}$ rad 15°

26. Converta em radianos as medidas dadas em graus:

a) 45° $\frac{\pi}{4}$ rad

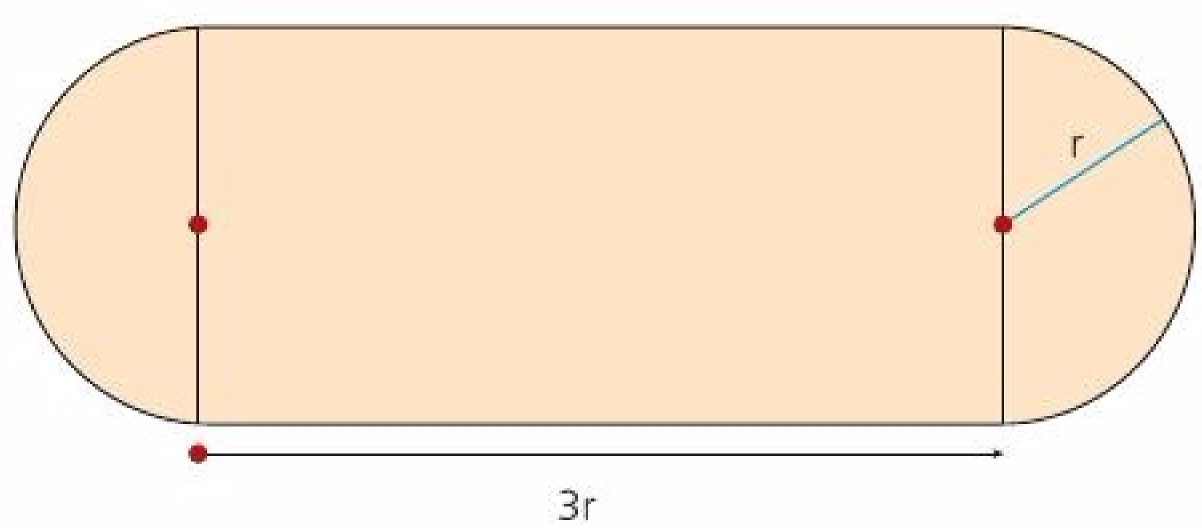
b) 120° $\frac{2\pi}{3}$ rad

c) 210° $\frac{7\pi}{6}$ rad

d) 315° $\frac{7\pi}{4}$ rad

27. Determine o valor aproximado do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando este marca 12h15 min. 83°

28. Um atleta treina numa pista de atletismo esboçada na figura abaixo. Sabendo que o diâmetro de cada uma das semicircunferências das extremidades da pista mede 36 m, quantos metros aproximadamente o atleta percorre em cada volta? 221,04 m



Conexão

Leia o texto e discuta com seus alunos em sala de aula.

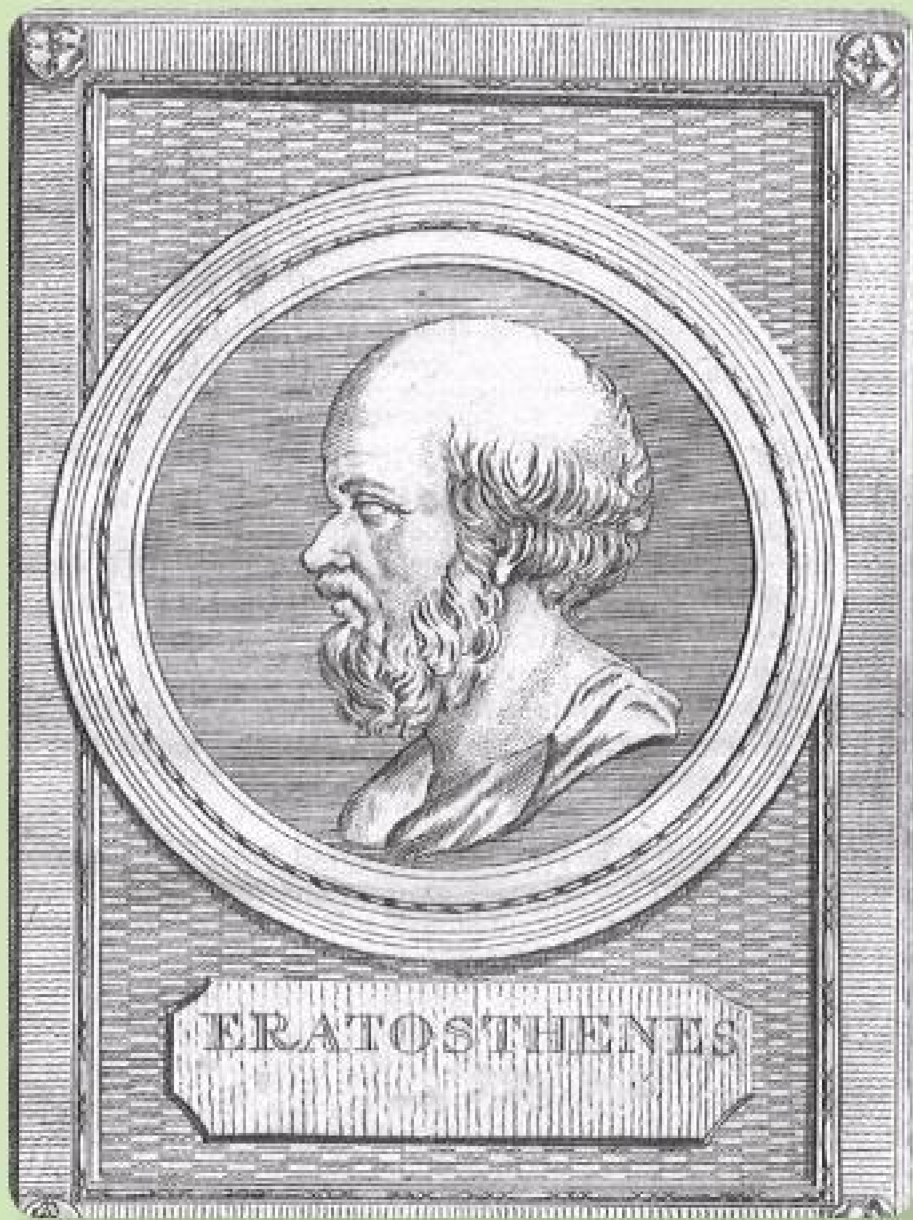
O raio da Terra

Eratóstenes viveu em Alexandria por volta de 200 a.C e foi diretor da maior biblioteca do mundo à época, a Biblioteca de Alexandria. Além de amante das letras e da poesia, Eratóstenes era geógrafo e matemático.

Em seus estudos, tomou conhecimento de que na cidade de Siena (atual Assuan), situada no vale do rio Nilo a 800 km ao sul de Alexandria, quando ocorria o solstício de verão (dia mais longo do ano, que no hemisfério norte ocorre em 21 de julho), colunas verticais não projetavam qualquer sombra ao meio-dia, ou seja, neste horário o Sol situava-se a prumo e incidia perpendicularmente sobre a superfície da Terra.

Curiosamente, Eratóstenes verificou que, nesta mesma data e no mesmo horário de meio-dia, em Alexandria, colunas verticais projetavam sombras suficientemente grandes para serem medidas. Assim, concluiu que a incidência da luz solar neste horário era diferente entre Alexandria e Siena.

Segundo Eratóstenes, a única explicação possível para isso estava no fato de a Terra ser redonda, pois, se fosse plana, como todos julgavam ser há 23 séculos, as sombras seriam iguais em duas localidades diferentes, uma vez que os raios solares podem ser considerados paralelos, devido à distância entre o Sol e a Terra.



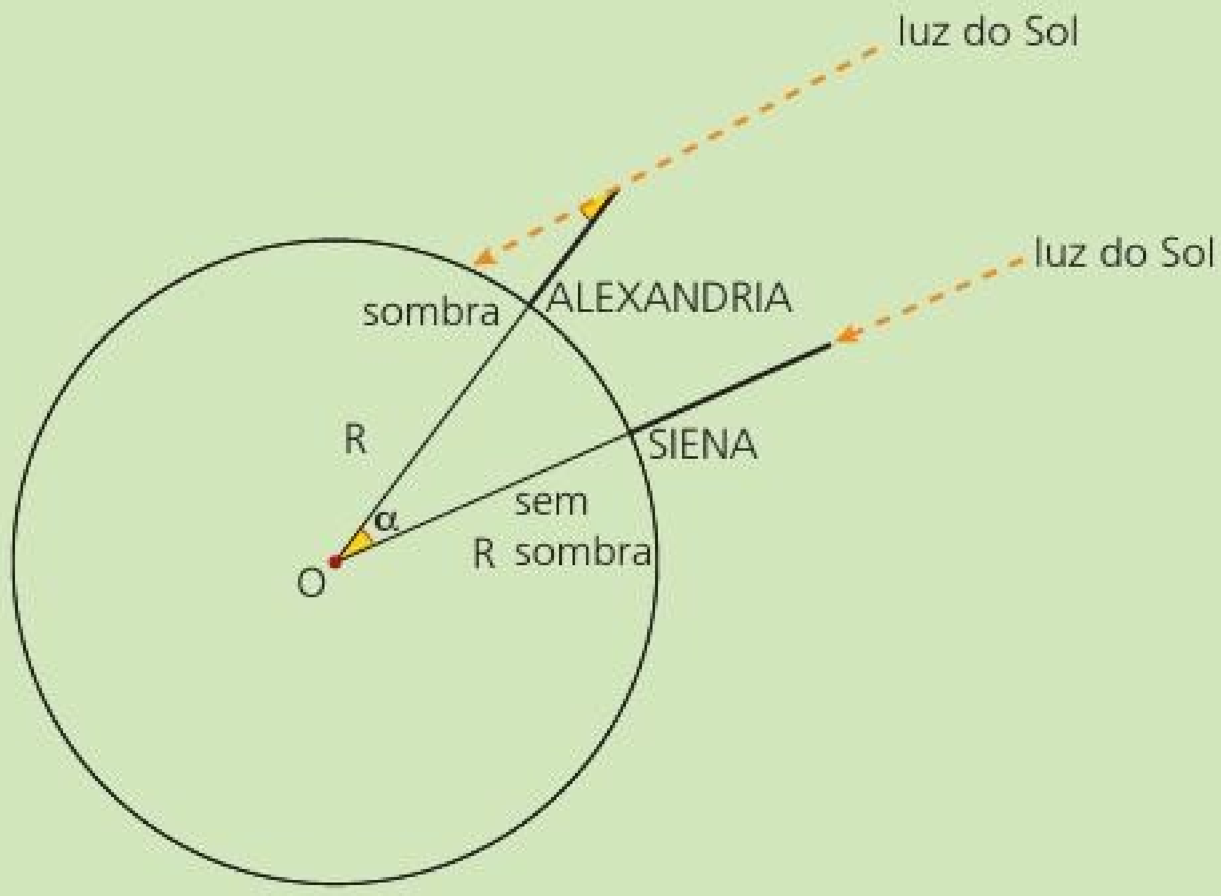
Biblioteca Nacional, Paris, França

Eratóstenes

Gregor Kervina/Dreamstime

Ilustração mostrando a curvatura da Terra.

No esquema a seguir as colunas estão em dimensões exageradas, para tornar mais fácil a compreensão do método usado por Eratóstenes para medir o raio R da Terra, que ele concluíra não ser plana.



Observe no esquema que o ângulo α formado entre os dois raios da Terra, que passam em Alexandria e Siena, é igual ao ângulo entre a coluna vertical de Alexandria e o raio de sol que forma a sombra, pois, como os raios de sol são paralelos, esses ângulos são **alternos internos**.

A partir da projeção da sombra em Alexandria, Eratóstenes calculou o ângulo α, que era aproximadamente 7º, ou aproximadamente $\frac{1}{50}$ de 360°. Isso equivaleria dizer que a circunferência terrestre seria 50 vezes maior que a medida do arco que separa Alexandria de Siena, ou seja, 50 vezes 800 km.

$$C \cong 50 \cdot 800 \text{ km} \rightarrow C \cong 40\,000 \text{ km}.$$

Já conhecendo o número π, Eratóstenes calculou o raio R da Terra.

$$C = 2\pi R \rightarrow 40\,000 \cong 2\pi . R \rightarrow R \cong 6\,340 \text{ km}$$

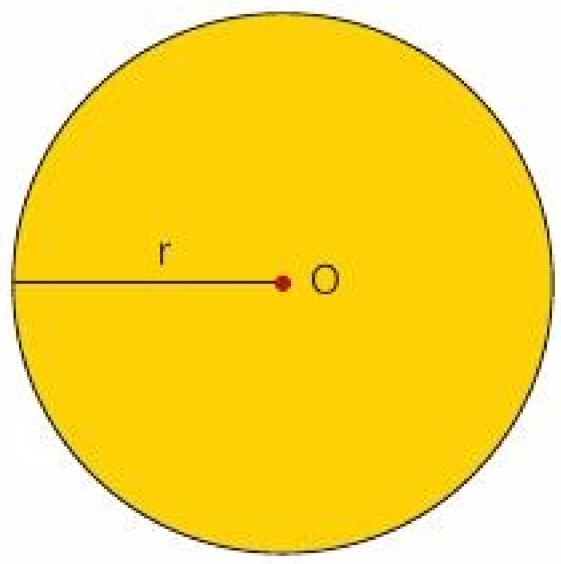
Sabemos hoje que a Terra não é uma esfera perfeita e que seu raio varia entre 6 357 km nos polos e 6 378 km no equador. Porém, se considerarmos a época em que Eratóstenes determinou seu valor, podemos entender como a Matemática pode contribuir na identificação e estudo dos fenômenos que nos cercam.

Área do círculo

Toda circunferência determina num plano duas regiões: a interna e a externa. A região interna mais os pontos pertencentes à circunferência é denominada **círculo**.

O círculo de centro O e raio r é formado pelos pontos da circunferência e os pontos da região interna. Da mesma forma que o comprimento da circunferência é diretamente proporcional ao raio, a área do círculo será tanto maior quanto maior for seu raio.

Fernanda Youssef



O círculo é formado de acordo com o aumento do número de lados de um polígono. Quanto mais lados ele apresenta mais ele se assemelha a um circulo e as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo. Esse método de aproximações foi proposto pelos gregos e é conhecido como método da exaustão de Eudoxo.

A área de um círculo é dada pela seguinte expressão:

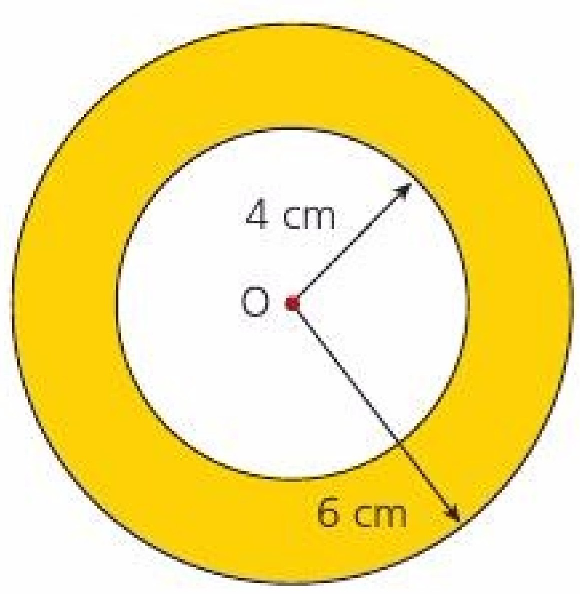
$$\mathbf{A = \pi \cdot r^2}$$

Observe a aplicação do cálculo da área do círculo nos seguintes exemplos:

- Um círculo de raio igual a 3 cm terá área de:

$A = \pi \cdot 3^2 \rightarrow A = 9\pi \rightarrow A \cong 9 \cdot 3{,}14$
$A \cong 28{,}3 \text{ cm}^2$

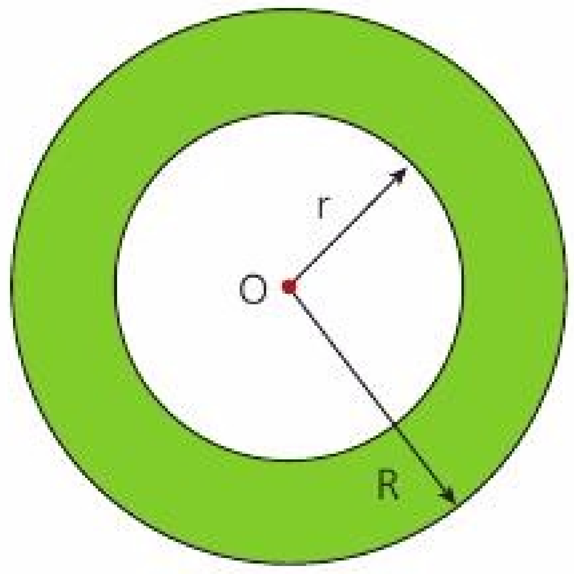
- Veja como podemos calcular a área de uma **coroa circular**, figura formada por dois círculos concêntricos.



A área da coroa circular pode ser obtida a partir da diferença entre as áreas A_1 do círculo de raio 6 cm e A_2 do círculo de 4 cm.

$$A = A_1 - A_2 \rightarrow A = \pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 3^2 \rightarrow A = \pi \cdot (6^2 - 3^2) \rightarrow A = 27\pi \rightarrow A \cong 84{,}8 \text{ cm}^2$$

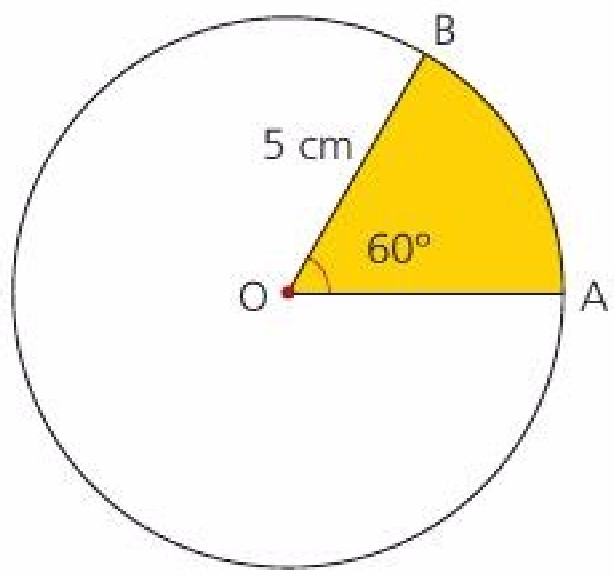
De forma geral, pode-se escrever a fórmula para o cálculo da área de uma coroa circular, formada por dois círculos concêntricos de raios **r** e **R**, da seguinte maneira:



No cálculo da área da coroa, é importante que o aluno acompanhe o raciocínio da subtração das áreas para chegar na expressão final.
Nas atividades, o aluno poderá escolher o caminho que julgar mais adequado nas resoluções.

$$\mathbf{A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)}$$

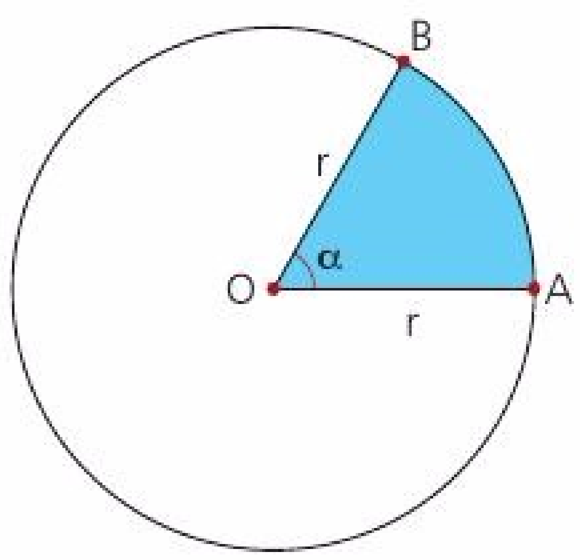
- Vamos agora calcular a área de um **setor circular** de 60° numa circunferência de raio 5 cm. O setor circular é a parte do círculo delimitada por um ângulo menor que 360°.



A área do setor será uma fração da área do círculo, determinada pelo ângulo central de 60°. Como 60° é a sexta parte de 360°, teremos:

$$A = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow A = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 25 \rightarrow A \cong 13 \text{ cm}^2$$

De forma geral, a fórmula para o cálculo da área de um setor circular de ângulo central α, numa circunferência de raio **r**, será uma fração da área do círculo. Observe:



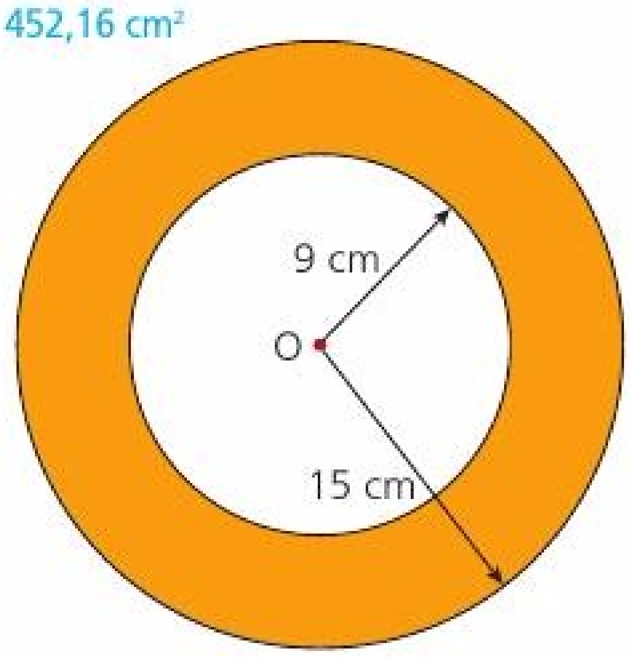
$$A_{setor} = \cdot \pi r^2$$

Atividades

O aluno deverá copiar as imagens das figuras no caderno ao executar as resoluções, isso faz com que ele se aproprie mais do tema.

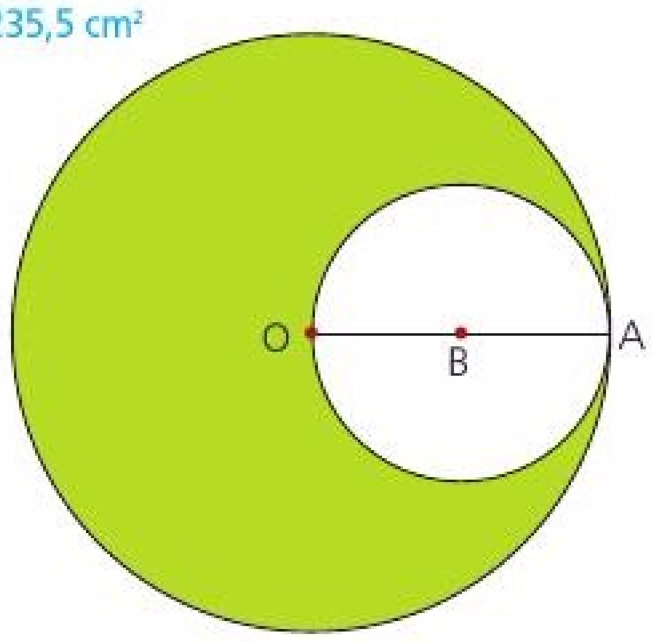
29. Calcule a área indicada nas seguintes figuras, considerando as características indicadas em cada caso.

a) 452,16 cm²

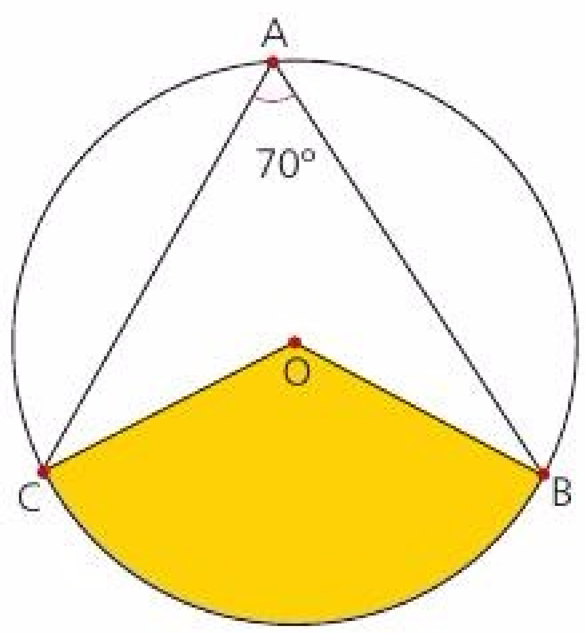


b) O e B são os centros das circunferências maior e menor, respectivamente e o segmento AO mede 10 cm.

235,5 cm²



c) 122,1 cm²

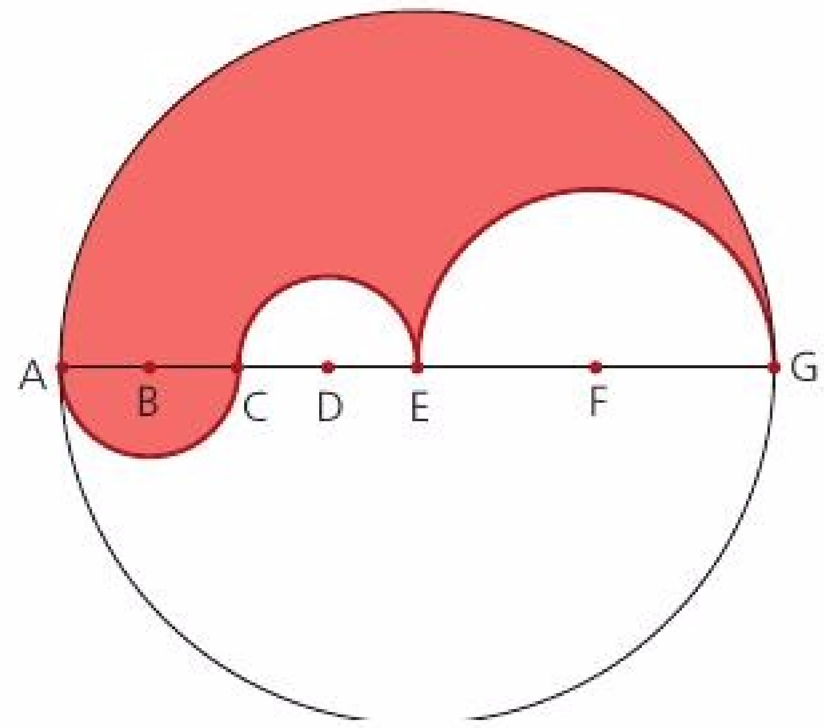


30. Calcule mentalmente:

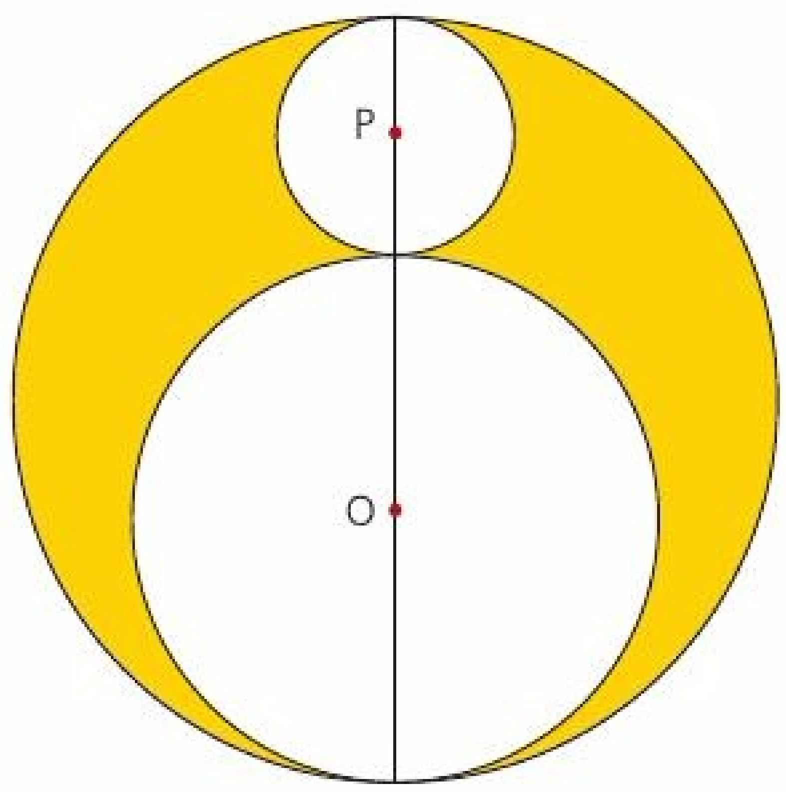
a) A área de um círculo de raio 6 cm.
A = 36π cm².

b) O raio de uma circunferência que tem área de 64π dam².
r = 8 dam

31. Determine a área indicada na figura, sabendo que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 2$ cm e $\overline{EF} = \overline{FG} = 4$ cm. 76,4 cm²



32. Os pontos O e P são os centros de dois círculos de raios 8 cm e 4 cm respectivamente.



Determine:

a) A área de cada um dos círculos de centros O e P. 200,96 e 50,24

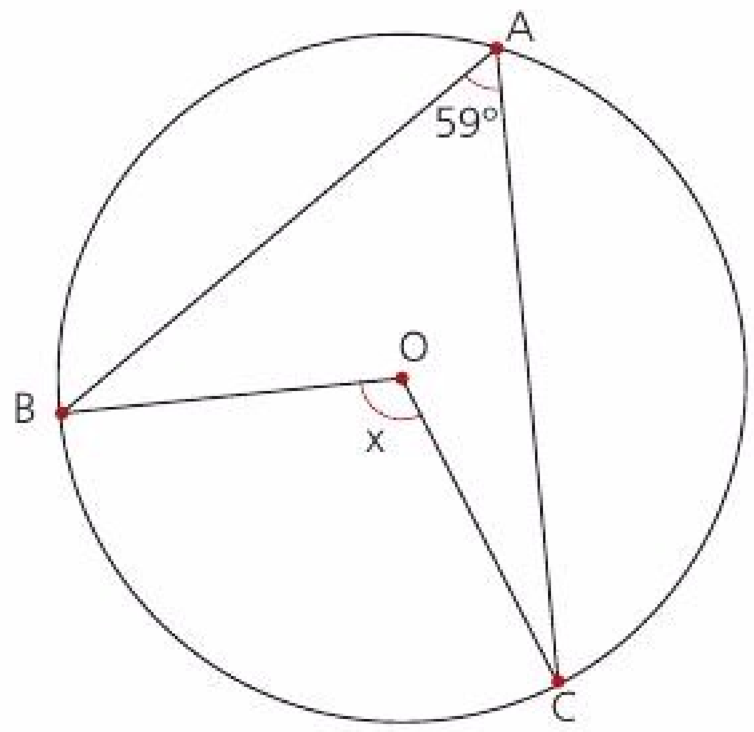
b) A área do círculo maior que envolve os dois círculos de centros O e P.
Área = 452,16

c) A área pintada da figura.
Área principal = 200,96 m²

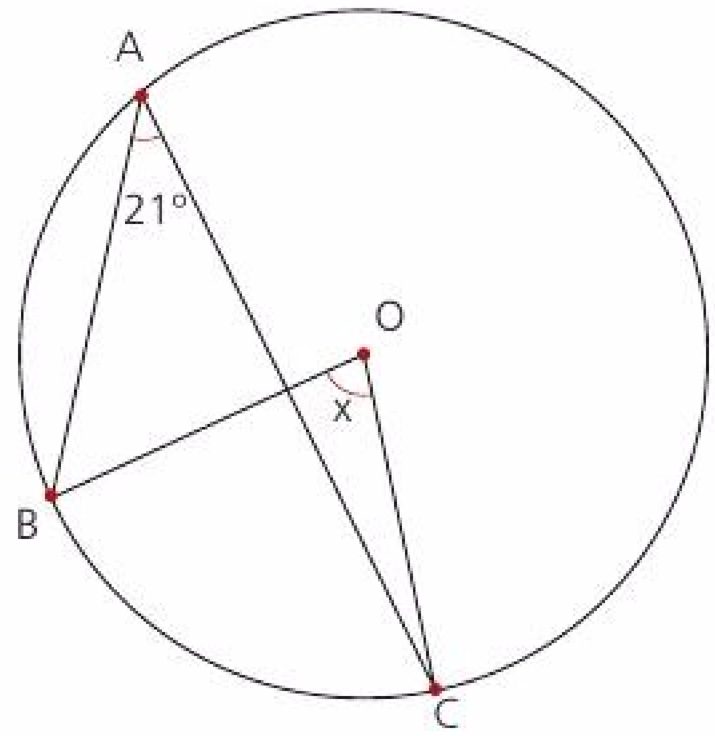
Para estudar

33. Determine o valor de **x** e **y** em cada caso:

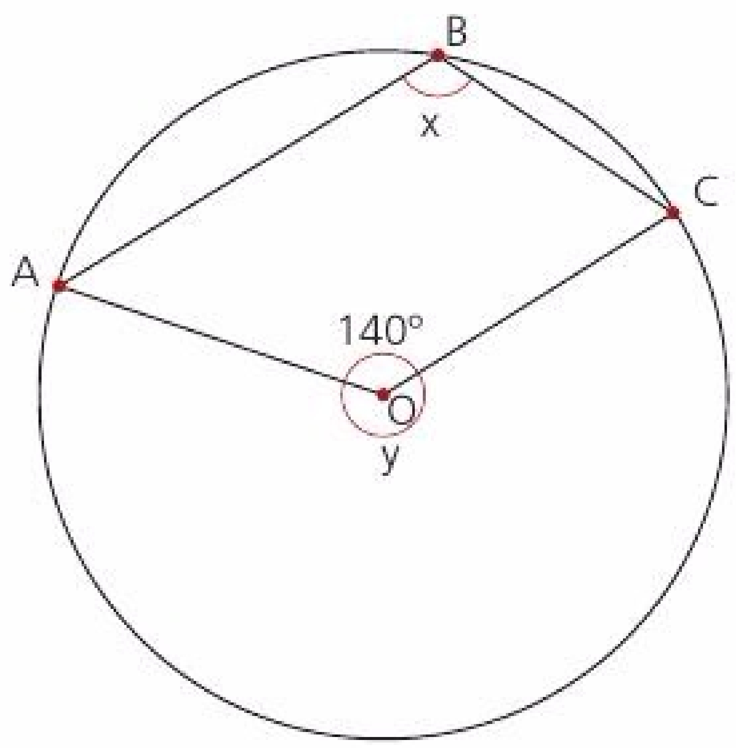
a)



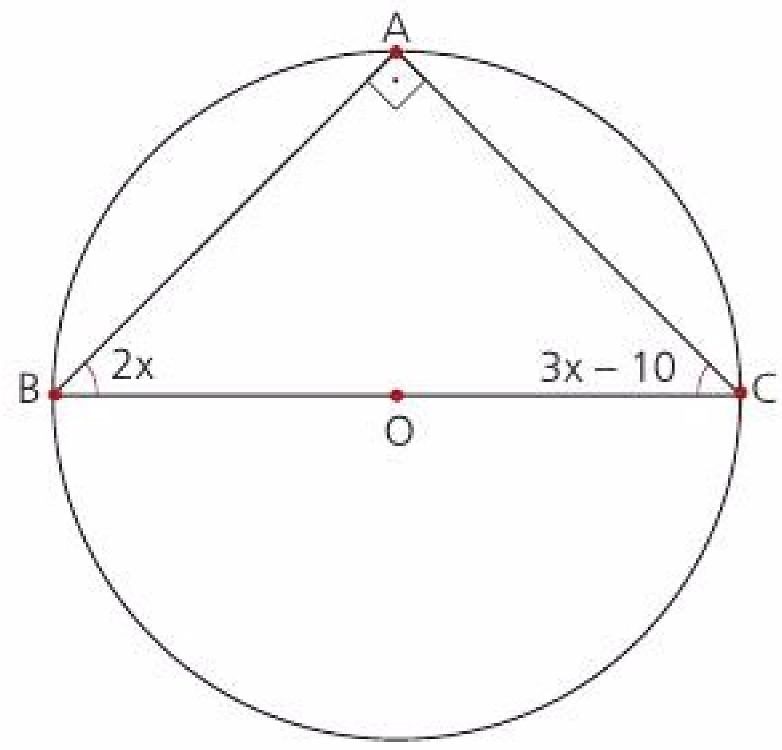
b)



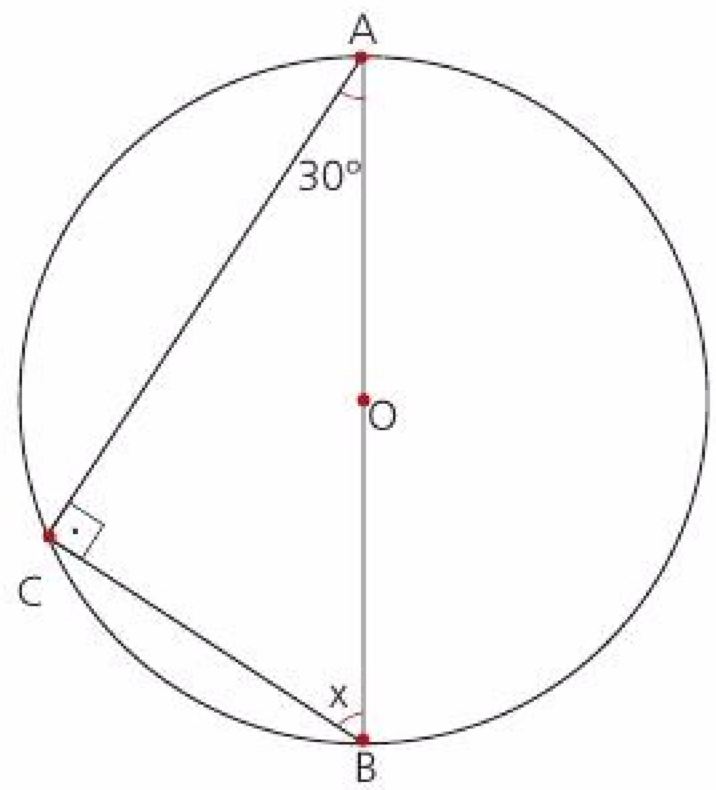
c)



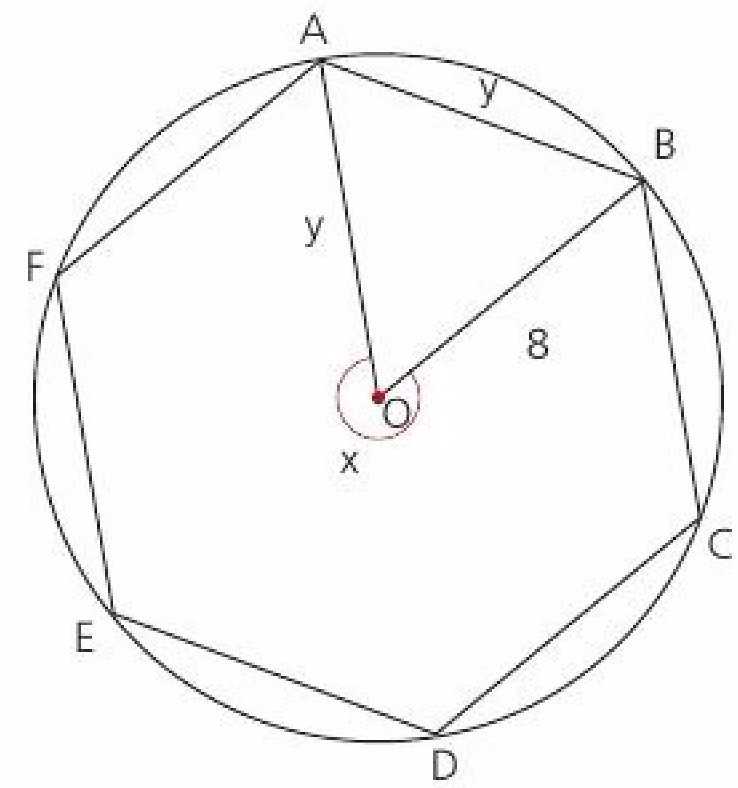
d)



e)

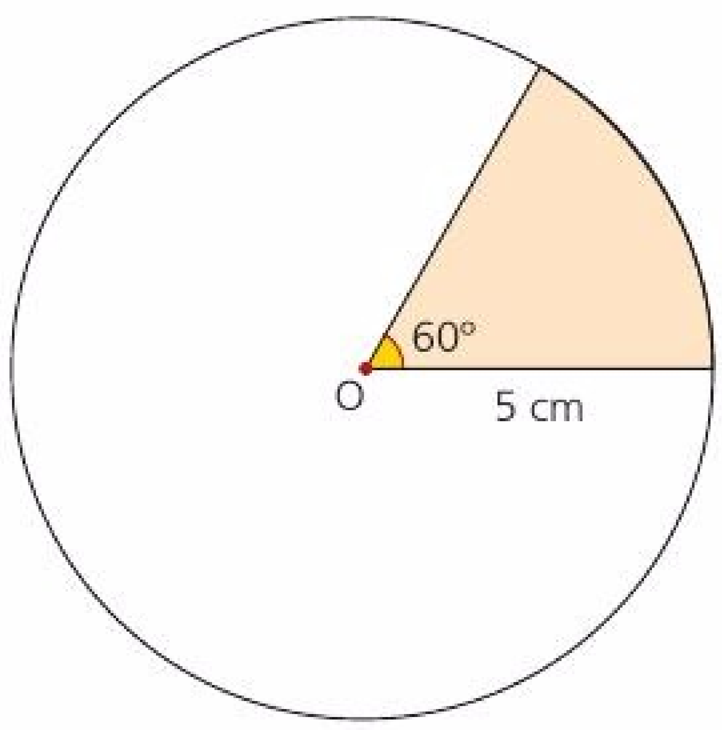


34. A figura a seguir mostra uma circunferência de raio 8 cm e um hexágono regular nela inscrito. Determine **x** e **y**.

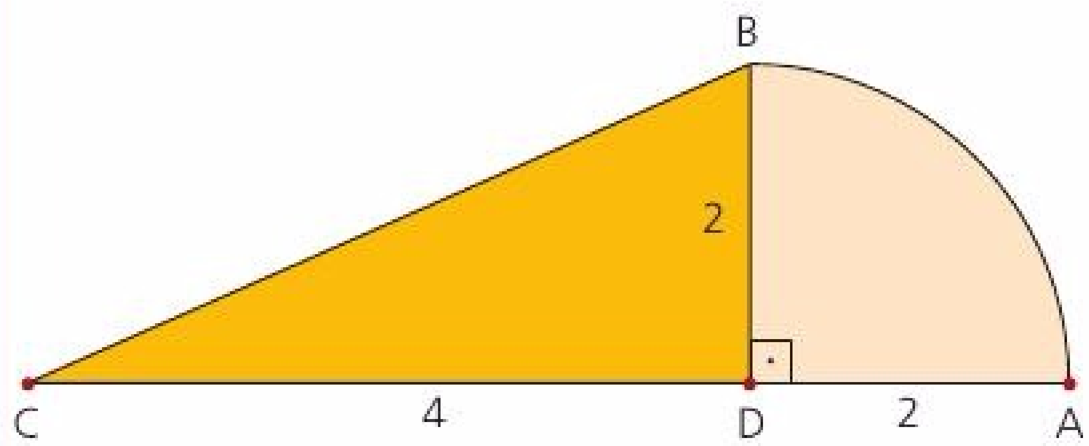


35. Calcule as áreas indicadas nas figuras.

a)

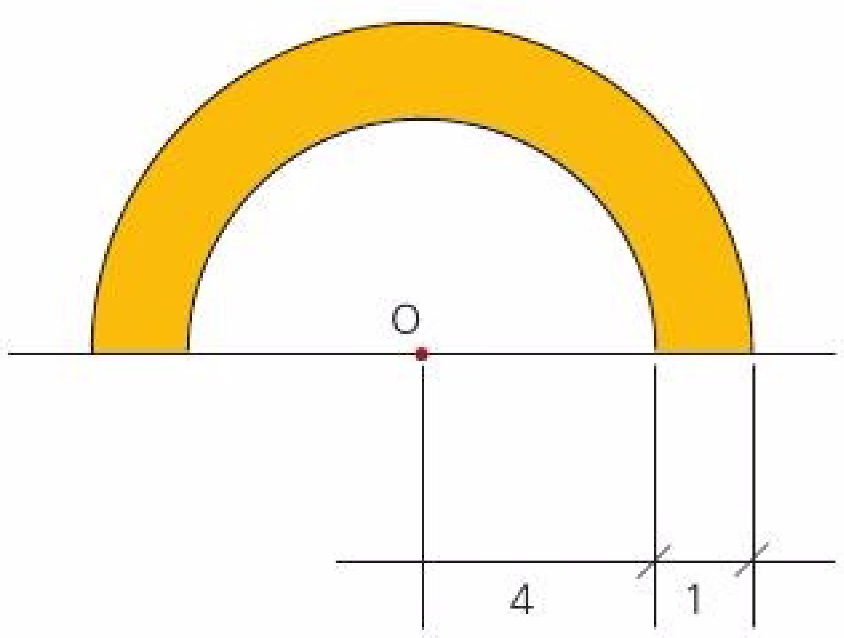


b)

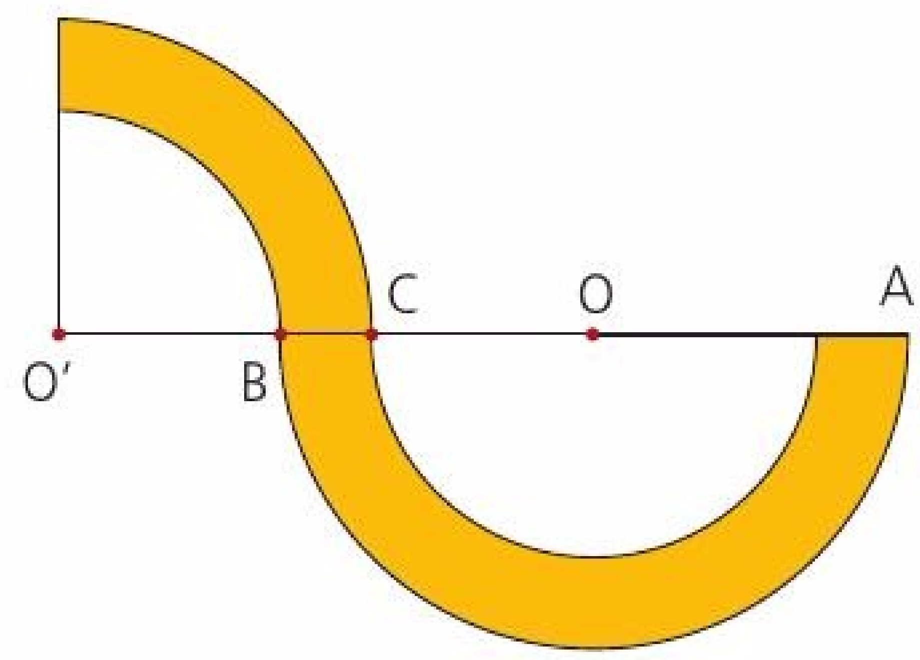


$\overline{AD} \equiv \overline{DB}$

c)



d)



$\overline{BC} = 3$ cm

$\overline{O'B} = 6$ cm

$\overline{OA} = 8$ cm

36. Converta as medidas abaixo para graus:

a) $\frac{5\pi}{6}$ rad

b) $\frac{5\pi}{3}$ rad

c) $\frac{7\pi}{3}$ rad

d) $\frac{\pi}{5}$ rad

37. Converta para radianos as medidas em graus:

a) 18°

b) 36°

c) 270°

d) 330°

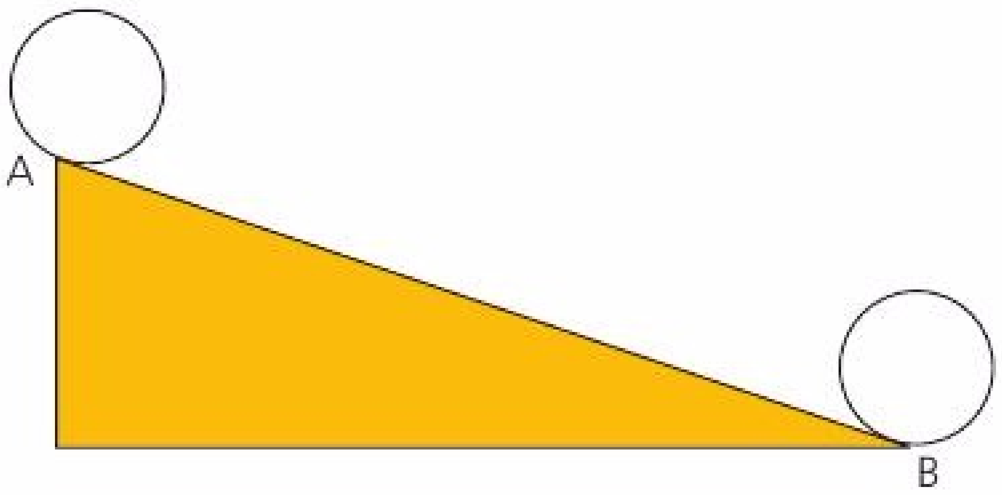
38. Uma circunferência tem raio 1 cm. Quanto mede em centímetros:

a) O arco de $\frac{1}{4}$ de volta.

b) O arco de meia volta.

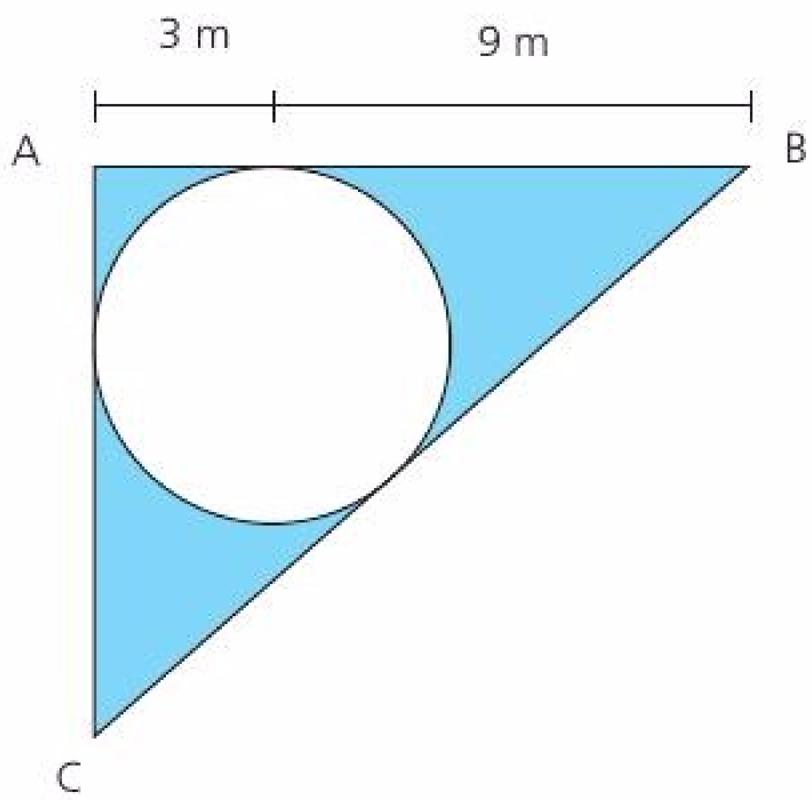
c) O arco de uma volta.

39. Uma roda de 12 cm de raio dá uma volta completa a cada 15 segundos. Lançada numa ladeira, a partir do ponto A, a roda gira 40 segundos até atingir o ponto B na parte mais baixa da ladeira. Qual é a distância percorrida pela roda?
(use $\pi = 3{,}14$)

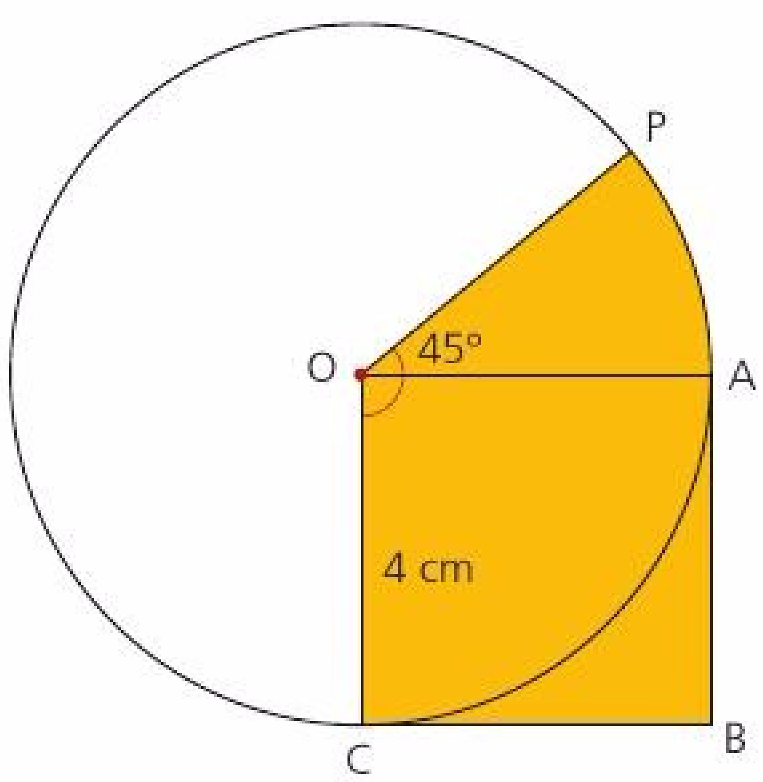


40. Calcule as áreas em cada caso a seguir:

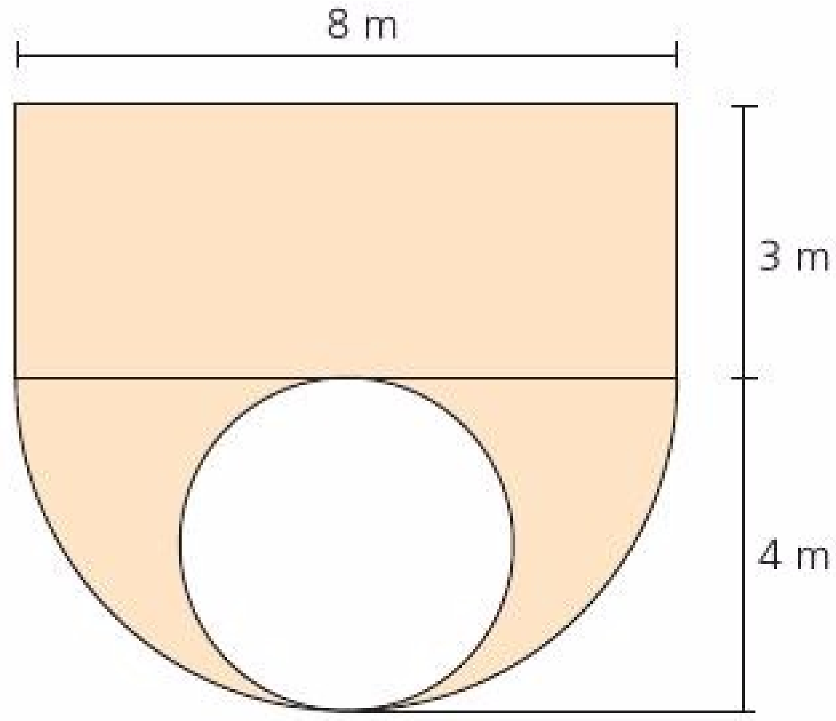
a)



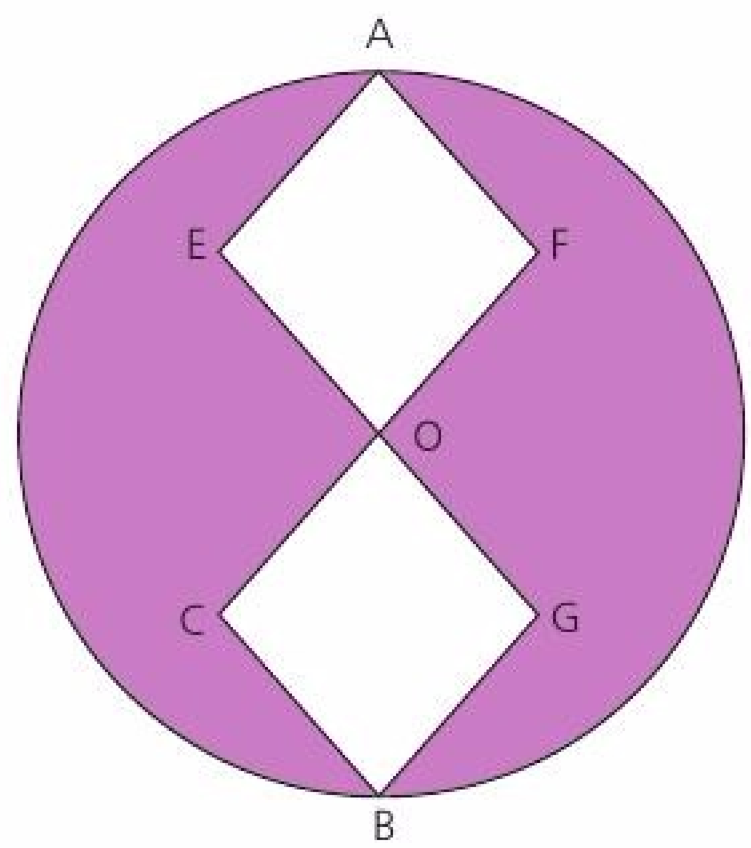
b)



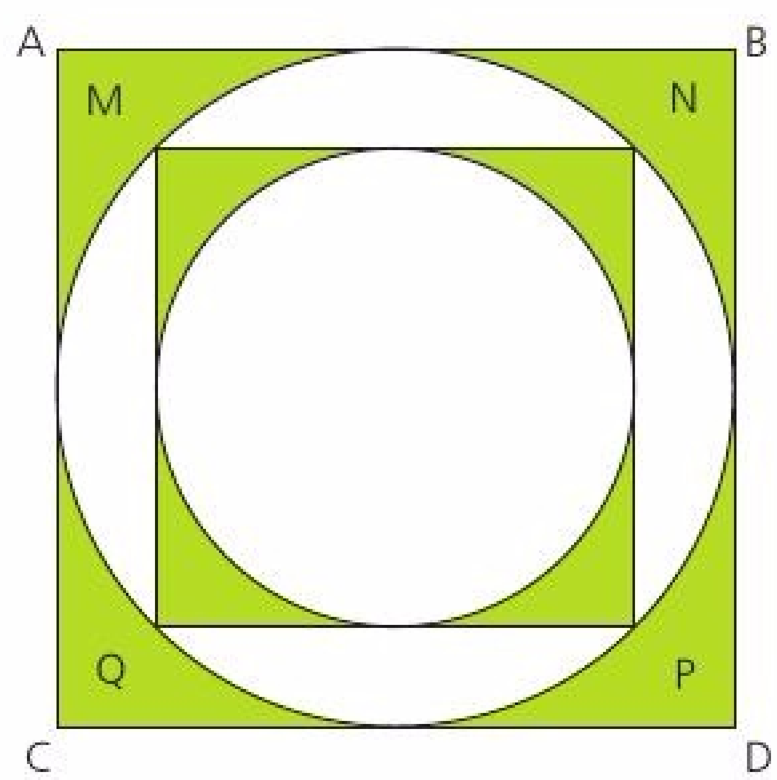
c)



d) O é o centro da circunferência e AEOF e OCBG são dois losangos congruentes, cujas diagonais medem $\overline{AO} = \overline{OB} = 6$ cm e $\overline{EF} = \overline{CG} = 4$ cm.



e) ABCD é um quadrado de lado 12 cm e MNPQ é um quadrado de lado 8 cm.



Resolução das atividades

1. a) $x = 55°$
b) $x = 37°$
c) $x = 44°$
$y = 22°$
d) $x = 60°$

2. a) ΔABC é retângulo
$x + 9 + 2x - 3 + 90° = 180°$
$3x = 84° \rightarrow x = 28°$
$\hat{A} = 37°$, $\hat{B} = 53°$ e $\hat{C} = 90°$
b) ΔMNP é retângulo
$28° + x + 90° = 180° \rightarrow x = 62°$
$\hat{M} = 62°$, $\hat{N} = 90°$ e $\hat{P} = 90°$
c) ΔRST é retângulo
$2s + 15 + 3x + 90° = 180°$
$5x = 75° \rightarrow x = 15°$
$\hat{R} = 45°$, $\hat{S} = 90°$ e $\hat{T} = 45°$

3. a) O DABD é equilátero. Logo:
$\hat{A} = 60° \rightarrow D\hat{O}B = 120° \rightarrow \hat{C} = 120°$
$\hat{D} = \hat{B} \rightarrow 60° + 120° + 2\hat{D} = 360° \rightarrow \hat{D} = 90°$
Os ângulos internos de ABCD são:
$\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 120°$ e $\hat{D} = 90°$
b) DOBC é um losango.
c) $\overline{OB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DO} = 4$ cm e $\overline{OC} = 4$ cm
$\overline{OB}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{EB}^2$
$\overline{EB}^2 = 16 - 4 \rightarrow EB = 2\sqrt{3}$
A área S do losango DOBC será:
$S = 2 \cdot \dfrac{\overline{OC} \cdot \overline{EB}}{2}$
$S = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow S = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
d) Os triângulos AOD, DOB, AOB e DCB são congruentes e a área de cada um é metade do losango DOBC. logo:
$A = 4 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

4. a) $x = 120°$
b) $x = 40°$
c) $x = 114°$
d) $x = 48°$
$y = 24°$

5. r = 5 cm
O maior lado é 10 cm

6. a) centro da circunferência
b) raio
c) raio
d) diâmetro

7. a) $\overline{OS} = 5$ cm
b) $\overline{MN} = 10$ cm
c) $\overline{MN}$, $\overline{SP}$, $\overline{RN}$, $\overline{PR}$
d) $\overline{MN}$ e $\overline{PS}$

8. a) iguais a 3 cm
b) quadrado, 3 cm

9. Se quadrado mínimo 36 cm de lado
Se circular com raio mínimo de 18 cm.

10. a) 1 m x 1 m
b) 0,75 m

11. 4 formas

12. 31 cm x 31 cm

13. a) $\overline{AD} = \overline{DB} = 5$ cm
Porque $\overline{AD} = \overline{AO} = r = 5$ cm
b) losango
c) isósceles
d) AOBD = 20 cm
ODB = 15 cm

14. a) (F) Toda corda é um raio

b) (F) Todo raio é uma corda.

c) (V) Todo diâmetro é uma corda.

d) (V) Qualquer segmento de reta com extremidades no centro e em um ponto da circunferência é chamado de raio.

e) (V) O dobro da medida do raio é igual a medida do diâmetro.

15. ΔABC é retângulo, pois está inscrito na semicircunferência.

$x + 28° + 90° = 180° \rightarrow x = 62°$

16. ΔABC é retângulo, pois está inscrito na semicircunferência.

$x + x + 90° = 180° \rightarrow x = 45°$

17. a) $\overline{OA}$ é raio da circunferência

b) corda da circunferência ou lado do quadrilátero ABCD.

c) $\overline{OC} = 6$ cm, pois é raio.

d) Ambos são isósceles.

e) ΔBOC isósceles $\rightarrow z = 35°$

ΔAOC isósceles $\rightarrow k = 65°$

ΔDOC isósceles $\rightarrow p = 30°$

ΔAOB isósceles $\rightarrow x = y$

$65° + 65° + 30° + 30° + 35° + 35° + x +$

$+ x = 360° \rightarrow x = 50° \rightarrow y = 50°$

f) Os ângulos internos são:

$\hat{A} = 50° + 65° \rightarrow \hat{A} = 115°$

$\hat{B} = 50° + 35° \rightarrow \hat{B} = 85°$

$\hat{C} = 35° + 30° \rightarrow \hat{C} = 65°$

$\hat{D} = 30° + 65° \rightarrow \hat{D} = 115°$

18. ΔDOC é retângulo pois está inscrito na semicircunferência

$$55° + 90° + x = 180° \rightarrow x = 35°$$

19. $\overline{MG} = 4$ cm $\rightarrow \overline{FG} = \overline{EF} = \overline{EH} = \overline{HG} = 8$ cm

Assim, os lados dos quadrados ABCD e EFGH são iguais a 8 cm.

$\Delta AOB \rightarrow 4^2 = 2r^2 \rightarrow 16 = r^2 \rightarrow r = 2\sqrt{2}$ cm.

20. $C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5$

$C = 31{,}4$ cm

21. $C = 1$ m

$C = 2\pi r$

$100 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$r = \frac{100}{6{,}28} = 15{,}9$ cm

22. π 180°

$\frac{3\pi}{4}$ x

$$x = \frac{\frac{3\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} = 135°$$

23. a) $\overline{AB} = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2$ rad

b) $\overline{AB} = \frac{0{,}02}{0{,}04} = 0{,}5$ rad

c) $\overline{AB} = \frac{6}{2} = 3$rad

d) $\overline{AB} = \frac{0{,}105}{0{,}42} = 0{,}25$ rad

24. $r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ cm $\cong 0{,}\overline{3}$ cm

25. a) 240°

b) 22° 30′

c) 210°

d) 15°

26. a) $45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

c) $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) $315° = \frac{7\pi}{4}$ rad

27. Se o ponteiro das horas completar 360°, o dos minutos completará 30° (equivalente a 1h). Assim, às 12h 15min, o ponteiro dos minutos terá completado 90° e o das horas x.

360° ______ 30°

90° ______ x

$$x = \frac{30° \cdot 360°}{90°} \rightarrow x \cong 7°$$

Logo, o menor ângulo será aproximadamente 83°.

28. $D = 2p \cdot 18 + 3 \cdot 18 \rightarrow D \cong 221{,}04$ m

29. a) 452,16 cm^2

b) 235,5 cm^2

c) r = 10 cm

$A = \frac{140}{360} \cdot \pi r^2$

$A = \frac{140}{360} \cdot \pi \cdot 10^2$

$A = 122,\ 1\ cm^2$

30. a) $A = 36\pi\ cm^2$.

b) r = 8 dam

31. $\overline{EF} = \overline{FG} = 4$ cm

A área pintada será igual à diferença entre a área das cincunferências de raio 8 m e de raio 4 cm.

$$A = \frac{\pi \cdot 8^2}{2} - \frac{\pi \cdot 4^2}{2} \rightarrow A \cong 75{,}4\ cm^2$$

32. a) 200,96 e 50,24

b) R = raio do círculo maior

R = 12

Área = 452,16

c) Área principal = 452,16 – 200,96 – 50,24

Área principal = 200,96 m^2

Respostas da seção Para estudar

33. a) $x = 118°$
b) $x = 42°$
c) $y = 220° \rightarrow x = 110°$
d) $x = 20°$
e) $x = 60°$

34. $x = 300°$
$y = 8$ cm

35. a) $A = \frac{25\pi}{6}$ cm²
b) $\pi + 2$
c) $A = \frac{9\pi}{2}$
d) $A = 25\pi \text{cm}^2$

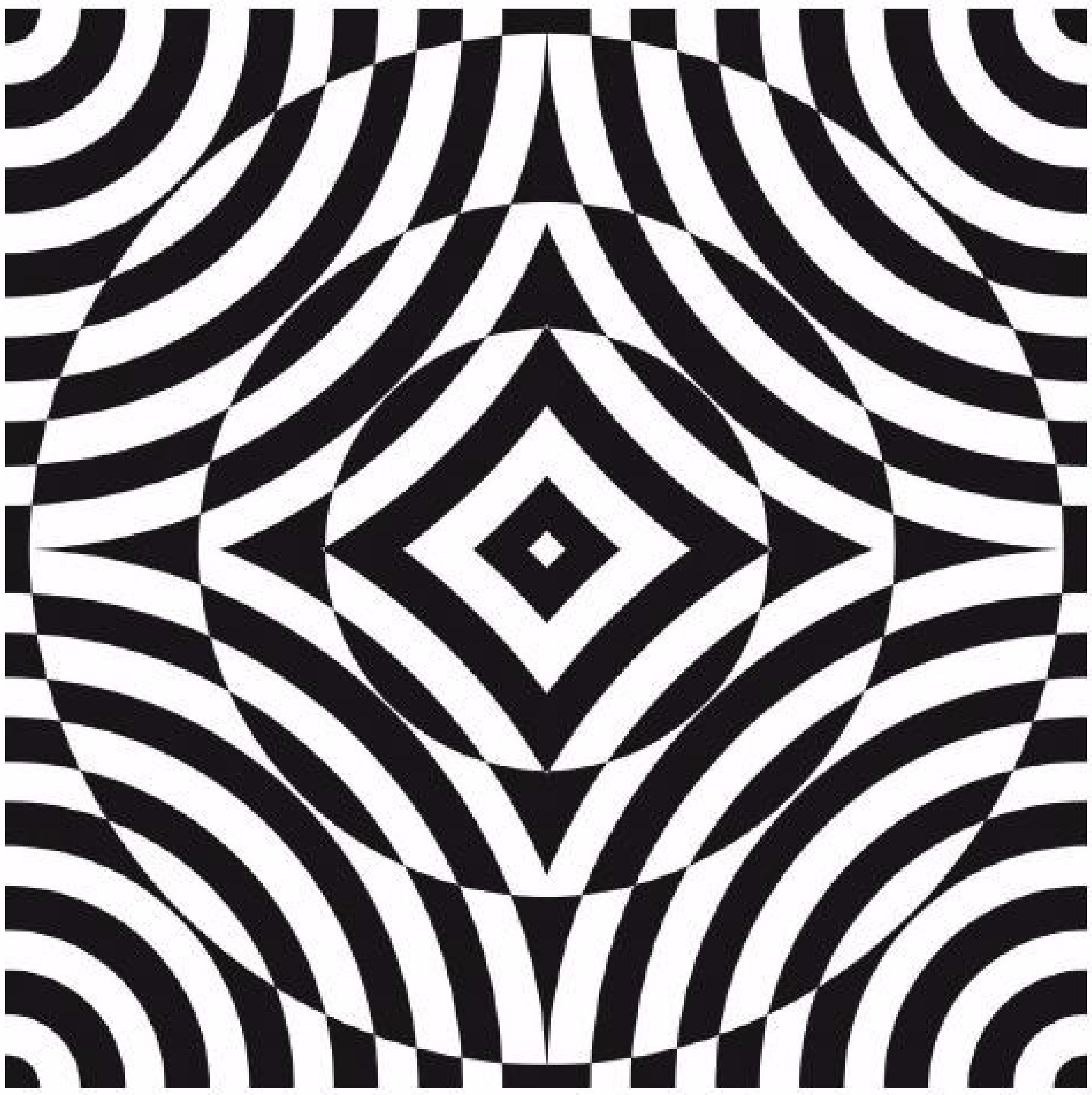
36. a) 150°
b) 300°
c) 210°
d) 36°

37. a) $\frac{\pi}{10}$
b) $\frac{\pi}{5}$
c) $\frac{3\pi}{2}$
d) $\frac{11\pi}{6}$

38. a) $\frac{\pi}{2}$ cm
b) π cm
c) 2π cm

39. 201 m

40. a) $A = \left(\frac{81 - 18\pi}{2}\right) \text{m}^2$
b) $A = \left(\frac{144 + 16\pi}{2}\right) \text{m}^2$
c) $A = \left(\frac{48 + 8\pi}{2}\right) \text{m}^2$
d) $A = (36\pi - 2)\ \text{cm}^2$
e) $A = (208 - 52\pi)\ \text{cm}^2$



Betacam-SP/Shutterstock

Ilustração em estilo *Op Art*, muito comum na década de 1970, utilizando círculos e partes de círculos que provocam uma impressão visual de movimento. O termo *Op Art* vem do inglês *Optical Art*.

capítulo 10

Sólidos

- Prismas
- Pirâmides
- Área da superfície de sólidos geométricos

Colin Cushman/SXC

Pirâmides na entrada do Museu do Louvre, Paris, França.

Conversa Inicial

Já estudamos as principais características das figuras planas. Sabemos como calcular medidas lineares, angulares e áreas. Porém, em nosso cotidiano, convivemos com figuras espaciais chamadas **sólidos**.

Atualmente, fala-se muito em "tecnologia 3D" e "animações em 3D". Se interpretarmos de forma simples o significado de 3D, chegaremos ao conceito fundamental que se relaciona a figuras espaciais: **3 dimensões**.

Enquanto as figuras planas têm 2 dimensões (comprimento e altura) e com elas calculamos áreas, as figuras espaciais têm 3 dimensões: comprimento, altura e profundidade. Com essas dimensões calculamos volumes.

Edifícios, objetos, rochas, cristais e tudo o que nos cerca tem volume, mas também tem áreas e medidas lineares que definem suas superfícies e seus volumes.

Fabio Imhoff/SXC

Andre Klaassen/Dreamstime

Iara Venanzi/Kino

Lucky Dragon/PhotoXpress

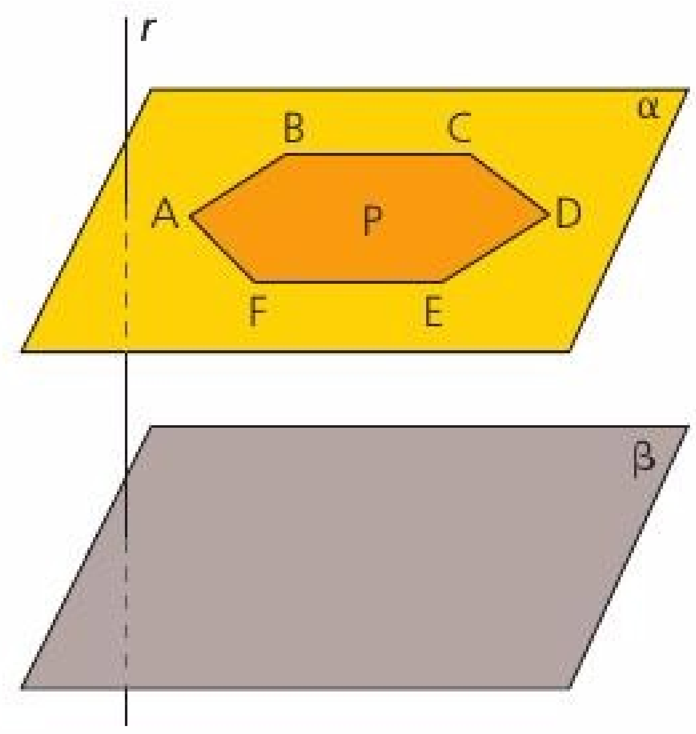
Os cristais, as pirâmides, os edifícios e o diamante lapidado são exemplos de formas espaciais.

Os prismas, as pirâmides e os poliedros, são sólidos especiais que podem ser estudados utilizando o que aprendemos sobre as figuras planas que constituem suas faces e bases.

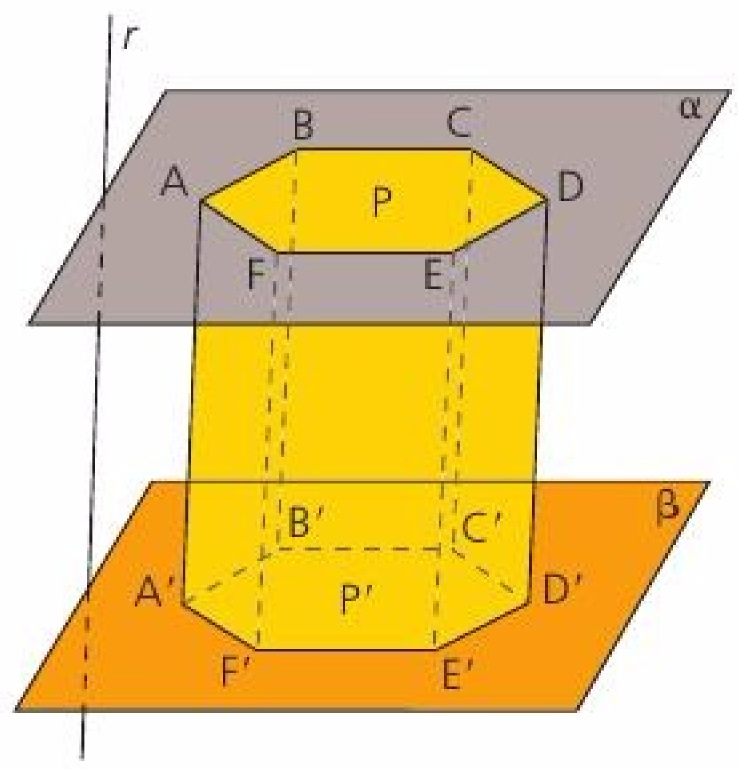
O objetivo deste capítulo é estudar a área total definida pelas faces de um sólido e os diversos segmentos importantes que podem ser traçados nessas faces e no interior do sólido, para que, mais adiante, você possa fazer cálculos de volumes.

Prismas

Considere dois planos α e β paralelos, um polígono **P** contido em α e uma reta *r* concorrente aos dois.

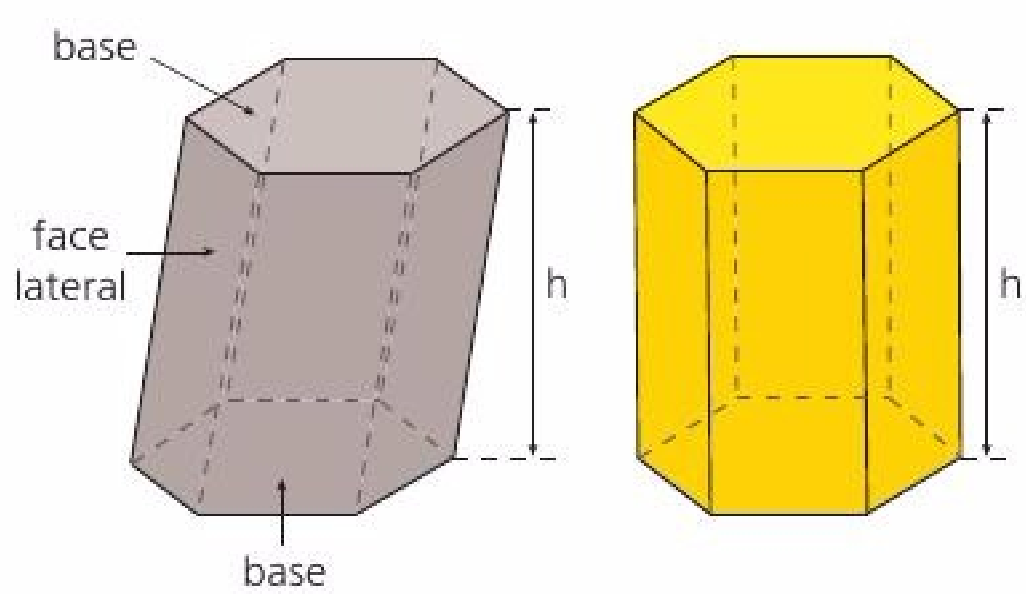


Chama-se **prisma** o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a *r*, com extremidades no polígono **P** e no plano β.



Observe que em β fica determinado um polígono **P′**, congruente a **P**. Os dois polígonos são denominados **bases** e seus lados, **arestas das bases**.

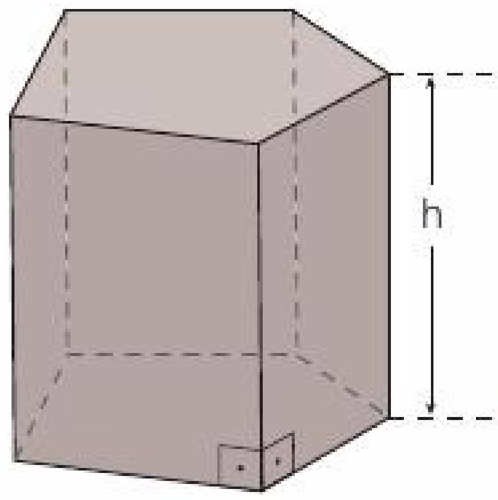
A distância entre as bases recebe o nome de **altura do prisma** e será igual a uma aresta lateral quando esta for perpendicular à base.



Classificação dos prismas

Além de ser especificado pelo polígono da base, um prisma pode ser classificado como:

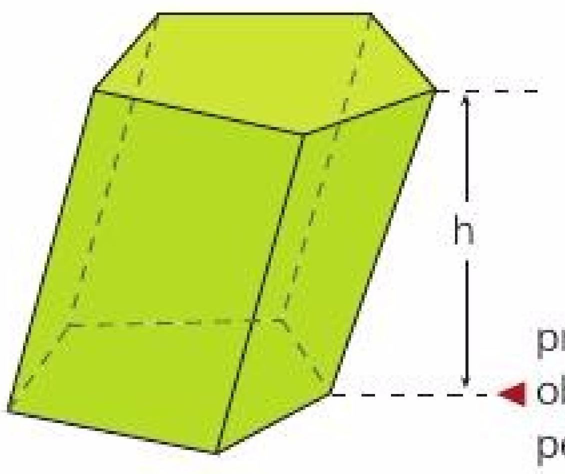
- **reto:** quando as arestas laterais são perpendiculares às bases;



prisma reto pentagonal

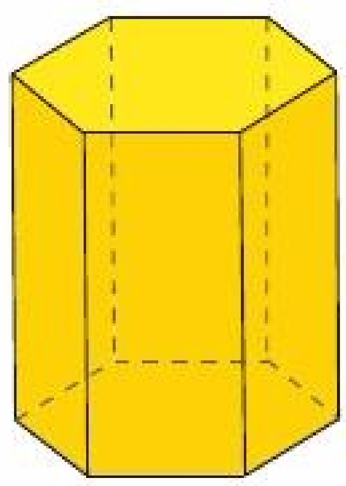
Leia e represente no quadro o triângulo com seus vértices e segmentos.

- **oblíquo:** quando não é reto;



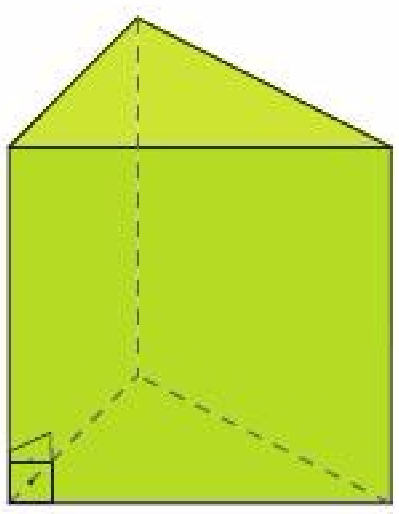
prisma oblíquo pentagonal

Um prisma é regular quando sua base é um polígono regular.

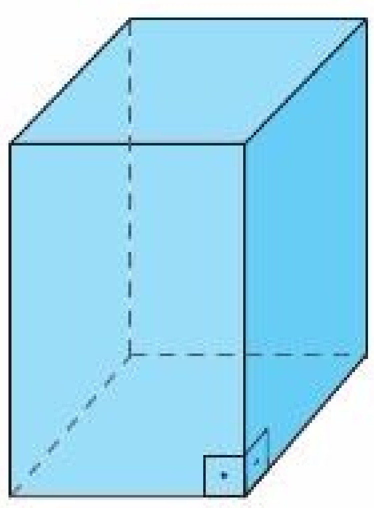


prisma reto hexagonal regular

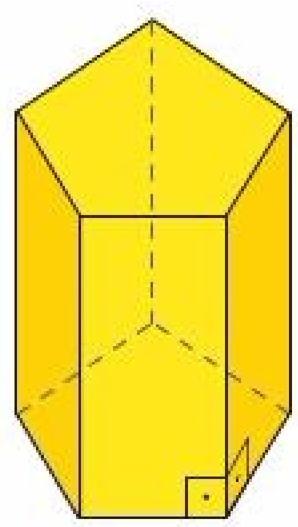
Note que nos prismas retos as faces sempre são retângulos.



prisma reto triangular



prisma reto quadrangular



prisma reto pentagonal

Área lateral de um prisma

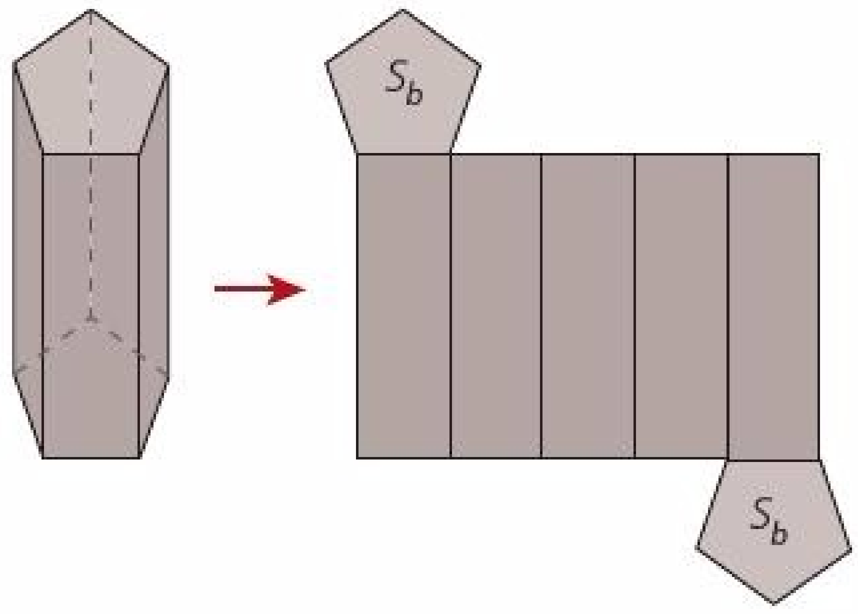
Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície: as faces e as bases. A soma das áreas de cada face será denominada **área lateral do prisma**. Calcula-se a área lateral de um prisma somando as áreas das faces laterais. No caso de um prisma regular, a área lateral (S_ℓ) é dada por:

$$S_\ell = n \cdot (\text{área de um retângulo})$$

onde **n** é o número de arestas da base.

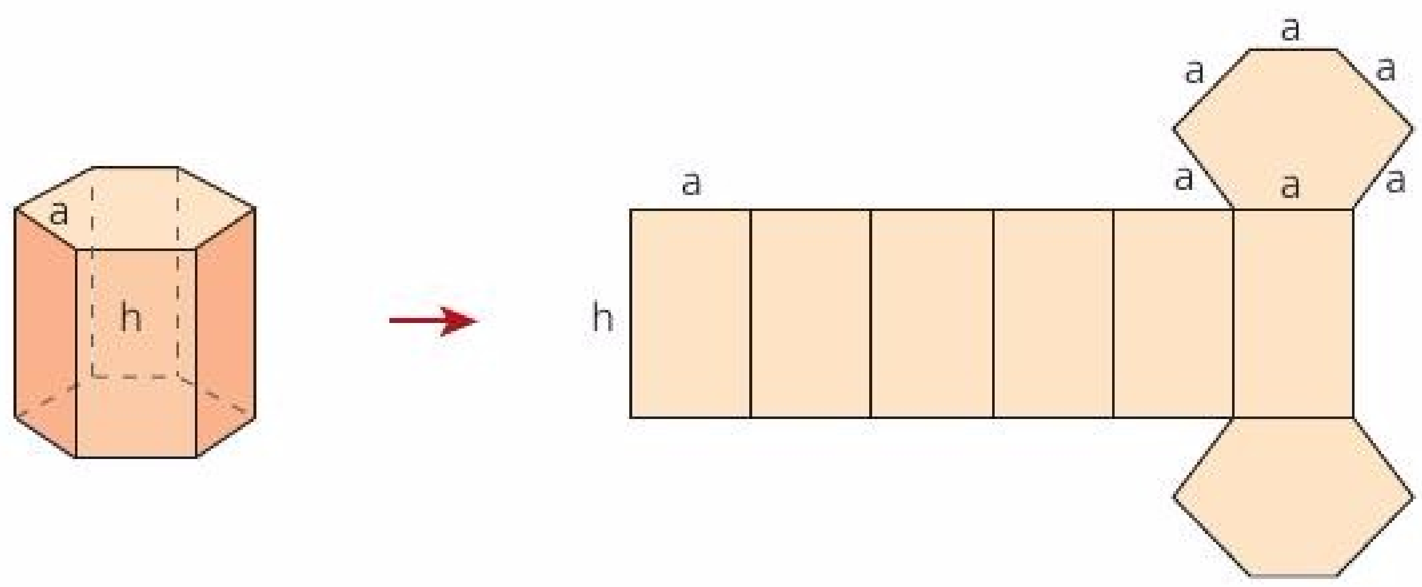
Observe os exemplos:

a) Área lateral de um prisma (S_ℓ) pentagonal regular:



$$S_\ell = 5 \cdot (\text{área de um retângulo})$$

b) Área lateral de um prisma reto hexagonal regular de aresta da base **a** e aresta lateral **h**:



Como cada face é um retângulo de lados **a** e **h**, a área lateral toral será:

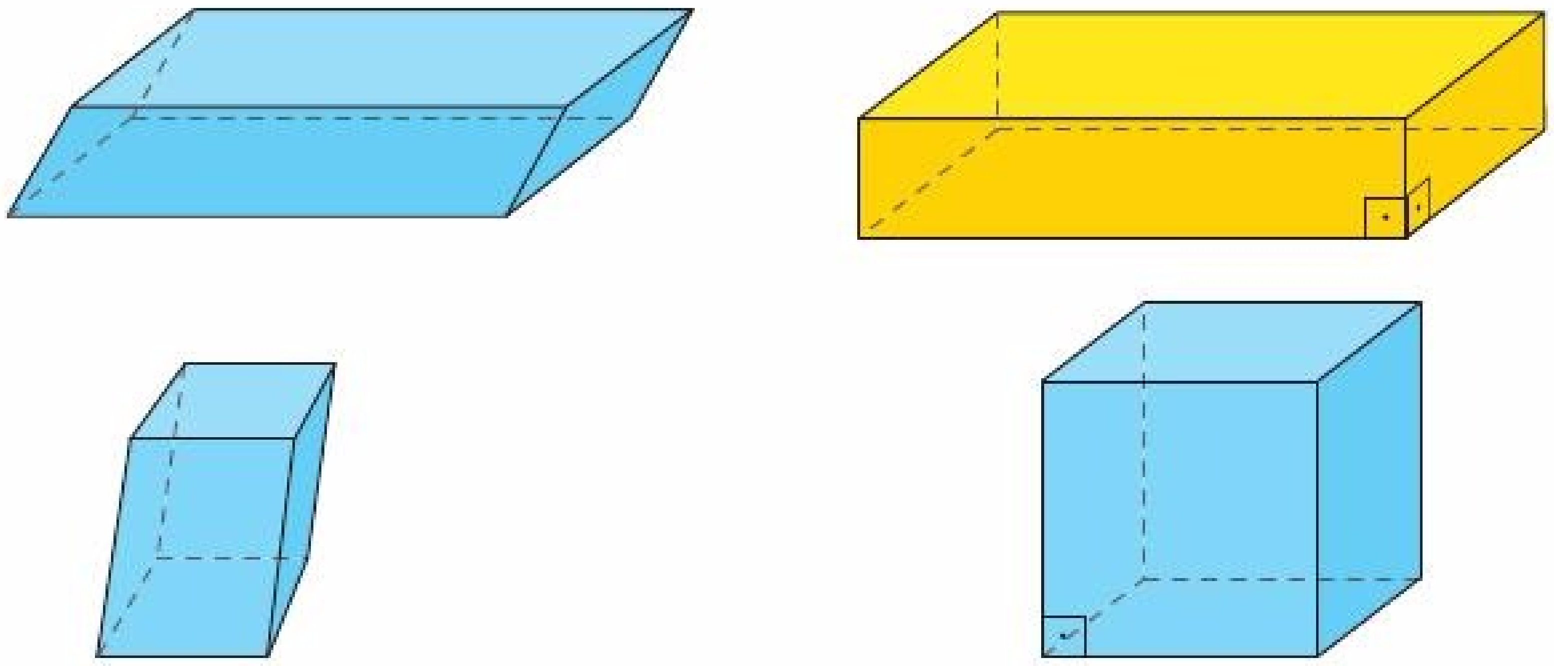
$$S_\ell = 6ah$$

Calcula-se a **área total** de um prisma somando a área lateral (S_ℓ) com as áreas das bases (S_b).

$$S_t = 2 \cdot S_b + S_\ell$$

Paralelepípedos

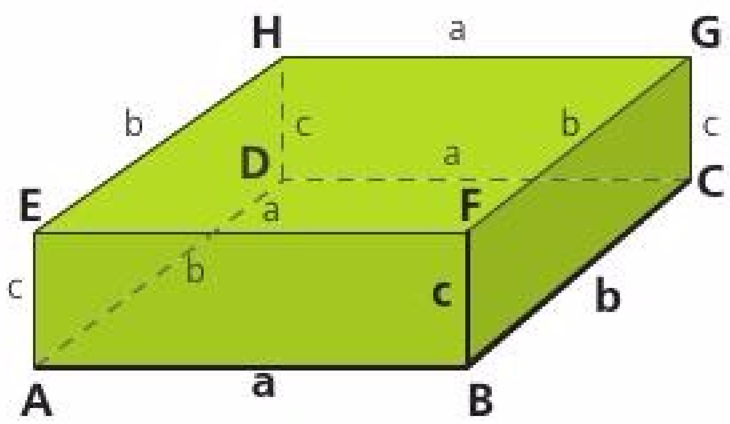
Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo.



Os paralelepípedos podem ser **retos** ou **oblíquos,** de acordo com o ângulo formado por suas arestas, tomadas duas a duas. Se o paralelepípedo reto tem bases retangulares, ele é chamado paralelepípedo reto-retângulo ou simplesmente **paralelepípedo retângulo**.

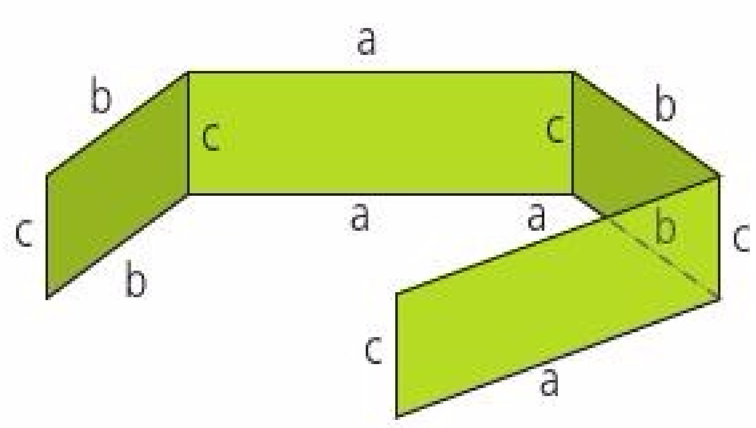
Paralelepípedo retângulo

Observe o paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** da figura:



Note que temos quatro arestas de medida **a**, quatro arestas de medida **b** e quatro arestas de medida **c** e que as arestas indicadas pela mesma letra são paralelas. Vamos calcular a área lateral e a área total desse paralelepípedo.

Sendo $\mathbf{S_L}$ a área lateral do paralelepípedo retângulo, teremos:



$$S_L = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc$$

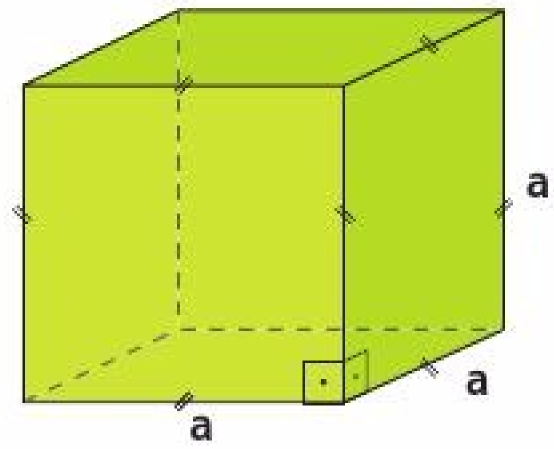
$$\mathbf{S_L = 2(ac + bc)}$$

Para obtermos a área total, devemos somar as áreas das duas bases à área lateral:

$A_T = 2(ac + bc) + 2\ ab \rightarrow A_T = 2(ab + ac + bc)$

Cubo

Se tivermos um paralelepípedo retângulo no qual todas as arestas têm a mesma medida, (a = b = c), ele receberá o nome de **cubo**. Dessa forma, as seis faces são quadrados de lado **a** e sua superfície total será seis vezes a área deste quadrado.



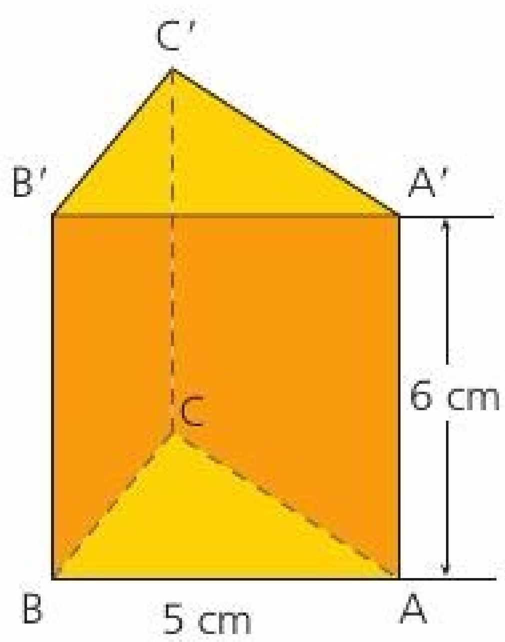
$$S_T = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a)$$

$$\boxed{S_T = 6a^2}$$

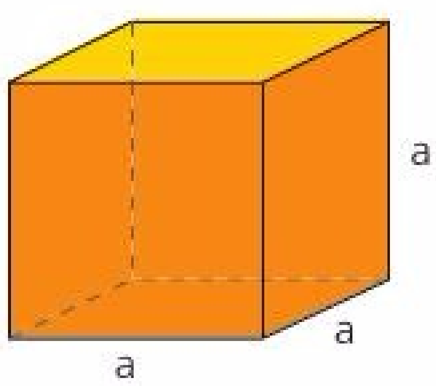
Atividades

As atividades estão desenvolvidas com diferentes níveis de complexidade, procurando obedecer a uma ordem crescente de dificuldade.

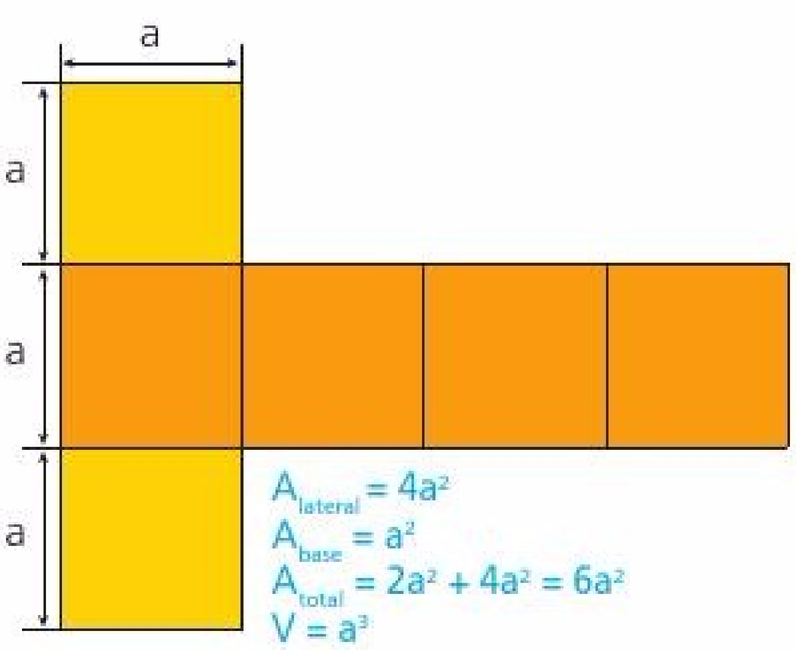
1. Determine a área lateral de um prisma reto triangular regular de 6 cm de altura e aresta da base igual a 5 cm. 90 cm²



2. Determine a área lateral, a área da base, a área total e o volume de um cubo de aresta **a**.

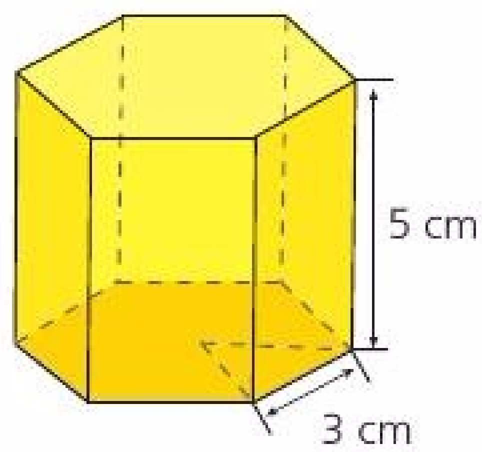


Observe o cubo planificado:



$A_{lateral} = 4a^2$
$A_{base} = a^2$
$A_{total} = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$
$V = a^3$

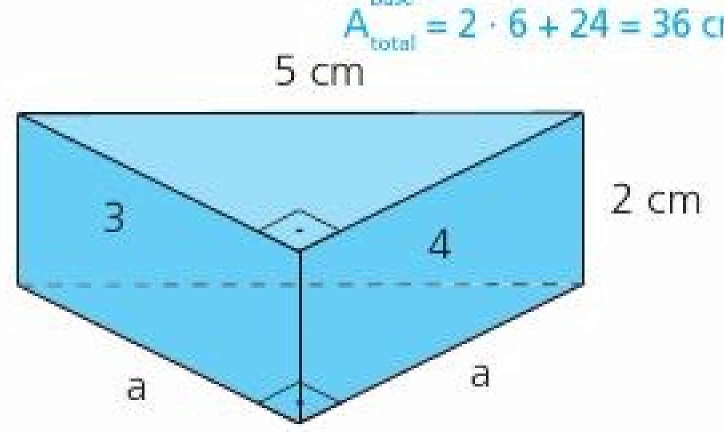
3. Um prisma reto hexagonal regular tem 5 cm de altura e a aresta da base mede 3 cm. Determine sua área lateral.
$A_{lateral} = 90\ cm^2$



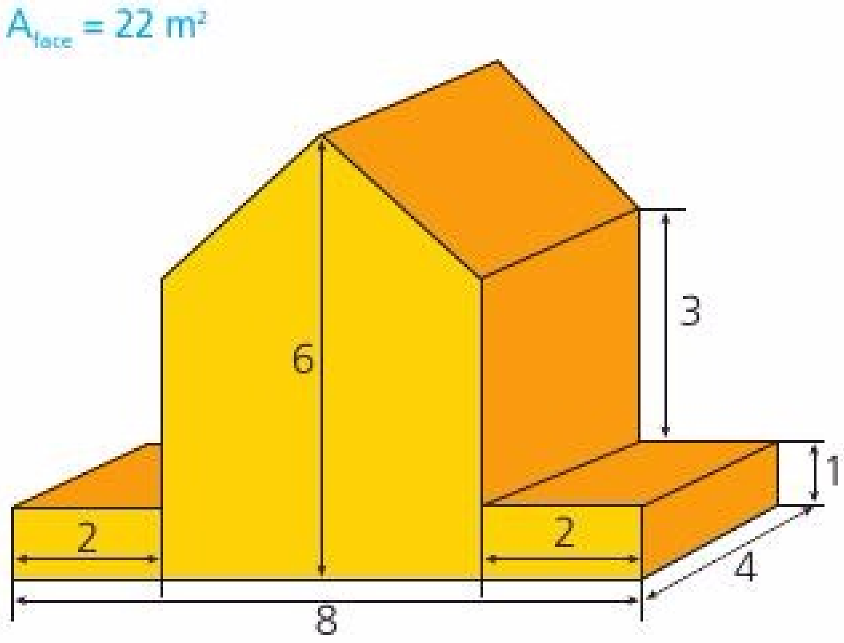
4. Em um prisma triangular regular, a aresta da base e a altura medem 3 cm. Determine sua área lateral. $A_{lateral} = 27\ cm^2$

5. A área lateral de um prima pentagonal regular é 180 cm^2. Sabendo que a aresta da base mede 2 cm, calcule a altura do prisma. $h = 18\ cm$

6. Em um prisma triangular reto, a base é um triângulo retângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm. Determine a área lateral, a área da base e a área total do prisma, sabendo que sua altura é 2 cm. $A_{lateral} = 24\ cm^2$ $A_{base} = 6\ cm$ $A_{total} = 2 \cdot 6 + 24 = 36\ cm^2$



7. Calcule a área da face frontal do sólido a seguir, cujas medidas estão em metros.
$A_{face} = 22\ m^2$



8. Calcule a área lateral de um prisma hexagonal regular que tem 6 cm de altura e a aresta da base mede 4 cm.
$A_{lateral} = 144\ cm^2$

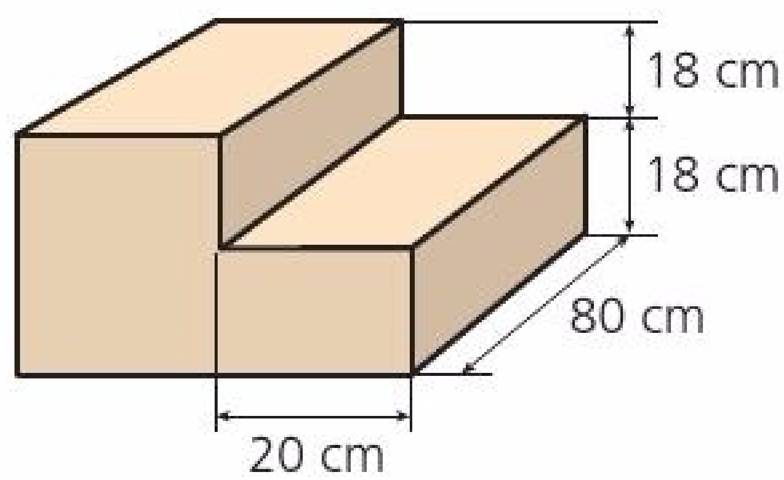
9. Um cubo tem área total de 54 cm^2. Duplicando a medida da aresta, qual será a área total do novo cubo?
$A_{total} = 216\ cm^2$

10. Quantos centímetros quadrados são necessários para montarmos uma embalagem de sabão em pó como a representada a seguir?
968 cm^2

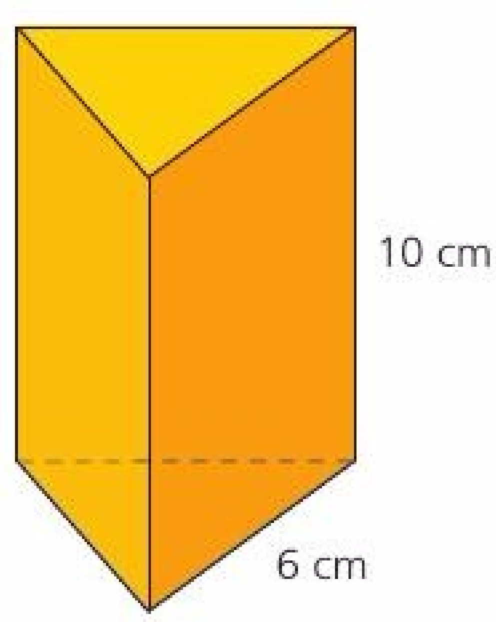
Aplicar conhecimento

Interpretar texto e figura

11. Para auxiliar as pessoas a subirem em um palco, foi construída a escada abaixo, cujos degraus têm mesma altura, mesmo comprimento e mesma largura. Quantos metros quadrados de madeira foram gastos, sabendo que a escada não tem a parte de baixo? (não esqueça da parte de trás). 9 520 cm^2



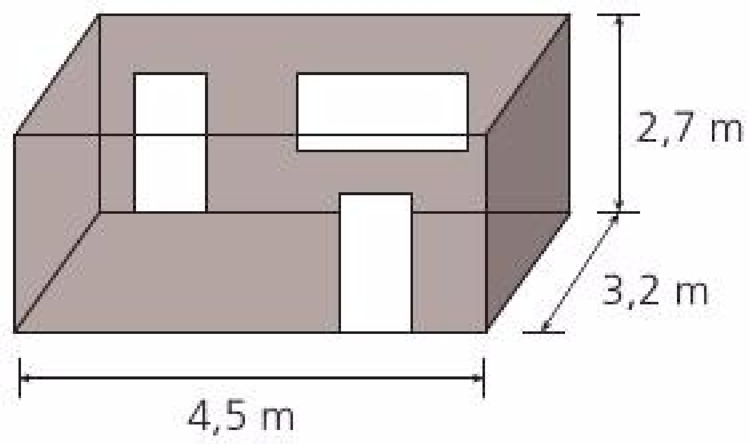
12. **Qual a área lateral do prisma triangular regular de altura 10 cm, cujas bases são triângulos equiláteros de lado 6 cm?**
$A_{lateral} = 180\ cm^2$



13. Quantos centímetros quadrados de cartão foram gastos para se fazer o calendário de mesa representado a seguir? (Atenção: ele não tem faces triangulares.)
760 cm²

Interpretar texto

14. Quantos metros quadrados de azulejos são necessários para revestir até o teto as quatro paredes de uma cozinha que tem duas portas, cada uma delas com 0,7 m de largura e 1,8 m de altura, e uma janela com 1 m de altura e 2 m de largura, conforme indica a figura a seguir.
37,06 m²



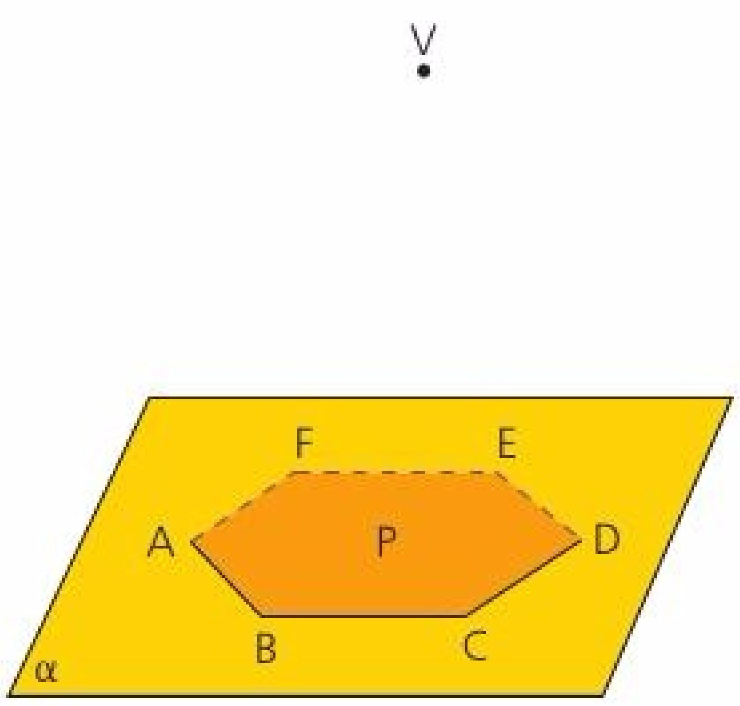
15. Uma embalagem de chocolate tem o formato da figura a seguir, na qual as bases são trapézios isósceles de 3 cm de altura e bases de 4 cm e 2 cm. Quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer essa embalagem, sabendo que seu comprimento é de 12 cm? 162 cm²

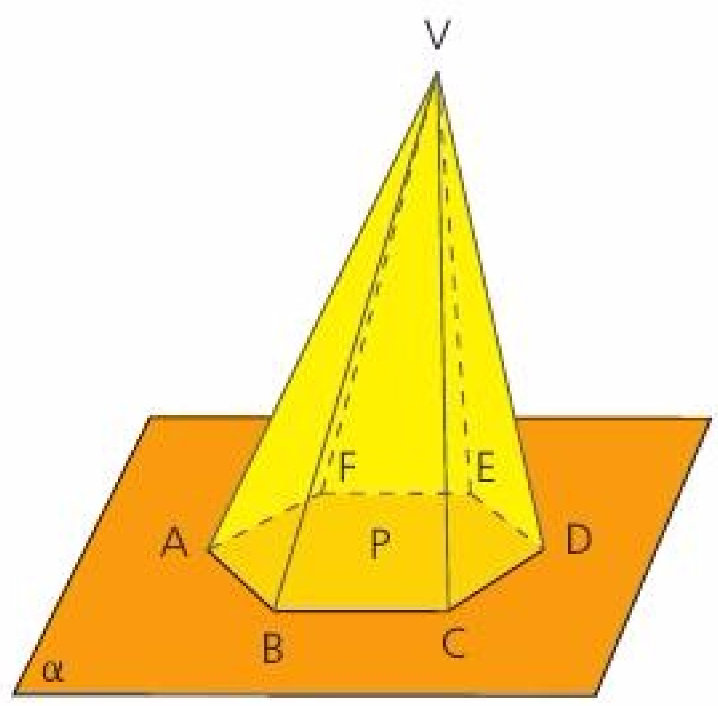
Interpretar figura

Pirâmides

Considere um polígono **P** contido em um plano α e um ponto **V** fora de α.

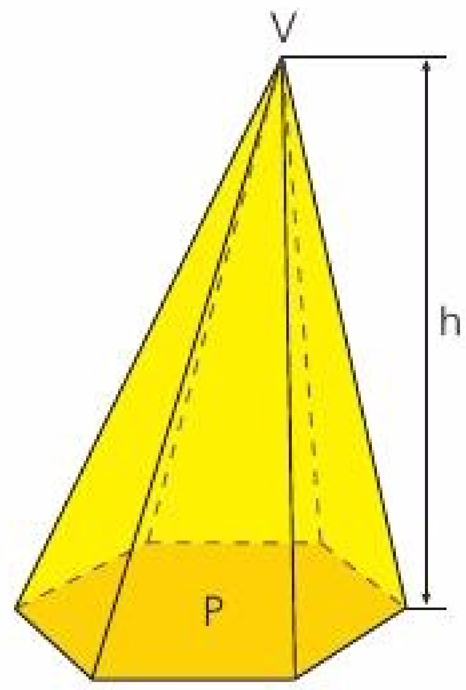
Represente as figuras no quadro.





Pirâmide é um sólido determinado pela reunião de todos os segmentos com uma extremidade em **V** e outra no polígono **P**.

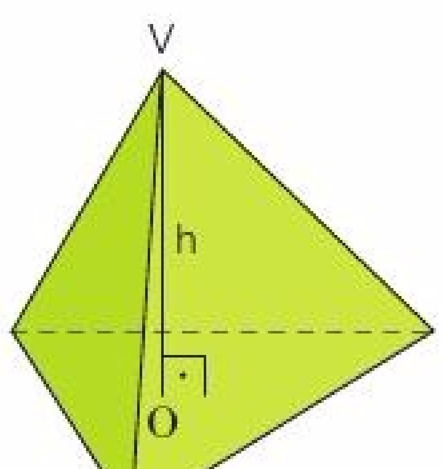
O polígono **P** é a base da pirâmide. Note que as faces de uma pirâmide são triângulos e que a distância de **V** a **P** é a altura **h** da pirâmide.



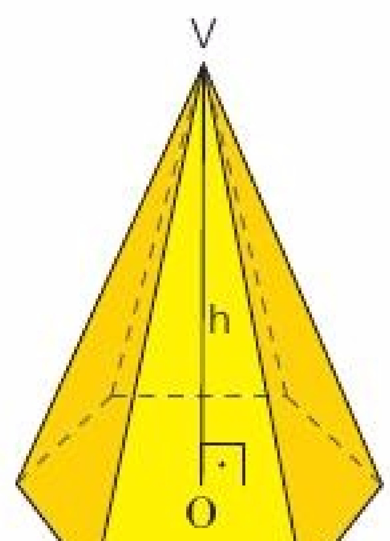
Represente no quadro cada uma dessas figuras.

Classificação das pirâmides

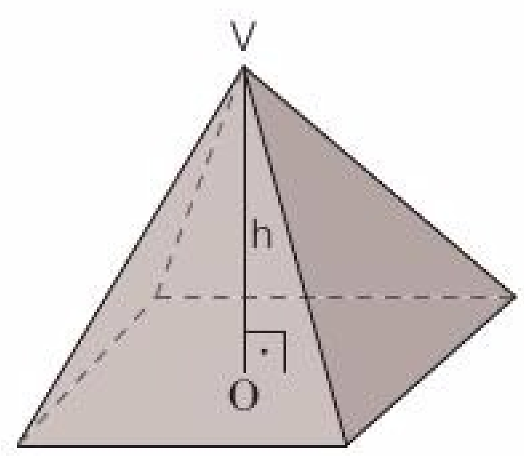
As pirâmides são também classificadas quanto ao número de lados da base (pirâmide triangular, quadrangular etc). Uma pirâmide é **reta** quando suas arestas laterais forem congruentes. Ela é chamada **regular**, quando sua base for um polígono regular e a projeção do vértice **V** sobre o plano da base coincidir com seu centro.



pirâmide regular triangular ou tetraedro



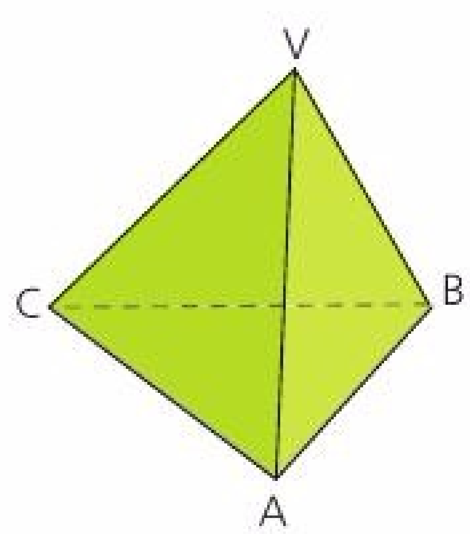
pirâmide regular hexagonal



pirâmide regular quadrangular

Tetraedro

Tetraedro é toda pirâmide de base triangular. Se as quatro faces forem congruentes, teremos um tetraedro regular. No tetraedro regular, cada face é um triângulo equilátero.

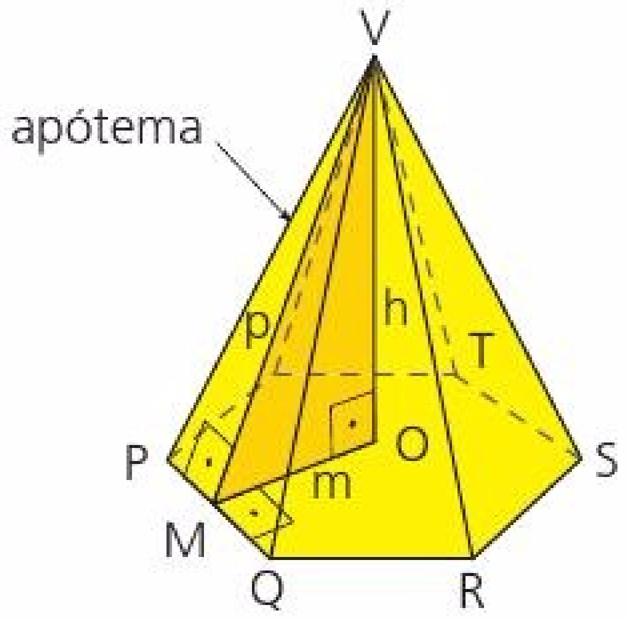


CAPÍTULO 10 – SÓLIDOS

Apótema da pirâmide regular

Apótema de uma pirâmide regular é a altura de uma face lateral em relação à aresta da base. Lembre-se: se a pirâmide é regular, cada face lateral é um triângulo isósceles.

Represente no quadro cada uma dessas figuras.



p: apótema da pirâmide

m: apótema da base

h: altura

M: ponto médio de $\overline{PQ}$

O: centro da base

Observe que o apótema da pirâmide, a altura e o segmento **m**, denominado apótema da base, formam um triângulo retângulo.

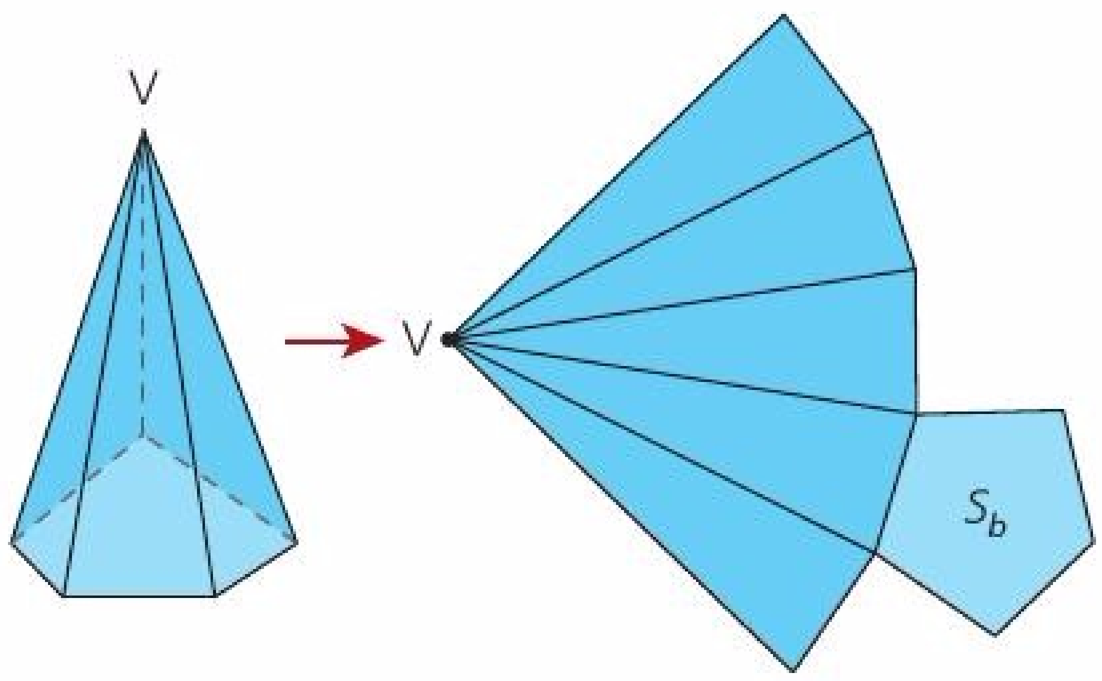
Área lateral da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais. Se a pirâmide for reta e regular e sua base um polígono de *n* lados, a área lateral será dada por:

$$S_\ell = n \cdot (\text{área de um triângulo})$$

Observe, por exemplo, a área lateral de uma pirâmide pentagonal:

$S_\ell = 5 \cdot$ (área de um triângulo)



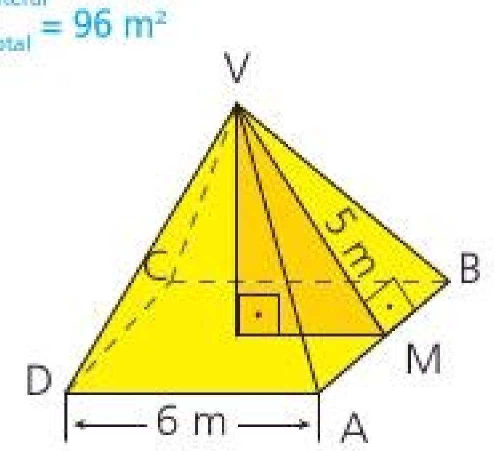
A área total será dada por:

$$S_t = S_b + S_\ell$$

Atividades

Professor: Estimule os alunos a desenhar as figuras a que se referem os exercícios, copiando-as do quadro.

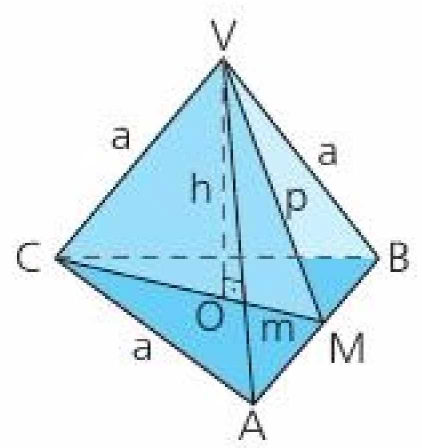
16. Uma pirâmide quadrangular regular tem apótema medindo 5 m e a aresta da base mede 6 m. Calcule sua área lateral e a área total. $A_{lateral} = 60\ m^2$ $A_{total} = 96\ m^2$



17. Determine a área total de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 m e o apótema $\sqrt{3}$ m. $A_{total} = 4\sqrt{3}\ m^2$

18. Uma pirâmide regular hexagonal tem perímetro da base medindo 12 cm. Calcule sua área lateral, sabendo que o apótema da pirâmide mede 4 cm . $A_{lateral} = 24\ m^2$

19. Determine a área total de um tetraedro regular de aresta **a**, sabendo que seu apótema é $p = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $A_{total} = a^2\sqrt{3}$



20. Uma pirâmide hexagonal regular tem apótema medindo 3 m e a aresta da base mede 2 m. Calcule a sua área lateral. $A_{lateral} = 18\ cm^2$

21. O apótema de uma pirâmide quadrangular regular mede 10 cm e a aresta da base mede 12 cm. Calcule a área lateral e a área total dessa pirâmide. $A_{lateral} = 240\ cm^2$ $A_{total} = 384\ cm^2$

22. Uma pirâmide quadrangular regular e reta tem altura de cada face medindo 12 cm e, como base, um quadrado de lado 6 cm.

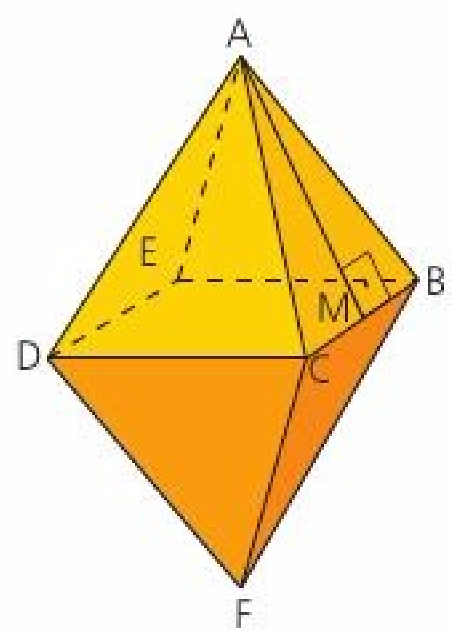
Calcule:

a) A área lateral da pirâmide. $A_{lateral} = 144\ cm^2$

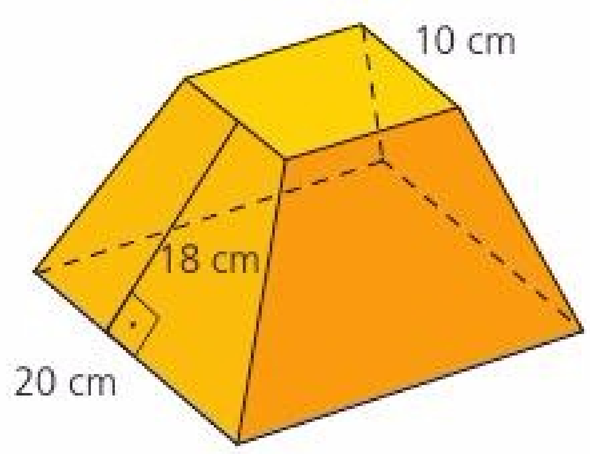
b) A área total da pirâmide. $A_{total} = 180\ cm^2$

Interpretar texto

23. Quantos cm2 de papel foram gastos para revestir o enfeite de festa junina na forma de um balão, representado pela figura a seguir, formada por duas pirâmides quadrangulares superpostas, com bases de lado medindo 40 cm, sabendo que a medida da altura de uma das faces é $\overline{AM} = 50$ cm. 8 000 cm^2



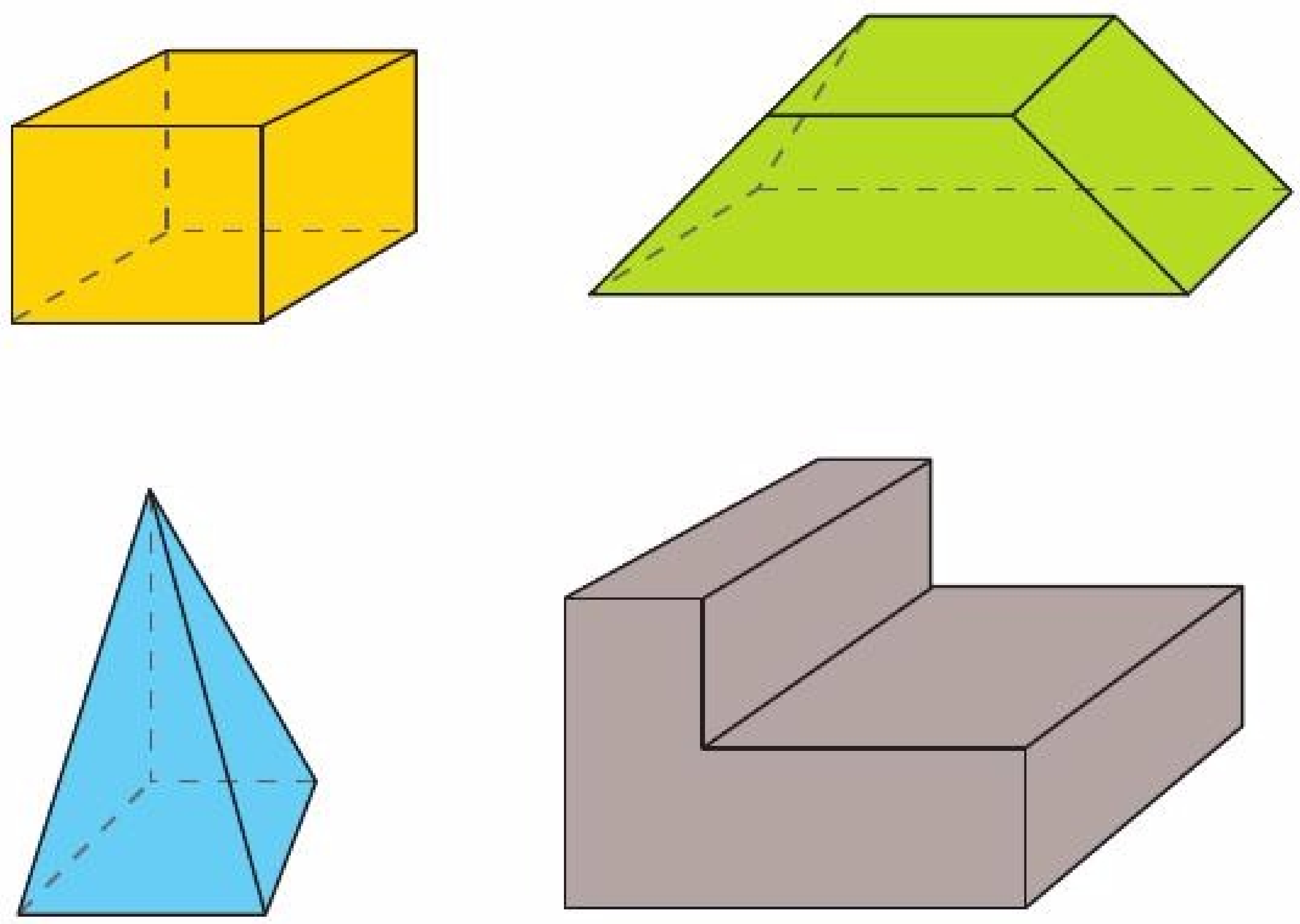
24. Qual é a área total do tronco de pirâmide abaixo, sabendo que as duas bases são quadradas e que os trapézios das faces têm 18 cm de altura. 1 580 cm^2



Área da superfície de sólidos geométricos

Entre os diversos tipos de sólidos geométricos, vamos estudar apenas alguns tipos particulares.

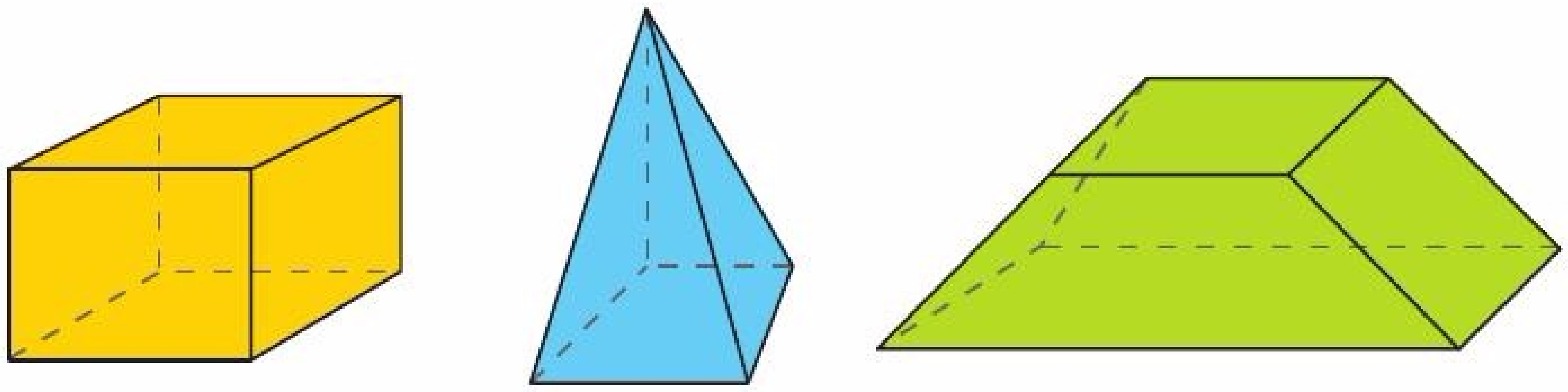
Chamamos de **poliedro** o sólido limitado por quatro ou mais polígonos, pertencentes a planos diferentes e que têm, dois a dois, somente um lado, ou aresta, em comum. Veja alguns exemplos:



Os polígonos são as faces do poliedro; os lados e os vértices dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro.

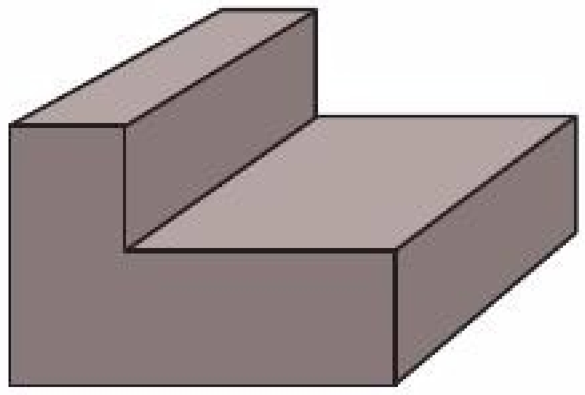
Poliedros convexos e côncavos

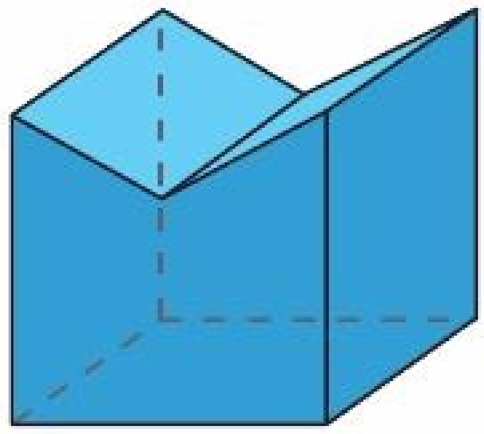
Observe os três primeiros poliedros que demos como exemplo:



Note que, se tomarmos qualquer uma de suas faces, todas as outras estarão numa mesma região do espaço. Poliedros que têm essa característica são chamados **poliedros convexos**.

Outros poliedros, como os dois exemplos a seguir, não têm a mesma características dos convexos. Apresentam concavidades que fazem com que sejam denominados **poliedros côncavos**.

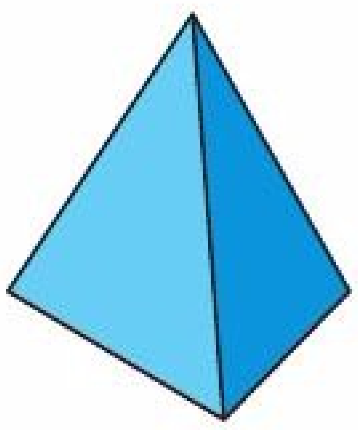




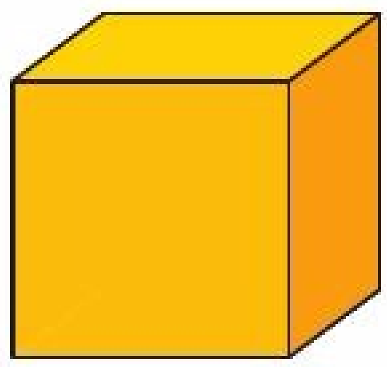
Em nosso curso vamos estudar apenas as características e os elementos dos poliedros convexos.

Classificação

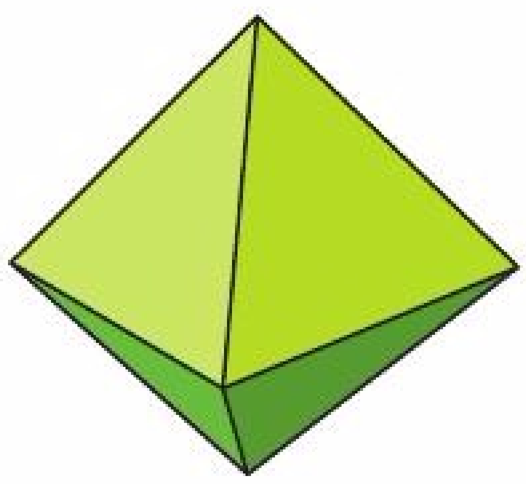
Os poliedros convexos recebem nomes especiais de acordo com o número de faces, por exemplo:



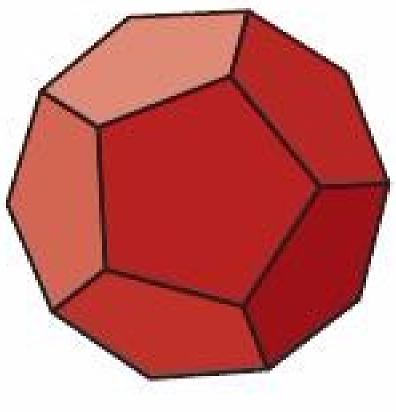
tetraedro
4 faces



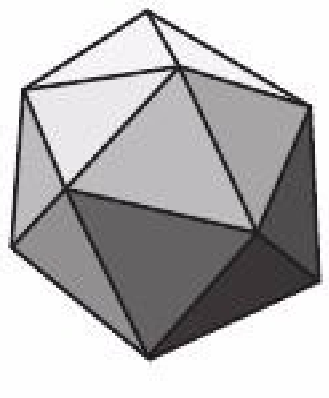
hexaedro
6 faces



octaedro
8 faces



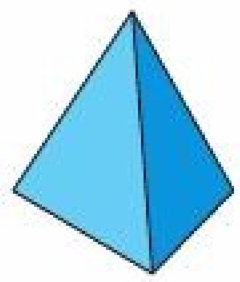
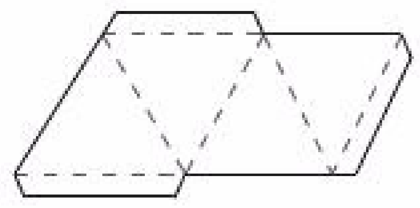
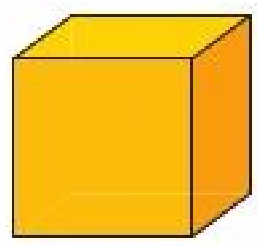
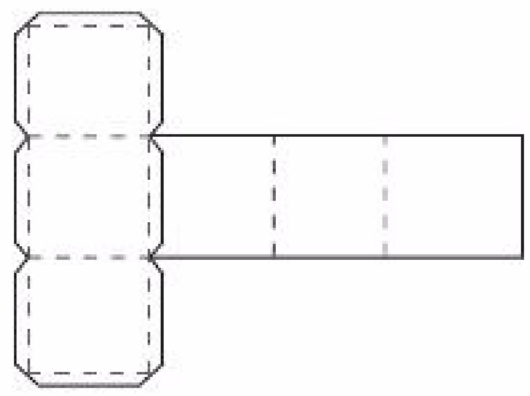
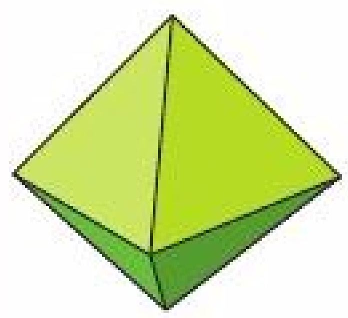
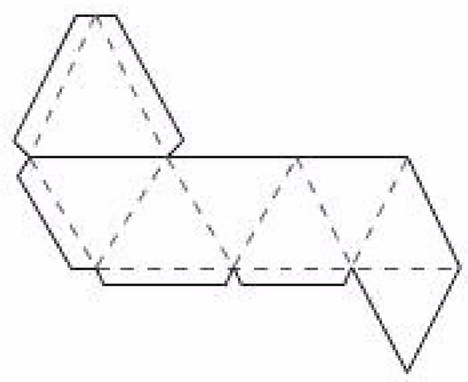
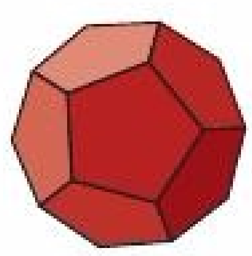
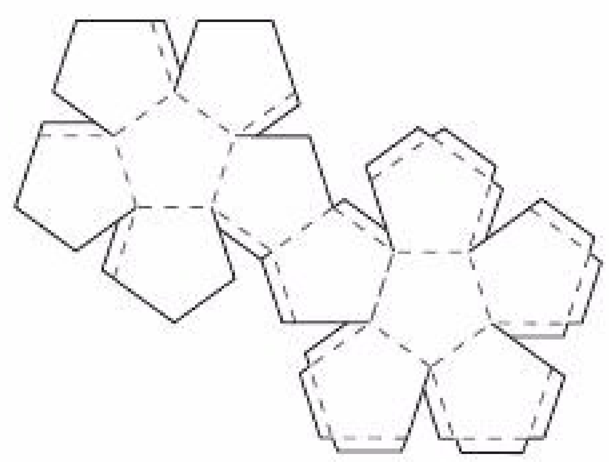
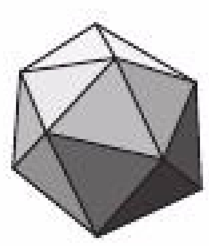
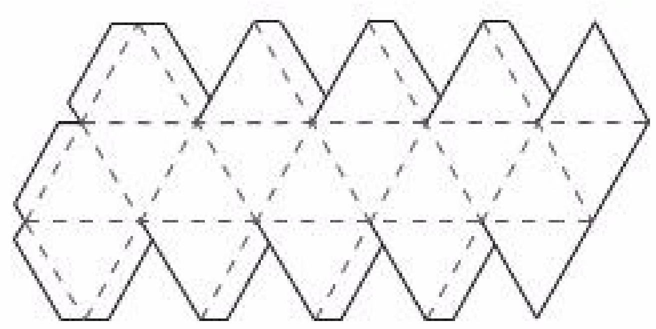
dodecaedro
12 faces



icosaedro
20 faces

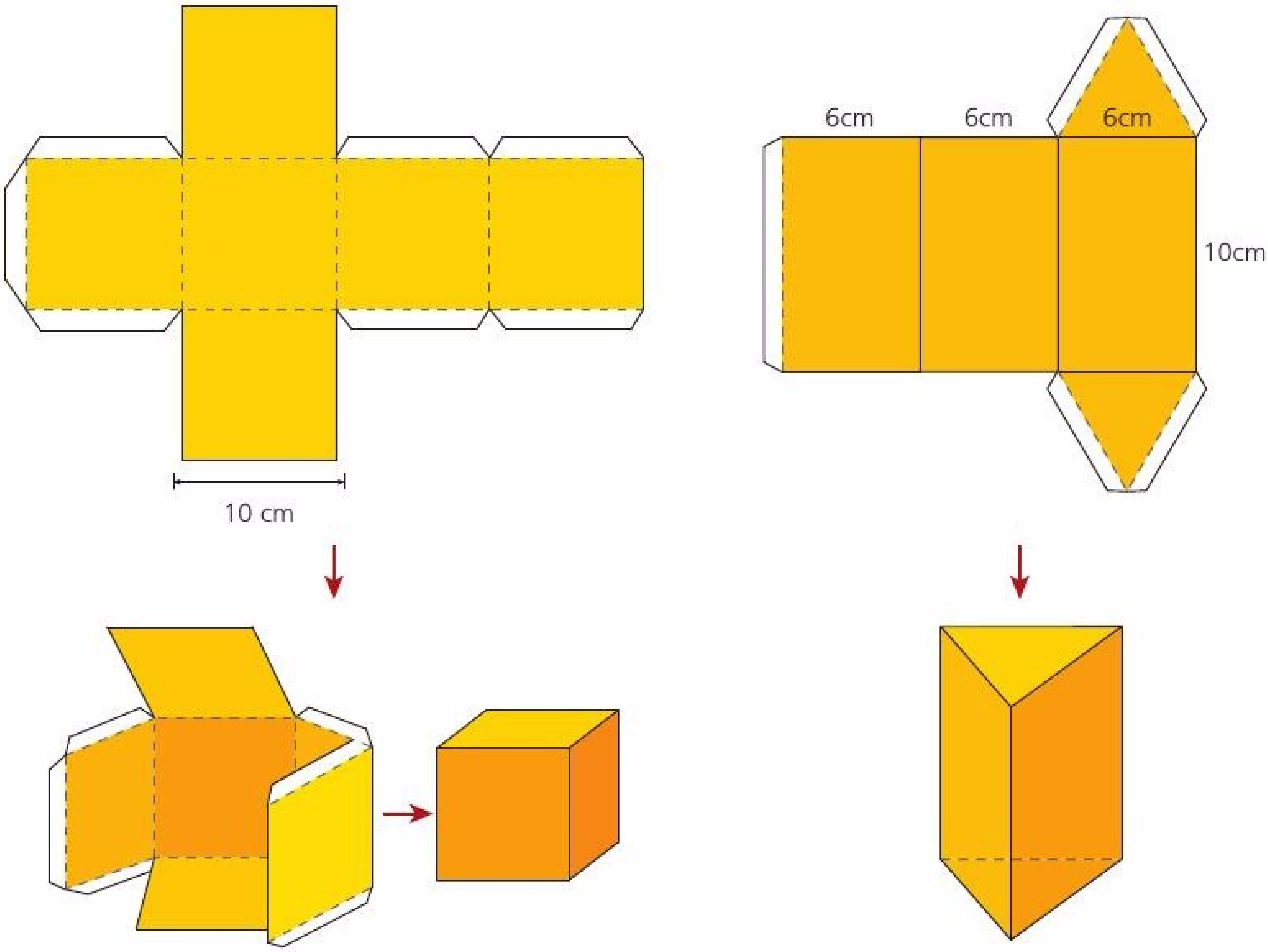
Discuta com seus alunos a planificação de cada poliedro.

Quando todas as faces de um poliedro convexo forem polígonos regulares e congruentes (mesmas medidas dos lados) e, em todos os vértices tivermos a convergência de um mesmo número de arestas, ele será chamado **poliedro regular**. Veja a planificação de alguns poliedros.

Poliedro	Planificação	Elementos
 Tetraedro		4 faces triangulares
 Hexaedro		6 faces qradrangulares
 Octaedro		8 faces triangulares
 Dodecaedro		12 faces pentagonais
 Icosaedro		20 faces triangulares

Na prática

A partir das planificações, você vai construir um hexaedro regular (cubo) e um prisma reto triangular regular. Para isso, você necessitará de uma folha de papel cartão ou cartolina, régua, lápis, tesoura e cola. Siga as instruções das figuras.



Atividades

25. Considere as planificações dos poliedros demonstradas na tabela apresentada anteriormente e responda:

a) Quantos vértices tem cada um dos cinco poliedros a seguir: * 4 vértices * 8 * 6 * 20 * 12

- tetraedro
- hexaedro
- octaedro
- dodecaedro
- icosaedro

b) Quantas arestas tem cada um dos cinco poliedros a seguir: * 6 arestas * 12 * 12 * 30 * 20

- tetraedro
- dodecaedro
- hexaedro
- icosaedro
- octaedro

Esboce as figuras no quadro

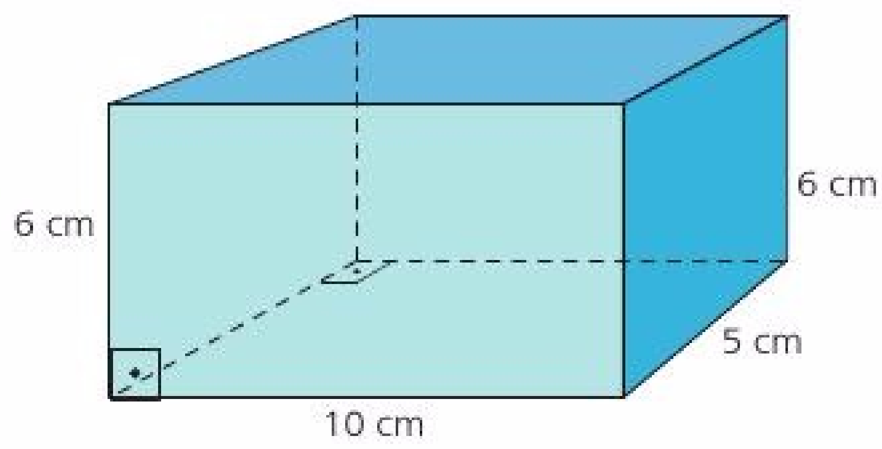
26. Qual a área total da superfície do cubo com 10 cm de aresta? 600 cm²

27. Se colocarmos sobre um cubo de aresta 5 cm um outro cubo igual, qual será a área total do sólido formado? 250 cm²

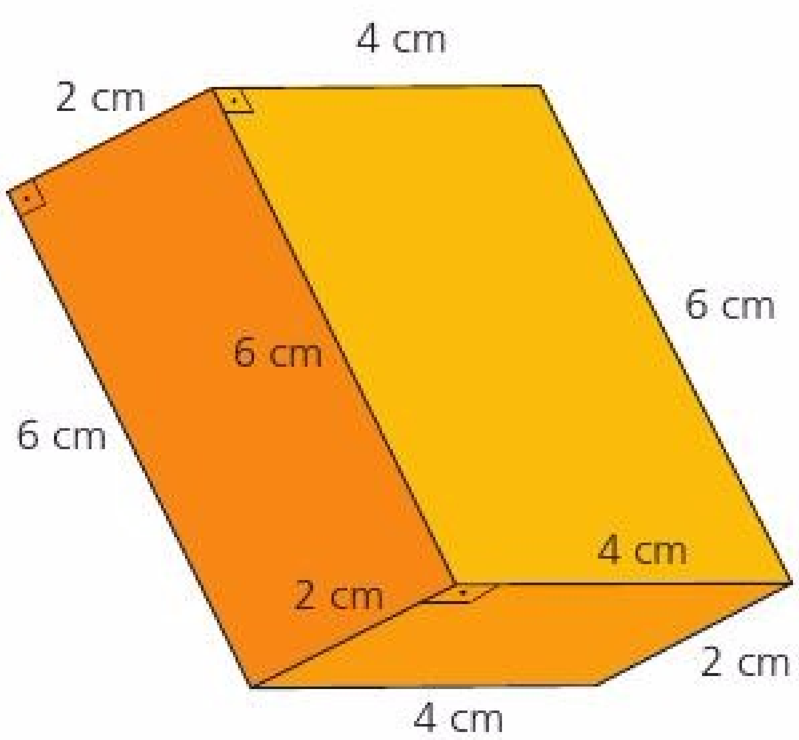
Para estudar

28. Calcule a área total de cada figura a seguir:

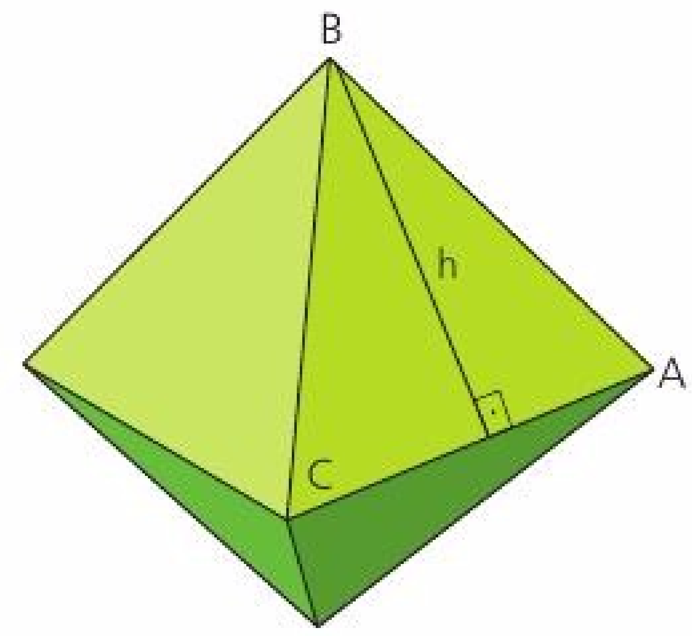
a)



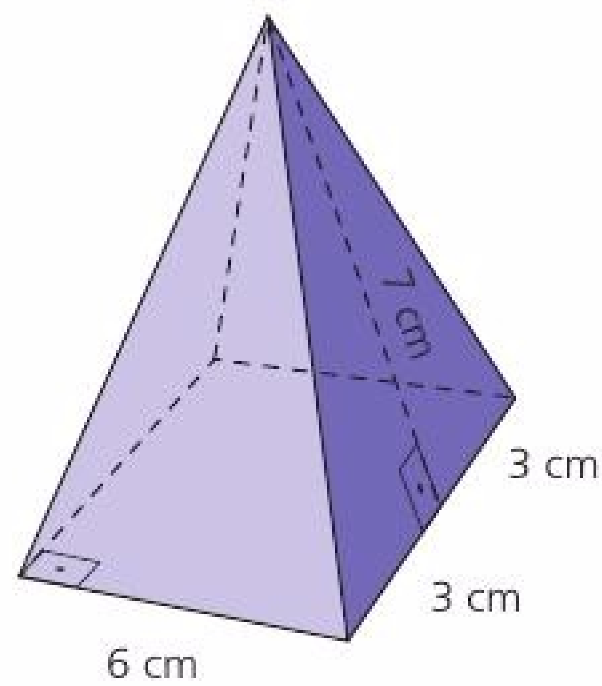
b)



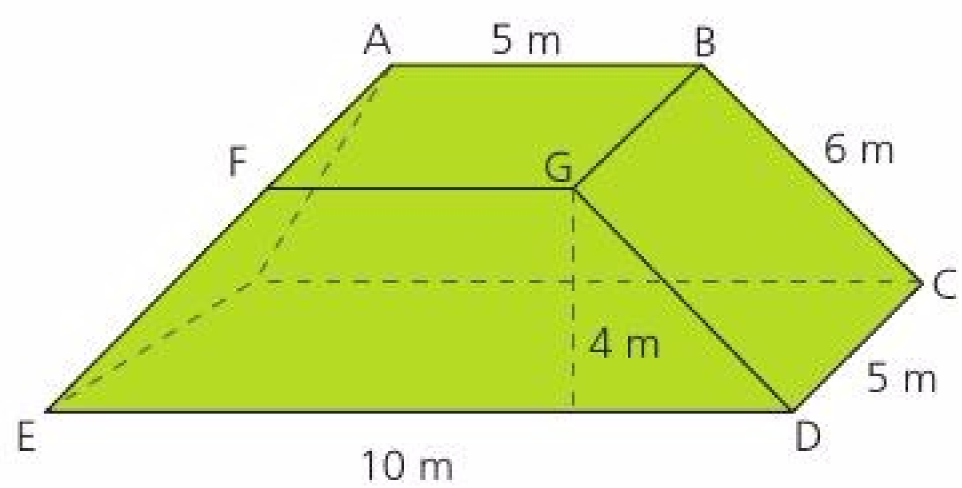
c) A figura mostra um octaedro cuja as faces são triângulos isósceles congruentes a ABC, no qual $\overline{AC} = 4$ cm e $h = 3{,}4$ cm.



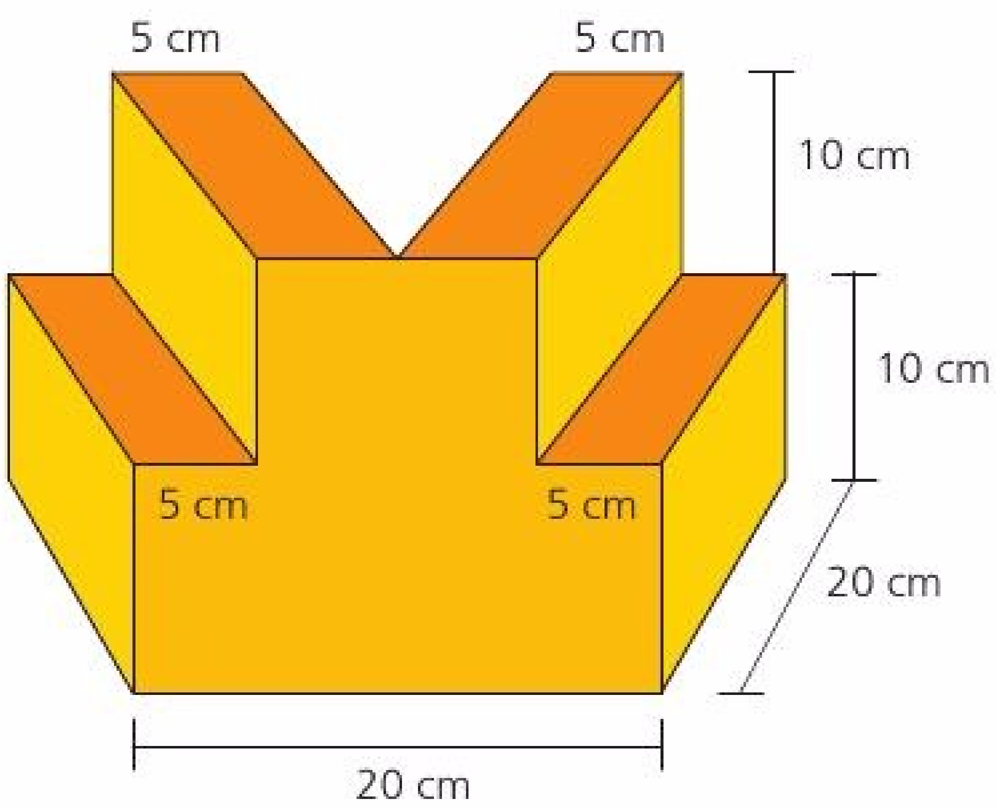
d)



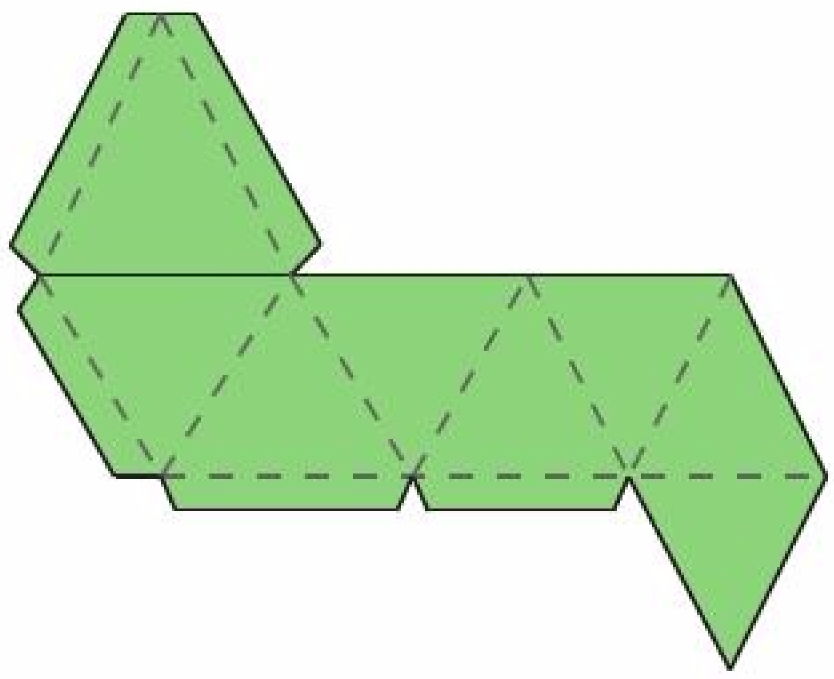
29. No sólido abaixo, ABGF é um retângulo, BGDC é um retângulo e FGDE é um trapézio isósceles de bases 10 m e 5 m e altura 4 m. Calcule a área total do sólido sabendo que a base e o topo estão em planos paralelos.

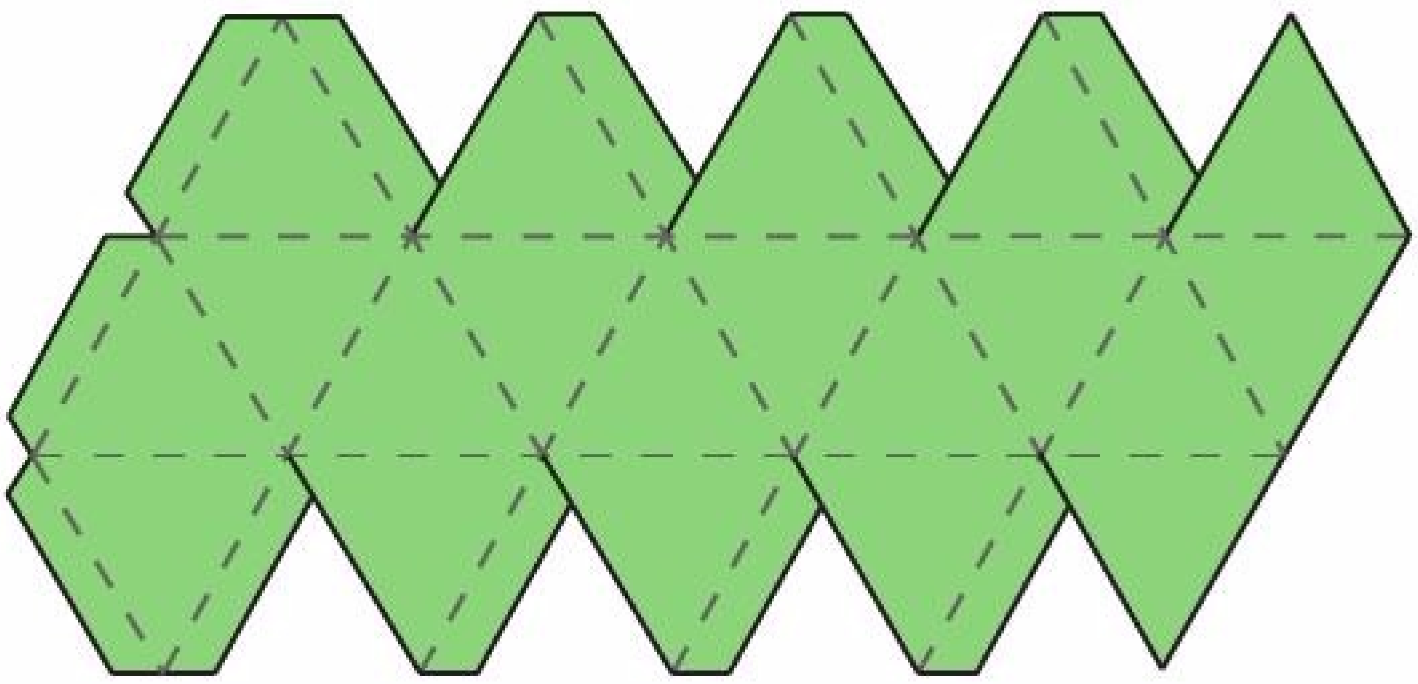


30. Calcule a área lateral do sólido abaixo, considerando que todas as arestas verticais são perpendiculares às horizontais.



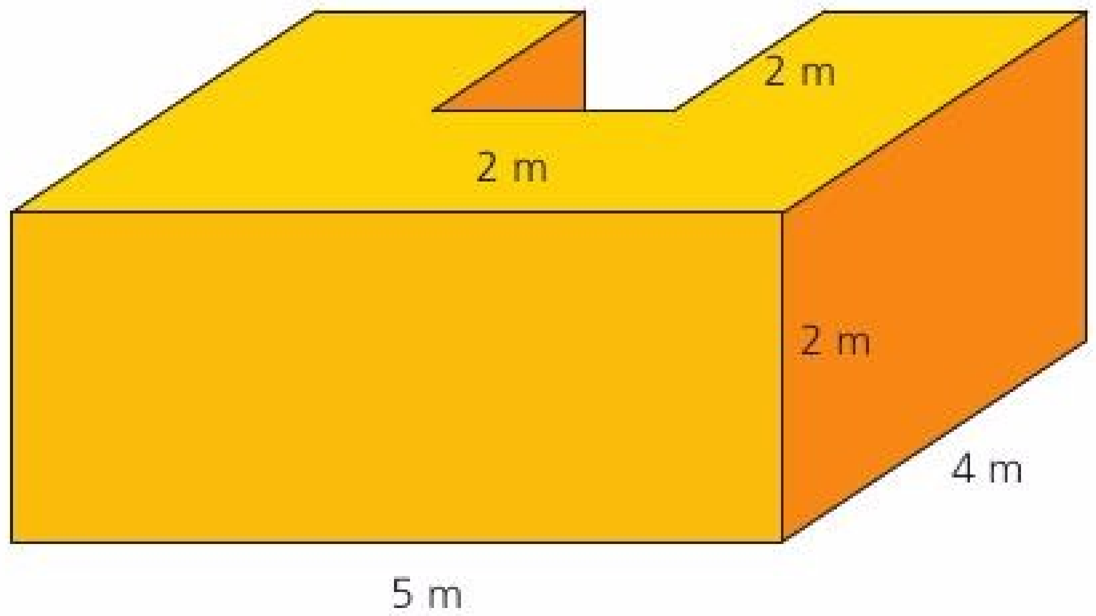
31. Considere as seguintes planificações de um octaedro e um icosaedro:





Quantas vezes a área total do icosaedro é maior que a do octaedro se a aresta deste último for igual à do primeiro?

32. A figura ao lado mostra um paralelepípedo do qual foi retirado um cubo de aresta 2 m, formando, assim um sólido em forma de U. Calcule a área de sua superfície.

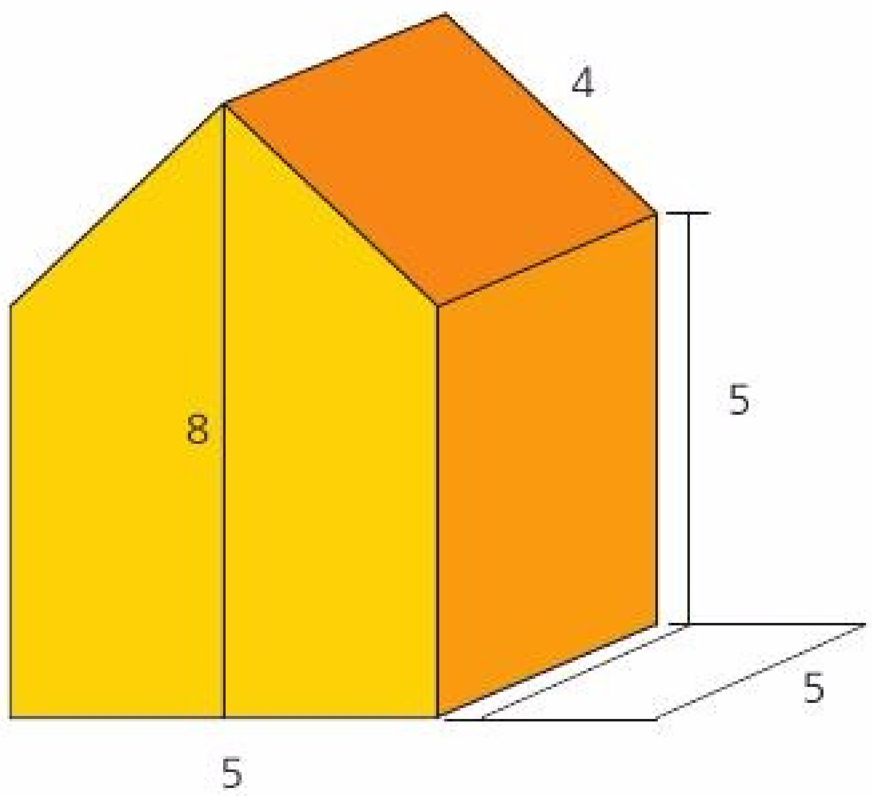


33. Considerando o sólido da atividade anterior qual é a área total do sólido que se formará se colocarmos o sólido em **U** sobre um outro idêntico, coincidindo a abertura do **U**.

34. Considere um hexaedro de aresta e área total igual a 36 cm^2. Qual será a nova área total do hexaedro se:

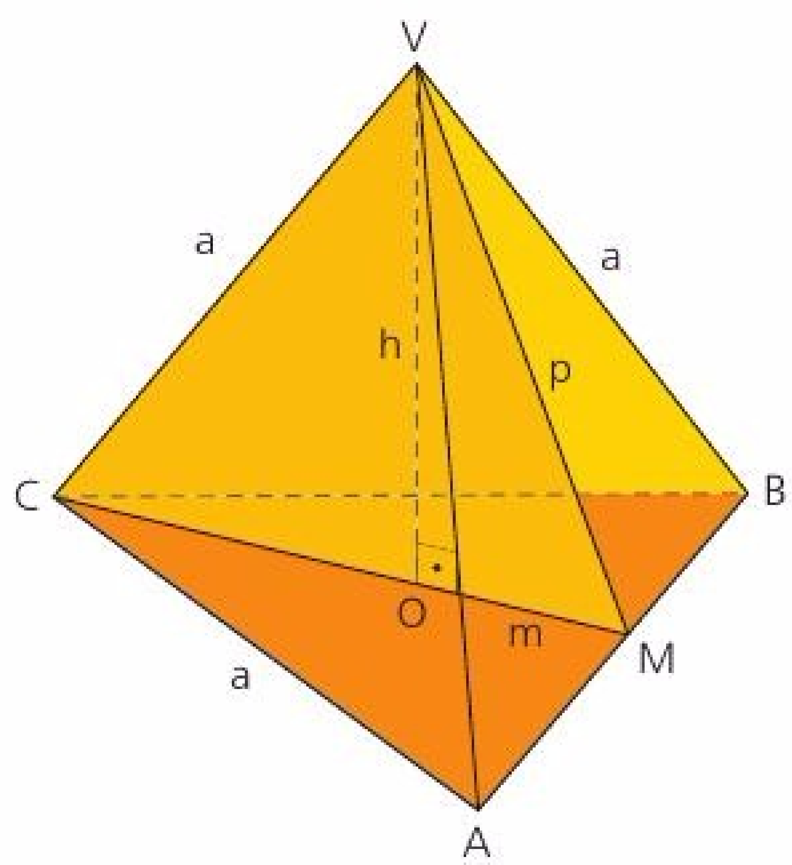
a) A aresta duplicar.
b) A aresta triplicar.

35. Calcule a área total do sólido abaixo. As medidas estão em metros.

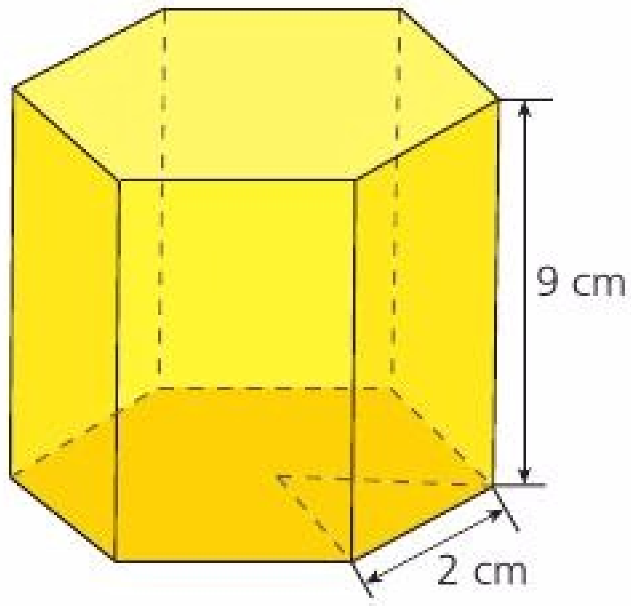


36. Sabendo que o apótema **p** de um tetraedro é $p = \sqrt{3}$ cm e que a aresta da base é igual a 2 cm. Determine:

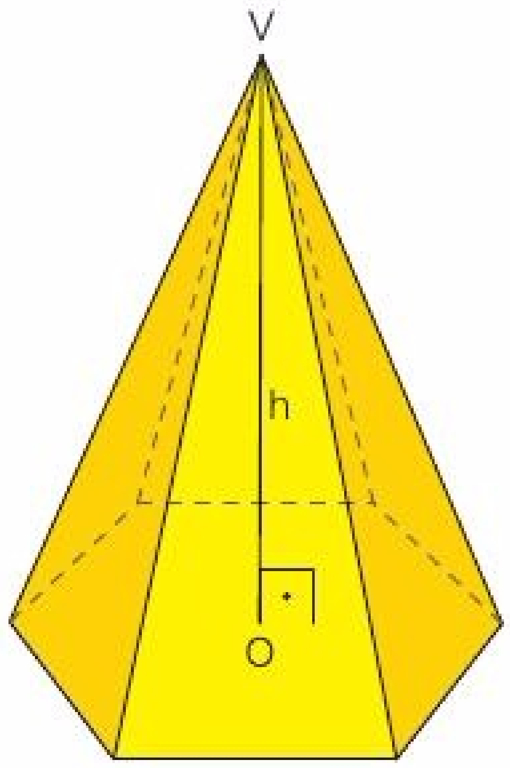
a) A área de uma face do tetraedro.
b) A área total do tetraedro



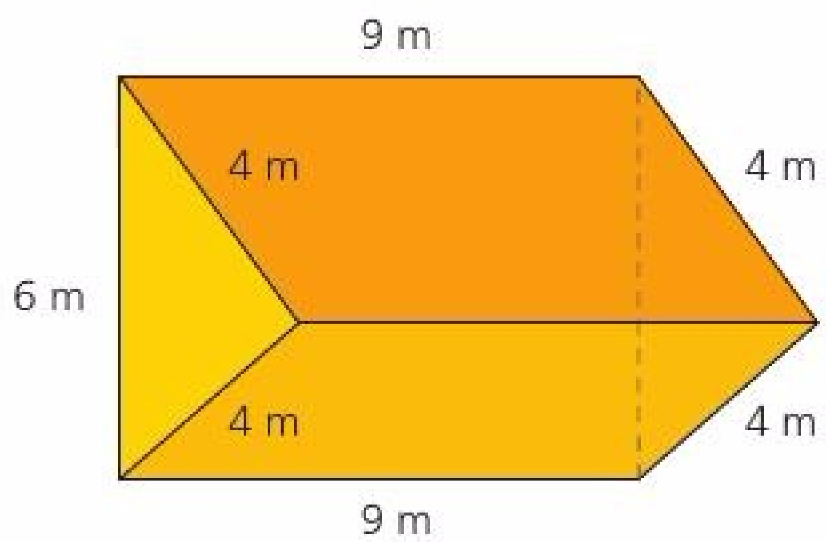
37. Determine a área lateral do prisma da figura:



38. Calcule a área lateral de uma pirâmide hexagonal regular com aresta da base igual 6 cm e apótema igual $3\sqrt{3}$ cm.



39. A figura abaixo representa o telhado de uma casa.

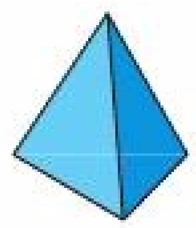
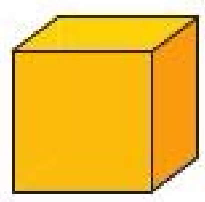
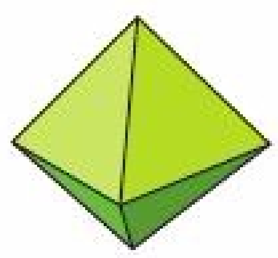
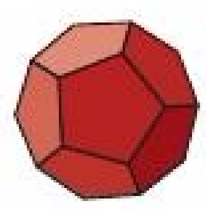
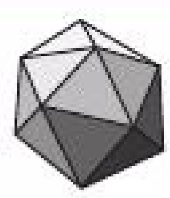


O dono da casa precisa resolver um problema de goteiras e quer forrar todo o telhado. Quantos metros de plástico deve comprar se esse tipo de material é vendido em um rolo de 2 m de largura?

40. Os cinco poliedros regulares que estudamos estão representados abaixo. Ao lado de cada um há a quantidade de vértices e de faces do poliedro. Existe uma relação entre o número de vértices **V**, o número de faces **F** e o número de arestas **A** para esses poliedros:

$$A + 2 = V + F$$

Calcule o número de arestas de cada poliedro

Poliedro	Elementos
 Tetraedro	F = 4 V = 4
 Hexaedro	F = 6 V = 8
 Octaedro	F = 8 V = 6
 Dodecaedro	F = 12 V = 20
 Icosaedro	F = 20 V = 12

Resolução das atividades

1. $A = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90\ cm^2$

2. $A_{lateral} = 4a^2$

$A_{base} = a^2$

$A_{total} = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$

$V = a^3$

3. $A_{lateral} = 6 \cdot 3 \cdot 6 = 90\ cm^2$

4. $A_{lateral} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27\ cm^2$

5. $180 = 5 \cdot 2 \cdot h \rightarrow h = 18\ cm$

6. $A_{lateral} = 24\ cm^2$

$A_{base} = 6\ cm$

$A_{total} = 2 \cdot 6 + 24 = 36\ cm^2$

7. $A_{face} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 1}{2}$

$A_{face} = 22\ m^2$

8. $A_{lateral} = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 144\ cm^2$

9. $A_{total} = 6a^2 = 54\ cm^2$

$A_{total_1} = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2$

$A_{total_1} = 6 \cdot 2a^2 = 261\ cm^2$

10. $A_{total} = 2 \cdot 6 \cdot 14 + 2 \cdot 6 \cdot 20 + 2 \cdot 14 \cdot 20$

$A_{total} = 168 + 240 + 560 = 968\ cm^2$

11. $A_{total} = 2 \cdot 80 \cdot 18 + 36 \cdot 80 + 2 \cdot 20 \cdot 18 +$
$+ 2 \cdot 20 \cdot 36 + 20 \cdot 80$

$A_{total} = 2\,280 + 2\,880 + 720 + 1\,440 + 1\,600 =$
$= 9\,520\ cm^2$

12. $A_{lateral} = 180\ cm^2$

13. $760\ cm^2$

14. $A = 2 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}7 = 2 \cdot 3{,}2 \cdot 2{,}7 -$
$- 2 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}8 - 1{,}2$

$A = 24{,}3 + 17{,}28 - 2{,}52 - 2$

$A = 37{,}06\ m^2$

15. $2 \cdot \frac{(4 + 2) \cdot 3}{2} + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 3 \cdot 12$

$A = 162\ cm^2$

16. $A_{lateral} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \rightarrow A_{lateral} = 60\ m^2$

$A_{total} = 60 + 6 \cdot 6 \rightarrow A_{total} = 96\ m^2$

17. $A_{total} = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow A_{total} = 4\sqrt{3}\ m^2$

18. base hexagonal $\rightarrow$ aresta da base $= \frac{12}{2} = 2$ cm

$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \rightarrow A_{lateral} = 24\ m^2$

19. $A_{total} = \dfrac{6 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \rightarrow A_{total} = a^2\sqrt{3}$

20. $A_{lateral} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \rightarrow A_{lateral} = 18\ cm^2$

21. $A_{total} = 4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} \rightarrow A_{total} = 240\ cm^2$

$A_{total} = 240 + 144 \rightarrow A_{total} = 384\ cm^2$

22. a) $A_{lateral} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 12}{2} \rightarrow A_{lateral} = 144\ cm^2$

b) $A_{total} = 144 + 36 \rightarrow A_{total} = 180\ cm^2$

23. $A = \frac{40 \cdot 50}{2} \rightarrow A = 8\,000\ cm^2$

24. $A = 4 \cdot \frac{20 \cdot 10}{2} \cdot 18 + 100 + 400$

$A = 1\,580\ cm^2$

25. a) * 4 vertices
* 8
* 6
* 20
* 12

b) * 6 arestas
* 12
* 12
* 30

26. $A_t = 6 \cdot 10 \cdot 10 \rightarrow A_t = 600\ cm^2$

27. $A_t = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow A_t = 250\ cm^2$

Respostas da seção Para estudar

28. a) $280\ cm^2$
b) $88\ cm^2$
c) $54{,}4\ cm^2$
d) $120\ cm^2$

29. $195\ m^2$

30. $2\,600\ cm^2$

31. 2,5 vezes

32. $96\ m^2$

33. $192\ m^2$

34. a) $144\ cm^2$
b) $324\ cm^2$

35. $200\ m^2$

36. a) $\sqrt{3}\ cm^2$
b) $4\sqrt{3}\ cm2$

37. $162\ cm^2$

38. $54\sqrt{3}\ cm^2$

39. 36 m

40. tetraedro → A = 6
hexaedro → A = 12
octaedro → A = 12
dodecaedro → A = 30
icosaedro → A = 30

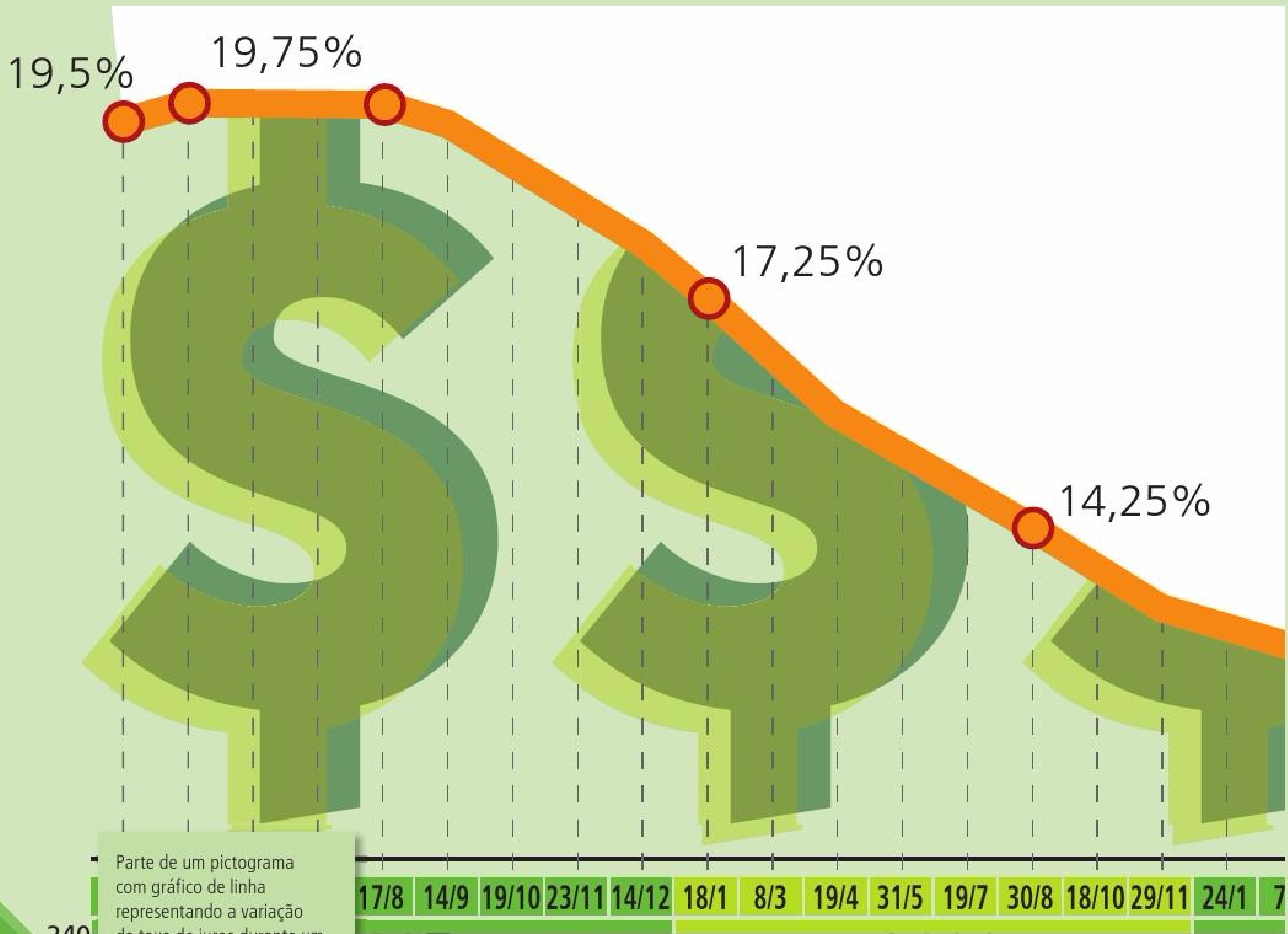
meunierd/Shutterstock

As Geodésicas são grandes estruturas, em geral metálicas, formadas por figuras planas que compõem suas faces. A Geodésica da figura foi construída em Montreal, Canadá num parque ecológico dedicado à preservação da água em nosso planeta. Montreal, Canadá, 2014.

capítulo 11

Gráficos de linha

- Plano cartesiano
- Gráficos de linha



Parte de um pictograma com gráfico de linha representando a variação da taxa de juros durante um determinado período.

Conversa Inicial

Provavelmente você já teve algum tipo de contato com a linguagem gráfica. Já deve ter visto alguma coisa sobre gráficos de colunas ou de barras, gráficos de setores e os interessantes pictogramas que atualmente são utilizados em jornais, revistas e internet para representar as variações dos mais diversos tipos de levantamentos, fenômenos, pesquisas etc.

Atualmente, todas as áreas de trabalho utilizam gráficos para representar estudos sobre os mais diversos fenômenos. Gráficos são usados para avaliar a produção ou as vendas em um determinado período, o rendimento de um processo previamente planejado, os dados coletados em um censo demográfico ou mesmo numa pesquisa médica.

Entre as formas de expressão por meio de gráficos, os mais utilizados são os de linha.

VARIAÇÃO DA TEMPERATURA MÉDIA NA SUPERFÍCIE DA TERRA NO SÉCULO XX

Fonte: Adaptado de: ONU – PNUMA 2009.

O gráfico de linhas mostra intervalos em que houve crescimento ou decrescimento de uma das variáveis que representa.

Mais do que registrar e apresentar valores, os gráficos de linha são especialmente úteis por traduzirem o comportamento das variáveis envolvidas, mostrando sua evolução em termos de crescimento ou decrescimento.

Nem sempre o gráfico de linha é recomendado. Em situações nas quais uma das variáveis não é contínua, ou quando o que nos interessa é a percepção do significado das partes que compõem um fenômeno, devemos utilizar, respectivamente, gráficos de colunas ou de setores.

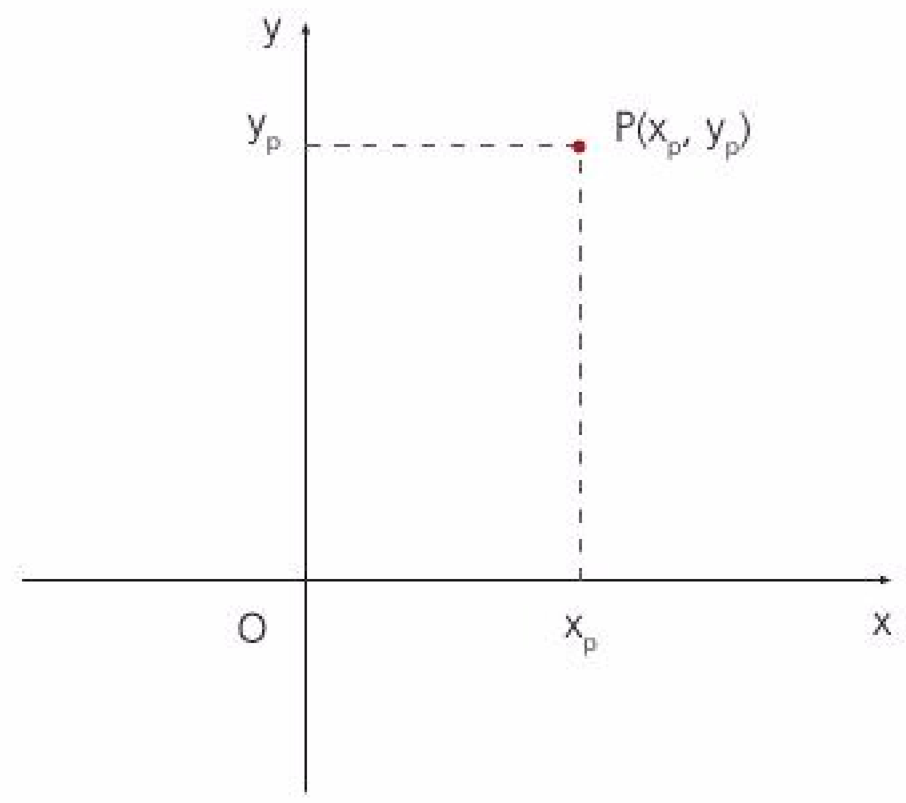
Os gráficos de linha têm grande utilidade quando precisamos "enxergar" a evolução de uma variável em função da outra, ou seja, a relação de crescimento ou decrescimento existente entre as variáveis envolvidas em um fenômeno.

Plano cartesiano

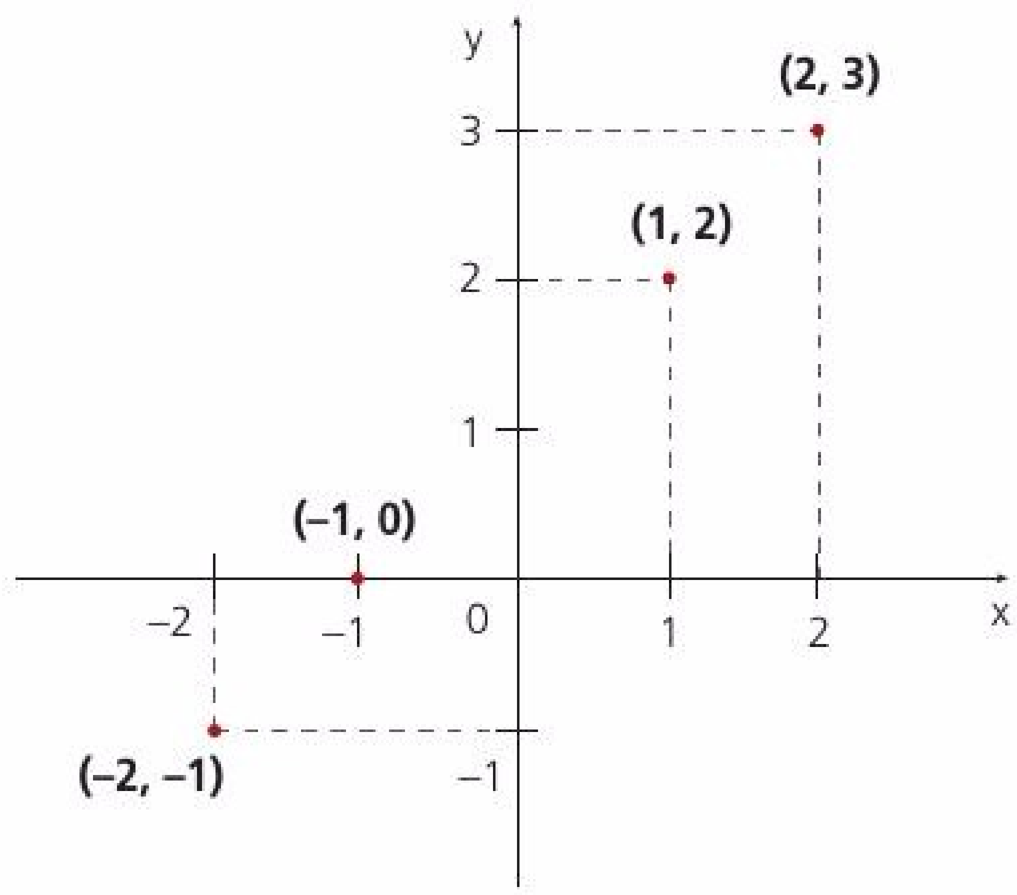
Chamamos plano cartesiano ao plano formado por todos os pontos que podemos representar por meio da associação de dois valores. O primeiro indica um valor no eixo horizontal, que chamaremos de eixo **Ox**. O segundo indica um valor no eixo **Oy**, **perpendicular a Ox** no ponto de valor zero.

Dessa maneira, um ponto **P** qualquer é definido pelo cruzamento das perpendiculares aos eixos nos pontos x_p e y_p. O ponto **P** é, então, o ponto de coordenadas (x_p, y_p).

As coordenadas de um ponto fornecem a sua localização no plano cartesiano.



Veja alguns exemplos de marcação de pontos num plano cartesiano.



O plano cartesiano, com seu par de eixos perpendiculares, é adequado para o traçado de gráficos que relacionam duas variáveis, cada uma delas representada em um dos eixos.

Gráficos de linha

Nesse tipo de gráfico utiliza-se uma linha para representar a tendência de variação (crescimentos e decrescimentos) dos dados relativos a uma determinada informação.

Veja, por exemplo, o gráfico que mostra a evolução do desmatamento na região amazônica entre 1988 e 2013.

Fonte: Prodes/Inpe. Disponível em <www.obt.inpe.br/prodes/index.php>. Acesso em 9 mar 2015.

Neste gráfico, os anos estão representados no eixo horizontal e as áreas desmatadas no eixo vertical. Os pontos da linha do gráfico relacionam o ano com a área desmatada.

Discuta com a turma alguns dos pontos observados no gráfico.

Os gráficos de linha são recomendados para análises mais detalhadas de crescimento ou decrescimento das variáveis representadas. Para construí-los, a partir de uma tabela, procedemos da seguinte forma:

- Procuramos o menor e o maior valor da variável que analisamos. Marcamos esses valores sobre o eixo vertical, numa escala compatível.
- Em seguida, representamos no eixo horizontal a variável a partir da qual pretendemos analisar os valores representados no eixo vertical.
- Marcamos os pontos que correspondem ao cruzamento das paralelas aos eixos vertical e horizontal.
- Unimos os pontos obtido por meio de segmentos de retas ou, em alguns casos, ajustamos uma curva aos pontos marcados.

Acompanhe, agora, alguns exemplos de construção de gráficos de linha.

a) Uma Companhia de Teatro apresenta uma peça de terça-feira a domingo, folgando nas segundas-feiras. A tabela mostra a média de público presente em cada um dos dias da semana.

Semana	terça	quarta	quinta	sexta	sábado	domingo
Média diária de público	50	200	175	300	350	330

No eixo vertical, marcamos os valores com uma escala que nos permite um boa visualização do gráfico. Partimos do zero e marcamos intervalos de 50 pessoas, até o valor 400, um pouco maior que o maior valor da tabela.

No eixo horizontal marcamos os dias da semana.

Em seguida marcamos os pontos. Construímos o gráfico unindo esses pontos por meio de segmentos de reta.

Faça a leitura dos textos e dos gráficos. Construa no quadro de giz os gráficos propostos para relacioná-los com o tema abordado

b) Podemos, também, fazer em um mesmo gráfico a representação simultânea de duas ou mais variáveis. Veja, por exemplo, as medidas em pontos de audiência de dois canais de televisão que transmitem duas novelas diferentes no mesmo horário, tomadas durante seis meses consecutivos.

Mês	JAN/09	FEV/09	MAR/09	ABR/09	MAIO/09	JUN/09
Emissora A	7	10	19	25	35	38
Emissora B	4	7	14	20	27	33

A marcação dos pontos do gráfico se dá simultaneamente para cada um dos meses indicados para a tabela.

Temos assim, duas linhas no mesmo gráfico, o que permite comparação direta de valores, crescimentos e decrescimentos das duas variáveis representadas.

Veja que o gráfico que mostra a audiência das duas emissoras nos dá informações diretas como:

- A audiência das duas novelas foi crescente nos seis meses considerados.
- A maior diferença de audiência entre as duas emissoras ocorreu no mês de maio.

c) O número de acidentes aéreos registrados na aviação civil brasileira fechou 2012 com um novo recorde, segundo o Centro de Investigação e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos (CENIPA).

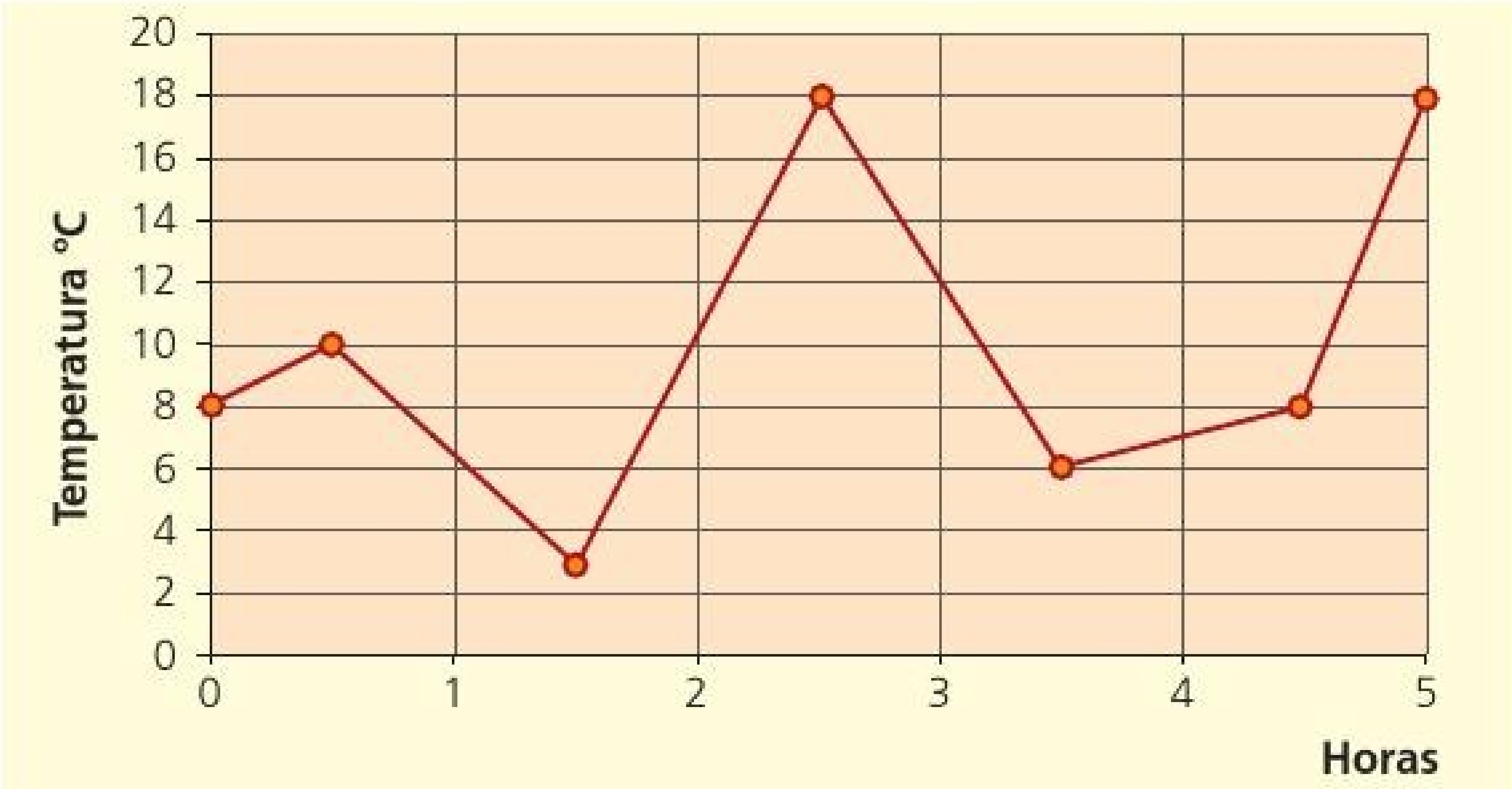
Foram 168 casos em comparação com 159 em 2 011 – um aumento de 5,6%. Dentre as 168 tragédias aéreas ocorridas em 2 012, 146 foram com avião (aumento de 10,6% em relação a 2 011) e outros 22 de helicóptero (redução de 15,5%). O gráfico a seguir apresenta o número de acidentes aéreos entre os anos de 2 002 e 2 012.

Fonte: CENIPA. Disponível em <www.pilotopolicial.com.br/brasil>. Acesso em 11 dez 2014.

Atividades

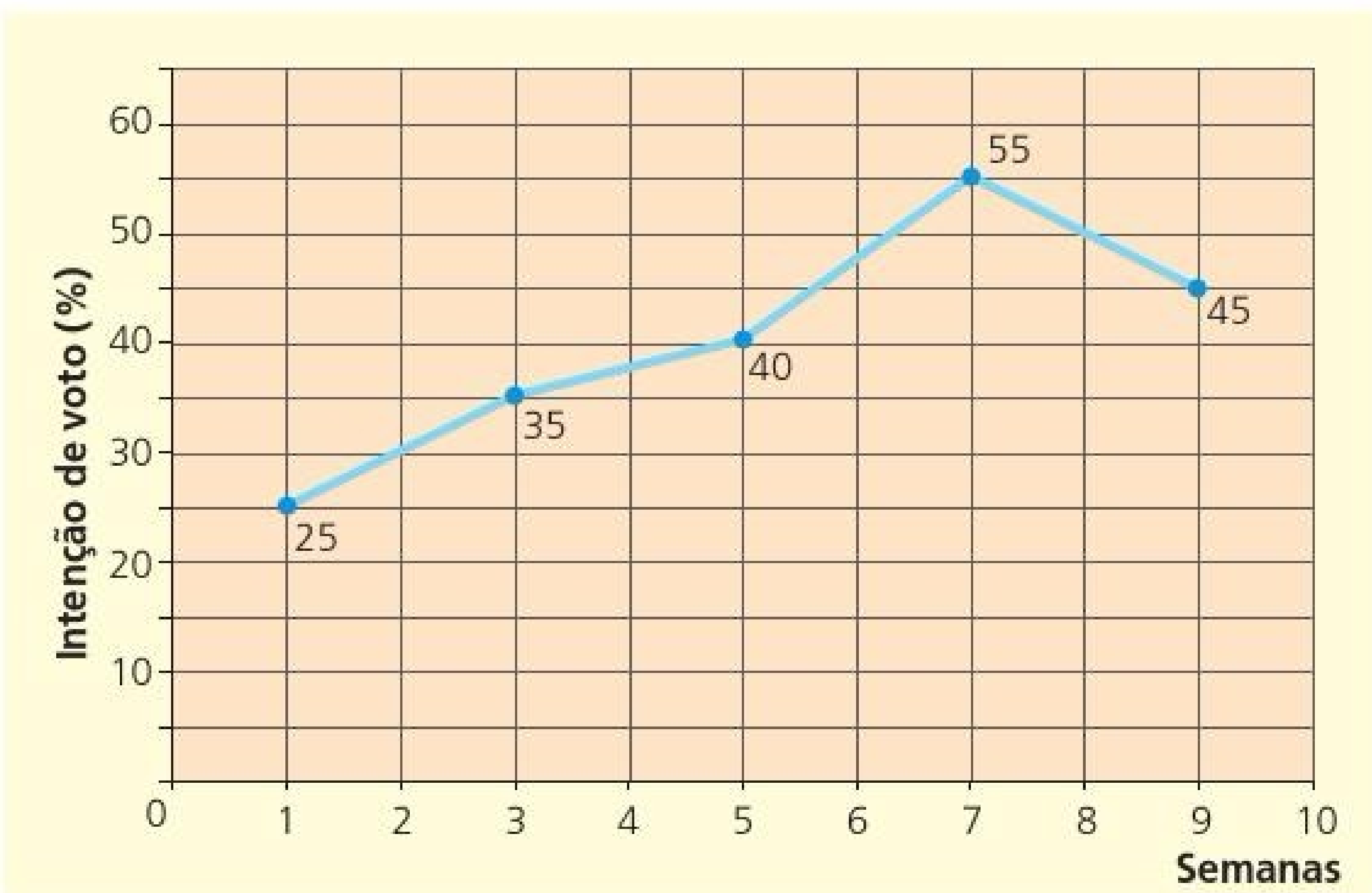
Faça algumas atividades no quadro de giz para verificar se o aluno está relacionando a leitura dos enunciados com a leitura de seus respectivos gráficos.

1. O gráfico a seguir indica a variação da temperatura de um corpo, medida em graus Celsius, numa experiência de laboratório que durou 5 horas.
Analise o gráfico e responda as perguntas.



a) Qual foi a menor temperatura atingida pelo corpo durante a experiência? 3ºC
b) Em que instante o corpo atingiu a menor temperatura? 1 h 30 min
c) Qual foi a maior temperatura que o corpo atingiu? 18ºC
d) Qual era a temperatura medida no início da experiência e qual a do final? inicio 8ºC final 18ºC
e) Qual a variação de temperatura sofrida pelo corpo durante todo o experimento? (Dica: considere as temperaturas inicial e final) 10ºC

2. Um instituto de pesquisas foi contratado para monitorar a evolução das intenções de votos de um candidato da eleição a governador, nas últimas 10 semanas antes do dia da votação de primeiro turno. O gráfico abaixo indica a evolução encontrada. Analise-o e responda as perguntas a seguir.



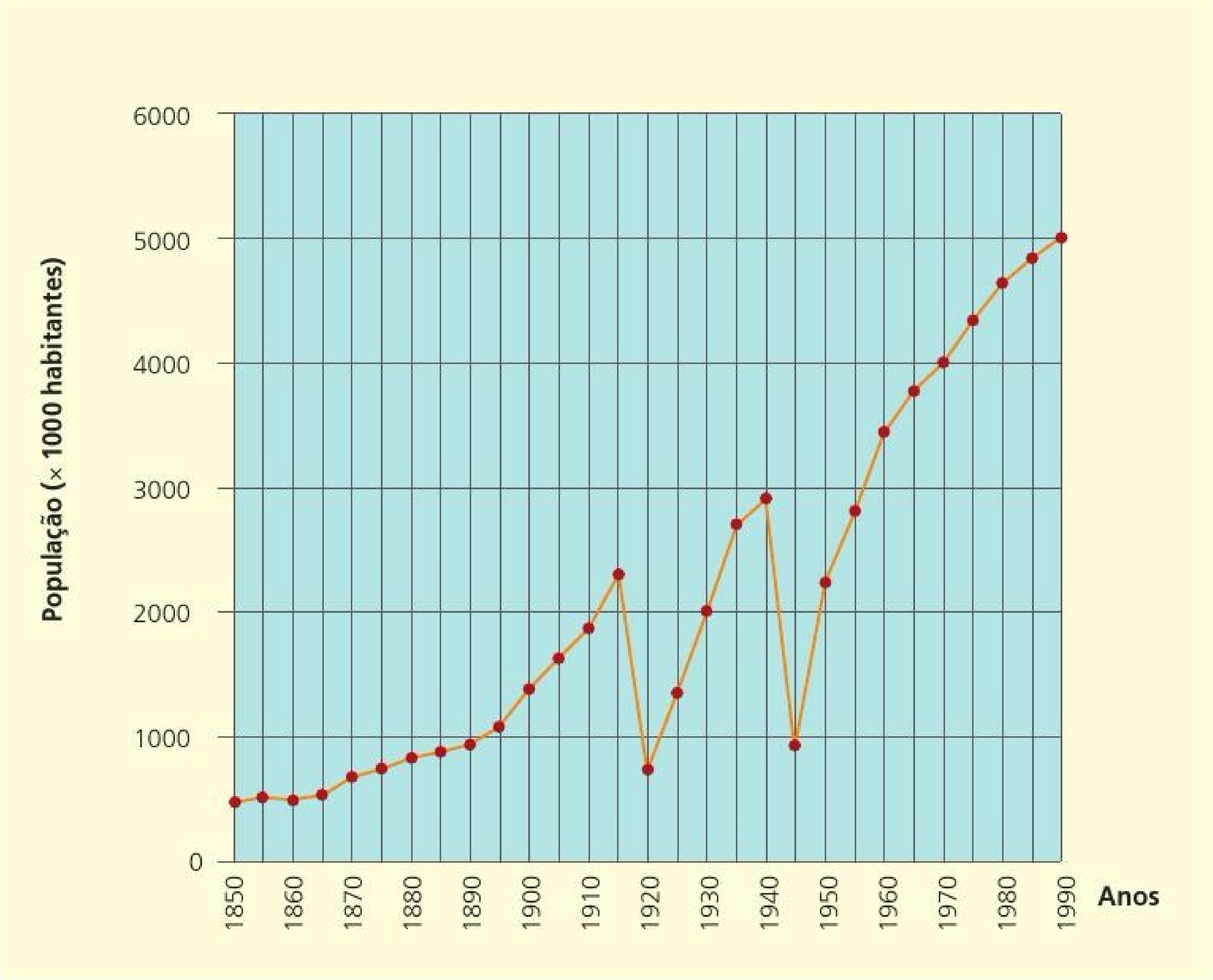
a) Qual foi o maior índice atingido pelo candidato no intervalo da pesquisa? 55%

b) Entre quais semanas houve o maior crescimento na intenção de voto no candidato? Qual foi esse crescimento? 7ª semana, crescimento de 15%

c) Qual era a porcentagem de intenção de votos do candidato na 9ª semana de pesquisa? E na 8ª semana? na 9ª semana 45% e na 8ª semana 50%

d) Entre a primeira semana e a nona, qual foi a evolução na intenção de votos no candidato? 20%

3. O gráfico indica a variação da população de uma cidade entre os anos de 1850 e 1990.



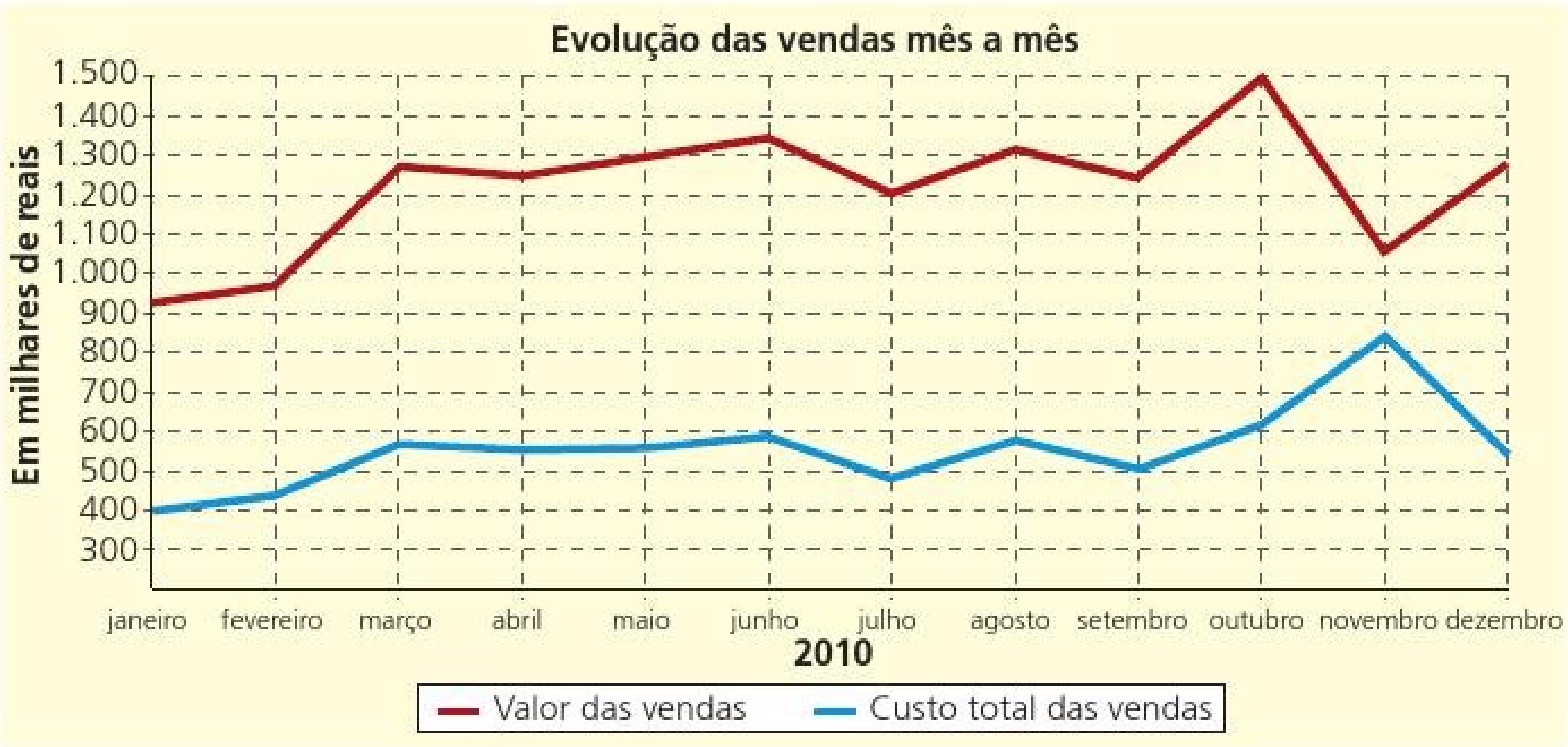
a) Identifique no gráfico o ano em que a cidade atingiu seu primeiro milhão de habitantes. 1895

b) Aproximadamente, quantos anos depois ela dobrou sua população? 20 anos

c) O gráfico indica dois períodos de acentuada queda populacional. Indique-os. 1920 e 1945

d) Faça um texto levantando hipóteses para a queda populacional mais recente que se observa no gráfico. Para isso, leve em consideração o que ocorria no mundo neste período. 1ª e 2ª Guerra Mundial

4. Numa loja de departamentos, foram medidas as vendas em reais e o custo total dessas vendas (incluindo custo dos artigos vendidos, salários, comissões, despesas da loja, impostos etc) mês a mês. Os valores foram lançados no gráfico a seguir.



d) Novembro
vendas R$ 1 050 000,00
custo R$ 850 000,00
lucro R$ 200 000,00

Analise o gráfico e responda:

a) Qual foi o mês de maior venda e qual o valor, em reais, desta venda? Outubro, R$ 1 500 000,00

b) Qual foi o custo da venda no mês de maior venda? R$ 600 000,00

c) Qual foi o lucro obtido (vendas – custo total das vendas) no mês de maior vendas? R$ 90 000,00

d) Qual foi o mês de menor lucro? Justifique.

e) Escrever um texto levantando hipóteses para o que ocorreu na loja no mês de menor lucro.
Reposição de estoque

5. Analise o gráfico que mostra o desmatamento da Amazônia em km² entre 2001 e 2009 e responda às questões.

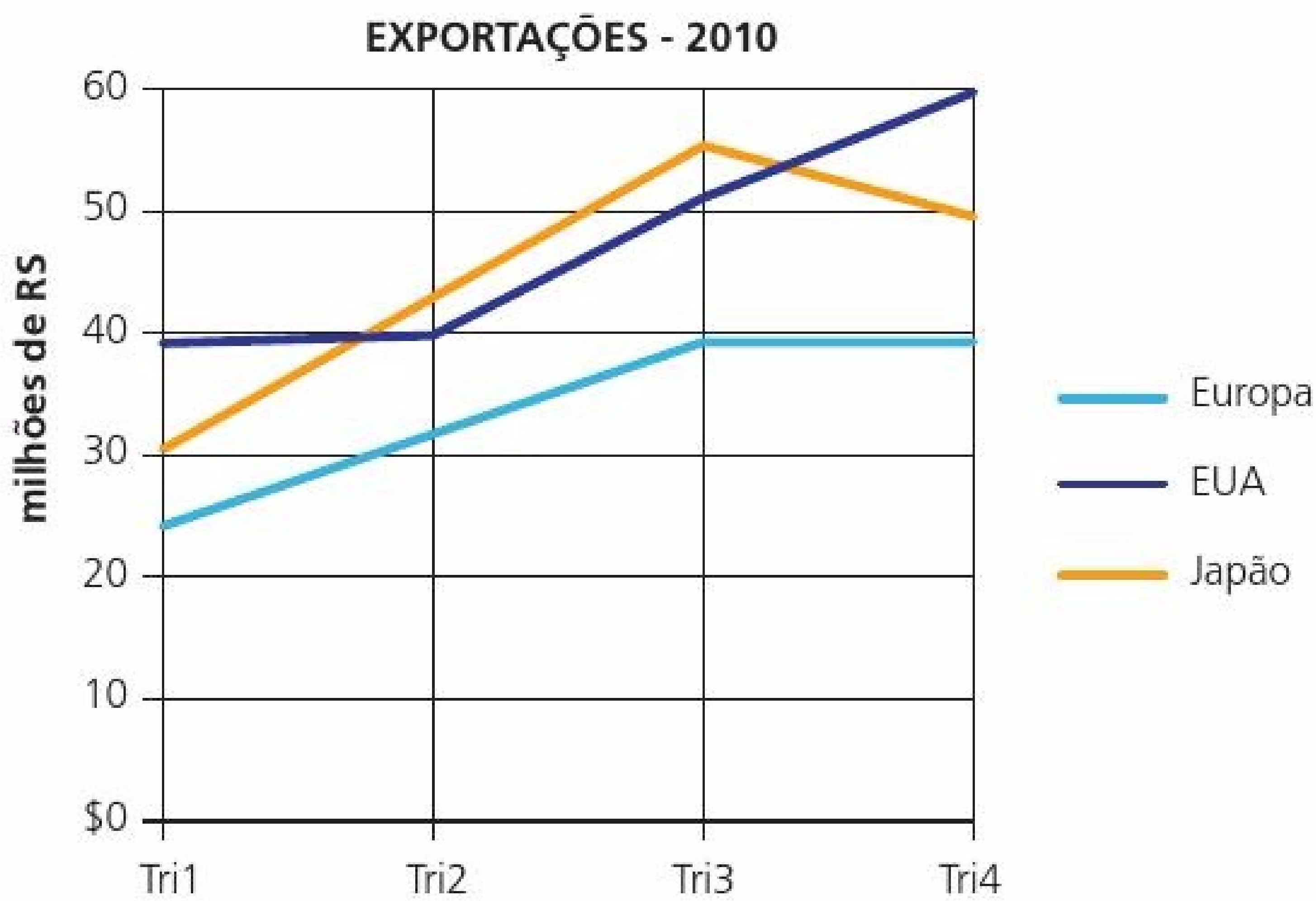
a) O que ocorreu com o desmatamento entre 2001 e 2004? Indique valores. aumentou de 18 165 km² para 27 423 km²

b) O que ocorreu entre 2004 e 2007? Indique valores. diminuiu de 27 423 km² para 11 532 km²

c) Qual é a variação entre o desmatamento verificado em 2001 e aquele indicado em 2009?
$7\,464 - 18\,165 = -10\,701$ km²

Para estudar

6. Uma empresa produz equipamentos que são exportados para diversos países europeus, para os Estados Unidos e para o Japão. Observe o gráfico com o faturamento das exportações no ano de 2010 dividido em trimestres.



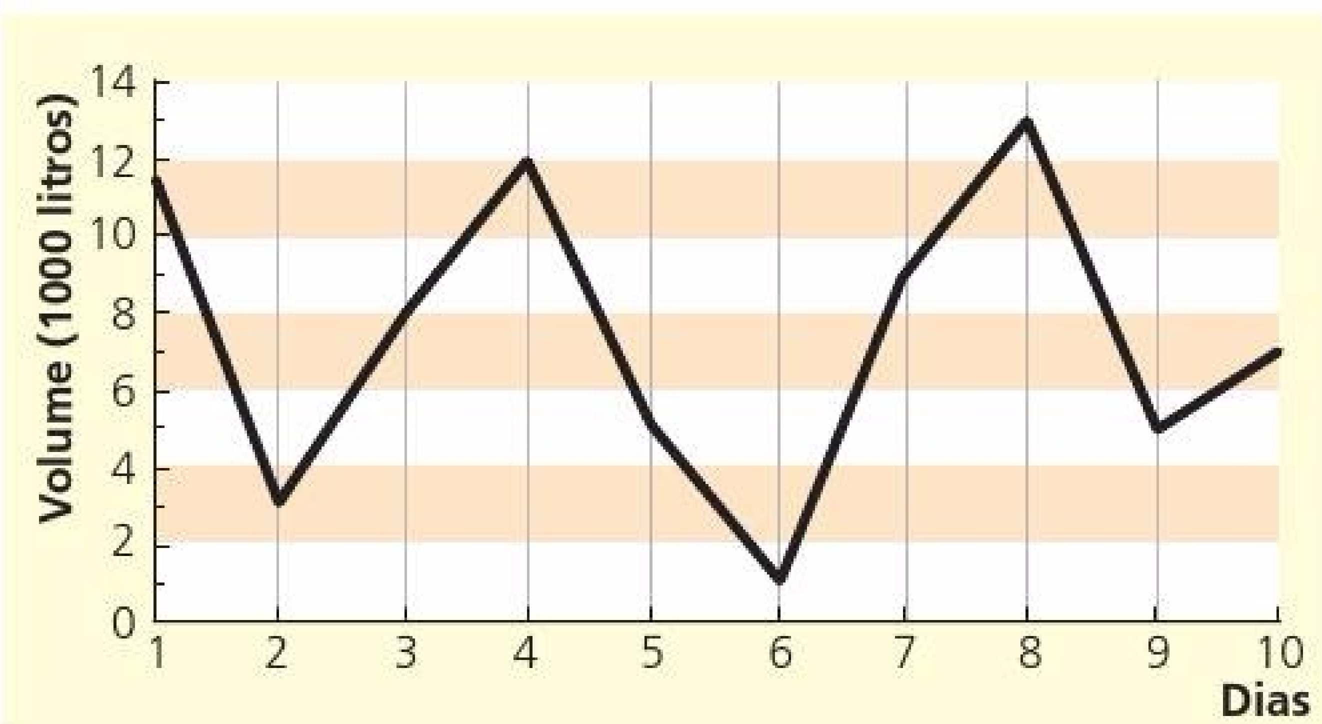
Responda:

a) Qual dos fluxos de exportações teve queda financeira?

b) Quando ocorreu esta queda?

c) Qual foi o valor aproximado da queda de faturamento?

7. Uma fábrica possui um reservatório de água em uma de suas unidades com 15 000 litros de capacidade. A água é utilizada na fábrica e, de acordo com o ritmo de produção, é reposta no reservatório. O gráfico a seguir mostra a variação do volume do reservatório em 10 dias de produção.



a) Qual foi o volume mínimo de água no reservatório nos 10 dias apontados no gráfico?

b) Qual foi o volume máximo?

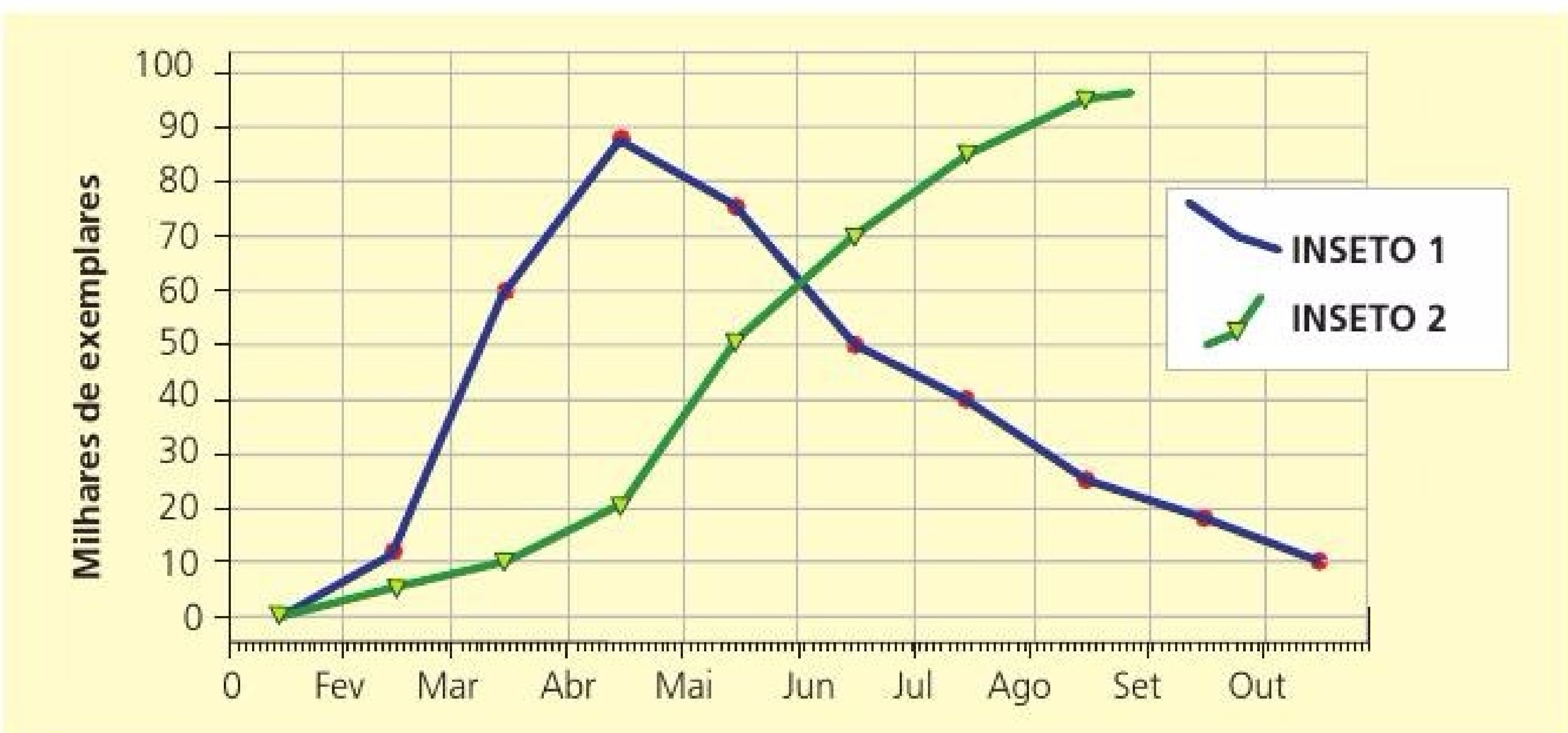
c) Qual foi a variação de volume entre o sexto e o oitavo dia?

d) Qual foi o consumo de água no quarto dia indicado pelo gráfico?

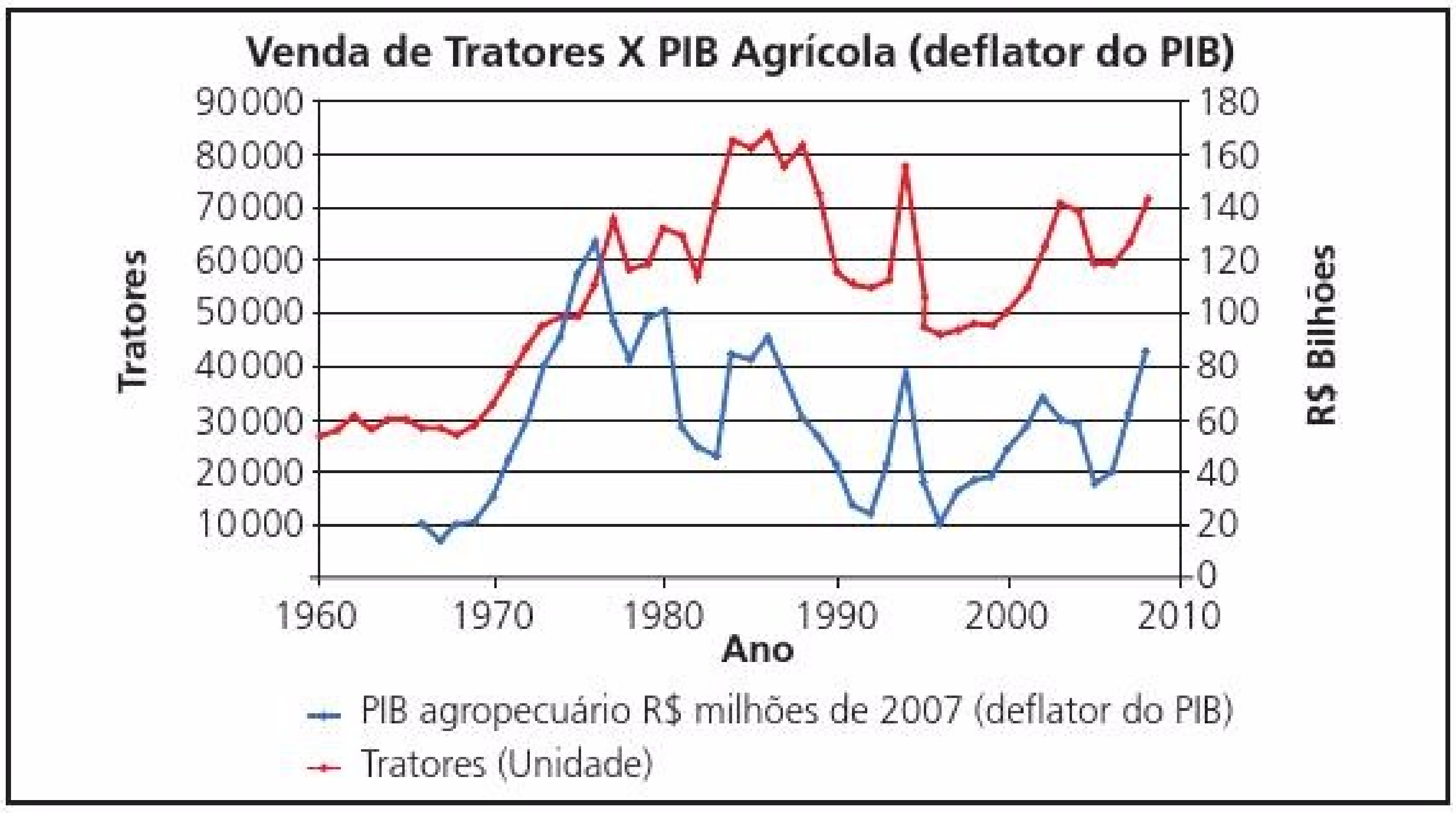
e) Qual foi o consumo no quinto dia?

8. O gráfico abaixo foi traçado utilizando-se inadequadamente o formato de gráfico de linhas. Comente esta afirmação, indicando por que razão o gráfico de linhas é inadequado para a situação e aponte qual seria o gráfico mais adequado.

9. Em uma fazenda foi constatada a presença crescente de um determinado tipo de inseto que prejudicava a plantação. Ele foi denominado INSETO 1. Desejando não utilizar agrotóxicos, o plantador procurou introduzir em sua fazenda outro inseto, de maior porte, que se alimentava do primeiro e que foi denominado INSETO 2. O gráfico mostra a variação do número de insetos, estimados a partir de uma amostra controlada. Quando começou o processo de extinção do INSETO 1? Quantos insetos desse tipo existiam na amostra nesse momento?



10. O gráfico estabelece uma relação entre a venda de tratores (de rodas e de esteiras) e o PIB (Produto Interno Bruto) Agrícola a preços constantes. Nota-se como coincidem as variações nas duas linhas do gráfico nos anos 1975, 1985, 1994, 2002 e 2009, reforçando em primeiro lugar que existe uma relação direta entre essas duas variáveis, e em segundo lugar, a ideia de que, quando o PIB cresce, a venda dos tratores se acentua porque os produtores têm uma maior perspectiva de ganhos. Houve período em que a venda de tratores excedeu o PIB Agrícola? Em caso afirmativo escreva em qual década.



Fonte: ANFAVEA e IPEA. Disponível em <www.ecen.com/produtividade_de_capital/quarto_relatório.htm>. Acesso em 14 mar 2015.
Venda de tratores de rodas e esteiras e PIB Agropecuário com o seu deflator.

11. As porcentagens de materiais reciclados estão representados num mesmo gráfico de 1993 a 2008.

Fontes: Associação Brasileira do Alumínio – ABAL; Associação Brasileira de Papel e Celulose – Bracelpa; Associação Técnica Brasileira de Indústrias Automáticas de Vidro – Abividro; Associação Brasileira da Indútria do PET – Abipet; Associação Brasileira de Embalagem de Aço – Abeaço; Associação Brasileira da Indústria do Leite Longa Vida – ABLV; Compromisso Empresarial para Reciclagem – Cempre. Disponível em: <http://goo.gl/r7ak5q>. Acesso em 10 dez 2014.

Analise o gráfico e responda:

a) Dentre os materiais reciclados, qual é o material mais reciclado em todo o período? E o menos reciclado?

b) Analisando o término dos anos de 1997 e 2006, liste em ordem decrescente das porcentagens, os materiais reciclados.

Resolução das atividades

1. a) 3ºC
   b) 1 h 30 min
   c) 18ºC
   d) inicio 8ºC final 18ºC
   e) 10ºC

2. a) 55%
   b) 7ª semana crescimento de 15%
   c) na 9ª semana 45% na 8ª semana 50%
   d) 20%

3. a) 1895
   b) 20 anos
   c) 1 920 e 1 945
   d) 1º e 2º guerra mundial

4. a) Outubro, R$ 1 500 000,00
   b) R$ 600.000,00
   c) R$ 90.000,00
   d) Novembro

vendas	R$	1.050.000,00
custo	R$	850.000,00
lucro	R$	200.000,00

   e) Reposição de estoque

5. a) aumentou de 18 165 km^2 para 27 423 km^2
   b) diminuiu de 27 423 km^2 para 11 532 km^2
   c) 7 464 – 18 165 = – 10 701 km^2

Respostas da seção Para estudar

6. a) Europa
   b) No terceiro trimestre
   c) aproximadamente 5 milhões e reais

7. a) 1 000 litros
   b) 13 000 litros
   c) 12 000 litros
   d) 7 mil litros
   e) 4 mil litros

8. O tipo de tintas não é uma variável contínua. Deveria ser utilizado um gráfico de barras e de setores.

9. No mês de abril.
   Aproximadamente 90 000.

10. Sim, na década de 70.

11. a) Mais reciclado :Latas de alumínio; Menos reciclado: embalagem longa vida.
    b) Em 1997: Latas de alumínio, Vidro, papel, latas de aço e embalagens PET.
    Em 2006: Latas de alumínio, embalagens PET, latas de aço, vidro, papel e embalagem longa vida.

Indicações de leituras complementares

A seguir, apresentamos uma relação de títulos indicados para sua leitura. Neles, você irá encontrar interessantes relações entre a Matemática e seu cotidiano, além da revelação da beleza presente nas formas geométricas e das divertidas atividades e jogos que podem ser desenvolvidos utilizando os conceitos matemáticos. Tudo isso ajudará bastante no desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

BARI, Atílio. *O tesouro do pirata pão-duro*. São Paulo: Scipione, 2002.

Coleção *O Prazer da Matemática*, de vários autores (Lisboa: Gradiva)

GUELLI, O. *O mágico da Matemática*. São Paulo: Atual, 1997.

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1998.

IMENES, Luis Márcio Pereira et al. Coleção *Pra que Serve a Matemática?* São Paulo: Atual, 1990.

- *Álgebra*
- *Ângulos*
- *Equação do 2° grau*
- *Frações e números decimais*
- *Estatística*
- *Geometria*
- *Números negativos*
- *Proporções*
- *Semelhanças*

IMENES, Luis Márcio Pereira et al. Coleção *Vivendo a Matemática*. São Paulo: Scipione, 1990.

- *Brincando com números*
- *Geometria dos mosaicos*
- *Descobrindo o teorema de Pitágoras*
- *Medindo comprimentos*
- *Problemas curiosos*
- *Polígonos, centopeias e outros bichos*
- *Geometria das dobraduras*
- *Lógica? É lógico*
- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*
- *Semelhança não é mera coincidência*
- *Os números na história da civilização*
- *A numeração indo-arábica*
- *Par ou ímpar?*

MACHADO, Nilson José. *A Geometria na sua vida*. São Paulo: Ática, 2003.

MALBA Tahan. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

MALBA Tahan. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MALBA Tahan. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

OBERMAIR, Gilberto. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo.* Rio de Janeiro: Ediouro. 2000.

RAMOS, Luzia Faraco. *Frações sem mistério.* São Paulo: Ática, 2001.

ROSA NETO, Ernesto. *As mil e uma equações.* São Paulo. Ática, 2001.

TEIXEIRA, Martins Rodrigues. *Quem inventou o dinheiro?* São Paulo: FTD, 1998.

TEIXEIRA, Martins Rodrigues. *Uma aventura na mata - frações.* São Paulo: FTD, 1997.

TOWNSEND, Charles. *O livro dos desafios*, v. 1. Rio de Janeiro: Ediouro, 2004.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. *A profecia.* São Paulo: FTD, 1997.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. *A revelação.* São Paulo: FTD, 1997.

Referências Bibliográficas

BAIFANG, Liu. *Puzzles com fósforos.* Trad. Jorge Casimiro. Lisboa: Gradiva, 1995. (O prazer da Matemática).

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.*

BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos geométricos.* Lisboa: Gradiva, 2001.

BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos numéricos.* Lisboa: Gradiva, 2000.

BICUDO, M. Aparecida Viggiani (Org.). *Educação matemática.* São Paulo: Moraes, 1987.

BIEMBENGUT, M. S. et al. *Ornamentos e Criatividade : uma alternativa para ensinar geometria* plana. Blumenau: Ed. da FURB, 1996.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* São Paulo: Contexto, 2000.

BLOOM, Benjamin S. et al. *Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar.* São Paulo: Pioneira, 1983.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática.* São Paulo: CAEM-USP, 1995. v. 6.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BROUSSEAU,G. *Introdução ao estudo das situações didáticas – Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo*: Ática, 2008.

BRUNER, Jerome S. *O processo da educação.* 4. ed. Trad. Lobo L. de Oliveira. São Paulo: Nacional, 1974.

CAGGIANO, Ângela. et al. *Problema não é mais problema.* São Paulo: FTD, 1996. v. 4.

CAPRA, Frejot. *O ponto de mutação: a ciência, a sociedade e a cultura emergente.* São Paulo: Cultrix, 1982.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Gradiva, 1998.

CARDOSO, Virgínia Cardia. *Materiais didáticos para as quatro operações.* São Paulo: CAEM-USP, 1992. v. 2.

CARVALHO, F. et al. *Por que Baskara? História & Educação Matemática*, v. 2, n. 2. Rio Claro, 2002.

CARVALHO, M.C.C.S. *Padrões Numéricos e funções.* São Paulo: Moderna, 1998.

CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da Matemática: números e operações*. São Paulo: Scipione, 1994.

COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá – A matemática da verdade e da beleza*. Rio de Janeiro: Record, 2006.

COLEÇÃO Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: Atual/Mir, 1997.

COXFORD, Arthur R; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *As ideias da Álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1997.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre tradição e modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e Matemática*. São Paulo/ Campinas: Summus/Editora da Unicamp, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1989.

DANTZIG, Tobias. *Número: a linguagem da ciência*. Trad. Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DEMO, Pedro. *Avaliação qualitativa*. São Paulo: Cortez, 1987.

DEVLIN, Keith. *O gene da matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DINIZ, M. Ignez de S. V.; SMOLE, K. C. S.. *O conceito de ângulo e o ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM-USP, 1993. v. 3.

DINIZ, M. Ignez; SMOLE, K. C. S.; MILANI, Estela. *Jogos de Matemática de 6o a 9o ano*. São Paulo: Artmed, 2006. (Coleção Cadernos do Mathema)

ESTEVES, 0. P. *Testes, medidas e avaliação*. Rio de Janeiro: Arte & Indústria, 1972.

FRIEDMAN, Thomas L. *O mundo é plano*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2007.

FRIEDMAN, Thomas L. *Quente, Plano e Lotado*. Os desafios e oportunidades de um novo mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2007.

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências – Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GARDNER. H. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

GLADWELL, Malcolm. *Fora de série – Outliers*. São Paulo: Sextante, 2008

GLEISER, Marcelo. *A dança do Universo: dos Mitos de criação ao big-bang*. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

HAYDT, R. Cazaux. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo: Ática, 1988.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1956.

IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande invenção*. 4. ed. Trad. Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1992.

JACOBINI, O. R. *A modelação matemática aplicada no ensino de estatística em cursos de graduação*. Dissertação de mestrado. Rio Claro: IGCE/UNESP, 1999. 155p.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 1993.

LINDQUIST, Mary M.; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LUCKESI, C. *Avaliação na aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 1992.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem?* Revista Pedagógica. Porto Alegre: Artmed, n. 12, fev.-abr. 2000.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna*. São Paulo: Cortez, 1990.

MARTINS, J. S. *O trabalho com projetos de pesquisa: do ensino fundamental ao ensino médio*. Papirus, 2001.

MIORIM, M. Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MLODINOW, Leonard. *A Janela de Euclides. - A história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço*, 2. ed. Geraçao Editorial, 2004.

MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado – Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro:* Jorge Zahar, 2009.

MOREY, Bernadete. *Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes*. (Org. Sergio Nobre). Rio Claro: Unesp, 2003. (História da Matemática para professores)

OCHI, Fusako Hori. et al. *O uso de quadriculados no ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM-USP, 1992. v. 1.

PERRENOUD, P. *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender Matemática*. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

PIRES, C.M.C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, João P. da; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RIBEIRO, José Pedro Machado; DOMITE, M. do C. Santos; FERREIRA, Rogerio. *Etnomatemática: papel, valor e significado*. Porto Alegre: Zouk, 2004.

ROCHA FILHO, Romeu C. *Grandezas e unidades de medida: o sistema internacional de unidades*. São Paulo: Ática, 1988.

ROSA; OREY, Daniel C. *Etnomatemática como ação pedagógica*. Natal: UFRN, 2004.

SANT'ANNA, Flávia M. et al. *Planejamento de ensino e avaliação*. 11. ed. Porto Alegre, 1995.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1999. Vários números.

SOUSA, C. Prado de (Org.). *Avaliação do rendimento escolar*. Campinas: Papirus, 1991.

SOUZA, E. Reame. et al. *A Matemática das sete peças do Tangram*. São Paulo: CAEM-USP, 1995. v. 7.

STEWART, IAN. *Incríveis passatempos matemáticos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

STRATHERN, Jorge. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

TAHAN, Malba. *Diabruras da Matemática: problemas curiosos e fantasias aritméticas*. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1996.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática: como dois e dois. A construção da Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

Matemática

ASSESSORIA PEDAGÓGICA

8º ano

Ensino Fundamental

UMA PALAVRA INICIAL

Caro(a) professor(a),

Esta coleção pretende contribuir com o seu trabalho e o de seus alunos. Este manual tem como objetivo apresentar um panorama da abordagem dos conteúdos da coleção e fundamentar as opções que assumimos na condução do curso de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental. Além disso, propõe sugestões e canais de aquisição de conhecimentos que o ajudem a oferecer a seus alunos uma aprendizagem mais eficaz.

O **Assessoria Pedagógica** objetiva também auxiliá-lo no planejamento e gestão de suas aulas e, dessa forma, procura descrever os processos de abordagem dos conteúdos, exercícios e atividades individuais e em grupo, funcionando como um valioso recurso, que deve ser um agente importante do processo de ensino-aprendizagem.

Nesse contexto, buscamos aqui ampliar as informações propostas no livro do aluno, oferecendo sugestões complementares de atividades, leituras, e de projetos a serem desenvolvidos com os alunos, entre outras.

A proposta desta obra surgiu na prática de sala de aula, objetivando despertar o interesse do aluno pela Matemática presente em seu cotidiano. A partir das atividades aqui propostas, procuramos fazer o aluno "enxergar" onde, como e quando a Matemática se manifesta; seja na natureza, nas construções humanas, nas leis da Ciência, na Astronomia ou atividades corriqueiras como, por exemplo, fazer compras, ouvir uma música ou praticar esportes.

Essa abordagem levou à produção desta coleção como uma ferramenta de diálogo nas diferentes linguagens da Matemática. Isso pode ser visto no formalismo e no encadeamento da apresentação dos conceitos, nas diferentes seções que apresentam textos complementares para leitura, aplicações e conexões interdisciplinares, informações históricas contextualizadas, oficinas, desafios, curiosidades e exercícios com dosagem progressiva de dificuldade.

Acreditamos que, com sua insubstituível colaboração, conseguiremos atingir os objetivos gerais e específicos da Educação Matemática respeitando as especificidades sociais e culturais de cada escola que utilizar essa obra. Nossos alunos precisam desta educação de qualidade. Nosso país, também.

Os Autores

Pressupostos da coleção

A Matemática constitui uma das mais significativas e universais heranças culturais da humanidade e é, também, um aprimorado modo de pensar e de se ter acesso ao conhecimento. A ênfase da Educação Matemática no Ensino Fundamental está na utilização da Matemática para resolver problemas, raciocinar, apropriar-se e difundir conhecimentos, o que implica em abordá-la de forma a desenvolver alunos seguros e motivados.

A Matemática sempre foi usada na sociedade relacionando-se com as mais diversas áreas da atividade humana. Porém, num mundo cada vez mais tecnológico, ela passa a ter, também, uma maior importância implícita, que deve ser discutida pelos educadores, objetivando o aprimoramento da aprendizagem pelos alunos e da apropriação das tecnologias disponíveis.

O trabalho dos educadores deve ter como objetivo ajudar a revelar a matemática presente nas mais variadas situações e promover a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a Matemática.

Trata-se de promover o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes em vez de simplesmente adicionarmos capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e atitudes favoráveis à atividade matemática a um currículo baseado em conhecimentos isolados e técnicas de cálculo. Ao mesmo tempo, destaca-se a compreensão de aspetos fundamentais da natureza e do papel da Matemática e dá-se uma atenção explícita ao desenvolvimento das concepções dos alunos sobre a própria Matemática.

Com esse olhar, é possível encontrar muitos estudos e experiências sobre a construção e aquisição dos conceitos e procedimentos matemáticos, que defendem, acima de tudo, que o ensino da Matemática não se limita à transmissão de informações, mas trata-se de um processo complexo de construção de um conjunto de competências cognitivas, que deve ter a participação ativa dos alunos.

Nessa obra, procuramos abordar algumas competências gerais de forma articulada com as competências específicas de cada conteúdo trabalhado dentro do campo dos **números e operações, da álgebra, da geometria, das grandezas e medidas e do tratamento das informações**.

Assim, as sugestões de abordagem dos conteúdos apresentadas nessa coleção tendem a relacionar essas competências e permite que o professor possa adaptá-las para cada contexto educacional dentro das diversidades de cada cenário de nosso País.

Vários significados

A necessidade de compreender os vários significados e propriedades das operações fundamentais e dominar os algoritmos são imprescindíveis no mundo atual, pois permitem desenvolver a capacidade de contar, comparar e quantificar grandezas, além de fazer e compreender codificações. Por isso, propomos o uso do cálculo mental, estimativas e o uso da tecnologia para apresentar conteúdos de aritmética, álgebra, contagens, sistemas de medidas, geometria e no tratamento da informação.

Por meio da percepção de regularidades, a obra propõe a construção de modelos simbólicos em várias situações e, da mesma forma, busca a compreensão e interpretação de problemas do cotidiano, correlacionando, eventualmente, outras áreas do conhecimento. Dessa forma, destaca-se o estudo da álgebra, que assume também, a função de linguagem capaz de expressar propriedades matemáticas e suas relações com a realidade.

O estímulo ao uso da percepção espacial e sua interação com o mundo físico em que vive o aluno, é destacado no ensino da Geometria, onde desenvolvemos as competências de localização, visualização, construção e representação de figuras geométricas, de forma a estimular a capacidade de organização e síntese desse conhecimento.

Buscamos, também, propiciar ferramentas de conexão da realidade das aulas de matemática com as demais disciplinas e com o mundo exterior. Assim, o estudo dos conceitos de número natural, inteiro, racional e irracional associa-se ao conceito de grandezas e, assim, relaciona-se à Geometria e à Álgebra, de forma a permitir uma linguagem que favoreça aplicações em outras disciplinas.

O tratamento da informação baseia-se na leitura e interpretação de problemas do cotidiano. A coleção trata de maneira simples e natural de estatística, probabilidade e contagens. A coleta, seleção, organização, apresentação e interpretação crítica dos dados são abordadas com exemplos e atividades que estimulam o uso de inferências baseadas em informações qualitativas ou quantitativas. São introduzidos os conceitos de chance e incerteza ainda nessa fase da educação básica, além de uma ampla apresentação dos diversos tipos de gráficos, aqui entendidos também como "idioma" cada vez mais presente na comunicação matemática.

Nesse cenário, a contextualização e a proposta de interdisciplinaridade e multidisciplinaridade são consequências naturais de um processo de trabalho no dia a dia em sala de aula, na escola e na comunidade, nas quais alunos e professores estão inseridos. Essa conduta participativa, crítica e responsável viabiliza discussões sobre o papel da Educação Matemática na vida desses indivíduos e na sociedade, formando assim, agentes transformadores, críticos e responsáveis, capazes de exercer sua cidadania.

Considerando os pressupostos que assumimos para o desenvolvimento desta coleção, apresentamos a seguir a competências a serem desenvolvidas e os objetivos específicos de cada um dos eixos de condução do curso.

I. Competências gerais a serem desenvolvidas

- Reconhecer a Matemática como instrumento para a compreensão e resolução de problemas do homem na sociedade contemporânea;
- Interpretar matematicamente situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento;
- Resolver problemas de forma criativa, criando suas próprias estratégias de forma a desenvolver a iniciativa e a imaginação;
- Usar o raciocínio matemático de forma independente para compreender o mundo que o cerca;
- Avaliar de forma crítica os resultados obtidos;
- Contribuir para a formação de um cidadão crítico, criativo, observador e leitor do mundo que o cerca;
- Raciocinar e fazer abstrações com base em situações concretas;
- Representar, organizar e generalizar;
- Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito e oralmente;
- Desenvolver a capacidade de argumentação de forma consistente e, assim, desenvolver também sua autoconfiança exprimindo e fundamentando as suas opiniões e formando juízos sobre as situações com as quais é confrontado;
- Desenvolver a curiosidade e o prazer pela aprendizagem de novos assuntos, de forma a aumentar o interesse pelos problemas da sociedade em que vive;
- Estabelecer conexões entre os diferentes campos da matemática;
- Estabelecer conexões entre a matemática e as demais áreas do saber;
- Manipular diferentes tipos de dispositivos tecnológicos como suporte ao raciocínio matemático.

II. Objetivos e competências específicas

Números e Operações/Álgebra

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática;
- Transferir o uso da linguagem oral para a escrita;
- Relacionar a língua materna e a linguagem matemática;
- Usar com clareza os símbolos matemáticos;
- Comparar, refletir e deduzir por meio dos textos trabalhados;

- Ler e interpretar textos diversos;
- Operar através dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão;
- Operar através dos algoritmos da potenciação e radiciação;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino -aprendizagem no desenvolvimento da criatividade, aplicando também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.
- Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos.

Geometria

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Conhecer os conceitos primitivos de ponto, reta e plano;
- Reconhecer e classificar polígonos, triângulos e quadriláteros;
- Interpretar figuras que foram reduzidas e ou ampliadas por meio de uma escala;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino-aprendizagem no desenvolvimento da criatividade, aplicando também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Usar com autonomia o raciocínio matemático para compreensão do mundo que o cerca, desenvolvendo a visão geométrica, a visão espacial e o raciocínio lógico dedutivo.
- Classificar ângulos quanto à sua medida, calcular a soma das medidas dos ângulos de um polígono.
- Fazer uso de régua e de outros instrumentos de medição.
- Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.
- Classificar ângulos definidos por retas paralelas e transversais.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.
- Reconhecer retângulos, trapézios, paralelogramos, losangos e aplicar suas propriedades.
- Reconhecer a diferença entre figuras planas e figuras tridimensionais.
- Identificar e diferenciar sólidos geométricos.
- Reconhecer os elementos de um prisma e de uma pirâmide.
- Definir expressões para cálculo de área e de volume dos sólidos geométricos.
- Reconhecer a maior rigidez de um triângulo em relação aos outros polígonos.
- Verificar a condição de existência de um triângulo.
- Reconhecer as isometrias de figuras planas.
- Representar as simetrias de figuras planas.

- Verificar as condições necessárias para a congruência de triângulos.
- Reconhecer a circunferência e seus elementos.
- Explorar a relação entre as medidas do comprimento da circunferência e seu diâmetro.
- Explorar os ângulos na circunferência.
- Reconhecer a semicircunferência como um lugar geométrico. Identificar polígonos inscritos e circunscritos na circunferência.
- Calcular as áreas do círculo, da coroa e do setor circular.
- Explorar e aplicar as relações entre as medidas de cordas e outros segmentos em uma circunferência.
- Identificar retas externas, secantes e tangentes a uma circunferência.
- Caracterizar os elementos de um triângulo retângulo.
- Aplicar as relações de semelhança em triângulos assim como o Teorema de Pitágoras.
- Identificar e aplicar outras relações métricas no triângulo retângulo.
- Definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos.

Grandezas e Medidas

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Fazer uso de uma régua e conhecer outros instrumentos para medição;
- Usar adequadamente as diversas unidades de medida de comprimento;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar a aprendizagem, desenvolver a criatividade e aplicar também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Compreender e utilizar o conceito de medidas padronizadas e não padronizadas, reconhecer a importância social da adoção de medidas padronizadas.
- Compreender e utilizar medidas usuais de comprimento, de área, de massa e capacidade.
- Utilizar com pertinência ferramentas matemáticas em situações do cotidiano, de práticas sociais, de maneira a exercer a sua cidadania.
- Raciocinar e fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar adequadamente suas ideias matemáticas.
- Reconhecer e operar com as unidades grau e radiano.

Tratamento da Informação

- Ler e interpretar textos em forma de tabelas e gráficos;
- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Construir gráficos de colunas, de barras, de setores, de linhas e pitogramas;
- Registrar, organizar, e coletar elementos elencados numa pesquisa;
- Desenvolver pesquisas para exercitar o tratamento da informação e para conhecer o ambiente no qual está inserido;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimentos de habilidades cognitivas.

- Promover uma reflexão sobre o termo frequência.
- Construir tabelas de frequências.
- Ler, interpretar e construir histogramas.
- Calcular a média de um conjunto de dados.

III. EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM

O desenvolvimento do conjunto de competências citado, deve se dar dentro de um universo rico de experiências de aprendizagem, formando um mosaico de interações com os mais diversos campos do conhecimento, da história, do desenvolvimento e da utilização da Matemática.

Assim, uma boa utilização dos livros desta coleção deve levar os alunos a ter oportunidades de se envolver nos seguintes tipos de experiências de aprendizagem:

Resolução de problemas

É o mais comum e universal contexto de aprendizagem matemática. Deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas atividades apresentadas ao longo do curso. Os problemas são situações que constituem desafios para os alunos, em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução. São diferentes de exercícios, geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz diretamente à solução. A formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática e vivencial dos alunos.

Atividades de pesquisa

Numa atividade de pesquisa, os alunos exploram uma situação problema, procuram regularidades, fazem e testam hipóteses, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de atividades de natureza investigativa. Este tipo de atividades também é favorável à ligação da matemática com outras áreas do conhecimento.

Projetos

Um projeto é uma atividade prolongada que normalmente inclui trabalho dentro e fora da sala de aula e é realizada em grupo. Pressupõe a existência de um objetivo claro, compreendido pelos alunos, desenvolvimento e a apresentação de resultados. Qualquer tema da Matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de projetos. Pela sua própria natureza, os projetos constituem contextos naturais para o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar.

Textos e Comunicação oral

A leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de conteúdos matemáticos ou a eles associados, devem permear todo o curso, sobretudo no Ensino Fundamental. Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão das exposições do professor.

Prática de procedimentos e algoritmos

A prática de procedimentos não deve constituir uma atividade repetitiva, isolada e sem significado. Deve ser entendida como algo que pode promover a aquisição de habilidades utilizáveis com segurança e autonomia. O cálculo mental, o domínio de um algoritmo, a utilização de uma fórmula, a resolução de uma equação, uma construção geométrica, a manipulação de um instrumento, entre muitos outros procedimentos, habilidades úteis que se adquirem com prática, desde que sejam claras sua compreensão e a sua integração nas experiências matemáticas significativas.

Exploração de conexões

Um componente essencial da formação matemática é a compreensão das relações existentes entre as diversas ideias matemáticas, bem como daquelas existentes entre essas ideias e outras áreas de aprendizagem como a música, as artes plásticas, a natureza, a arquitetura e a tecnologia. Atividades que permitam evidenciar e explorar tais conexões devem ser proporcionadas a todos os alunos.

Utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática

O mundo tem passado por mudanças cada vez mais aceleradas. Estamos diante de um novo paradigma, a revolução tecnológica, em que as informações são processadas de maneira rápida. A educação está cada vez mais inserida nesse processo de busca da construção contínua do conhecimento.

Objetos digitais de aprendizagem

No ambiente educacional, muito se tem discutido acerca do conceito de objetos de aprendizagem. A principal ideia sobre eles, genericamente falando, é que se configuram em qualquer artefato, organização material ou comportamental, digital ou não digital, que possa ser usada, reutilizada ou referenciada durante o uso de técnicas pedagógicas que deem suporte ao ensino. Dessa maneira, todo objeto de aprendizagem pode ser utilizado como um meio de ensino/aprendizagem. Um cartaz, uma maquete, um kit de laboratório, uma canção, um ato teatral, uma apostila, o próprio livro, um filme, um jornal, uma página web, diferentes livros podem ser objetos de aprendizagem. Mesmo não sendo um conceito, ainda, universalmente aceito, é razoável supor que o caráter de suporte à situação de ensino prevalece quando tentamos entender o conceito mais central de objeto de aprendizagem.

No contexto dos impactos de tecnologias da informação e da comunicação nos processos educacionais, devemos considerar que o computador e os dispositivos móveis, como tablets e celulares, representam poderosas ferramentas para auxiliar professores a desenvolver situações de aprendizagem que permitam ao aluno a construção do saber de forma mais prazerosa e eficiente. Nessas circunstâncias, passamos a considerar o conceito de objetos digitais de aprendizagem.

Nessa sociedade tecnológica e informacional, as tecnologias interativas aplicadas à educação permitem a pluralidade de abordagens, o atendimento a diferentes estilos de aprendizagem e, por essa razão, favorece a aquisição de conhecimentos, competências e habilidades. Caminhamos para um novo cenário, em que cursos e materiais digitais, destinados a uma nova dinâmica de aulas, criam um novo contexto em que o professor assume funções novas e diferenciadas. Os educadores devem fazer sua parte pela procura de informações e de recursos disponíveis, refletindo sobre a utilização de novas ferramentas.

Entre essas possibilidades, destaca-se o uso desses objetos digitais de aprendizagem ao longo do conteúdo trabalhado no livro. Tais objetos encontram-se disponíveis e diversos portais e sites, dentre os quais destaca-se o Portal do Professor, espaço em que o professor pode acessar sugestões de planos de aula e baixar mídias de apoio, que servem como objetos digitais de aprendizagem. Além disso, o professor toma conhecimento de notícias sobre educação e iniciativas do MEC e pode compartilhar planos de aula, participar de discussões ou mesmo fazer um curso. O acesso ao Portal do MEC é:

portaldoprofessor.gov.br.

O planejamento e o desenvolvimento dos objetos de aprendizagem buscam soluções que favorecem as capacidades de ordem cognitiva superior, com atividades interativas e situações que estimulam a aprendizagem dos estudantes. A pretensão é que os objetos de aprendizagem sejam disponibilizados ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, sempre que puderem prover à situação de ensino níveis de interação que os processos convencionais não alcancem. Esses objetos, como dissemos, se configuram por recursos digitais que trazem informações em diversos formatos como imagens, sons, infográficos, simuladores, jogos e listas complementares de conteúdos, testes e novos textos, entre outros, sempre com objetivos educacionais.

Existem diversas abordagens para a definição e a caracterização de objetos digitais de aprendizagem. Nos últimos anos, muito se tem discutido e escrito acerca de tão valorosa colaboração para a situação de ensino e aprendizagem.

De modo geral, há uma interessante convergência dos diversos autores a respeito das principais características destes objetos de aprendizagem. Entre elas, destacam-se:

- a flexibilidade – os objetos digitais são flexíveis, isto é, podem ser utilizados e reutilizados em diversas situações, sem nenhum tipo de manutenção;
- são fáceis de serem atualizados, mesmo por que, seu uso em diferentes situações, constantemente sugere melhorias;
- os objetos são customizáveis, pois, em muitos casos, suas estruturas centrais podem ser adaptadas para o uso em diversas áreas do conhecimento;
- a partir do momento em que um objeto é reutilizado diversas vezes em diversas especializações, ao longo do tempo ele melhora e sua consolidação cresce de maneira espontânea.

O uso dos objetos digitais de aprendizagem pode se dar diretamente em sala de aula, por meio de projeções em dispositivos do tipo data show, combinando tais projeções com o acompanhamento de materiais impressos.

Como foi dito, não podemos negar o impacto e a potencialidade das novas tecnologias como um conjunto de recursos que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. Inicialmente, ressaltamos a necessidade de se pensar em um ensino de Matemática que capacita os alunos para o uso confortável de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho extensivamente utilizados nos mais diversos ambientes do mundo moderno.

No trabalho com calculadoras é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução das operações que devem ser realizadas..

De outro lado, as planilhas eletrônicas manipulam tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso algum conhecimento matemático, uma vez que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função, apresentado no livro de 9º ano desta coleção. Além disso, a elaboração de planilhas mais complexas requer raciocínio típico dos problemas que exigem um processo de solução em diferentes etapas.

No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a definição de alguns objetos digitais de aprendizagem, além de softwares e planilhas, pode ser um fator determinante para a melhoria da qualidade do aprendizado por meio da exploração de conceitos e ideias oportunamente propostos nas situações de ensino.

Nessas situações, o professor deve saber explorar a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema e capitalizar para o grupo a capacidade criativa de cada um de seus alunos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual.

Entre os diversos tipos de objetos digitais de aprendizagem, destacamos:

Galerias

Coleções de imagens relativas ao tema suscitado no ponto onde estão incluídas. São excelentes ferramentas para introdução de conceitos, levantamento de conhecimentos prévios e ilustração de uma gama de exemplos visuais, com legendas específicas, que objetivam o enriquecimento do conteúdo estudado. Em geral, as galerias oferecem a ferramenta de zoom, que permite a análise de detalhes interessantes nas diversas fotografias ou ilustrações apresentadas.

Algumas galerias de imagens podem, também, simular um desenvolvimento progressivo de algum processo, transformação de um fenômeno qualquer representado por uma figura, foto ou esquema. Além dessas utilizações, as galerias são extremamente úteis para criar questões em situações de avaliação, em razão da variedade de aspectos que apresentam sobre um único conceito.

Animações e Infográficos animados

Como o próprio nome desse tipo de objeto sugere, a inserção do movimento como elemento que introduz um novo nível de percepção de um conceito, esquema, figura ou situação dinâmica, que o papel apresenta de forma estática, pode fazer a diferença na compreensão do que se estuda. O professor deve usar as animações em suas aulas, paralisando-as para mostrar um detalhe num infográfico ou fixando-se em um detalhe que pode ser observado por mecanismos de zoom. Existem situações nas quais os infográficos animados contêm vídeos ou mesmo galerias.

Vídeos

A utilização de vídeos como objetos de aprendizagem é antiga e muito desenvolvida. A principal diferença em relação ao uso clássico de vídeos e seu uso no formato de objetos digitais encontram-se na duração. No caso dos objetos digitais, situa-se entre 1 e 3 minutos. Apenas em alguns casos especiais essa duração se aproxima dos 5 minutos;

Simuladores

Esse tipo de objeto digital reúne os principais atributos do formato digital: permite aplicações em diversos contextos, bem como o controle de seu uso em sala de aula ou em laboratórios de informática. Sobretudo no desenvolvimento de conteúdos que exigem interações com fenômenos impossíveis de serem reproduzidos em condições normais de ensino, ou ainda quando são necessários múltiplos exemplos com variações de parâmetros, como no caso de traçados de gráficos.

Jogos

O jogo eletrônico é uma categoria de software de entretenimento cujo objetivo da interação envolve completar uma tarefa, vencer um desafio, obter a maior pontuação, derrotar um adversário. Essa estrutura pode ser utilizada para a fixação de conteúdos educacionais, fazendo com que o aluno desenvolva a percepção dos conceitos através da intensa interação exigida pelos jogos.

Programas e aplicativos

Agora, se imaginarmos como a tecnologia pode nos ajudar no ensino de Matemática, devemos considerar, a princípio, o grande conjunto de programas destinados especificamente a esse fim, como os geradores de gráficos do tipo do **Geogebra** ou os softwares de desenho e geometria, como o **CABRI**, nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, fazer experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas, criar estratégias para resolver problemas. São características desses programas:

- conter certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;
- oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático;
- possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de ensaios;
- permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Se, por um lado, é muito interessante o uso de grandes programas como o **Geogebra** e o **CABRI**, há que se considerar, também que, para a utilização mais eficiente, esse tipo de software praticamente exige um treinamento específico do aluno, o que, em si, pode ser um obstáculo suplementar à conquista de objetivos instrucionais menos sofisticados, mas estratégicos. A seguir, estão alguns links interessantes para a download gratuito de vários desses softwares:

http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/softwares-matematicos/
http://www.m3.ime.unicamp.br
https://www.ufpe.br/dmat
http://www.math.psu.edu/MathLists/Software.html
http://www.ufv.br/dma/intermat/Softwares/softwares_matematicos.htm
http://www.apm.pt/apm/software/soft.htm
http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/
http://www.mat.ufrgs.br/edumatec
http://www.ufv.br/cee/pec/Neicim/ead/linksmat.htm
ttp://www.projetozk.ufjf.br/base_p/ensaios/ensaio3/ant_primos.htm
http://math.exeter.edu/rparris/
http://am.esalq.usp.br/desr/dum/node2.html

IV. ORGANIZAÇÃO GERAL DA COLEÇÃO

Conversa Inicial

Esta seção, apresentada no início de cada capítulo, tem como objetivo recuperar a importância e a variedade das experiências que o aluno já possui sobre o assunto e, ao mesmo tempo, introduzir de forma problematizada a necessidade de estudo dos conceitos matemáticos envolvidos no capítulo.

Uma prática interessante para o início do desenvolvimento de cada capítulo é, antes da exploração da seção **Conversa Inicial**, fazer um inventário oral dos conteúdos que já foram trabalhados até o momento. Isso pode fortalecer a discussão dos temas propostos na seção e melhorar a percepção dos alunos em relação às razões pelas quais estudam o conteúdo do capítulo.

Além disso, a seção **Conversa Inicial** pode ser explorada com outros exemplos, dados ou informações, diferentes daqueles propostos no livro e, muitas vezes, tais dados e informações podem ser fornecidos ou enriquecidos pelos próprios alunos, desde que estimulados pelo professor a apresenta-los ou falar sobre eles.

Sugerimos também que o professor dê preferência para explorar temas regionais ou locais, que possam se adaptar à exemplificação contida na seção, de forma a permitir que o aluno identifique a Matemática que está presente na cultura, perceba que ela faz parte da história da civilização e se aproprie do conhecimento matemático pela evidência de seus usos sociais.

Atividades

Esta seção apresenta problemas e exercícios de aplicação dos conteúdos abordados nos capítulos. Os exercícios utilizam diversos enfoques para os temas e diferentes graus de dificuldades. As atividades foram selecionadas segundo o critério de contribuir para o desenvolvimento das competências citadas na parte inicial desta Assessoria Pedagógica, sem, no entanto, deixar de lado a importância de desenvolver as habilidades específicas que envolvem a manipulação de algoritmos, conceitos e nomenclaturas da linguagem matemática. A identificação das principais competências e habilidades às quais se referem as atividades é feita com um ícone e com uma descrição junto às listas.

Com o objetivo de tornar os livros didaticamente mais eficientes e também de proporcionar aos alunos uma visão detalhada das etapas de resolução das atividades propostas, de tal forma que eles aprimorem os processos discutidos em sala de aula e se referenciem para a resolução de outras atividades propostas, introduzimos ao final de cada capítulo a resolução de todas as atividades nele contidas, exceção feita àquelas da seção **Para estudar**.

Desafio

Aqui o aluno é exposto a situações que o provocam a usar a criatividade para resolver problemas e propor soluções interpretando o mundo de forma crítica, fazendo uso da Matemática.

As atividades que os alunos desenvolvem a partir da seção **Desafio** devem sempre ser entendidas como estímulo ao raciocínio lógico e à exploração da capacidade criativa de cada um. Procure, neste caso, mostrar que um mesmo Desafio pode ter caminhos diversos para sua solução e estimule a discussão em sala de aula.

A resolução de Desafios é uma prática que permite ao aluno se colocar diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras.

Sugerimos que o professor explore essa seção de forma ampla e criativa, propondo inclusive, situações para jogos e competições se o ambiente de sua sala de aula for propício.

Para estudar

Essa seção propõe uma relação de atividades, com diferentes graus de dificuldade, que abordam os conteúdos trabalhados no capítulo e as relações estabelecidas com outros temas. Espera-se que o aluno interprete as informações dos exercícios, relacione os conteúdos e aplique os conhecimentos adquiridos para estruturar as resoluções, garantindo assim um bom momento de estudo. Especificamente para esta seção, não foram incluídas as resoluções no livro do aluno. A ideia é que os alunos relacionem as atividades aqui propostas e retornem às atividades resolvidas em classe para montar, autonomamente, suas soluções. As resoluções das atividades da seção Para estudar encontram-se nesta Assessoria Pedagógica. Os exercícios podem ser utilizados como avaliações contínuas do processo de aprendizagem e também em diferentes estratégias de aprendizado, como por exemplo, alunos em duplas confrontando as resoluções de suas atividades ou resolvendo-as no quadro.

Conexão

Os textos apresentados nessa seção resgatam exemplos de aplicações da Matemática nas mais diversas áreas do conhecimento. Sua abordagem visa instigar o aluno a relacionar os conteúdos estudados ao mundo que o cerca e, dessa forma, ampliar sua percepção da Matemática e compreendendo-a, também, como linguagem.

Além disso, é possível propor novas questões de interpretação desses textos e relacioná-los com os conteúdos de outras disciplinas e, em alguns casos, conteúdos relacionados com outros temas da própria Matemática. Essa prática poderá viabilizar a criação de novas questões para atividades, ou ainda, para futuras avaliações em grupo ou individuais.

O processo de leitura e interpretação de textos é essencial para toda prática educativa e é um dos principais desafios que nós, professores, enfrentamos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois muitas vezes há uma superposição da dificuldade de leitura na língua materna com as dificuldades de interpretar a linguagem matemática. Segundo muitos pesquisadores, a habilidade de ler e interpretar textos não se desenvolve espontaneamente e deve ser objeto de um trabalho específico do professor, que deve oferecer aos alunos um modelo de como isso deve ser feito.

Sugerimos ainda, destaque especial para a observação e leitura criteriosa do rico repertório de imagens oferecidas nessa seção e, salientamos que, esse processo de comunicação em sala de aula pode ser utilizado como um importante instrumento para que professores e alunos partilhem os significados matemáticos e linguísticos dos textos.

Quando, quem e onde

Os textos desta seção foram escritos de forma simples e clara para tornar a leitura agradável e possuem todo o rigor científico nas informações neles contidos. O aluno perceberá os caminhos percorridos na construção do pensamento matemático e assim entenderá que são processos longos, não havendo o imediatismo das conclusões ou validações. Os textos abordam a Matemática como um conjunto de conhecimentos e uma linguagem em construção, negando o pressuposto de uma Matemática pronta e acabada, abrindo, assim, possibilidades para discussões e reflexões. Essa seção vincula os conhecimentos matemáticos com as necessidades do momento histórico de cada época, possibilitando ao professor estimular os alunos a fazerem relações com a História da Humanidade. Gera também, permanentes oportunidades para a realização de atividades com outros componentes curriculares como, por exemplo, História, Artes, Ciências, Geografia e Língua Portuguesa. Podem ser sugeridas pesquisas para que o aluno conheça mais sobre os diversos vultos citados na coleção e suas contribuições para a humanidade.

Na prática

Essa seção oferece atividades nas quais os alunos desenvolvem na prática o que aprenderam. São apresentadas propostas de oficinas, pesquisas ou ações que possibilitem observar e interpretar situações problema, aplicando os temas estudados. Nesse contexto, enfatizamos que esta seção oferece melhores condições de ser desenvolvida em grupos ou, pelo menos, em duplas. O trabalho cooperativo aplicado na sala de aula de Matemática enfatiza a interação entre professor e alunos, assim como entre os próprios alunos. Ao trabalharem cooperativamente as atividades dessa seção, os alunos se envolvem em duas situações de aprendizagem; a solução de situações problema e o trabalho produtivo das atividades instrucionais propostas.

Essa prática permitirá ainda expandir as propostas de cada seção para outros trabalhos ou mesmo conectar algum trabalho que os grupos estejam fazendo em outras disciplinas, sempre adequando essas propostas à realidade dos seus alunos.

Além disso, essa seção oferece ainda uma boa oportunidade para propor a organização de exposições dos trabalhos realizados pelos seus alunos para os demais grupos da classe e para as demais classes da escola.

Para ler

Sugerimos textos e informações complementares que visam ilustrar e enriquecer a aprendizagem do aluno, ampliando seu processo de construção de conhecimentos matemáticos.

Além da importância intrínseca para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, a seção Para ler é mais uma ferramenta para o aprimoramento da capacidade de leitura e interpretação dos alunos. A relação entre linguagem natural (Português) e a linguagem matemática está presente de forma implícita em diversas situações dentro dessa coleção e, em especial, é possível explorá-la nessa seção de forma adicional.

A prática da leitura coletiva em sala de aula pode ser uma técnica útil para explorar essa seção e, dessa forma, o professor pode interferir durante a leitura e propor questões para a discussão entre os alunos.

Curiosidade

A seção apresenta informações interessantes sobre os diversos conceitos estudados por meio de textos que mostram o uso da imaginação, investigação e criatividade para interpretar o mundo.

Aqui é possível observar aspectos interessantes da Matemática, de nossa História, da Cultura, da Arquitetura, de Ciência e Tecnologia e da Natureza, que auxiliam bastante na compreensão da presença da Matemática em nosso cotidiano.

Sugerimos também a leitura dos textos da seção em sala de aula e o estímulo do debate sobre os principais pontos apresentados.

V. UMA PALAVRA SOBRE AVALIAÇÃO

Atribuir um juízo de valor sobre a propriedade intelectual não é tarefa fácil e os métodos para a aferição da qualidade do processo de ensino/aprendizagem enfrenta históricos desafios. A avaliação é um tema abrangente que apresenta muitos aspectos divergentes e está relacionada a concepções distintas do processo de ensino e aprendizagem. Discutir a avaliação hoje é um desafio que requer uma visão mais ampla da educação, pois, revê os papéis do professor e de toda a prática pedagógica.

Há certo consenso que, na atualidade, o professor deve buscar características menos centralizadoras e mais voltadas para o acompanhamento, a motivação e a orientação de seu aluno, de modo a proporcionar condições para que esses adquiram uma aprendizagem autônoma e integrada. Atuando mais como provocador cognitivo, o professor deve levar seu aluno a desenvolver competências que o tornem crítico e reflexivo.

Nesse contexto, a avaliação também ganha novo propósito e deve fazer uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar os avanços de seus alunos, as suas resistências e dificuldades, além de possibilitar uma tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos enfrentados por eles.

COMPARAÇÃO ENTRE DUAS CONCEPÇÕES DE AVALIAÇÃO

MODELO TRADICIONAL	MODELO ADEQUADO
Foco na promoção – o alvo dos alunos é a promoção. Nas primeiras aulas, se discutem as regras e os modos pelos quais as notas serão obtidas para a promoção de uma série para outra. **Implicação** – as notas vão sendo observadas e registradas. Não importa como elas foram obtidas, nem por qual processo o aluno passou.	**Foco na aprendizagem** – o alvo do aluno deve ser a aprendizagem e o que de proveitoso e prazeroso dela obtém. **Implicação** – neste contexto, a avaliação deve ser um auxílio para se verificar quais objetivos foram atingidos, quais ainda faltam e quais as interferências do professor que podem ajudar o aluno.
Foco nas provas – são utilizadas como objeto de pressão psicológica, sob pretexto de serem um "elemento motivador da aprendizagem", seguindo ainda a sugestão de Comenius em sua Didática Magna criada no século XVII. É comum ver professores utilizando expressões como "*Estudem! Caso contrário, vocês poderão se dar mal no dia da prova!*" *ou ainda* "*Fiquem quietos! Prestem atenção! O dia da prova vem aí e vocês verão o que vai acontecer...*". **Implicação** – as provas são utilizadas como um fator negativo de motivação. Os alunos estudam pela ameaça da prova, não pelo que a aprendizagem pode lhes trazer de proveitoso e prazeroso. Estimula o desenvolvimento da submissão e de hábitos de comportamento físico tenso (estresse).	**Foco nas competências** – o desenvolvimento das competências previstas no projeto educacional deve ser a meta em comum dos professores. **Implicação** – a avaliação deixa de ser somente um objeto de certificação da consecução de objetivos, mas também se torna necessária como instrumento de diagnóstico e acompanhamento do processo de aprendizagem. Neste ponto, modelos que indicam passos para a progressão na aprendizagem, como a Taxonomia dos Objetivos Educacionais de Benjamin Bloom, auxiliam muito a prática da avaliação e a orientação dos alunos.
Os estabelecimentos de ensino estão centrados nos resultados das provas e exames – eles se preocupam com as notas que demonstram o quadro global dos alunos, para a promoção ou reprovação. **Implicação** – o processo educativo permanece oculto. A leitura das médias tende a ser ingênua (não se buscam os reais motivos para discrepâncias em determinadas disciplinas).	Estabelecimentos de ensino centrados na qualidade – os estabelecimentos de ensino devem preocupar-se com o presente e o futuro do aluno, especialmente com relação à sua inclusão social (percepção do mundo, criatividade, empregabilidade, interação, posicionamento e criticidade). **Implicação** – o foco da escola passa a ser o resultado de seu ensino para o aluno e não mais a média do aluno na escola.

Fonte: KRAEMER, E. P. A avaliação da aprendizagem como processo construtivo de um novo fazer. Disponível em: <http://www.gestiopolis.com/Canales4/rrhh/aprendizagem.htm>. Acesso 03. Junho, 2015.

Diante disso, sugerimos ao professor que utiliza essa obra, um processo de ensino/aprendizagem que promova sempre uma avalição de forma contínua, cumulativa e sistemática e que vise acima de tudo:

- Diagnosticar e registrar os progressos e dificuladades do aluno para uma possível mudança de estratégia se necessário for.
- Possibilitar situações de auto avaliação para que o aluno tenha consciência e se responsabilize pelo empenho em avançar nesse processo de aprendizagem . O professor poderá usar um quadro como o sugerido a seguir:

	Satisfatório	Parcialmente satisfatório	Insatisfatório
Participei das aulas e esclareci minhas dúvidas			
Fiz minhas tarefas no prazo			
Estudo regularmente			

- A seção **Para estudar** oferece ao longo dos capítulos uma série de atividades para serem desenvolvidas pelos alunos. Utilize as atividades desta seção para propor aos alunos que as resolval em casa, comparando-as com aquelas desenvolvidas em sala de aula e trazendo-as para discussão em aulas subsequentes. Servem também para que os alunos façam revisões dos conteúdos dos capítulos, como forma de se prepararem para situações de avaliação.
- Forme duplas entre os alunos e faça com que um tenha que explicar para o outro a estrutura de resolução de alguns exercícios. Essa troca de informações é bem rica e construtiva;
- Se a sua escola possui um laboratório de informática, podem ser criadas atividades como processos avaliativos. O manual do professor sugere algumas atividades informatizadas.
- Faça um *checklist* no final de cada capítulo para que o aluno possa dizer se está dominando os temas estudados, e assim poderá se dedicar aos itens em que possui mais dificuldade ou não compreendeu. Observe o exemplo a seguir:

	DOMÍNIO COMPLETO	DOMÍNIO PARCIAL	NÃO DOMINADO
Resoluções de equações com uma incógnita.			
Ler e interpretar problemas.			
Resolução de sistemas lineares.			
Resolver equações fracionárias.			

- Fundamentar as decisões quanto à necessidade de procedimentos de reforço e recuperação de aprendizagem.
- Orientar as atividades de planejamento e replanejamento dos conteúdos curriculares.

Acreditamos que essas sugestões podem promover uma avaliação que englobe a observação e análise do conhecimento e de habilidades específicas adquiridas pelo aluno, além dos aspetos formativos.

Nessa proposta de avaliação, a obra permite que o professor avalie também aspectos das atitudes do aluno referentes à participação nas atividades pedagógicas, na responsabilidade e compromisso com o cotidiano escolar e, enfim, no cumprimento de seu papel de cidadão em formação.

Dessa forma, as avaliações propostas podem ser feitas por meio de provas escritas, trabalhos, pesquisas e observação direta, sendo que os aspetos qualitativos devem sempre prevalecer sobre os aspetos quantitativos. Os instrumentos de avaliação devem sempre abranger dois ou mais tipos, sendo que pelo menos um deles deve ser uma prova escrita, para que o aluno demonstre seus avanços na relação entre a escrita e leitura utilizada pela língua materna e a linguagem matemárica.

Os critérios dessas avaliações devem ser os previstos nos objetivos de cada componente curricular e nos objetivos gerais de formação educacional preconizada pela escola e, os resultados finais, devem ser registrados para cada componente curricular, por meio de sínteses dentro do período determinado por cada escola.

Os professores podem encorajar a aprendizagem significativa usando tarefas que irão engajar o estudante na busca de conexões entre o seu conhecimento prévio e o novo conhecimento, usando estratégias de avaliação que premiam a aprendizagem significativa.

Não é possível ao estudante alcançar altos níveis de aprendizagem significativa até que uma estrutura de concecimentos relevantes seja construída. Neste estágio, a aprendizagem passa a ser um processo interativo ao longo do tempo até se atingir a proficiência na área deste conhecimento.

Na medida em que interage com a informação, o estudante está construindo seu conhecimento, ele faz conexões importantes entre significados e desse modo possibilita a sua aprendizagem significativa.

Referências sobre avaliação

ALARCÃO, I. *Professores reflexivos em uma escola reflexiva.* 7ª Ed., São Paulo: Cortez, 2010.

ARROYO, M. G. *Imagens quebradas: trajetórias e tempos de alunos e mestres*. Petrópolis: Vozes, 2004.

CZESZAK, W. A. A. C. *A construção dos saberes dos professores e as contribuições do mapeamento conceitual.* 2011. 319 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2001. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/ *disponiveis*/48/48134/tde-28062011-091506/pt-br.php>. Acesso em 12 abr 2013.

HAYDT, R. C. C. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo: Ática, 1999.

KRAEMER, E. P. *A avaliação da aprendizagem como processo construtivo de um novo fazer.* Disponível em: <http://www.gestiopolis.com/Canales4/ rrhh/aprendizagem.htm>. Acesso 03. Junho, 2015.

LUCKESI, C.C. Avaliação da Aprendizagem Escolar. São Paulo: Cortez, 2005.

Referências de documentos oficiais

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 5ª série*. Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 6ª série*. Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 7ª série*. Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 8ª série*. Brasília, 1998.

FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO/Fiesp/Ciesp/Sesi/Senai/IRS. *Mecânica: metodologia*. São Paulo: Globo, 1996. (Telecurso 2000/Curso Profissionalizante).

SÃO PAULO (Cidade). Prefeitura Municipal. *Movimento de reorientação curricular-Matemática - Relatos de prática 4/8, Documento 6/92'*. São Paulo, 1992.

______ *Movimento de reorientação curricular - Matemática - Visão de área, Documento 5*. São Paulo, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Fundação para o Desenvolvimento da Educação. *A didática e a escola de 1º grau*. São Paulo, 1992. (Idéias, 11).

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino da Matemática - 1º grau.* 4. ed. São Paulo, 1991.

______ *Experiências matemáticas: 5ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 6ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 7ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 8ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Prática pedagógica: Matemática: 1º grau*. São Paulo, 1993.

______ *Proposta curricular de Matemática para o CEFAM e habilitação específica para o magistério*. São Paulo, 1990.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (3º e 4º Ciclos).* Brasília: MEC – Secretaria do Ensino Fundamental, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – MATEMÁTICA (3º E 4º CICLOS). Brasília: MEC – Secretaria do Ensino Fundamental, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO, *Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC – Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

Outros documentos interessantes

CRISCUOLO, C; LOMBARDO, M. Técnicas de sensoriamento remoto aplicadas ao ensino fundamental. *Boletim de Geografia*, 2011. PDF

Disponível em: <http://eduemojs.uem.br/ojs/index.php/BolGeogr/article/viewFile/14133/7492>. Acesso em: 12 out. 2011.

SIQUEIRA, A. Práticas interdisciplinares na educação básica: uma revisão bibliográfica-1970-2000. *ETD-Educação Temática Digital*, 2008.

Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/etd/article/viewArticle/1754>. Acesso em: 16 mar. 2012.

MOTA, I.A.R. TANGRAM. PDF

Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/trab_finais/TrabalhoIvany.pdf>. Acesso em: abr. 2012.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *Teaching Mathematics to English Language Learners*. PDF

Disponível em: <http://<www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/English%20Language%20Learners%20final%282%29.pdf>. Acesso em: abr. 2012.

ALVES, E.L.; Bandão C.L.F.; Araquam, W.W.C. *A resolução de problemas de distâncias inacessíves com o uso do Geogebra por crianças do Ensino fundamental*. VI EPBEM – Monteiro, PB – 09, 10 e 11 de novembro de 2010.

Disponível em: <www.sbempb.com.br/epbem>. Acesso em: 12 fev. 2012.

FONTALVA, Gerson Martins. *Um estudo sobre inequações*. PDF

Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteres%5Cp040.doc>

Sugestão de sites

A seguir, relacionamos um conjunto de *sites* úteis para o desenvolvimento das atividades do professor de matemática. Atualmente, são inúmeras as possibilidades de indicações de endereços interessantes para pesquisa. No entanto, para que isso seja feito com segurança, selecionamos alguns sites seguros, dentro dos quais encontram-se diversos outros *links* que o direcionarão para um rico universo de pesquisa. Todos os *sites* a seguir foram acessados pela última vez em 28 de março de 2012.

Associação dos professores de matemática.

Disponível em: < http://www.apm.pt/portal/index.php>.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Disponível em: <www.sbem.com.br>.

Sociedade Brasileira Matemática.

Disponível em: <www.sbm.com.br>.

Revista Scientific American Brasil.

Disponível em: <www.sciam.br>.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Disponível em:<www.ibge.gov.br>.

WebAlgebra:A Series of 49 lessons.

Disponível em: <www.albert.math.uiuc.edu/algebra.html>.

Site com material de apoio aos alunos do curso de licenciatura em matemática do IME-USP.

Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br>.

Site mantido pela USP-Universidade de São Paulo com vários softwares gratuitos destinados ao ensino da Matemática

Disponível em: <http://www.ludoteca.if.usp.br/index.php>.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Disponível em: <http://www.sbem.com.br>.

Instituto de Matemática da PUCRS

Disponível em: <http://www.mat.pucrs.br>.

Instituto de Matemática da USP – Laboratório de Matemática

Disponível em: <http://www.ime.usp.br/lem>.

Instituto de Matemática, Estatística e Computação da UNICAMP

Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/>.

Orientações Específicas

Capítulo 1: Números Naturais

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-diae, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 10

Como já vimos anteriormente, os números racionais surgiram com propósito relacionado à noção de medidas e são utilizados para representar quantidades não-inteiras, além de relações para comparar duas grandezas do mesmo tipo, como por exemplo: comprimentos, superfícies, entre outras.

O conjunto dos números racionais contém os números naturais, os números inteiros e os números representados por frações ou decimais.

Número Racional é todo número que pode ser escrito na forma a/b,com a e b inteiros, $b \neq 0$.

Assim, o conjunto dos números racionais é indicado por:

$$\S = \left\{ \frac{a}{a} / a \in \text{¢} \text{ e } b \in \text{¢} \right\}$$

As frações são representações de divisões exatas ou não e, é por esse fato, que esses números são resultados de uma divisão dos números inteiros. Eles permitem dividir a unidade em partes e pegar certo número delas.

Todo número inteiro pode ser representado por uma fração e então, dizemos que todo inteiro é um número racional.

O denominador de uma fração, a parte de baixo dela, representa em quantas partes o todo será dividido. O numerador indica quantas partes daquele tamanho queremos pegar.

Lembrando que as frações podem ser representadas como uma divisão, para convertemos os números fracionários em números decimais, basta que efetuemos a divisão entre o numerador e o denominador. Quando essa divisão dá um valor exato, dizemos que o temos um número decimal exato, por exemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{9}{6} = 1{,}5 \qquad \frac{(-50)}{16} = 3{,}125$$

Se acaso essa divisão dá um algarismo ou um grupo de algarismos repetidos, dizemos que esses números são chamados dízimas periódicas e a fração que gerou essa dízima é chamada geratriz. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333 \qquad \frac{25}{6} = 4{,}16666 \qquad \frac{124}{990} = 0{,}12525$$

Como vimos acima, para converter um número fracionário em um número decimal, basta efetuarmos a divisão do numerador pelo denominador. Para convertermos um número decimal em um número fracionário, basta encontrarmos uma divisão que resulte no número decimal desejado, que nada mais é do que o processo inverso.

Curiosidade

Entre dois números racionais diferentes existe uma infinidade de outros números racionais.

Essa afirmação se confirma se observarmos o que ocorre entre o número 2 e o 3 no exemplo abaixo:

Entre o 2 e 3 existe, por exemplo, o número 2,9, que está bem próximo de 3.

Entre o 2,9 e o número 3 existe, o número 2,99, que está um pouquinho mais perto.

Da mesma forma, entre o 2,99 e o número 3, existe o 2,999, que está ainda mais perto do 3 que o anterior.

É possível concluir que se continuarmos esse processo indefinidamente, sempre haverá um número mais próximo de 3, sem que seja ele mesmo.

Página 12

Insista com os alunos na caracterização das dízimas periódicas como números racionais.

Página 14

Professor: discutimos até aqui que os números obedecem a padrões elegantes e formam uma linguagem com diversidade e riqueza própria. Em geral todos os conjuntos que mostramos anteriormente explicavam situações com coerência e durante muito tempo se acreditou que tudo estava explicado.

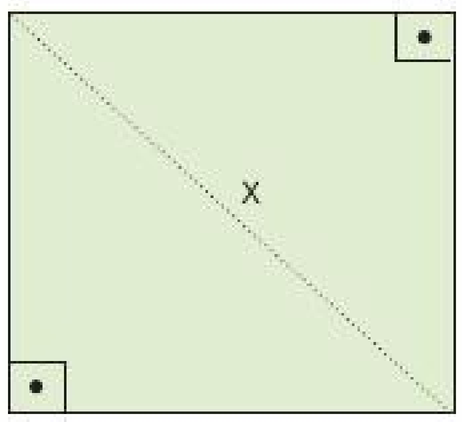
Porém, uma classe de números não se enquadra nas situações estudadas antes e durante muito tempo foi um assunto proibido, justamente porque não havia uma explicação.

Imagina-se que para medir comprimentos sempre teremos um número racional como resposta, ou uma divisão entre dois inteiros a e b, na qual b não seja zero.

Mas ao medirmos a diagonal de um quadrado encontramos algo curioso, pois a razão entre as medidas não pode ser representada como divisão entre dois números inteiros. Assim, surgiram números com padrões estranhos aos números antes conhecidos, os Números Irracionais.

Há indícios que a descoberta dos irracionais está ligada a utilização do teorema de Pitágoras, que você já estudou um dia, ou ouviu falar.

Um exemplo disso é o cálculo da diagonal do quadrado de lado medindo 1 unidade de comprimento (qualquer unidade que desejarmos, sem especificar uma)



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

Assim, resolvendo o valor da igualdade acima, o valor da diagonal será:

$$x = \sqrt{2}$$

O valor $\sqrt{2}$ não pode ser escrito por meio de nenhuma representação nos conjuntos conhecidos até então e, esse fato, representou assunto de proporções religiosas entre os membros da escola pitagórica, por exemplo. Veja o próximo texto Quando, Quem e Onde no qual destacamos um pouco mais da história da escola pitagórica.

Hoje é possível encontrar o valor desse número com diversas casas decimais, sem repetições.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623731$$

Neste caso, assim como nos números periódicos, temos uma infinidade de algarismos à direita da vírgula, mas, o número em questão não pode ser obtido como uma fração do tipo $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$. Por muito tempo apenas o $\sqrt{2}$ foi conhecido, os números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ só apareceram mais tarde e somente em 370 a.C. um discípulo de Platão chamado Eudoxo, estabeleceu que esse tipo de número mereciam tinha uma outra concepção lógica.

São exemplos de números irracionais todas as raízes quadradas de números naturais cujos radicandos não sejam quadrados perfeitos.

Além disso, todas as raízes cúbicas de números naturais cujos radicandos não sejam cubos perfeitos e o resultado de algumas operações entre um número racional e um irracional: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{7}$, $2\sqrt[3]{2}$, $8 + \sqrt[5]{2}$.

Surgem também nessa classe de números irracionais alguns já bem conhecidos, como o π, que é representado por uma dízima não periódica igual a 3,141592654…..

Outro número famoso é o Número Áureo, que é representado pela letra grega (fi), cujo valor está ligado a construção do retângulo áureo e foi utilizado pelos gregos em sua arquitetura e em muitas obras do Renascimento, como os clássicos de Leonardo da Vinci.

Página 15

Professor, se achar conveniente, pode demonstrar a seus alunos que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde **a** e **b** são primos entre si. Veja como:

Vamos supor que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com **a** e **b** primos entre si

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 2b^2$$

Se **b** é inteiro, b^2 também é inteiro. Portanto, a^2 é o dobro de um inteiro. Portanto a^2 é par.

Não há nenhuma maneira de a^2 ser par, sem que **a** também não seja par, pois:

– um número terminado em 1, ao quadrado, termina em 1;
– um número terminado em 3, ao quadrado, termina em 9;
– um número terminado em 5, ao quadrado, termina em 5;
– um número terminado em 7, ao quadrado, termina em 9;
– um número terminado em 9, ao quadrado, termina em 1;

Portanto **a** também é par, ou seja a=2n.

$$a^2 = (2n)^2 = 2b^2$$
$$4n^2 = 2b^2$$
$$b^2 = 2n^2$$

Portanto, b^2 é par e, consequentemente, **b** é par.

Mas se **a** e **b** são pares, então não são primos entre si, e caímos numa contradição. Portanto, não podemos escrever $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$, onde **a** e **b** são primos entre si.

Página 17

Pitágoras (572-497 a.C.) é uma das figuras mais fascinantes do pensamento ocidental e considerado também umas das mais enigmáticas. Acredita-se que ele deixouSamos, sua terra natal, na época que ascendeu ao poder o tirano Policrates, para fixar-se no Sul da Itália, na cidade de Crotona,por volta de 552 a.C. Nessa região ele fundou uma comunidade secreta quefoi dissolvida na primeira metade do séc. V a.C. Os segredos dos Pitagóricos teriam sido revelados por Filolau de Crotona, que teria vendido essas informações à Dionísio de Siracusa, ou Dione. Foi o filósofo Platão que, em sua primeira viagem à Sicilia, teve acesso a obra da escola pitagórica por meio dos três livros que continham essa doutrina e a divulgou. A compreensão desta filosofia apresenta inúmeras dificuldades, não apenas devido às diferenças entre os pitagóricos, mas também por causa do carácter esotérico dos seus ensinamentos. Veja alguns tópicos desenvolvidos pelos pitagóricos:

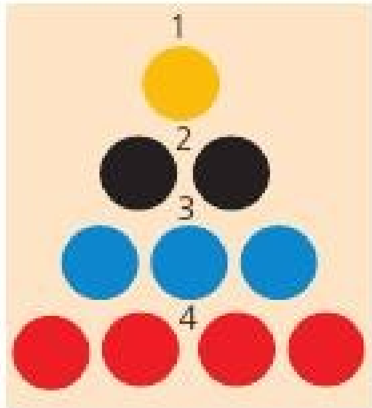
1) Sobre a origem da Alma: A escola Pitagórica defendia a origem divina da alma e a existência de um pecado original. Outrora a alma vivia junto dos deuses, mas agora expiava o seu pecado num cárcere corpóreo. Após a morte do corpo, a alma separa-se dele e vai purificar-se no Hades, antes de regressar de novo à Terra para encarnar num corpo. No decurso das transmigrações, as almas vão expiando as faltas cometidas na existência anterior até serem consideradas dignas de serem libertadas do ciclo de existências e poderem finalmente conhecerem uma vida divina imortal. Pitágoras terá defendido que esta purificação se faria através do saber. Na sua posse o homem "desprendia-se" da realidade material contemplando outra que lhe era superior. Os seguidores desta doutrina deviam seguir um enorme número de regras para purificar a alma e instaurar a harmonia entre o homem e o cosmos. Diariamente deviam, por exemplo, perguntar-se: "Que faltas cometi?, Que bem pratiquei? Que Dever Esqueci?".

2) Sobre os Números: Representam uma realidade superior com características de perfeição, eternidade e divinas.

   > "......e a causa disso reside no facto de que não os extraíram das coisas sensíveis; estes entes matemáticos são sem movimento, exceto no que concerne à Astronomia".
   >
   > Aristóteles, Metafísica, I,8,990."

   A figura sagrada do Tetraktys: Partindo desta ideia da perfeição divina dos números, começaram a estudar as relações que os mesmos tinham entre si. Os números resultam do desdobramento da unidade. O Um divide-se em Dois e assim sucessivamente.

   Pode-se dizer que o verdadeiro significado do número Pitagórico está expresso numa figura sagrada, a Tetraktys, sobre a qual faziam os seus juramentos. A Tetraktys representa o número 10, tendo a forma de um triângulo cujos lados têm 4 números.Muitas das explicações que deram da realidade tinham por base diversas disposições desta figura geométrica.



3) A visão da Matemática: Representa o estudo das relações entre números e figuras geométricas, fato que levaram a interessantes descobertas no domínio da matemática, como o célebre teorema de Pitágoras.
   Os Números foram considerados os Princípios das Coisas e estabeleceram também relações entre os números e as coisas:

   > "Os chamados pitagóricos foram os primeiros a dedicarem-se às matemáticas, fazendo-as progredir. Penetrados desta disciplina, pensaram que os princípios das matemáticas se identificavam com os princípios de todas as coisas. Os números, são, pela sua natureza, os que ocupam o primeiro lugar entre esses princípios, e os pitagóricos pensavam discernir neles, mais do que no Fogo, na Terra ou na Água, um grande número de semelhanças com as coisas que existem e são geradas".
   >
   > Aristóteles, Metafísica, 5,585 b.

   Para os pitagóricos a Matemática é considerada a Chave da descoberta da realidade, pois, dado que toda a realidade é constituída por números, o seu conhecimento prévio torna-se a condição imprescindível para o conhecimento da realidade. Afirmaram que a matemática era a ciência que nos permite compreender as coisas, ideia que inspirou muito mais tarde a Ciência Moderna.

   > "Todas as coisas conhecidas têm um número, porque sem ele não seria possível que algo fosse compreendido ou conhecido".
   >
   > Filolau, Frag. 4

4) Estudos da Acústica: Entre as descobertas que são atribuídas aos pitagóricos encontramos a dos intervalos fixos na escala musical. Eles determinaram que existia uma relação entre o comprimentos das cordas e as sete notas musicais, segundo uma proporção que podia ser expressa em termos numéricos. A escala tonal corresponde à proporção harmónica 12:8:6, onde 12:6 é a oitava, 12:8 a quinta, 8:6 a quarta. Esta descoberta parece ter servido como prova que toda a realidade era composta por números e se podia expressar através de números.

5) No campo da Física: As relações entre os números e as coisas conduziram à concepção matemática da realidade. Os números constituíam o verdadeiro elemento de que era feito o mundo. Chamavam Um ao ponto, Dois

à linha, Três à superfície e Quatro ao sólido, de acordo com o número mínimo de pontos necessários para definir cada uma dessas dimensões. Os pontos, para eles, tinham tamanho; as linhas altura; e as superfícies, profundidade. Os pontos se somavam para formar as linhas; as linhas, por sua vez juntavam-se para formar superfícies; e estas, para formar volumes. A partir de Um, dois, três, quatro, podiam construir um mundo. Não é de estranhar, pois que o dez, a soma destes números tenha um poder sagrado e omnipotente para a escola pitagórica. Destas as relações entre números e as formas geométricas eles identificaram a estreita relação entre a física e a matemática.

6) Modelo do Cosmos*: A concepção do cosmos pitagórica estava subordinada às propriedades de perfeição atribuídas ao número dez. Dado que a quantidade de corpos celestes conhecidos na época, eram apenas 9 (Terra, Lua, Sol, os cinco planetas e a esfera das estrelas fixas), os pitagóricos acrescentaram mais um para completar dez, a chamada "Anti-Terra". Para concluir esse modelo de Cosmos, o fogo foi colocado no centro desse sistema, com os dez astros girando à sua volta.

   Pitágoras foi o primeiro a utilizar o termo "cosmos" para referenciar o Universo, talvez querendo se referir ao firmamento de estrelas.

Disponível em: <http://afilosofia.no.sapo.pt/pitagorismos.htm> Acesso em 20. Mar. 2015.

* Cosmo (ou Cosmos) (do grego antigo κόσμος, transl. kósmos, "ordem", "organização","beleza","harmonia") Expressa a noção de Universo. É um termo que nomeia o universo em seu conjunto, toda a estrutura universal em sua totalidade, desde o microcosmo ao macrocosmo. Pode ser estudado na Cosmologia.

Página 20

Vários povos se fascinaram pelo número π e certa fascinação mística surgiu, pois, se intrigavam com o fato do comprimento de toda e qualquer circunferência dividido por sua largura resultar no mesmo valor. Até os antigos babilônios deixaram em uma de suas placas de argila, com escrita cuneiforme, a seguinte equação, relativa à circunferência $P = \left(3 + \frac{1}{8}\right) \cdot d$. Assim, para esse povo, há cerca de 4 000 anos, o valor de π era $\frac{25}{8} = 3{,}125$. Embora não seja muito exato, ele apresenta uma aproximação razoável para os recursos de sua época. Os egípcios, por sua vez, aproximaram o π como o resultado de $\sqrt{10} = 3{,}162277$. Num Papiro de Rhind é possível encontrar a afirmação que a área A de uma circunferência de diâmetro d pode ser expressa por $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$. Recorde-se que a área de uma circunferência é igual a Pi vezes o raio ao quadrado e o raio é metade do diâmetro d e, então, por isso, $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$. Assim, $\frac{A}{d^2} = \frac{\pi}{4}$ e, pelo Papiro de Rhind o valor de π é apresentado como 3,160. Embora esse valor ainda não tivesse um nome específico, já se sabia que esse número surgiria sempre que se relacionasse o comprimento e o diâmetro de uma circunferência.

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), já sabia que p não era racionalmente determinável, ou, ao menos, suspeitava disso e, assim, descobriu um processo para determinar o valor , conhecido como Método de Arquimedes. Por meio de processos geométricos Arquimedes utilizou alguns polígonos regulares, com um número crescente de lados, até chegar ao polígono de 96 lados, através do qual obteve a seguinte aproximação de π.

$$3{,}1410 < \pi < 3{,}1428$$

No entanto Hui (263 d. C.) descobriu, através de polígonos regulares inscritos e circunscritos que:

$$3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$$

Dois séculos mais tarde, no ano 480 da nossa era, certo engenheiro hidráulico chinês de nome Tsu Chung-Chi /430-501 d.C.), chegou a um valor de π extraordinariamente preciso, para sua época. O π de Tsu Chung-Chi, oscilaria entre 3,1415926 e 3,1415927. Sendo desconhecido como é que ele chegou a este resultado. Na Índia (Séc. V e VI) Aryabhata, (476-550), na sua obra "Aryabhatiya", enuncie: "Junte 4 a 100, multiplique por 8, junte ainda 62.000, ter-se-á assim para um diâmetro de duas míriadas (20 000), o comprimento aproximado da circunferência".

A época do Renascimento Europeu trouxe um novo mundo matemático. Entre os primeiros efeitos desse fato está a necessidade de encontrar uma fórmula para o π. Descobriu-se então a definição não geométrica de π e do papel "não geométrico" deste valor. Assim se chegou à descoberta das representações de π por séries infinitas.

Um Inglês chamado Shanks, usou a fórmula de Machin para calcular π até às 707 casas decimais, das quais só 527 estavam corretas, publicando o resultado do seu trabalho em 1 873.

Em 1 949 um computador foi usado para calcular π até às 2 000 casas decimais. Em 1961 conseguiu-se através de computação a aproximação de π através de 100 265 casas decimais, mais tarde em 1967 aproximou-se até às 500 000 casas decimais.

Recentemente, David Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe contabilizaram 10 bilhões de casas decimais para π, usando uma fórmula que dá cada casa decimal do π individualmente, para cada n escolhido.

O primeiro símbolo π, com o significado que ele tem hoje em dia, foi desenvolvido pelo matemático inglês William Jones em 1706. O matemático suíço Leonhard Euler em 1737 adotou o símbolo e, somente a partir daí, a comunidade científica aceitou essa notação como padrão.

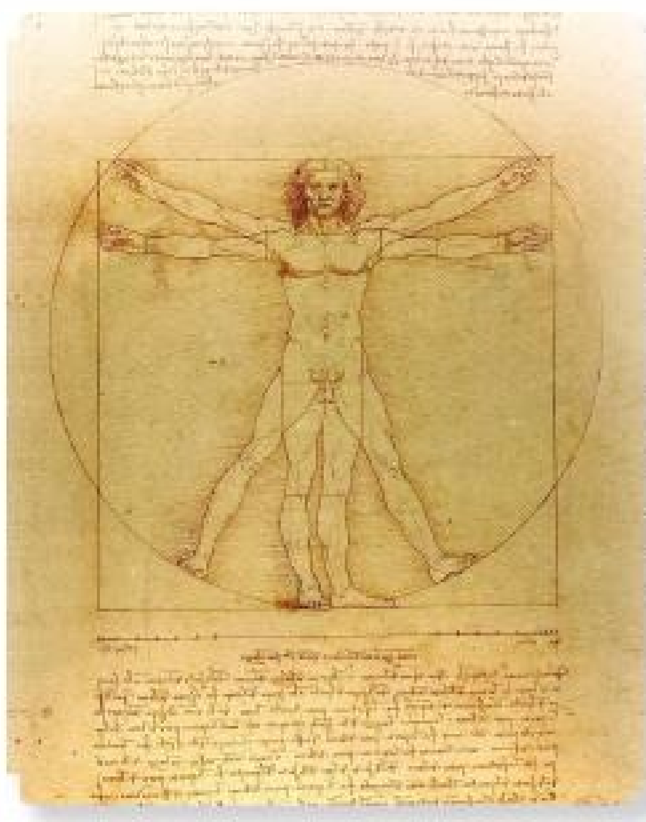
Disponível em: < http://matematica.no.sapo.pt/nreais/nreais.htm> Acesso em 18 mar. 2015.

Página 24

Explore o conteúdo da seção CONEXÃO sobre o número de ouro e a divina proporção. Há aspectos muito interessantes sobre o uso do número ∅ nas artes, no desenho industrial e na arquitetura. Aproveite para comentar novamente sobre o π e dizer aos alunos que existem outros números na Matemática de tão grande importância, que “às vezes” parece que eles “existem”, ou seja, parece que não dependem de nenhuma definição matemática para terem a importância que têm.

Marcus Vitruvius Pollio foi um dos primeiros estudiosos a pesquisar sobre as proporções humanas. Arquiteto e escritor romano do século I a.C., ele escreveu uma obra com dez volumes, chamada “De Architectura”, na qual apresentava questões técnicas e estéticas ligadas à arquitetura e à astronomia. Foi nessa obra que ele descreve as proporções no corpo humano e define que um corpo bem formado devia apresentar proporções harmoniosas.

Baseado nesse estudo, Leonardo da Vinci ilustra o “Homem Vitruviano”, no qual coloca a figura humana com braços e pernas abertas, inserida em um círculo e um quadrado, simultaneamente (formas geométricas consideradas perfeitas). Marcus Vitruvius já havia tentado essa representação, mas suas tentativas ficaram imperfeitas. Foi apenas com Leonardo que o encaixe saiu perfeito dentro dos padrões matemáticos esperados.



Galeria da Academia de Belas Art; Veneza

DA VINCI, Leonardo. Homem Vitruviano, 1490.
Lápis e tinta, 34 x 34 cm. Gallerie dell'Accademia Veneza.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1. Sugira que seus alunos verifiquem algumas das proporções do corpo humano estabelecidas por Da Vinci, baseadas nos estudos de Marcus Vitruvius. Por exemplo:
   - O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura;
   - Um palmo é a largura de quatro dedos;
   - Um pé é a largura de quatro palmos;
   - A distância entre o nascimento do cabelo e o queixo é um décimo da altura de um homem;
   - O pé é um sétimo da altura do homem”.

Discuta a obtenção da harmonia na imagem e a relação com a razão áurea (aproximadamente 1,6) em cada medida obtida.

Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_%20numero%20_%20ouro%20.pdf > Acesso em 18 mar. 2015.

Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html > Acesso em 20 mar. 2015.

Disponível em: < http://www.ucs.br/ucs/tplcinfe/eventos/cinfe/artigos/artigos/arquivos/eixo_tematico5/Numero%20de%20Ouro%20-%20sua%20incidencia%20na%20natureza.pdf > Acesso em 17 mar. 2015.

Página 26

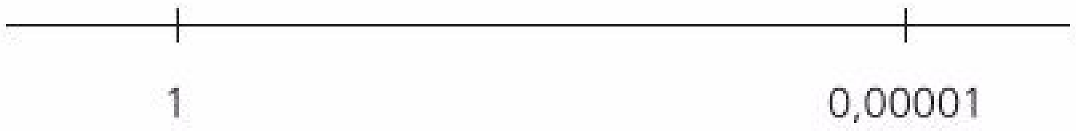
Professor, como os números reais podem ser associados a cada ponto de uma reta, eles nos permitem explorar a ideia do contínuo.

O matemático russo Georg Cantor (1845 - 1918) destacou, em seus estudos, diversos aspectos interessantes sobre conjuntos numéricos finitos e infinitos. Ele mostrou, por exemplo, que os números racionais podem ser associados um a um aos números naturais, ou seja, que é possível contar os números racionais. Mostrou também que dois segmentos de quaisquer tamanhos têm o mesmo número de pontos.

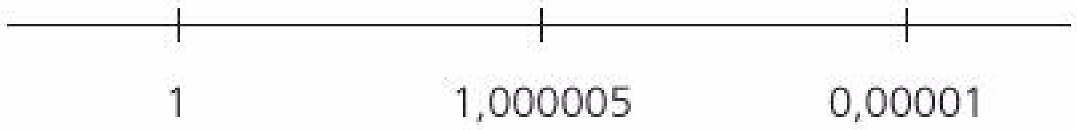
A partir das demonstrações de Cantor, como a que diz que um segmento de reta tem o mesmo número de pontos que uma linha infinita, podemos fazer analogias interessantes, que podem ser propostas aos alunos em discussão. Uma delas é:

Em 1 segundo, existem tantos instantes quanto em toda a eternidade.

Observe outra curiosidade sobre um intervalo contínuo: se tomarmos dois pontos quaisquer da reta numerada, eles nunca estarão encostados. Isso significa que sempre se pode colocar um ponto entre eles. Por exemplo:



Para obtermos um ponto entre eles, basta fazermos $\frac{(1 + 0{,}00001)}{2}$, que resulta 1,000005:



Se dois pontos quaisquer nunca estão colados, a reta é contínua, sem buracos? Sim, ela é! Aponte para qualquer lugar da reta: sempre haverá um número real correspondente a este ponto.

Página 35

Professor, destaque que apesar de simples, a propriedade distributiva costuma gerar algumas dúvidas, particularmente pela má interpretação do significado dos parênteses.Veja o quadro a seguir e, se achar conveniente, destaque no quadro de giz.

Expressão	Errado	Correto
$2 \cdot (5 \cdot 7)$	$\mathbf{2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24}$	$2 \cdot (35) = 70$
$4 + (15 + 5)$	$\mathbf{4 + 15 + 4 + 5 = 28}$	$4 + 15 + 5 = 24$
$9 + (10 \cdot 8)$	$\mathbf{9 \cdot 10 + 9 \cdot 8 = 162}$	$9 + 80 = 89$
$5 \cdot (3 + 2 \cdot x)$	$\mathbf{5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x = 15 + 50x}$	$5 \cdot x + 5 \cdot 2x = 15 + 10x$
$3 \cdot 4 + 6$	$\mathbf{3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 30}$	$12 + 6 = 18$

Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo1.pdf >
Acesso em 15.Mar.2015.

Página 36

O uso correto dessas propriedades é essencial para a resolução de problemas que envolvam expressões e equações algébricas. De fato, boa parte dos erros cometidos provém do emprego de regras que não constituem propriedades das operações aritméticas. Assim, é interessante destacar que a expressão equivalente a $(x - 4)^2$, NÃO É $x^2 - 4^2$, isso não está correto. Alguns erros freqüentes de manipulação de potências são apresentados no quadro a seguir:

Falsa propriedade	Exemplo com erro	Propriedade correta	Exemplo correto
$\mathbf{(a + b)^n = a^n + b^n}$	$\mathbf{(3 + x)^2 = 3^2 + x^2}$	$(ab)^n = a^n b^n$	$(3x)^2 = 3^2x^2$
$\mathbf{a^{m+n} = a^m + a^n}$	$\mathbf{4^{2+x} = 4^2 + 4^x}$	$a^{m+n} = a^m a^n$	$4^{2+x} = 4^2 4^x$
$\mathbf{a \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	$\mathbf{2 \cdot 10^3 = 20^3}$	$(ab)^n = a^n b^n$	$20^3 = 2^3 10^3$
$\mathbf{a^{mn} = a^m a^n}$	$\mathbf{3^{2x} = 3^2 3^x}$	$a^{mn} = (a^m)^n$	$3^{2x} = (3^2)^x = 6^x$

Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo1.pdf >
Acesso em 15. Mar. 2015.

Página 38

Professor, se um número real está em notação científica, ele é escrito na forma $\pm\, m \times 10^n$, de forma que o coeficiente m é um número real maior ou igual a 1 e menor que 10, e o expoente n é um número inteiro. Para trabalhar com números na notação científica, talvez seja importante destacar a representação com potências de 10 e mostrar a relação entre o expoente da potência e o número de zeros antes e depois da vírgula decimal. O quadro a seguir relaciona essa representação:

Forma decimal	Forma de produto	Forma de potência
0,0001	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	10^{-4}
0,001	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	10^{-3}
0,01	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	10^{-2}
0,1	$\frac{1}{10}$	10^{-1}
1	1	10^{0}
10	10	10^{1}
100	$10\cdot 10$	10^{2}
1 000	$10\cdot 10\cdot 10$	10^{3}
10 000	$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$	10^{4}

Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo1.pdf >
Acesso em 15.Mar.2015.

Desafio

		(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)	(VII)	(VIII)
X	Y	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{x+y}$	$\sqrt{x}-\sqrt{y}$	$\sqrt{x-y}$	$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$	$\sqrt{x\cdot y}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$
7	2	4,059965	3	1,231538	2,236068	3,741657	3,741657	1,870829	1,870829
5	3	**3,968119**	**2,828427**	**0,504017**	**1,414214**	**3,872983**	**3,872983**	**1,290994**	**1,290994**
15	10	**7,035261**	**5,000000**	**0,710706**	**2,236068**	**12,24745**	**12,24745**	**1,224745**	**1,224745**
49	34	**12,83095**	**9,110434**	**1,169048**	**3,872983**	**40,81666**	**40,81666**	**1,20049**	**1,20049**
121	96	**20,79796**	**14,73092**	**1,202041**	**5,000000**	**107,7775**	**107,7775**	**1,122683**	**1,122683**

Os principais comentários devem relacionar os resultados de acordo com a operação solicitada em cada caso. O aluno deve perceber que cada tipo de operação interfere no resultado obtido. Dessa forma, as colunas V e VI têm o mesmo resultado porque implicam em operações iguais, da mesma forma que as colunas VII e VIII.

Página 39

Professor, o aluno tende a considerar que a notação com potências de 10 não é necessária, principalmente quando utiliza uma calculadora científica, que apresenta resultados com potências de 10, confundindo muito o aluno. Na realidade, o que realmente importa enfatizar para os alunos é que a notação científica presta-se a números muito pequenos ou muito grandes, de tal forma que a potência de 10 nos dê uma condição de dimensionamento já na leitura dos números. Insista em comparar grandezas microscópicas (como células e dimensões atômicas) ou macroscópicas (como distâncias astronômicas, velocidade da luz etc) com outras do cotidiano, tais como, comprimento da classe, altura de algum prédio muito conhecido etc.

Resoluções da seção Para estudar

49. a) 0,3

b) –3,33

c) 0,033

d) 0,0003

50. a) 4,5

b) –0,75

c) 4,4

d) 0,625

51. a)

$$\begin{array}{r} x = 3{,}6666... \\ 10x = 36{,}6666... \\ \hline 9x = 33 \end{array} \rightarrow x = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$$

b)

$$\begin{array}{r} x = 1{,}888... \\ 1\,000x = 251{,}251251... \\ \hline 999x = 251 \end{array} \rightarrow x = \frac{251}{999}$$

c)

$$\begin{array}{r} x = 1{,}888... \\ 10x = 18{,}888... \\ \hline 9x = 17 \end{array} \rightarrow x = \frac{17}{9}$$

d)

$$\begin{array}{r} x = 3{,}010101... \\ 100x = 301{,}010101... \\ \hline 99x = 298 \end{array} \rightarrow x = \frac{298}{99}$$

52. a) finita

b) infinita e periódica

c) infinita e não-periódica

d) infinita e não-periódica

53. São números racionais: 5; –7,2 e 7,8333...

Há infinitas divisões que dão 5; –7,2 e 7,8333...

Exemplos: $\frac{5}{1}$, $\frac{10}{2}$ e $\frac{15}{3}$ dão 5;

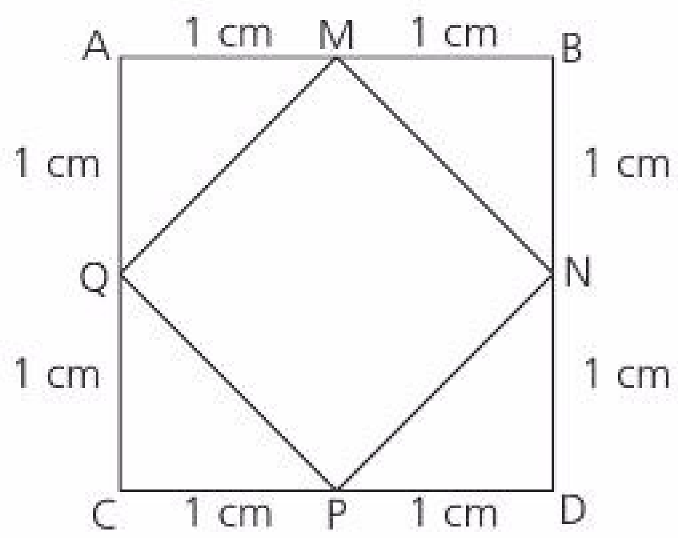
$-\frac{72}{10}$, $-\frac{36}{5}$, $-\frac{108}{15}$ dão –7,2; e

$\frac{705}{90}$, $\frac{141}{18}$ e $\frac{47}{6}$ dão 7,8333...

54. São racionais os números dos itens a e c; os demais são irracionais.

55. São racionais os números dos itens a e d; os outros são irracionais.

56.



a) $A = 2 \cdot 2 = 4\ cm^2$

b) $\overline{OM} = \overline{MN} = \overline{NP} = PO = \sqrt{2} \rightarrow$

$\rightarrow A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow A = 2\ cm^2$

c) $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$ cm

d) O número que expressa a medida dos lados é racional, mas o das diagonais não.

e) O número que expressa a medida dos lados não é racional, mas o das diagonais é.

57. a) O comprimento da circunferência menor é $1{,}5 \cdot \pi$ cm; o da maior é $3 \cdot \pi$ cm.

b) O número que expressa a medida do diâmetro é um número racional, mas o do comprimento é irracional.

58. a) 3

b) –3

c) 3,333...

d) $\sqrt{3}$

e) todos

59. a) <

b) <

c) >

d) >

e) =

f) <

60. a) $\in$

b) $\in$

c) $\in$

d) $\notin$

e) $\notin$

f) $\notin$

61. a) $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

b) $(\sqrt{2})^2 = 7$

c) $\sqrt{13}) \cdot 0 = 0$

d) $\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{25} = 5$

62. a) negativo

b) negativo

c) positivo

d) positivo

e) negativo

f) positivo

63. a) 52000

b) 0,003176

c) 5800000

d) 0,0275

e) 200000000

f) 0,0015

64. a) $7{,}0 \cdot 10^9$

b) $9{,}\ 460\ 5 \cdot 10^{12}$

c) $1{,}0 \cdot 10^{-6}$

d) $1{,}0 \cdot 10^{-4}$

65. a) $6{,}7 \cdot 10^9$

b) $7{,}1 \cdot 10^9$

c) $7{,}3 \cdot 10^9$

d) $8{,}1 \cdot 10^9$

66. a) $5{,}6 \cdot 10^9$ e $2{,}27 \cdot 10^9$

b) $3{,}33 \cdot 10^9$

Capítulo 2: Estudo do triângulo

Objetivos específicos do capítulo

Reconhecer e classificar triângulos quanto aos seus lados e ângulos.

Reconhecer a maior rigidez de um triângulo em relação aos outros polígonos. Verificar a condição de existência de um triângulo. Relacionar a medida do ângulo externo de um triângulo com a do ângulo interno.

Página 51

A atividade a seguir é interessante para comprovar a rigidez de um triângulo. Utilize palitos de sorvete ou outro palito qualquer, e percevejos para construir polígonos: quadriláteros, pentágonos, triângulos e outros. Faça com que os alunos observem que exceto o triângulo, todos os demais polígonos não têm rigidez (são deformáveis). O de quatro lados pode ser um quadrado que se transforma num losango. O de cinco lados pode ser um pentágono não regular que se torna regular e depois pode ficar não convexo. Os três lados de um triângulo determinam um único triângulo.

Destaque as ilustrações do texto para mostrar situações reais nas quais os triângulos são utilizados nas construções.

Páginas 52 e 53

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas. Se possível, solicite aos alunos que venham até o quadro de giz para fazer as representações dos triângulos.

Essa prática irá estimular a recordação do tema já abordado anteriormente e auxiliará o nivelamento do aprendizado em sala de aula. É possível que alguns alunos ainda tenham dificuldade para entender sobre os ângulos e essa fase é propícia para resolver esse problema.

Páginas 54 a 56

As atividades são baseadas na interpretação dos enunciados e buscam avaliar o entendimento dos alunos sobre os principais tópicos do conteúdo.

Página 57

Proceda de forma análoga em relação à leitura, mas represente no quadro de giz, separadamente cada assunto.

Destaque especialmente a introdução sobre as condições de existência de um triângulo.

Atividade extra:

A atividade abaixo faz parte de um material criado pelo Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP – campus SJ RioPreto, página 12, 13.

Veja em: Disponível em: < http://www.mat.ibilce.unesp.br/graduacao/pcc_2006-2007.pdf >. Acesso em 01 mai. 2012.

Obter a condição de existência de triângulo.

Material utilizado: canudos, linha de pipa e tesoura.

1. Corte canudos com medidas a, b e c como na tabela a seguir.

a	b	c	a + b	compare c com (a + b)
6 cm	8 cm	16 cm		
6 cm	8 cm	12 cm		
6 cm	8 cm	14 cm		
5 cm	7 cm	12 cm		
5 cm	7 cm	10 cm		
5 cm	7 cm	13 cm		

2. Tente fazer triângulos com essas medidas inserindo linha de pipa nos canudos para cada caso das medidas a, b e c da tabela. O que você observou?

3. Calcule a + b para os valores de a e b dados na tabela acima e registre na coluna correspondente. Na última coluna da tabela registre a relação entre a + b e c.

4. Qual a relação envolvendo a, b e c que garante a existência do triângulo cujos lados medem a, b e c?

Páginas 58 a 60

Para trabalhar o ponto de equilíbrio do triângulo (Baricentro) temos a seguinte sugestão de atividade: recortar um triângulo em papel cartão ou cartolina e construir, com compasso e régua, o baricentro. Faça um furo no baricentro para passar um barbante e comprovar que ele ficará em equilíbrio perpendicularmente ao barbante.

Utilize o software régua e compasso para obter uma geometria dinâmica, fazer observações e chegar a conclusões.

Veja em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/ >. Acesso em 24 abri. 2015

Processo de construção do baricentro:

- Determinar 3 pontos A, B e C.
- Na função segmento de reta, traçar segmentos para obter o triângulo ABC.
- Na função ponto médio, determinar o ponto médio de cada um desses segmentos.
- Na função ponto, marcar os pontos D, E e F, pontos médios dos lados do triângulo.
- Na função segmento, traçar a mediana de cada lado do triângulo.
- Na função ponto, marcar G, ponto de encontro das medianas.
- G é o baricentro do triângulo.
- Com a ferramenta mover ponto, movimento os vértices A, B e C.
- Registre as observações feitas.

Processo de construção do circuncentro:

- Desenhar um triângulo ABC.
- Marcar os pontos médios D, E e F dos lados do triângulo.
- Na função perpendicular, traçar a perpendicular de cada lado do triângulo (mediatriz) passando pelo seu ponto médio.
- Marcar o ponto de intersecção das mediatrizes e nomeá-la de T.
- T é o circuncentro do triângulo.
- Com a ferramenta mover ponto, movimento os vértices A, B e C.
- Peça o registro das observações feitas.

Processo de construção do ortocentro:

- Desenhar um triângulo ABC.
- Na função perpendicular, traçar a perpendicular (altura)da cada lado do triângulo passando pelo vértice oposto a cada lado.
- Marcar e nomear de O, o ponto de intersecção das alturas.
- O é o ortocentro do triângulo ABC.
- Movimente o vértice A e observe as medidas dos ângulos internos do triângulo. Repita o procedimento com os outros vértices do triângulo.
- Registre as observações feitas.

Processo de construção do incentro:

- Desenhar o triângulo ABC.
- NA função bissetriz, traçar a bissetriz de cada ângulo desse triângulo.
- Marcar e nomear a intersecção das bissetrizes (incentro) com a letra I.
- Com a ferramenta mover ponto, movimento os vértices A, B e C.
- Registre as observações feitas.

O vídeo "A comunidade", resolve o problema de uma comunidade que quer montar uma horta sem prejudicar as famílias envolvidas no projeto e para isso vão ter que lidar com o circuncentro de um triângulo.

Disponível em: < http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074 >. Acesso em 24 abri. 2015.

Página 62 e 63

As atividades são baseadas na interpretação dos enunciados e buscam avaliar o entendimento dos alunos sobre os principais tópicos do conteúdo.

É importante que o professor incentive a discussão na sala de aula, de tal maneira que os alunos percebam seus avanços e dificuldades.

Página 69

Desafio

O aluno deverá construir o circuncentro para garantir as mesmas distâncias entre o poço (circuncentro) e as casas (vértices do triângulo ABC).

Resoluções da seção Para estudar

24. a) $x + 112° = 180°$

$x = 68°$

b) O triângulo é isósceles

$90° + 2x = 180°$

$2x = 90° \rightarrow x = 45°$

c) $x + 133° = 180°$

$x = 47°$

25. a) $3x + x + 40° = 180°$

$4x = 140°$

$x = 35°$

Os ângulos serão 40°, 105°, 35°

b) $\overline{MN} // \overline{BC}$

$\hat{M} \equiv \hat{B} \rightarrow \text{med } \hat{M} = 64°$

Em AMN

$x + 64° + 32° = 180° \rightarrow x = 84°$

c) $2x - 30 + x + 90° = 180°$

$3x + 60° = 180° \rightarrow 3x = 120° \rightarrow x = 40°$

26. a) triângulo equilátero

$2p = 3 \cdot \text{lado}$

$2p = 3 \cdot 8 \rightarrow 2p = 24 \text{ cm}$

b) $3x = x + 6$

$2x = 6 \rightarrow x = 3$

$2p = 26 \rightarrow 26 = 9 + 9 + y$

$y = 26 - 18 \rightarrow y = 8 \text{ cm}$

27. a) $x = 90 + 25° \rightarrow x = 115°$

b) $149 = 90° + x \rightarrow x = 59°$

c) $x = (180° - 60°) + 20°$

$x = 140°$

28. $x + 60° - 90 = 180°$

$x = 30°$

$\Delta BNC \rightarrow 90°, 60°, 30°$

$\Delta ABH \rightarrow 90°, 60°, 30°$

29. a) $y = 40° + 30° \rightarrow y = 70°$

$x = 40° + (180° - 70°)$

$x = 150°$

b) $y = 36°$ (alternos internos)

$x + 36° + 64° = 180° \rightarrow x = 80°$

30. a) sim, pois:

$12 - 8 < 18 < 12 + 8$

$18 - 8 < 12 < 18 + 8$

$18 - 12 < 8 < 12 + 8$

b) não, pois:

$5 - 1 > 2 \rightarrow$ não satisfaz a condição

c) sim, pois:

$5 - 3 < 3 < 5 + 3$

$3 - 3 < 5 < 3 + 3$

31. $6 - 3 < x < 6 + 3$

Logo, x pode ser um número entre 3 e 9.

32. x é o terceiro lado

$20 - 10 < x < 20 + 10 \rightarrow 10 < x < 30$

33. a) $x + 110° + 20° = 180° \rightarrow x = 50°$

$y + 50° + 15° = 180° \rightarrow y = 115°$

b) $y = 30°$

$x = 120°$

34. $\overline{AN} = 2$ cm

$\overline{AP} = 1{,}5$ cm

$\overline{BP} = 3{,}9 \rightarrow \overline{GP} = \frac{3{,}9}{3} \rightarrow \overline{GP} = 1{,}3$

$\overline{CN} = 3{,}6 \rightarrow \overline{CN} = \frac{3{,}6}{3} \rightarrow \overline{CN} = 1{,}2$

Quadrilátero GNAP:

$2p = 2 + 1{,}5 + 1{,}3 + 1{,}2$

$2p = 6$ cm

35. A mediana coincide com a bissetriz e com a altura no triângulo equilátero, Logo:

$x = \frac{60°}{2} \rightarrow x = 30°$

$y = 90°$

36. $x + x + x - 33° = 180°$

$3x = 147 \rightarrow x = 49°$

Os ângulos são 49°, 49°, 82°

37. a) $R = \frac{2}{3}h \rightarrow R = 6$ cm

b) $r = \frac{1}{3}h \rightarrow r = 3$ cm

38. **O** é o baricentro do triângulo. Logo:

$R = \frac{2h}{3}$ e $r = \frac{h}{3} \rightarrow R = 2r$

39. a) $y + 35° + 90° = 180° \rightarrow y = 55°$

$42° + 28° + x + 55° + 35° = 180°$

$70° + x + 90 = 180° \rightarrow x = 20°$

b) Os ângulos internos são 35°, 28° e 117°

Capítulo 3 – Expressões algébricas

Objetivos específicos do capítulo

Usar com clareza os símbolos matemáticos. Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia.

Página 75

As dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra têm sido discutidas por numerosos autores e destacamos alguns pontos que se deve considerar no ensino desse tema:

- Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números,
- Pensar numa variável como significando um número qualquer,
- Atribuir significado às letras existentes numa expressão,
- Dar sentido a uma expressão algébrica,
- Passar informação da linguagem natural para a algébrica,
- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e = e, em particular, distinguir adição aritmética (3 + 5) da adição algébrica (x + 3).

Disponível em: < http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_%28Set2009%29.pdf >. Acesso em 20 mar. 2015.

Página 76

Lembre aos alunos que, quando estudamos a propriedade comutativa da multiplicação e concluímos que a ordem dos fatores não altera o produto, estávamos criando condições para fazer a adição de termos semelhantes numa expressão algébrica.

$$ab = ba \rightarrow ab + ba = ab + ab = 2ab.$$

Comente também que os produtos notáveis são sempre verdadeiros e valem inclusive para números:

$$(4 + 3)^2 = 7^2 = 49$$
$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 = 16 + 24 + 9 = 49.$$

Aliás, por que eles se chamam "notáveis"? São produtos que se destacam, aparecem em diversas situações. Discuta sobre o uso da palavra ``notável'' no cotidiano e na imprensa (falada ou escrita) com a classe.

Página 77

Os produtos notáveis são produtos de expressões algébricas utilizados com frequência e que têm regras definidas que facilitam sua determinação.

Inicie a aula, mostrando aos alunos que o produto da soma pela diferença de dois termos é indicado pela expressão: $(a + b)(a - b)$

Desenvolva a expressão, com a participação dos alunos, recordando as operações com polinômios:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

Ou seja, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Escreva como se lê:

$a^2 - b^2$ é a diferença de dois quadrados

Por exemplo: $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

Professor, a visualização geométrica é trabalhosa, mas é importante para que os alunos possam rever conceitos, participar ativamente na construção geométrica e perceber as relações entre a álgebra e a geometria.

Para visualização geométrica por parte dos alunos, lembre-os de que:

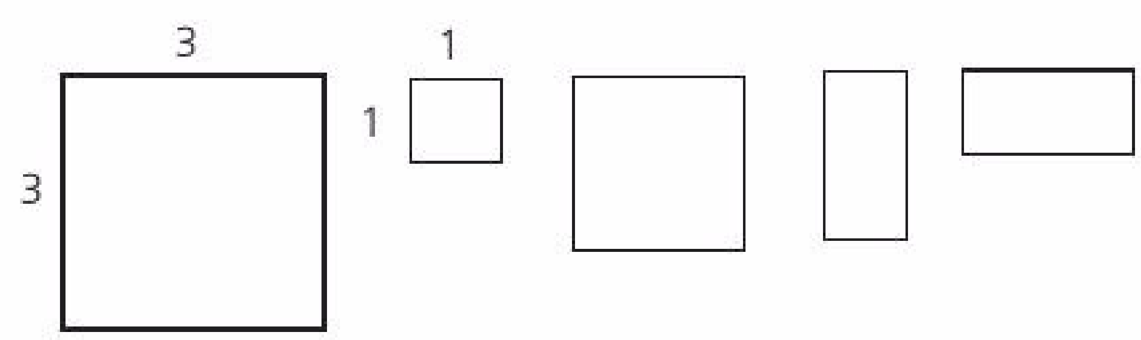
a^2 corresponde à área de uma quadrado de lado a e que b^2 corresponde à área de um quadrado de lado b.

Nota: Caso os alunos não se recordem do cálculo das áreas do quadrado e do retângulo, faça uma breve revisão sobre o assunto.

Para tornar a aula mais dinâmica e interativa, sugerimos que seja utilizado material concreto, conforme descrito adiante. Deixamos claro que essa atividade pode ser feita apenas utilizando o quadro negro, mas acreditamos que a participação dos alunos contribuirá na fixação do conteúdo.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

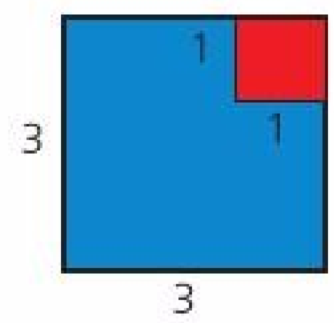
Amplie e imprima as figuras abaixo e reproduza em quantidade suficiente para a sua turma. Peça para os alunos recortarem e colorirem de azul o quadrado de lado 3 e de vermelho o de lado 1.



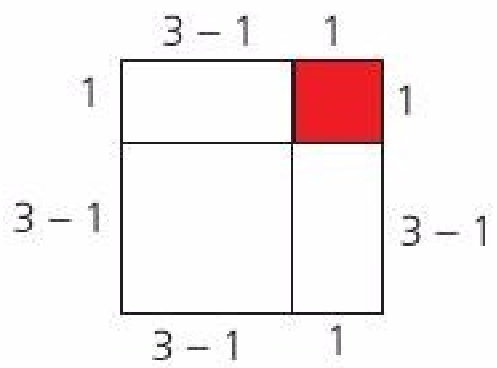
Construa dois quadrados de tamanhos diferentes, como mostra a figura abaixo, em que a medida do lado do quadrado azul é 3 e a do quadrado vermelho é 1.

Note que as medidas de três dos quadriláteros acima, propositalmente, não foram indicadas. Essas medidas deverão ser deduzidas pelos alunos.

Proponha agora sobrepor o quadrado vermelho, colocando-o em um dos cantos do quadrado azul.

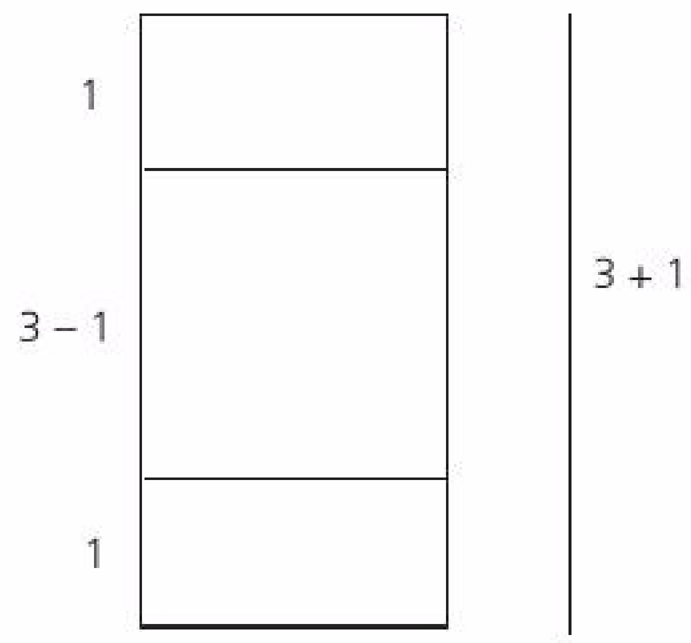


Peça então para os alunos encaixarem os três quadriláteros restantes e registrarem as medidas de seus lados. Os encaixes resultarão na figura:



Pergunte aos alunos que parte da figura corresponde a área de 32 – 12 (área do quadrado azul menos a área do vermelho).

Depois que os alunos perceberem que essa área é formada pela soma das áreas de um quadrado de lado (3 – 1) e por dois retângulos de lados 1 e (3 – 1), mostre o rearranjo da figura com a área a ser determinada (explique o deslocamento de um dos retângulos e as medidas indicadas):



Observando que, com o novo posicionamento de um dos retângulos, a área em questão corresponde à área do retângulo maior de dimensões (3 – 1) e (3 + 1), cujo valor é (3 – 1)(3 + 1).

Conclusão: $3^2 - 1^2 = (3 + 1)\ (3 - 1)$ e que, portanto, $9 - 1 = 4 \times 2 = 8$

Se achar conveniente, execute o mesmo procedimento, com as seguintes medidas para os lados dos quadrados:

1. quadrado a zul: x e quadrado vermelho: 2, concluindo que:
   $x^2 - 2^2 = (x + 2)\ (x - 2)$
2. quadrado azul: 4 e quadrado vermelho: y, concluindo que:
   $4^2 - y^2 = (4 + y)\ (4 - y)$
3. quadrado azul: a e quadrado vermelho: b, concluindo que:
   $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$

É importante relacionar aplicações de produtos notáveis em diferentes contextos matemáticos. Exemplificamos a representação geométrica e obtivemos uma representação algébrica para a diferença de dois quadrados.

Por meio de manipulação algébrica, ou geométrica, é possível concluir que o produto da soma pela diferença de dois termos é igual a diferença dos quadrados desses termos:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Uma contextualização interessante para este produto notável é dada para cálculos numéricos do tipo:

a) $51 \cdot 49 = (50 + 1)(50 - 1) = 502 - 12 = 2\,500 - 1 = 2\,499$

b) $37 \cdot 23 = (30 + 7)(30 - 7) = 302 - 72 = 900 - 49 = 851$

c) $46 \cdot 34 = (40 + 6)(40 - 6) = 402 - 62 = 1\,600 - 36 = 1\,564$

Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=6746>. Acesso em 20 mar. 2015.

Página 83

Um desafio pode ser dado aos alunos: fatorar a seguinte expressão,

$$ay^2 - 10ay + 25a$$

cujo resultado é a

$$(y^2 - 10ay + 25) = a(y - 5)^2$$

Regras de fatoração

É interessante passar para o aluno a sugestão de um conjunto de regras a serem aplicadas, na ordem em que são apresentadas, para determinar se uma dada expressão algébrica pode ser fatorada, isto é, expressa em fatores ou não:

1. Verifique se há elementos em comum;
2. Verifique se há elementos em comum em um ou outro termo da expressão;
3. Verifique se há ocorrência do trinômio quadrado perfeito;
4. Verifique se há diferença de quadrados.

Seguem mais dois desafios:

- $3a^2x^2 - 12a^2b^2$. O resultado é $3a^2(x - 2b)(x + 2b)$.
- $7ax^3 - 7bx^3 - 14ax^2y + 14bx^2y + 7ay^2 - 7bxy^2$. O resultado é $7x(a - b)(x - y)^2)$.

Página 85 – comentário 1

Ressalte para os alunos que os valores das variáveis obedecem a regras de validade exigidas pelas operações como, por exemplo, a impossibilidade de se dividir por zero. Por exemplo, na expressão a seguir, x não pode ser nem 7 e nem $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x-7} + \frac{2x}{2x-1},\ x \neq 7 \text{ e } x \neq \frac{1}{2} \rightarrow x - 7 \neq 0 \rightarrow x \neq 7$$

Além $x \neq 7$, temos $x \neq \frac{1}{2}$, pois: $2x - 1 \neq 0$ $2x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

O mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de expressões algébricas expressa o mesmo que o m.m.c. dos números naturais, ou seja, deve-se procurar os fatores que compõem a expressão, da mesma forma que procuramos os fatores primos que compunham os números. Os fatores que compõe uma expressão algébrica são chamados fatores irredutíveis.

Resoluções da seção Para estudar

31. a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $c^2 + 2cd + d^2$

c) $x^2 + 10x + 25$

d) $y^2 + 4y + 4$

e) $y^2 + 2y + 1$

32. a) $x^3(x^2 + 12x + 6) = x^5 + 12x^4 + 6x^3$

b) $x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1$

c) $y + 2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 + 3y + 3$

33. a) $x^6 + 2x^3 + 1$

b) $x^{10} + 4x^5 + 4$

c) $9x^4 + 60x^2 + 100$

d) $4y^8 + 12y^4 + 9$

e) $y^2 + y + \frac{1}{4}$

f) $16y^2 + 4y + \frac{1}{4}$

34. a) $x^2 - 14x + 49$

b) $x^2 - 6x + 9$

c) $25y^2 - 10y + 1$

d) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

e) $x^4 - 12x^2 + 36$

f) $9x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

35. a) $x^2 - 100$

b) $x^2 - 9$

c) $25y^2 - 1$

d) $25x^2 - 4y^2$

e) $x^6 - 4$

f) $25x^4 - 9$

36. a) $4x^4 - \frac{6x^2}{5} + \frac{3}{5}$

b) $9a^4b^2 - \frac{6a^5b}{5} + \frac{a^6}{25}$

37. a) $\frac{8x^6 + 4x^5 + 20x^4}{x^2} = 8x^4 + 4x^3 + 20x^2$

b) $\frac{8x^6 + 4x^5 + 20x^4}{x^4} = 8x^2 + 4x + 20$

c) $\frac{8x^6 + 4x^5 + 20x^4}{4} = 2x^6 + x^5 + 5x^4$

d) $\frac{8x^6 + 4x^5 + 20x^4}{4x^4} = 2x^2 + x + 5$

38. a) $2x^2 + 3x$

b) $3y^2 - 7y + 8$

c) $x^2 - xy + y^2$

d) $-2y^3 + 3xy^2$

39. a) 1

b) $x + 2$

40. a) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

b) $(9a^2 + 1)(9a^2 - 1) =$

$= (9a^2 + 1)(3a + 1)(3a - 1)$

c) $(x^{10} + 9)(x^{10} - 9) =$

$= (x^{10} + 9)(x^5 + 3)(x^5 - 3)$

d) $(25 + x^2)(25 - x^2) =$

$= (25 + x^2)(5 + x)(5 - x)$

41. a) $x(a + b + c)$

b) $x(x + 7)$

c) $x^3(x2 + 4)$

d) $a\left(b + \frac{1}{3}\right)$

e) $\frac{x}{2}\left(yz + \frac{z}{2} + 1\right)$

f) $16x^3 (5x^5 + 4)$

42. a) $(x + 2)(a + b)$

b) $(x + 2y)(a + b + 3)$

c) $(a + 1)\left(\frac{1}{5} - 3x\right)$

d) $(a + b)(x^2 - x + y)$

43. a) $y(16 - a^2) = y(4 + a)(4 - a)$

b) $x(x^2 - 6xy + 9y^2) = x(x - 1)^2$

c) $(a + b)(x^2 - 4) = (a + b)(x + 2)(x - 2)$

d) $7x^5(x^2 - 2x + 1) = 7x^5(x - 1)^2$

44. a) $(x^2 + 1)(x + 1)$

b) $(y - 3)(a - 1)$

c) $(5x - a)(b - 1)$

d) $(7m + n)(x + 1)$

45. a) $a(m + n) + b(m + n) = (m + n)(a + b)$

b) $2(x + y) + a(x + y) = (x + y)(2 + a)$

c) $x(xy - 2) + xy - 2 = (xy - 2)(x + 1)$

d) $x^2(a - b) + a - b = (x^2 + 1)(a - b)$

e) $y^2(y - 3) + 4(y - 3) = (y^2 - 4)(y - 3) = (y - 3)$
$(y + 2)(y - 2)$

f) $x^2(a - b) + 3(a - b) = (x^2 - 3)(a - b) = (x +$
$\sqrt{3})(x - \sqrt{3})(a - b)$

46. a) $3x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$

b) $3a - 5 \neq 0 \rightarrow 3a \neq 5 \rightarrow a \neq \frac{5}{3}$

c) $a + 5 \neq 0 \rightarrow a \neq -5$

d) $2x + 6 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$

47. a) $\frac{x^3(2x - 9)}{x^2} = x(2x - 9)$

b) $\frac{x(a + b)}{y(a + b)} = \frac{x}{y}$

c) $\frac{x^2(2x - y)}{y(2x - y)} = \frac{x^2}{y}$

d) $\frac{ax(a^2 - y)}{a(a^2 - y)} = x$

48. a) $\frac{x(a - 5b)}{y^3(a - 5b)} = \frac{x}{y^3}$

b) $\frac{7(x + 5)}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{7}{x - 5}$

c) $\frac{(2x + 3)(2x - 3)}{(2x + 3)^2} = \frac{2x - 3}{2x + 3}$

d) $\frac{x^2(x - 3) + 2(x - 3)}{a(x - 3)} = \frac{(x^2 + 2)(x - 3)}{a(x - 3)} =$

$= \frac{x^2 + 2}{a}$

e) $\frac{y(x - 7)}{(x + 7)(x - 7)} = \frac{7}{x + y}$

49. a) $\frac{3 + 4(x - 1)}{(x^2 - 1)} = \frac{4x - 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x + 4 + 1}{(x^2 - 16)} = \frac{x - 5}{x^2 - 16}$

c) $\frac{x}{2(x - 4)} + \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{x(x + 4) + x + 4}{2(x^2 - 4)} =$

$= \frac{(x + 4)(x + 1)}{2(x^2 - 4)}$

Capítulo 4 – Sistemas de equações

Objetivos específicos do capítulo

Usar com clareza os símbolos matemáticos. Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia.

Página 97

Professor, é importante que seu aluno compreenda que os sistemas de equações são ferramentas bastante comuns na resolução de problemas e, por isso, são utilizados em diversas áreas do conhecimento. É fundamental que o aluno perceba que resolver um sistema de equações é o mesmo que obter os valores das incógnitas que satisfazem, simultaneamente, ambas as equações desse sistema. Além disso, sugerimos destacar que os métodos existentes para resolução de sistemas de equações podem ser usados de acordo com a preferência de quem busca a solução da situação problema, contudo, é útil escolher o método mais rápido e seguro em cada caso.

Página 98

Professor: é fundamental garantir que seus alunos compreenderam o significado de uma equação e uma boa forma de garantir isso é fazer uma analogia entre uma equação do 1º grau e uma balança com dois pratos em equilíbrio. Essa imagem comparativa busca mostrar que cada prato da balança pode ser representado como um membro de uma equação e, para encontrar a solução, tudo o que fazemos de lado da equação devemos fazer do outro para não alterar tal equilíbrio.

Página 100

Matematicamente, para um problema com duas incógnitas, são necessárias duas equações. Para três incógnitas , três equações, e assim por diante. Abaixo está um problema que pode servir para mostrar aos alunos uma situação em que há necessidade de duas equações.

Após ir a uma loja, Maria queria se lembrar dos preços de 2 itens que ela adquiriu. Como os produtos estavam com código de barra, não era possível saber quais eram os valores de cada um. Ela sabia que havia gasto R$ 42,00 no total. Procurou a nota fiscal, mas esta se perdeu no caminho.

A soma dos preços dos produtos x e y, é:

$$x + y = 42$$

Isto não basta para descobrir os preços. Contudo, Maria se lembrou que um item era R$ 18,00 mais caro que o outro, ou seja, havia uma diferença entre os preços:

$$x - y = 18$$

Assim, ela descobriu que os valores são $x = 30$ e $y = 12$, isto é, R$ 30,00 e R$ 12,00.

Página 104

Em sistema de equações, é preciso tomar cuidado ao construir um problema, para que uma equação não seja um múltiplo da outra, isto é, sejam linearmente dependentes, para usar um jargão mais técnico. Por exemplo, as equações abaixo são as mesmas e não podem formar um sistema:

$$x + y = 3$$
$$2x + 2y = 6$$
$$3x + 3y = 9$$
$$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = \frac{3}{5}$$

No método da adição, isto fica muito evidente.

Procure sempre estimular o uso do método da adição, pois ele estimula a criatividade do aluno para encontrar os fatores que devem ser usados para se eliminar uma das incógnitas, e não é tão mecânico quanto o método da substituição.

Resoluções da seção Para estudar

26. a) $5y + y = 3$

$y = \frac{1}{2}$

$x = 5y$

$x = \frac{5}{2}$

$S = \left\{\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$

b) $x = 3y$

$2 \cdot 3y + 5y = 11 \rightarrow y = 1$

$x = 3y \rightarrow x = 3$

$S = \{(3, 1)\}$

c) $y + 6 + y = 56 \rightarrow y = 25$

$x = 25 + 6 \rightarrow x = 31$

$S = \{(31; 25)\}$

d) $2(y - 4) + y = 70$

$2y - 8 + y = 70$

$3y = 78 \rightarrow y = 26$

$x = y - 4 \rightarrow x = 22$

$S = \{(22; 26)\}$

27. a) $2(y + 2) + 2y = 16$

$2y + 4 + 2y = 16 \rightarrow y = 3$

$x = 3 + 2 \rightarrow x = 5$

$S = \{(5; 3)\}$

b) $x + 5 - 2x = 25 \rightarrow -x = 20 \rightarrow x = -20$

$y = -20 + 5 \rightarrow y = -15$

$S = \{(-20; -15)\}$

c) $2 \cdot 4y + 4y = 12$

$12y = 12 \rightarrow y = 1$

$x = 4y \rightarrow x = 4$

$S = \{(4; 1)\}$

d) $x + y = 5 + x \rightarrow y = 5$

$x + 15 = 16 \rightarrow x = 1$

$S \{(1; 5)\}$

28. a) $\begin{cases} x = 3y \\ x - y = 24 \end{cases}$

b) $y = 3y - 24$

$2y = 24$

$y = 12$

A mãe tem 36 anos e a filha 12.

29. a) $x = 5 + y$

$10 + 2y + 7y = 1$

$9y = -9 \rightarrow y = -1$

$x = 5 - 1 \rightarrow x = 4$

$S = \{(4; -1)\}$

b) $x = 4 - 2y$

$3(4 - 2y) + 5y = 9$

$12 - 6y + 5y = 9 \rightarrow y = 3$

$x = 4 - 6 \rightarrow x = -2$

$S = \{(-2; 3)\}$

c) $$\begin{cases} 3x + 2y = 29 & \text{(I)} \\ 4x + 2y = 34 & \text{(II)} \end{cases}$$

$\text{(I)} - \text{(II)} \quad -x = -5 \rightarrow x = 5$

$y = 17 - 10 \rightarrow y = 7$

$S = \{(5; 7)\}$

d) $4y + 8y = 3$

$12y = 3 \rightarrow y = \frac{1}{4}$

$x = 8y - 1 \rightarrow x = 1$

$S = \left\{\left(1; \frac{1}{4}\right)\right\}$

30. a) $4x + 4 = 2y + 5 \rightarrow 4x - 2y = 1$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 4x + 4y = 16 \end{cases}$$
$$6y = 15 \rightarrow y = \frac{15}{6}$$

$y = \frac{5}{2}$

$x + y = 4 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)\right\}$

b) $x + 2y = 2x + 3y \rightarrow -x - y = 0$

$3x - 5y = 16 \rightarrow 3x + 5x = 16 \rightarrow x = 2$

$-x - y = 0 \rightarrow y = -2$

$S\{(2; -2)\}$

31. a) $$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$$
$$y = 6$$

$2x + 6 = 14 \rightarrow x = 4$

$S = \{(4; 6)\}$

b) $\begin{cases} 10x + 15y = -90 \\ 10x + 14y = -86 \end{cases}$

$y = -4 \rightarrow x = -3$

$S = \{(-3; -4)\}$

c) $2(3y + 9) + 3y = 0$

$6y + 18 + 3y = 0$

$9y = -18 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = 3$

$S\{(3; -2)\}$

32. a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 7{,}4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 7{,}4 \end{cases}$

$y = 1{,}4 \rightarrow x = 1{,}6$

$S\{(1{,}6; 1{,}4)\}$

33. a) $y = x + 3$

$x + 2(x + 3) = 3 \rightarrow 3x + 6 = 3 \rightarrow x = -1$

$y = 2$

$S = \{(-1; 2)\}$

b) $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}$

$4x + 3\left(-\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = 2 \rightarrow 4x - \dfrac{3x}{2} - 1 = 2$

$\dfrac{5x}{2} = 3 \rightarrow x = \dfrac{6}{5}$

$S = \left\{\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{14}{15}\right)\right\}$

c) $3y = 7 + 4x$

$2(7 + 4x) + 3(x + 1) = 8$

$14 + 8x + 3x + 3 = 8$

$11x = -11 \rightarrow x = -1$

$y = 2$

$S = \{(-1; 1)\}$

34. $2x = 14 \rightarrow x = 7 \rightarrow y = 3$

$S = \{(7; 3)\}$

35. a) $S = \{(3; -1)\}$

b) $S = \{(9; -2)\}$

c) $S = \{(22; -5)\}$

36. a) $S = \{(5; 2)\}$

b) $S = \left\{\left(1; \dfrac{1}{2}\right)\right\}$

c) $S = \left\{\left(\dfrac{1}{14}; \dfrac{17}{7}\right)\right\}$

37. a) $\begin{cases} x + y = 25 \\ y = x + 12 \end{cases}$

b) $x + x + 12 = 25$

$2x = 13$

$x =$ R\$ 6,50

$y =$ R\$ 5,50

38. a) $S = \{(1; 1)\}$

b) $S = \{(1; 0)\}$

c) $S = \{(2; 1)\}$

d) $S = \{(0; 0)\}$

39. a) $S = \{(3; 1)\}$

b) $S = \{(4; 1)\}$

c) $S = \{(-20; -15)\}$

40. a) $x = y + 30$

b) $x = 2y$

$2y = y + 30$

$y = 30$

O comprimento é 60 m.

41. a) $S = \{(2; -1)\}$

b) $S = \{(1; 4)\}$

Capítulo 5 – Congruência de triângulos

Objetivos específicos do capítulo

Reconhecer as isometrias de figuras planas. Representar as simetrias de figuras planas. Verificar as condições necessárias para a congruência de triângulos. Explorar os casos de congruência de triângulos.

Página 115

Uma boa leitura sobre o tema abordado no capítulo é o livro SAIDA PELO TRIÂNGULO.

autor: *Ernesto Rosa*

editora: *Ática*

Ivan, Kiko e Tales nem imaginam que férias em um acampamento podem ser muito emocionantes... Ao saber da existência de uma ilha com lendas indígenas, os três resolvem fazer uma excursão até lá. Mas são surpreendidos por uma chuva forte, perdem o barco e não conseguem voltar. O que fazer para sair da ilha? A comida será suficiente? E como explicar para os professores responsáveis o que aconteceu? Mais uma vez, a Matemática tira os garotos dessa enrascada.

Páginas 117

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro de giz para fazer as representações.

Página 118

As atividades estão desenvolvidas com diferentes níveis de complexidade, procurando obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Contudo, é interessante que o professor leia com os alunos os enunciados e represente no quadro de giz a representação de cada enunciado.

Seria interessante que os alunos pudessem participar desse processo de construção no quadro de giz.

Páginas 119 a 122

O Link a seguir apresenta um vídeo sobre simetrias, fala sobre a arte e a matemática e a arte matemática.

<https://www.youtube.com/watch?v=xR-o3MDBAh0&hd=1>.Visitado em 25 de abril de 2015.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Atividade sobre Simetria

Material: dez figuras geométricas com linhas pontilhadas desenhadas nelas (pode ser no eixo de simetria ou não) e um espelho.

O aluno deverá colocar o espelho perpendicular à linha pontilhada de cada figura e observar se a imagem formada completa a original, caso isso ocorra, trata-se do eixo de simetria. Caso não, a figura é assimétrica.

Página 122

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza a ideia da translação e simetria sugerida no texto. Se possível, solicite aos alunos que venham até o quadro de giz para fazer as representações e estimule o uso de diferentes cores para representar a situação proposta.

Páginas 123 e 124

De forma análoga, as atividades foram elaboradas para obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Contudo, é interessante que o professor leia com os alunos os enunciados e represente no quadro de giz cada um deles.

Página 127 a 131

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza a ideia da translação e simetria sugerida no texto. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro de giz para fazer as representações e estimule o uso de diferentes cores para representar a situação proposta. O trabalho com isometrias é fundamental para a fixação da congruência de triângulos. Por isso, nunca é demais enfatizar as características da translação, da rotação e da reflexão de triângulos.

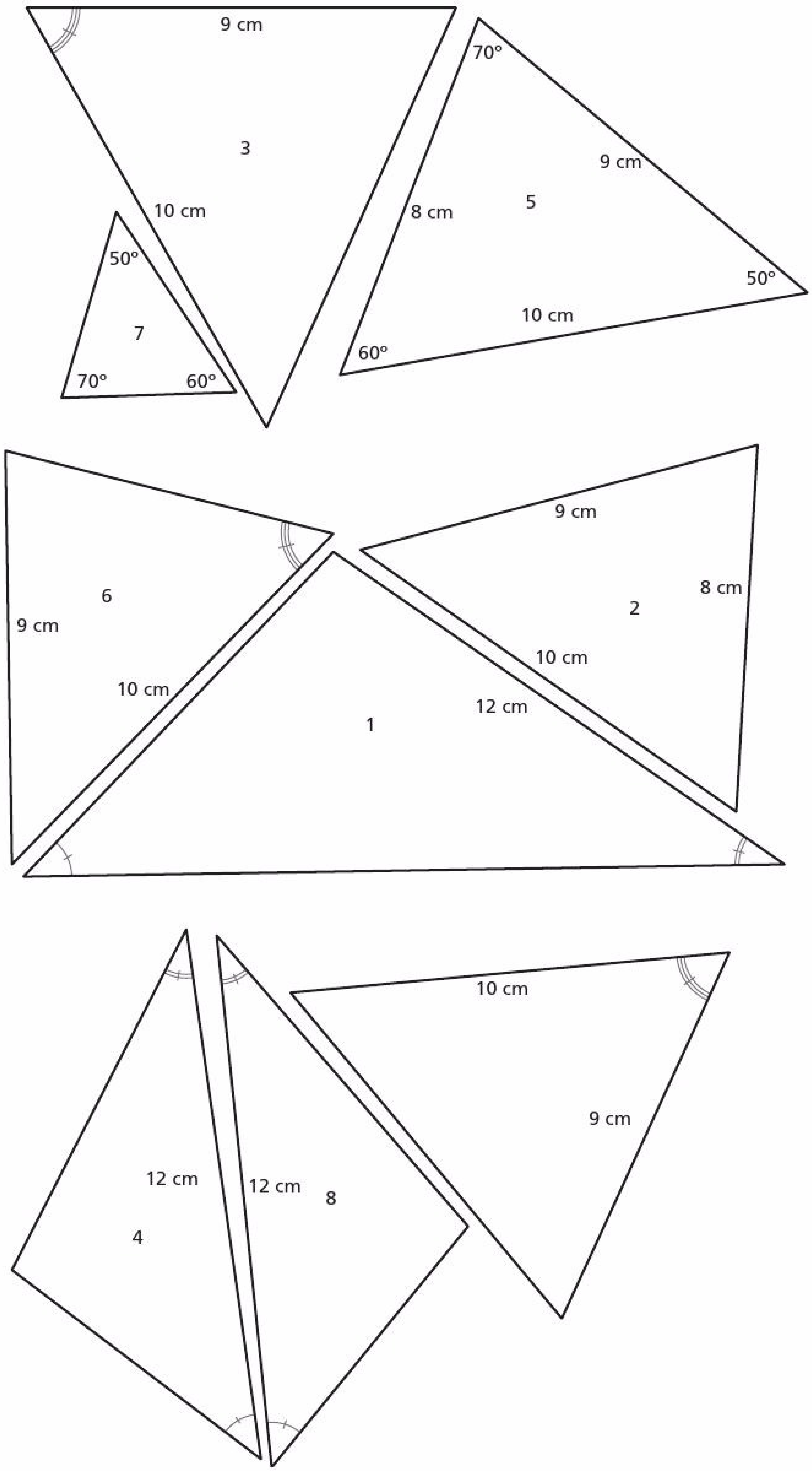
A atividade abaixo faz parte de um material criado pelo Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP – campus SJ RioPreto, página 11, 12.

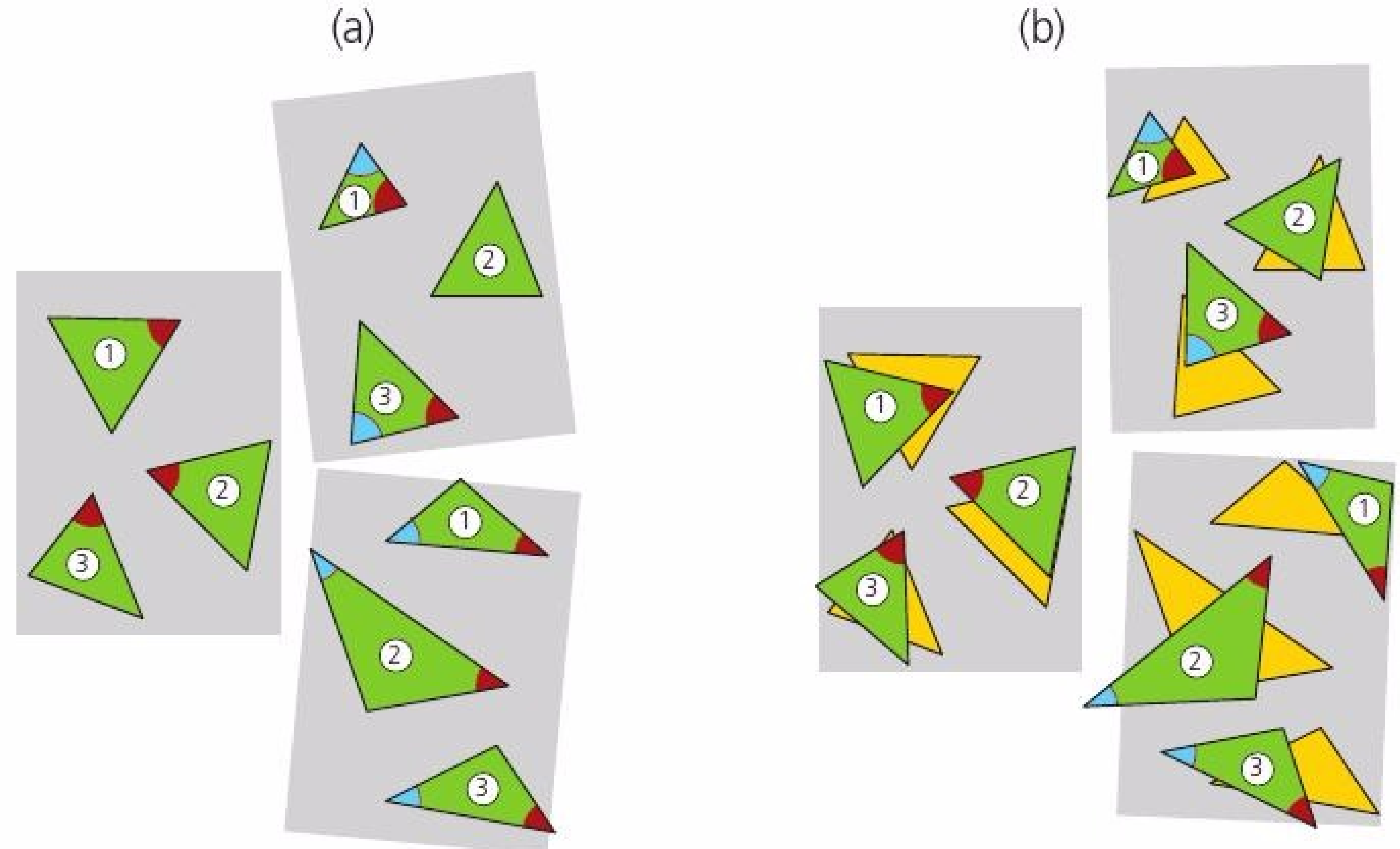
Veja em: Disponível em: < http://www.mat.ibilce.unesp.br/graduacao/pcc_2006-2007.pdf >. Acesso em 01 mai. 2012.

Utilização do modelo descrito a seguir para obtenção dos três casos de congruência de triângulos.

Modelo – Casos de Congruência de Triângulos: Esse modelo foi construído utilizando papel cartão como base e sobrepondo EVA, de forma a obter três grupos de triângulos, com as medidas dos lados indicadas, e utilizada a mesma cor para representar ângulos congruentes (modelo (a)). Observamos que para a utilização do modelo é necessário entender anteriormente o conceito de congruência de triângulos associando congruência com sobreposição.

Figura 1


9 cm
3
10 cm
70°
9 cm
5
8 cm
50°
10 cm
60°
50°
7
70°
60°
9 cm
6
9 cm
10 cm
8 cm
2
10 cm
12 cm
1
10 cm
9 cm
12 cm
12 cm
8
4



Modelo: Casos de Congruência de Triângulos.

O modelo é para ser utilizado em grupos de até três alunos, com cada grupo tendo à sua disposição um modelo. As conclusões de cada grupo devem ser expostas para toda a turma, com o objetivo que cheguem a conjecturar cada caso de congruência correspondente a seu Grupo. O professor tem papel fundamental na aplicação do modelo. É ele que verificará se os alunos já aprenderam o conceito de congruência de triângulos pela definição e se estão verificando a definição ao manipular os triângulos do modelo.

Objetivo: Reforçar a definição de congruência de triângulos pela sobreposição e induzir os seus casos de congruência. Material utilizado: modelo de congruência de triângulos, formado por 3 grupos, com 3 triângulos cada: Grupo 1 – Triângulos 3, 6 e 9; Grupo 2 – Triângulos 1, 4 e 8; Grupo 3 – Triângulos 2, 5 e 7 (Figura 1).

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Sugestões de questões:

1º) Manipulem o Grupo 1 do Modelo de Congruência: os três triângulos são congruentes? Por quê?

2º) Há diferenças entre os triângulos do Grupo 1? Quais?

3º) Além da definição de triângulos congruentes, podemos concluir sobre a congruência de dois triângulos de outra maneira? (Sugestão: encaixe os triângulos do Grupo 1 na base e observem as medidas dadas.)

4º) E para o Grupo 2: os três triângulos são congruentes? Por quê?

5º) Quais as diferenças encontradas nas medidas dos triângulos do Grupo 2?

6º) Qual a condição observada no Grupo 2?

7º) Agora, façam o mesmo com o Grupo 3.

8º) Qual o número mínimo de comparações (com relação aos 6 elementos – 3 ângulos e 3 lados) que precisamos fazer para decidirmos se dois triângulos são congruentes?

Os alunos deverão visualizar que deve haver uma relação entre os lados, entre os ângulos ou entre lados e ângulos para ocorrer a Congruência de Triângulos. Eles devem chegar à conclusão de que não é necessário conhecer todos os lados e todos os ângulos para verificar que dois triângulos são congruentes e conjecturar os casos de congruência de triângulos (LAL, ALA e LLL), motivando-os a conhecer as suas demonstrações, conforme apresentado no próximo capítulo.

Comentário: Observa-se que é importante que o mesmo aluno trabalhe com mais de um modelo, análogos ao aqui apresentado, com a medidas distintas nos triângulos.

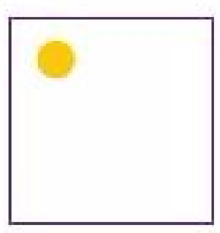
Isso leva o aluno a perceber que a mesma propriedade é obtida em cada grupo, podendo assim formalizar essa propriedade. Após a formalização, há a necessidade de demonstrá-la. No entanto, foi dada a possibilidade ao aluno de visualizar antes a propriedade, o que aumenta o seu interesse em verificar a sua validade. É importante observar que em cada grupo de triângulos há uma situação problema que aparece quando um aluno utiliza os casos de congruência de triângulos.

É comum em exercícios os alunos citarem que dois triângulos tendo dois lados com a mesma medida e um ângulo com a mesma medida são congruentes, sem entender que os ângulos com a mesma medida devem ter como lados deles os lados correspondentes com a mesma medida.

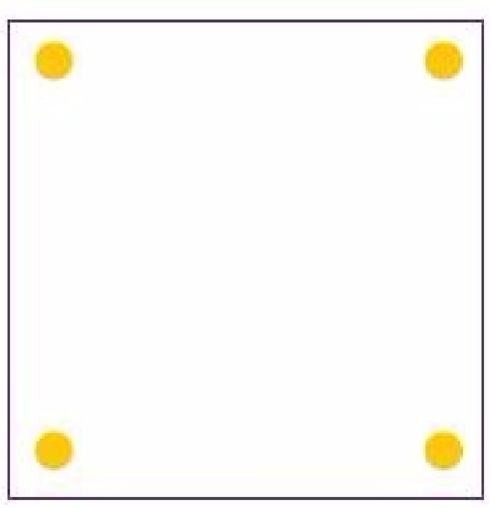
Página 135

Desafio

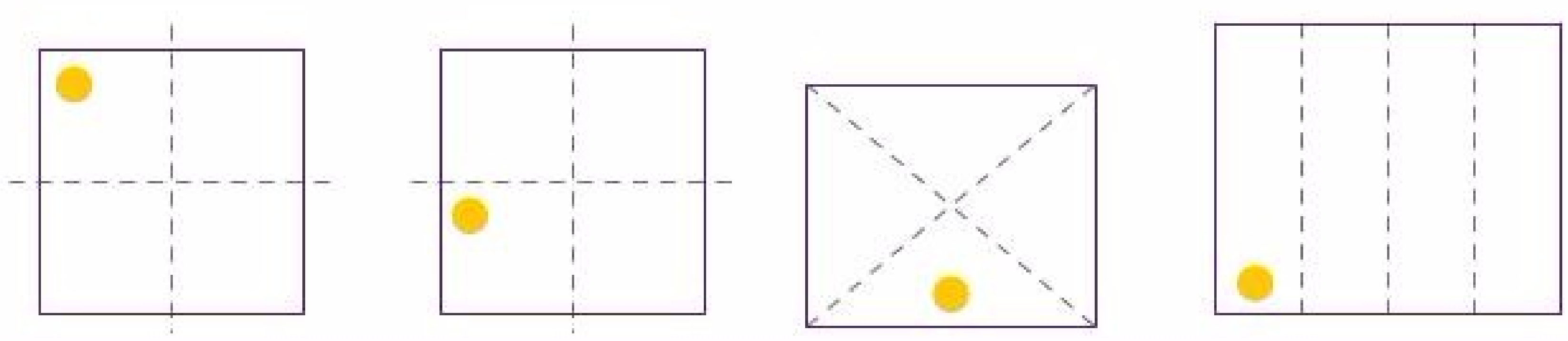
1.



2.



3.



Resoluções da seção Para estudar

18. a) reflexão ou simetria

b) reflexão e rotação

c) reflexão e rotação

19. $\overline{AB}$ é correspondente de $\overline{NP}$

$\overline{AC}$ é correspondente de $\overline{MP}$

$\overline{BC}$ é correspondente de $\overline{MN}$

20. a) $\overline{RM} = 7$

b) $\overline{RB} = 6$

c) $\hat{A} = 60°$

d) $\hat{E} = 40°$

21. $12x - 7 = 4x + 1$

$8x = 8 \rightarrow x = 1$

$y = 4x - 1 \rightarrow y = 3$

22. a) LAL

b) LAL

23. $2x - 1 = x + 2$

$x = 3$

24. $\overline{AD} = 13$

$\overline{BC} = 9$

25. a) $x = 8$

$y = 4$

b) $y = 8$ cm

$x = 92°$

c) $y = 12$

$2x + 72 + 2 \cdot 92 = 360°$

$2x = 102° \rightarrow x = 51°$

d) $2x + x + 90° = 180°$

$x = 30°$

Capítulo 6 – Quadriláteros

Objetivos específicos do capítulo

Calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Reconhecer retângulos, trapézios, paralelogramos, losangos e aplicar suas propriedades.

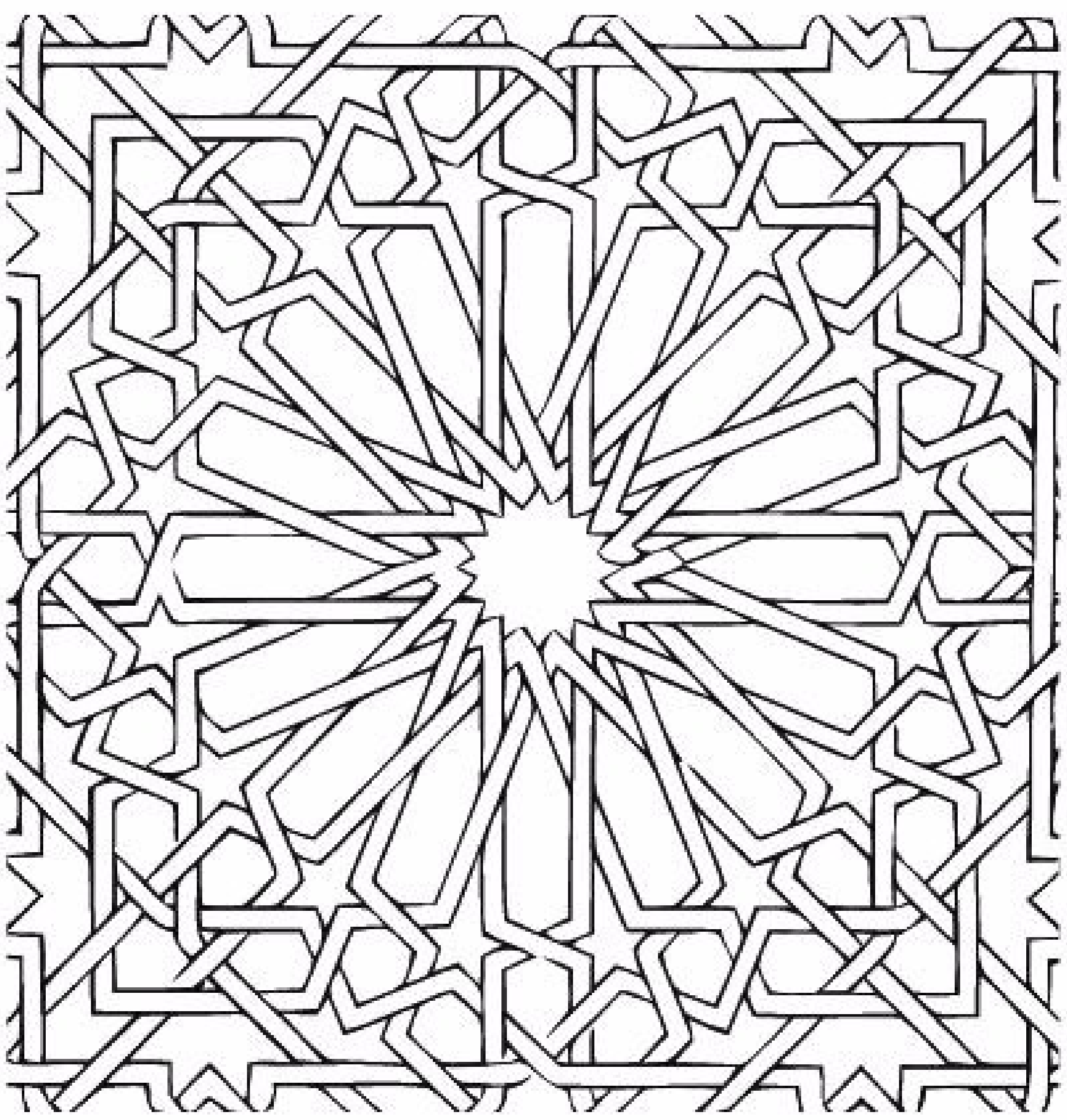
Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.

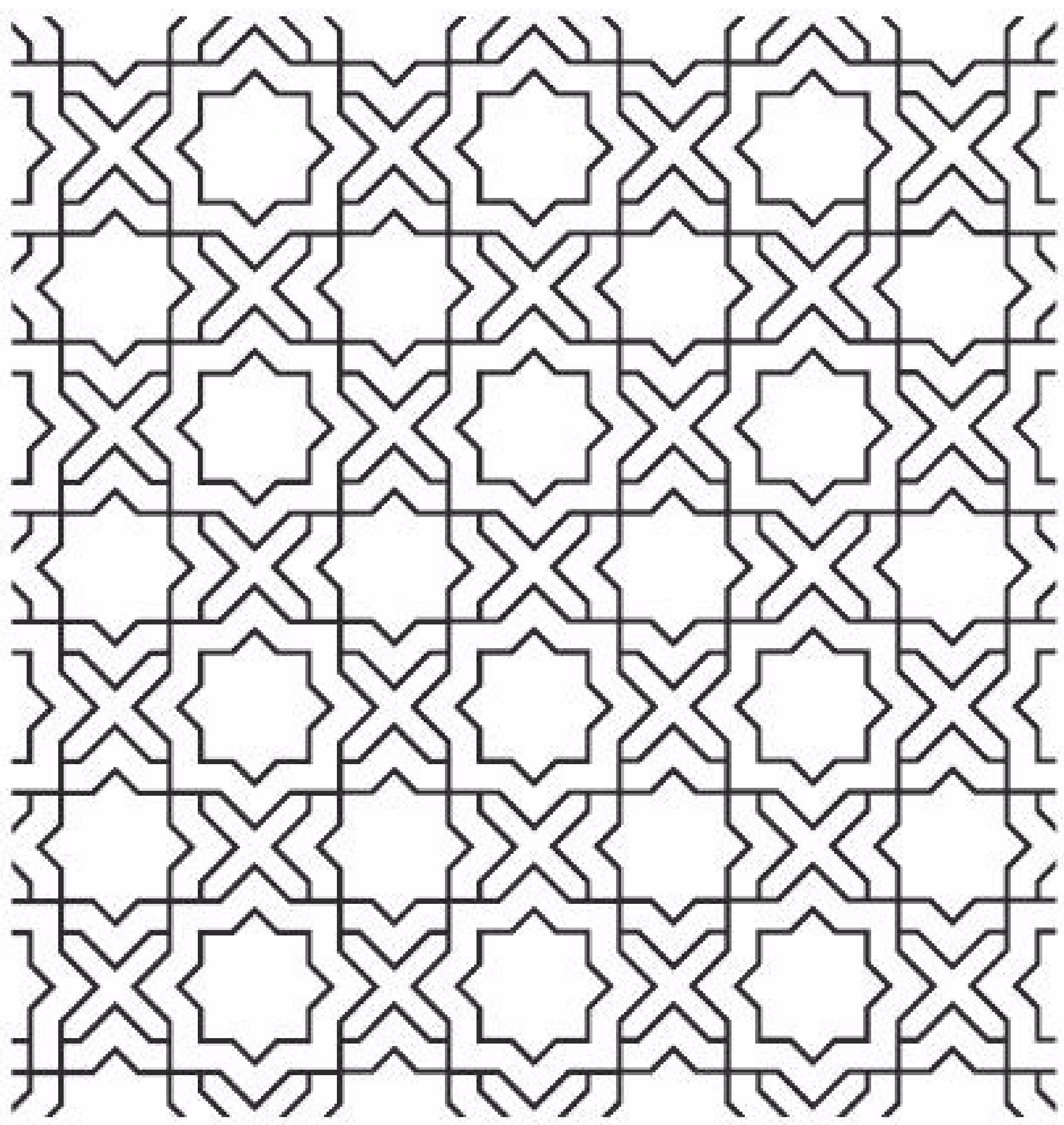
Página 139

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1ª Atividade: O mundo islâmico tem uma tradição artística rica em criar ornamentações altamente geométricas e simétricas. O processo de criação de ladrilhos islâmicos foi se aprimorando como passar dos séculos. Os Palácios de Alhambra em Granada e Alcazar em Sevilha, como também a grande Mesquita de Córdoba são exemplos da grande variedade de padrões geométricos existentes em seus pisos, paredes e tetos. Veja a seguir alguns moldes que podem ser confeccionados pelos alunos utilizando a geometria e a cultura islâmica.

Muslim Heritage

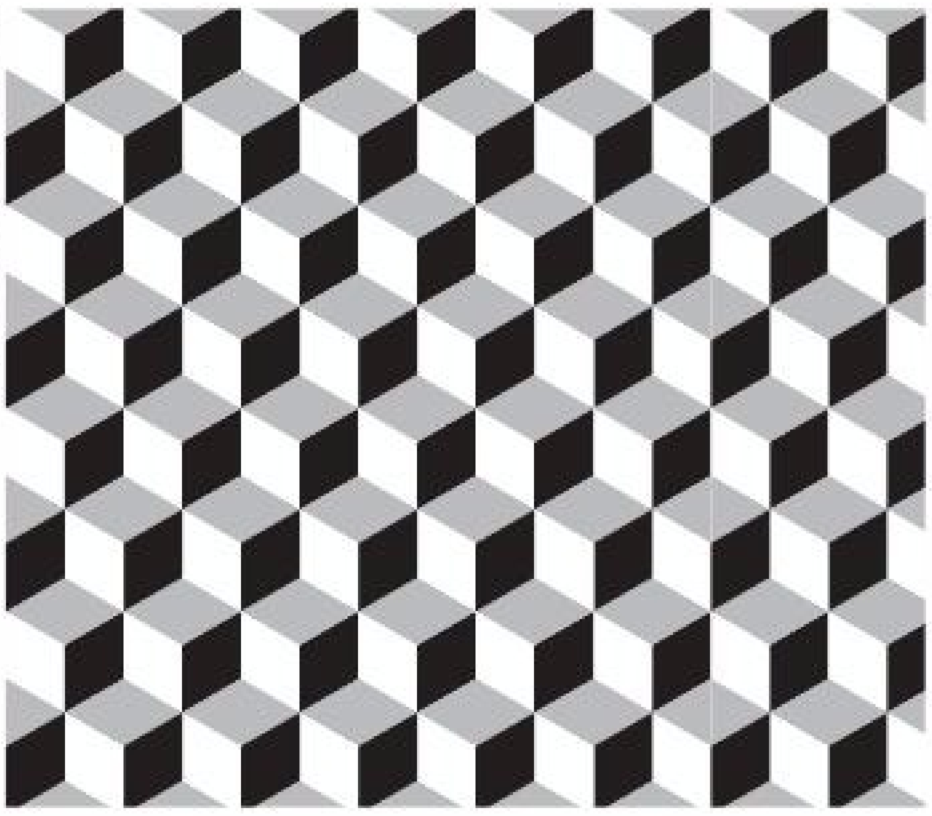


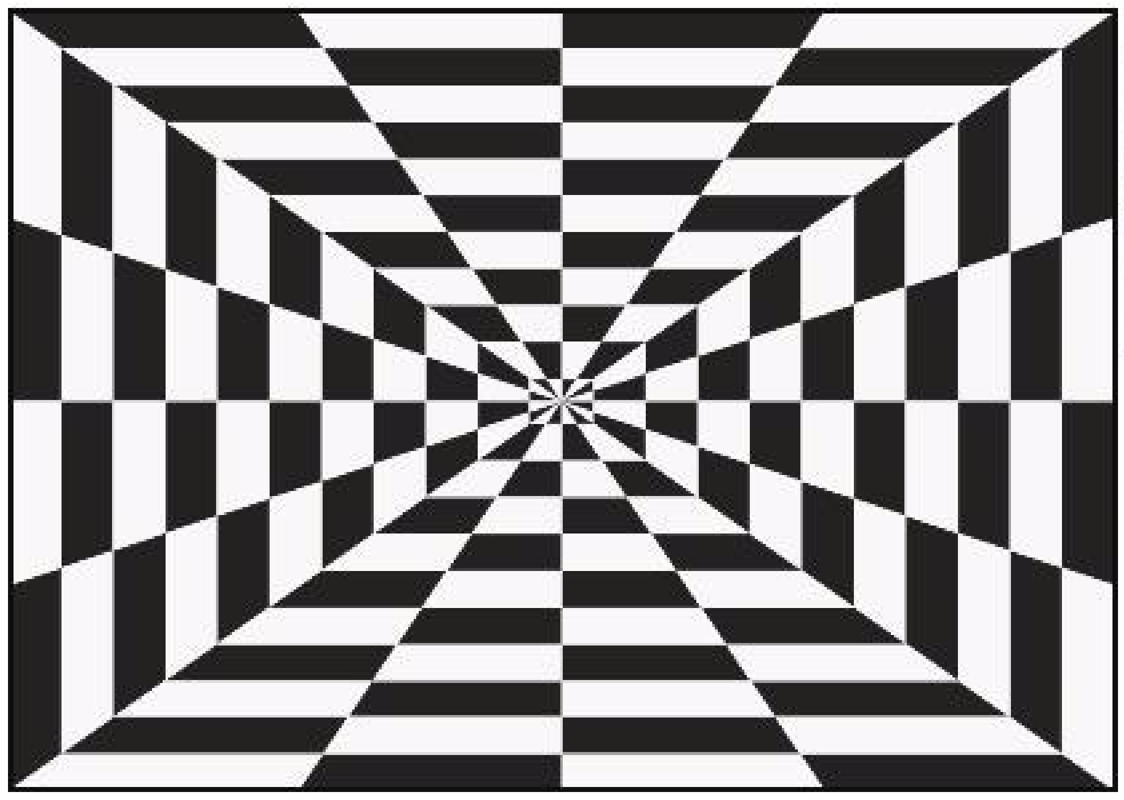


Muslim Heritage

2ª Atividade: As gravuras a seguir são compostas por quadriláteros que, quando observadas causam ilusão de ótica. Peça para os alunos reproduzirem as gravuras ou criarem outras.

Betacam-SP/Shutterstock





Betacam-SP/Shutterstock

Páginas 140 a 144

As atividades estão desenvolvidas com diferentes níveis de complexidade, procurando obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Represente as figuras geométricas no quadro de giz e peça para os alunos observarem as semelhanças e diferenças entre as mesmas, registre as informações e complete se necessário. Faça da sala de aula uma sala ambiente, cole cartazes com as produções dos alunos sugeridas no capítulo.

Páginas 146 a 149

Utilize, se possível, o programa Geogebra para investigar os quadriláteros. Você irá construir um quadrilátero especial seguindo as instruções:

- Construa uma reta AB.
- Construa um ponto C que não pertença a reta AB.
- Construa uma reta que passa pelos pontos B e C.
- Construa uma reta que passa pelo ponto C e é paralela a reta AB.
- Construa uma reta paralela a BC e que passa pelo ponto A.
- Construa um ponto D que seja a intersecção das duas últimas retas que você construiu, utilizando a ferramenta “intersecção de dois objetos”.
- Construa o polígono que tenha como vértices os pontos A, B, C e D.

Faça observações sobre o quadrilátero construído e utilize os recursos do programa para transformar o papalelogramo construído em retângulo, quadrado e registrar suas características.

12. a) $x = 15°$

$y = 150°$

b) $x = 60°$

$y = 30°$

13. $x + 10\text{ cm} + 14\text{ cm} + 18\text{ cm} = 58\text{ cm}$

$x = 16$

14. a) $x = 360° - 55° - 85° - 140° \rightarrow x = 80°$

b) $x - 30 + x + 2x + 90° + 360° \rightarrow x = 90°$

c) $x = 100°$

d) $2x + 3x - 50° + 140° + x = 360° \rightarrow x = 45°$

15. $120° + 100° + 3x + x = 360° \rightarrow x = 35°$

16. $100° + 180° - x + 40° + 180° - x = 360$

$x = 70°$

17. $\hat{C} = 360° - 90° - 100° - 40° \rightarrow \hat{C} = 130°$

ADCP $\rightarrow 90° + 65° + 180° - x + 50° = 360°$

$x = 25°$

18. $3x + 10° + 2x + 40° + x + 40° = 360° \rightarrow x = 45°$

19. a) $x = 110°$ e $y = 70°$

b) $x = 360° - 140° - 90° - 90° \rightarrow x = 40°$

20. x é o ângulo obtuso e y o agudo

$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 360° \rightarrow x = 120° \rightarrow y = 60°$

21. x é o ângulo obtuso

$x + \frac{x}{4} + 180° = 360° \rightarrow x = 144°$

Os ângulos internos são 144°, 36°, 90° e 90°

22. a) $96 = x + x + 2x + 2x \rightarrow x = 16\text{ cm}$

Os lado são 16 cm, 16 cm, 16 cm e 32 cm

b) $56 = x + x + 3x + 3x \rightarrow x = 7\text{ cm}$

Os lados são 7 cm, 7 cm, 21 cm e 21 cm

c) Os lados são 25 m

d) $24 = x + x + 4 + 5 \rightarrow x = 7{,}5\text{ cm}$

Os lados são 7,5 cm; 7,5 cm; 4 cm; 5 cm

23. a) $x = 120^\circ$ e $y = 60^\circ$

b) $x = 50^\circ$

c) $x = 40^\circ$ e $y = 140^\circ$

d) $x = 15^\circ$

24. $2p = 6 + 9 + 6 + 9 \rightarrow 2p = 30$ cm

25. $2p = 20$ cm $+ 20$ cm $+ 8$ cm $+ 8$ cm $= 56$ cm

Capítulo 7 – Inequações de primeiro grau

Objetivos específicos do capítulo

Usar com clareza os símbolos matemáticos. Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia.

Página 157

Há muitas aplicações práticas para o uso das inequações, como aquelas nas quais é preciso comparar alternativas. Em problemas desse tipo, o objetivo é descobrir, dentre várias opções, qual possui o menor custo, ou fornece o maior benefício. Para resolver esse tipo de problema, substituímos o símbolo = das equações por um dos símbolos "≤", "<", ">" ou "≥" e, principalmente, buscamos encontrar todos os valores da variável que fazem com que a desigualdade seja verdadeira.

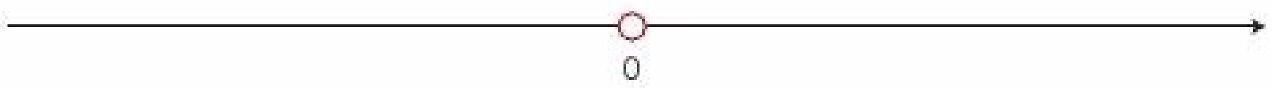
Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf>. Acesso em 21 mar. 2015.

Página 159

A prática tem mostrado que o principal obstáculo que os alunos enfrentam na solução de inequações de primeiro grau é a inversão do sentido da desigualdade quando multiplicamos ou dividimos os dois membros da inequação por um número negativo. Por isso, sugerimos que o professor insista nesse cuidado e apresente diversos exemplos com a inversão da desigualdade.

Página 160

Para chamar a atenção sobre ``bolas cheias'' e ``bolas vazias'', levante a questão da indivisibilidade por zero. A divisão por um número **x** é válida em toda a reta real, exceto em $x = 0$, como pode ser diagramado na figura abaixo.



Página 161

Ao contrário do sistema de equações do primeiro grau, um sistema de inequações do primeiro grau não pressupõe duas variáveis. Basicamente, é a intersecção de dois conjuntos, S_1 e S_2, que representam soluções de duas desigualdades.

Página 162

Para exercitar o conceito de maior ou menor com números negativos, peça ao aluno para testar a inequação: escolha um número $x_1 < -\frac{2}{3}$ (por exemplo, –1), um número x_2 tal que $-\frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1$ (por exemplo, 0) e um número $x_3 > 1$ (por exemplo, 2). Com isto, mostra-se que para os valores x_1 e x_3 as desigualdades são falsas em pelo menos uma delas e para os valores x_2, as desigualdades são verdadeiras.

Resoluções da seção Para estudar

6. a) $3x - 6 - 6 > 0$

$3x - 12 > 0$

$3x > 12$

$x > 4$

$S = \{x \in R / x > 4\}$

b) $3x < 18$

$x < 6$

$S = \{x \in R / x < 9\}$

c) $-x^3 - 3$

$x \leq 3$

$S = \{x \in R / x \leq 3\}$

d) $\frac{9x}{6} - \frac{2}{6} \leq \frac{12}{6} \rightarrow 9x - 2 \leq 12 \rightarrow x \leq \frac{1}{4}$

$S = \left\{x \in R / x \leq \frac{14}{9}\right\}$

e) $5x + 3x < -3 - 2 \rightarrow 8x < -5 \rightarrow x < \frac{-5}{8}$

$S = \left\{x \in R / x < -\frac{5}{8}\right\}$

f) $7x - 21 > 6 - 2x$

$7x + 2x > 27$

$x > 3$

$S = \{x \in R/\ x > 3\}$

g) $3x + 3 > -2\ x + 6$

$5x > 9$

$x > \dfrac{9}{5}$

$S = \left\{x \in R/\ x > \dfrac{9}{5}\right\}$

7. a) $2x + 6x \geq 5 + 35$

$S = \{x \in R/\ x \geq 5\}$

b) $-3x + 1 \leq 4x + 4$

$-\ 7x \leq 3$

$x \geq -\dfrac{3}{7}$

$S = \left\{x \in R/\ x \geq -\dfrac{3}{7}\right\}$

c) $-2x + 6x - 24 \leq 2x - 8$

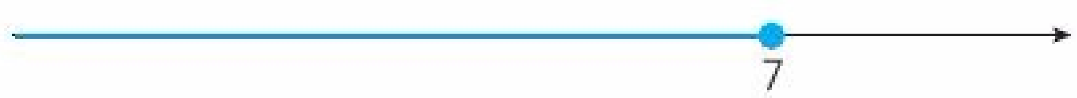
$2x \leq 16$

$x \leq 8$

$S = \{x \in R/\ x \leq 8\}$

8. a) $x - 1 \leq\ 6$

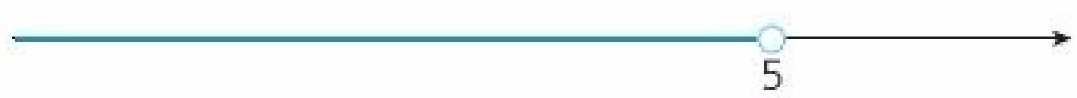
$x \leq\ 7$



b) $5 - 5x >\ 15$

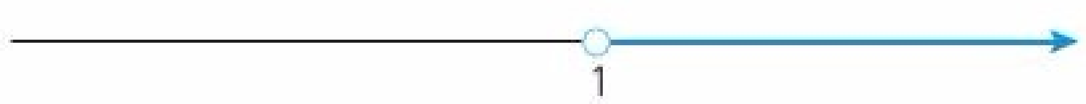
$-5x > 10$

$x\ < 2$



c) $4x - 4\ > 3 - 3x$

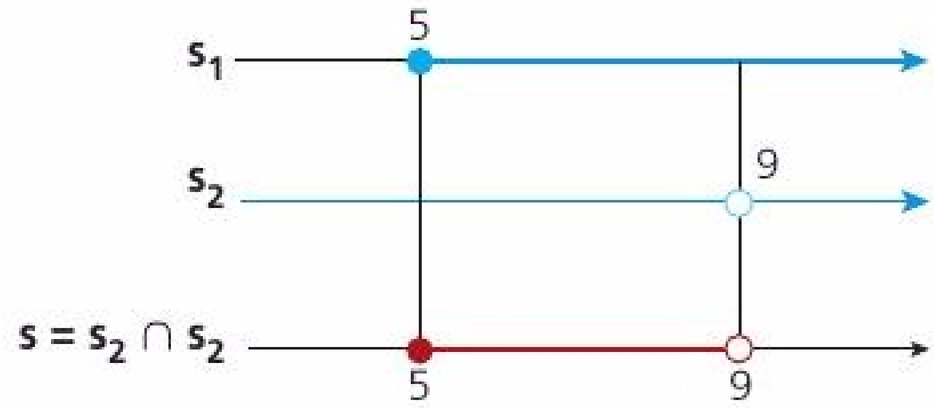
$7x\ > 7x \rightarrow x > 1$



9. a) $2x + 1 \geq 11$

$2x \geq 10 \rightarrow x \geq 5$

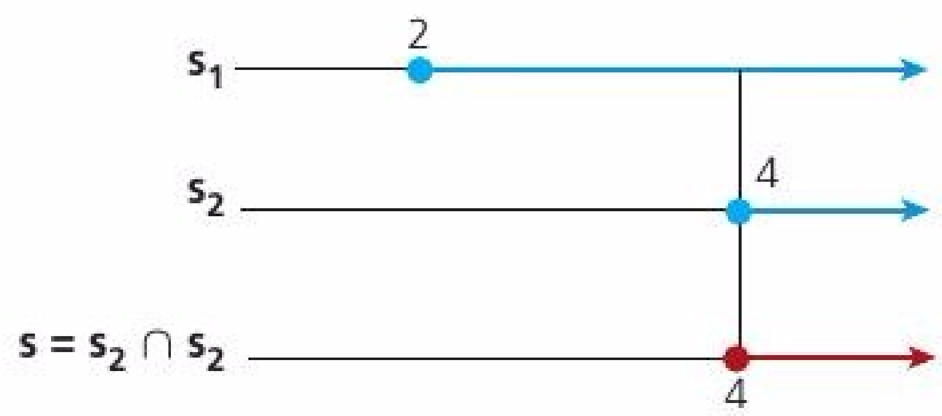
$x - 3 < 6 \rightarrow x < 9$



$S = \{x \in R/5 \leq x < 9\}$

b) $3 - x < 5 \rightarrow -\ x < 2 \rightarrow x > 2$

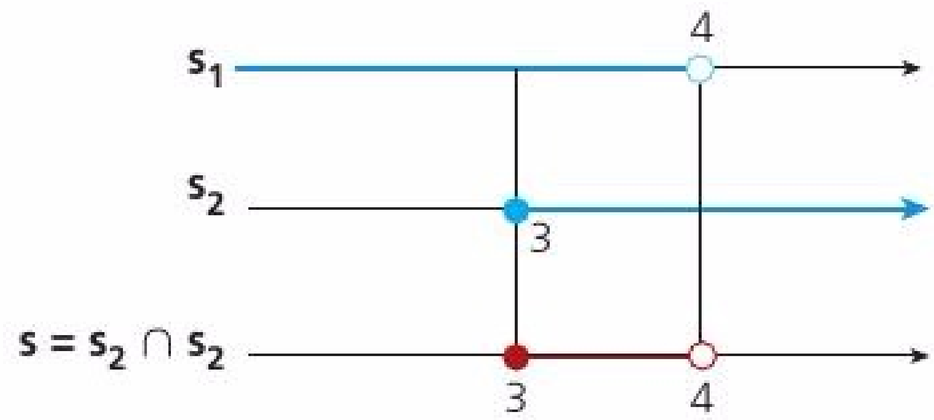
$3x - 4 \geq 8 \rightarrow 3x \geq 12 \rightarrow x \geq 4$



$S = \{x \in R/\ x \geq 4\}$

c) $4x - 2 < 14 \rightarrow 4x < 16 \rightarrow x < 4$

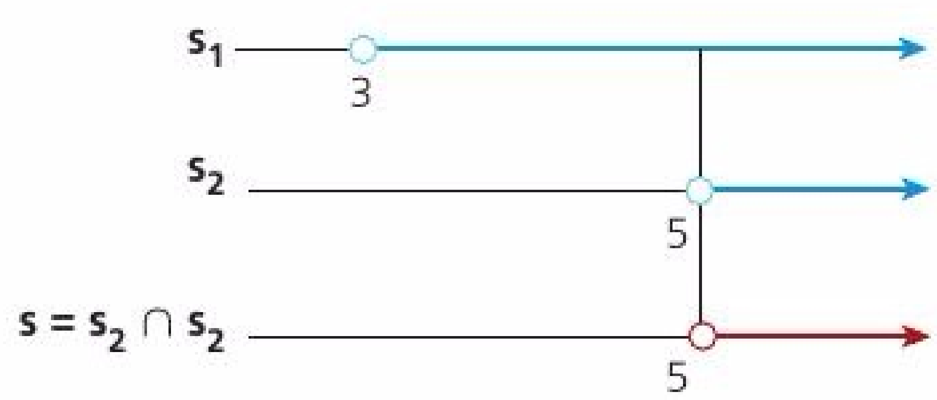
$2x - 1 > 5 \rightarrow x > 3$



$S = \{x \in R/3 < x < 4\}$

d) $3x - 1 > 0 \rightarrow 3x > 9 \rightarrow x > 3$

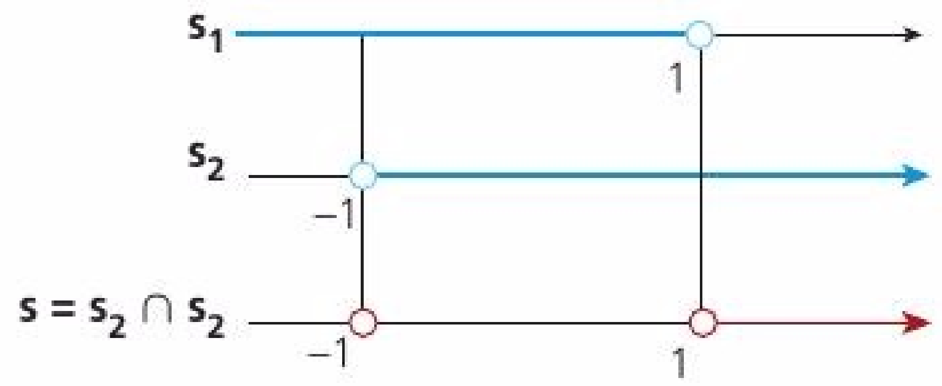
$2x - 3 > 7 \rightarrow 2x > 10 \rightarrow x > 5$



$S = \{x \in R/x > 5\}$

e) $-x + 1 > 0 \rightarrow -x > -1 \rightarrow x < 1$

$2x + 3 > 1 \rightarrow 2x > -2 \rightarrow x > -1$



$S = \{x \in R / -1 \leqslant x < 1\}$

10. a) $3x + 1 \geq 7 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2$

$3x + 1 \leq 4 \rightarrow x \leq 1$

$S = \{x \in R / x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $2x - 4 \geq 8 - x \rightarrow 3x \geq 12 \rightarrow x \geq 4$

$2x - 4 \leq 4 \rightarrow 2x \leq 8 \rightarrow x \leq 4$

$S = \{4\}$

c) $7x + 3 \geq 6x \rightarrow x \geq -3$

$7x + 3 \leq 2x - 2 \rightarrow 5x \leq 5 \rightarrow x \leq 1$

$S = \{x \in R / -3 \leq x \leq 1\}$

d) $-2x \leq 6x + 1 \rightarrow -8x \leq 1 \rightarrow x \geq -\dfrac{1}{8}$

$6x + 1 \leq 2x + 8 \rightarrow 4x \leq 7 \rightarrow x \geq \dfrac{7}{4}$

$S = \left\{x \in R / x \leq \dfrac{7}{4}\right\}$

e) $3x + 3 \geq x - 1 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2$

$x - 1 \geq \dfrac{x}{2} \rightarrow \dfrac{x}{2} \geq 1 \rightarrow x \geq 2$

$S = \{x \in R / x \geq 2\}$

f) $2x - 1 > \dfrac{x}{2} \rightarrow \dfrac{3x}{2} > 1 \rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{x}{2} \geq 3 \rightarrow x \geq 6$

$S = \{x \in R / x \geq 6\}$

11. a) $\{x \in R / x > 3\}$

b) $\{5\}$

c) $\{x \in R / x \geq 2\}$

d) $\{x \in R / 0 \leq x \leq 3\}$

12. a) $2x - 6 \geq 0 \rightarrow x > 3$

b) $\sqrt{\dfrac{x}{2} - 2} \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

Capítulo 8 – Áreas de figuras planas

Objetivos específicos do capítulo

Comparar figuras equivalentes e suas áreas. Definir fórmulas para calcular área de figuras planas: retângulo, paralelogramo, losango, triângulo e trapézio. Reconhecer polígonos e calcular suas respectivas áreas. Explorar equivalências de áreas.

Páginas 170 a 178

É importante que o aluno participe do processo de construção do conhecimento, sendo assim, faça as construções sugeridas no capítulo para que o aluno possa chegar sozinho nas conclusões sobre as áreas de cada uma das figuras planas do texto. Faça de sua sala de aula uma sala ambiente, cole nas paredes os trabalhos feitos pelos alunos com as conclusões obtidas.

Delimite algumas áreas de sua escola (pode ser sala de aula, pátio ou qualquer outro lugar) para que os alunos utilizem trenas ou fitas métricas para fazer as medições e calcular a área delimitada. É um ótimo momento para conversar sobre imprecisões de medida.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Gincana sobre áreas de figuras planas

Separe os alunos em grupos (até 4 alunos) e projete questões ou coloque na lousa questões para as equipes resolverem. Marque tempo para as resoluções, recolha as resoluções e resolva-as no quadro imediatamente após a entrega. As equipes que acertaram vão marcando pontos.

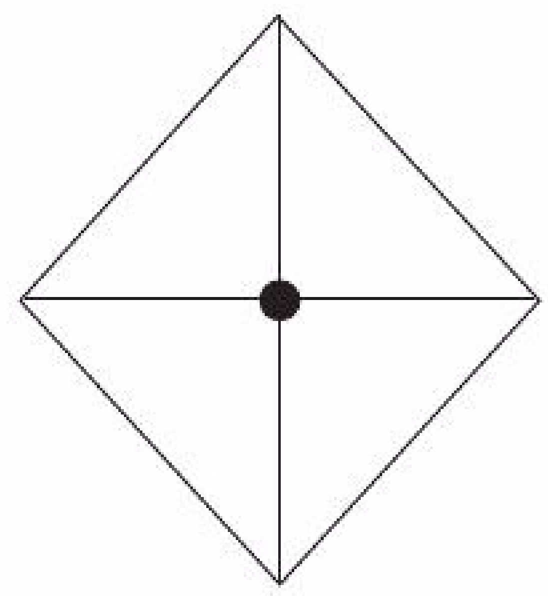
Sugestões de questões:

1. O nome da figura ao lado é:

a) Retângulo

b) Losango

c) Trapézio

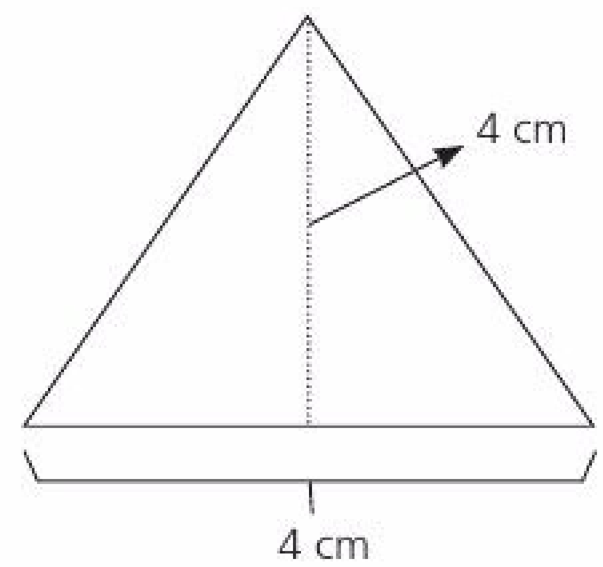


2. A área do triângulo abaixo é:

a) 16 cm²

b) 8 cm²

c) 12 cm²

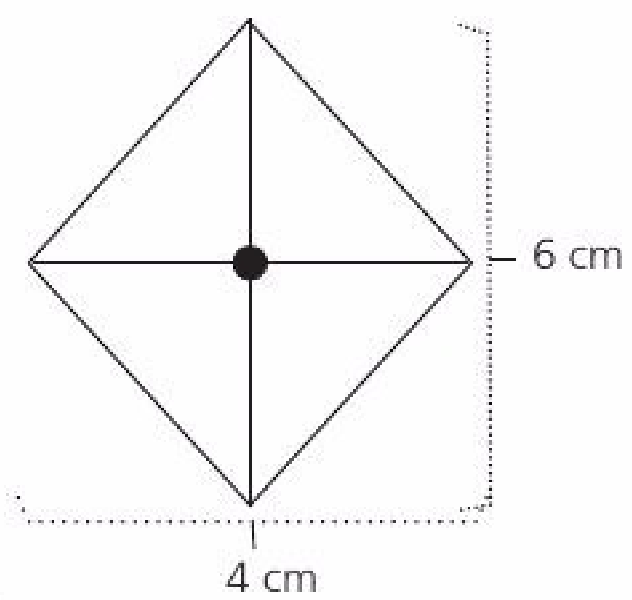


3. A área do losango abaixo é:

a) 12 cm²

b) 10 cm²

c) 24 cm²

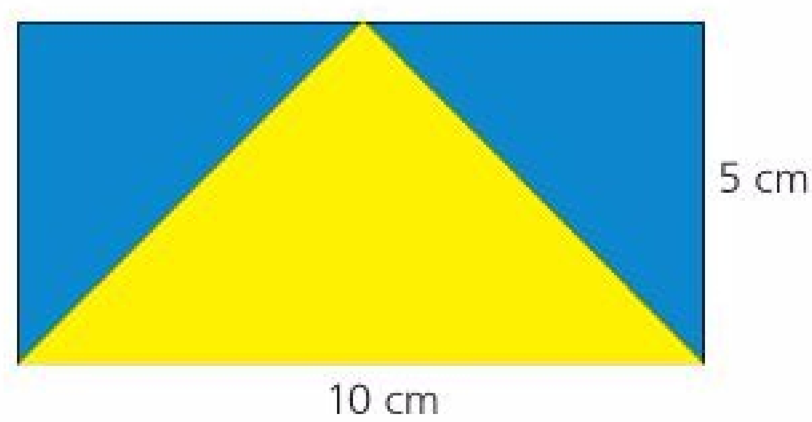


4. A área da região azul da figura é:

a) 25 cm²

b) 50 cm²

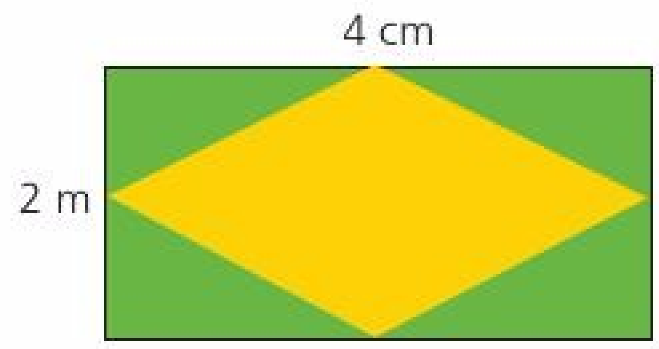
c) 15 cm²



5. Quantos azulejos de 20 cm × 30cm um pedreiro gastará em uma parede de 2 m por 3 m?

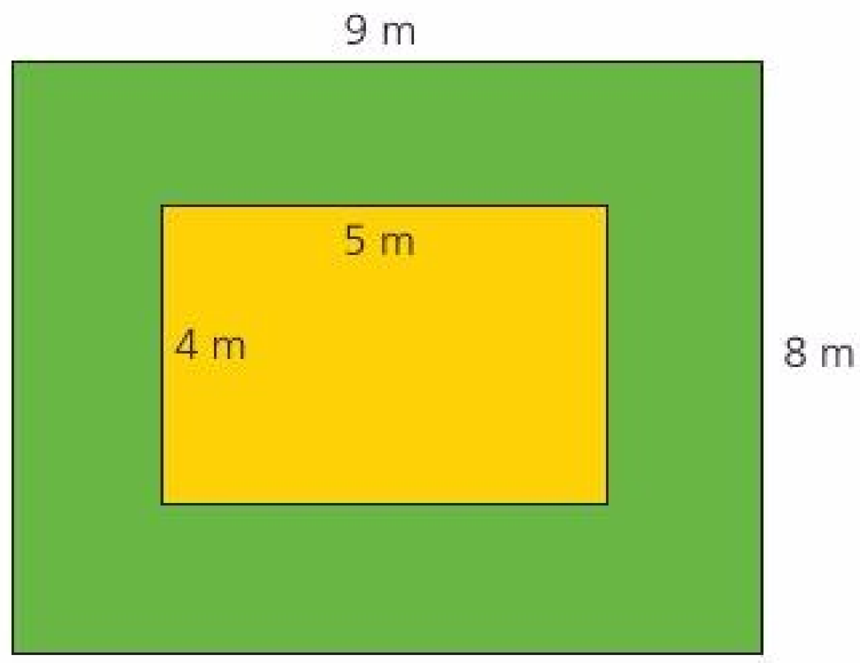
6. A área da região amarela da figura é:

a) 8 m²
b) 6 m²
c) 4 m²



7. A área da região verde da figura é:

a) 52 m²
b) 72 m²
c) 20 m²



Respostas da Atividades Sugeridas

1. b
2. b
3. a
4. a
5. 100 azulejos
6. c
7. 52 m^2

Resoluções da seção Para estudar

19. $A = 15 \cdot 5{,}6 - 16$
$A = 62{,}4\ cm^2$

20. a) $A = 24\ cm^2$
b) $A = 12{,}5\ cm^2$
c) $A = 88\ cm^2$
d) $A = 11{,}2\ cm^2$

21. a) $A = 12\ cm^2$
b) $A = 24\ cm^2$
c) $A = 36\ cm^2$
d) $A = \dfrac{(3 + 12) \cdot 8}{2}$
$A = 60\ cm^2$

22. a) $A = 28 \cdot 15$
$A = 420\ m^2$
b) $A = \dfrac{(6 + 3) \cdot 6}{2}$
$A = 27\ m^2$

23. $A = 6 \cdot 6 - 3 - 6$

$A = 27 m^2$

24. a) $A_1 = \dfrac{(7 + 1) \cdot 6}{2}$

$A = 24\ m^2$

b) $A_2 = \dfrac{21}{2}\ cm^2$

c) $A = 24 - \dfrac{21}{2}$

$A = 13{,}5\ cm^2$

25. A área é igual à área de três losangos.

$$A = 3 \cdot \dfrac{\dfrac{8}{6} \cdot 2}{2}$$

$A = 4\ cm^2$

26. $A = 4 \cdot \dfrac{4 \cdot 2}{2}$

$A = 16\ m^2$

27. $A = \dfrac{(3 + 5) \cdot 4}{2}$

$A = 16\ m^2$

Capítulo 9 – Circunferência e Círculo

Objetivos específicos do capítulo

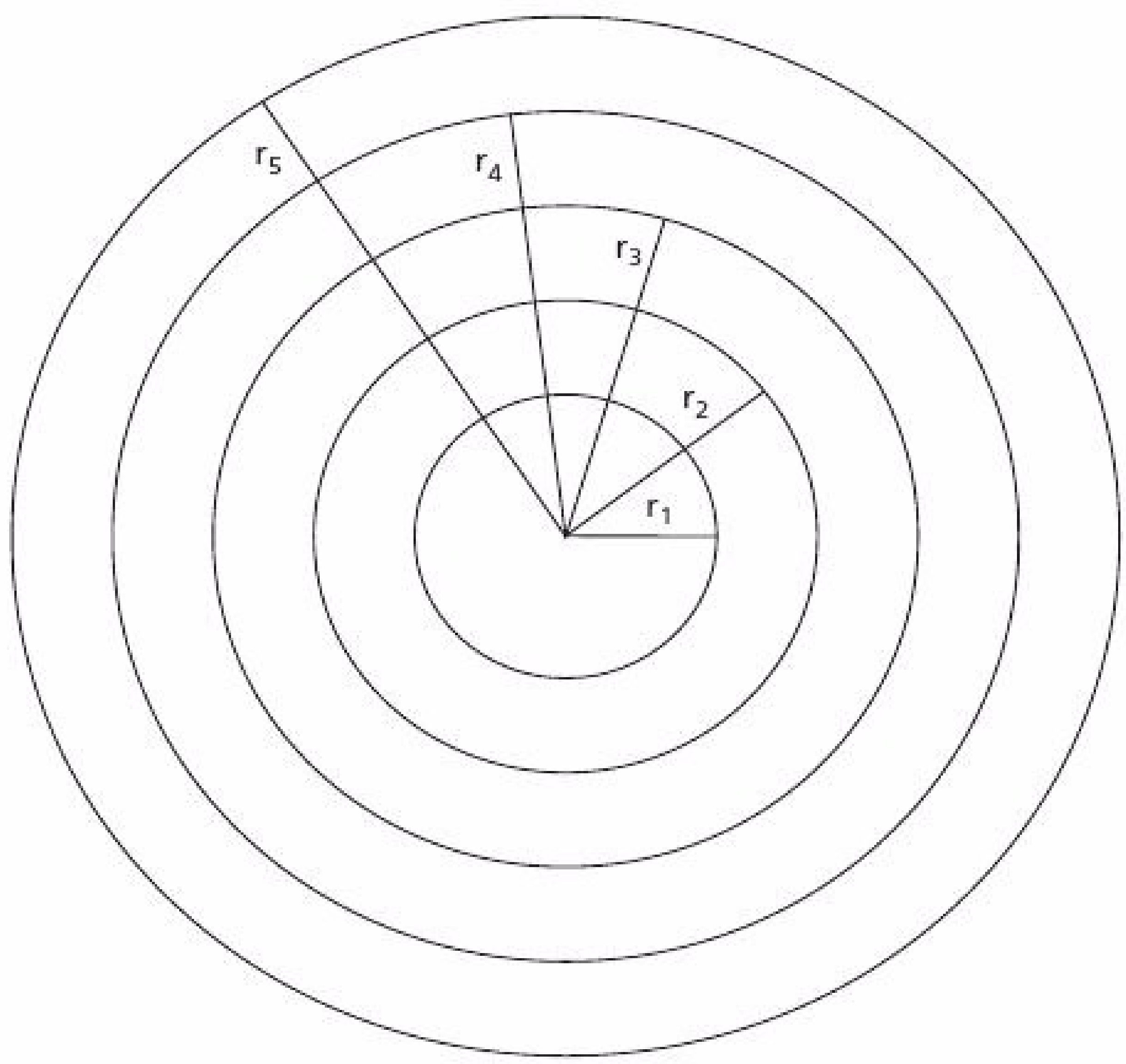
Reconhecer a circunferência e seus elementos. Explorar a relação entre as medidas do comprimento da circunferência e seu diâmetro. Explorar os ângulos na circunferência. Reconhecer a semicircunferência como um lugar geométrico. Identificar polígonos inscritos e circunscritos na circunferência. Reconhecer e operar com as unidades grau e radiano. Calcular as áreas do círculo, da coroa e do setor circular.

Páginas 186 a 188

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Construa cinco circunferências com raios medindo 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm e 11 cm.

Se marcarmos um ponto em cada uma das circunferências e colocarmos um fio de linha em seu contorno, teremos um valor bem aproximado do comprimento da circunferência.



Preencha a tabela a seguir com os dados obtidos.

Circunferência			
Raio (R)	Diamétro (D)	Comprimento (C)	$\frac{C}{D}$
$R_1 =$	$D_1 =$	$C_1 =$	
$R_2 =$	$D_2 =$	$C_2 =$	
$R_3 =$	$D_3 =$	$C_3 =$	
$R_4 =$	$D_4 =$	$C_4 =$	
$R_5 =$	$D_5 =$	$C_5 =$	

Após a atividade converse com os alunos sobre as imprecisões de medidas e também sobre as conclusões observadas. O aluno deve registrar as conclusões em seu caderno.

Páginas 188 a 192

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Atividade sobre ângulos na circunferência, utilizando o software Geogebra.

Passo a passo da atividade:

1. Abra o *software* GeoGebra.
2. Construa uma circunferência utilizando a ferramenta **Círculo dados centro e raio (B6)**. Clique em algum ponto da janela geométrica. Na caixa que será aberta, digite, para o valor do raio, 4. Clique **OK**. Surgirá um círculo na área de trabalho.
3. Coloque três pontos nessa circunferência. Para isso, utilize a ferramenta **Novo ponto (B2)** e clique na circunferência em três pontos distintos.
4. Selecione todos os pontos utilizando a ferramenta **Polígono (B5)**. Lembre-se que para fechar o polígono é necessário retornar ao primeiro ponto selecionado.
5. Utilizando a ferramenta **Ângulo**, selecione **Três pontos (B7)** e clique nos pontos C, D, B (sentido horário), para determinar o grau desse ângulo, e nos pontos C, A, B (sentido horário), para determinar o grau desse ângulo.
6. Clicar em **Opções** / **casas decimais** e clicar sobre o zero (0), para que o valor do ângulo torne-se inteiro.
7. No campo de entrada, digite ?/?. Tecle *Enter*. Na janela de álgebra que se abre aparecerá e = 2. O que isso significa?
8. Selecione a seta **mover (B1)** e movimente o ponto C. O que acontece com os valores dos ângulos? O que acontece com o valor de **e**?
9. A partir dessa atividade, que relação você pode estabelecer entre as medidas do ângulo central e do ângulo inscrito?

Obs.: Quando o ângulo central formado for ímpar, o programa arredondará um valor para cima do ângulo inscrito, devido ter escolhido em opções o zero (0).

Páginas 194 e 195

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas. Se possível, solicite aos alunos que venham até o quadro de giz para fazer as representações das propriedades das cordas e de uma circunferência.

Páginas 197 a 199

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro de giz para fazer as representações sobre os polígonos circunscritos e inscritos numa circunferência.

Nessa fase, é possível propor o uso de computadores disponíveis em algumas escolas. Se sua escola possuir esse tipo de recurso será possível propor trabalhos cooperativos e as construções do livro texto em atividades nos laboratórios de informática.

Essa é mais uma chance de propor atividades interdisciplinares. Aproveite!!

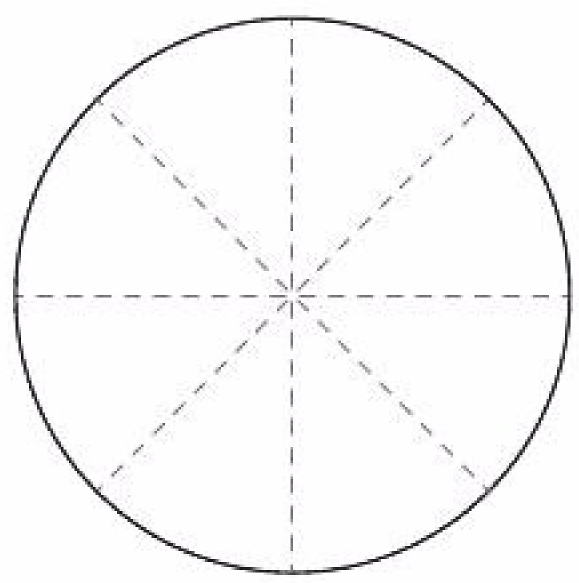
Páginas 208 e 209

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

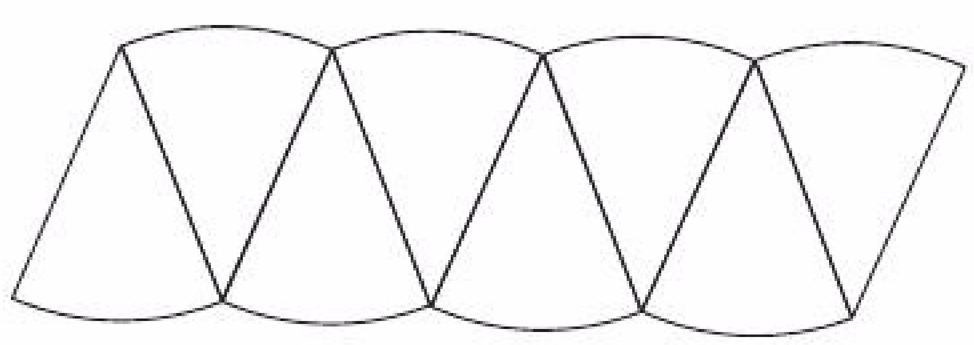
Atividade de área do círculo

Objetivo: obter a área do círculo

1) Divida um circulo de raio R, em oito partes iguais. Sugestão de material a utilizar: EVA.



2) Recortar nas linhas pontilhas obtendo 8 peças e formar a figura:



Nessa atividade, os alunos utilizam a área do paralelogramo para concluírem a área do círculo, com a base medido a metade do comprimento do círculo e a altura, o seu raio. Aumentando o número de peças do item 2, é possível obter uma aproximação do retângulo.

Curiosidade

Por mais estranho que pareça, há um modo curioso e interessante de calcular o valor de π, com o auxílio de pequenos e finos pedaços de madeira, como palitos ou fósforos. Para isso, basta você jogar muitas vezes esses palitos sobre o assoalho de tacos de madeira, de seu quarto ou de sua sala. Jogue um palito, de comprimento igual á largura do taco do assoalho, um grande número de vezes sobre o assoalho. Divida o dobro do número de vezes que você jogou o palito, pelo número de vezes que ele caiu sobre uma fresta de separação entre dois tacos, que você encontrará um valor aproximado de π. Por exemplo: se você jogar o palito 100 vezes, e ele cair sobre o risco de separação dos tacos 63 vezes, o quociente $(2 \times 100) \div 63 = 3{,}17$ é o valor aproximado de π. Quanto maior for o número de vezes que você jogar o palito, mais aproximado será o valor encontrado. Em Paris, no "Palais de la Découverte", existe uma máquina eletrônica que realiza essa operação e faz a contagem, em segundos. Não ache absurdo que o número π esteja relacionado com a medida da circunferência e com a probabilidade de um palito cair sobre o risco de separação dos tacos de um assoalho. Essa probabilidade depende de onde o centro do palito cai e de como ele gira em torno de seu centro. Observe que, quando o palito gira em torno de seu centro, gera um círculo, e já não achará tão absurdo.

Resoluções da seção Para estudar

33. a) $x = 118°$

b) $x = 42°$

c) $y = 220°$

$x = 110°$

d) $3x - 10 + 2x + 90 = 180°$

$5x = 100 \rightarrow x = 20°$

e) $x = 60°$

34. $x = 300°$

$y = 8$ cm

35. a) $A = \frac{60°}{360°} \cdot \pi r^2 \rightarrow A = \frac{25\pi}{6}$ cm^2

b) $\frac{4\pi}{4} + \frac{4 \cdot 2}{4} = \pi + 2$

c) $A = \frac{25\pi}{2} - \frac{16\pi}{2} \rightarrow A = \frac{9\pi}{2}$

d) $A = \frac{81\pi}{4} - \frac{36\pi}{4} + \frac{81\pi}{4} - \frac{36\pi}{4}$

$A = \frac{100\pi}{4} \rightarrow A = 25\pi \text{cm}^2$

36. a) 150°

b) 300°

c) 210°

d) 36°

37. a) $\frac{\pi}{10}$

b) $\frac{\pi}{5}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{11\pi}{6}$

38. a) $\frac{\pi}{2}$ cm

b) π cm

c) 2π cm

39. $\frac{40}{15} = \frac{8}{3}$ voltas

1 volta = 24π cm

$d = \frac{8}{3} \cdot 24\pi$ cm

$d = 64\pi$ cm

$d \cong 201$ m

40. a) $A = \frac{9 \cdot 9}{2} - 9\pi$

$A = \left(\frac{81 - 18\pi}{2}\right) m^2$

b) $A = 16 + \frac{16\pi}{8}$

$A = \left(\frac{144 + 16\pi}{2}\right) m^2$

c) $A = 24 + \frac{16\pi}{2} - 4\pi$

$A = \frac{48 + 16\pi - 8\pi}{2}$

$A = \left(\frac{48 + 8\pi}{2}\right) m^2$

d) $A = 36\pi - 2 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2}$

$A = (36\pi - 2)\ cm^2$

e) $A = 144 - 36\pi + 64 - 16\pi$

$A = (208 - 52\pi)\ cm^2$

Capítulo 10 – Sólidos

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos.

Páginas 220 a 224

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas sobre os sólidos. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro de giz para fazer as representações e relações entre as figuras.

Página 221

É interessante propor uma exposição dos sólidos construídos na sala de aula, ou até mesmo na escola, se possível.

Essa atividade pode também ser adaptada, sugerindo que os alunos construam luminárias no formato dos sólidos estudados, utilizando material reciclado. Lembro, porém, que isso só será possível se o professor entender que é oportuno sugerir esse tipo de atividade para a faixa etária de seus alunos.

Página 226 a 228

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas sobre as Pirâmides. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro de giz para fazer as representações e relações entre as figuras.

Páginas 230 a 232

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro de giz, reproduza as representações geométricas observadas sobre a área da superfície de sólidos geométricos. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro de giz para fazer as representações e relações entre as figuras.

Destaque a planificação e os elementos dos poliedros, representados na página 186. Esse quadro pode ser útil para a construção dos sólidos.

Resoluções da seção Para estudar

28. a) $A = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 50 + 2 \cdot 30$

$A = 280\ cm^2$

b) $A = 4 \cdot 21 + 36$

$A = 120\ cm^2$

c) $A = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 24$

$A = 88\ cm^2$

d) $A = 8 \cdot \dfrac{4 \cdot 3{,}4}{2}$

$A = 54{,}4\ cm^2$

29. $A = 2 \cdot 30 + 2 \cdot \dfrac{(10 + 5) \cdot 4}{2} + 25 + 50$

$A = 195\ m^2$

30. $A = 4 \cdot 5 \cdot 10 + 4 \cdot 5 \cdot 20 + 4 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot 20 + 4 \cdot 5 \cdot 20$

$A = 200 + 400 + 800 + 800 + 400$

$A = 2\,600\ cm^2$

31. $A_{octaedro} = 20$ triângulos

$A_{tetraedro} = 8$ triângulos

$A_{octaedro} = \frac{20}{8}$ triângulos

Resp: aproximadamente 2,5 vezes

32. $A = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4$

$A = 20 + 16 + 60 \rightarrow A = 96\ m^2$

33. $A = 192\ m^2$

34. a) $A = 144\ cm^2$

b) $A = 324\ cm^2$

35. $A = 3 \cdot 5 \cdot 5 + \cancel{2} \cdot \frac{5 \cdot 3}{\cancel{2}} + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5$

$A = 200\ m^2$

36. a) $A_f = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} \rightarrow A_f = \sqrt{3}\ cm^2$

b) $A_T = 4\sqrt{3}\ cm^2$

37. $A = 6 \cdot 2 \cdot 9 \rightarrow A = 162\ cm^2$

38. $A = 6 \cdot \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = 54\sqrt{3}\ cm^2$

39. $A = 72\ m^2$

Plástico $= \frac{72}{2} \rightarrow$ plástico $= 36$ m

40. tetraedro $\rightarrow A + 2 = 8 \rightarrow A = 6$

hexaedro $\rightarrow A + 2 = 14 \rightarrow A = 12$

octaedro $\rightarrow A + 2 = 14 \rightarrow A = 12$

dodecaedro $\rightarrow A + 2 = 32 \rightarrow A = 30$

icosaedro $\rightarrow A + 2 = 32 \rightarrow A = 30$

Capítulo 11 – Gráficos de linha

Objetivos específicos do capítulo

Ler e interpretar textos em forma de tabelas e gráficos, construir gráficos de linhas. Registrar, organizar e coletar elementos elencados em uma pesquisa. Desenvolver pesquisas para exercitar o tratamento da informação e para conhecer o ambiente no qual está inserido. Utilizar recursos tecnológicos para desenvolver habilidades cognitivas.

Página 243

Leia com seus alunos o texto e discuta os diversos tipos de gráficos estatísticos usados no cotidiano.

Se achar propício, solicite pesquisas os diferentes tipos de gráficos encontrados em jornais e revistas.

Nessa fase é interessante a ideia de utilizar planilhas eletrônicas em salas de aula e em casa, como recurso de resolução de exercícios. Além disso, se possível, pode-se utilizar o material multimídia eventualmente disponível.

Sensibilize seus alunos para a leitura desse tipo de linguagem e propicie uma discussão mais detalhada sobre os gráficos de linha e sua interpretação.

Página 246 e 247

Leia com seus alunos o texto do livro e no quadro de giz construa os gráficos para ilustrar a ideia do texto.

Se possível, sugira a construção desses gráficos sobre com a utilização de planilhas eletrônicas.

Ainda na ideia do uso de planilhas eletrônicas, lembro que os alunos devem começar construindo as tabelas, para posteriormente, construírem os gráficos.

Sugestões de temas para pesquisa: número de aniversariantes distribuídos pelo ano, consumo de água de sua escola durante os meses do ano e outras pesquisas sugeridas pelos alunos.

Páginas 248 a 250

As atividades estão desenvolvidas com diferentes níveis de complexidade, procurando obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Contudo, é interessante que o professor leia com os alunos os enunciados e comente sobre as questões especiais em cada caso.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1. As informações abaixo fazem parte dos Novos dados do Censo 2010, divulgados em 01/07/2011 pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), referente ao censo de 2010.

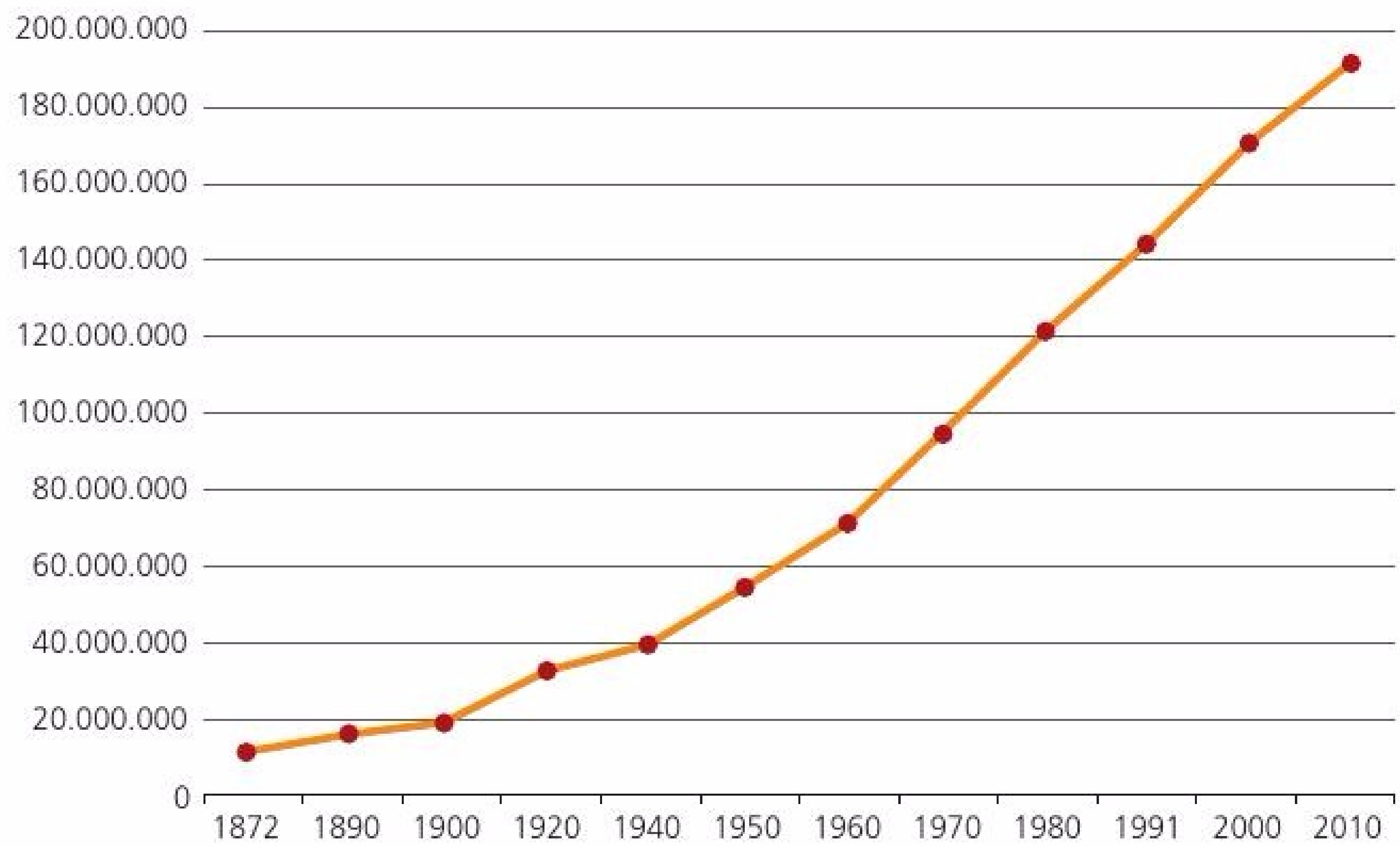
Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/censo_2010-graficos.shtml>. Acesso em 01 mai. 2012.

Professor, esses dados podem ser usados para propor novas atividades em sala de aula, ou ainda podem servir de inspiração para que você sugira novas pesquisas.

Os alunos devem faze a leitura dos gráficos e interpretar os dados neles contidos. Se achar conveniente, leia alguns dos gráficos sugeridos a seguir, colha os dados e construa um gráfico de linhas com as mesmas informações (quando possível).

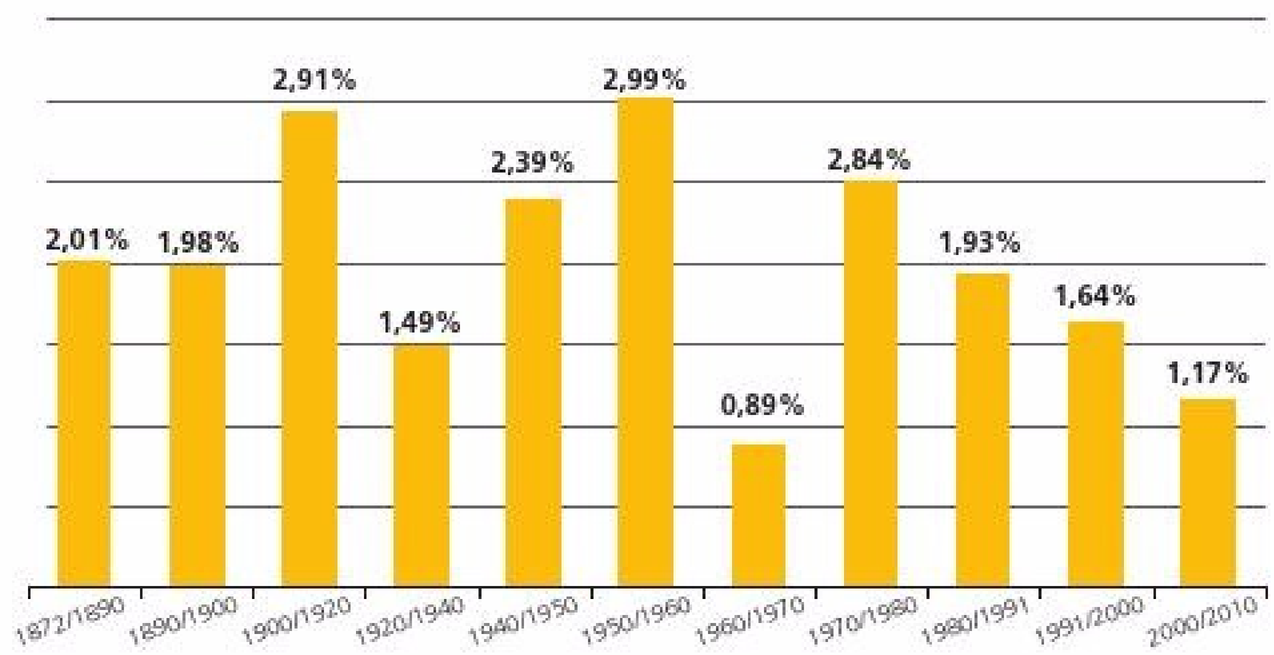
Converse com os professores de Ciências, História, Geografia, entre outras disciplinas e veja a possibilidade de criar atividades com pesquisas de temas interessantes a essas outras disciplinas.

Evolução da População Residente no Brasil segundo dados do IBGE



Fonte: IBGE

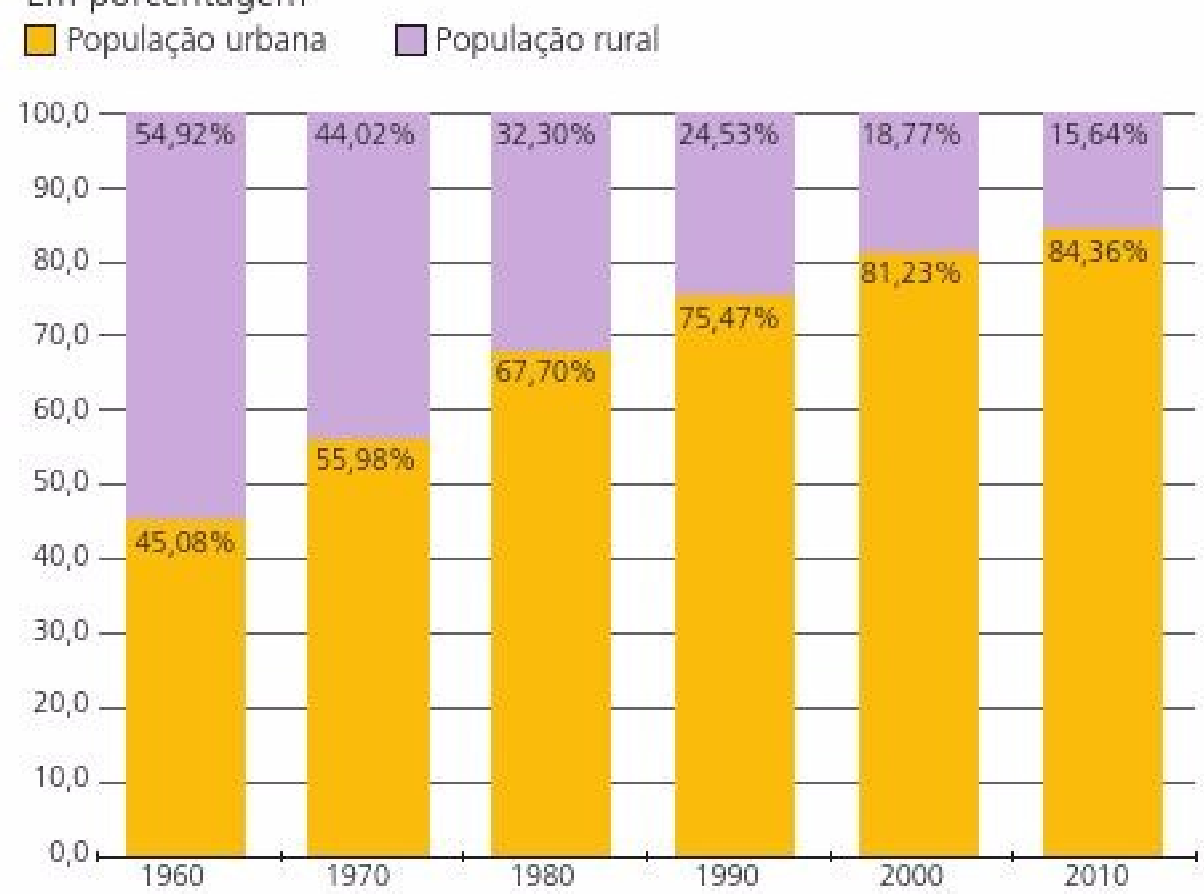
Taxa média de crescimento anual



Fonte: IBGE

Evolução da População Urbana e Rural – Brasil

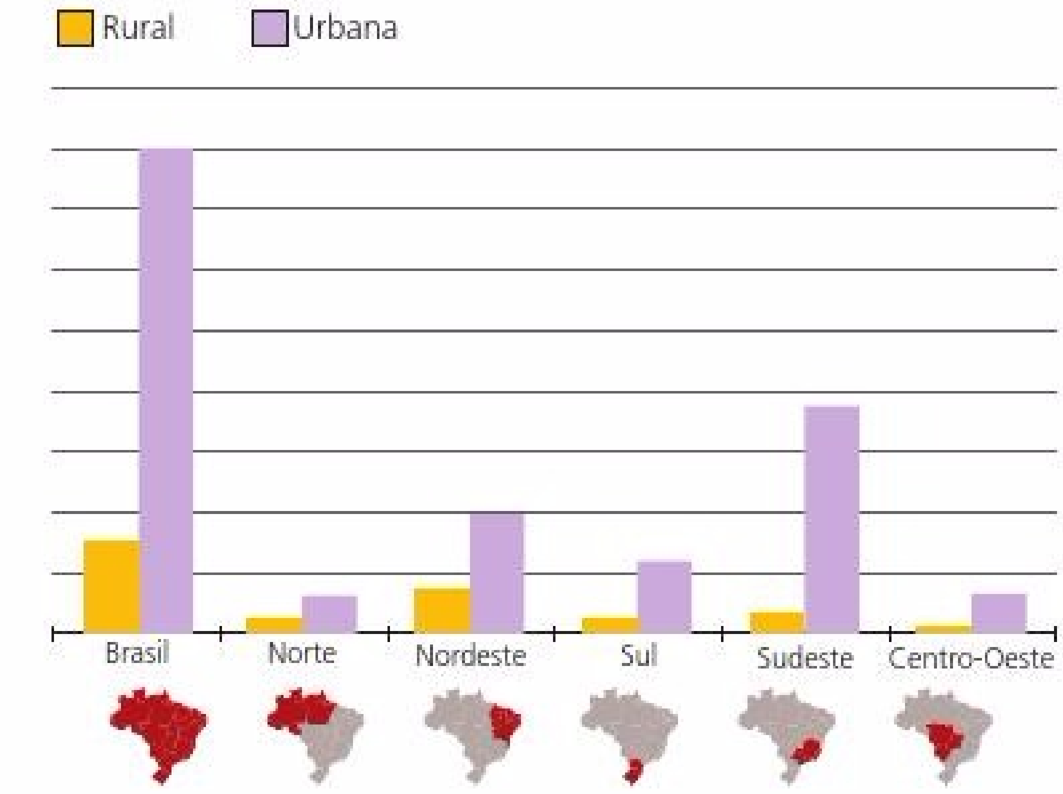
Em porcentagem



Fonte: IBGE

Populações Rural e Urbana por Região em 2010

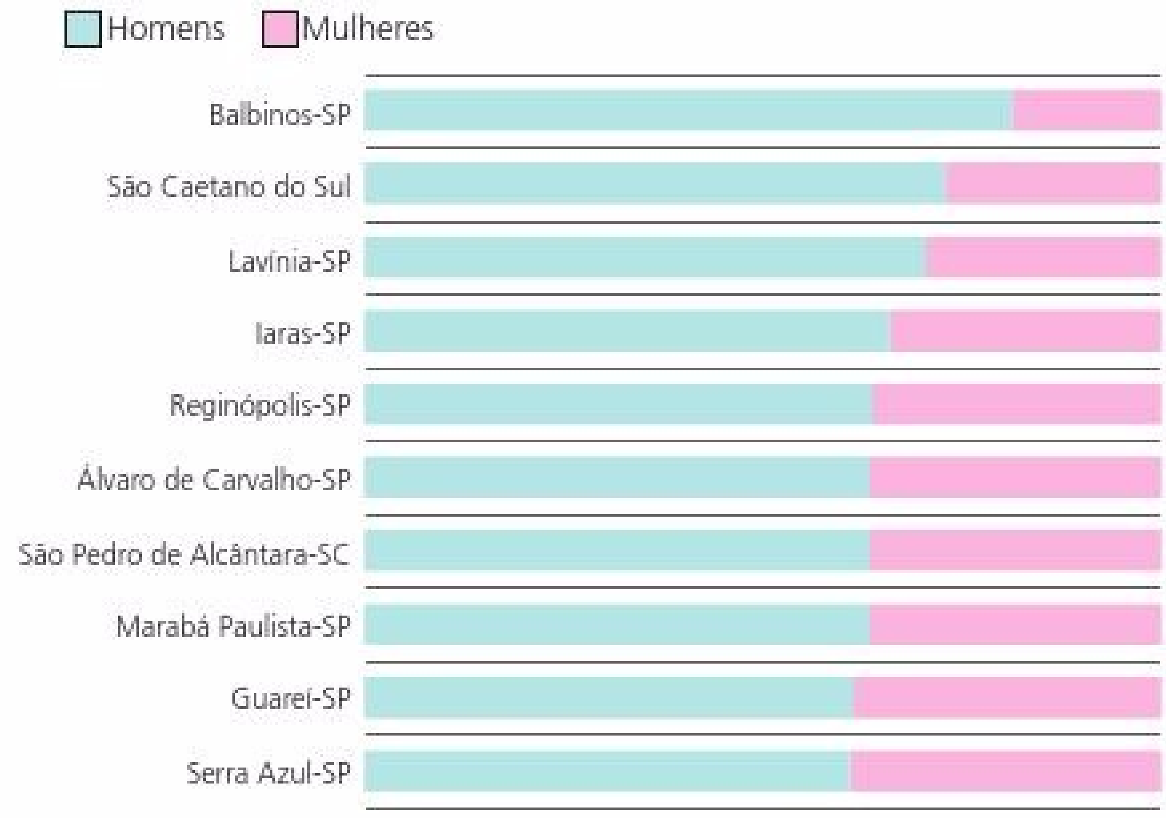
Em números absolutos



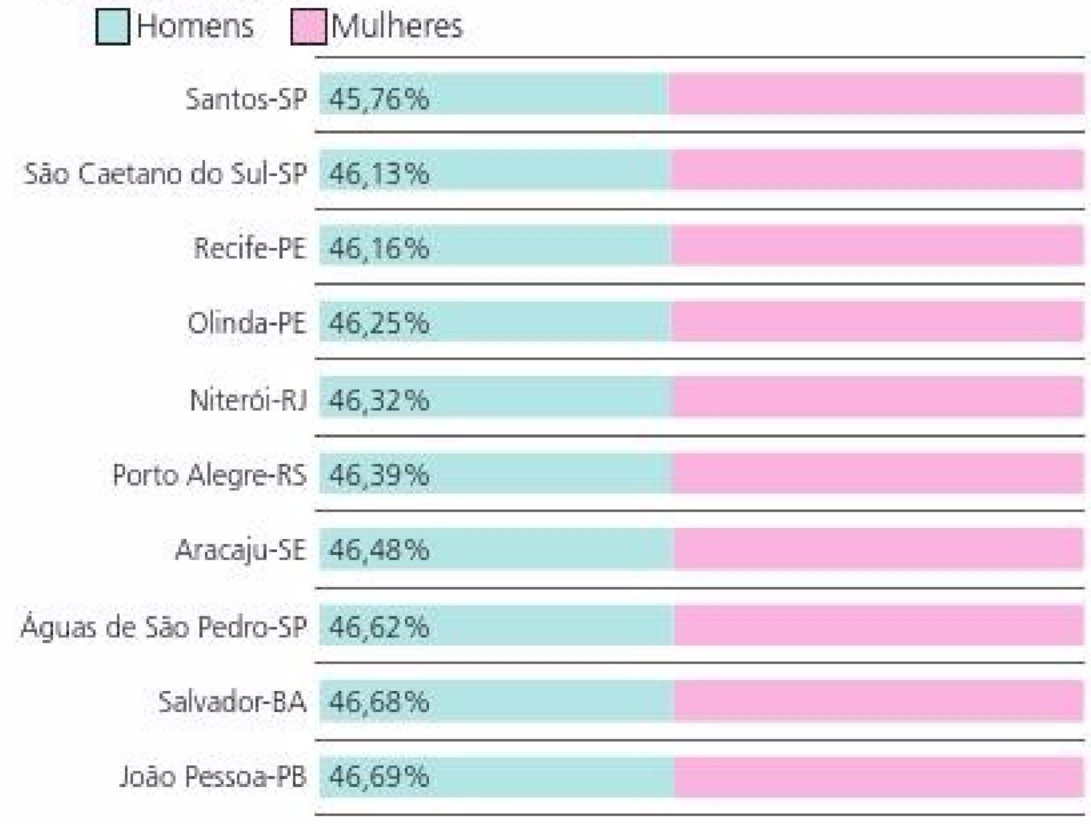
Fonte: IBGE

Região	Rural	Urbana	Total por região
Norte	4199945	11644509	15844454
Nordeste	14260704	38821246	53081950
Sul	4125995	23260896	27386891
Sudeste	5668232	74636178	80304410
Centro-Oeste	1575131	12482963	14058094
Total no Brasil	29830007	160845792	190675799

Cidades com maior número de homens
Em porcentagem



Cidades com maior número de mulheres
Em porcentagem

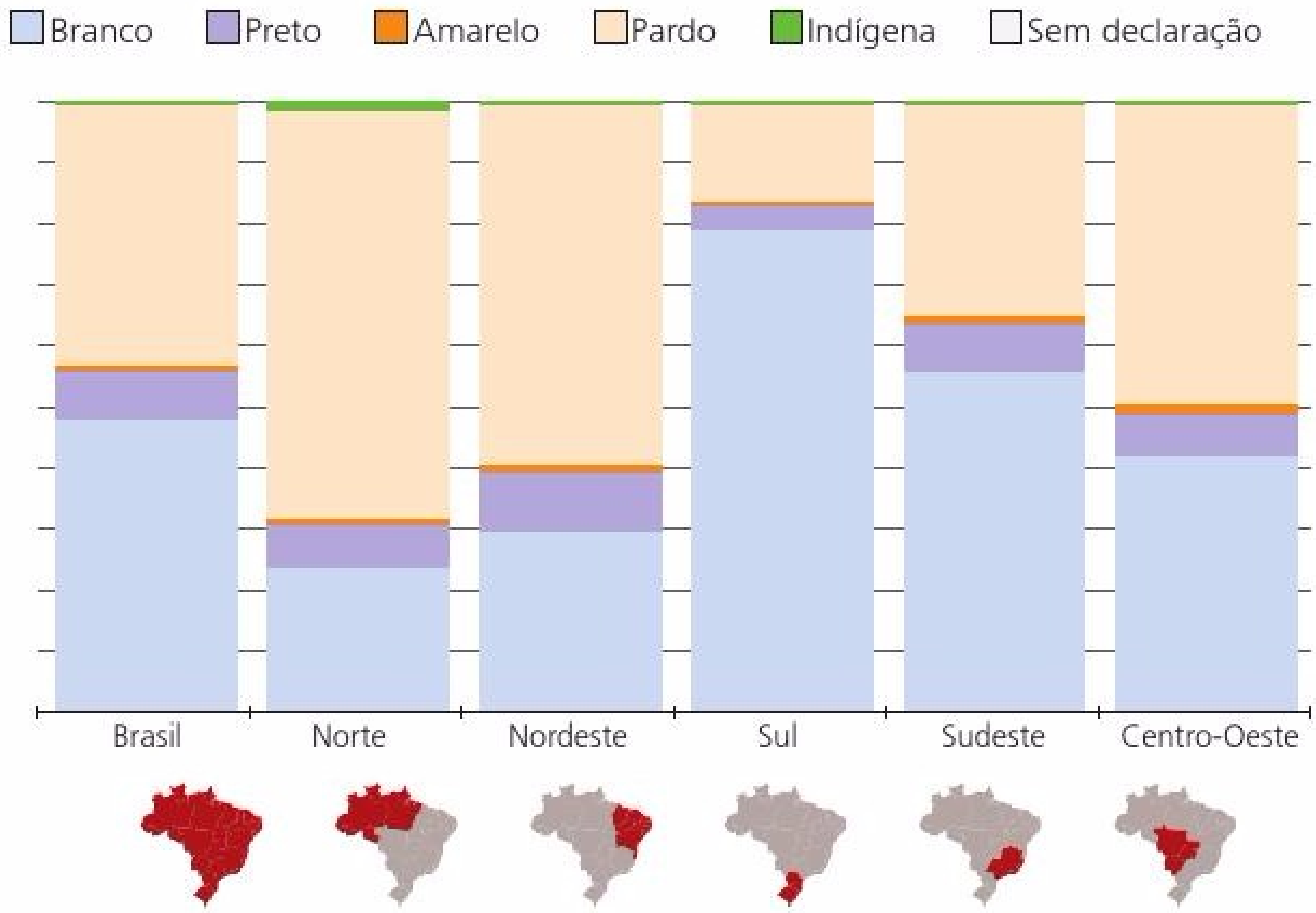


Fonte: IBGE

Cidade-Estado	Homens	Mulheres
Balbinos-SP	81,09	18,91
Pracinha-SP	72,78	27,22
Lavínia-SP	70,43	29,57
Iaras-SP	65,81	34,19
Reginópolis-SP	63,92	36,08
Álvaro de Carvalho-SP	63,63	36,37
São Pedro de Alcântara- SC	63,52	36,48
Marabá paulista-SP	63,34	36,66
Guareí-SP	61,29	38,71
Serra Azul -SP	61,06	38,94

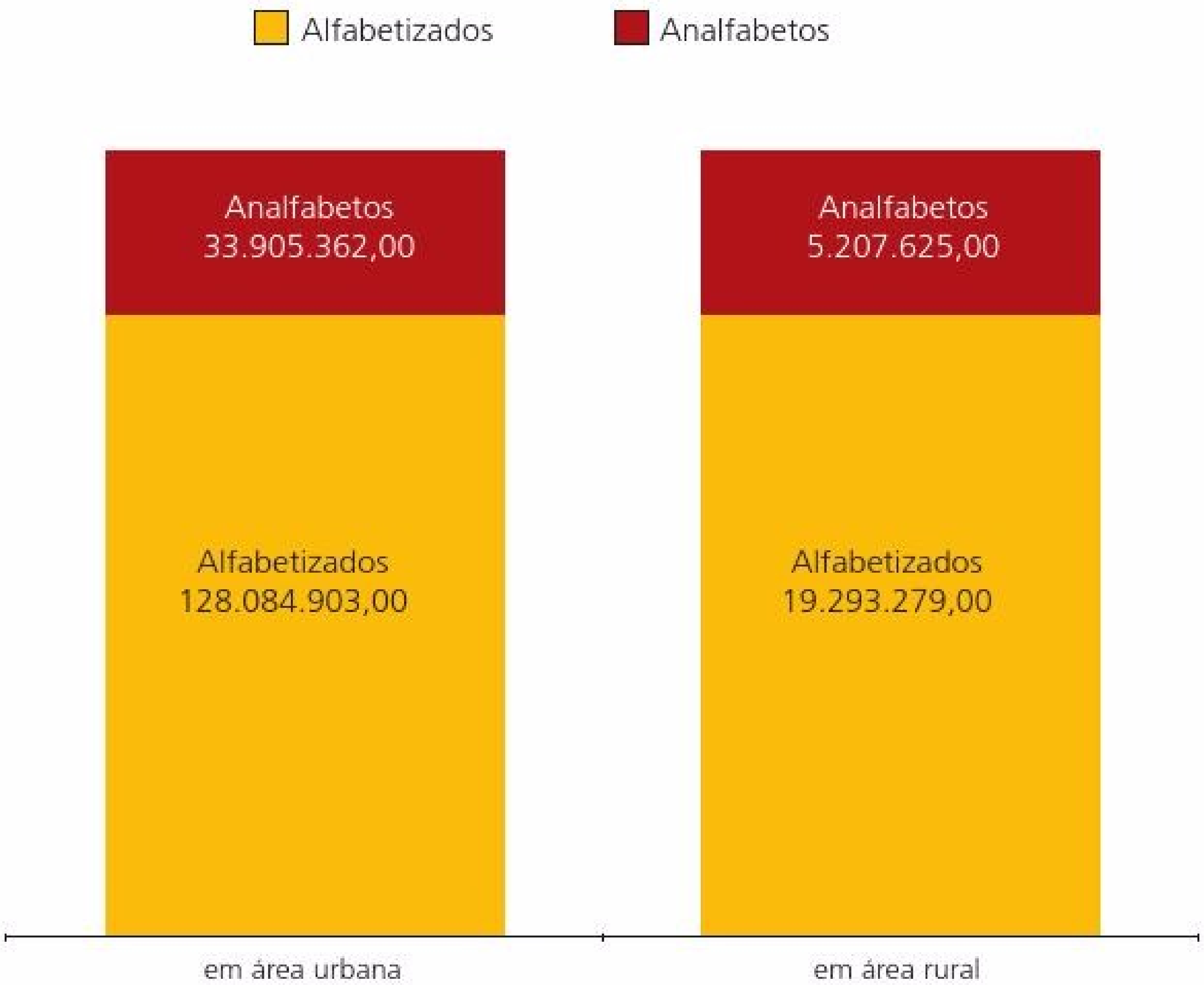
Fonte: IBGE

População por cor ou raça
Em números absolutos



Fonte: IBGE

População alfabetizada e analfabeta
Distribuída em domicílios rurais e urbanos



Fonte: IBGE

Resoluções da seção Para estudar

6. a) Europa
b) No terceiro trimestre
c) aproximadamente 5 milhões e reais

7. a) 1 000 litros
b) 13 000 litros
c) 12 000 litros
d) 7 mil litros
e) 4 mil litros

8. O tipo de tintas não é uma variável contínua. Deveria ser utilizado um gráfico de barras e de setores.

9. No mês de abril.
Aproximadamente 90 000.

10. a) Banda de rock: 18 a 25 anos – 60%
b) sertanejo: 25 a 35 anos com 30%
c) cantor: 18 a 25 anos com 16%
d) cantora: 18 a 25 anos com 25%

11. a) 2007 – 3º quadrimestre
2008 – 3º quadrimestre
2009 – 3º quadrimestre
b) Aproximadamente R$ 800 milhões