

Edwaldo Bianchini

MATEMÁTICA BIANCHINI

7º ano

**MANUAL DO
PROFESSOR**

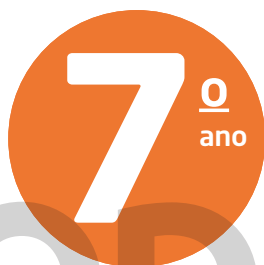
Componente curricular:
MATEMÁTICA



Edwaldo Bianchini

Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no ensino fundamental e médio, por 25 anos.

MATEMÁTICA BIANCHINI



MODERNA

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

8ª edição

São Paulo, 2015



Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay

Edição de texto: Enrico Briese Casentini, Maria Cecília da Silva Veridiano, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Cármen Matricardi, José Joelson Pimentel de Almeida

Assistência editorial: Izabel Batista Bueno, Marcos Gasparetto de Oliveira

Preparação de texto: ReCriar editorial

Gerência de design e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma

Coordenação de design e produção gráfica: Everson de Paula

Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)

Projeto gráfico: Everson de Paula, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Everson de Paula

Foto: Obra de arte de rua em 3-D, de Kurt Wenner, encomendada pelo British Columbia Turismo em 2010, em San Francisco.

© Kurt Wenner/Barcroft Media/Getty Images

Coordenação de arte: Patricia Costa, Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Camila Ferreira Leite, Estúdio Anexo

Editoração eletrônica: Estúdio Anexo, Estação das Teclas

Ilustrações de vinhetas: Adriano Moreno Barbosa

Coordenação de revisão: Adriana Bairrada

Revisão: Rita de Cássia Sam, Sandra Brazil, Vânia Cobiaco, Viviane Teixeira Mendes

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Marcia Sato, Luciano Baneza (coord.)

Coordenação de bureau: Américo Jesus

Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Bureau São Paulo, Fabio N. Precendo, Marina M. Buzzinaro, Resolução Arte e Imagem

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Hélio P. de Souza, Marcio H. Kamoto, Rubens M. Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani

Impressão e acabamento:



MODERNA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo

Matemática Bianchini / Edwaldo Bianchini. —
8. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos de 6º ao 9º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02025

CDD-372.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.

Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho

São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904

Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510

Fax (0_ _11) 2790-1501

www.moderna.com.br

2015

Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro foi feito especialmente para você.

Ele foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem e, também, ajudá-lo a ver como a Matemática está presente em tudo o que acontece à sua volta.

Aqui você vai encontrar exemplos de situações que permitem perceber que a Matemática faz parte do seu dia a dia.

Leia com atenção as explicações teóricas, para acompanhar as aulas e resolver os exercícios.

Faça deste livro um parceiro em sua vida escolar!

O autor

MODERNA



CONHEÇA O SEU LIVRO

A estrutura de cada capítulo é muito simples, pois permite encontrar com facilidade os assuntos fundamentais, os exemplos, as séries de exercícios e as seções enriquecedoras.

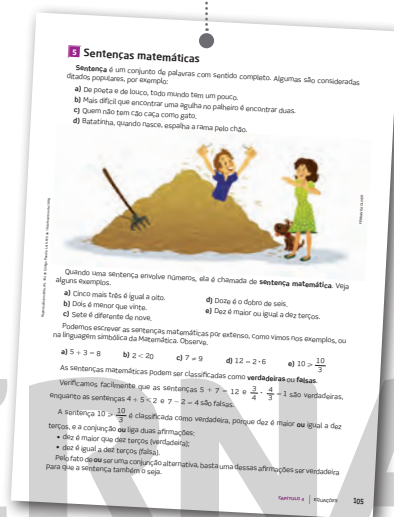
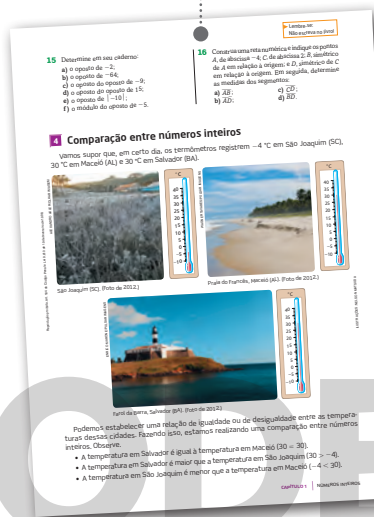


Página de abertura

O tema do capítulo é introduzido por meio de vários recursos, tais como textos com situações do dia a dia, imagens do cotidiano, História da Matemática etc.

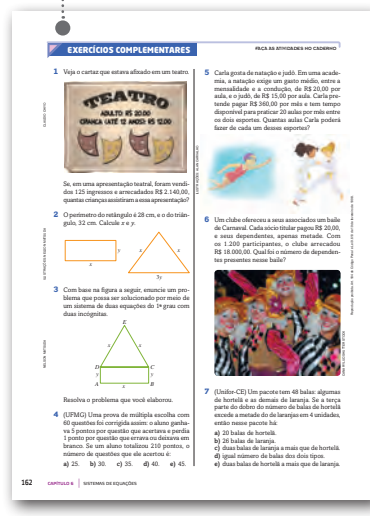
Página de conteúdo

Contém a teoria explicada com linguagem clara e objetiva, apoiada por exemplos e ilustrações cuidadosamente elaborados para ajudar o entendimento da teoria.



Exercícios

O livro apresenta uma variedade de exercícios (de aplicação, de exploração, de sistematização, de aprofundamento), organizados segundo o grau de dificuldade.



Para saber mais

Esta seção apresenta, entre outras coisas, textos sobre a Geometria e a História da Matemática para enriquecer e aprofundar diversos conteúdos matemáticos.

PARA SABER MAIS


Construindo e explorando um losango

Você já sabe que o losango é um quadrilátero que tem os quatro lados de mesma medida.

Vamos construir, como exemplo, um losango cujos lados medem 2,5 cm e que tenha um ângulo interno de 30°.

Inicialmente, podemos traçar o losango pronto e depois, a mão, um esboço dele.

Nesse esboço, vamos indicar as medidas dadas.



Observando o esboço e com o auxílio de régua, transferir o compasso vamos adotar os seguintes passos de construção:

1. Traçamos uma reta e nela um segmento de reta de 2,5 cm, que será o lado AB.
2. Construímos um ângulo de 30° com vértice em A e um lado AB.
3. Com a ponta seca do compasso em A e abertura AB, traçamos um arco obtido o ponto C no outro lado do ângulo de 30°.
4. Com a mesma abertura de 2,5 cm e o auxílio da régua e do compasso em C, abrimos em B, traçamos dois arcos que se cruzam, determinando o ponto D, que é o quarto vértice do losango. Assim, obtemos o losango ABCD.

Trabalhando a informação

Esta seção permite que o aluno, além de atividades interdisciplinares, trabalhe a informação organizada em diferentes linguagens.

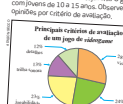
TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Gráficos de setores

Gráficos de setores são usados principalmente quando se deseja relacionar entre si as partes de que está sendo representado, ou relacionar cada parte com o todo.

Vamos analisar a situação a seguir.

Um fabricante de jogos de videogame fez uma pesquisa para saber quais os principais motivos de aquisição para adquirir o videogame e a duração da compra de um jogo com jogos de 12 a 15 anos. Observe e corrija o gráfico abaixo de acordo com os dados fornecidos por meio de avaliação.



De acordo com os dados fornecidos:


Se mudarmos com um fator de 2 o ângulo do gráfico referente à aprendizagem, por exemplo, aproximadamente 30°. Se calcularmos 23% de 360°, teremos 82,8°. Com o transferidor, o setor relativo ao motivo compra de 180°, o 24% de 360° é 86,4°.

Agora que trabalhou a parte:

1 A tabela a seguir contém o resultado de uma pesquisa. Mas alguns dados com joga de 10 a 18 anos. Copie essa tabela e complete com as medidas. No gráfico, indique com o uso de arco de 90 graus. Depois, faça o ângulo dos setores do gráfico com sua transferidor e corpore.

Colaboração	Porcentagem	Grão
Trabalho em grupo	30%	108°
Trabalho em dupla	18%	64,8°
Trabalho individual	41%	147,6°
Trabalho em grupo	1,9%	6,84°
Trabalho em grupo	2,7%	9,72°

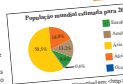
2 Dado o gráfico de setores a seguir, copie-o e complete com os dados fornecidos.



Atividades especiais


Estas seções apresentam atividades e objetivos diferentes. **Pense mais um pouco...** propõe atividades desafiadoras. **Diversificando** propõe ao aluno que entre em contato com atividades que envolvam temas variados.

45 Observe o gráfico de setores. Sabendo que a população mundial utilizada para a amostra de 2014 é 7 bilhões de habitantes, responda:




a) Qual será a população de América do Sul em 2014?
b) Supondo que o Brasil tenha 215 milhões de habitantes em 2014, quantos por cento da população mundial representam os habitantes do Brasil em 2014?

46 Pense mais um pouco... Há de 400 milhões de habitantes, uma bacia ergométrica custa a metade por 300 mil. A bacia de exercícios aeróbicos custa a metade a mais que a bacia ergométrica. Qual o preço da bacia ergométrica? Qual o preço da bacia de exercícios aeróbicos? Qual o preço da bacia ergométrica e da bacia de exercícios aeróbicos juntos?



47 Observe o gráfico de setores. Sabendo que a população mundial utilizada para a amostra de 2014 é 7 bilhões de habitantes, responda:




a) Qual será a população de América do Sul em 2014?
b) Supondo que o Brasil tenha 215 milhões de habitantes em 2014, quantos por cento da população mundial representam os habitantes do Brasil em 2014?

Diversificando

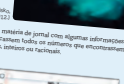
Treinando mais

1. Observe o gráfico de setores a seguir. Sabendo que a população mundial utilizada para a amostra de 2014 é 7 bilhões de habitantes, responda:



a) Qual será a população de América do Sul em 2014?
b) Supondo que o Brasil tenha 215 milhões de habitantes em 2014, quantos por cento da população mundial representam os habitantes do Brasil em 2014?

2. Observe o gráfico de setores a seguir. Sabendo que a população mundial utilizada para a amostra de 2014 é 7 bilhões de habitantes, responda:



a) Qual será a população de América do Sul em 2014?
b) Supondo que o Brasil tenha 215 milhões de habitantes em 2014, quantos por cento da população mundial representam os habitantes do Brasil em 2014?

Há, ainda atividades de **Calculadora** e de **Cálculo Mental**, além de atividades que podem ser feitas em **dupla** ou em **grupo**.



SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 Números inteiros

1. A necessidade de outros números	11
2. Representação na reta numérica e módulo	14
3. Números inteiros opostos ou simétricos	16
4. Comparação entre números inteiros	17
5. Adição de números inteiros	20
Propriedades da adição de números inteiros	24
6. Subtração de números inteiros	27
7. Adição algébrica de números inteiros	29
8. Multiplicação de números inteiros	31
Propriedades da multiplicação de números inteiros	33
9. Divisão de números inteiros	35
10. Expressões numéricas	36
11. Potenciação de números inteiros	37
Potência de expoente 1 ou zero	38
Propriedades da potenciação	39
Expressões numéricas com potenciação	40
12. Raiz quadrada de números inteiros	41
Para saber mais	
Entendendo o fuso horário	26
Trabalhando a informação	
Analisando tabelas	23
Diversificando	
Brincando um pouco	45

CAPÍTULO 2 Números racionais

1. Os números racionais no dia a dia	46
2. Conhecendo um pouco mais os números racionais	47
3. Representação dos números racionais na reta numérica	49
4. Módulo de um número racional	52
5. Comparação de números racionais	53
Comparando números racionais escritos na forma de fração	54
Comparando números racionais escritos na forma decimal	54
6. Adição e subtração de números racionais	56
7. Multiplicação de números racionais	60
8. Divisão de números racionais	62
9. Potenciação de números racionais	65
Propriedades da potenciação	65
Potência com expoente inteiro negativo	66
10. Raiz quadrada de números racionais	68
11. Expressões numéricas com números racionais	70
Para saber mais	
Divisão de um segmento em partes iguais	50
Buscando padrões	71

Trabalhando a informação

Construindo um gráfico de colunas duplas 74

Diversificando

Treinando mais 79

CAPÍTULO 3 Ângulos

1. Ângulos e seus elementos 80

2. Medida de um ângulo 81

3. Classificação de um ângulo 82

4. Ângulos congruentes 85

Construção de ângulos congruentes 85

5. Operações com medidas de ângulos 87

Transformando unidades 87

Adição e subtração de medidas de ângulos 87

Multiplicação e divisão da medida de um ângulo por um número natural 88

6. Bissetriz de um ângulo 90

Construção da bissetriz de um ângulo 90

Trabalhando a informação

Gráficos de setores 92

Diversificando

Girando no parque 95

CAPÍTULO 4 Equações

1. Um pouco de História 96

2. Expressões algébricas 98

3. Valor numérico de uma expressão algébrica 100

4. Termos algébricos 102

Termos semelhantes 103

Simplificação de expressões algébricas e redução de termos semelhantes 103

5. Sentenças matemáticas 105

6. Equações 106

Raiz de uma equação 107

Conjunto universo e solução de uma equação 108

7. Equações do 1º grau com uma incógnita 110

Equações equivalentes 110

8. Resolução de equações 111

Equacionando problemas 114

Voltando aos problemas históricos 120

Para saber mais

A Matemática na História 119

SUMÁRIO

Trabalhando a informação

Média e estimativas 123

Diversificando

Papiros famosos – Um pouco de “mágica” 127

CAPÍTULO 5 Inequações

1. O que é inequação? 128

2. Solução de uma inequação 132

3. Resolução de inequações 135

Propriedades da desigualdade 136

Resolvendo problemas com inequações 138

Para saber mais

Resolver problemas é uma arte! 131

Trabalhando a informação

Trabalhando com gráficos e tabelas 141

CAPÍTULO 6 Sistemas de equações

1. Equações com duas incógnitas 144

O conceito de par ordenado 145

Representação geométrica de pares ordenados 147

2. Equações do 1º grau com duas incógnitas 149

3. Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas 152

Resolução de sistemas 154

Trabalhando a informação

Possibilidades e probabilidades 151

Interpretando um gráfico de linha 160

CAPÍTULO 7 Simetria e ângulos

1. Reconhecendo a simetria 164

Figuras com mais de um eixo de simetria 166

2. Simetria em relação a uma reta 169

3. Ângulos complementares e ângulos suplementares 173

Ângulos complementares 173

Ângulos suplementares 174

4. Ângulos opostos pelo vértice 176

Propriedade dos ângulos opostos pelo vértice 176

Para saber mais

A simetria e a bissetriz 178

Diversificando

Ângulos e simetria – Azulejos 181

CAPÍTULO 8 Razões e proporções

1. O conceito de razão	182
2. Razão entre grandezas de mesma natureza	188
Escala	190
3. Razão entre grandezas de naturezas diferentes	193
Gramatura de um papel	193
Velocidade média	193
Densidade demográfica	194
Consumo médio	194
4. Proporção	197
5. Propriedade fundamental das proporções	199
Para saber mais	
As razões de uma boa pescaria	185
Resolvendo problemas com o auxílio de esquemas	202
Trabalhando a informação	
Comparando gráficos de barras	196

CAPÍTULO 9 Grandezas proporcionais e porcentagem

1. A proporcionalidade entre grandezas	204
2. Grandezas diretamente proporcionais	207
3. Grandezas inversamente proporcionais	211
4. Regra de três simples	213
5. Regra de três composta	219
6. Porcentagem	223
7. Problemas	228
Para saber mais	
Resolvendo problemas com o auxílio de um quadro	218
A Matemática na História	227
Trabalhando a informação	
Construindo gráficos de barras e de colunas	216
Construindo um gráfico de setores	231
Diversificando	
Ampliar e reduzir	235

CAPÍTULO 10 Área de regiões poligonais

1. O conceito de área	236
2. Figuras equivalentes	242
3. Área do paralelogramo	244
4. Área do triângulo	248
5. Área do losango	253
6. Área do trapézio	256

SUMÁRIO

Para saber mais

Construindo e explorando um losango 252

Trabalhando a informação

Estimativa da quantidade de pessoas que habitaram um sítio arqueológico 241

Pictograma 259

Diversificando

Matemática na administração da pequena empresa 263

Respostas 264

Listas de siglas 271

Sugestões de leitura para o aluno 271

Bibliografia 272



MODERNA

1 A necessidade de outros números

Você já aprendeu que, a partir do momento em que o ser humano teve a necessidade de contar e registrar as quantidades das coisas ao seu redor, ele começou a criar símbolos para representar essas quantidades, o que levou ao surgimento dos **números naturais**.

Você já viu também que os números naturais não são suficientes para representar todas as situações do cotidiano e que, em alguns momentos, usamos os números representados na **forma de fração** e na **forma decimal**.

Neste capítulo, vamos estudar outros tipos de números, que nos permitem fazer subtrações como $5 - 9$, além de nos auxiliar em algumas situações do dia a dia. Veja algumas delas a seguir.

Situação 1

Considera-se zero a altitude ao nível do mar.

- O Everest é o monte de maior altitude da Terra e atinge 8.844 m acima do nível do mar. Podemos indicar essa altitude como $+8.844$ m.
- Alguns bairros da cidade de Haia (Holanda) estão 1 m abaixo do nível do mar. Podemos indicar essa altitude como -1 m.



O monte Everest fica na cordilheira do Himalaia, na fronteira entre o Nepal e a China. (Foto de 2013.)



Estátua de Guilherme de Orange, na praça central da cidade de Haia. (Foto de 2012.)

Situação 2

Um termômetro pode registrar temperaturas “acima de zero grau” (temperaturas positivas) e temperaturas “abaixo de zero grau” (temperaturas negativas).

Por exemplo, quando a temperatura em uma cidade é de 21 graus Celsius acima de zero, registramos essa temperatura como $+21^{\circ}\text{C}$ ou 21°C ; quando a temperatura é de 2 graus Celsius abaixo de zero, indicamos essa temperatura como -2°C .



Termômetro de mercúrio.

CLAUDIO DIVIZIA/SHUTTERSTOCK

Situação 3

Os extratos bancários das contas-correntes registram todos os movimentos de créditos e de débitos.

Observe, no extrato reproduzido abaixo, que nos dias 2 e 3 de março o saldo dessa conta era negativo e, no dia 5 de março, voltou a ficar positivo.

POLAR
Banco Polar S.A.

Extrato de conta-corrente
João da Silva
Movimentação (valores em reais) conta: 0010/00555-5

Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
1/3	sem movimentação			3.200
2/3	cheque 543681	2.000		
2/3	cheque 543682	2.250		-1.050
3/3	depósito		800	-250
5/3	depósito		1.500	1.250

ANDRE LUIZ DA SILVA PEREIRA

Situação 4

A tabela ao lado apresenta parte da classificação geral ao fim do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2014. (O P indica os pontos ganhos.)

Observe que o saldo de gols (SG) pode ser positivo ou negativo. Por exemplo, o Cruzeiro ficou com saldo positivo de $+29$, porque fez 67 gols pró (GP) e sofreu 38 gols contra (GC). O Botafogo, por sua vez, ficou com saldo negativo de -17 , porque marcou 31 gols e sofreu 48.

Campeonato Brasileiro de Futebol de 2014

Classificação	P	GP	GC	SG
1º Cruzeiro - MG	80	67	38	+29
2º São Paulo - SP	70	59	40	+19
3º Internacional - RS	69	53	41	+12
4º Corinthians - SP	69	49	31	+18
8º Atlético - PR	54	43	42	+1
9º Santos - SP	53	42	35	+7
15º Chapecoense - SC	43	39	44	-5
16º Palmeiras - SP	40	34	59	-25
17º Vitória - BA	38	37	54	-17
18º Bahia - BA	37	31	43	-12
19º Botafogo - RJ	34	31	48	-17
20º Criciúma - SC	32	28	56	-28

Dados obtidos em: <www.cbf.com.br>. Acesso em: 17 fev. 2015.

ANDRE LUIZ DA SILVA PEREIRA

As situações apresentadas mostram números precedidos do sinal de menos. Esses números são exemplos de **números inteiros negativos**.

Para cada número inteiro positivo, existe um número inteiro negativo correspondente. Veja alguns exemplos.

+1 "mais um" ou "um positivo"	+2 "mais dois" ou "dois positivo"	+3 "mais três" ou "três positivo"	+4 "mais quatro" ou "quatro positivo"	...
-1 "menos um" ou "um negativo"	-2 "menos dois" ou "dois negativo"	-3 "menos três" ou "três negativo"	-4 "menos quatro" ou "quatro negativo"	...

E cada número inteiro positivo é associado a um número natural diferente de zero.

$$+1 = 1, +2 = 2, +3 = 3, \dots$$

Todos os números naturais, quando reunidos com os números inteiros negativos, formam o **conjunto dos números inteiros**, cuja indicação é:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...



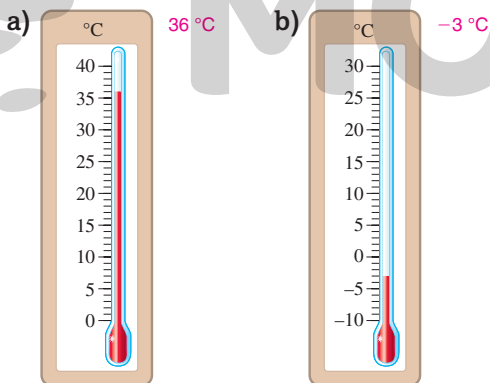
Reúna-se com um colega para responder a esta pergunta: o número natural zero é positivo ou negativo?

O número natural zero não é positivo nem negativo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Indique a temperatura que cada termômetro está registrando.



2 Expresse cada altitude usando um número positivo ou negativo.

- O pico de Aconcágua, no Chile, encontra-se a 6.959 m acima do nível do mar. **+6.959 m**
- A fossa das Marianas, no oceano Pacífico, tem profundidade de 11.034 m abaixo do nível do mar. **-11.034 m**
- O mar Morto, que fica entre Israel e a Jordânia, é um dos lagos mais salgados do mundo. Suas margens, a 396 m abaixo do nível do mar, são o ponto mais baixo da superfície terrestre. **-396 m**

3 No caderno, represente com um número inteiro:

- 35 graus Celsius acima de zero; **+35 °C**
- 560 metros acima do nível do mar; **+560 m**
- 25 metros abaixo do nível do mar; **-25 m**
- 16 graus Celsius abaixo de zero; **-16 °C**
- crédito de 3.000 reais; **+3.000 reais**
- débito de 645 reais. **-645 reais**

4 A tabela mostra os resultados dos quatro primeiros colocados no Campeonato Municipal de Futebol da cidade de Pontas. Copie e complete-a com uma coluna indicando o saldo de gols (SG) de cada time.

Campeonato Municipal de Futebol			
SG	Times	Gols pró	Gols contra
+13	Perna de Pau F. C.	28	15
-6	E. C. Canela de Ferro	15	21
0	S. C. Fazenda do Toco	20	20
-1	S. E. Bananeiras	18	19

Dados obtidos pela Secretaria de Esportes de Pontas.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

5 Na Região Sul do Brasil, o inverno costuma registrar temperaturas abaixo de zero, acompanhadas de geada e até de neve em alguns municípios. Você conhece alguns desses lugares?

Faça uma pesquisa em jornais, revistas, livros ou na internet e descubra que fatores podem

Na Região Sul, alguns municípios, como São Joaquim, em Santa Catarina, e São José dos Ausentes, no Rio Grande do Sul, costumam registrar temperaturas negativas. Entre os fatores que influenciam o registro de temperaturas baixas, os alunos poderão citar: a altitude, a latitude, as correntes marítimas, as massas de ar.

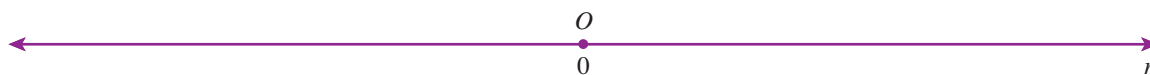
influenciar o clima da região, provocando temperaturas negativas.

Verifique se no município em que você mora é possível o registro de temperaturas negativas.

Troque informações com os colegas.

2 Representação na reta numérica e módulo

Assim como os números naturais, os números inteiros podem ser representados em uma reta numérica. Para isso, desenhamos uma reta r e sobre ela marcamos o ponto O , chamado de **origem**, que corresponde ao número **zero**.

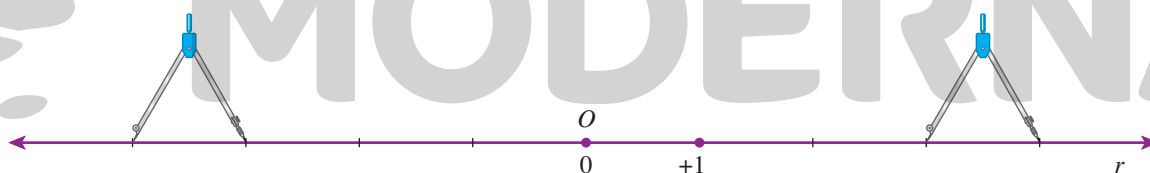


Em seguida, marcamos outro ponto da reta a uma distância qualquer do ponto O e associamos a esse ponto o número $+1$. Dessa forma, estabelecemos a **unidade de medida** e o **sentido positivo** da nossa reta numérica.



Em geral, desenhamos a reta r paralela às linhas do caderno e o sentido positivo da esquerda para a direita.

Usando um compasso ou a escala de uma régua, marcamos, à direita e à esquerda do ponto O , segmentos de medida iguais à unidade de medida.

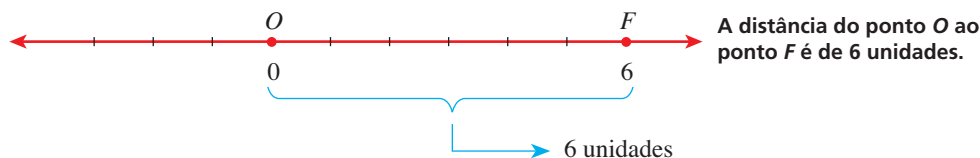


Nos extremos desses segmentos marcamos, por exemplo, os pontos $A, A', B, B', C, C', D, D', E, E', F, F'$, conforme a representação abaixo. A cada ponto à direita de O , fazemos corresponder os **números inteiros positivos**, e a cada ponto à esquerda, os **números inteiros negativos**.



Cada número inteiro pode ser associado a um ponto da reta numérica. O número associado ao ponto de uma reta numérica é chamado de **abscissa** desse ponto. Por exemplo, 1 é a abscissa do ponto A , e -3 , a abscissa do ponto C' .

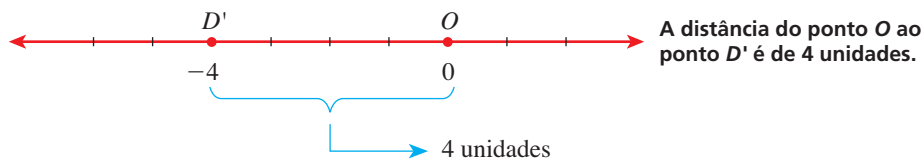
Em uma reta numérica, é possível determinar a distância do ponto de abscissa zero (origem) a outro ponto qualquer da reta. Observe o exemplo.



A distância de um ponto à origem é chamada de **valor absoluto** (ou **módulo**) do número que corresponde a esse ponto.

No exemplo anterior, o valor absoluto de 6 (abscissa do ponto F) é 6 (distância do ponto F à origem).

Veja outro exemplo.



O valor absoluto de -4 (abscissa do ponto D') é 4 (distância do ponto D' à origem).

Indica-se o valor absoluto (ou módulo) de um número colocando-se esse número entre duas barras. Assim, por exemplo, o módulo de -3 é indicado como $|-3|$.

Veja mais exemplos.

a) $|+10| = 10$

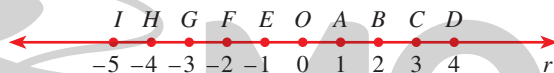
b) $|-8| = 8$

c) $|0| = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

6 Observe a reta numérica e responda às questões em seu caderno.



- a) Qual é a abscissa do ponto B ? **2**
 b) Qual é a abscissa do ponto F ? **-2**
 c) O número -4 é abscissa de qual ponto? **H**
 d) Qual é o ponto cuja abscissa é 3? **C**

7 Em seu caderno, construa uma reta numérica e localize os pontos: **construção de figura**

- a) P , de abscissa $+4$;
 b) Q , de abscissa -4 ;
 c) R , de abscissa $+2$;
 d) S , de abscissa -2 .

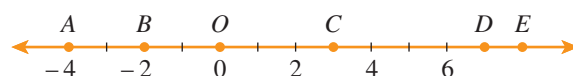
8 Copie as retas numéricas e determine a abscissa dos pontos destacados.



9 Encontre o número inteiro em cada caso.

- a) Na reta numérica, o número está à direita do zero e à esquerda do 5. **respostas possíveis: 1, 2, 3 e 4**
 b) O número está à esquerda do zero e à direita do -6 na reta numérica. **respostas possíveis: -1, -2, -3, -4 e -5**
 c) Na reta numérica, o número está à direita do 0 e à esquerda do -2 . **Esse número não existe.**

10 Considere os pontos indicados na reta numérica:



Escreva no caderno a distância do ponto O aos pontos:

- a) A ; **4** c) C ; **3** e) D ; **7**
 b) B ; **2** d) O ; **0** f) E ; **8**

11 Determine os números cujo valor absoluto é:

- a) 8; **-8 e 8** b) 13; **-13 e 13** c) 10; **-10 e 10** d) 2. **-2 e 2**

12 Dê o valor de:

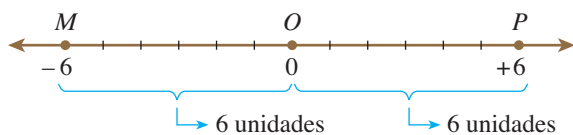
- a) $|-15|$ **15** d) $|-30|$ **30** g) $|0|$ **0**
 b) $|+100|$ **100** e) $|+90|$ **90** h) $|-35|$ **35**
 c) $|-25|$ **25** f) $|-121|$ **121** i) $|+279|$ **279**

13 Entre as opções a seguir, escreva qual é o número de maior valor absoluto.

- a) -9 ou 5 ? **-9** c) -8 ou -2 ? **-8**
 b) 0 ou -6 ? **-6** d) 10 ou -4 ? **10**

3 Números inteiros opostos ou simétricos

Considere a reta numérica representada a seguir.

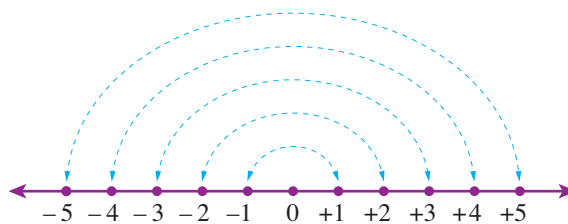


Repare que a distância OM é igual à distância OP . Isso significa que o módulo de -6 é igual ao módulo de $+6$. Por isso, dizemos que -6 e $+6$ são números opostos ou simétricos.

Números que têm o mesmo módulo são **opostos** ou **simétricos**.

Veja mais exemplos.

- O oposto de $+1$ é -1 .
- O oposto de -4 é 4 .
- O oposto de zero é o próprio zero.
- O oposto de -2 é 2 .



OBSERVAÇÃO

► Indica-se o oposto de um número colocando o sinal de menos ($-$) à sua esquerda. Exemplos:

- O oposto de $+9$ é -9 , e é indicado como $-(+9)$, ou seja, $-(+9) = -9$.
- O oposto de -20 é $+20$, e é indicado como $-(-20)$, ou seja, $-(-20) = +20$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Observe ao lado a tabela vista no início deste capítulo, agora com todos os times participantes. Em seguida, faça o que se pede.

- Escreva duas duplas de times com saldos de gols opostos.
- Indique quatro duplas de times com saldos de gols com módulos iguais.
- Represente em uma reta numérica os números que representam o saldo de gols dessa tabela.

- 14. a)** Atlético-PR e Flamengo; Grêmio e Bahia.
b) as mesmas duplas do item a mais: São Paulo e Fluminense; Sport e Figueirense.
c) construção de figura

P – pontos ganhos;
 GP – gols pró;
 GC – gols contra;
 SG – saldo de gols.

■ Libertadores
 ■ Rebaixados

Dados obtidos em:
 <www.cbf.com.br>.
 Acesso em: 17 fev. 2015.

Campeonato Brasileiro de Futebol de 2014					
	Classificação	P	GP	GC	SG
1º	Cruzeiro – MG	80	67	38	29
2º	São Paulo – SP	70	59	40	19
3º	Internacional – RS	69	53	41	12
4º	Corinthians – SP	69	49	31	18
5º	Atlético – MG	62	51	38	13
6º	Fluminense – RJ	61	61	42	19
7º	Grêmio – RS	61	36	24	12
8º	Atlético – PR	54	43	42	1
9º	Santos – SP	53	42	35	7
10º	Flamengo – RJ	52	46	47	-1
11º	Sport – PE	52	36	46	-10
12º	Goiás – GO	47	38	40	-2
13º	Figueirense – SC	47	37	47	-10
14º	Coritiba – PR	47	42	45	-3
15º	Chapecoense – SC	43	39	44	-5
16º	Palmeiras – SP	40	34	59	-25
17º	Vitória – BA	38	37	54	-17
18º	Bahia – BA	37	31	43	-12
19º	Botafogo – RJ	34	31	48	-17
20º	Criciúma – SC	32	28	56	-28

15 Determine em seu caderno:

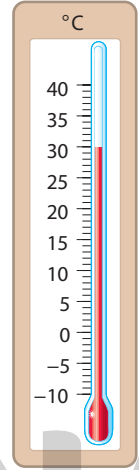
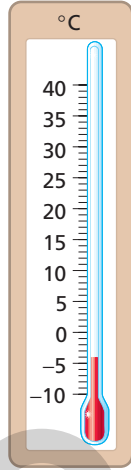
- a) o oposto de -2 ; 2
- b) o oposto de -64 ; 64
- c) o oposto do oposto de -9 ; -9
- d) o oposto do oposto de 15 ; 15
- e) o oposto de $|-10|$; -10
- f) o módulo do oposto de -5 . 5

16 Construa uma reta numérica e indique os pontos A , de abscissa -4 ; C , de abscissa 2 ; B , simétrico de A em relação à origem; e D , simétrico de C em relação à origem. Em seguida, determine as medidas dos segmentos: *construção de figura*

- a) \overline{AB} ; 8
- b) \overline{AD} ; 2
- c) \overline{CD} ; 4
- d) \overline{BD} . 6

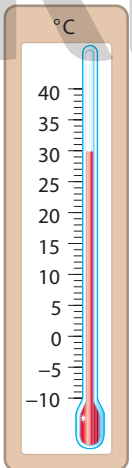
4 Comparação entre números inteiros

Vamos supor que, em certo dia, os termômetros registrem -4°C em São Joaquim (SC), 30°C em Maceió (AL) e 30°C em Salvador (BA).



São Joaquim (SC). (Foto de 2012.)

Praia do Francês, Maceió (AL). (Foto de 2012.)

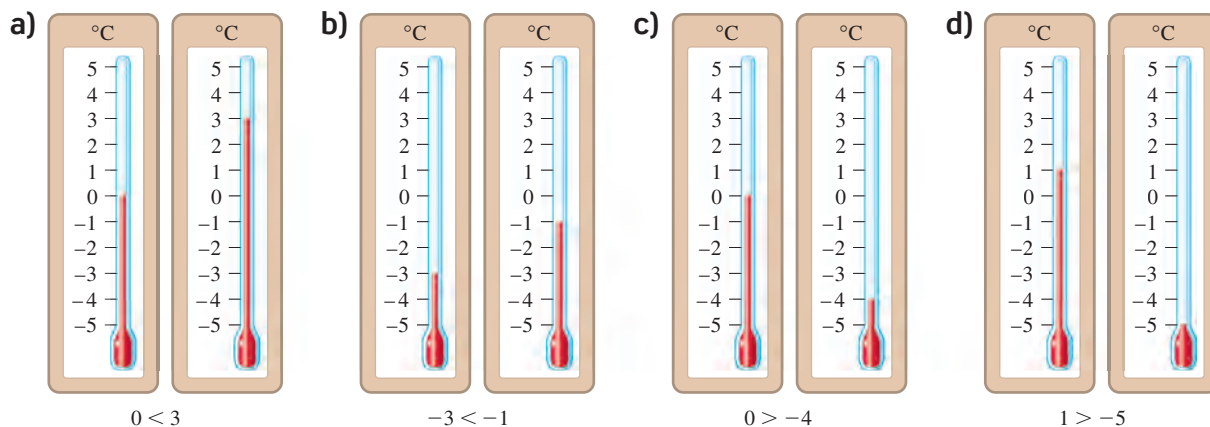


Farol da Barra, Salvador (BA). (Foto de 2012.)

Podemos estabelecer uma relação de igualdade ou de desigualdade entre as temperaturas dessas cidades. Fazendo isso, estamos realizando uma comparação entre números inteiros. Observe.

- A temperatura em Salvador é igual à temperatura em Maceió ($30 = 30$).
- A temperatura em Salvador é maior que a temperatura em São Joaquim ($30 > -4$).
- A temperatura em São Joaquim é menor que a temperatura em Maceió ($-4 < 30$).

Veja mais algumas comparações entre as temperaturas registradas em dois termômetros.



Também podemos recorrer à reta numérica para comparar números inteiros.



De acordo com a reta, temos:

- $0 < 3$, e na reta numérica 0 está à esquerda de 3;
- $-3 < -1$, e na reta numérica -3 está à esquerda de -1 ;
- $0 > -4$, e na reta numérica 0 está à direita de -4 ;
- $1 > -5$, e na reta numérica 1 está à direita de -5 .

Dados dois números inteiros diferentes, na reta numérica o menor deles é o que está à esquerda do outro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

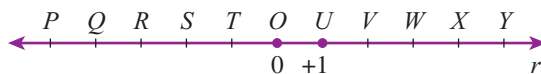
17 Determine:

- os três menores números inteiros positivos; **1, 2 e 3**
- os três menores números inteiros não negativos; **0, 1 e 2**
- os três maiores números inteiros negativos; **-1, -2 e -3**
- os três maiores números inteiros não positivos. **0, -1 e -2**

18 Escreva no caderno: **b) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3**

- os números inteiros entre -2 e 2 ; **$-1, 0$ e 1**
- os números inteiros de -4 a 3 ;
- os números inteiros entre -3 e -1 ; **-2**
- os números naturais entre -2 e 2 . **0 e 1**

19 Observe os pontos da reta numérica e considere os números inteiros, que são suas respectivas abscissas.



- Dê o nome de dois pontos cuja abscissa seja maior que a do ponto R. **resposta possível: S e O**
- Dê o nome de dois pontos cuja abscissa seja menor que a abscissa do ponto T.
- Que ponto tem abscissa com módulo igual ao módulo da abscissa de X? **Q**
- Que ponto tem abscissa igual ao oposto da abscissa de Q? **X**

19. b) resposta possível: Q e S

Lembre-se:
Não escreva no livro!

20 Coloque os números em ordem crescente, usando o sinal $<$ entre eles.

- a) $-8, -4, +2, -3, 0, +1$
 $-8 < -4 < -3 < 0 < +1 < +2$
 b) $+2, -9, 0, +1, +6, -10$
 $-10 < -9 < 0 < +1 < +2 < +6$

21 Em determinado dia, o saldo bancário de Flávia era -2.000 reais e o de Luiz Antônio, -350 reais. Qual deles estava devendo mais ao banco? Justifique sua resposta.

Flávia, pois 2.000 reais é um valor maior que 350 reais.



CLAUDIO CHIYO

22 O calendário gregoriano, atualmente utilizado por nós, adota o ano do nascimento de Cristo como ano 1. Os anos antes de Cristo são indicados por a.C., e os depois de Cristo, por d.C. Como exemplo, o ano 35 antes de Cristo é indicado por 35 a.C., e o ano 35 depois de Cristo, por 35 d.C.

Considerando essa informação, leia os textos abaixo e, em seguida, responda à questão.



Pitágoras de Samos – Nasceu na ilha grega de Samos por volta de 580 a.C. Filósofo grego responsável por importantes progressos nas áreas da Matemática, da Astronomia e da teoria da música.

Tales de Mileto – Nasceu na cidade grega de Mileto por volta de 624 a.C. Rico comerciante de azeite, tinha na Matemática uma de suas paixões. Muitos historiadores atribuem o surgimento da Geometria grega aos seus trabalhos.



BETTSMANN/CORBIS/LATINSTOCK

• Quem nasceu primeiro: Pitágoras ou Tales?
Tales de Mileto

23 Qual é o número maior em cada item? Escreva no caderno.

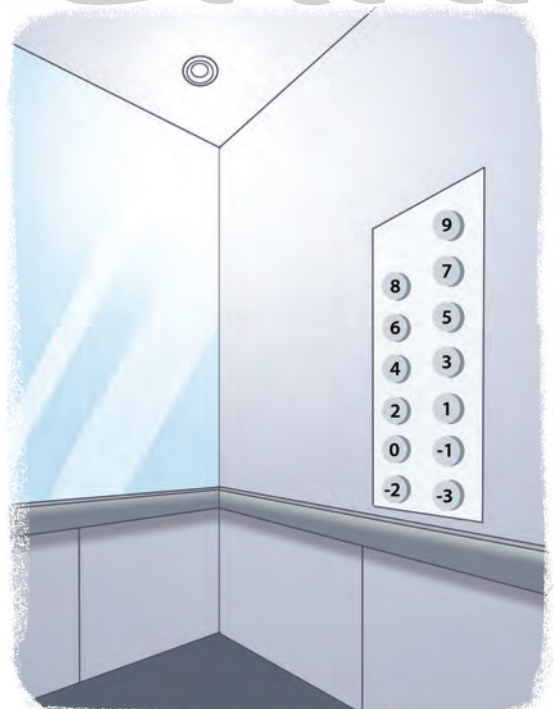
- a) 20 ou 18 **20** d) 0 ou 18 **18**
 b) -20 ou -18 **-18** e) -15 ou -40 **-15**
 c) 0 ou -20 **0** f) -8 ou 20 **20**

24 Entre as sentenças a seguir, corrija as falsas.

- a) O zero é maior que qualquer número negativo. **verdadeira**
 b) O zero é maior que qualquer número positivo. **falsa; O zero é menor que qualquer número positivo.**
 c) Qualquer número negativo é maior do que qualquer número positivo.
 d) Qualquer número positivo é maior do que qualquer número negativo. **verdadeira**
 e) Se dois números forem positivos, o maior será aquele que tiver o menor módulo.
 f) Se dois números forem negativos, o maior será aquele que tiver o menor módulo. **verdadeira**

25 Reúna-se com um colega. Associem o andar térreo de um edifício com o zero. Usando números inteiros positivos ou negativos, escrevam o andar onde está um elevador quando:

- a) partindo do andar térreo, subir 6 andares e, em seguida, subir mais 2 andares; **+8**
 b) partindo do primeiro andar, descer 3 andares; **-2**
 c) partindo do terceiro andar, subir 4 andares e, em seguida, descer 7 andares; **0**
 d) partindo do andar térreo, descer 3 andares e, em seguida, subir 1 andar. **-2**



CLAUDIO CHIYO

24. c) falsa; Qualquer número negativo é menor do que qualquer número positivo.
e) falsa; Se dois números forem positivos, o maior será aquele que tiver o maior módulo.

5 Adição de números inteiros

Acompanhe como podemos adicionar números inteiros usando a reta numérica.

Partindo do zero, andamos, em primeiro lugar, as unidades indicadas na primeira parcela e, em seguida, as indicadas na segunda. Chegamos, então, a um ponto cuja abscissa é a soma dos números dados.

Vamos estabelecer que o deslocamento será:

- para a direita, se o número for positivo;
- para a esquerda, se o número for negativo.

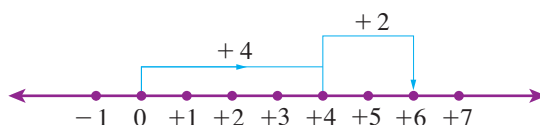
Veja algumas situações que apresentam adição de números inteiros.

Situação 1

Na aula de laboratório, Silvana aqueceu certa quantidade de água que estava a zero grau Celsius. Notou que no 1º minuto a temperatura subiu 4 °C, e que no minuto seguinte a temperatura subiu outros 2 °C. Qual era a temperatura dessa água ao fim do 2º minuto?

Pelo enunciado, temos: $(+4) + (+2)$

Partindo do zero, andamos 4 unidades para a direita e, em seguida, mais 2 unidades também para a direita. Chegamos, assim, ao número +6, ou seja, 6.



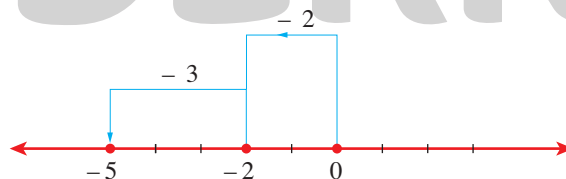
Logo, $(+4) + (+2) = 6$.

Veja mais exemplos de adição de números inteiros de **mesmo sinal**.

a) $(-2) + (-3)$

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a esquerda e, em seguida, mais 3 unidades também para a esquerda. Chegamos, assim, ao número -5.

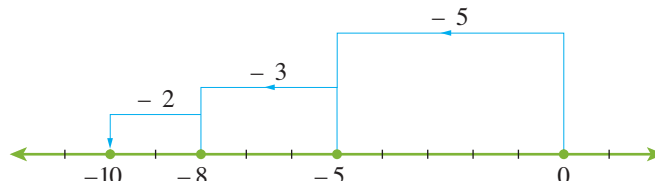
Logo, $(-2) + (-3) = -5$.



b) $(-5) + (-3) + (-2)$

Partindo do zero, andamos 5 unidades para a esquerda; em seguida, andamos 3 unidades também para a esquerda e, finalmente, 2 unidades novamente para a esquerda. Chegamos, assim, ao número -10.

Logo, $(-5) + (-3) + (-2) = -10$.



A soma de dois ou mais números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando o sinal comum.

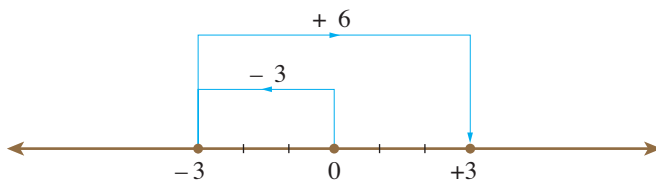
Situação 2

Em casa, Fernando havia congelado um suco de uva, o que fez a temperatura do suco ir de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ para $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Para o lanche da tarde, colocou o suco no micro-ondas e elevou a temperatura em $6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ao beber o suco, qual era sua temperatura?

Temos: $(-3) + (+6)$.

Partindo do zero, andamos 3 unidades para a esquerda e, em seguida, 6 unidades para a direita. Chegamos, assim, ao número $+3$, ou seja, 3.

Logo, $(-3) + (+6) = 3$.

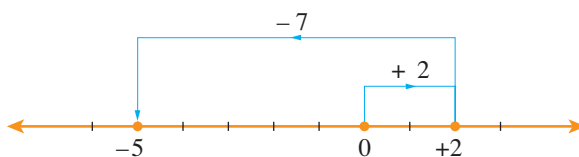


Veja outros exemplos de adição de números inteiros de **sinais diferentes** .

a) $(+2) + (-7)$

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a direita e, em seguida, 7 unidades para a esquerda. Chegamos, assim, ao número -5 .

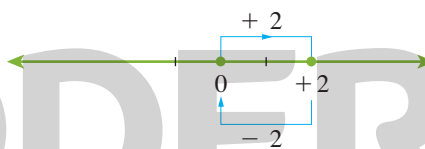
Logo, $(+2) + (-7) = -5$.



b) $(+2) + (-2)$

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a direita e, em seguida, 2 unidades para a esquerda. Voltamos, assim, ao número zero.

Logo, $(+2) + (-2) = 0$.



A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos e dando ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto. Caso esses números sejam opostos, a soma será igual a zero.

Também podemos fazer adições com números inteiros usando uma calculadora. Veja alguns exemplos.

a) Para fazer a adição $(+9) + (-2)$, apertamos as seguintes teclas:



b) Para fazer a adição $(-8) + (-2)$, apertamos as seguintes teclas:



Se a calculadora que o aluno estiver usando não registrar -8 e sim 8, ele terá de utilizar o artifício de digitar o 0, em seguida, o sinal de $-$ e, finalmente, o 8. Assim, ele obterá -8 .

Observe: $0 \square - \square 8 \square + \square - \square 2 \square =$



WILLIAM KING/SUPERSTOCKKEYSTONE BRASIL

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

26 Desenhe uma reta numérica. Partindo do zero, determine o número da chegada quando andamos:

- a) +2 e, em seguida, +6; +8
- b) -2 e, em seguida, -6; -8
- c) +3 e, em seguida, +4; +7
- d) +2 e, em seguida, -6; -4
- e) -2 e, em seguida, +6; +4
- f) +3 e, em seguida, -4. -1

• Que operação pode ser associada a cada item? *adição*

27 Calcule no caderno.

- a) $(+5) + (+20)$ +25
- b) $(+2) + (-12)$ -10
- c) $(-15) + (+9)$ -6
- d) $(-6) + 0$ -6
- e) $(-8) + (-10)$ -18
- f) $(-9) + (+9)$ 0
- g) $(+15) + (-15)$ 0
- h) $0 + (+20)$ +20

28 Cada uma das fichas abaixo é formada por um par de números inteiros cuja soma é 6.

5	1	-7	13	-5	11	10	-4
---	---	----	----	----	----	----	----

- a) Quantas fichas podem ser criadas com os números 8, -2, 3, -15, -5, -10, cuja soma seja -7, sem repetir os pares de números? Quais são elas? *3; 8 e -15, -2 e -5, 3 e -10*
- b) Se acrescentarmos o número 1, o número de fichas aumentará? Por quê?

Não, pois ao somar 1 a qualquer um desses números, não será possível obter o número -7.

29 A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é um número negativo. Nesse caso, qual é o sinal do número de maior valor absoluto?

negativo

30 Qual é a soma de dois números inteiros opostos?

zero

31 Lucas e Rafaela estão fazendo um jogo que tem as seguintes regras:

Sorteia-se uma carta com 6 perguntas. O jogador escolhe 3 perguntas para que o adversário responda. A cada resposta correta, o adversário soma 3 pontos, e a cada resposta incorreta, somam-se -2 pontos.

Lucas acertou 4 perguntas e errou 5. Rafaela acertou 5 e errou 4. Quantos pontos Rafaela fez a mais que Lucas? *5*

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

33. Espera-se que os alunos percebam que, ao apertar essa sequência de teclas, Camila efetuou a seguinte operação:

$$0 + (-123) + (-123) + (-123) = -369$$

32 Nas adições a seguir, determine as teclas da calculadora que devemos apertar para efetuar cada operação.

- a) $(-24) + (-32)$ -56
- b) $(-132) + (+124)$ -8
- c) $(+987) + (-1.024)$ -37
- d) $(+235) + (-623)$ -388

• Qual é o resultado obtido em cada operação?

33 Reúna-se com um colega para resolver o problema a seguir.



Camila estava manipulando uma calculadora e apertou algumas teclas nesta sequência:



Ela obteve o seguinte resultado:

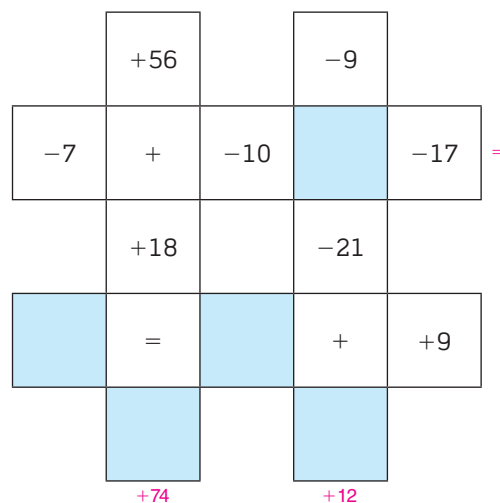


Ao apertar essa sequência de teclas, que operação Camila efetuou? Justifiquem sua resposta.

34 Reúna-se com um colega.



a) Copiem o esquema mágico a seguir e preencham com números inteiros as quadrículas vazias horizontais e verticais, de modo que se obtenham sentenças verdadeiras.



resposta possível:
5 -4

b) Criem um esquema semelhante a esse, troquem os cadernos para resolvê-lo e destroquem-nos para corrigi-lo. *resposta pessoal*

Analizando tabelas

Luciano é dono de dois quiosques de sorvete localizados em dois parques. Para analisar a movimentação financeira no 1º quadrimestre de 2015 com a venda dos sorvetes, ele organizou a tabela abaixo, que mostra os lucros e os prejuízos registrados em cada mês.

Mês	Movimentação financeira do quiosque 1 (em reais)	Movimentação financeira do quiosque 2 (em reais)
Janeiro	22.450	15.632
Fevereiro	15.235	10.452
Março	7.230	8.259
Abril	-1.462	-1.174

Dados obtidos por Luciano.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Analizando essa tabela, Luciano pôde fazer algumas deduções. Por exemplo, ele percebeu que:

- os lucros nos quiosques foram maiores no mês de janeiro, seguidos pelo mês de fevereiro;
- o pior mês para o quiosque 1 foi abril;
- no mês de abril, as vendas caíram, e houve prejuízos em ambos os quiosques.

Também é possível determinar o acumulado de cada mês.

- No mês de janeiro, houve o maior lucro, 38.082 reais, pois $22.450 + 15.632 = 38.082$.
- No mês de fevereiro, o lucro foi de 25.687 reais, pois $15.235 + 10.452 = 25.687$.
- No mês de março, o lucro foi de 15.489 reais, pois $7.230 + 8.259 = 15.489$.
- No mês de abril, houve um prejuízo de 2.636 reais, pois $-1.462 - 1.174 = -2.636$.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com base na tabela acima, responda às questões.

- Qual dos dois quiosques teve o maior lucro? Qual foi o lucro de cada quiosque?
- Quanto Luciano lucrou no total ao final do 1º quadrimestre de 2015 nos dois quiosques?
- A que pode ser atribuído o prejuízo obtido no mês de abril?

quiosque 1; quiosque 1: 43.453 reais e quiosque 2: 33.169 reais

resposta pessoal 76.622 reais

- 2 Analise a tabela ao lado, referente à movimentação financeira de duas lojas de brinquedos, no período de setembro a dezembro de 2015. Em seguida, responda às questões.

Movimentação financeira das lojas de brinquedo (em reais)		
Mês	Loja 1	Loja 2
Setembro	-5.800	-8.450
Outubro	29.135	2.225
Novembro	-4.230	-3.500
Dezembro	41.200	26.450

Dados obtidos pelo proprietário.

- a) Em qual loja foi obtido o melhor desempenho no período observado? De quanto foi o lucro? loja 1; 60.305 reais setembro; 14.250 reais
- b) Em qual mês ocorreu o pior desempenho das duas lojas? De quanto foi o prejuízo total?
- c) Em qual loja houve maior queda no saldo de um mês para outro no período observado? De quanto foi essa queda? loja 1; 33.365 reais
- d) Se você fosse o proprietário dessas lojas e tivesse que tomar uma decisão sobre o futuro delas, qual das medidas a seguir você executaria? Justifique sua resposta. resposta pessoal
- Fechar a loja 2 para poder investir mais na loja 1; ou
 - Permanecer com as duas lojas, fazendo um maior investimento na loja 2.
- 3 No dia 18 de fevereiro de 2015, as temperaturas em algumas localidades do mundo variavam de acordo com a tabela abaixo.

Temperaturas em algumas cidades do mundo		
Localidade	Temperatura mínima (°C)	Temperatura máxima (°C)
Base Esperanza (Antártida)	-2	4
Katmandu (Nepal)	1	21
Monteiro (Brasil)	21	32
Eureka (Canadá)	-32	-26

Dados obtidos em: <jornaldotempo.uol.com.br>. Acesso em: 18 fev. 2015.

- a) Em qual dessas localidades foi registrada a menor temperatura? E a maior? Eureka; Monteiro
- b) Qual foi a variação de temperatura na Base Esperanza? 6 °C
- c) Em qual dessas localidades ocorreu a maior variação de temperatura? Katmandu

A propriedade do fechamento não foi considerada aqui porque não estamos realizando um estudo axiomático de teoria dos conjuntos.

Propriedades da adição de números inteiros

Ao estudar a adição de números naturais, vimos que essa operação é comutativa e associativa e que o zero é seu elemento neutro. Essas propriedades também são válidas para a adição de números inteiros.

Em uma adição de dois números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

Observe essa adição: $(-20) + (+5) = (-15)$.

Trocando a ordem das parcelas, temos: $(+5) + (-20) = (-15)$.

Portanto, $(-20) + (+5) = (+5) + (-20)$.

Em uma adição de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar a soma.

- 38** Descubra os erros que Éverton cometeu ao calcular o valor da expressão abaixo.
- $$\begin{aligned}
 (+13) + (-4) + (-7) + (-2) + (+15) + (+2) + (-16) &= (+13) + (-4) + (-7) + (-2) + (+15) + (+2) + (-16) = \\
 &= (+9) + (-7) + (-2) + (+15) + (+2) + (-16) = &= (+9) + (-7) + (-2) + (+15) + (+2) + (-16) = \\
 &= (+2) + (+13) + (-18) = +3 &= (+2) + (+13) + (-14) = +1
 \end{aligned}$$
- 39** Em determinado dia, a temperatura em São Joaquim (SC) era de 3 °C negativos durante a madrugada. Pela manhã, subiu 2 graus e, à tarde, subiu mais 4 graus.
- a) Escreva no caderno uma expressão que represente essa situação. *resposta possível: (-3) + (+2) + (+4)*
- b) Resolva essa expressão e dê a temperatura ao final do período apresentado. *+3 °C*

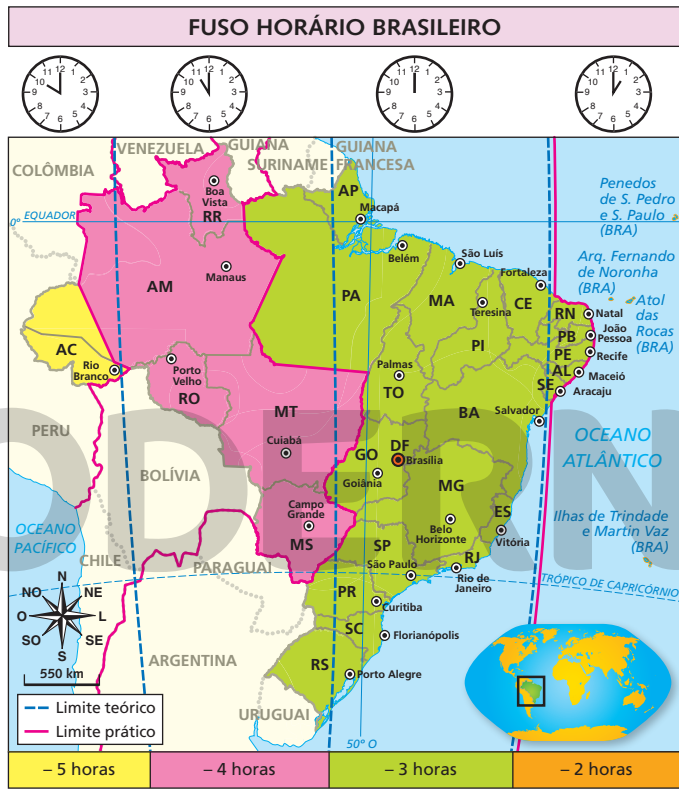
PARA SABER MAIS +

Entendendo o fuso horário

Comente com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter a rosa dos ventos, que indica a orientação do mapa.

Com o desenvolvimento das ferrovias, no século XIX, e a maior rapidez das viagens entre lugares distantes, tornou-se necessário o estabelecimento de um sistema mundial de hora legal. Para isso, foram criados, em 1884, os **fusos horários**, isto é, faixas imaginárias longitudinais (de um polo a outro da Terra), dividindo o mundo em 24 regiões. Em cada um dos fusos, todos os locais têm a mesma hora.

O Brasil é atravessado por quatro fusos, distinguidos no mapa ao lado por diferentes cores (amarela, rosa, verde e laranja). No alto do mapa, os relógios mostram os horários em cada faixa quando são 12 horas em Brasília. Na parte inferior, aparecem as diferenças em relação ao fuso que atravessa Brasília.



Fonte: <http://7a12.ibge.gov.br/i,ages/7a12/mapas/Brasil/brasil_fusos_horarios.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2015.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

- Reúna-se com um colega e façam o que se pede em cada item.
- a) Quando são 10 horas em Manaus, que horas são em Recife? E em Fernando de Noronha? *11 h; 12 h*
- b) Quando são 20 horas em Fernando de Noronha, que horas são em Rio Branco, no Acre? *17 h*
- c) Pesquisem em jornais, revistas, livros ou na internet o que acontece com os fusos horários quando entra em vigor o horário de verão no Brasil.
- d) Considerando o horário de verão, que horas serão em Recife e em Cuiabá quando forem 12 horas em Florianópolis? E em Boa Vista? *Recife: 11 horas; Cuiabá: 11 horas; Boa Vista: 10 horas*

c) O Brasil mantém seus quatro fusos, mas muda a disposição, pois os estados das Regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste adiantam o relógio em uma hora. Os estados das Regiões Norte e Nordeste, não sofrem alteração.

6 Subtração de números inteiros

Em determinado dia, a temperatura em Londres era $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ e, em Viena, $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$. Nesse dia, um turista viajou de Londres para Viena e percebeu a mudança de temperatura.



Ponte de Westminster sobre o Rio Tâmesa, em Londres, de onde se observa o Big Ben e as Casas do Parlamento. (Foto de 2013.)



Palácio de Schönbrunn no inverno, em Viena. (Foto de 2013.)

Veja como podemos representar a diferença entre a temperatura registrada em Viena ($-12\text{ }^{\circ}\text{C}$) e a registrada em Londres ($-3\text{ }^{\circ}\text{C}$) na reta numérica.



Analisando a reta numérica, concluímos que, na viagem de Londres para Viena a temperatura diminuiu $9\text{ }^{\circ}\text{C}$.

A operação que representa essa situação é a subtração: $(-12) - (-3) = -9$

Agora, veremos como efetuar a subtração de dois números inteiros. Para isso, vamos considerar a subtração $(+3) - (+2)$.

Note que $-(+2)$ é o oposto de $+2$ e vale -2 . Então, podemos dizer que $(+3) - (+2)$ é o mesmo que $(+3) + (-2)$. Logo, podemos efetuar essa subtração da seguinte forma:

$$(+3) - (+2) = (+3) + (-2) = +1 = 1$$

Observe que somamos o primeiro número ao oposto do segundo.

Veja mais alguns exemplos.

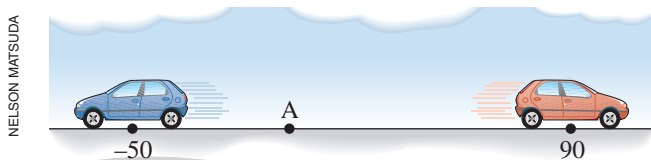
- a) $(+5) - (-4) = (+5) + (+4) = +9 = 9$
- b) $(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11$
- c) $(-10) - (-5) = (-10) + (+5) = -5$

A subtração de dois números inteiros é calculada somando-se o primeiro número ao oposto do segundo.

40 Efetue as subtrações no caderno.

- a) $(-15) - (-9)$ -6
- b) $(+12) - (-8)$ 20
- c) $(+14) - (+21)$ -7
- d) $(-18) - (-24)$ 6
- e) $(-48) - (+50)$ -98
- f) $(-106) - (-32)$ -74

41 Dois automóveis partem de uma mesma cidade A, mas em direções opostas. O primeiro percorre 50 km à esquerda de A, e o segundo, 90 km à direita de A. A que distância um está do outro? **a 140 km**



42 Arquimedes, famoso matemático e inventor grego, nasceu em -287 (287 a.C.) e morreu em -212 (212 a.C.). Quantos anos ele viveu? **75 anos**



Matemático grego
Arquimedes.

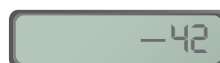
43 Você já aprendeu que podemos fazer a adição de números inteiros com o auxílio de uma calculadora. Realizando o mesmo procedimento, Felipe calculou esta subtração:

$$(-18) - (-24)$$

Para isso, ele apertou esta sequência de teclas:



E obteve o seguinte resultado:



Não, pois o resultado correto seria 6. Espera-se que os alunos percebam que a calculadora fez o seguinte cálculo: $(-18) + (-24) = -42$.

O resultado que Felipe obteve está correto? Se não, o que aconteceu?

44 Na calculadora de Júlia, há a tecla $\frac{+}{-}$. Usando essa tecla, Júlia calculou a seguinte subtração:

$$(-18) - (-24)$$

Para isso, ela apertou estas teclas:



E obteve o seguinte resultado:



O resultado que Júlia obteve está correto? Por que ela obteve um resultado diferente do de Felipe?

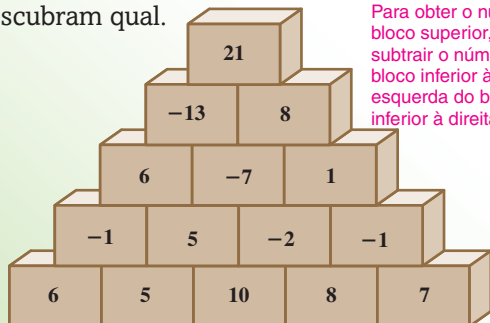
44. Sim. Espera-se que os alunos percebam que, ao apertar a tecla $\frac{+}{-}$, Júlia atribuiu ao número o valor negativo. Desse modo, ao apertar $1\ 8\ \frac{+}{-}$, a calculadora registrou o número -18 . Assim, quando Júlia apertou a sequência de teclas, a calculadora fez o cálculo certo, ou seja, $(-18) - (-24) = 6$.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

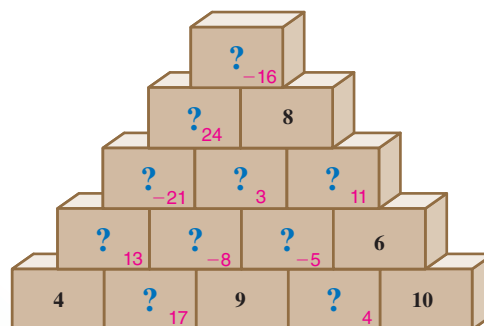
Reúna-se com um colega para resolver este problema.

A pilha abaixo foi montada com fileiras de blocos numerados. Para formar as fileiras, há um segredo. Descubram qual.



Para obter o número do bloco superior, devemos subtrair o número do bloco inferior à esquerda do bloco inferior à direita.

Sabendo que a pilha abaixo tem o mesmo segredo, descubra o número correspondente a cada bloco.



7 Adição algébrica de números inteiros

Observe esta expressão: $(+5) + (-10) - (-2) - (+4) + (-6)$.

Ela é formada apenas por adições e subtrações de números inteiros. Expressões como essa são chamadas de **adições algébricas**.

Para facilitar o cálculo de adições algébricas, podemos eliminar os parênteses. Para isso, adotamos os seguintes critérios:

- quando o sinal que precede os parênteses for **mais**, conservamos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses, como nestes exemplos:

a) $+(+9) = +9$

b) $+(-12) = -12$

- quando o sinal que precede os parênteses for **menos**, trocamos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses, como nestes exemplos:

a) $-(+9) = -9$

oposto de +9

b) $-(-12) = +12$

oposto de -12

Agora, vamos calcular a adição algébrica vista anteriormente. Começamos eliminando os parênteses.

$$\begin{aligned} (+5) + (-10) - (-2) - (+4) + (-6) &= \\ &= +5 - 10 + 2 - 4 - 6 = \end{aligned}$$

Para prosseguir os cálculos, podemos juntar os números positivos e os números negativos.

$$\begin{aligned} &= +5 - 10 + 2 - 4 - 6 = \\ &= +5 + 2 - 10 - 4 - 6 = \\ &= +7 - 20 \end{aligned}$$

Para finalizar, podemos imaginar o número positivo como “pontos ganhos” e o número negativo como “pontos perdidos” e calcular o “saldo de pontos”.

Então, $+7 - 20$ indica 7 pontos ganhos e 20 perdidos. Logo, o saldo de pontos é negativo e igual a -13 , ou seja, $+7 - 20 = -13$.

Veja outros exemplos de adição algébrica.

a) $(-12) + (-4) = -12 - 4 = -16$

b) $(+7) + (+5) = +7 + 5 = +12 = 12$

c) $(+4) - (+3) = +4 - 3 = +1 = 1$

d) $(-5) + (+5) = -5 + 5 = 0$

e) $(-5) + (+8) - (+1) = -5 + 8 - 1 = -6 + 8 = +2 = 2$

f) $(-2) - (-6) + (+3) = -2 + 6 + 3 = -2 + 9 = +7 = 7$



ANDRE LUIZ DA SILVA PEREIRA

OBSERVAÇÃO

- Quando as parcelas de uma adição algébrica forem números opostos (simétricos), elas poderão ser canceladas, pois a soma de dois números opostos é igual a zero, como podemos observar no exemplo abaixo.

$$\begin{aligned} -15 + \cancel{+54} + 16 - \cancel{-54} - 120 &= \quad \text{Cancelamos as parcelas } +54 \text{ e } -54, \text{ pois } +54 - 54 = 0. \\ &= -15 + 16 - 120 = \\ &= 16 - 135 = \\ &= -119 \end{aligned}$$

45 Efetue as adições algébricas.

- a) $(+3) - (+5) - (-10)$ **8**
- b) $(+2) + (-6) - (+5) + (+2)$ **-7**
- c) $(-5) - (-8) + (-7) - (-9) + (-3)$ **2**
- d) $(-2) - (-4) - (+7) - (-2) + (-12)$ **-15**

46 Calcule em seu caderno.

- a) $+8 + 7$ **15**
- b) $9 + 3$ **12**
- c) $-10 + 5$ **-5**
- d) $-2 - 8$ **-10**
- e) $-9 - 12$ **-21**
- f) $-8 + 8$ **0**

47 Efetue mentalmente as adições algébricas.

- a) $-6 + 8 + 6 - 4 + 4 + 1$ **9**
- b) $4 - 9 + 2 - 1 + 9 - 2$ **3**
- c) $5 + 6 - 7 + 1 + 7 - 10$ **2**
- d) $12 - 6 + 5 - 5 + 6 - 12$ **zero**

48 Cleópatra, a rainha mais famosa da história do Egito, assumiu o trono aos 18 anos e reinou de 51 a 30 a.C., quando cometeu suicídio. Em que ano Cleópatra nasceu e com quantos anos morreu?

Cleópatra nasceu no ano 69 a.C. (-69) e morreu aos 39 anos.



Alto-relevo de Cleópatra na entrada do Templo de Dandara, no Egito.

49 Adicionamos dois a dois, de todos os modos possíveis, os números indicados nos cartões:

- 15
- 9
- 8
- 2

Quais são os resultados obtidos?

-6, -23, -17, 1, 7, -10

50 Qual é o número que devemos adicionar a:

- a) -10 para obter +3? **13**
- b) -12 para obter -2? **10**
- c) +6 para obter -9? **-15**
- d) -5 para obter -10? **-5**

51 Para cada situação a seguir, crie uma operação usando números inteiros. Interprete o resultado de acordo com a situação.

- a) Em um jogo, Carlos ganhou 25 pontos e depois perdeu 19. **$+25 - 19 = 6$; ganhou 6 pontos**
- b) Cristiano devia 230 reais para seu primo. Já pagou 150 reais. **$-230 + 150 = -80$; débito de 80 reais**
- c) Ontem a temperatura era 10 °C e caiu 15 °C durante a madrugada. **$10 - 15 = -5$; temperatura de -5 °C**
- d) Antes de depositar 360 reais em sua conta, Ana verificou que o saldo estava negativo em 135 reais. **$360 - 135 = 225$; saldo de 225 reais**

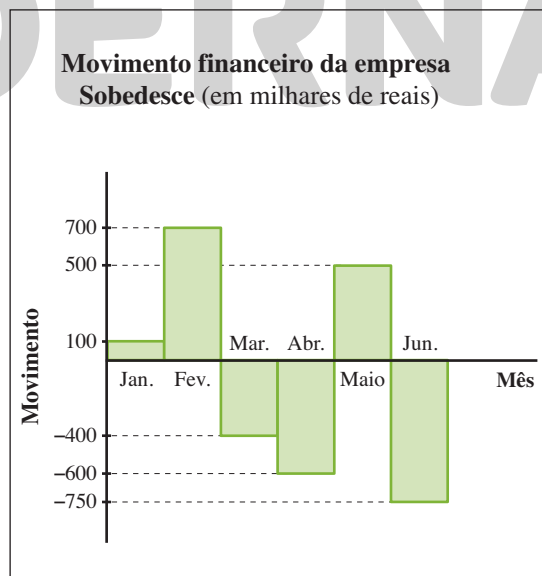
52 Observe a sequência numérica abaixo e responda às questões.



Subtraindo-se 5 de cada termo a partir do primeiro.

- a) Como essa sequência foi formada?
- b) Adicione os números que estão nas figuras de cores iguais. Que resultado você obteve? **-1**

53 Um empresário registrou o movimento financeiro de sua empresa, no 1º semestre do ano, no seguinte gráfico:



Dados obtidos pelo empresário.

Responda às questões de acordo com o gráfico.

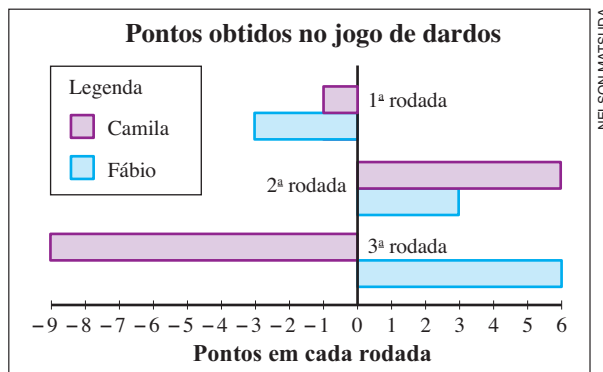
- a) Em que mês a empresa obteve maior lucro? **fevereiro**
- b) Em que mês ela sofreu maior prejuízo? **junho**
- c) Ao final do semestre, a empresa registrava lucro ou prejuízo? De quanto? **prejuízo; de 450 mil reais**

54 Os bancos oferecem a seus clientes um serviço denominado cheque especial. Com ele, o cliente pode retirar mais dinheiro do que tem na conta, pois o banco oferece como empréstimo a quantia retirada a mais. Sabendo que João é um cliente que possui cheque especial e que hoje tem no banco 5.000 reais, responda às questões.

- Ao pagar uma conta de 2.720 reais, João ficou com quanto dinheiro na conta? **2.280 reais**
- Depois de alguns dias, ele pagou mais três contas, no valor de 1.500 reais, 850 reais e 680 reais. Qual é o novo saldo? **-750 reais**
- Se o limite do cheque especial de João é de 2.000 reais, podemos dizer que ele ultrapassou o limite? Se não, quanto sobrou do seu limite? **não; 1.250 reais**
- Como João utilizou uma parte do seu limite no cheque especial, ele deverá pagar uma quantia, em real, ao banco. Se o banco cobrar 50 reais, quanto ele deverá depositar em sua conta para pagar a dívida com o banco? **800 reais**

55 Fábio e Camila gostam de jogar dardos. Eles combinaram que cada jogador atira três dardos, um em cada rodada.

Veja o gráfico que apresenta os pontos obtidos por eles em cada uma das três rodadas.



Dados obtidos por Camila e Fábio.

Sabendo que, para calcular a pontuação final, é necessário somar os pontos marcados nas três rodadas, qual foi a pontuação final de cada jogador?

Camila: -4 pontos; Fábio: 6 pontos

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Recorte nove fichas quadradas (de mesmo tamanho) de papel. Escreva nelas os números inteiros -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. Use um número para cada ficha.

Acomode as fichas formando um quadrado, de modo que a soma algébrica nas verticais, nas horizontais e nas diagonais seja sempre -3.

Esse é um **quadrado mágico**.

resposta possível:

2	-3	-2
-5	-1	3
0	1	-4

8 Multiplicação de números inteiros

Quando estudamos os números naturais, vimos que a multiplicação equivale a uma soma de parcelas iguais. Por exemplo:

$$5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

Ao estudar os números inteiros, no decorrer deste capítulo, vimos que:

- o oposto de um número positivo é um número negativo; (exemplo: $-(+3) = -3$);
- o oposto de um número negativo é um número positivo; (exemplo: $-(-3) = 3$).

Agora, observe estas multiplicações.

a) $(+2) \cdot (+4) = 2 \cdot (+4) = (+4) + (+4) = +8 = 8$

Portanto, $(+2) \cdot (+4) = 8$.

Multiplicamos dois números positivos, e o resultado foi um número positivo.

b) $(+2) \cdot (-4) = 2 \cdot (-4) = (-4) + (-4) = -8$

Portanto, $(+2) \cdot (-4) = -8$.

Multiplicamos um número positivo por um número negativo, e o resultado foi um número negativo.

c) O produto $(-2) \cdot (+4)$ pode ser representado por $-(+2) \cdot (+4)$.

Como $(+2) \cdot (+4) = 8$, temos: $-(+2) \cdot (+4) = -8$.

Portanto, $(-2) \cdot (+4) = -8$.

Multiplicamos um número negativo por um número positivo, e o resultado foi um número negativo.

d) O produto $(-2) \cdot (-4)$ pode ser representado por $-(+2) \cdot (-4)$.

Como $(+2) \cdot (-4) = -8$, temos: $-(+2) \cdot (-4) = -(-8) = +8 = 8$.

Portanto, $(-2) \cdot (-4) = 8$.

Multiplicamos dois números negativos, e o resultado foi um número positivo.

Em qualquer multiplicação de números inteiros diferentes de zero, temos:

- o produto de dois números de **mesmo sinal** é um **número positivo**;
- o produto de dois números de **sinais diferentes** é um **número negativo**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

56 Determine os produtos e escreva a resposta em seu caderno.

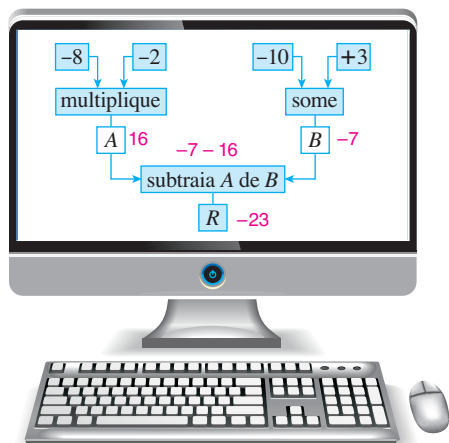
- a) $(-5) \cdot (+6)$ **-30** e) $(+3) \cdot (+7)$ **21**
 b) $(-5) \cdot (-6)$ **30** f) $(-9) \cdot (+2)$ **-18**
 c) $(-6) \cdot (-8)$ **48** g) $0 \cdot (-4)$ **0**
 d) $(+2) \cdot (-1)$ **-2** h) $(-34) \cdot (+2)$ **-68**

57 Descubra dois números cuja soma seja igual a -6 e cujo produto seja -16 . **+2 e -8**

58 Determine mentalmente o valor do fator desconhecido, representado por uma letra, nos casos abaixo.

- a) $(-8) \cdot x = (-8)$ **1** d) $(+9) \cdot t = (+9)$ **1**
 b) $(-4) \cdot y = (+4)$ **-1** e) $(+6) \cdot n = 0$ **0**
 c) $(-5) \cdot z = 0$ **0** f) $0 \cdot m = 0$ **m é qualquer número inteiro**

59 Siga as instruções para obter o valor de R .



CLAUDIO CHIYO

60 Em determinado jogo, cada participante deve responder a 20 questões. A cada resposta correta ganham-se 3 pontos, e a cada resposta incorreta perdem-se 2 pontos.

- a) Quantas questões Henrique acertou se ele marcou 30 pontos? **14**
 b) É possível que alguém termine esse jogo com zero ponto? Quantas questões essa pessoa teria acertado? **sim; 8**
 c) Quantas questões uma pessoa pode ter acertado se ela marcou -15 pontos? **5**
 d) Juliano disse que marcou -4 pontos. Ele está correto? Por quê? **Não, pois não é possível marcar -4 pontos nesse jogo.**

61 Usando uma calculadora com a tecla $\frac{+}{-}$, podemos calcular multiplicações com números inteiros. Veja alguns exemplos.

• $(-8) \cdot (+2)$

$8 \frac{+}{-} \times 2 = -16$

• $(+5) \cdot (-6)$

$5 \times 6 \frac{+}{-} = -30$

Que teclas devem ser apertadas para calcular as multiplicações a seguir? E qual será o resultado dessas operações?

- a) $(+5) \cdot (+6)$ **30** c) $(+3) \cdot (-8) \cdot (-6)$ **144**
 b) $(-4) \cdot (-9)$ **36** d) $(-7) \cdot (-5) \cdot (-6)$ **-210**

Reprodução proibida. Art. 184 de Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Pense mais um pouco...



Reúna-se com um colega para resolver este problema.

Bruna e Carlos estão jogando conforme as seguintes regras:

- O 1º jogador (o desafiante) escolhe um número inteiro entre -50 e 50 e o decompõe em dois fatores. Ele escreve o número e os fatores em um papel e o guarda.
- Obrigatoriamente, pelo menos um dos fatores deve ser negativo.
- O 2º jogador tenta encontrar o produto e os fatores, registrando as tentativas.
- Para cada palpite, o desafiante indica os acertos e dá dicas sobre os demais valores: diz se o produto e cada fator são maiores ou menores que os escolhidos.
- Com as dicas, o 2º jogador faz as tentativas até encontrar a multiplicação escolhida.
- Em seguida, invertem-se as posições.
- Vence o jogo aquele que descobrir o produto no menor número de tentativas.

Pensando na estrutura do jogo, respondam:

- a) O 2º jogador sabe que um dos fatores é zero. O que ele pode afirmar sobre o outro fator? O outro fator tem de ser negativo.
- b) O 2º jogador sabe que um dos fatores está entre -7 e -1 . Ele pode afirmar que o produto é negativo? Não. Como um dos fatores está entre -7 e -1 , o 2º jogador sabe que esse fator é negativo. Sobre o outro fator nada pode ser afirmado.
- c) O 2º jogador sabe que o produto não é negativo. O que pode afirmar sobre os fatores? Como pelo menos um dos fatores deve ser negativo, ou os dois fatores são negativos (produto positivo), ou um dos fatores é zero (produto zero).

Propriedades da multiplicação de números inteiros

A propriedade do fechamento não foi considerada aqui porque não estamos realizando um estudo axiomático de teoria dos conjuntos.

Ao estudar a multiplicação de números naturais, vimos que essa operação é comutativa e associativa e que o número 1 é seu elemento neutro. Essas propriedades também são válidas para a multiplicação de números inteiros.

Em uma multiplicação de dois números inteiros, a ordem dos fatores não altera o produto.

Observe esta multiplicação: $(-20) \cdot (+5) = (-100)$.

Trocando a ordem dos fatores, temos: $(+5) \cdot (-20) = (-100)$.

Portanto, $(-20) \cdot (+5) = (+5) \cdot (-20)$.

É importante explicar aos alunos que, dependendo da maneira como associamos os fatores, os cálculos com números inteiros tornam-se mais simples. Essa propriedade é útil quando realizamos cálculos mentais envolvendo a multiplicação.

Em uma multiplicação de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar o resultado.

Vamos calcular: $(+3) \cdot (-7) \cdot (-2)$.

- Associamos os dois primeiros fatores e, ao resultado, multiplicamos o terceiro:

$$\begin{aligned} & [(+3) \cdot (-7)] \cdot (-2) = \\ & = [-21] \cdot (-2) = \\ & = +42 \end{aligned}$$

- Ou, então, associamos os dois últimos fatores e multiplicamos o primeiro ao resultado:

$$\begin{aligned} & (+3) \cdot [(-7) \cdot (-2)] = \\ & = (+3) \cdot [+14] = \\ & = +42 \end{aligned}$$

O número 1 é o elemento neutro da multiplicação de números inteiros.

Veja dois exemplos.

a) $(+5) \cdot 1 = 1 \cdot (+5) = +5 = 5$

b) $(-4) \cdot 1 = 1 \cdot (-4) = -4$

Para a multiplicação de números inteiros, também vale a propriedade distributiva em relação à adição algébrica.

Em uma multiplicação de um número inteiro por uma adição algébrica, podemos multiplicar esse inteiro pelos termos da adição algébrica e depois adicionar os resultados.

Veja alguns exemplos.

$$\begin{aligned} \text{a) } & -5 \cdot (-9 + 2) = \\ & = -5 \cdot (-9) - 5 \cdot (+2) = \\ & = 45 - 10 = \\ & = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & -2 \cdot (-5 - 6) = \\ & = -2 \cdot (-5) - 2 \cdot (-6) = \\ & = 10 + 12 = \\ & = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 4 \cdot (7 - 10) = \\ & = 4 \cdot 7 + 4 \cdot (-10) = \\ & = 28 - 40 = \\ & = -12 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

62 Calcule mentalmente.

a) Sabendo que $(-80) \cdot (+62) = -4.960$, quanto vale $(+62) \cdot (-80)$? *-4.960*

b) Sendo $(-10) \cdot [(-8) \cdot (+15)] = 1.200$, calcule $[(-10) \cdot (-8)] \cdot (+15)$. *1.200*

63 Aplicando a propriedade distributiva, calcule:

a) $3 \cdot (-5 + 2)$ *-9* **c)** $(-7 + 21) \cdot (-5)$ *-70*

b) $-4 \cdot (-6 + 9)$ *-12* **d)** $(8 - 24) \cdot 7$ *-112*

64 Identifique as propriedades empregadas nas resoluções das multiplicações a seguir.

a) $-2 \cdot (-7 - 8) =$ *distributiva*
 $= -2 \cdot (-7) - 2 \cdot (-8) =$
 $= 14 + 16 = 30$

b) $(-10) \cdot (-5) \cdot (-2) =$ *associativa*
 $= (-10) \cdot (+10) = -100$

c) $(-4) \cdot (-1) \cdot (-8) \cdot (+1) =$ *elemento neutro e associativa*
 $= (-4) \cdot (-1) \cdot (-8) =$
 $= (-4) \cdot (+8) = -32$

65 Observe como Pedro e Daniela calcularam a mesma operação.

• Pedro *Resposta possível: Pedro usou a propriedade distributiva para fazer os cálculos.*

$$\begin{aligned} & (-7) \cdot (-4 + 2) = \\ & = -7 \cdot (-4) - 7 \cdot (+2) = \\ & = 28 - 14 = 14 \end{aligned}$$

LIGIA DUQUE

• Daniela

Resposta possível: Daniela efetuou inicialmente a operação entre parênteses e depois a multiplicação.

$$\begin{aligned} & (-7) \cdot (-4 + 2) = \\ & = -7 \cdot (-2) = 14 \end{aligned}$$

LIGIA DUQUE

Agora, resolva.

- a)** Descreva os procedimentos usados por Pedro e Daniela.
b) Em sua opinião, quem fez o cálculo do modo mais prático? Justifique sua resposta.

resposta pessoal

66 Usando o método de Pedro ou de Daniela, calcule as multiplicações em seu caderno.

- a)** $(-9) \cdot (-6 + 5)$ *9*
b) $(-25) \cdot (-10 - 1)$ *275*
c) $(-34) \cdot (+5 + 2)$ *-238*
d) $(+25) \cdot (-12 + 2)$ *-250*
e) $(+10) \cdot (-23 + 54)$ *310*
f) $(-27) \cdot (+9 - 1)$ *-216*

67 Veja como Márcio fez a multiplicação $(-9) \cdot (+5) \cdot (-1)$ usando uma calculadora.

$$9 \times 5 = 45$$

NELSON MATSUDA

Nesse cálculo, Márcio usou uma propriedade da multiplicação. Que propriedade é essa?

Associativa, ao calcular mentalmente $(+5) \cdot (-1) = -5$.

9 Divisão de números inteiros

Considerando que a divisão é a operação inversa da multiplicação, sabemos, por exemplo, que:

$$18 : 3 = 6, \text{ porque } 6 \cdot 3 = 18$$

Em uma divisão entre dois números inteiros, com o divisor diferente de zero, temos:

- quociente **positivo** quando esses números (dividendo e divisor) são de **mesmo sinal**;
- quociente **negativo** quando esses números (dividendo e divisor) são de **sinais diferentes**.

Veja outros exemplos.

- a) $(+60) : (-15) = -4$, porque $(-4) \cdot (-15) = +60$.
 b) $(-30) : (+10) = -3$, porque $(-3) \cdot (+10) = -30$.
 c) $(+80) : (+20) = +4$, porque $(+4) \cdot (+20) = +80$.
 d) $(-65) : (-13) = +5$, porque $(+5) \cdot (-13) = -65$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

68 Calcule as divisões.

- a) $(+9) : (-9) = -1$ f) $(+112) : (-56) = -2$
 b) $(-8) : (-8) = 1$ g) $(-108) : (+27) = -4$
 c) $0 : (+7) = 0$ h) $(+35) : (+7) = 5$
 d) $(-48) : (+12) = -4$ i) $(+72) : (+36) = 2$
 e) $(-50) : (-5) = 10$ j) $(-90) : (-10) = 9$

69 Determine o valor do termo desconhecido, representado pela letra, em cada caso.

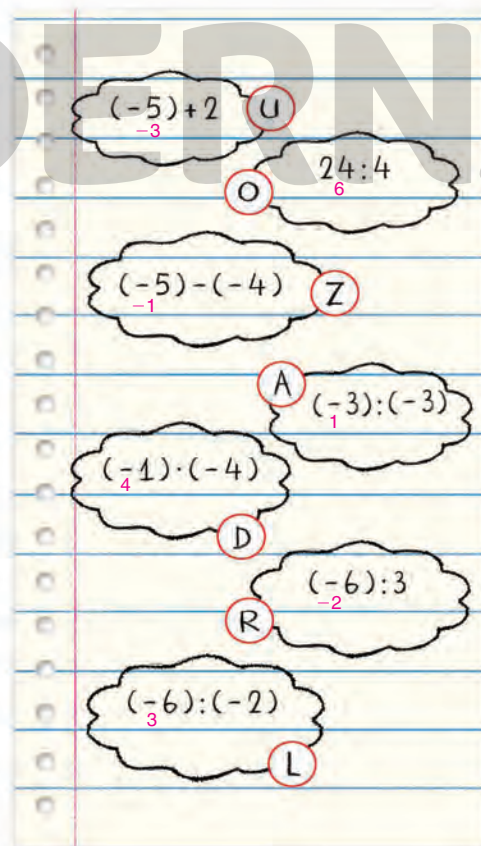
- a) $x : (-8) = -6$ 48 c) $t : (-3) = -24$ 72
 b) $y : 9 = -7$ -63 d) $z : (-13) = 12$ -156

70 Determine o quociente entre dois números não nulos:

- a) quando esses números são iguais; 1
 b) quando esses números são opostos. -1

71 Carla e Joana são duas amigas que adoram decifrar códigos. Carla arrumou um namorado com um nome bastante diferente e propôs a Joana um desafio para que descobrisse o nome dele.

Encontre o resultado de cada operação que está ligada a uma letra. No caderno, coloque esses resultados em ordem crescente e troque pela letra correspondente.



- Qual é o nome do namorado de Carla? **Urzaldo**

10 Expressões numéricas

Já aprendemos que, para resolver uma expressão numérica, eliminamos os sinais de associação respeitando a seguinte ordem: parênteses, colchetes e chaves. Devemos nos lembrar também de obedecer aos procedimentos relativos aos sinais + ou - que precedem os parênteses, colchetes e chaves.

Como exemplo, vamos resolver algumas expressões.

a) $10 - [-8 + (-18 + 6)] =$ Resolvemos o que está entre parênteses: $-18 + 6 = -12$.

$$= 10 - [-8 + (-12)] =$$

Eliminamos os parênteses.

$$= 10 - [-8 - 12] =$$

Resolvemos o que está entre colchetes: $-8 - 12 = -20$.

$$= 10 - [-20] =$$

Eliminamos os colchetes.

$$= 10 + 20 =$$
$$= 30$$

b) $-4 + \{5 - [3 - (-7 + 9)]\} =$ Resolvemos o que está entre parênteses: $-7 + 9 = 2$.

$$= -4 + \{5 - [3 - (+2)]\} =$$

Resolvemos o que está entre colchetes: $3 - 2 = 1$.

$$= -4 + \{5 - [+1]\} =$$

Resolvemos o que está entre chaves: $5 - 1 = 4$.

$$= -4 + \{4\} =$$
$$= -4 + 4 = 0$$

c) $(-12) : (-3) - (-5) \cdot (+2) =$ Efetuamos a divisão e a multiplicação.

$$= (+4) - (-10) =$$

Eliminamos os parênteses.

$$= 4 + 10 =$$
$$= 14$$

d) $-12 + [(-7 - 3) : (-2)] =$ Efetuamos a operação entre parênteses.

$$= -12 + [(-10) : (-2)] =$$

Efetuamos a operação entre colchetes.

$$= -12 + [+5] =$$

Eliminamos os colchetes.

$$= -12 + 5 =$$
$$= -7$$

72 Resolva as seguintes expressões.

- a) $14 - (-10 + 5 + 3)$ **16**
- b) $-15 + [-4 - (-5 + 20)]$ **-34**
- c) $20 - \{-10 + [+20 - (-20 + 10)]\}$ **0**
- d) $-12 + (-6) - (-8 - 5)$ **-5**

73 Efetue cada operação abaixo.

- a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ **-1**
- b) $-5 + (-3) \cdot (+8)$ **-29**
- c) $(-6) \cdot (+5) - (-4) \cdot (+3)$ **-18**
- d) $(-5 + 1) \cdot (-8 + 2)$ **24**
- e) $6 - (-6 + 4) \cdot (-5 + 9)$ **14**
- f) $-3 - 3 \cdot (-3)$ **6**

74 Roberto lançou 15 vezes uma moeda e obteve os resultados que estão no quadro a seguir.

cara	10
coroa	5

Para cada cara, Roberto ganha 7 pontos e, para cada coroa, perde 9 pontos.

- a) Represente com um número positivo e um número negativo o total de pontos ganhos e o total de pontos perdidos. **+70 e -45**
- b) Crie uma expressão que forneça o saldo de pontos obtidos por Roberto. resposta possível: **$10 \cdot (+7) + 5 \cdot (-9)$**
- c) Qual foi o saldo de pontos obtidos por Roberto nessa jogada? **+25**
- d) Qual é a pontuação máxima que Roberto poderia conseguir? E a mínima? **+105; -135**

75 João, Ricardo e Cristina participaram de um campeonato de *videogame*. Para fazer uma brincadeira com seus colegas, apresentaram os pontos obtidos por meio do valor das seguintes expressões:

Ricardo	$-5 - 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-5) + 7$
Cristina	$[(-2) \cdot 1 + (-6)] \cdot (-1)$
João	$(-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-1)$

O quadro abaixo registra a quantidade de pontos dos seis primeiros colocados.

Classificação	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de pontos	18	17	8	7	5	4

• Qual foi a classificação de cada um?

Ricardo ficou em 1º lugar, Cristina, em 3º, e João, em 4º.

76 Calcule as expressões a seguir.

- a) $(-4 + 20) \div (-8)$ **-2**
- b) $(-6 - 14) \div (-6 + 1)$ **4**
- c) $(-8) \cdot (+3) - (-15) \div (+3)$ **-19**
- d) $[-8 + (-4) \cdot (-3)] \div (-1 - 1)$ **-2**
- e) $(-6 - 2 + 3) \div [-3 \cdot (-2 + 3) + 8]$ **-1**

77 Reúna-se com um colega para resolver este problema.

Com o auxílio de uma calculadora, Luana precisa fazer a operação $(-1.500) \div (-20)$, mas as teclas **1** e **2** estão quebradas.

Como Luana pode fazer esse cálculo sem usar essas teclas? resposta possível: Ela pode transformar essa operação na seguinte expressão: $[(-500 \cdot 3) \div (-4)] \div 5$.

11 Potenciação de números inteiros

Quando trabalhamos com números naturais, vimos que, ao efetuar um produto de fatores iguais, realizamos uma operação chamada de **potenciação**.

Também podemos efetuar a potenciação com números inteiros.

Vamos ver alguns exemplos com expoente positivo.

- a) $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = +25$
- b) $(+7)^3 = (+7) \cdot (+7) \cdot (+7) = +343$
- c) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
- d) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
- e) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Em potenciação com números inteiros, temos:

- a potência de base positiva é um número positivo;
- a potência de base negativa é positiva quando o expoente é par e negativa quando o expoente é ímpar.

► Potência de expoente 1 ou zero

De modo geral, convencionamos que:

- Para toda potência cuja base é um número inteiro e o expoente é 1, a potência é igual à própria base.
- Para toda potência cuja base é um número inteiro não nulo e o expoente é 0, a potência é igual a 1.

Observe alguns exemplos.

a) $3^1 = 3$

b) $(-2)^1 = -2$

c) $(-5)^1 = -5$

d) $2^0 = 1$

e) $(-1)^0 = 1$

f) $(-7)^0 = 1$

OBSERVAÇÃO

- Sempre colocamos as bases negativas entre parênteses. Veja.

$$(-5)^2 = +25 = 25$$

Se não colocarmos as bases negativas entre parênteses, o sinal negativo será do resultado da potenciação. Observe.

$$-5^2 = -25$$

Assim, $(-5)^2$ é diferente de -5^2 .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

78 Calcule as potências.

a) $(+3)^2$ 9

d) $(-11)^2$ 121

g) $(-1)^6$ 1

b) $(+5)^3$ 125

e) $(-5)^3$ -125

h) $(+6)^1$ 6

c) $(+7)^2$ 49

f) $(-3)^4$ 81

i) $(+329)^0$ 1

79 Compare as potências usando $>$, $<$ ou $=$.

a) $(-9)^0$ e $(+31)^0$

$(-9)^0 = (+31)^0$

c) $(-2)^8$ e $(+3)^3$

$(-2)^8 > (+3)^3$

b) $(-9)^1$ e $(-1)^6$

$(-9)^1 < (-1)^6$

d) $(+2)^5$ e $(-2)^5$

$(+2)^5 > (-2)^5$

80 Quais são os números inteiros entre $(-3)^3$ e $(+3)^3$ que são divisíveis por 10? -20, -10, 0, 10 e 20

81 O número -15 é menor que -3. E $(-15)^2$ é menor que $(-3)^2$? Por quê?

Não, pois quando efetuamos as potências temos $225 > 9$.

82 Uma potência é negativa e seu expoente é ímpar. Sua base é um número positivo ou negativo? negativo

Lembre-se:
Não escreva no livro!

83 Mônica apresentou o seguinte desafio para Carlos:

Elevei um número negativo a um expoente que é o dobro de um número ímpar. Obtive um número positivo ou negativo?



- Ajude Carlos a encontrar a resposta correta para esse desafio. **positivo**

84 Com a calculadora, podemos determinar potências de bases negativas. A potência $(-2)^4$ pode ser calculada teclando-se a sequência:



Que sequência de teclas deve ser apertada para calcular as potências a seguir?

- a) $(-2)^6$ 64
- b) $(-3)^5$ -243
- c) $(-4)^3$ -64
- d) $(-3)^4$ 81
- e) $(-2)^7$ -128
- f) $(-5)^2$ 25

- Que valor foi encontrado em cada item?

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

NELSON
MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Propriedades da potenciação

A seguir, vamos estudar algumas propriedades da potenciação, válidas para toda potência cuja base é um número inteiro e o expoente é um número natural.

Produto de potências de mesma base

Vamos calcular $(-4)^3 \cdot (-4)^2$.

$$(-4)^3 \cdot (-4)^2 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^5$$

Observe que o expoente 5 é a soma dos expoentes dos fatores, ou seja:

$$(-4)^3 \cdot (-4)^2 = (-4)^{3+2} = (-4)^5$$

Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e adicionamos os expoentes.

Quociente de potências de mesma base

Vamos calcular $(-2)^5 : (-2)^2$.

Devemos procurar uma potência que multiplicada por $(-2)^2$ resulte em $(-2)^5$. Essa potência é $(-2)^3$, pois $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^5$. Então:

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^3$$

Observe que o expoente 3 é a diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor, ou seja:

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3$$

Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Potência de uma potência

Vamos calcular o cubo de $(-3)^2$, ou seja, $[(-3)^2]^3$.

Observe que o número que está elevado à terceira potência é $(-3)^2$. Portanto:

$$[(-3)^2]^3 = (-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2 = (-3)^{2+2+2} = (-3)^{3 \cdot 2} = (-3)^6$$

Veja que o resultado pode ser obtido conservando-se a base e multiplicando-se os expoentes.

Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

Potência de um produto

Vamos calcular o quadrado do produto $(-5) \cdot (+2)$, ou seja, $[(-5) \cdot (+2)]^2$.

Observe que a base da potência é o produto $(-5) \cdot (+2)$, ou seja:

$$[(-5) \cdot (+2)]^2 = [(-5) \cdot (+2)] \cdot [(-5) \cdot (+2)] = (-5) \cdot (+2) \cdot (-5) \cdot (+2) = (-5) \cdot (-5) \cdot (+2) \cdot (+2) = (-5)^2 \cdot (+2)^2$$

Veja que o resultado pode ser obtido elevando-se cada fator ao quadrado.

Para elevar um produto a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente.

Expressões numéricas com potenciação

Acompanhe, a seguir, o cálculo do valor de algumas expressões.

a) $(-3 + 7)^3 \cdot (-5 + 3)^2 =$

$$\begin{aligned} &= (+4)^3 \cdot (-2)^2 = \\ &= (+64) \cdot (+4) = \\ &= 16 \end{aligned}$$

Efetuamos as operações entre parênteses.

Calculamos as potências.

b) $[(-2)^2 \cdot (-2)^3]^6 \cdot [(-2)^4]^5 =$

$$\begin{aligned} &= [(-2)^5]^6 \cdot (-2)^{20} = \\ &= (-2)^{30} \cdot (-2)^{20} = \\ &= (-2)^{10} = \\ &= 1.024 \end{aligned}$$

Aplicamos as propriedades da potenciação.



85 Reduza a uma só potência.

- a) $(+4)^2 \cdot (+4)^3$ 4^5
 b) $(-10)^3 \cdot (-10)^4 \cdot (-10)^2$ $(-10)^9$
 c) $(-12) \cdot (-12) \cdot (-12)^2$ $(-12)^4$
 d) $(-6)^8 \cdot (-6)^2$ $(-6)^6$
 e) $(+9)^3 \cdot (+9)$ 9^2
 f) $(-21)^4 \cdot (-21)^3$ -21

86 Aplique as propriedades de potência.

- a) $(+2^5)^3$ 2^{15}
 b) $[(-2)^3]^4$ $(-2)^{12}$
 c) $[(-7)^2]^5$ $(-7)^{10}$
 d) $[(-3) \cdot (-5)]^3$ $(-3)^3 \cdot (-5)^3$
 e) $[(+2) \cdot (-7)]^2$ $(+2)^2 \cdot (-7)^2$
 f) $[(-2) \cdot (+11) \cdot (-3)]^2$ $(-2)^2 \cdot (+11)^2 \cdot (-3)^2$

87 Resolva as expressões a seguir.

- a) $(-2)^3 \cdot (-8)$ 1
 b) $(-5)^2 \cdot (-4 - 1)$ -5
 c) $(-5 + 1)^2 + (+4)^2 - (-1)^5$ 33
 d) $(-2)^3 \cdot (-3)^2 - (-5)^2 \cdot (-1)^4$ -97
 e) $(5 - 10)^2 - (-3)^2 + (12)^0$ 17
 f) $(-3)^3 \cdot (-2)^2 + (-10)^1 \cdot (-1)^5$ -98

88 Reduza a uma só potência.

- a) $(2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^4) \cdot (2^7 \cdot 2^3)$ 2^5
 b) $(3^4 \cdot 3^3) \cdot (3^5 \cdot 3^3)$ 3^3
 c) $[(-5)^2 \cdot (-5)^4] \cdot [(-5) \cdot (-5)^3]$ $(-5)^2$
 d) $[(-7)^2]^4 \cdot [(-7)^5 \cdot (-7)^3]$ $(-7)^{10}$
 e) $(2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5) \cdot (2^{-2} \cdot 2^5)$ 2^7
 f) $(-1 - 1 - 1)^2 \cdot (-3)^{1+2}$ $(-3)^5$

12 Raiz quadrada de números inteiros

Já vimos que, para determinar $\sqrt{36}$, por exemplo, precisamos encontrar um número que elevado ao quadrado resulte em 36. Então, $\sqrt{36} = 6$, pois $6^2 = 36$.

No entanto, $(-6)^2$ também é igual a 36. Porém, como o resultado de uma operação deve ser único, foi convencionado pelos matemáticos que a raiz quadrada de um número inteiro, quando existir, é um número não negativo.

Veja os exemplos.

- a) Os números inteiros cujo quadrado é 81 são 9 e -9 , pois $9^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$. Porém, $\sqrt{81} = 9$.
 b) Os números inteiros cujo quadrado é 144 são 12 e -12 , pois $12^2 = 144$ e $(-12)^2 = 144$. Porém, $\sqrt{144} = 12$.

Note que, ao procurar os números inteiros que elevados ao quadrado resultam em -81 , constatamos que não é possível encontrá-los, pois o produto de um positivo por um positivo é um número positivo, assim como o produto de um negativo por um negativo também é um positivo. Portanto, nenhum número inteiro elevado ao quadrado resulta em um número negativo.

OBSERVAÇÃO

- ▶ Além do zero, somente os números inteiros positivos e quadrados perfeitos têm como raiz quadrada um número inteiro. Assim, por exemplo:
 - não existe nenhum número inteiro que seja raiz quadrada do número 5;
 - não existe nenhum número inteiro que seja raiz quadrada de -9 .

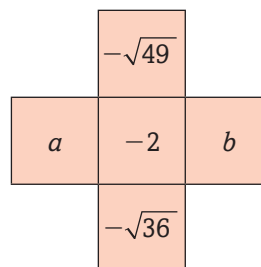
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 89** Determine:
- a) $\sqrt{1}$ 1 d) $-(\sqrt{16})$ -4
 b) $\sqrt{49}$ 7 e) $\sqrt{196}$ 14
 c) $-(\sqrt{100})$ -10 f) $-(\sqrt{256})$ -16
- 90** Quais são os números compreendidos entre -10 e 10 cuja raiz quadrada é um número inteiro?
 0, 1, 4 e 9
- 91** Alguns dos números abaixo têm como raiz quadrada um número inteiro. Quais são eles? Justifique sua resposta. alternativas b, d, e
- a) 18
 b) 4 2^2
 c) -36
 d) 100 10^2
 e) 144 12^2
 f) -225

- 92** Quais são os números inteiros que elevados ao quadrado resultam em 900? -30 e 30
- 93** No esquema abaixo, o produto dos números que estão na vertical é igual ao produto dos números que estão na horizontal.

respostas possíveis:
 $a = -7$ e $b = -6$
 ou
 $a = -14$ e $b = -3$
 ou
 $a = -21$ e $b = -2$
 $a = 6$ e $b = 7$
 ou
 $a = -41$ e $b = -1$

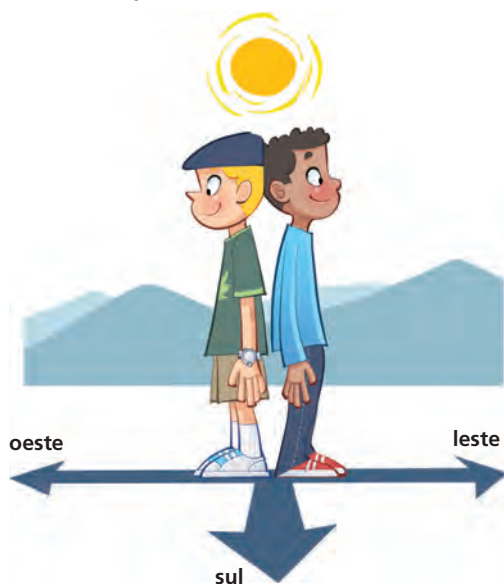


- Descubra os valores de a e b , sabendo que a é menor que b .

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1** Em seu caderno, determine:
- a) o oposto de +30; -30
 b) o oposto de $-(-16)$; -16
 c) o oposto do oposto de -25; -25
 d) o oposto de -40; 40
 e) o oposto de $-(+19)$. 19
- 2** João e Luiz se posicionam um de costas para o outro. João anda 20 m na direção leste, e Luiz, 18 m na direção oeste.



CLAUDIO CHIVO

Representando por +20 a posição em que João se encontra em relação ao ponto de partida, responda:

- a) Como podemos representar a posição em que Luiz se encontra? -18
 b) Quantos metros separam João de Luiz?
 38 metros
- 3** Qual é o menor número de cada item? Escreva no caderno.
- a) $|-6|$ ou $|+2|$ |+2| c) $|+5|$ ou $|-8|$ |+5|
 b) $|-5|$ ou -100 -100 d) $|0|$ ou $|-4|$ |0|
- 4** Compare os números a seguir e escreva sentenças usando os sinais $>$ ou $<$.
- a) -75 e 42 $-75 < 42$ c) 2 e -20 $2 > -20$
 b) -300 e -10 $-300 < -10$ d) -5 e -30 $-5 > -30$
- 5** Considerando os números 9, -10, -15, 8, -21, -5 e 12, escreva no caderno:
- a) os números maiores que -10; -5, 8, 9 e 12
 b) os números maiores que -15 e menores que 9; -10, -5 e 8
 c) os números cujo módulo é maior que 10; -21, -15 e 12
 d) os números cujo módulo é menor que o módulo de 12. -10, -5, 8 e 9

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- 6 Veja o que Alice falou para Renan.

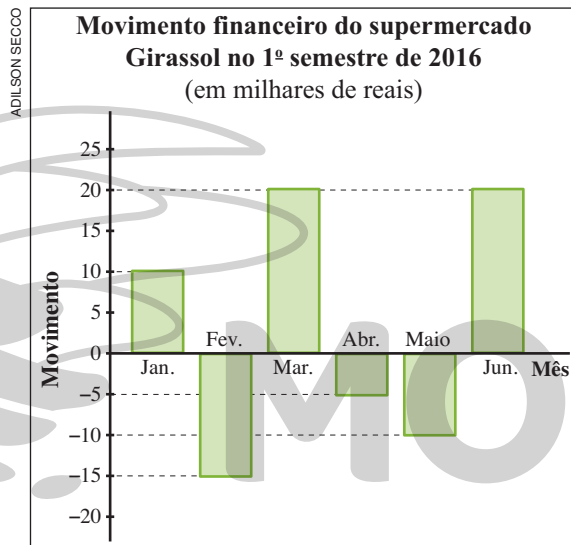
Pensei em um número maior que -3 e menor que $+3$. Em que número posso ter pensado?



DANILLO SOUZA

Descubra as possíveis respostas que Renan poderia ter lhe dado. $-2, -1, 0, 1$ ou 2

- 7 Observe o gráfico sobre a movimentação financeira do supermercado Girassol ao longo de seis meses. Nesse gráfico, o lucro é representado por números positivos, e o prejuízo, por números negativos.



Dados obtidos pelo gerente do supermercado.

Agora, responda:

7. c) fevereiro, abril e maio
- a) Em quais meses o lucro foi de 20 mil reais? **março e junho**
- b) Em quais meses ocorreu maior lucro? **março e junho**
- c) Em quais meses houve prejuízo?
- d) Em que mês o prejuízo foi maior? **fevereiro**
- e) É correto afirmar que o lucro desse supermercado aumentou ao longo de todo o semestre? Justifique sua resposta.
Não, pois lucro e prejuízo se alternam no gráfico.
- 8 Um submarino encontra-se a -228 m de profundidade. Depois de algum tempo, está a -184 m.
- a) Ele subiu ou desceu? **subiu**
- b) Quantos metros? **44 metros**
- c) Escreva uma adição algébrica que represente a posição atual do submarino.
 $-228 + 44 = -184$

- 9 Resolva mentalmente.

Quais destas subtrações têm como resultado um número negativo? **alternativas a e b**

- a) $(-10) - (+6)$ c) $(+10) - (+6)$
b) $(-10) - (-6)$ d) $(+10) - (-6)$

- 10 Veja, nos termômetros digitais, as temperaturas estimadas para a superfície de três planetas do nosso Sistema Solar.

NSSDC PHOTO GALLERY/NASA IMAGES



Vênus



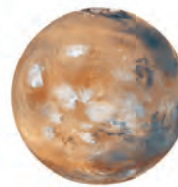
NASA IMAGES



Terra



JPL/NISS/NASA IMAGES



Marte



Representação esquemática sem escala.
Uso de cores-fantasia.

Se já fosse possível a viagem de robôs entre esses planetas, que diferença de temperatura experimentaria o robô que fosse:

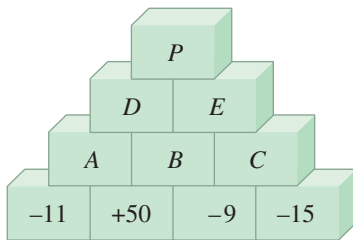
- a) da superfície da Terra para a superfície de Vênus? **464 °C**
- b) da superfície de Vênus para a superfície de Marte? **530 °C**

ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

11 Em janeiro de determinado ano, uma empresa teve um prejuízo de 5.200 reais, mas, em fevereiro daquele mesmo ano, recuperou-se e obteve um lucro de 12.560 reais.

- a) Escolha, usando números inteiros, uma expressão que represente a situação da empresa ao final de fevereiro. $-5.200 + 12.560$
 b) Qual foi o lucro dessa empresa nesse bimestre? 7.360 reais

12 Cada letra equivale à soma dos números dos dois blocos imediatamente abaixo. Determine o número que está no alto da pilha. 97



NELSON MATSUJIDA

13 Resolva cada expressão abaixo.

- a) $5 + (2 - 6)$ -1
 b) $-15 - (-23 + 12)$ -4
 c) $(9 - 15) + (12 - 20)$ -14
 d) $(-9 + 5) - (-6 - 8 - 4)$ 14
 e) $-(-2) + (-3) - \{-2 + [-1 - (-2 + 1)] + 5\}$ -4
 f) $20 - \{-10 - [-8 + (5 - 12)] - 20\}$ 35

14 Efetue mentalmente as operações.

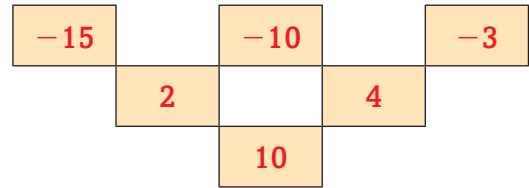
- a) $(-8) \cdot (+4)$ -32
 b) $(-8) : (+4)$ -2
 c) $(-20) \cdot (+5)$ -100
 d) $-7 \cdot (-3)$ 21
 e) $-15 : (+1)$ -15
 f) $-18 : (-2)$ 9

15 Calcule o valor das expressões numéricas.

- a) $15 + (-8) \cdot (+3)$ -9
 b) $(-30) : (-5) - (-4)$ 10
 c) $21 - (-14) : (+2)$ 28
 d) $(-4) \cdot (-6) - (-6)$ 30
 e) $3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-5)$ -4
 f) $(-5) \cdot (+4) + (-15) : (-5)$ -17
 g) $(-6) \cdot (+3) + (-5) \cdot (-4)$ 2

16 Um produto com quatro fatores negativos é positivo ou negativo? positivo

17 Observe a figura a seguir.



Entre os números que aparecem nela, escolha dois de modo que:

- a) a soma seja -13 e o produto -30 ; -15 e 2
 b) a soma seja -6 e o produto -40 ; -10 e 4
 c) a soma seja 0 e o quociente -1 . -10 e 10

18 Reduza a uma só potência.

- a) $(2^2 \cdot 2^3 \cdot 2) : (2^2)^2$ 2^2
 b) $[(-6)^4 \cdot (-6)^2 \cdot (-6)] : [(-6)^2]^3$ -6
 c) $[(-5)^8 : (-5)^2] \cdot [(-5)^2]^2$ $(-5)^{10}$
 d) $[(-3)^8 : (-3)^2]^2 \cdot [(-3)^{10} : (-3)^5]$ $(-3)^{17}$

19 Efetue:

- a) $(-5)^2$ e $(+5)^2$ 25 e 25
 b) $(-6)^3$ e $(+6)^3$ -216 e 216
 c) $3^2 + 5^2$ e $(3 + 5)^2$ 34 e 64

20 Determine o valor das expressões a seguir.

- a) $(-6)^2 - 12$ 24
 b) $(-5) \cdot (+6) - (-3)^2$ -39
 c) $(-8)^2 : (-16) + 5$ 1
 d) $(-6)^0 + (-3)^2 + (-2)^3 \cdot (-1)$ 18
 e) $3^2 - 4^2 - (-2) \cdot (-4)$ -15
 f) $(-7)^2 - (-7) \cdot (-6)$ 7

21 Efetue: Mostre aos alunos que: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$ ($7 \neq 5$)

- a) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ e $\sqrt{16+9}$ 7 e 5
 b) $\sqrt{225} - \sqrt{81}$ e $\sqrt{225-81}$ 6 e 12
 c) $\sqrt{121} \cdot \sqrt{9}$ e $\sqrt{121 \cdot 9}$ 33 e 33
 d) $\sqrt{324} : \sqrt{81}$ e $\sqrt{324 : 81}$ 2 e 2

• Compare os resultados obtidos em cada item. O que você observa? resposta pessoal

22 Considere estas expressões:

- I. $(-2 + 4)^2 - 3 \cdot (\sqrt{16} + \sqrt{4})$ -14
 II. $-\sqrt{64} + \sqrt{3^2 + 4^2}$ -3
 III. $(\sqrt{25} - \sqrt{49})^2 \cdot (-3 + 5)$ 8
 IV. $\sqrt{10^2 - 8 - 8 \cdot 7} - 2 \cdot 14$ -22

Determine o valor de cada expressão. Entre esses valores, descubra dois cuja soma seja igual a -36 e dois cuja diferença seja igual a -11 .
 -14 e -22 ; -14 e -3 , -3 e 8

Brincando um pouco

Bruna inventou um jogo muito interessante, o *Menos mil*. Ela construiu um alvo e acrescentou alguns valores.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Na brincadeira, cada jogador inicia o jogo com 1.000 pontos. O objetivo é chegar primeiro que o adversário ao número -1.000 lançando bolinhas de gude até o alvo. A cada rodada, o jogador lança apenas uma bolinha a uma distância de cinco passos do alvo, e o valor obtido é somado à sua pontuação inicial. Por exemplo, se a bolinha parar no número -100 , o jogador efetuará esta operação: $-100 + 1.000$. Portanto, ficará com 900 pontos.

Outra regra: não se pode ultrapassar o número -1.000 . A pontuação deve ser exata! Por exemplo: se um jogador estava com -900 pontos e acertou o número -200 , ele não conseguiu chegar ao número -1.000 exatamente (ao se efetuar a operação, obtém-se o número -1.100). Desse modo, o jogador não contabiliza o resultado, voltando a ter -900 pontos. É como se ele tivesse errado sua jogada.

Agora é com você!

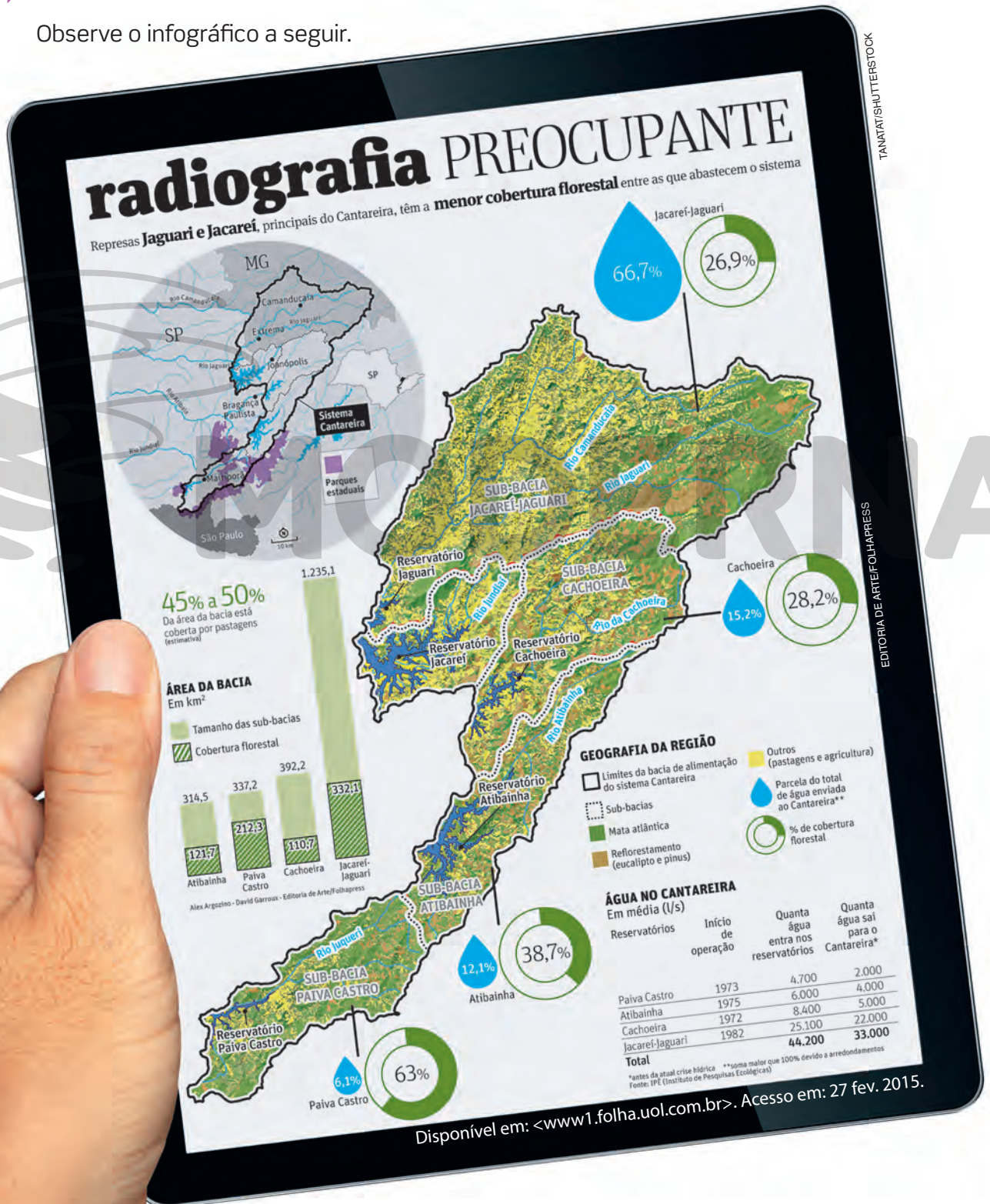
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 O que acontecerá com o jogador que está com -800 pontos se a bolinha parar no número -200 ? *Ele vencerá o jogo, pois com esse valor chegará ao número -1.000 .*
- 2 Qual é o número mínimo de jogadas para que uma pessoa vença o jogo? Justifique sua resposta. *Dez, porque, ao acertar o número -200 todas as vezes, a pessoa conseguirá chegar, ao final de todas as jogadas, ao número -1.000 .*
- 3 Um jogador pode obter 350 pontos? Explique sua resposta. *resposta possível: Sim, basta que ele acerte três vezes no número -200 e uma vez no número -50 .*
- 4 Em uma das jogadas, Bruna disse: “Oba, eu estava com 800 e acertei o número -200 ! Acabei de ganhar o jogo!”. Isso faz sentido? Justifique sua resposta. *A afirmação é falsa, pois, ao efetuar $800 + (-200)$, a resposta será 600, e não -1.000 .*
- 5 Joaquim, amigo de Bruna, resolveu mudar as regras do jogo. Em vez de somar os valores, ele passou a multiplicá-los para o jogo terminar mais rápido. A afirmação de Joaquim é verdadeira? Por quê? *Espera-se que os alunos percebam que, se multiplicarem os valores, nunca conseguirão obter o valor -1.000 , pois, como o valor inicial é 1.000, só conseguiriam vencer o jogo se em uma das circunferências tivesse o valor -1 . Desse modo, eles chegariam ao número -1.000 .*

1 Os números racionais no dia a dia

Observe o infográfico a seguir.

Se considerar oportuno, incentive a troca de ideias e informações sobre as campanhas do uso consciente da água entre todos os alunos da classe. Fale sobre a importância de evitar desperdícios.



Nesse infográfico, aparecem diversos números, como: 4.700; 26,9%; 66,7%; 314,5 e 33.000. Você já aprendeu que esses números são exemplos de **números racionais**, pois também podem ser escritos na forma de fração.

Neste capítulo, vamos estudar um pouco mais os números racionais e ver que os números -4.700 ; $-314,5$ e -33.000 também são exemplos de números racionais.

2 Conhecendo um pouco mais os números racionais

Na divisão de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, o resultado pode ser um número inteiro ou um número não inteiro.

Veja os exemplos a seguir.

a) $(-30) : (+5) = -6$, pois $(-6) \cdot (+5) = -30$



Nesse caso, o quociente de $(-30) : (+5)$ é um número inteiro negativo, uma vez que estamos dividindo números de sinais contrários, e pode ser expresso por uma fração,

por exemplo: $\frac{-30}{+5} = -\frac{6}{1}$.

b) Vamos considerar a divisão $(-12) : (+5)$.

Observe que não existe nenhum número inteiro que multiplicado por $+5$ resulte -12 .

$(-12) : (+5) = \text{quociente}$



Assim, o quociente de $(-12) : (+5)$ é um número não inteiro que pode ser expresso por

uma fração, por exemplo, $-\frac{12}{5}$, por um número misto, $-2\frac{2}{5}$, ou, ainda, na forma deci-

mal: $-\frac{12}{5} = -\frac{24}{10} = -2,4$.

Todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, é um **número racional**.

Veja alguns exemplos de números racionais.

a) -5 b) $\frac{9}{2}$ c) $-0,75$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $3,2$ f) $-\frac{20}{5}$

Alguns desses números já estão representados por frações: $\frac{9}{2}$, $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{20}{5}$. Também podemos escrever os demais na forma de fração. Observe.

• $-5 = -\frac{10}{2}$ • $-0,75 = -\frac{75}{100}$ • $3,2 = \frac{32}{10}$

Além disso, todos esses números podem ser escritos na forma decimal. Alguns já estão nessa forma: $-0,75$ e $3,2$. Vamos transformar os outros.

No caso das frações, basta dividir o numerador pelo denominador. Com "dividir o numerador pelo denominador", queremos dizer que devemos aplicar o algoritmo das divisões euclidianas sucessivas entre os números inteiros que determinam a fração, assim como foi feito no livro do 6º ano.

• $-5 = -5,0$ • $\frac{9}{2} = 4,5$ • $-\frac{1}{3} = -0,333\dots$ • $-\frac{20}{5} = -4 = -4,0$

Os números $-5,0$; $4,5$; $-0,75$; $-0,333\dots$; $3,2$ e $-4,0$ estão escritos na forma decimal. Já os números -5 ; $4,5$; $-0,75$; $3,2$ e -4 podem ser representados por uma fração cujo denominador é uma potência de 10 $\left(-5 = -\frac{50}{10}; 4,5 = \frac{45}{10}; -0,75 = -\frac{75}{100}; 3,2 = \frac{32}{10} \text{ e } -4 = -\frac{400}{100}\right)$.

No caso do número $-0,333\dots$, que é uma **dízima periódica**, a forma de fração é $-\frac{1}{3}$.

OBSERVAÇÃO

- Já vimos que se indica uma dízima periódica colocando um traço sobre o período. Desse modo, o número $-0,333\dots$ pode ser indicado por $-0,\overline{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

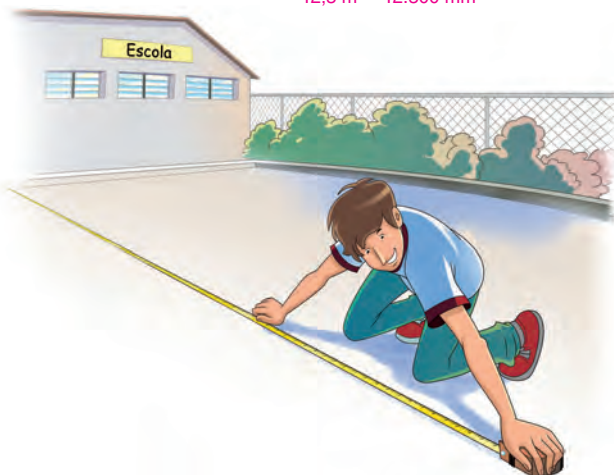
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. a) I: $-\frac{7}{4}$, II: $-\frac{5}{9}$ e III: $-\frac{12}{2}$
- 1** Considere os quocientes de:
- I. $(-7) : (+4)$; III. $(-12) : (+2)$.
 II. $5 : (-9)$; b) I: $-1,75$, II: $-0,555\dots$ e III: $-6,0$
- a) Escreva cada um desses quocientes na forma de fração.
 b) Qual é a forma decimal desses quocientes?
 c) Classifique cada quociente como número inteiro ou número não inteiro.
inteiro: III, não inteiro: I e II
- 2** Determine a forma decimal do número que representa o quociente de cada divisão. Desses números, quais não podem ser representados por frações decimais? $-1,\overline{6}$ e $-1,4\overline{6}$
- a) $11 : 4$ $2,75$ c) $(-9) : (-2)$ $4,5$
 b) $(-5) : 3$ $-1,\overline{6}$ d) $22 : (-15)$ $-1,4\overline{6}$
- 3** Associe os números abaixo às letras A, B, C ou D para mostrar em que local do quadro você os colocaria.

	Número racional inteiro	Número racional não inteiro
Forma de fração	A	B
Forma decimal	C	D

- a) $3,51$ **D** d) $4,111$ **D** g) $-0,5$ **D**
 b) $351,0$ **C** e) $4,111\dots$ **D** h) $-2,0$ **C**
 c) $-\frac{18}{2}$ **A** f) $\frac{4}{5}$ **B** i) $-\frac{412}{5}$ **B**

4. c) $2,3$; $-1,6$; $-8,0$; $4,0$; $2,555\dots$ e $0,222\dots$
- 4** Dados os números racionais $2,3$; $-\frac{3}{7}$; $-8,0$; $2,555\dots$; $4,0$; $-1,6$; $\frac{1}{6}$ e $0,222\dots$, copie:
- a) os números inteiros; $-8,0$ e $4,0$ b) $-\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{6}$
 b) os números racionais na forma de fração;
 c) os números racionais na forma decimal;
 d) as dízimas periódicas. $2,555\dots$ e $0,222\dots$
- 5** Escreva um exemplo de número: **respostas possíveis:**
- a) racional inteiro; -5
 b) racional natural; 10
 c) racional não inteiro; $0,65$
 d) natural não racional. **não existe**
- 6** João calculou o comprimento, em metro, do pátio da escola e o expressou da seguinte maneira: $12,3$ m. Para indicar essa medida com um número inteiro, João fez uma transformação de unidade de medida de comprimento. Como ele pode ter feito isso? $12,3 \text{ m} = 123 \text{ dm} = 1.230 \text{ cm}$ ou $12,3 \text{ m} = 12.300 \text{ mm}$



Pense mais um pouco...

Considere uma fração cujo numerador é múltiplo do denominador.

Essa fração representa um número racional inteiro ou um número racional não inteiro? Justifique sua resposta. *Um número racional inteiro, pois o numerador é divisível pelo denominador.*

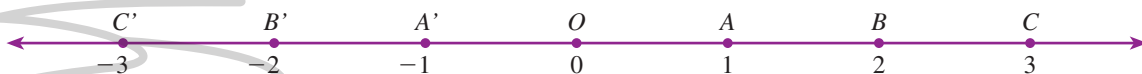


JOSE LUIS JUHAS

3 Representação dos números racionais na reta numérica

No capítulo anterior, vimos como representar os números inteiros na reta numérica. Da mesma forma, podemos também representar os números racionais.

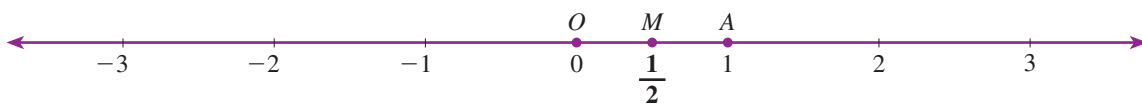
Já sabemos que os números positivos ficam à direita do zero, e os negativos, à esquerda. Além disso, a distância entre dois pontos que correspondem a números inteiros consecutivos é sempre a mesma (na reta abaixo, por exemplo, é de 2 cm).



NELSON MATSUDA

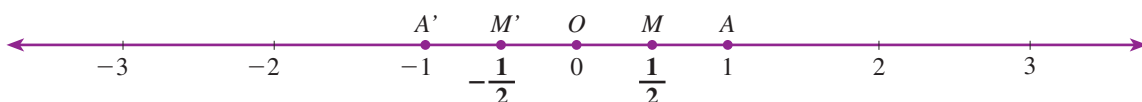
A seguir, vamos representar alguns números racionais na reta numérica.

Vamos marcar nessa reta o ponto que corresponde ao número $\frac{1}{2}$. Como esse número é positivo, o ponto correspondente a ele deve estar à direita da origem (ponto O , que corresponde ao número zero). Assim, devemos dividir o segmento \overline{OA} em duas partes iguais. O ponto M corresponde ao número $\frac{1}{2}$.



NELSON MATSUDA

Para representar o número $-\frac{1}{2}$ nessa mesma reta, procedemos de modo semelhante, levando em conta, no entanto, que $-\frac{1}{2}$ é negativo. Então, $-\frac{1}{2}$ deverá corresponder a um ponto da reta que fica à esquerda da origem. Assim, devemos dividir o segmento $\overline{OA'}$ em duas partes iguais. O ponto M' corresponde ao número $-\frac{1}{2}$.



NELSON MATSUDA

O número $\frac{1}{2}$ é a abscissa do ponto M , e o número $-\frac{1}{2}$, a abscissa do ponto M' .

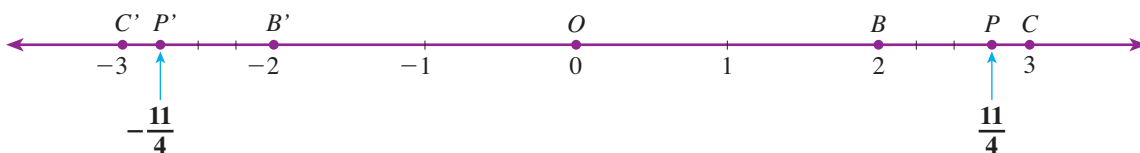
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os pontos M e M' são chamados de **pontos simétricos em relação a O** , pois estão à mesma distância de O , porém um está à direita, e o outro, à esquerda.

Dizemos que as abscissas $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ são opostas.

Agora, vamos marcar os pontos P e P' de abscissas $\frac{11}{4}$ e $-\frac{11}{4}$, respectivamente. Como $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$, então $\frac{11}{4}$ é um número que está entre 2 e 3. De modo semelhante, podemos concluir que $-\frac{11}{4}$ está entre -3 e -2 , pois: $-\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4} = -2 + \left(-\frac{3}{4}\right)$

Então, vamos dividir os segmentos \overline{BC} e $\overline{B'C'}$ em quatro partes iguais. Ao ponto P corresponde o número $\frac{11}{4}$, e ao ponto P' , o número $-\frac{11}{4}$.

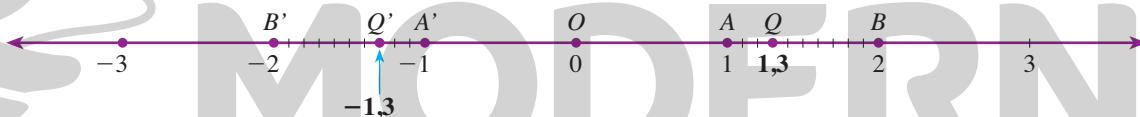


Os pontos P e P' são simétricos em relação a O .

Marquemos, ainda, os pontos de abscissas $1,3$ e $-1,3$, ou seja, $\frac{13}{10}$ e $-\frac{13}{10}$.

Observe que $1,3$ é maior que 1 e menor que 2, e $-1,3$ é menor que -1 e maior que -2 .

Então, vamos dividir os segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ em dez partes iguais para marcar os pontos em questão. Na reta, eles estão representados pelos pontos Q e Q' .



OBSERVAÇÕES

- ▶ Todo número racional pode ser associado a um ponto da reta numérica.
- ▶ Na reta numérica, dois pontos simétricos em relação à origem O serão chamados apenas de pontos simétricos para simplificar a notação.

PARA SABER MAIS +

Divisão de um segmento em partes iguais

Para dividir um segmento qualquer em determinado número de partes iguais, podemos dividir sua medida por esse número de partes e, com o auxílio da escala da régua, marcar os pontos de divisão.

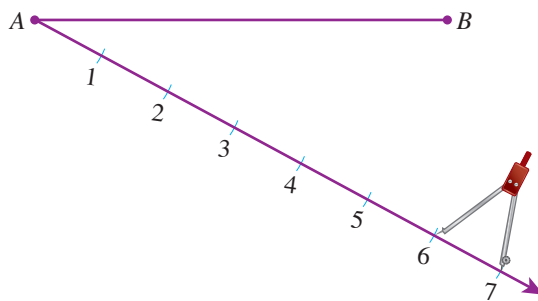
Também podemos dividir um segmento por meio de uma construção com régua e compasso. Essa construção geométrica é uma aplicação prática do Teorema de Tales, que será estudado no 9º ano.

Vamos dividir o segmento \overline{AB} abaixo em sete partes de mesma medida.

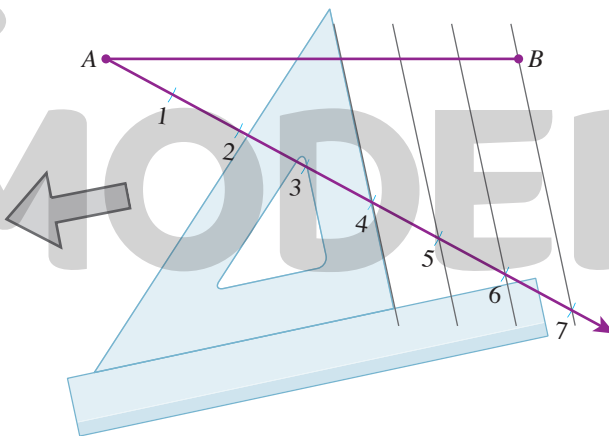


Acompanhe os passos.

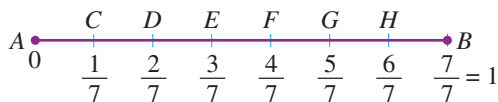
- Inicialmente, traçamos uma semirreta com origem A, conforme a figura abaixo. Nessa semirreta, a partir de A e com uma mesma abertura do compasso, marcamos sete segmentos consecutivos.



- Depois, traçamos a reta $\overleftrightarrow{B7}$ e as retas paralelas a ela, que passam pelos pontos 1 a 6. Essas paralelas podem ser traçadas fazendo o esquadro escorregar junto à régua. Veja a figura.



- Os pontos C, D, E, F, G e H dividem o segmento \overline{AB} em sete partes de mesma medida.



Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Trace um segmento qualquer e divida-o em seis partes iguais com o auxílio de régua; compasso e esquadro. *construção de figura*

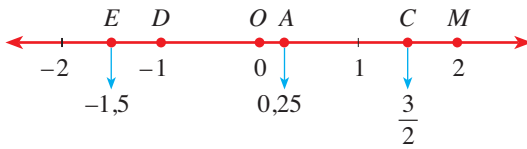
9. a) Não, porque qualquer número negativo fica à esquerda de qualquer número positivo. 9. b) Não, porque: $-1,5 = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2} \neq -\frac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9. c) Sim, porque estão à mesma distância do zero, um à esquerda, e outro à direita.

7 Observe a reta numérica abaixo.



Determine as abscissas dos pontos A , M , D , E e C . $0,25; 2; -1; -1,5; \frac{3}{2}$

8 Desenhe uma reta numérica e represente sobre ela os pontos: *construção de figura*

• A, B, C e D de abscissas $\frac{2}{5}; -\frac{7}{2}; \frac{5}{2}$ e $-\frac{5}{4}$, respectivamente;

• E, F, G , e H de abscissas $-2,5; 1,25; 3,5$ e $-0,4$, respectivamente.

Descubra quais são os pares de pontos simétricos. A e $H; E$ e $C; F$ e $D; B$ e G

9 Em uma reta numérica, foram assinalados os pontos A, B, C, D e E , que representam os números $-1,5; \frac{7}{5}; -\frac{1}{5}; +5,7$ e $-5,7$, nessa ordem. Assim, é possível concluir que:

a) A está à direita de B ? Por quê?

b) A e C coincidem? Por quê?

c) D e E são simétricos? Por quê?

d) B está à direita dos demais pontos? Por quê?

Não, porque $\frac{7}{5}$, que é igual a $1,4$, não é maior que $+5,7$.

4 Módulo de um número racional

Sabemos que, em uma reta numérica, é possível determinar a distância do ponto de abscissa zero (origem) a outro ponto qualquer da reta.

A distância de um ponto à origem é o **módulo** do número que corresponde a esse ponto.

Observe os exemplos a seguir.

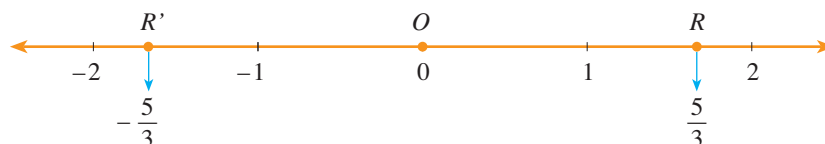


• O módulo de $-\frac{11}{4}$ (abscissa do ponto P') é $\frac{11}{4}$ (distância do ponto P' à origem). Então, como o módulo de $-\frac{11}{4}$ é indicado por $\left|-\frac{11}{4}\right|$, podemos escrever $\left|-\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}$.

• O módulo de $1,3$ (abscissa do ponto Q) é $1,3$ (distância do ponto Q à origem). Então, $|1,3| = 1,3$.

• O módulo de $-1,3$ (abscissa do ponto Q') é $1,3$ (distância do ponto Q' à origem). Então, $|-1,3| = 1,3$.

b) Se $\frac{5}{3}$ representa a distância de O a um ponto na reta numérica, então a abscissa desse ponto pode ser $-\frac{5}{3}$ ou $\frac{5}{3}$.



Números que têm o mesmo módulo, porém sinais diferentes, são **opostos** ou **simétricos**. Observe.

- O oposto de $\frac{1}{2}$ é $-\frac{1}{2}$.
- O oposto de $-0,4$ é $0,4$.
- O oposto de $-2\frac{1}{4}$ é $2\frac{1}{4}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

10 Leia, pense e responda em seu caderno.

- Qual é o módulo de $-\frac{3}{5}$? $\frac{3}{5}$
- Quanto vale $|-14,3|$? $14,3$
- Se $|-8|$ representa a distância da origem O a T na reta numérica, qual é a abscissa do ponto T ? -8 ou $+8$
- Se $|a| = \frac{2}{3}$, quais são os possíveis valores de a ? $-\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3}$
- Se $|x| = 1,5$, qual é a distância do ponto de abscissa x até a origem? $1,5$

11 Determine em seu caderno:

- o oposto de $\frac{7}{9}$; $-\frac{7}{9}$
- o oposto de $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$
- o oposto de $5,4238$; $-5,4238$
- o oposto do oposto de $-6,72$; $-6,72$
- o oposto de $|-1,555\dots|$; $-1,555\dots$
- o oposto do oposto de $-\frac{6}{5}$; $\frac{6}{5}$

5 Comparação de números racionais

Já vimos como comparar números inteiros em uma reta numérica. Dados dois números inteiros diferentes, o menor é aquele que, na reta numérica, está à esquerda do outro.

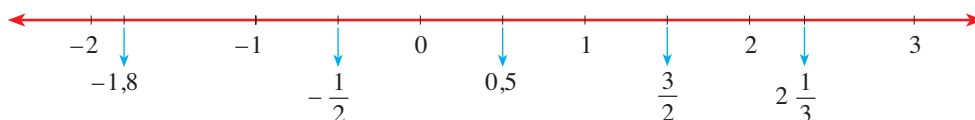


Observe alguns exemplos.

- | | | |
|-------------|--------------|-------------|
| a) $6 > 3$ | c) $-4 < -1$ | e) $0 > -8$ |
| b) $2 > -5$ | d) $-2 < 2$ | f) $9 > 0$ |

Agora, vamos aprender a comparar números racionais em uma reta numérica.

Dados dois números racionais diferentes, o menor é aquele que está à esquerda do outro na reta numérica.



Veja os exemplos.

- | | | | |
|--------------------------|------------------------|---------------------------------|---------------|
| a) $-1,8 < -\frac{1}{2}$ | b) $-\frac{1}{2} > -2$ | c) $\frac{3}{2} < 2\frac{1}{3}$ | d) $-1,8 < 0$ |
|--------------------------|------------------------|---------------------------------|---------------|

A seguir, veremos como comparar números racionais sem a reta numérica.

Comparando números racionais escritos na forma de fração

Éverton e Lucas adoram laranja.



Quem chupou mais laranjas?

Quando os denominadores são iguais, basta comparar os numeradores. Como exemplo, vamos comparar os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

Como $1 < 5$, temos: $\frac{1}{2} < \frac{5}{2}$.

Portanto, Lucas chupou mais laranjas do que Éverton.

Quando os denominadores são diferentes, reduzimos as frações ao mesmo denominador comum e, então, comparamos os numeradores, como no caso anterior.

Vamos, então, comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Reduzindo as frações ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ e } \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

Como $8 < 9$, então $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ e, portanto, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Do mesmo modo, comparamos números racionais negativos escritos na forma de fração. Veja os exemplos.

a) $-\frac{1}{3} > -\frac{5}{3}$, pois $-1 > -5$.

b) $-\frac{2}{3} < -\frac{3}{5}$, pois $-\frac{10}{15} < -\frac{9}{15}$.

Comparando números racionais escritos na forma decimal

Inicialmente, consideramos os sinais dos números dados: se eles forem diferentes, já sabemos que um número positivo é sempre maior que um número negativo; se forem iguais, comparamos a parte inteira. E se as partes inteiras forem iguais, comparamos a parte decimal.

Observe os exemplos.

a) $2,35 > -5,827$

O primeiro número (2,35) é positivo, e o segundo (-5,827) é negativo.

b) $2,35 < 2,6$

A parte inteira é igual, mas o segundo número tem 6 décimos, enquanto o primeiro tem 3 décimos; portanto, 3 décimos < 6 décimos.

c) $-2,35 > -2,6$

A parte inteira é igual, mas o primeiro número tem 3 décimos negativos, e o segundo tem 6 décimos negativos; portanto, 3 décimos negativos $>$ 6 décimos negativos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15. a) $|-0,6| > |-\frac{1}{5}|$; b) $|\frac{5}{6}| = |0,8\bar{3}|$; c) $|\frac{1}{2}| < |-\frac{5}{3}|$; d) $|\frac{5}{4}| < |-3,2|$; e) $|\frac{3}{8}| > |0|$; f) $|-0,6| > |-0,6|$

12 Qual é maior, qual é menor? Responda no caderno usando os sinais $>$ ou $<$.

a) $-\frac{5}{3}$ e $\frac{2}{9}$ $-\frac{5}{3} < \frac{2}{9}$ d) $-\frac{1}{8}$ e $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$ e) $-\frac{5}{6}$ e $-\frac{2}{5}$

c) $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{5}{6}$ $-\frac{1}{4} > -\frac{5}{6}$ f) $1\frac{1}{4}$ e $3\frac{1}{5}$ $1\frac{1}{4} < 3\frac{1}{5}$

13 Identifique o maior número racional em cada caso. Escreva no caderno.

a) $-3,2$ ou $-5,4$ $-3,2$

b) $-7,12$ ou $-7,10$ $-7,10$

c) $1,2$ ou $-10,6$ $1,2$

d) $-4,5213$ ou $-4,5204$ $-4,5204$

e) $-\frac{1}{2}$ ou $-0,3$ $-0,3$

14 Mamãe fez o bolo preferido da família para a sobremesa de domingo. Para servi-lo, repartiu em 24 pedaços iguais. Eu comi $\frac{1}{12}$ do bolo, minha irmã e papai comeram $\frac{1}{8}$ do bolo cada um, e mamãe comeu $\frac{1}{6}$ do bolo. Quem comeu mais bolo? **a mãe**



15 Em cada item, compare os números racionais usando os sinais $<$, $=$ ou $>$.

a) $|-0,6|$ e $|\frac{1}{5}|$ d) $|\frac{5}{4}|$ e $|-3,2|$

b) $|\frac{5}{6}|$ e $|0,8\bar{3}|$ e) $|\frac{3}{8}|$ e $|0|$

c) $|\frac{1}{2}|$ e $|\frac{5}{3}|$ f) $|-0,6|$ e $|-0,6|$

16 Escreva os números de cada item em ordem crescente.

a) $\frac{9}{4}$; $2,1$; $0,65$; $\frac{5}{3}$ $0,65$; $\frac{5}{3}$; $2,1$; $\frac{9}{4}$

b) $-\frac{11}{2}$; $\frac{1}{6}$; $-0,1222\dots$; $0,1$ $-\frac{11}{2}$; $-0,1222\dots$; $0,1$; $\frac{1}{6}$

c) $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{3}$; $|\frac{9}{4}|$; $|-2,34|$ $\frac{5}{8}$; $|\frac{9}{4}|$; $\frac{7}{3}$; $|-2,34|$

17 Nas férias, Marina e Carolina foram mergulhar em Fernando de Noronha (PE). Em determinado momento, Marina se encontrava a $-13,5$ metros em relação ao nível do mar, e Carolina, por sua vez, estava a $-11,6$ metros. **a) Carolina**

a) Qual delas estava mais próxima da superfície?
b) Represente na forma de fração a profundidade em que cada uma se encontra.



O arquipélago de Fernando de Noronha é constituído de 21 ilhas, rochedos e ilhotas, com um total aproximado de 26 km^2 , distante 545 km de Recife (PE). (Foto de 2014.)

17. b) resposta possível: $-\frac{135}{10}$ e $-\frac{116}{10}$

6 Adição e subtração de números racionais

Acompanhe a reportagem e o gráfico a seguir.

Emissões de CO₂ em 2013 batem recorde, segundo novo estudo global

Lançamento de gases contaminantes foi 2,3% maior que em 2012. EUA, Índia e China puxaram a alta; relatório foi divulgado neste domingo.

As indústrias do mundo lançaram um recorde de emissões de carbono para a atmosfera em 2013, principalmente corporações instaladas na China, Estados Unidos e Índia.

As informações, divulgadas neste domingo (21) em um relatório feito por cientistas de diversas partes do mundo, mostram que foram emitidas 36,1 bilhões de toneladas métricas de dióxido de carbono (CO₂) no ano passado [...].

As emissões de CO₂ são derivadas da queima de carvão, petróleo e gás.

[...]

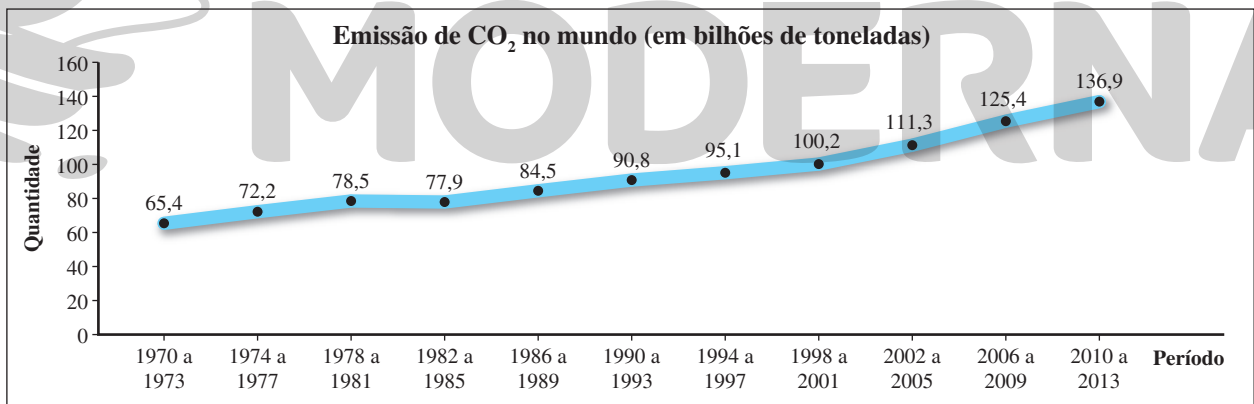
O dióxido de carbono é o principal gás responsável pela elevação da temperatura do planeta.



Imagem de julho de 2013 mostra trabalhador em carga de carvão transportada por trem na região de Shanxi, na China.

AP PHOTO/GLOW IMAGES

Disponível em: <g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2015.



Dados obtidos em: <g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2015.

Com as informações apresentadas no gráfico, podemos calcular, por exemplo, a emissão de CO₂, no mundo, no período de 2006 a 2013, em bilhões de toneladas:

$$\begin{array}{r} 125,4 \\ + 136,9 \\ \hline 262,3 \end{array}$$

Podemos calcular também a diferença na emissão de CO₂, no mundo, entre os períodos de 1970 a 1973 e de 2010 a 2013, em bilhões de toneladas:

$$\begin{array}{r} 136,9 \\ - 65,4 \\ \hline 71,5 \end{array}$$

ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184. do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Acompanhe mais alguns exemplos.

$$\text{a) } \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$$

Eliminamos os parênteses. Reduzimos as frações ao mesmo denominador. Efetuamos a operação.

$$\text{b) } (-2,84) + (-3,7) = -2,84 - 3,7 = -6,54$$

$$\text{c) } \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right) = (-0,5) - (-0,4) = -0,5 + 0,4 = -0,1$$

$$\text{d) } \left(-\frac{5}{6}\right) - (-0,3) = -\frac{5}{6} - \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = -\frac{25}{30} + \frac{9}{30} = -\frac{16}{30} = -\frac{8}{15}$$

$$\text{e) } -\frac{5}{12} - \left[-\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{9}\right)\right] =$$

$$= -\frac{5}{12} - \left[-\frac{3}{4} + \left(\frac{15}{18} - \frac{4}{18}\right)\right] =$$

Reduzimos ao mesmo denominador e resolvemos a expressão entre parênteses.

$$= -\frac{5}{12} - \left[-\frac{3}{4} + \frac{11}{18}\right] =$$

$$= -\frac{5}{12} - \left[-\frac{27}{36} + \frac{22}{36}\right] =$$

Reduzimos ao mesmo denominador e resolvemos a expressão entre colchetes.

$$= -\frac{5}{12} - \left[-\frac{5}{36}\right] =$$

$$= -\frac{5}{12} + \frac{5}{36} = -\frac{15}{36} + \frac{5}{36} = -\frac{10}{36} = -\frac{5}{18}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

OBSERVAÇÃO

- ▶ As propriedades da adição de números inteiros também são válidas para a adição de números racionais.

18 Calcule e dê o resultado na forma de fração.

a) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{10}$

b) $\left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{11}{12}$

c) $\frac{3}{4} - 0,25 = \frac{1}{2}$

d) $-\frac{7}{15} + 1 = \frac{8}{15}$

19 Escreva, no caderno, o resultado das operações na forma decimal.

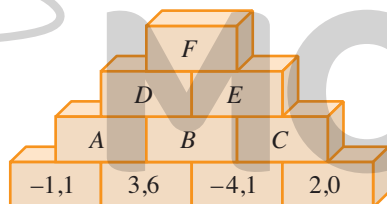
a) $-0,25 + (-0,75) = -1,0$

b) $112,4 - 38,16 = 74,24$

c) $-0,6 + \frac{15}{10} = 0,9$

d) $3\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2,75$

20 Na pilha, cada letra equivale à soma dos números das duas casas imediatamente abaixo. Determine o número que está no alto da pilha. $-0,6$



21 Um submarino estava a $-72,5$ m. Alguns minutos depois, estava a $-95,4$ m. O submarino desceu ou subiu? Quantos metros? $\text{desceu}; 22,9 \text{ m}$

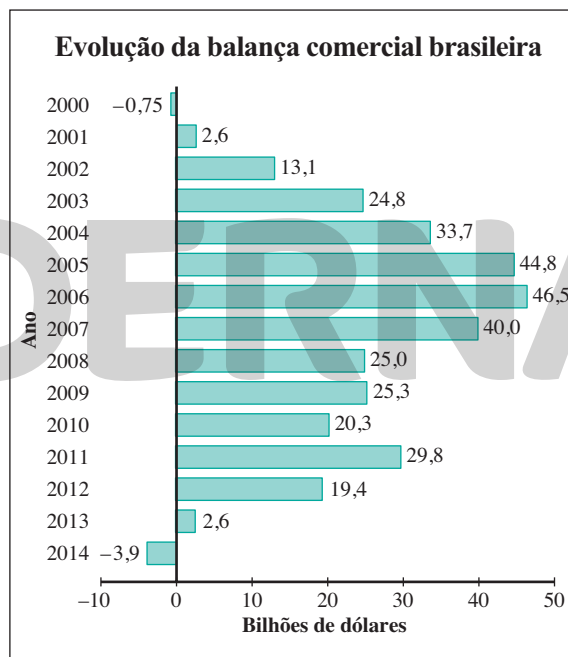


Turistas em passeio de submarino, Polinésia Francesa. (Foto de 2014.)

22 Pela manhã, quando o banco abriu, a conta de Regina apresentava um saldo de $-365,40$ reais. À tarde, ela movimentou a conta, e seu saldo passou a ser de $-65,40$ reais. Regina fez uma retirada ou um depósito? De quanto? $\text{depósito}; \text{de } 300 \text{ reais}$

23 Leia o texto a seguir.

Em Economia, o saldo da **balança comercial** é a diferença entre o valor apresentado pelas exportações de um país (produtos vendidos a outros países) e o valor apresentado pelas importações (produtos comprados de outros países). Dizemos que há **superávit** quando o país exporta mais do que importa. Quando ocorre o contrário, há **déficit**. Veja no gráfico abaixo a evolução da balança comercial brasileira no período de 2000 a 2014.




Fonte: <www.desenvolvimento.gov.br>. Acesso em: 26 fev. 2015.

Agora, responda às questões.

- Em qual desses anos o déficit brasileiro foi maior? Qual foi o índice? $2014; -3,9 \text{ bilhões de dólares}$
- Em que ano o superávit foi maior? Com qual índice? $2006; 46,5 \text{ bilhões de dólares}$
- Em 2009, o valor apresentado pelas importações foi de aproximadamente 128 bilhões de dólares. Determine o valor aproximado que foi apresentado pelas exportações nesse ano. $153,3 \text{ bilhões de dólares}$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

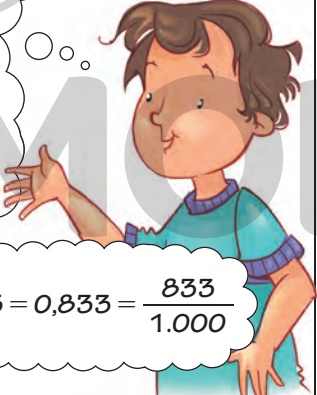
24 Qual é o número inteiro mais próximo do valor da expressão $-3,1 + (2,4 - 3,8) - (1,6 - 2)$? ⁻⁴

25  Manuela e Luciano resolveram a operação $\frac{1}{3} + 0,5$ de formas diferentes.

Reúna-se com um colega para analisar as duas resoluções e respondam à questão:
Manuela e Luciano encontraram o mesmo resultado? Se não, o que aconteceu? Justifiquem a resposta.



$\frac{1}{3} + 0,5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$



Como a representação decimal de $\frac{1}{3}$ é $0,333\dots$, vou considerar que $\frac{1}{3}$ é aproximadamente $0,333$ para fazer os cálculos. Assim, tenho:

$\frac{1}{3} + 0,5 = 0,333 + 0,5 = 0,833 = \frac{833}{1.000}$

26 Escreva, na forma decimal, o número correspondente ao valor da expressão:

$$-\frac{9}{2} + \left[-1 - \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\right)\right] \quad -5,125$$

27 Determine entre quais números inteiros consecutivos encontra-se o valor da expressão:

$$\frac{7}{3} - \left[2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] \quad \text{entre } -1 \text{ e } 0$$

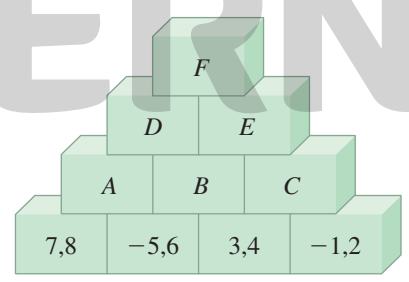
28 Jurandir efetuou a operação $\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right)$ na calculadora e encontrou o seguinte resultado:



Sabendo que o resultado obtido por Jurandir não está correto, determine:

- a) o resultado da operação; $-0,125$
- b) a expressão que corresponde ao cálculo feito pela calculadora. $\left(\frac{1}{8} - 1\right) : 4$
- Agora, responda e justifique: como você faria essa operação usando uma calculadora? *resposta pessoal*

29 Na pilha, cada letra equivale à diferença entre duas casas imediatamente abaixo, de modo que o número do alto da pilha seja um número quadrado perfeito. Determine esse número. ³⁶



25. Não; espera-se que os alunos percebam que, ao considerar $0,333$ como o valor aproximado de $\frac{1}{3}$, Luciano encontrou um valor aproximado para a operação e Manuela encontrou o valor exato.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Considere estes cartões:



Usando sempre os três cartões, monte todos os números racionais possíveis, colocando a vírgula entre dois desses algarismos.

Qual é a diferença entre o menor e o maior desses números? $-51,75$



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FABIO EUGÊNIO

NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

JOSÉ LUIS JUHAS

7 Multiplicação de números racionais

Do mesmo modo que necessitamos adicionar ou subtrair números racionais para resolver problemas, também precisamos multiplicá-los.

Acompanhe a situação a seguir.

Paulo contratou serviços de jardinagem para fazer um canteiro em um terreno com área de 900 m^2 . O jardineiro construiu um canteiro que ocupou 20% da metade desse terreno.

Como a empresa de jardinagem cobrou R\$ 68,50 por metro quadrado de canteiro construído, quanto Paulo gastou?

Para descobrir a quantia, observe a expressão abaixo.



← área do canteiro em metro quadrado

$$20\% \cdot \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 68,50$$

→ despesa com a construção do canteiro

Agora, vamos calcular o valor dessa expressão.

$$20\% \cdot \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 68,50 =$$

Escrevemos 20% na forma de fração.

$$= \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 68,50 =$$

Efetuamos as multiplicações dos três primeiros fatores.

$$= 90 \cdot 68,50 =$$

Efetuamos a multiplicação.

$$= 6.165,00$$

Portanto, Paulo gastou R\$ 6.165,00.

Acompanhe outros exemplos.

a) $(-0,3) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$

Lembrando que $-0,3 = -\frac{3}{10}$, temos:

$$(-0,3) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

b) $-\frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{-9+14}{12} = \frac{5}{12}$

OBSERVAÇÃO

- ▶ As propriedades da multiplicação de números inteiros também são válidas para a multiplicação de números racionais.

30 Registre os produtos de cada multiplicação abaixo em seu caderno.

a) $(-3) \cdot \left(+\frac{14}{5}\right) = -\frac{42}{5}$

b) $5,4 \cdot (-20) = -108$

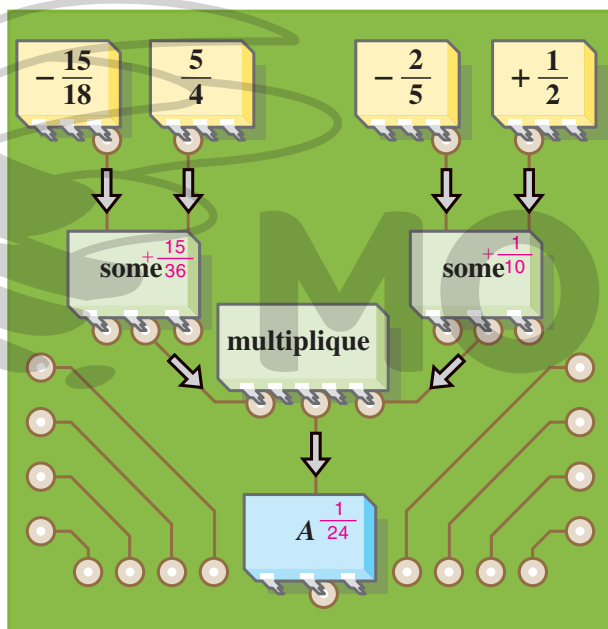
c) $(-0,2) \cdot (-0,01) = 0,002$

d) $0,5 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) = -\frac{4}{7}$

e) $(-2,3) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{23}{4}$

31 Sabendo que $A = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ e $B = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, calcule $A \cdot B$. $-\frac{5}{72}$

32 Determine o valor de A de acordo com o esquema abaixo.



33 Calcule o valor das expressões.

a) $(0,5) \cdot (-1,4 + 2,1) = 0,35$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{7}{32}$

c) $\left(\frac{9}{4} + \frac{7}{2}\right) + \left[\frac{3}{16} \cdot (-10) - \frac{7}{2}\right] = \frac{3}{8}$

34 O salário de Beatriz é calculado de acordo com as horas trabalhadas. Em maio, ela trabalhou 176 horas e 24 minutos. Qual deve ser seu salário nesse mês, considerando que ela recebe R\$ 13,55 por hora? **R\$ 2.390,22**

35 Leia o problema a seguir.

Dos 540 reais que Maria havia economizado, ela retirou $\frac{2}{3}$ para comprar um par de brincos.

Com quantos reais ela ficou?

- a) Escreva uma expressão numérica que determine a solução desse problema. $540 - \frac{2}{3} \cdot 540$
 b) Resolva a expressão, obtendo a resposta do problema. **180 reais**



FABIO EUGÊNIO

36 Elabore um problema cuja solução possa ser representada pela expressão:

$$120,30 - 10\% \cdot 120,30$$

Em seguida, proponha a um colega que resolva o problema que você elaborou. **resposta pessoal**

37 Marilu está viajando com seu carro popular de motor bicomcombustível. Ao parar no primeiro posto para abastecer seu veículo, ela ficou em dúvida se abastecia com gasolina ou etanol. O preço do litro da gasolina nesse posto era de R\$ 2,769, e o do litro do etanol, R\$ 2,229.

- a) Sabendo que o carro de Marilu percorre 12,5 km com 1 litro de gasolina e 10 km com 1 litro de etanol, com qual combustível ela economizará mais abastecendo nesse posto? Justifique sua resposta.
 b) Em um segundo posto de combustível, o preço do litro da gasolina era de R\$ 2,725, e o do litro do etanol, R\$ 2,099. Se Marilu gastou R\$ 109,00 para abastecer seu carro com 40 litros de combustível, ela fez a opção pelo combustível mais econômico? Justifique sua resposta.

Não, pois ela devia ter abastecido com etanol.

37. a) Gasolina. Espera-se que os alunos percebam que, se Marilu percorrer 100 km com gasolina, ela usará 8 litros e gastará R\$ 22,152. Se percorrer os mesmos 100 km com etanol, ela usará 10 litros e gastará R\$ 22,29.

Pense mais um pouco...



Descubra como fazer o cálculo de $144,26 \times 3,7$ em uma calculadora na qual as teclas 4, 6 e \cdot estão quebradas.

resposta possível:

7 2 1 3 \times 2 \div 1 0 0 \times 3 7 \div 1 0



VOVANSHUTTERSTOCK

8 Divisão de números racionais

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Pedro é engenheiro. Ele precisa construir, em um sobrado, uma escada cuja altura é 284,8 cm. Seguindo as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), a medida do espelho, isto é, a altura de cada degrau, deve ficar entre 17,5 cm e 18,5 cm.

Pedro quer saber quantos degraus deverá ter essa escada, de modo que ela seja suave, isto é, com espelho de 17,5 cm. Isso será possível? Para obter a quantidade de degraus, Pedro precisa dividir a altura da escada pela medida do espelho:

$$284,8 : 17,5$$

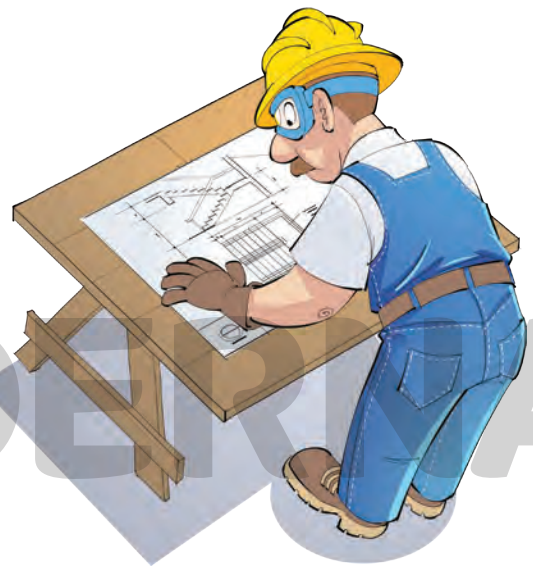
Note que o dividendo e o divisor têm a mesma quantidade de casas após a vírgula; então, o quociente é igual ao da divisão:

$$\begin{array}{r} \overline{2848} \quad | \quad 175 \\ 1098 \quad 16,2 \\ \hline 480 \\ 130 \end{array}$$

A escada não pode ter 16,2 degraus. Pedro deve, então, fazê-la com 16 degraus. A altura de cada degrau será dada por $284,8 : 16$ ou $2.848 : 160$.

$$\begin{array}{r} \overline{2848} \quad | \quad 160 \\ 1248 \quad 17,8 \\ \hline 1280 \\ 00 \end{array}$$

Cada degrau terá um espelho de 17,8 cm.



CLAUDIO CHIYO

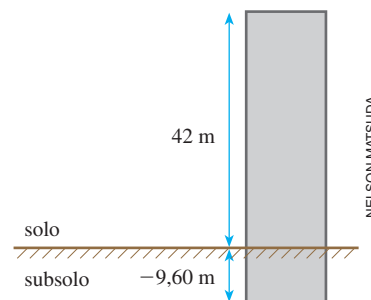
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para efetuar a operação de divisão de números racionais, devemos lembrar que:

- na divisão de números na forma de fração, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda;
- na divisão de números na forma decimal, igualamos as casas decimais e dividimos como se os números fossem inteiros;
- o quociente de números de mesmo sinal é positivo, e o quociente de números de sinais contrários, negativo.

Situação 2

Um edifício foi projetado de tal modo que alguns andares ficam no subsolo. A altura do edifício, acima do solo, é de 42 m, e a profundidade, abaixo do solo, é de $-9,60$ m. A “altura” de cada andar do subsolo pode ser representada por $-3,20$ m, e a de cada andar acima do solo, por $+3,50$ m. Quantos andares tem esse edifício?



- número de andares no subsolo $\rightarrow (-9,60) : (-3,20) = 3$
- número de andares acima do solo $\rightarrow (+42) : (+3,50) = 12$
- total de andares $\rightarrow 3 + 12 = 15$

Portanto, esse edifício tem 15 andares.

Veja mais exemplos nos quais é preciso efetuar a divisão entre números racionais.

a) Observe como efetuamos a divisão abaixo.

$$\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

b) Vamos calcular o quociente $(-19,24) : (3,7)$.

Como são números de sinais diferentes, o quociente será negativo. Então, basta efetuar $19,24 : 3,7$ cujo quociente é o mesmo que o de $1.924 : 370$.

Assim:

$$\begin{array}{r} 1924 \quad | \quad 370 \\ 0740 \quad 5,2 \\ \hline 000 \end{array}$$

Portanto, $(-19,24) : (3,7) = -5,2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

38 Registre o cálculo das divisões abaixo e seus respectivos quocientes.

a) $\left(\frac{3}{5}\right) : \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$ b) $(-65,72) : (-12,4) = 5,3$ c) $\left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{10}{3}$ d) $0,3 : (-0,2) = -1,5$

39 Voltando ao problema de Pedro, o engenheiro, segundo as normas da ABNT, a escada poderia ter 15 graus? E 17 graus? Justifique. Não, pois $284,8 : 15 \approx 19,0$ e $284,8 : 17 \approx 16,8$, e esses números não estão entre 17,5 cm e 18,5 cm.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

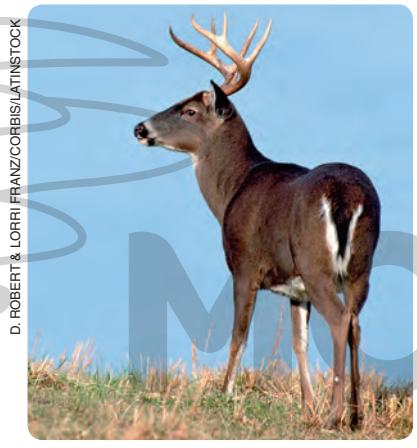
40 Bruna realizou algumas operações com a calculadora. Veja o que ela fez.



um número A	o número A
$\times 2 \cdot 5 =$	9,5
$\div 0 \cdot 1 2 5 =$	um número B
$- 8 0 =$	um número C

Descubra quais são os números A, B e C. Depois, pegue uma calculadora para confirmar sua resposta e refaça os passos de Bruna.
 $A = 3,8; B = 76$ e $C = -4$

41 O cervo-do-rabo-branco, animal que habita a região de Minnesota, nos Estados Unidos, chega a saltar uma distância de 9 metros, o que corresponde a aproximadamente 4,5 vezes seu tamanho.



D. ROBERT & LORRI FRANZ/CORBIS/LATINSTOCK

- Qual é o comprimento aproximado do cervo-de-rabo-branco? **2 m**
- Se um adulto pudesse saltar uma distância de 7,6 m, correspondente a 4,5 vezes sua altura, qual seria a altura desse adulto?
aproximadamente 1,69 m

42 Célia quer montar um novo prato de salada para acrescentar no cardápio de seu restaurante. Esse novo prato terá alface, chicória, tomate-cereja, queijo esférico e queijo branco.

Para saber o preço que vai cobrar, Célia tem de descobrir o custo de cada prato de salada. No mercado, ela encontrou os seguintes preços para os ingredientes:

ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIYO

Célia sabe que esses ingredientes são usados assim:

- 2 pés de alface fazem 5 pratos de salada;
- 1 pé de chicória faz 4 pratos de salada;
- 1 bandeja de tomate-cereja faz 3 pratos de salada;
- 500 g de queijo branco fazem 6 pratos de salada;
- 1 kg de queijo esférico faz 11 pratos de salada.

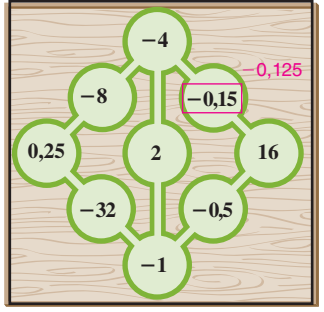
- Qual será o valor correspondente a cada ingrediente para preparar um prato de salada?
alface: R\$ 0,50; chicória: R\$ 0,39; tomate-cereja: R\$ 1,42; queijo esférico: R\$ 4,05; queijo branco: R\$ 0,87
- Qual será o custo de cada prato de salada?
R\$ 7,23

Reprodução proibida. Art. 184 de Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Na figura ao lado, exceto para uma linha, o produto entre os números de cada linha resulta no mesmo valor. Descubra qual é a linha em que o produto é diferente. Mude um dos números dessa linha para que o produto deles seja o mesmo dos números das outras linhas.



NELSON MATSUDA

9 Potenciação de números racionais

Você já estudou a potenciação de números inteiros com expoentes naturais, assim como a potenciação de números racionais positivos com expoentes naturais.

Considerando o que aprendeu, vamos calcular agora potências que tenham como base um número racional qualquer (positivo, negativo ou nulo) e como expoente um número natural.

Toda potência com expoente zero e base diferente de zero é igual a 1.

Exemplos:

$$\text{a) } \left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1 \quad \text{b) } \left(-\frac{3}{8}\right)^0 = 1 \quad \text{c) } (0,2)^0 = 1 \quad \text{d) } (-0,222\dots)^0 = 1$$

Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

Exemplos:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{7}\right)^1 = \frac{3}{7} \quad \text{b) } \left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4} \quad \text{c) } (0,5)^1 = 0,5 \quad \text{d) } 0^1 = 0$$

Toda potência com expoente natural maior que 1 é igual a um produto em que o número de fatores é igual ao expoente da potência e todos os fatores são iguais à base.

Exemplos:

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{81}$$

$$\text{c) } (-0,2)^3 = (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) = -0,008$$

Propriedades da potenciação

As propriedades da potenciação estudadas para os números inteiros também são válidas para os números racionais. Veja.

$$\text{a) } \left(-\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \left(-\frac{3}{8}\right)^{3+2} = \left(-\frac{3}{8}\right)^5$$

Para determinar o produto de potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\text{b) } \left(\frac{5}{6}\right)^6 \div \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{6-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Para determinar o quociente de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\text{c) } [(-0,3)^2]^5 = (-0,3)^{2 \cdot 5} = (-0,3)^{10}$$

Para determinar a potência de uma potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

43 Calcule as potências.

- a) $\left(\frac{2}{7}\right)^0$ 1 e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ $\frac{9}{25}$
 b) $\left(\frac{2}{7}\right)^1$ $\frac{2}{7}$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $-\frac{27}{125}$
 c) $(0,3)^2$ 0,09 g) $(-0,4)^3$ -0,064
 d) $(-2,1)^2$ 4,41 h) $(3,2)^2$ 10,24

44 Reduza a uma só potência.

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$ a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ e) $(2,1)^7 : (2,1)^6$ 2,1
 $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ f) $(-3,4)^4 : (-3,4)$ $(-3,4)^3$
 $(0,5)^4$ c) $(0,5)^2 \cdot (0,5) \cdot (0,5)$ g) $[(0,4)^2]^3$ $(0,4)^6$
 $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 : \left(\frac{1}{5}\right)^2$ h) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]^2$ $\left(\frac{5}{7}\right)^4$

45 Descubra o valor de x em cada sentença.

- a) $(-0,2)^x \cdot (-0,2)^5 = (-0,2)^{12}$ 7
 b) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 : \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}$ 5
 c) $[(-4)^x]^4 = (-4)^8$ 2
 d) $(x)^5 \cdot (x)^2 = (-3)^7$ -3

46 Usando uma calculadora simples, podemos calcular a potência 2^8 apertando a sequência de teclas:



Agora, com o auxílio de uma calculadora, calcule cada potência abaixo.

- $-0,00032$ a) $(-0,2)^5$ c) $(0,9)^6$ 0,531441 e) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$ $\frac{2.187}{16.384}$
 b) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ $\frac{64}{15.625}$ d) $(0,15)^3$ 0,00338 f) $(0,86)^3$ 0,63606

NELSON MATSUDA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

► Potência com expoente inteiro negativo

Aprendemos a realizar operações com potências que têm por base um número racional e por expoente um número natural. Agora, vamos interpretar o significado de potências que tenham por base um número racional e por expoente um número inteiro negativo.

Considere o quociente $5^2 : 5^5$. Pela propriedade do quociente de potências de mesma base, temos:

$$5^2 : 5^5 = 5^{2-5} = 5^{-3}$$

Escrevendo o quociente na forma de fração, temos:

$$5^2 : 5^5 = \frac{5^2}{5^5} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{5^3} = \frac{1^3}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

Logo, $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

Note ainda que:

$$\left. \begin{aligned} 5^{-3} &= 5^{3 \cdot (-1)} = (5^3)^{-1} \\ 5^{-3} &= \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5^3} \end{aligned} \right\} (5^3)^{-1} = \frac{1}{5^3}$$

Isso significa que $(5^3)^{-1}$ pode ser interpretado como o inverso de 5^3 ou, ainda, que 5^{-3} é o inverso de 5^3 .

A potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

Veja alguns exemplos.

a) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ou $3^{-2} = \text{inverso de } 3^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \text{inverso de } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

c) $(-5)^{-1} = \left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5}$ ou $(-5)^{-1} = \text{inverso de } -5 = -\frac{1}{5}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{1}\right)^1 = 7$ ou $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = \text{inverso de } \frac{1}{7} = 7$

e) $(0,25)^{-2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 4^2 = 16$

OBSERVAÇÃO

- ▶ Todas as propriedades da potenciação já estudadas também são válidas para potências com expoente inteiro negativo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

47 Calcule as potências.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$

d) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3} = -\frac{64}{125}$

e) $(-6)^{-2} = \frac{1}{36}$

c) $10^{-3} = \frac{1}{1.000}$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 81$

48 Escreva na forma de potência de base 10.

a) 100 10^2

d) 0,1 10^{-1}

b) 1.000 10^3

e) 0,01 10^{-2}

c) 10.000 10^4

f) 0,001 10^{-3}

49 Reduza a uma só potência.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1} : \left(-\frac{5}{4}\right)^{-6} \left(-\frac{5}{4}\right)^5$

c) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-3} \left(-\frac{3}{2}\right)^6$

d) $[(-2,3)^0]^{-3} (-2,3)^0$

50 Sabendo que $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ e $b = -\frac{5}{2}$, calcule o que se pede.

a) $a - b = 4$

b) $a : b = -\frac{3}{5}$

c) $a \cdot b^2 = \frac{75}{8}$

d) $(a + b)^2 = 1$

51 Sendo $x = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$ e $y = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1}$, calcule $x \cdot y = \frac{1}{3}$

52 Considerando $m = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)^{-3}$ e $n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2$, encontre o valor de $m : n = \frac{10}{3}$

53 Com o auxílio de uma calculadora, calcule o valor das potências a seguir.



a) $2^{-8} = 0,00390625$

c) $0,4^{-3} = 15,625$

b) $4^{-5} = 0,0009765625$

d) $0,2^{-6} = 15,625$

- O que acontece com os números maiores que zero e menores que 1 quando são elevados a um expoente negativo? E o que acontece com os números maiores que 1? Ficam maiores que 1; ficam menores que 1 e maiores que zero.

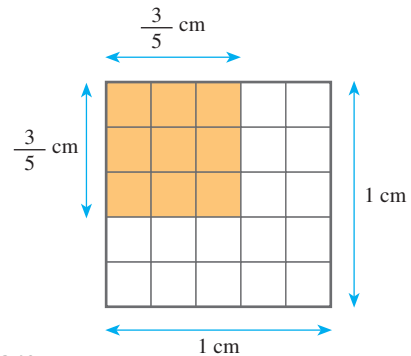
10 Raiz quadrada de números racionais

Acompanhe algumas situações nas quais é preciso calcular a raiz quadrada de números racionais.

Situação 1

Observe o quadrado alaranjado na figura ao lado. Considerando a área do quadrado maior com 1 cm^2 e o comprimento de seu lado com 1 cm , podemos dizer que:

- a área de cada quadradinho é $\frac{1}{25} \text{ cm}^2$;
- a área do quadrado alaranjado é $\frac{9}{25} \text{ cm}^2$;
- o comprimento do lado do quadrado alaranjado é $\frac{3}{5} \text{ cm}$.



NELSON MATSUUDA

Veja que a área do quadrado alaranjado pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \text{ ou seja, } \frac{9}{25} \text{ cm}^2$$

Nesse caso, o número $\frac{3}{5}$ é chamado de **raiz quadrada** de $\frac{9}{25}$, que indicamos por $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

(lemos "a raiz quadrada de $\frac{9}{25}$ é $\frac{3}{5}$ ").

O número $\frac{9}{25}$ é um número racional quadrado perfeito.

Situação 2

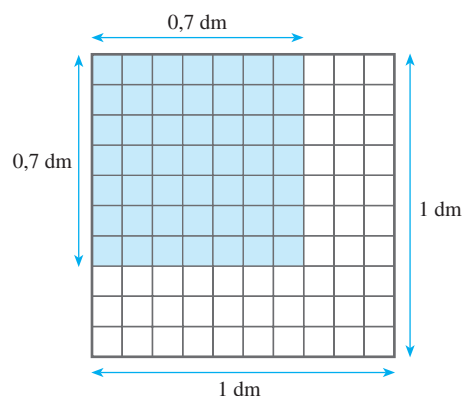
A área do quadrado azul da figura ao lado pode ser obtida do seguinte modo:

$$0,7 \cdot 0,7 = 0,49, \text{ ou seja, } 0,49 \text{ dm}^2$$

Assim:

$$\sqrt{0,49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Dizemos que o número $0,49$ é um número racional quadrado perfeito.



NELSON MATSUUDA

A raiz quadrada de um número racional quadrado perfeito é um número racional positivo ou nulo cujo quadrado é o número dado.

Veja outros exemplos.

a) $\sqrt{\frac{81}{256}} = \frac{9}{16}$

b) $\sqrt{\frac{4}{225}} = \frac{2}{15}$

c) $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = 0,1$

OBSERVAÇÕES

- ▶ Quando queremos considerar o oposto de uma raiz quadrada, fazemos a indicação colocando o sinal de menos à esquerda da raiz. Por exemplo:

a) $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ indica o oposto de $\sqrt{\frac{9}{25}}$. b) $-\sqrt{0,49}$ indica o oposto de $\sqrt{0,49}$.

- ▶ Todo número racional, quando elevado ao quadrado, resulta no número zero ou em um número racional positivo. Logo, não existe um número racional que seja a raiz quadrada de um número racional negativo.

Por exemplo, a raiz quadrada do número $-\frac{100}{9}$ não é um número racional, pois não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em $-\frac{100}{9}$.

- ▶ A raiz quadrada de um número racional positivo será um número racional somente se esse número for um quadrado perfeito.

Por exemplo, a raiz quadrada do número $\frac{2}{3}$ não é racional, pois não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em $\frac{2}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

54 Calcule:

a) $\sqrt{0,04}$ *0,2*

c) $\sqrt{0,81}$ *0,9*

e) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ *$\frac{5}{3}$*

b) $\sqrt{\frac{36}{49}}$ *$\frac{6}{7}$*

d) $-\sqrt{\frac{64}{100}}$ *$-\frac{4}{5}$*

f) $-\sqrt{\frac{49}{4}}$ *$-\frac{7}{2}$*

55 Identifique os números cuja raiz quadrada é um número racional. *alternativas b e f*

a) -25

c) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{8}{10}$

b) $\frac{1}{16}$

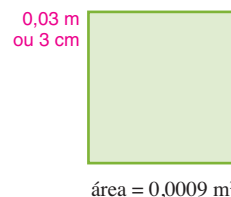
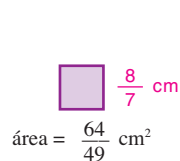
d) $-\frac{1}{9}$

f) $\frac{25}{9}$

56 Sabendo que $\sqrt{123.904} = 352$, calcule mentalmente:

a) $-\sqrt{1.239,04}$ *$-35,2$* b) $\sqrt{12,3904}$ *$3,52$*

57 Descubra a medida do lado de cada região quadrada representada a seguir, considerando a área indicada de cada uma delas.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

- Sendo $x^2 = 400$, responda. *-20 e 20*
 - Quais são os valores de x que tornam essa sentença verdadeira?
 - Qual é o valor que x pode assumir se ele representa, em metro, o comprimento do lado de um terreno quadrado? *20*
- Sabendo que $(4,8)^2 = 23,04$, responda.
 - Quais são os valores de x que tornam verdadeira a igualdade $x^2 = 23,04$? *$-4,8$ e $4,8$*
 - Das respostas do item a, qual é o valor que x pode assumir se $23,04$ representa a área de um quadrado? *$4,8$*



FABIO EUGÊNIO

11 Expressões numéricas com números racionais

Já vimos que muitas vezes precisamos calcular o valor de expressões numéricas para resolver problemas. Aprendemos também que:

- Quando a expressão tem sinais de associação, eles devem ser eliminados na seguinte ordem: primeiro calculam-se as expressões entre parênteses, depois, as dos colchetes, e, finalmente, as das chaves.
- As operações devem ser efetuadas na seguinte ordem:
 - a) potenciações e radiciações, na ordem em que aparecem;
 - b) multiplicações e divisões, na ordem em que aparecem;
 - c) adição e subtração, na ordem em que aparecem.

A seguir, vamos calcular o valor de algumas expressões numéricas com números racionais.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & (-2)^{-3} - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \right] = \\
 & = \left(-\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] = \\
 & = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \\
 & = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{4}{6} + \frac{3}{6} \right] = \\
 & = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6} = \\
 & = -\frac{1}{8} - \frac{7}{24} = \\
 & = -\frac{3}{24} - \frac{7}{24} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Calculamos a potência com expoente negativo. Reduzimos ao mesmo denominador a expressão entre parênteses.

Calculamos a potência. Resolvemos a expressão entre parênteses.

Eliminamos os parênteses. Reduzimos ao mesmo denominador a expressão entre colchetes.

Resolvemos a expressão entre colchetes.

Efetuamos a multiplicação.

Reduzimos ao mesmo denominador. Efetuamos a subtração e simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & -\frac{3}{7} \cdot \sqrt{0,36} + \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{196}{81}} = \\
 & = -\frac{3}{7} \cdot \sqrt{\frac{36}{100}} + \frac{1}{2} : \frac{14}{9} = \\
 & = -\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{14} = \\
 & = -\frac{18}{70} + \frac{9}{28} = \\
 & = -\frac{36}{140} + \frac{45}{140} = \frac{9}{140}
 \end{aligned}$$

Expressamos 0,36 na forma de fração e calculamos a raiz quadrada de $\frac{196}{81}$.

Calculamos a raiz quadrada de $\frac{36}{100}$ e efetuamos a divisão.

Efetuamos as multiplicações.

Reduzimos ao mesmo denominador. Efetuamos a adição.

Buscando padrões

A Matemática, a Literatura, a Física e outros ramos do conhecimento vivem à procura de padrões, de regularidades. Vamos analisar isso com base em um **soneto** de Vinicius de Moraes.

Soneto de Fidelidade

Vinicius de Moraes

*De tudo, ao meu amor serei atento
Antes, e com tal zelo, e sempre, e tanto
Que mesmo em face do maior encanto
Dele se encante mais meu pensamento*

*Quero vivê-lo em cada vão momento
E em seu louvor hei de espalhar meu canto
E rir meu riso e derramar meu pranto
Ao seu pesar ou seu contentamento*

*E assim quando mais tarde me procure
Quem sabe a morte, angústia de quem vive
Quem sabe a solidão, fim de quem ama*

*Eu possa lhe dizer do amor (que tive):
Que não seja imortal, posto que é chama
Mas que seja infinito enquanto dure*



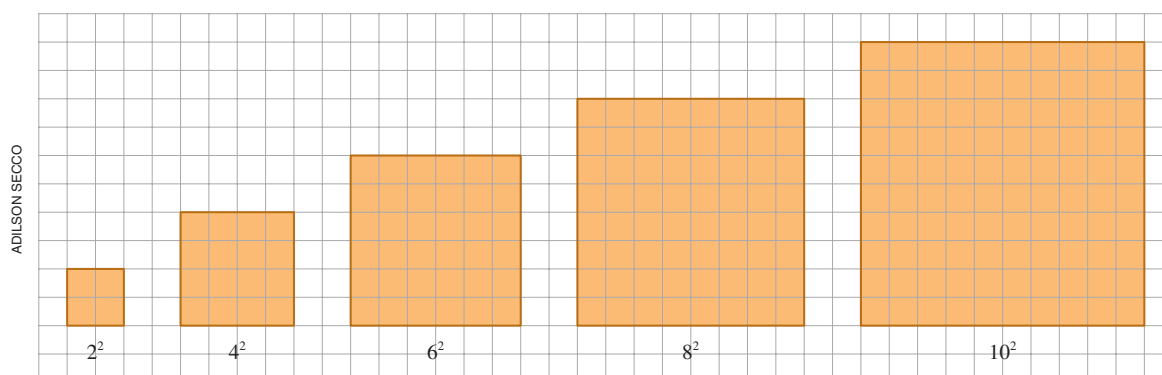
ARQUIVO CBDA PRESS

Marcus Vinicius de Moraes (1913-1980), diplomata, dramaturgo, jornalista, poeta e compositor brasileiro.

Os primeiros poetas gregos já buscavam métricas e rimas perfeitas, regulares. O **soneto**, por exemplo, deve apresentar a mesma estrutura, com 14 versos poéticos. Esses 14 versos são sempre divididos em duas estrofes de quatro versos, chamadas de quartetos, mais duas estrofes de três versos, chamadas de tercetos. Essa é a regularidade do gênero soneto.

Os matemáticos, por sua vez, também vivem pesquisando padrões de comportamento nas formas geométricas, nos números e em todos seus objetos de estudo.

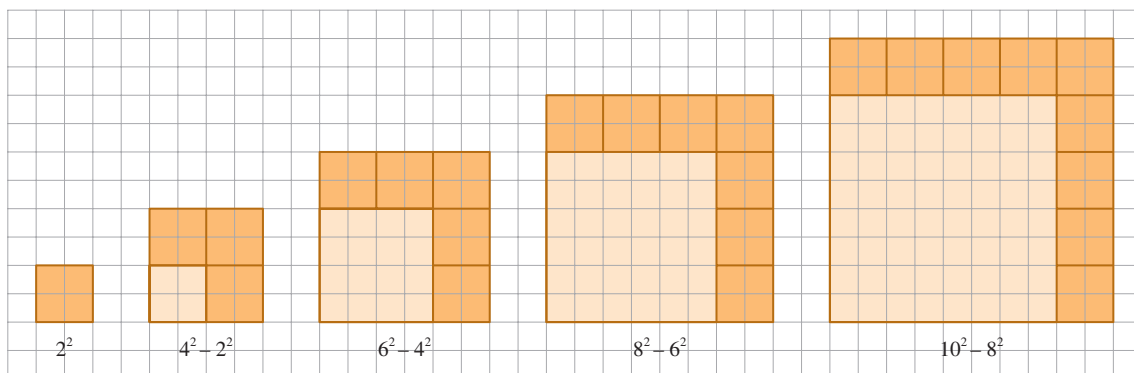
Vamos conferir isso a partir da sequência de quadrados de números pares abaixo.



Agora, vamos calcular a diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos.

- $4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$
- $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$
- $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$
- $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

Qual padrão ou regularidade é possível observar nessas diferenças? Veja.



ADILSON BECCO

A partir do segundo quadrado, podemos observar que:

- $4^2 - 2^2$ corresponde a 3 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $3 \cdot 4$;
- $6^2 - 4^2$ corresponde a 5 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $5 \cdot 4$;
- $8^2 - 6^2$ corresponde a 7 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $7 \cdot 4$;
- $10^2 - 8^2$ corresponde a 9 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $9 \cdot 4$.

Também podemos observar que todas essas diferenças são múltiplas de 4.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Considere a sequência de quadrados acima.
 - a) Mantendo a mesma regularidade, quantos quadradinhos possui a sexta figura da sequência? 44
 - b) Qual expressão representa a diferença $12^2 - 10^2$? E $20^2 - 18^2$? $11 \cdot 4$; $19 \cdot 4$
- 2 Com um colega, considerem os produtos no quadro abaixo.



$123456789 \cdot 9 = 1111111101$
$123456789 \cdot 18 = 2222222202$
$123456789 \cdot 27 = 3333333303$
$123456789 \cdot ? = ?$

Sem efetuar cálculos, completem o quadro, deduzindo os fatores e os produtos até sua nona linha. Em seguida, confirmem os resultados utilizando uma calculadora.

$123456789 \cdot 36 = 4444444404$; $123456789 \cdot 45 = 5555555505$; $123456789 \cdot 54 = 6666666606$;
 $123456789 \cdot 63 = 7777777707$; $123456789 \cdot 72 = 8888888808$; $123456789 \cdot 81 = 9999999909$

Construindo um gráfico de colunas duplas

Observe o balanço financeiro de duas papelarias no primeiro semestre de 2015.

Papelaria Material de Montão Balanço financeiro 1º semestre/2015 (em reais)		
Mês	Receita	Despesa
Janeiro	38.000	18.390
Fevereiro	48.500	17.100
Março	42.426	17.000
Abril	16.400	18.940
Maiο	16.540	17.500
Junho	24.547	16.500

Papelaria Hiperlápīs Balanço financeiro 1º semestre/2015 (em reais)		
Mês	Receita	Despesa
Janeiro	48.400	24.680
Fevereiro	47.640	25.310
Março	54.120	28.430
Abril	23.205	28.615
Maiο	28.764	29.400
Junho	16.314	25.800

Dados obtidos pela papelaria Material de Montão.

Dados obtidos pela papelaria Hiperlápīs.

Com base nos dados acima, é possível organizar a seguinte tabela.

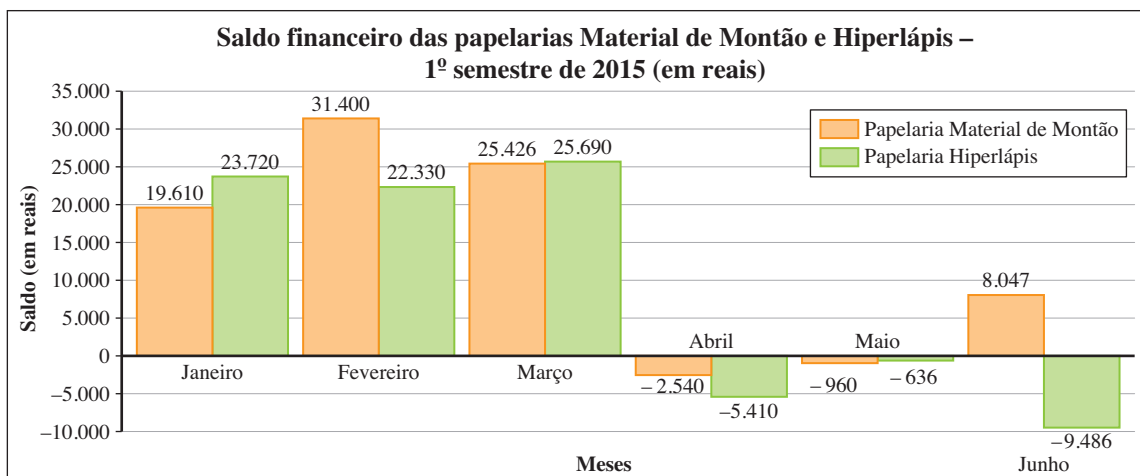
Saldo financeiro (em reais)		
Mês	Papelaria Material de Montão	Papelaria Hiperlápīs
Janeiro	19.610	23.720
Fevereiro	31.400	22.330
Março	25.426	25.690
Abril	-2.540	-5.410
Maiο	-960	-636
Junho	8.047	-9.486

Dados obtidos pelas papelarias Material de Montão e Hiperlápīs.

Também podemos apresentar as informações dessa tabela em um gráfico de colunas. Para construí-lo, usamos as seguintes escalas:

- no eixo vertical, no qual registramos o saldo em reais, cada intervalo de 0,5 cm representa 5.000 reais;
- no eixo horizontal, no qual marcamos os meses, a coluna de cada papelaria é representada por 1 cm de largura.

As colunas devem ter a mesma largura e a altura de cada coluna deve ser proporcional ao valor do saldo do mês.



Dados obtidos pelas papelarias Material de Montão e Hiperlápīs.

Observe que, para cada mês, temos duas informações: o saldo da papelaria Material de Montão e da papelaria Hiperlápiz. Esse tipo de representação gráfica é chamado de **gráfico de colunas duplas**.

As colunas de cor laranja correspondem ao saldo mensal da papelaria Material de Montão, e as colunas verdes, ao saldo mensal da papelaria Hiperlápiz. Essas duas informações aparecem destacadas em uma **legenda**, que permite ao leitor compará-las.

Interpretando o gráfico, sabemos que:

- nos meses de abril a junho, a papelaria Hiperlápiz teve seu pior desempenho, apresentando saldos negativos;
- nos meses de abril e maio, a papelaria Material de Montão apresentou saldos negativos;
- nos meses de janeiro a março, ambas apresentaram saldos positivos;
- no mês de junho, as duas papelarias apresentaram saldos bem diferentes: o saldo de uma foi positivo e o da outra, negativo.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com base no gráfico anterior, responda.

- a) Qual papelaria apresentou o menor saldo no período? De quanto foi esse saldo?
- b) Em que mês ocorreu a maior diferença entre os saldos das duas lojas em um mesmo mês? Qual é o valor dessa diferença? **junho; R\$ 17.533,00**

Hiperlápiz; saldo negativo de R\$ 9.486,00

2 A tabela a seguir mostra a variação percentual real dos preços correntes do Produto Interno Bruto (PIB) e, da mesma forma, a variação percentual real da renda *per capita* em um período de 10 anos, de 2004 a 2013.

Variação anual do PIB brasileiro (2004 a 2013)										
Ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Variação percentual do PIB	5,7	3,2	4,0	6,1	5,2	-0,3	7,5	2,7	1,0	2,5
Variação percentual da renda <i>per capita</i>	4,4	1,9	2,7	4,9	4,0	-1,4	6,5	1,7	0,1	1,6

Dados obtidos em: <www.bcb.gov.br>. Acesso em: 18 fev. 2015.

Construa um gráfico de colunas duplas para representar a situação da tabela.

Para isso, convém:

- usar no eixo vertical 1,0 cm para cada 1%;
- criar uma legenda estabelecendo uma cor para a variação percentual do PIB e outra para a variação da renda *per capita*. **construção de gráfico**

3 Reúna-se a um colega e façam uma pesquisa com 20 pessoas, sendo 10 homens e 10 mulheres, sobre a preferência de lazer entre cinema e esporte.

Organizem os dados obtidos em uma tabela, separando a preferência dos homens e a das mulheres. Em seguida, registrem esses dados em um gráfico de colunas duplas.

Comparem o gráfico que construíram com o de outros colegas. São iguais? Por quê?

respostas pessoais:

Apesar de a amostra ter considerado 20 pessoas para todas as duplas, os gráficos obtidos poderão ser bem diferentes, uma vez que as pessoas entrevistadas manifestarão preferências diversas.

1 Escreva a representação decimal dos números $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$. *0,75 e 1,333...*

2 Dos números a seguir, qual deles pode indicar quantos irmãos uma pessoa tem? Por quê? *Nenhum, pois não são números naturais.*

a) $-\frac{10}{2}$ d) $-\frac{5}{1}$

b) $\frac{7}{9}$ e) $-1\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{4}$

3 Entre os números racionais $3,5$; $-\frac{2}{3}$; $4,333\dots$; $\frac{12}{3}$; 3 e $-4,5$, escreva:

3. b) 3,5; $-\frac{2}{3}$, 4,333... e -4,5

a) os números racionais inteiros; $\frac{12}{3}$ e 3

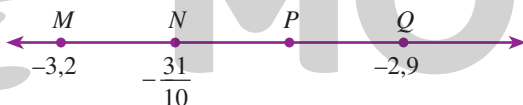
b) os números racionais não inteiros;

c) os números que estão na forma decimal;

d) as dízimas periódicas. *4,333...*

3. c) 3,5; 4,333... e -4,5

4 Observe a reta numérica abaixo.



Determine:

a) a abscissa do ponto M; $-3,2$

b) a abscissa do ponto N; $-\frac{31}{10}$

c) a abscissa do ponto Q; $-2,9$

d) a abscissa do ponto P que divide o segmento \overline{NQ} em duas partes iguais. $-3,0$

5 Responda.

a) Qual é o módulo de $-\frac{1}{5}$? $\frac{1}{5}$

b) Se $|m| = 0,8$, quais são os possíveis valores de m? $-0,8$ e $0,8$

6 Em cada item, compare os números racionais usando os sinais $>$, $<$ ou $=$.

a) $|-2,5|$ e $2,5$ $|-2,5| = 2,5$

b) $3,426$ e $3,4181$ $3,426 > 3,4181$

c) $-11,3$ e $-2,51$ $-11,3 < -2,51$

d) $-\frac{3}{8}$ e $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{8} > -\frac{1}{2}$

e) $0,12$ e $\frac{1}{5}$ $0,12 < \frac{1}{5}$

f) $|-2,1|$ e $|0,3|$ $|-2,1| > |0,3|$

7 Segundo o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), em julho de 2014, a Floresta Amazônica perdeu $728,56 \text{ km}^2$ de área, que representa aproximadamente $\frac{48}{100}$ da área da cidade de São Paulo.

Com esses dados, calcule a área aproximada da cidade de São Paulo. *$1.517,83 \text{ km}^2$*



Vista aérea de Cantá, Roraima. (Foto de 2014.)

8 Calcule o valor das expressões.

a) $12 - 5 : \left(-\frac{4}{3}\right)$ $\frac{63}{4}$

b) $\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) - \frac{5}{8} : \left(-\frac{5}{2}\right)$ $-\frac{7}{20}$

c) $\left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{15}\right) : \left(-\frac{5}{6} - \frac{1}{9}\right)$ $\frac{2}{5}$

d) $\left(\frac{5}{2} - 3\right) : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$ $-\frac{3}{5}$

e) $4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) : \left(\frac{2}{9}\right)$ $-\frac{119}{18}$

f) $5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{8}\right)$ $\frac{23}{4}$

10. a) resposta pessoal:

Dependerá do ano em que essa atividade será realizada e da população contabilizada nessa data. Tomando como exemplo o ano de 2010, com 190,7 milhões de pessoas, a quantidade de lixo eletrônico produzido nesse ano seria de 95.350.000 quilogramas.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

9 Responda.

- a) Qual é o oposto do inverso de $-\frac{2}{5}$? $\frac{5}{2}$
- b) Qual é o inverso do módulo de $-\frac{5}{3}$? $\frac{3}{5}$
- c) Qual é o inverso do oposto de $|-2,3|$ na forma de fração? $-\frac{10}{23}$

10 Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), um brasileiro produz, em média, 0,5 kg de lixo eletrônico em 1 ano.

- a) Faça uma pesquisa na internet, em livros, revistas ou jornais sobre a população brasileira atual e calcule a quantidade de lixo eletrônico, em quilograma, que essa população produzirá em 1 ano.



Galpão de cooperativa de recolhimento e reciclagem de lixo eletrônico em São Paulo. (Foto de 2010.)

- b) O elefante africano é o mais pesado dos mamíferos terrestres. Usando a resposta do item anterior, quantos elefantes, com cerca de 7.000 kg, seriam necessários para apresentarem juntos a mesma massa do lixo produzido em um ano?

aproximadamente 14.000 elefantes

11 Escreva na forma de potência com expoente inteiro negativo.

- a) $\frac{1}{10^2}$ 10^{-2} d) $\frac{1}{125}$ 5^{-3}
- b) $\frac{1}{16}$ 2^{-4} e) $\frac{1}{15}$ 15^{-1}
- c) $\left(-\frac{1}{25}\right)^{-2}$ f) $\left(-\frac{1}{100}\right)^{-10}$

12 Reduza a uma só potência. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-9}$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]$$

13 Considere as expressões:

$$A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$B = \left(-2 + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} - 3\right)$$

Calcule o valor de $A \cdot B$. $\frac{5}{24}$

14 O valor da expressão $(3^{-1} \cdot 3) - (5^{-1} : 5)$ é um número racional: alternativa b

- a) maior que -1 e menor que zero.
- b) maior que zero e menor que 1.
- c) menor que zero.
- d) maior que 1.

15 Sabendo que

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 : \left(\frac{1}{3}\right)^9,$$

calcule o valor de x^3 . $\frac{1}{27}$

16 A letra a representa o número racional 0,04. Determine, em seu caderno, os valores de \sqrt{a} , $5\sqrt{a}$ e $2a\sqrt{a}$. 0,2; 1 e 0,016

17 Resolva, em seu caderno, as expressões de cada cartão abaixo.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \quad 4$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{2}{27}\right) \quad -9$$

$$-\sqrt{\frac{36}{100}} \quad -\frac{6}{10}$$

$$-2 \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} \cdot \sqrt{\frac{25}{9}} \quad -\frac{5}{2}$$

Identifique cada sentença a seguir com a cor do cartão correspondente.

I. O mesmo que $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$. azul

II. O dobro de 2. laranja

III. Um número entre -3 e -2 . verde

IV. O mesmo que $-0,6$. rosa

▶ Lembre-se:
Não escreva no livro!

18 Mário calculou o valor desta expressão

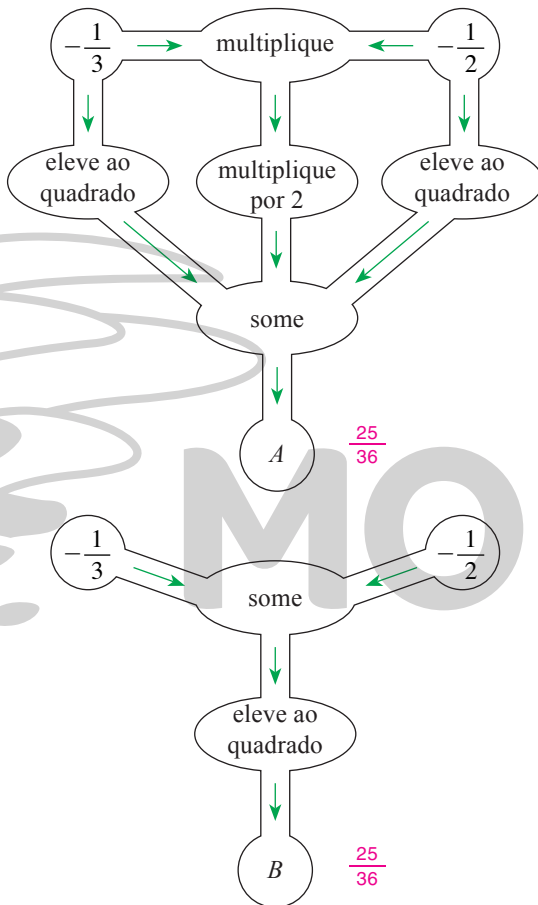
$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{16}$$

e Paulo, o valor desta

$$\left[\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

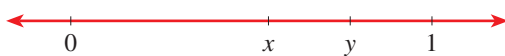
Podemos afirmar que o valor que Paulo encontrou é igual à raiz quadrada do valor que Mário encontrou? *sim, pois $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$*

19 Determine os valores de A e B, de acordo com os esquemas abaixo.



Agora, responda: qual é maior, A ou B?
São iguais.

20 Observe a reta numérica a seguir. Nela representamos os números racionais 0, x, y e 1.



Calculando o produto xy, que posição ele ocupará na reta? *alternativa b*

- a) À esquerda de 0. d) Entre y e 1.
 b) Entre 0 e x. e) À direita de 1.
 c) Entre x e y.

21 Todos os quocientes abaixo são positivos, e os números a, b, c e d são diferentes de zero.

$\frac{a}{5}$	$\frac{-b}{7a}$
$\frac{11}{abc}$	$\frac{-18}{abcd}$

Descubra os sinais de a, b, c e d.
a positivo; b, c e d negativos

22 O número inteiro que pode ser colocado entre os pontos assinalados na reta numérica abaixo é: *alternativa c*

- a) 0. c) -2.
 b) -1. d) -3.



23 Caso exista, qual é o inverso do valor de cada expressão a seguir?

- a) $\frac{2\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \cdot \frac{5}{14}$
- b) $\frac{2 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{14}$
- c) $\frac{0,06 \cdot 0,8 - 0,3 \cdot 0,16}{(0,06 - 0,8) \cdot (0,3 - 0,16)}$ *não existe*

24. a) $\frac{69}{9}, \frac{79}{9}, \frac{89}{9}, \frac{99}{9}, \frac{109}{9}, \frac{119}{9}$

24 Faça o que se pede.

- a) Escreva a fração correspondente a cada número misto a seguir.
 $7\frac{6}{9}, 8\frac{7}{9}, 9\frac{8}{9}, 10\frac{9}{9}, 11\frac{10}{9}, 12\frac{11}{9}$
- b) Que padrão pode ser observado na sequência de frações obtidas no item a)?
- c) Usando o padrão que é resposta do item b), determine a fração correspondente ao número misto $32\frac{31}{9}$. $\frac{31 \cdot 10 + 9}{9} = \frac{319}{9}$
- d) Calcule a fração correspondente ao número misto $-3\frac{2}{9}$. $-\frac{29}{9}$
- e) A fração que é resposta do item d) poderia ser obtida usando o padrão determinado no item b)? *sim*

24. b) A fração tem denominador 9. Para obter o numerador da fração, multiplicamos por 10 o numerador da parte fracionária do número misto e, em seguida, somamos 9.

Treinando mais

- 1 Os *icebergs* são grandes massas de água no estado sólido que se deslocam com as correntes marítimas no oceano. O que vemos fora da água é uma pequena parte do *iceberg*, que em geral corresponde a $\frac{1}{10}$ de seu volume.

Represente, na forma de fração, qual é a porção do *iceberg* que fica dentro da água. $\frac{9}{10}$

Iceberg flutuando na baía de Disko, na Groenlândia. (Foto de 2012.)



PAUL SOUDERS/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES

- 2 O professor escreveu na lousa parte de uma matéria de jornal com algumas informações. Em seguida, ele pediu aos alunos que destacassem todos os números que encontrassem na matéria e os classificassem como naturais, inteiros ou racionais.

Veja a classificação de dois dos alunos.

Bruno
Naturais: 1, 2, 7 e 9
Inteiros: -3
Racionais: $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$

Telma
Naturais: 1, 2, 7 e 9
Inteiros: -3, 1, 2, 7 e 9
Racionais: -3, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 7 e 9

Ao analisar as classificações feitas por esses alunos, percebe-se que existem algumas diferenças entre elas. Qual das duas classificações está incompleta? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos percebam que a classificação feita por Bruno está incompleta, pois todos os números naturais também são inteiros e todos os números inteiros também são racionais.

- 3 Gabriela, Eduardo e Mauro compraram um pote de sorvete. Gabriela tomou $\frac{1}{5}$ do sorvete.

Do que sobrou, Eduardo tomou $\frac{1}{4}$, e, logo depois, Mauro tomou $\frac{1}{2}$ do que Eduardo deixou.

Ao final, restaram apenas 300 ml de sorvete. Quantos mililitros de sorvete havia inicialmente no pote? Explique com suas palavras como resolveu este exercício.



ILUSTRAÇÕES: LIGIA DUQUE

FABIO EUGÊNIO

1 Ângulos e seus elementos

Inúmeras situações do dia a dia nos remetem à ideia de ângulo: quando viramos uma esquina, quando montamos uma tábua de passar roupas, quando olhamos as horas em um relógio de ponteiros ou quando observamos a inclinação do telhado de uma casa.

Nas fotos abaixo, os destaques dão a ideia de ângulo.



Vista aérea de Corumbá, Mato Grosso do Sul. (Foto de 2014.)



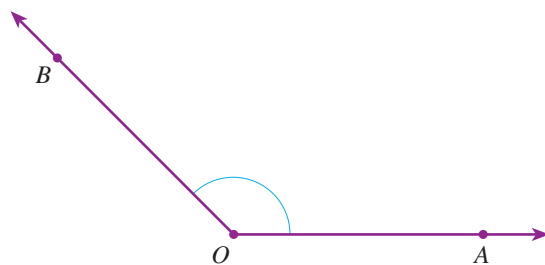
Palácio Cruz e Souza, Museu Histórico de Florianópolis, Santa Catarina. (Foto de 2014.)

MARIO FRIEDLANDER/PIUS SAR IMAGENS

PALE ZUPPAN/PIUS SAR IMAGENS

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Você já aprendeu que ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.



Na figura acima, temos a representação do ângulo $\widehat{AÔB}$ (ou $\widehat{BÔA}$), em que o **vértice** é o ponto O , e os **lados** são as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . Esses são os elementos de um ângulo.

NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

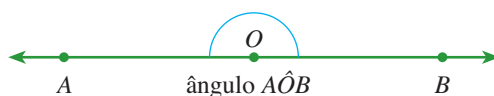
NELSON MATSUDA

RUSLANCHIKSHUTTERSTOCK

2 Medida de um ângulo

Sabemos que um ângulo pode ser medido e que o **grau**, representado pelo símbolo $^\circ$, é uma unidade de medida de ângulos.

Observe a representação de um **ângulo de meia-volta**.

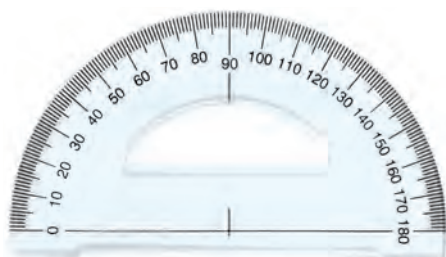


O ângulo $\widehat{AÔB}$ acima, que representa um ângulo de meia-volta, é formado pelas semirretas opostas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Esse ângulo $\widehat{AÔB}$, que tem medida igual a 180° , recebe o nome de **ângulo raso**. Se dividirmos um ângulo de medida igual a 180° em 180 ângulos menores de mesma medida, cada ângulo obtido terá medida igual a 1° .



Também vimos que o transferidor pode ser usado para medir ângulos e que ele está dividido em medidas iguais a 1° .



Transferidor dividido em 180 partes iguais. Representa um ângulo de meia-volta (180°).



Transferidor dividido em 360 partes iguais. Representa um ângulo de uma volta inteira (360°).

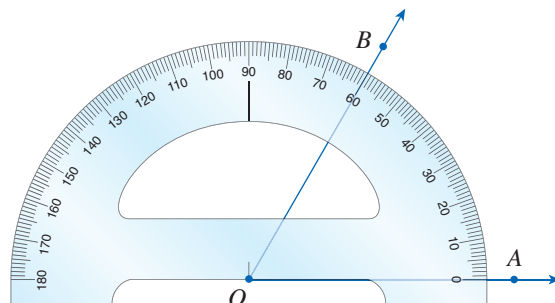
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PICSFIVESHUTTERSTOCK

Vamos relembrar como proceder para medir ângulos usando um transferidor.

- O centro do transferidor deve coincidir com o vértice do ângulo.
- Uma das semirretas (na figura, \overrightarrow{OA}) que formam o ângulo deve ficar alinhada com o ponto central e com a indicação do ângulo de 0° do transferidor.
- A outra semirreta (na figura, \overrightarrow{OB}) estará sob a marca do transferidor que indica a medida do ângulo.

NELSON MATSUDA



A medida do ângulo $B\hat{O}A$ é 60° , que indicamos da seguinte maneira:

$$m(B\hat{O}A) = 60^\circ$$

Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**. Indicamos 1 minuto por $1'$ e 1 segundo por $1''$.

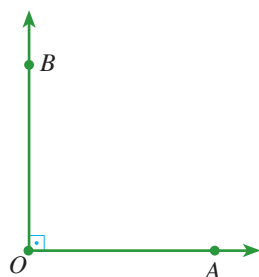
Veja a relação entre o grau e seus submúltiplos:

- $1^\circ = 60'$, ou seja, 1 minuto equivale a $\frac{1}{60}$ do grau
- $1' = 60''$, ou seja, 1 segundo equivale a $\frac{1}{60}$ do minuto

3 Classificação de um ângulo

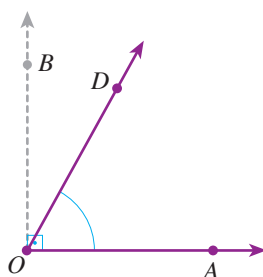
Um ângulo pode ser classificado quanto à sua medida em **reto**, **agudo** ou **obtusos**.

Ângulo reto



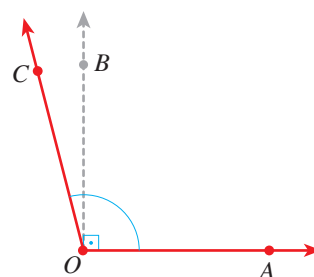
O ângulo $A\hat{O}B$ é chamado de **reto** porque sua medida é igual a 90° .

Ângulo agudo



O ângulo $A\hat{O}D$ é chamado de **agudo** porque sua medida está entre 0° e 90° (menor que um ângulo reto).

Ângulo obtuso



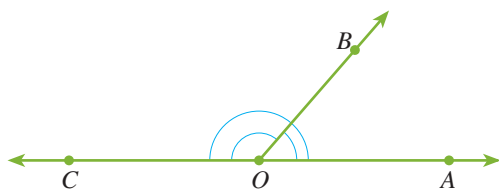
O ângulo $A\hat{O}C$ é chamado de **obtusos** porque sua medida é maior que 90° e menor que 180° .

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

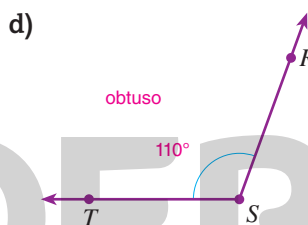
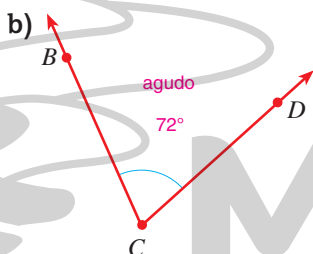
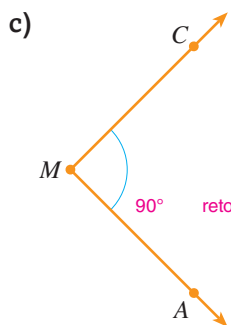
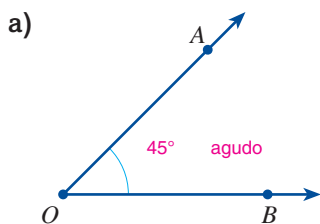
1 Nesta figura, podemos observar três ângulos.

NELSON MATSUDA



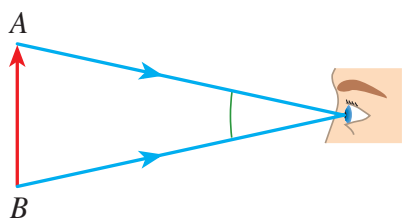
- a) Quais são esses ângulos? $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$
- b) Qual deles é ângulo raso? $A\hat{O}C$
- c) Qual deles é ângulo reto? Qual é obtuso? Qual é agudo? nenhum; $B\hat{O}C$; $B\hat{O}A$

2 Com um transferidor, determine a medida de cada ângulo. Em seguida, registre as medidas em seu caderno, dando a sua classificação em reto, agudo ou obtuso.

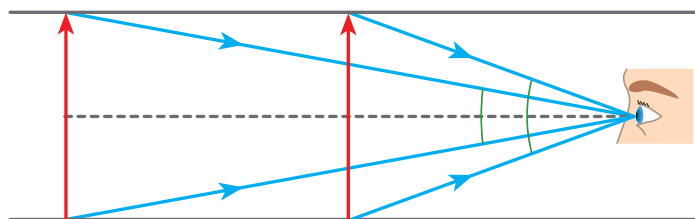


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

3 O ângulo segundo o qual uma pessoa vê um objeto é chamado de **ângulo visual**. Esse ângulo depende do tamanho do objeto e de sua distância em relação ao observador.



ângulo visual (objeto AB)



Dado um objeto, quanto maior for a distância do observador em relação a esse objeto, menor será o ângulo visual.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O ângulo visual pode ser um ângulo raso? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos percebam que o movimento do olho humano não é suficiente para cobrir um ângulo dessa medida.

4 Trace uma reta e marque sobre ela dois pontos distintos, A e B. Construa um ângulo de 42° com vértice em A, com um dos lados sendo a semirreta \overrightarrow{AB} . Construa outro ângulo de 42° com vértice em B, com um dos lados sendo a semirreta \overrightarrow{BA} , de modo que obtenha um polígono.

- a) Que polígono você obteve? **triângulo**
- b) Como é classificado esse polígono quanto aos lados? **triângulo isósceles**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

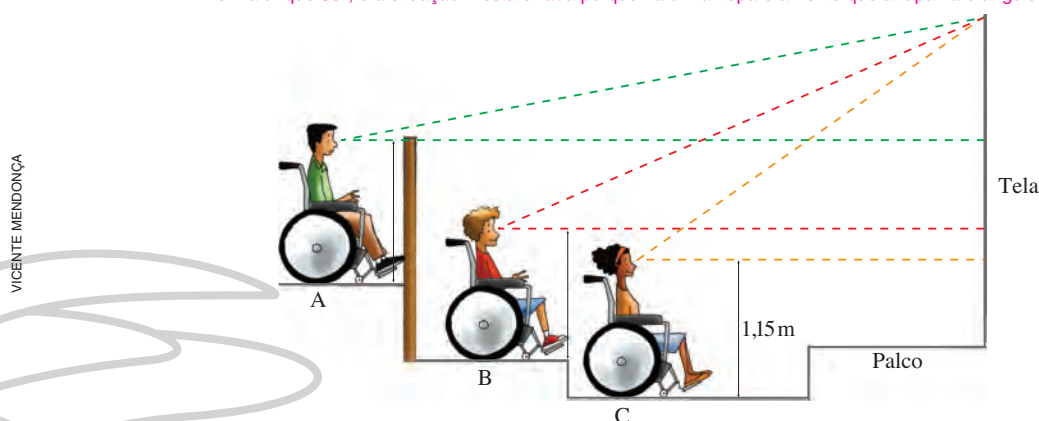
5 Segundo a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), os cinemas precisam reservar lugares para pessoas usuárias de cadeira de rodas de acordo com as regras a seguir:

Pessoas em Cadeira de Rodas (PCR) precisam de previsão de espaços onde possam estacionar convenientemente e acompanhar com conforto os eventos do auditório. Para tanto, os espaços devem atender à seguinte regra:

- Estar dispostos em lugares que respeitem o ângulo visual máximo de 30° a partir do limite superior da tela ou do palco até a linha do horizonte visual (1,15 m do piso). Caso haja anteparo, sua localização e sua altura não devem impedir o ângulo visual citado.

Fonte: NBR 9050 ABNT.

a) Entre as situações ilustradas a seguir, qual delas está de acordo com essa regra? Justifique sua resposta. *Apenas a situação B, pois o ângulo visual é menor que 30° . A situação C está errada porque o ângulo visual é maior que 30° , e a situação A está errada porque há um anteparo à frente que atrapalha o ângulo visual.*



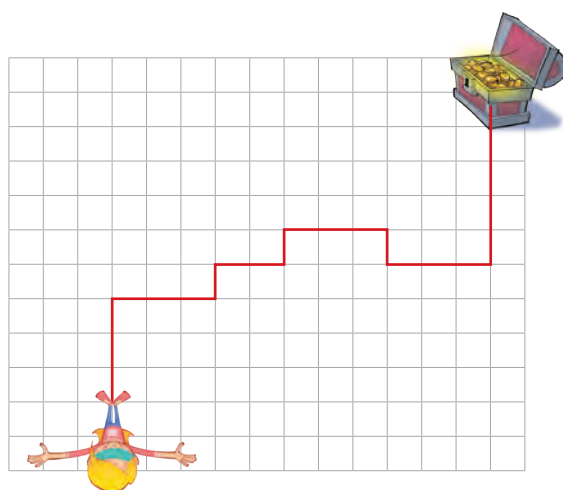
b) Além da regra citada, há outras que os cinemas precisam seguir para facilitar o acesso de pessoas em cadeira de rodas, como a instalação de rampas e a garantia de rotas acessíveis vinculadas a rotas de fuga. Converse com os colegas de classe sobre o que mais é importante haver nos cinemas para facilitar o acesso das pessoas nessa condição. *resposta pessoal*

c) Você costuma ir ao cinema? Em caso afirmativo, observe se o cinema respeita essas regras. Depois, escreva um relato com suas observações. *resposta pessoal*

6 Vitória está participando de uma brincadeira de caça ao tesouro e recebeu o mapa ao lado.

Sabendo que os lados de cada quadradinho da malha representam 1 m, descreva o caminho que Vitória deverá seguir para encontrar o tesouro.

Ande 3 metros para a frente, gire 90° à direita, ande 3 metros para a frente, gire 90° à esquerda, ande 1 metro para a frente, gire 90° à direita, ande 2 metros para a frente, gire 90° à esquerda, ande 1 metro para a frente, gire 90° à direita, ande 3 metros para a frente, gire 90° à direita, ande 1 metro para a frente e gire 90° à esquerda, ande 3 metros para a frente, gire 90° à esquerda e ande 4 metros para a frente.

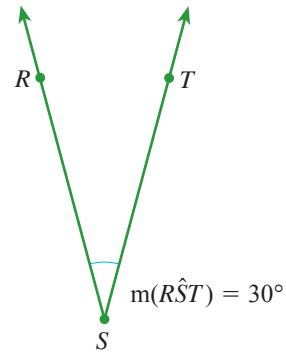
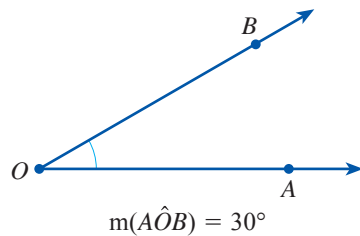


7 Crie um mapa indicando uma trajetória como a do exercício 6 e represente-a em uma folha de papel quadriculado. Reúna-se com um colega e, sem que ele veja o mapa criado por você, descreva-o para que ele represente seu mapa em uma folha de papel quadriculado também. Em seguida, faça o mesmo com o mapa criado pelo seu colega. Comparem as representações e vejam se há diferença entre elas. Caso haja, expliquem por que vocês acham que elas ocorreram.

resposta pessoal

4 Ângulos congruentes

Observe estes ângulos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

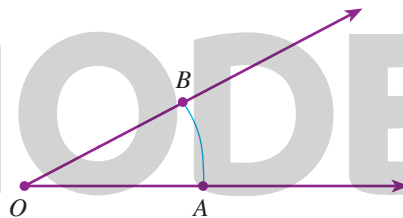
Como \widehat{AOB} e \widehat{RST} têm a mesma medida, dizemos que eles são **ângulos congruentes**. Indicamos que \widehat{AOB} e \widehat{RST} são ângulos congruentes da seguinte maneira:

$\widehat{AOB} \cong \widehat{RST}$ (lemos: “o ângulo \widehat{AOB} é congruente ao ângulo \widehat{RST} ”)

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida.

Construção de ângulos congruentes

Dado um ângulo \widehat{AOB} , é possível construir, com o auxílio de régua e compasso, um ângulo \widehat{DEF} congruente a \widehat{AOB} , isto é, $\widehat{DEF} \cong \widehat{AOB}$.



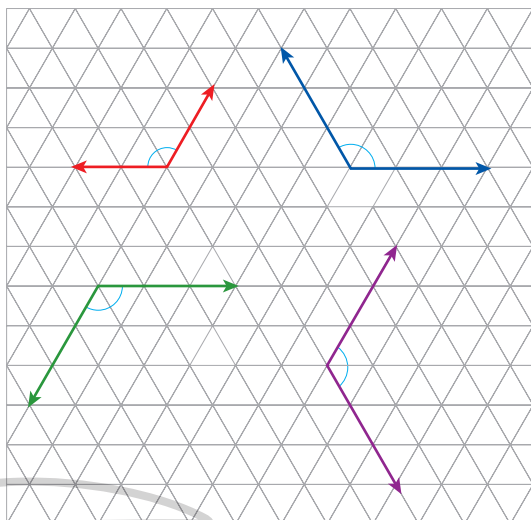
Acompanhe a construção do ângulo \widehat{DEF} .

Traçamos uma semirreta de origem E .	Colocamos a ponta-seca do compasso em E e, com uma abertura de medida OA , traçamos um arco que encontra essa semirreta no ponto D .	Colocamos a ponta-seca do compasso em D e, com uma abertura de medida AB , marcamos F no arco traçado.	Traçamos a semirreta \overrightarrow{EF} . O ângulo \widehat{DEF} está construído.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

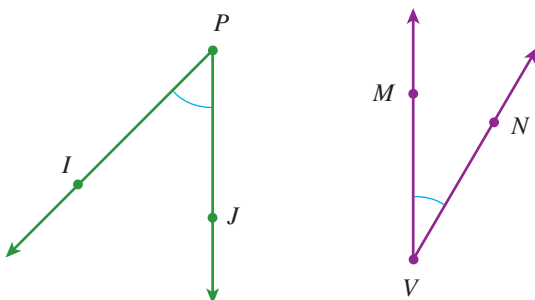
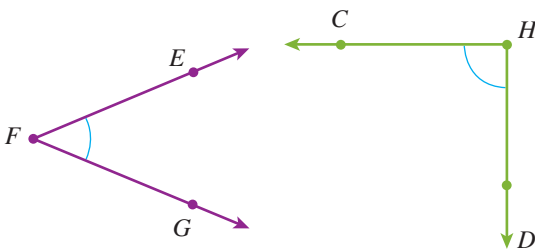
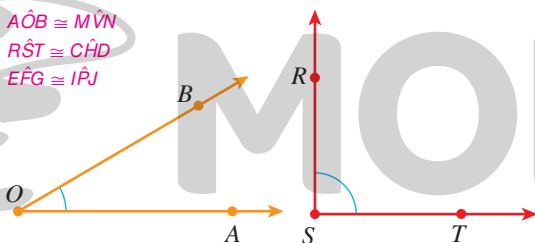
Observe que o ponto F foi marcado de modo que a abertura de medida DF fosse igual à abertura de medida AB . Logo, os ângulos têm a mesma abertura e, portanto, são congruentes.

8 Observe os ângulos construídos na malha triangular abaixo. O que se pode dizer a respeito desses ângulos? *São ângulos congruentes.*

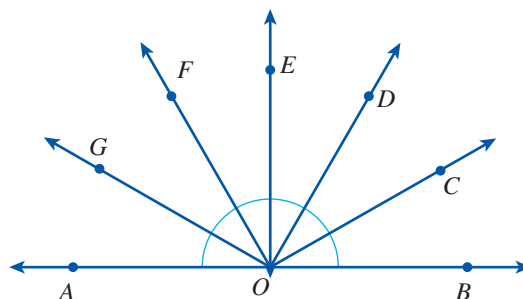


9 Descubra quais são os pares de ângulos congruentes. Registre a resposta em seu caderno.

*AÔB ≅ M'VN
RST ≅ C'HD
EFG ≅ I'PJ*



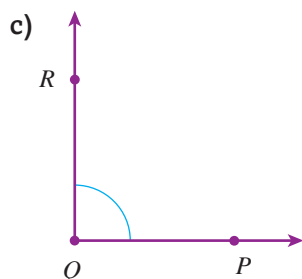
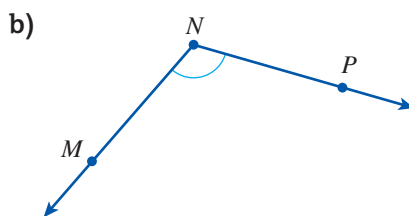
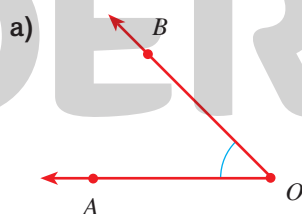
10 Na figura, o ângulo $\hat{A}ÔB$ está dividido em seis ângulos congruentes.



Nessas condições, em seu caderno, classifique as sentenças em falsa ou verdadeira.

- a) $\hat{B}ÔC \cong \hat{C}ÔD$ verdadeira
- b) $\hat{B}ÔD \cong \hat{D}ÔF$ verdadeira
- c) $\hat{C}ÔE \cong \hat{A}ÔF$ verdadeira
- d) $\hat{C}ÔD \cong \hat{E}ÔG$ falsa
- e) $\hat{C}ÔA \cong \hat{B}ÔG$ verdadeira
- f) $\hat{D}ÔF \cong \hat{A}ÔE$ falsa

11 Construa, com régua e compasso, um ângulo congruente ao ângulo dado em cada caso.



5 Operações com medidas de ângulos

Transformando unidades

Quando realizamos operações com medidas de ângulos, é possível aparecerem resultados com minutos e segundos maiores que 60. Para situações como essa, devemos transformar segundos em minutos e minutos em graus, ou seja, a cada 60 unidades, trocamos por uma unidade imediatamente superior. Observe os exemplos a seguir.

- a) Expressar $5^{\circ}20'$ em minutos.

$$5^{\circ}20' = 5 \times 60' + 20' = 300' + 20' = 320'$$

- b) Fazer a transformação de $150'$ em graus e minutos.

$$150' = \underbrace{2 \times 60'}_{2^{\circ}} + 30' = 2^{\circ} + 30' = 2^{\circ}30'$$

$$\begin{array}{r} 150' \\ 30' \quad 2 \end{array}$$

- c) Expressar $80''$ em minutos e segundos.

$$80'' = \underbrace{1 \times 60''}_{1'} + 20'' = 1' + 20'' = 1'20''$$

$$\begin{array}{r} 80'' \\ 20'' \quad 1 \end{array}$$



Adição e subtração de medidas de ângulos

A adição de medidas de ângulos é feita somando segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus. Da mesma forma, a subtração é feita subtraindo segundos de segundos, minutos de minutos e graus de graus. Veja os exemplos.

- a) $38^{\circ}20' + 51^{\circ}40'$

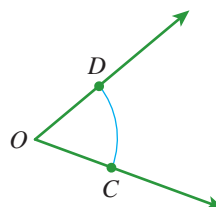
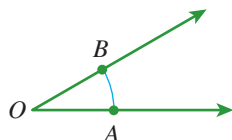
$$\begin{array}{r} 38^{\circ}20' \\ + 51^{\circ}40' \\ \hline 89^{\circ}60' \quad (60' = 1^{\circ}) \\ + 1^{\circ} \\ \hline 90^{\circ} \end{array}$$

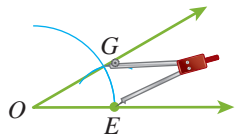
- b) $90^{\circ} - 40^{\circ}20'45''$

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} = 89^{\circ}60' = 89^{\circ}59'60'' \\ \quad \quad \quad 89^{\circ}59'60'' \\ \quad \quad \quad - 40^{\circ}20'45'' \\ \hline \quad \quad \quad 49^{\circ}39'15'' \end{array}$$

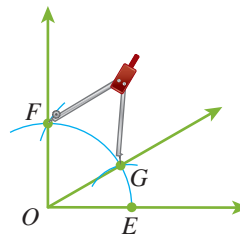
Usando régua e compasso, podemos construir um ângulo cuja medida seja a soma das medidas de dois ângulos, ou um ângulo cuja medida seja a diferença entre as medidas de dois ângulos. Acompanhe os exemplos.

- a) Dados os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$, vamos construir, com régua e compasso, o ângulo $\hat{E}OF$ de medida $m(\hat{E}OF) = m(\hat{A}OB) + m(\hat{C}OD)$.





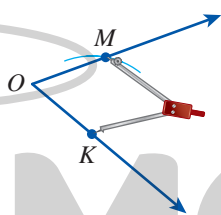
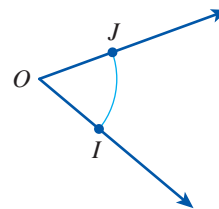
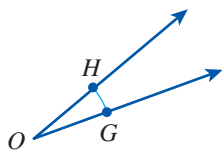
Construímos o ângulo $E\hat{O}G$, que é congruente ao ângulo $A\hat{O}B$.



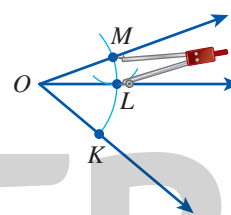
Sobre a semirreta \overrightarrow{OG} , construímos o ângulo $F\hat{O}G$, que é congruente ao ângulo $C\hat{O}D$, obtendo o ângulo $E\hat{O}F$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Dados os ângulos $G\hat{O}H$ e $I\hat{O}J$, vamos construir, com régua e compasso, o ângulo $K\hat{O}L$ de medida $m(K\hat{O}L) = m(I\hat{O}J) - m(G\hat{O}H)$.



Construímos o ângulo $K\hat{O}M$, que é congruente ao ângulo $I\hat{O}J$.



Sobre a semirreta \overrightarrow{OM} , construímos o ângulo $L\hat{O}M$, que é congruente ao ângulo $G\hat{O}H$, obtendo o ângulo $K\hat{O}L$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO
Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.

► Multiplicação e divisão da medida de um ângulo por um número natural

A multiplicação e a divisão da medida de um ângulo por um número natural são feitas multiplicando ou dividindo, respectivamente, os segundos, os minutos e os graus pelo número natural. Em seguida, na multiplicação, reduzimos os segundos a minutos e os minutos a graus, quando necessário. Já na divisão, quando necessário, reduzimos graus a minutos e minutos a segundos.

Observe os exemplos.

a) $32^{\circ}25' \times 4$

$$\begin{array}{r} 32^{\circ}25' \\ \times \quad 4 \\ \hline 128^{\circ}100' \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow 128^{\circ} \\ \downarrow \\ (100' = 1^{\circ}40') \end{array} \begin{array}{r} + 1^{\circ}40' \\ \hline 129^{\circ}40' \end{array}$$

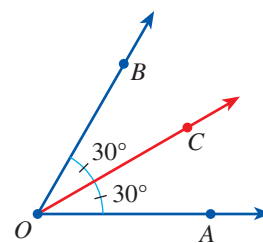
b) $27^{\circ}22'8'' : 4$

$$\begin{array}{r} 27^{\circ} \quad 22' \quad 8'' \quad | \quad 4 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{3^{\circ} \rightarrow 180'} \\ 202' \\ \underline{02' \rightarrow 120''} \\ 128'' \\ \underline{} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6^{\circ}50'32'' \end{array}$$

6 Bissetriz de um ângulo

Na figura ao lado, temos:

- $m(\widehat{AOC}) = 30^\circ$ e $m(\widehat{COB}) = 30^\circ$
Então, $\widehat{AOC} \cong \widehat{COB}$.
- A semirreta \overrightarrow{OC} divide o ângulo \widehat{AOB} em dois ângulos congruentes.
Nesse caso, dizemos que \overrightarrow{OC} é **bissetriz** de \widehat{AOB} .



NELSON MATSUDA

Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

Construção da bissetriz de um ângulo

Acompanhe a construção da bissetriz de um ângulo por dois métodos: com dobradura e com régua e compasso.

Com dobradura

- 1º) Desenhamos um ângulo em uma folha de papel (Figura 1).
- 2º) Recortamos a parte do papel em que está desenhado o ângulo e a dobramos ao meio, conforme mostra a Figura 2.
- 3º) Ao desdobrar o papel, obtemos um vinco no interior do ângulo. Esse vinco representa parte da bissetriz do ângulo (Figura 3).

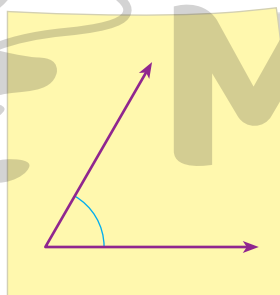


Figura 1

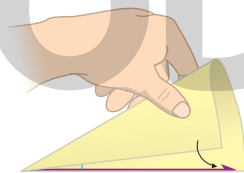


Figura 2

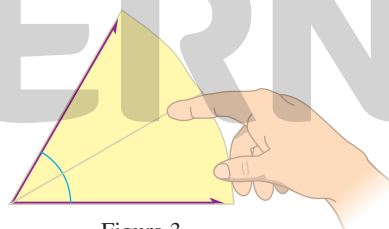
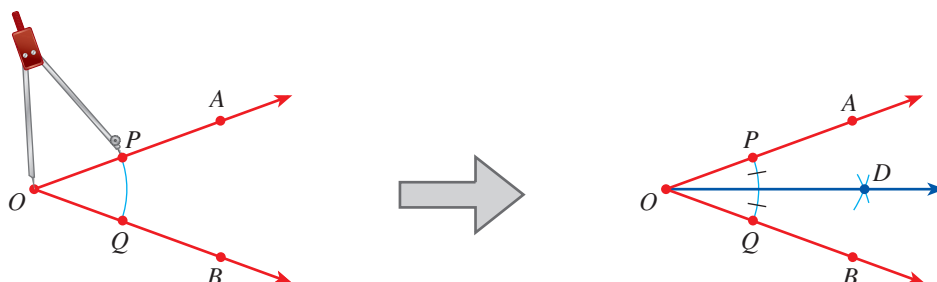


Figura 3

Com régua e compasso

- 1º) Vamos considerar o ângulo \widehat{AOB} .
- 2º) Com a ponta-seca do compasso em O e uma abertura qualquer, marcamos sobre os lados do ângulo os pontos P e Q .
- 3º) Agora, com a ponta-seca do compasso em P e depois em Q , traçamos arcos de mesma abertura que se cortam em D . A semirreta \overrightarrow{OD} é bissetriz do ângulo \widehat{AOB} .

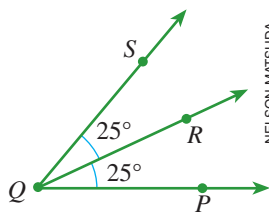


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA
Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

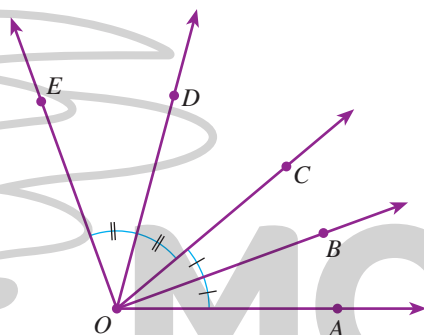
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 23** Observe a figura ao lado. Sabendo que $m(\widehat{PQR}) = m(\widehat{RQS})$, a semirreta \overrightarrow{QR} é o que em relação a \widehat{PQS} ?



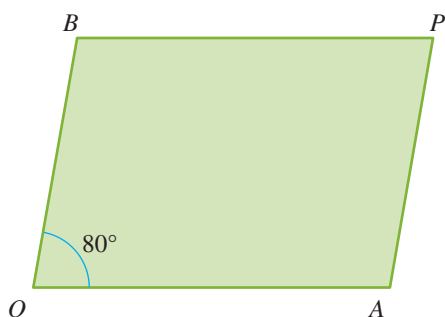
NELSON MATSUDA

- 24** Construa, usando régua e compasso, a bissetriz de um ângulo agudo, de um ângulo reto e de um ângulo obtuso. *construção de figuras*
- 25** Com a ajuda de um transferidor, construa um ângulo de 115° e trace sua bissetriz com um compasso. *construção de figura*
- 26** Considere a figura abaixo e responda às questões a seguir no caderno, sabendo que \overrightarrow{OD} é bissetriz de \widehat{COE} e \overrightarrow{OB} é bissetriz de \widehat{AOC} .



- a) Se $m(\widehat{AOB}) = 20^\circ$, quanto mede \widehat{AOC} ? 40°
 b) Se $m(\widehat{COE}) = 70^\circ$, quanto mede \widehat{COD} ? 35°
 c) Se $m(\widehat{AOB}) = 24^\circ$ e $m(\widehat{COE}) = 82^\circ$, quanto mede \widehat{AOD} ? 89°

- 27** Reproduza em uma folha de papel a figura abaixo e, em seguida, recorte-a.

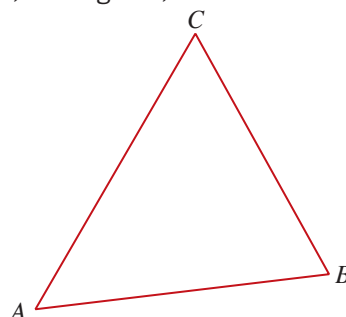


Agora, siga as instruções:

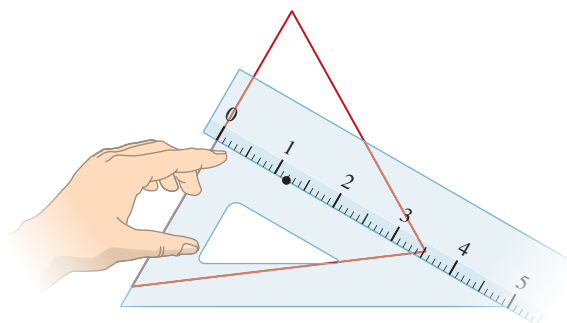
- Dobre a figura de modo que o lado \overline{OA} se sobreponha ao lado \overline{OB} .

- Desdobre a figura e trace \overrightarrow{OC} sobre a marca da dobra feita no papel.
- Dobre a figura inicial de modo que o lado \overline{OA} se sobreponha a \overline{OC} .
- Desdobre a figura e trace \overrightarrow{OD} sobre a marca da nova dobra.
- Agora, calcule a medida dos ângulos \widehat{AOD} , \widehat{AOC} e \widehat{BOD} . $m(\widehat{AOD}) = 20^\circ$, $m(\widehat{AOC}) = 40^\circ$ e $m(\widehat{BOD}) = 60^\circ$

- 28** Reproduza em uma folha de papel o triângulo abaixo e, em seguida, recorte-o.



- a) Por dobradura, obtenha as bissetrizes dos três ângulos do triângulo ABC . Trace as bissetrizes pelas marcas das dobras. *construção de figura*
- b) As três bissetrizes se cruzam duas a duas em pontos distintos, ou se cruzam em um só ponto? *em um só ponto*
- c) Com o auxílio de um esquadro e de uma régua, meça a distância do ponto de encontro das bissetrizes até cada um dos lados do triângulo. Veja:



são iguais

- O que se pode dizer dessas três distâncias?
- d) Coloque a ponta-seca de um compasso no ponto em que as bissetrizes se encontram. Abra o compasso até a distância obtida no item c e trace uma circunferência. O que acontece com essa circunferência e com os três lados do triângulo?

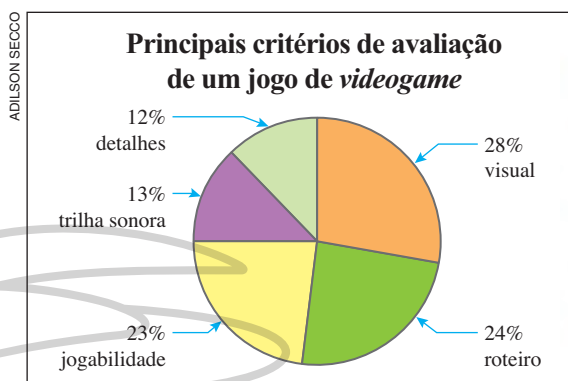
A circunferência toca os três lados do triângulo.

Gráficos de setores

Gráficos de setores são usados principalmente quando se deseja relacionar entre si as partes do que está sendo representado, ou relacionar cada parte com o todo.

Vamos analisar a situação a seguir.

Um fabricante de jogos de *videogame* fez uma pesquisa para saber quais os principais critérios de avaliação para determinar o interesse e a decisão de compra de um jogo voltado ao público infantojuvenil. O gráfico abaixo mostra o resultado da pesquisa feita com jovens de 10 a 15 anos. Observe como o gráfico ajuda a perceber a distribuição das opiniões por critério de avaliação.



Dados obtidos pelo fabricante de jogos.



Se medirmos com um transferidor o ângulo do gráfico referente à jogabilidade, por exemplo, encontraremos aproximadamente 83° . Se calcularmos 23% de 360° , teremos $82,8^\circ$. Com o transferidor, o setor relativo a roteiro medirá cerca de 86° , e 24% de 360° é $86,4^\circ$.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

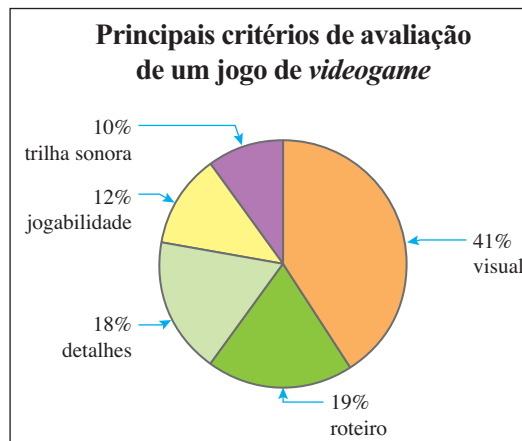
- 1 A tabela a seguir contém o resultado da mesma pesquisa, mas agora realizada com jovens de 16 a 18 anos. Copie essa tabela e complete-a com as medidas em grau, obtidas com o uso de uma calculadora. Depois, meça os ângulos dos setores do gráfico com um transferidor e compare os resultados.

ADILSON SECCO

Principais critérios de avaliação de um jogo de videogame		
Categoria	Porcentagem	Grau
trilha sonora	10%	█
detalhes	18%	█
visual	41%	█
roteiro	19%	█
jogabilidade	12%	█

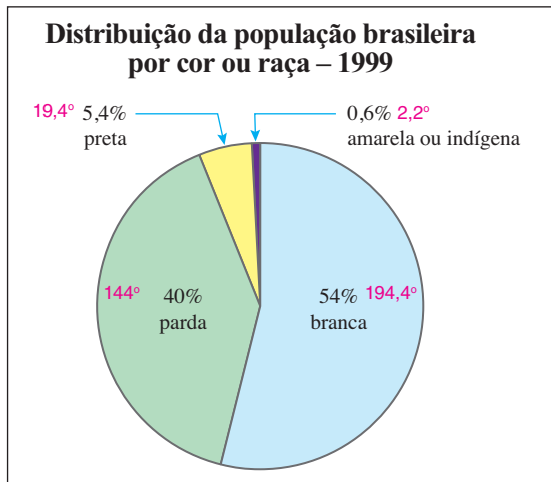
Dados obtidos pelo fabricante de jogos.

trilha sonora: 36° ; detalhes: $64,8^\circ$;
visual: $147,6^\circ$; roteiro: $68,4^\circ$; jogabilidade: $43,2^\circ$

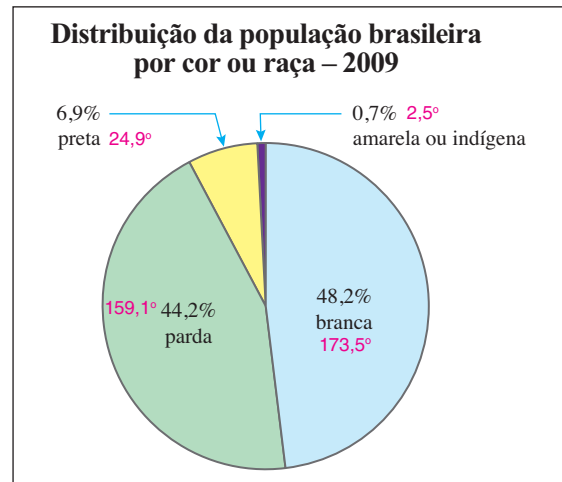


Dados obtidos pelo fabricante de jogos.

2 Os gráficos a seguir indicam a distribuição da população brasileira por cor ou raça, em relação ao total de pessoas no Brasil em 1999 e em 2009. Calcule as medidas dos setores e, depois, confira-as com o transferidor.



Fonte: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 23 fev. 2015.



Fonte: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 23 fev. 2015.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Agora, compare cada setor do gráfico de 1999 com o setor da respectiva cor ou raça do gráfico de 2009 e escreva as alterações que ocorreram nesses dez anos.

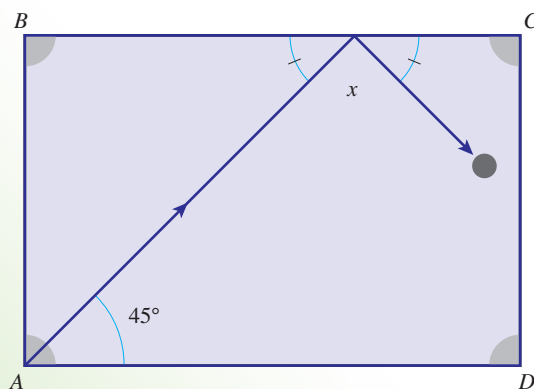
De 1999 a 2009, a parte da população autodenominada branca foi a única que diminuiu percentualmente. As demais aumentaram.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Resolva a questão a seguir.

(UFRRJ) A figura abaixo mostra a trajetória de uma bola de bilhar. Sabe-se que, quando ela bate na lateral da mesa (retangular), forma um ângulo de chegada que sempre é igual ao ângulo de saída. A bola foi lançada da caçapa A , formando um ângulo de 45° com o lado \overline{AD} .



Sabendo-se que o lado \overline{AB} mede 2 unidades e \overline{BC} mede 3 unidades, a bola: **alternativa b**

- a) cairá na caçapa A .
- b) cairá na caçapa B .
- c) cairá na caçapa C .
- d) cairá na caçapa D .
- e) não cairá em nenhuma caçapa.

NELSON MATSUDA

- 1 Observe os ângulos destacados em cada foto e classifique-os em reto, agudo ou obtuso.

a)



ALF RIBEIRO/LHAR IMAGEM

Edifício do Museu Histórico Padre Carlos Weiss em Londrina, Paraná. (Foto de 2013.)

verde: ângulo agudo; laranja: ângulo reto

b)



DELFIN MARTINS/TVBA

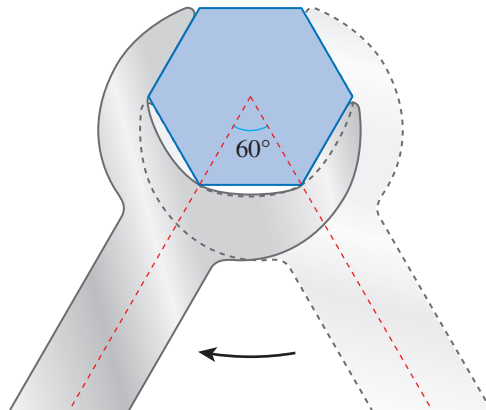
Museu Câmara Cascudo, em Natal, Rio Grande do Norte. (Foto de 2012.)

roxo: ângulo obtuso; laranja: ângulo reto;

vermelho: ângulo agudo

- 2 Usando régua e compasso, construa um ângulo reto e, a partir dele, um ângulo de 45° e um de $22^\circ 30'$. **construção de figura**

- 3 Na figura a seguir, vista de cima, a cabeça de um parafuso tem a forma de um hexágono com lados de mesma medida e com ângulos congruentes de 60° .



ADILSON SECCO

A cada movimento que um mecânico faz com a chave, o parafuso gira 60° . Quantos movimentos iguais a esse o mecânico deve fazer para que o parafuso dê:

- a) meia-volta; **3**
b) uma volta completa. **6**

- 4 Uma das manobras de skate chama-se 900° . Nessa manobra, o *skatista* dá um giro equivalente a quantas voltas? **duas voltas e meia**



AUGUSTO RATIS/FUTURA PRESS

O *skatista* Sandro Dias é um dos poucos que conseguem fazer a manobra 900° . (Foto de 2013.)

- 5 Acompanhe a descrição do caminho que Ângela percorreu:

- Inicialmente, caminhei 10 m em linha reta.
- Depois, girei 90° à esquerda e avancei 10 m novamente.
- Em seguida, girei 90° à esquerda e avancei mais 20 m.

Quantos graus Ângela deverá girar à esquerda para retornar ao ponto de partida em linha reta?

Ângela deverá girar 135° à esquerda para retornar ao ponto de partida em linha reta.

Proponha aos alunos que façam um desenho em uma malha quadriculada para resolver esse problema.

Girando no parque

A High Roller é uma roda-gigante digna do nome: tem 167,6 metros de altura e 158,5 metros de diâmetro. Foi inaugurada em 31 de março de 2014, em Las Vegas, Estados Unidos. Ela tem 28 cápsulas igualmente espaçadas, com ar-condicionado, cada uma com capacidade para 40 pessoas, e o tempo total do passeio (uma volta completa) dura cerca de 30 minutos. A medida de um ângulo imaginário com vértice no centro dessa roda, com lados que passem no centro de duas cápsulas vizinhas, pode ser indicada pela razão $\frac{360^\circ}{28}$ ou $\frac{90^\circ}{7}$.

$$\frac{360^\circ}{28} \text{ ou } \frac{90^\circ}{7}$$

A High Roller, em Las Vegas, é a maior roda-gigante do mundo. (Foto de 2014.)

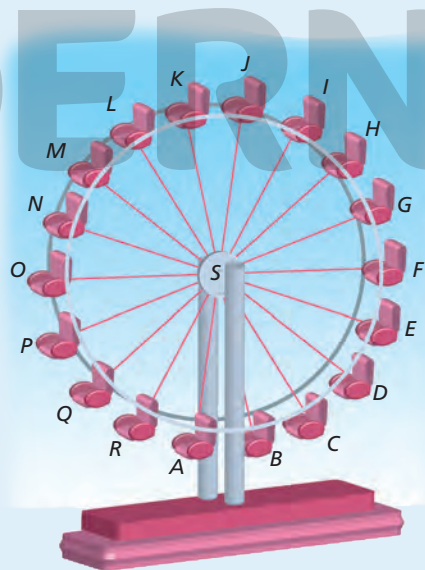


ANEES/SHUTTERSTOCK

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Qual é a medida aproximada do ângulo descrito acima em grau, minuto e segundo? $12^\circ 51' 25''$
- A roda-gigante de um parque de diversões tem 18 cadeiras, igualmente espaçadas, e move-se no sentido anti-horário, isto é, no sentido contrário ao do ponteiro do relógio. Na figura, as letras de A a R indicam as posições das cadeiras. Leandro sentou-se na posição indicada pela letra A.
 - Em um primeiro momento, a roda moveu-se em meia-volta e parou para que Juliana se sentasse. Nesse momento, qual era a posição de Leandro? *J*
 - Após Juliana sentar, a roda moveu-se 1,5 volta, novamente. Qual era a nova posição de Leandro e Juliana? *Leandro em A e Juliana em J.*
 - A posição *M* é simétrica de *D* em relação ao centro, assim como *N* é simétrica de *E*, e *O* é simétrica de *F*. Qual é a posição simétrica de *P* em relação ao centro da roda? E qual é a simétrica de *G* em relação ao centro da roda? *G; P*
 - Considerando que uma volta inteira corresponde a 360° , quantos graus tem o ângulo \widehat{HSI} descrito pela cadeira que vai da posição *H* até *I*, no sentido anti-horário? E se fosse no sentido horário? $20^\circ; 340^\circ$
 - Qual é a posição da cadeira que está na bissetriz do ângulo \widehat{MSA} ? *P*
 - A cadeira da posição *E* está na bissetriz de um ângulo. Dê o nome de três ângulos em que isso é possível. *resposta possível: D\hat{S}F, C\hat{S}G e B\hat{S}H*



CLAUDIO CHIVO

1 Um pouco de História

Tradicionalmente, os textos de Matemática incluem problemas para os leitores resolverem. Os antigos textos de Matemática, como os egípcios, babilônicos, indianos, árabes e chineses, possuíam uma lista de problemas cujas soluções eram fornecidas posteriormente.

Os problemas tinham a função didática de ensinar Matemática, mas também refletiam as necessidades das sociedades e os diferentes aspectos da vida cotidiana.

BABYLONIAN COLLECTION/VALE UNIVERSITY, CONNECTICUT



Tábua babilônica datada entre 1800 a.C. e 1600 a.C. Nela estão registrados 25 problemas matemáticos.

Papiro Rhind, cerca de 1650 a.C. Esse papiro tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e está escrito em hierático (que se lê da direita para a esquerda). O papiro contém uma coleção de 85 problemas, e seu nome refere-se ao escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou por volta de 1850, em Luxor, no Egito. É também designado como papiro de Ahmes, nome do escriba egípcio que o copiou.



GAY ROBINS & CHARLES SHUTE - MUSEU BRITÂNICO, LONDRES

A seguir, destacamos dois problemas.

Neste momento, reúna os alunos em grupo e proponha a resolução dos problemas apresentados. Socialize os procedimentos de cada grupo com a classe.

O primeiro faz parte da coleção do papiro Rhind, e o segundo se baseia em uma das traduções do manuscrito *Lilavati*. Esses problemas serão resolvidos na página 120.

Determinada quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade? 12

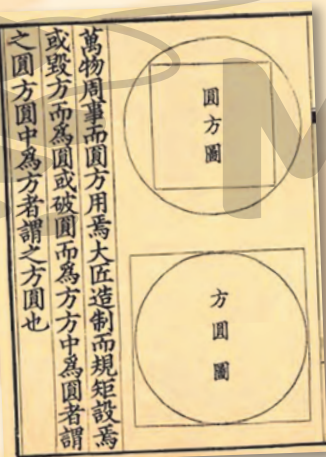
...o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foi para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar. 30

Você saberia resolver esses problemas?

Embora não seja fácil, é possível encontrar as respostas por meio de tentativas.

Neste capítulo, você vai aprender novos recursos que podem facilitar a resolução de problemas como esses.

INSTITUTE FOR THE HISTORY OF NATURAL SCIENCE/CHINESE ACADEMY OF SCIENCES, BEIJING



Página do livro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* – um tratado de Álgebra escrito pelo matemático al-Khwarizmi, por volta de 825 d.C.



OXFORD UNIVERSITY, OXFORD

Página do *Zhou bi suan jing* ou *Chou pei suan ching* (100 a.C. e 100 d.C.), considerado o texto mais antigo da matemática chinesa. Esta reprodução corresponde a uma edição de 1213, do acervo da Biblioteca de Xangai. O texto não é apresentado por meio de problemas e respostas, mas, sim, em forma de diálogo.

PRINCETON UNIVERSITY PRESS, PRINCETON



Fragmento do manuscrito *Lilavati* (A bela), escrito em 1150 pelo matemático indiano Bhaskara. *Lilavati* é uma das quatro partes de *Siddhanta siromani* e contém 278 versos que tratam de vários assuntos.

2 Expressões algébricas

Em algumas situações, você teve a oportunidade de trabalhar com expressões matemáticas. Observe estas expressões, escritas na linguagem comum e na linguagem simbólica da Matemática.

a) Dois vezes cinco $\rightarrow 2 \cdot 5$

b) Três vezes quatro mais um $\rightarrow 3 \cdot 4 + 1$

c) O quadrado de dois sétimos somado a dois quintos $\rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{2}{5}$

Quando falamos de um número racional qualquer, podemos usar uma letra para representá-lo. Veja alguns exemplos.

a) O dobro de um número $\rightarrow 2 \cdot x$

b) O triplo de um número mais quatro $\rightarrow 3 \cdot x + 4$

c) A metade de um número menos um terço $\rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

d) Um número mais seus três quintos $\rightarrow x + \frac{3}{5} \cdot x$

e) A soma de dois números inteiros consecutivos $\rightarrow x + (x + 1)$

Note que, em todos esses exemplos, a letra x pode ser qualquer número racional. Dizemos, então, que x é uma **variável**. Conforme o valor assumido por x , há um valor para a expressão matemática.

As expressões $2 \cdot x$, $3 \cdot x + 4$, $\frac{x}{2} - \frac{1}{3}$, $x + \frac{3}{5} \cdot x$ e $x + (x + 1)$ são exemplos de **expressões algébricas**.

Em expressões como essa, a variável não precisa ser obrigatoriamente a letra x ; ela pode ser representada por qualquer outra letra. Observe.

a) O dobro de um número $\rightarrow 2 \cdot y$ ou $2y$ (sem o sinal de multiplicação)

b) O triplo de um número menos dez $\rightarrow 3z - 10$

c) O quadrado da metade de um número menos um terço desse número $\rightarrow \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}t$

d) A soma de um número com o dobro de outro número $\rightarrow a + 2b$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Escolha uma letra para representar um número e traduza para a linguagem simbólica da Matemática cada expressão relativa a esse número.

a) O triplo desse número mais dez. respostas possíveis: $3x + 10$

b) Esse número menos quatro. $a - 4$

c) O quádruplo desse número. $4b$

d) A terça parte desse número. $\frac{1}{3}y$

e) Três quartos desse número. $\frac{3}{4}z$

2 Leia e responda à questão.

Faltam apenas duas figurinhas para que meu amigo tenha o dobro do número de figurinhas que eu tenho.

Se indicássemos por y o número de figurinhas que eu tenho, como poderíamos representar o número de figurinhas que meu amigo tem?

$2y - 2$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Sendo a e b dois números racionais, represente na linguagem simbólica da Matemática:

- a) a soma desses números; $a + b$
- b) a diferença entre esses números; $a - b$ ou $b - a$
- c) o dobro de a menos o triplo de b ; $2a - 3b$
- d) o produto desses números. $a \cdot b$

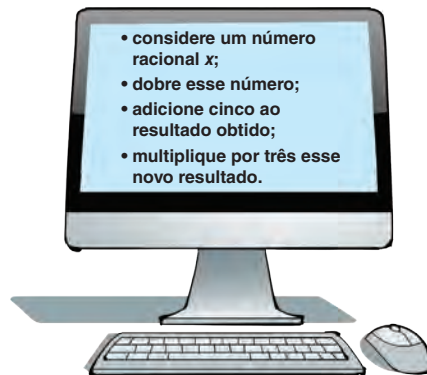
4 Nas expressões a seguir, a letra x representa um número. Identifique cada expressão escrita na linguagem comum com a expressão algébrica correspondente, escrevendo em seu caderno o número romano e a letra que estão associadas a elas.

- I. O dobro do quadrado de x . e
- II. O quadrado do dobro de x . c
- III. A diferença entre o dobro de x e 3. a
- IV. O dobro da diferença entre x e 3. g
- V. A divisão da soma de x com 3 por 2. f
- VI. A soma dos quadrados dos números x e 3. b
- VII. O quadrado da soma dos números x e 3. d

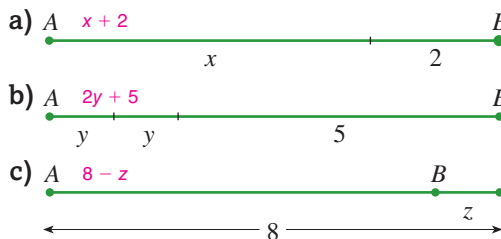
- a) $2x - 3$
- b) $x^2 + 3^2$
- c) $(2x)^2$
- d) $(x + 3)^2$
- e) $2x^2$
- f) $\frac{x + 3}{2}$
- g) $2(x - 3)$

6. Se surgir a expressão $2(y + 5)$ para o item b, retome a escrita do dobro de um número e explore essa representação.

5 Indique no caderno a expressão algébrica que se obtém segundo este comando: $(2x + 5) \cdot 3$



6 Nas figuras abaixo, as letras x , y e z representam a medida de um segmento. Indique, em seu caderno, a expressão algébrica correspondente à medida do segmento \overline{AB} em cada caso.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CLAUDIO CHIYO

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega para resolver este problema.

Em uma brincadeira, Lucas falava um número, e Lia dizia outro, segundo uma regra criada por ela. O objetivo da brincadeira era fazer Lucas descobrir a regra inventada por Lia. Vejam a sequência de números que eles falaram.

Lucas	1	2	3	4	5	9	15	20
Lia	4	5	6	7	8	12	18	23

- a) Descubram a regra que Lia criou e escrevam essa regra na forma de expressão algébrica. $x + 3$
- b) Se Lucas falasse o número 25, que número Lia diria? E se ele falasse -3 ? 28 ; zero
- c) Que número Lucas deveria dizer para que Lia falasse o maior número possível?

Mais tarde, Lia passou a falar os números, e Lucas, segundo sua nova regra, dizia outro número. Vejam a nova sequência de números que eles falaram.

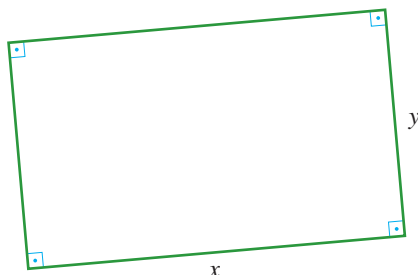
Lia	1	2	3	4	5	9	15	20
Lucas	7	9	11	13	15	23	35	45

- d) Descubram a regra de Lucas e a escrevam na forma de expressão algébrica. $2x + 5$
- e) Se Lia falasse o número zero, que número Lucas diria? E que número ela deveria dizer para que a resposta dele fosse o número 5? 5 ; zero
- f) Que número Lia deveria dizer para que Lucas falasse o maior número possível?

Nos itens c e f, espera-se que os alunos percebam que não é possível Lucas ou Lia falarem o maior número, uma vez que sempre haverá um número maior que aquele falado. Se achar oportuno, peça aos alunos que, em duplas, criem suas próprias regras para que o outro a descubra.

3 Valor numérico de uma expressão algébrica

Considere o retângulo em que x representa a medida da base e y , a medida da altura.



NELSON MATSUDA

Lembrando que o perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados, então o perímetro desse retângulo é dado pela expressão:

$$x + x + y + y = 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2x + 2y$$

Dessa maneira, usando a expressão $2x + 2y$, podemos calcular o perímetro de um retângulo cuja medida da base é 50 cm, e a medida da altura, 20 cm.

Nesse caso, $x = 50$ e $y = 20$.

Veja.

$$2x + 2y = 2 \cdot (50) + 2 \cdot (20) = 100 + 40 = 140$$

Logo, o perímetro desse retângulo é 140 cm.

Quando trocamos as letras da expressão por números e efetuamos as operações indicadas, o número obtido é chamado de **valor numérico**.

No exemplo anterior, o número 140 é o valor numérico da expressão $2x + 2y$ para $x = 50$ e $y = 20$.

Considerando agora a região retangular delimitada pelo retângulo acima e lembrando que a área de uma região retangular é o produto das medidas da base e da altura, então sua área é dada pela expressão:

$$x \cdot y \text{ ou } xy$$

Como $x = 50$ e $y = 20$, medidas em centímetro, temos:

$$xy = 50 \cdot 20 = 1.000$$

A área dessa região retangular é 1.000 cm².

Agora, veja como calcular o valor numérico da expressão $p^2 + 2pq$ para $p = -2$ e $q = \frac{3}{5}$.

Substituindo na expressão a letra p por -2 e a letra q por $\frac{3}{5}$, temos:

$$p^2 + 2pq = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$$

Logo, o valor numérico da expressão $p^2 + 2pq$, para $p = -2$ e $q = \frac{3}{5}$, é $\frac{8}{5}$ ou 1,6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 Sabendo que um triângulo é equilátero, determine uma expressão algébrica que indique o perímetro desse triângulo. *resposta possível: $3x$*

8 Calcule o valor numérico das expressões.

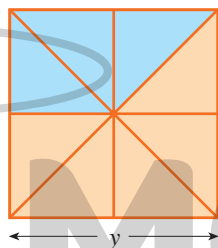
a) $3x + 5$ para $x = -6$ *-13*

b) $2a + 7b$ para $a = -3$ e $b = \frac{1}{7}$ *-5*

c) $a^2 + 3a$ para $a = -\frac{1}{2}$ *$-\frac{5}{4}$*

d) $a^2 - 2ab + b^2$ para $a = -5$ e $b = 2$ *49*

9 Esta região quadrada está dividida em 8 partes iguais.



Determine a expressão que representa:

a) a área da região quadrada; y^2

b) o perímetro do quadrado que delimita essa região; $4y$

c) a área da parte laranja; $\frac{5}{8}y^2$

• Agora, determine o valor numérico da área da região quadrada para $y = 2,1$. *4,41*

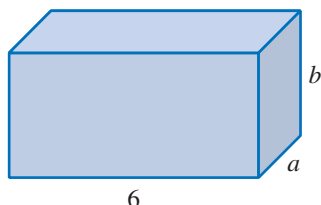
10 Considerando este bloco retangular, determine a expressão algébrica que represente:

a) o perímetro da face superior; $12 + 2a$

b) a área da face superior; $6a$ *$24 + 4a + 4b$*

c) a soma das medidas de todas as arestas;

d) o volume do bloco retangular. $6ab$



11 Uma empresa de confecção assume um custo mensal fixo de R\$ 10.000,00 para o pagamen-

to de algumas despesas com funcionários e impostos, além do custo de R\$ 2,50 para cada camiseta produzida.

O custo mensal para essa empresa pode ser dado pela expressão algébrica:

$$C = 10.000 + 2,5x,$$

em que C é o custo mensal, em real, e x , o número de camisetas produzidas.



R\$ 12.500,00

a) Determine o custo para a empresa no mês em que eles fabricaram 1.000 camisetas.

b) Se cada camiseta for vendida a R\$ 20,00, a empresa terá lucro? Em caso afirmativo, de quanto? *sim; R\$ 7.500,00*

12 Em certa cidade, o plano residencial de uma linha telefônica, com direito a 100 minutos iniciais, custava R\$ 39,90. Se o consumidor excedesse esses 100 minutos, ele pagaria R\$ 0,08 por minuto excedente.

a) Escreva no caderno uma expressão algébrica que represente a situação em que o consumidor excede os 100 minutos.

b) Quanto um consumidor pagará se usar 82 minutos em um mês? E se usar 320 minutos? *R\$ 39,90; R\$ 57,50*



12. a) $V = 39,90 + 0,08x$, em que V é o valor da conta e x , o número de minutos excedentes.

4 Termos algébricos

Observe as figuras abaixo.

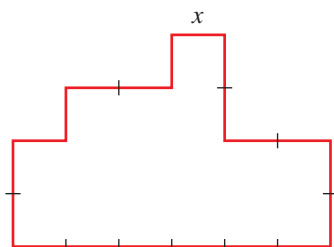


Figura 1

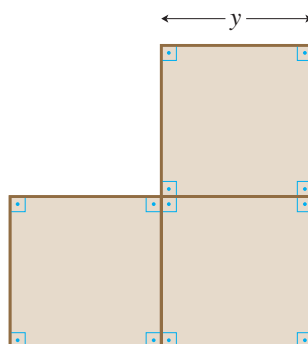


Figura 2

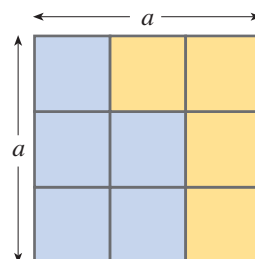


Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUUDA

Os lados da figura 1 foram divididos em segmentos de mesma medida. Considerando a medida desses segmentos igual a x , dizemos que o perímetro da figura é dado por $20x$.

A figura 2 é formada por três regiões quadradas de lados de mesma medida. Considerando a medida dos lados dessas regiões iguais a y , escrevemos a área da figura como $3y^2$.

Como as medidas dos lados da figura 3 valem a , sua área será dada por a^2 , enquanto a área da região azul será $\frac{5}{9}a^2$.

As expressões $20x$, $3y^2$ e $\frac{5}{9}a^2$ são exemplos de **termos algébricos**.

Em um termo algébrico, distinguimos o **coeficiente** (parte numérica) e a **parte literal** (parte com letras). No quadro a seguir, mostramos alguns termos algébricos e destacamos, em cada um, o coeficiente e a parte literal.

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$5x$	5	x
$-m$	-1	m
$-\frac{3}{4}xy^2$	$-\frac{3}{4}$	xy^2
$-\frac{ax}{6}$	$-\frac{1}{6}$	ax

Observe que um termo algébrico possui apenas **um** coeficiente e **uma** parte literal.

Agora, considere a expressão algébrica: $2a - 5b$. Essa expressão possui dois termos algébricos: $2a$ e $-5b$. O coeficiente de a é 2, e o de b é -5.

OBSERVAÇÕES

- ▶ Um número racional é considerado “termo algébrico sem parte literal”. Assim, a expressão $x^2 - 5x + 6$ tem três termos algébricos: x^2 , $-5x$ e 6. O coeficiente de x^2 é 1, o coeficiente de $-5x$ é -5, e 6 é o termo sem parte literal.
- ▶ Note que a soma de termos algébricos fornece uma expressão algébrica. Por exemplo:

$$x^2 + (-5x) + 6 = x^2 - 5x + 6$$

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Termos semelhantes

A medida do segmento da figura 1 é representada por $3x$.

O perímetro do pentágono da figura 2 é representado por $5x$.

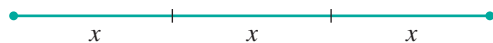


Figura 1

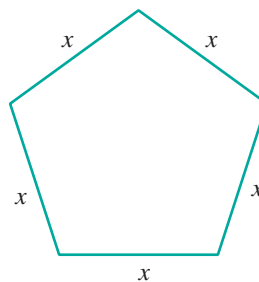


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

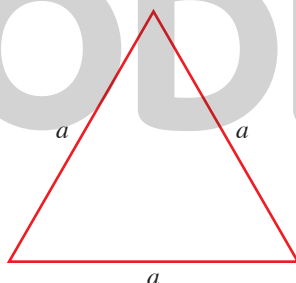
Os termos algébricos $3x$ e $5x$ têm a mesma parte literal (x); dizemos, então, que eles são **termos semelhantes**.

Veja outros exemplos.

- a) $-2ax$ e $8ax$ são termos semelhantes, porque possuem a mesma parte literal (ax).
- b) $5ax^2$ e $2a^2x$ não são termos semelhantes, porque as partes literais são diferentes ($ax^2 \neq a^2x$), embora as variáveis, a e x , sejam as mesmas.

Simplificação de expressões algébricas e redução de termos semelhantes

O triângulo abaixo é equilátero, isto é, todos os seus lados têm mesma medida, que indicamos pela letra a .



Então, o perímetro desse triângulo é dado por:

$$a + a + a$$

Como o triângulo é equilátero, podemos calcular seu perímetro obtendo o triplo da medida do lado, ou seja, o perímetro também é dado por:

$$3a$$

Assim, é possível simplificar a expressão $a + a + a$ escrevendo $3a$.

Veja outros exemplos.

- a) Simplificar a expressão algébrica $2 \cdot (x + 6) + x$.

Para isso, vamos usar a propriedade distributiva da multiplicação:

$$2 \cdot (x + 6) + x = 2 \cdot x + 2 \cdot 6 + x = 2x + 12 + x = 3x + 12$$

Adicionamos os termos semelhantes.

b) Simplificar a expressão $\frac{15x + 9}{3} + x + 4$.

$$\frac{15x + 9}{3} + x + 4 = \frac{15x}{3} + \frac{9}{3} + x + 4 = 5x + 3 + x + 4 = 6x + 7$$

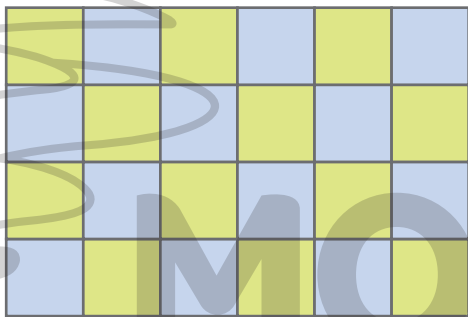
Separamos em duas frações. Adicionamos os termos semelhantes.

Na prática, para **reduzir termos semelhantes** a um único termo, adicionamos algebricamente os coeficientes e conservamos a parte literal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

13 Nesta figura, a área de cada região quadrada é representada por $25x^2$.



- Determine o termo algébrico que representa a área da figura toda. $600x^2$
- Indique o termo algébrico que representa a área da parte pintada de verde. $300x^2$
- Os dois termos obtidos são semelhantes? Justifique sua resposta. *Sim, pois possuem a mesma parte literal.*
- Calcule o valor numérico de $25x^2$ para $x = 1,2$. 36

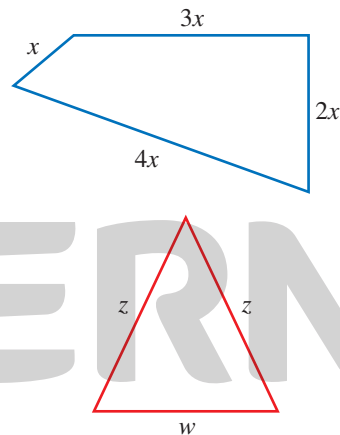
14 Reduza os termos semelhantes.

- $-4x + 6y + 10x - 2y - x$ $5x + 4y$
- $x + 7x + 10y - 3x$ $5x + 10y$
- $2x - 8y - 6y - y - 9x$ $-7x - 15y$
- $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}x + 2y$ $\frac{7}{6}x + \frac{9}{4}y$

15 Simplifique as expressões algébricas.

- $4(x - 1) + 3(x + 1)$ $7x - 1$
- $-2(2x - 4) + 5(-2x - 10)$ $-14x - 42$
- $\frac{2}{5}(x - 0,2) - \frac{1}{2}\left(3x - \frac{4}{25}\right)$ $-\frac{11}{10}x$

16 Considere os polígonos a seguir e responda às questões.



- Determine a expressão algébrica que representa o perímetro de cada polígono. $10x$; $2z + w$
- Se $x = 3,2$ cm, qual é o perímetro do quadrilátero? 32 cm
- Se $z = 6$ cm e $w = 5$ cm, qual é o perímetro do triângulo? 17 cm

17 No 1º semestre de 2016, os negócios de Alex tiveram o seguinte resultado: o lucro de fevereiro foi o dobro do de janeiro; o de março foi igual ao de janeiro; o de abril, igual ao de fevereiro; o de maio, o triplo do de janeiro; e o de junho, igual às quantias de janeiro e fevereiro juntas. Chamando de p o lucro do mês de janeiro, responda às questões.

- Qual é a expressão algébrica que indica o lucro de cada mês? p ; $2p$; p ; $2p$; $3p$; $3p$
- Qual é a expressão algébrica que indica o lucro de todo o semestre? $12p$

5 Sentenças matemáticas

Sentença é um conjunto de palavras com sentido completo. Algumas são consideradas ditados populares, por exemplo:

- a) De poeta e de louco, todo mundo tem um pouco.
- b) Mais difícil que encontrar uma agulha no palheiro é encontrar duas.
- c) Quem não tem cão caça como gato.
- d) Batatinha, quando nasce, espalha a rama pelo chão.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FERNANDA OLIVER

Quando uma sentença envolve números, ela é chamada de **sentença matemática**. Veja alguns exemplos.

- a) Cinco mais três é igual a oito.
- b) Dois é menor que vinte.
- c) Sete é diferente de nove.
- d) Doze é o dobro de seis.
- e) Dez é maior ou igual a dez terços.

Podemos escrever as sentenças matemáticas por extenso, como vimos nos exemplos, ou na linguagem simbólica da Matemática. Observe.

- a) $5 + 3 = 8$
- b) $2 < 20$
- c) $7 \neq 9$
- d) $12 = 2 \cdot 6$
- e) $10 \geq \frac{10}{3}$

As sentenças matemáticas podem ser classificadas como **verdadeiras** ou **falsas**.

Verificamos facilmente que as sentenças $5 + 7 = 12$ e $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ são verdadeiras, enquanto as sentenças $4 + 5 < 2$ e $7 - 2 = 4$ são falsas.

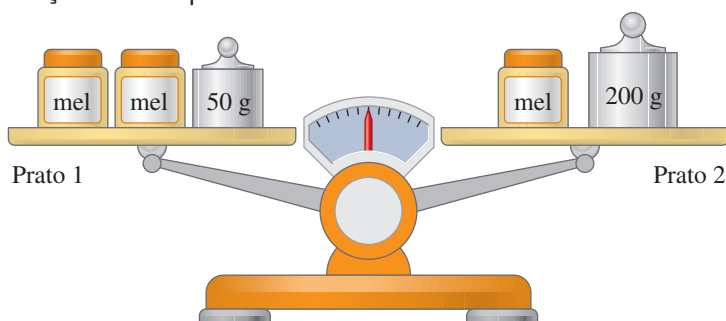
A sentença $10 \geq \frac{10}{3}$ é classificada como verdadeira, porque dez é maior **ou** igual a dez terços, e a conjunção **ou** liga duas afirmações:

- dez é maior que dez terços (verdadeira);
- dez é igual a dez terços (falsa).

Pelo fato de **ou** ser uma conjunção alternativa, basta uma dessas afirmações ser verdadeira para que a sentença também o seja.

6 Equações

Observe esta balança de dois pratos.



NELSON MATSUDA

Perceba que ela está em equilíbrio, pois os pratos estão na **mesma altura**, ou seja, o total da massa dos objetos colocados no prato 1 é **igual** ao total da massa dos objetos colocados no prato 2.

Representando por x a massa, em grama, de cada pote de mel, podemos escrever:

$$x + x + 50 = x + 200$$

Essa sentença matemática é expressa por uma **igualdade** e apresenta um elemento desconhecido. Ela é um exemplo de **equação**.

Equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números.

Veja outros exemplos de equação.

a) $7x + \frac{5}{2} = 4$

b) $2y^2 - 3y + 7 = 0$

c) $2x + 3y = 8$

A expressão à esquerda do sinal de igual chama-se **primeiro membro** da equação, e a expressão à direita do sinal de igual, **segundo membro** da equação.

Observe mais exemplos.

a) $2y - 4 = 6$

b) $2z^2 + 4 = z - 6$

c) $a + 1 = \frac{b}{3}$

Em uma equação, os elementos desconhecidos (letras que representam números) são chamados de **incógnitas**.

Nos exemplos anteriores, podemos destacar que:

- na equação $2y - 4 = 6$, a incógnita é y ;
- na equação $2z^2 + 4 = z - 6$, a incógnita é z ;
- na equação $a + 1 = \frac{b}{3}$, as incógnitas são a e b .

OBSERVAÇÃO

- ▶ Nem toda igualdade é uma equação. Por exemplo, $3 + 5 = 8$ não é uma equação, porque não tem elemento desconhecido.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18. $3x - 9 = x + 6$
 $2y - 9 = 21$
 $9y^2 - 7y = 0$

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

18 Entre as sentenças abaixo, copie em seu caderno somente as equações.

- a) $3x - 9 = x + 6$ d) $3x - 1 < 8$
 b) $2y - 9 = 21$ e) $9^2 - 7^2 = 32$
 c) $5 + 7 = 12$ f) $9y^2 - 7y = 0$

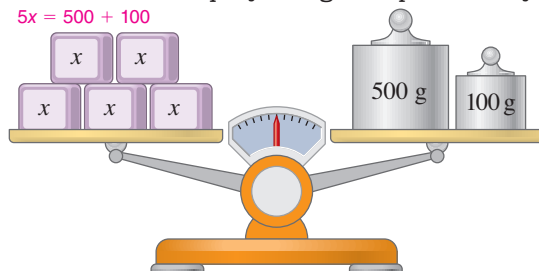
19 Escreva a equação que tem por primeiro membro a expressão $x^2 - 2x$ e por segundo membro, $3x - 6$. $x^2 - 2x = 3x - 6$

Na equação escrita, substitua x por 2 e calcule o valor numérico de cada membro. Faça o mesmo substituindo x por 3. O que aconteceu de comum nos dois casos?

Acontece o mesmo se você substituir x por 4?
 O valor numérico do 1º membro é igual ao do 2º membro.
 Não acontece o mesmo se substituir x por 4.

20 Na equação $4y^2 - 5y + 3 = 0$, identifique o primeiro e o segundo membro. Se você trocar de lugar os membros dessa equação, ela tem seu significado alterado? Justifique sua resposta.

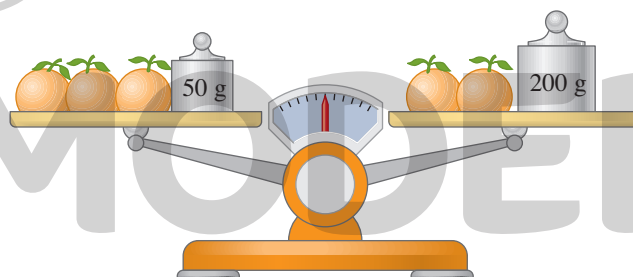
21 Indicando a massa, em grama, de cada cubo por x , determine a equação sugerida pela balança.



NELSON MATSUDA

► Raiz de uma equação

Observe outra balança.



NELSON MATSUDA

No prato da esquerda, temos 3 laranjas e um peso de 50 g. No prato da direita, temos 2 laranjas e um peso de 200 g. Vamos descobrir qual é a massa de cada laranja.

Considerando cada laranja com x gramas, podemos representar essa situação pela equação:

$$3x + 50 = 2x + 200$$

O valor de x que torna a igualdade verdadeira é 150, pois, ao substituirmos x por 150 na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 3x + 50 &= 2x + 200 \\ 3 \cdot 150 + 50 &= 2 \cdot 150 + 200 \\ 450 + 50 &= 300 + 200 \\ 500 &= 500 \text{ (verdadeira)} \end{aligned}$$

Como x representa a massa, em grama, de cada laranja, concluímos que cada laranja tem 150 gramas.

O valor **150** é chamado de **raiz da equação** $3x + 50 = 2x + 200$.

Um número é denominado **raiz de uma equação** quando, ao substituir a incógnita por ele, obtemos uma sentença verdadeira.

Esse procedimento de substituição da incógnita (letra) por um número serve para verificar se esse número é ou não raiz da equação.

Analise estes exemplos.

- a) Para verificar se o número 5 é raiz da equação $x + 2 = 7$, substituímos x por 5. Assim, temos:

$$\begin{aligned}5 + 2 &= 7 \\7 &= 7 \text{ (verdadeira)}\end{aligned}$$

Logo, 5 é a raiz da equação $x + 2 = 7$.

- b) Para verificar se o número -3 é raiz da equação $2y + 15 = y + 12$, substituímos y por -3 . Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned}2 \cdot (-3) + 15 &= -3 + 12 \\-6 + 15 &= 9 \\9 &= 9 \text{ (verdadeira)}\end{aligned}$$

Logo, -3 é a raiz da equação $2y + 15 = y + 12$.

- c) Para verificar se o número 4 é raiz da equação $3z + 2 = 5$, substituímos z por 4. Assim, temos:

$$\begin{aligned}3 \cdot 4 + 2 &= 5 \\12 + 2 &= 5 \\14 &= 5 \text{ (falsa)}\end{aligned}$$

Logo, 4 não é a raiz da equação $3z + 2 = 5$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

► Conjunto universo e solução de uma equação

Para conseguir resolver uma equação, precisamos saber quais são os valores que a incógnita pode assumir e quais são os valores que a tornam verdadeira.

Vamos analisar as três sentenças abaixo.

- 1ª) “Um **número natural par** elevado ao quadrado e somado com 5 dá 21.”
Escrevendo essa sentença na linguagem matemática, temos a equação:

$$x^2 + 5 = 21$$

Como x representa um **número natural par**, ele pode assumir qualquer valor do conjunto $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$. Esse conjunto pode ser chamado de **conjunto universo** da equação dada.

Conjunto universo é aquele formado por todos os valores que a incógnita pode assumir.

Geralmente, o conjunto universo é representado pela letra U .

Vamos verificar se os números -4 e 4 tornam a equação $x^2 + 5 = 21$ verdadeira.

- Para $x = -4$, temos:

$$(-4)^2 + 5 = 21$$

$$16 + 5 = 21 \text{ (verdadeira)}$$

- Para $x = 4$, temos:

$$4^2 + 5 = 21$$

$$16 + 5 = 21 \text{ (verdadeira)}$$

Portanto, os números -4 e 4 são as raízes da equação. Note que -4 não é um número natural; então, ele não está no conjunto universo $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$. Logo, -4 não é solução da equação.

A solução da equação $x^2 + 5 = 21$ no conjunto universo dado (números naturais pares) é 4 .

- 2ª) “Um **número inteiro par** elevado ao quadrado e somado com 5 dá 21 .”

Nesta sentença, ampliamos o conjunto universo da sentença anterior, considerando, agora, que o número seja inteiro e par.

A equação correspondente é $x^2 + 5 = 21$, e o conjunto universo é

$$U = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Sabemos que as raízes dessa equação são -4 e 4 . Como ambas pertencem ao conjunto universo, a solução é -4 e 4 .

- 3ª) “Um **número natural ímpar** elevado ao quadrado e somado com 5 dá 21 .”

A equação correspondente é $x^2 + 5 = 21$, e o conjunto universo é $U = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

As raízes dessa equação são -4 e 4 . Como nenhuma delas está no conjunto universo (números naturais ímpares), dizemos que essa equação não tem solução no conjunto universo dado.

Soluções de uma equação são os valores do conjunto universo que tornam a sentença verdadeira.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 22 Em uma das fichas está impresso o número que é a raiz da equação $4y + 8 = y + 17$.



Escreva que número é esse. 3

- 23 Verifique, em seu caderno, se 2 é raiz das equações:

a) $x^2 = 4$ sim

b) $-2x = 4$ não

c) $2^x = 4$ sim

d) $x - 2 = 4$ não

- 24 Crie duas equações diferentes que tenham como raiz o número: resposta pessoal

a) 8 ;

d) 0 ;

b) -8 ;

e) $\frac{1}{2}$.

c) $-0,8$;

- 25 Determine o conjunto universo e a solução da equação correspondente a cada sentença.

a) y é um número natural par que, dividido por 2 , dá 3 . $U = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$; $y = 6$

b) a é um número inteiro cujo módulo é 3 .

c) x é um número natural que, dividido por -2 , dá 3 . $U = \mathbb{N}$
A equação não tem solução em \mathbb{N} .

25. b) $U = \mathbb{Z}$; $a = -3$ ou $a = 3$

7 Equações do 1º grau com uma incógnita

Considere estas equações como exemplos.

a) $2x + 7 = 5$

c) $5x^2 - 8x + 7 = 0$

b) $3x + 2 = x - 3$

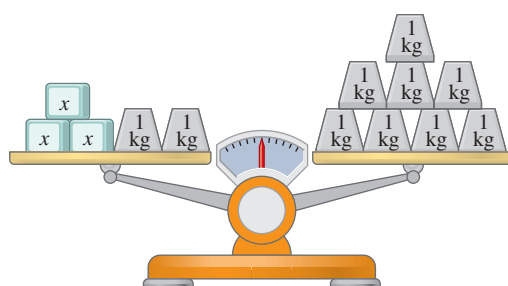
d) $x + y = 0$

As duas primeiras equações têm uma só incógnita (a letra x) com expoente 1. Elas são exemplos de **equações do 1º grau com uma incógnita**; as outras não são.

Neste capítulo, estudaremos apenas as equações do 1º grau com uma incógnita.

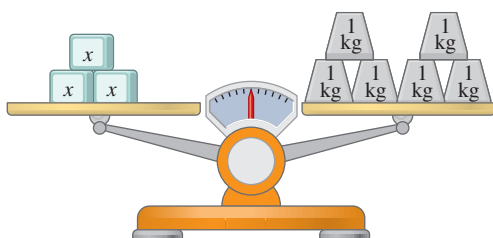
Equações equivalentes

Considere esta situação.



A balança acima está em equilíbrio. No prato da esquerda, há 3 pacotes, cada um com x quilogramas, e 2 pesos de 1 kg. No prato da direita, há 8 pesos de 1 kg. Podemos representar essa situação pela equação $3x + 2 = 8$.

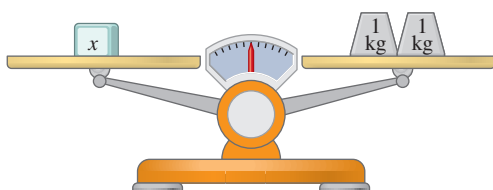
Retirando dois pesos de 1 kg de cada prato, a balança continua em equilíbrio, e a situação passa a ser esta:



Observe que o que foi feito corresponde a subtrair 2 de cada membro da equação $3x + 2 = 8$.

$$\begin{array}{l} 3x + 2 = 8 \\ -2 \quad \quad \quad -2 \\ \hline 3x + 2 - 2 = 8 - 2 \\ 3x = 6 \end{array}$$

Deixando em cada prato a terça parte do que ele contém, a balança continua em equilíbrio. Passamos a ter a seguinte situação:



Agora, o que foi feito corresponde a dividir por 3 os dois membros da equação $3x = 6$.

$$\begin{array}{l} 3x = 6 \\ :3 \quad \quad \quad :3 \\ \hline \frac{x}{3} = \frac{6}{3} \\ x = 2 \end{array}$$

NELSON MATSUJDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Verificamos que o número 2 é solução das equações $3x + 2 = 8$, $3x = 6$ e $x = 2$.

$$3x + 2 = 8$$

$$3 \cdot 2 + 2 = 8 \text{ (verdadeira)}$$

$$3x = 6$$

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (verdadeira)}$$

$$x = 2$$

$$2 = 2 \text{ (verdadeira)}$$

Como 2 é a solução das três equações, dizemos que elas são **equações equivalentes**.

Quando duas ou mais equações do 1º grau têm a mesma solução, em um mesmo conjunto universo, são chamadas de **equações equivalentes**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 Que equação se obtém quando multiplicamos os dois membros de $3x = 8$ por 5? $15x = 40$

27 Verifique, em cada caso, se as equações são equivalentes ou não.

a) $x - 8 = 6$ e $x = 14$ **sim**

b) $2y - 1 = y$, $3y = -6$ e $y + 2 = 5$ **não**

c) $4z + 1 = z + 7$, $3z = 6$ e $z = 2$ **sim**

d) $2a + a = 12$, $2a = 6$ e $a = 3$ **não**

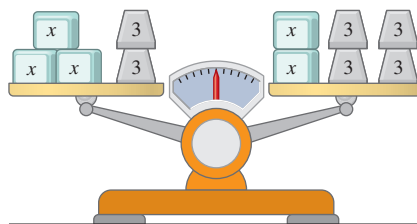
28 Observe as balanças 1 e 2 ao lado e responda em seu caderno.

a) O valor de x é o mesmo nas duas balanças? Justifique sua resposta.

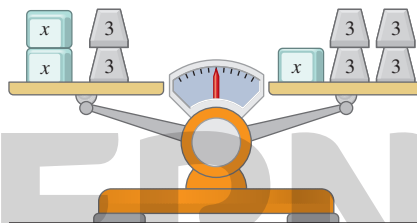
b) Encontre, para cada balança, a equação que a representa. Essas equações são equivalentes? $3x + 6 = 2x + 12$; $2x + 6 = x + 12$; **sim**

28. a) Sim, pois nos dois casos encontramos a equação equivalente $x = 6$.

Balança 1:



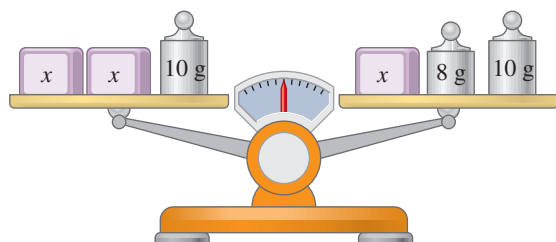
Balança 2:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

8 Resolução de equações

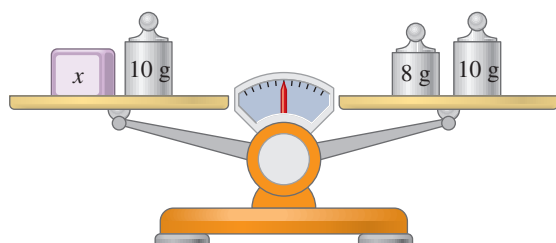
Na situação a seguir, vamos descobrir a massa do cubo indicada pela letra x .



A balança está em equilíbrio. A equação correspondente é:

$$2x + 10 = x + 8 + 10$$

Vamos retirar um cubo de x gramas de cada prato.

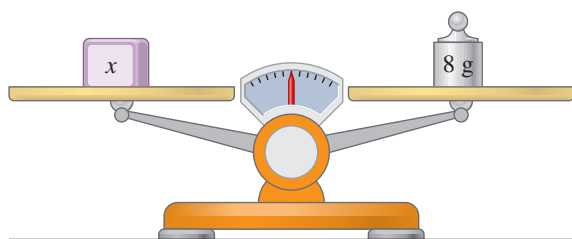


A balança continua em equilíbrio. A equação correspondente é:

$$x + 10 = 8 + 10$$

Agora, vamos retirar um peso de 10 g de cada prato.

NELSON MATSUDA



Nessa situação, a balança continua em equilíbrio. A equação correspondente é:

$$x = 8$$

As equações obtidas em cada passo são equivalentes. Assim, a massa de cada cubo é igual a 8 gramas.

A resolução de equações do 1º grau com uma incógnita é feita transformando-se cada equação em uma equação equivalente e mais simples, até que as soluções sejam obtidas.

Na resolução de equações, aplicaremos as propriedades que veremos a seguir.

Somando ou **subtraindo** um mesmo número aos dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira.

Como exemplo, vamos resolver a equação $2x - 1 = x + 5$ cujo conjunto universo é \mathbb{N} .

$$2x - 1 = x + 5$$

$$2x - 1 + 1 = x + 5 + 1 \rightarrow \text{Somando 1 aos dois membros.}$$

$$2x = x + 6 \rightarrow \text{Reduzindo os termos semelhantes.}$$

$$2x - x = x + 6 - x \rightarrow \text{Subtraindo } x \text{ dos dois membros.}$$

$$x = 6 \rightarrow \text{Reduzindo os termos semelhantes.}$$

Verificando:

$$2 \cdot 6 - 1 = 6 + 5$$

$$12 - 1 = 11$$

$$11 = 11 \text{ (verdadeira)}$$

Portanto, a solução da equação é 6.



Multiplicando ou **dividindo** os dois membros de uma equação por um número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à equação dada.

Como exemplo, vamos resolver a equação $5x = 20$ utilizando a propriedade anterior.

$$5x = 20$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5} \rightarrow \text{Dividindo os dois membros por 5.}$$

$$x = 4 \rightarrow \text{Efetuando as divisões.}$$

Verificando:

$$5 \cdot 4 = 20$$

$$20 = 20 \text{ (verdadeira)}$$

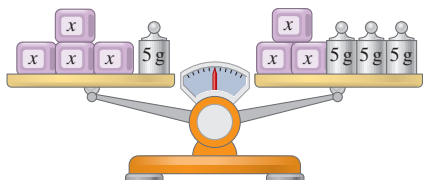
Portanto, a solução da equação é 4.



Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: DANIEL ZEPPA

29 O esquema a seguir mostra uma balança em equilíbrio.



- a) Determine a equação que a balança está representando. $4x + 5 = 3x + 15$
 b) Determine a equação que a balança representa quando se retiram de cada prato 3 cubos x e 1 peso de 5 g. $x = 10$
 c) Qual é a massa de cada cubo? 10 g

30 Resolva as equações aplicando as propriedades estudadas.

- a) $y + 9 = 3$ $y = -6$ d) $3x = -12$ $x = -4$
 b) $x - 12 = 15$ $x = 27$ e) $3x = 10$ $x = \frac{10}{3}$
 c) $y + 5 = -4$ $y = -9$ f) $5x = 90$ $x = 18$

31 Das equações da atividade anterior, se considerarmos como conjunto universo o conjunto dos números inteiros, todas as equações terão soluções?

E se considerarmos como conjunto universo o conjunto dos números naturais? Justifique suas respostas.

31. Não, a equação do item e não teria solução, pois $\frac{10}{3}$ não é um número inteiro.

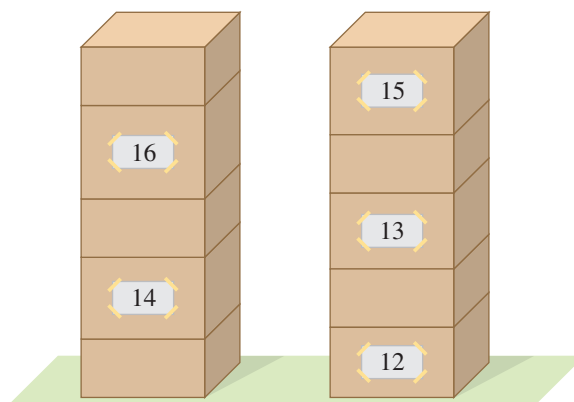
Não, as equações dos itens a, c, d e e não teriam solução, pois -6 , -9 , -4 e $\frac{10}{3}$ não são números naturais.

32 A raiz da equação

$2x + 1 + 5(x - 3) = 3(x + 1) + x$ é um número: alternativa d

- a) menor que -2 .
 b) maior que 30.
 c) inteiro.
 d) racional não inteiro.
 e) negativo.

33 Com as 10 caixas que tenho, fiz duas pilhas de mesma altura, conforme mostra o desenho.



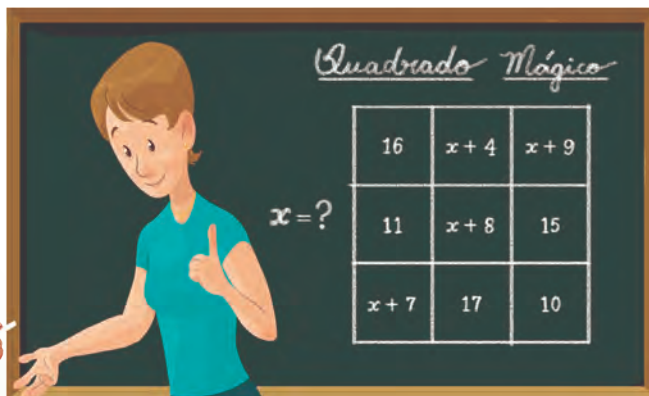
Observe que, em algumas caixas, coloquei um adesivo com um número que representa sua altura em centímetro. As que estão sem adesivo possuem a mesma altura.

- a) Calcule a altura das caixas sem adesivo. 10 cm
 b) Qual é a altura de cada pilha de caixas? 60 cm

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

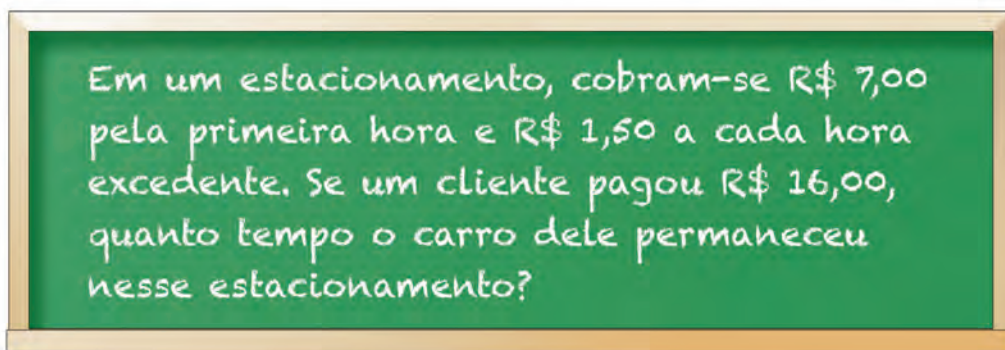
Pense mais um pouco...

Determine o valor de x no quadrado mágico abaixo, sabendo que a soma em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é a mesma. 5



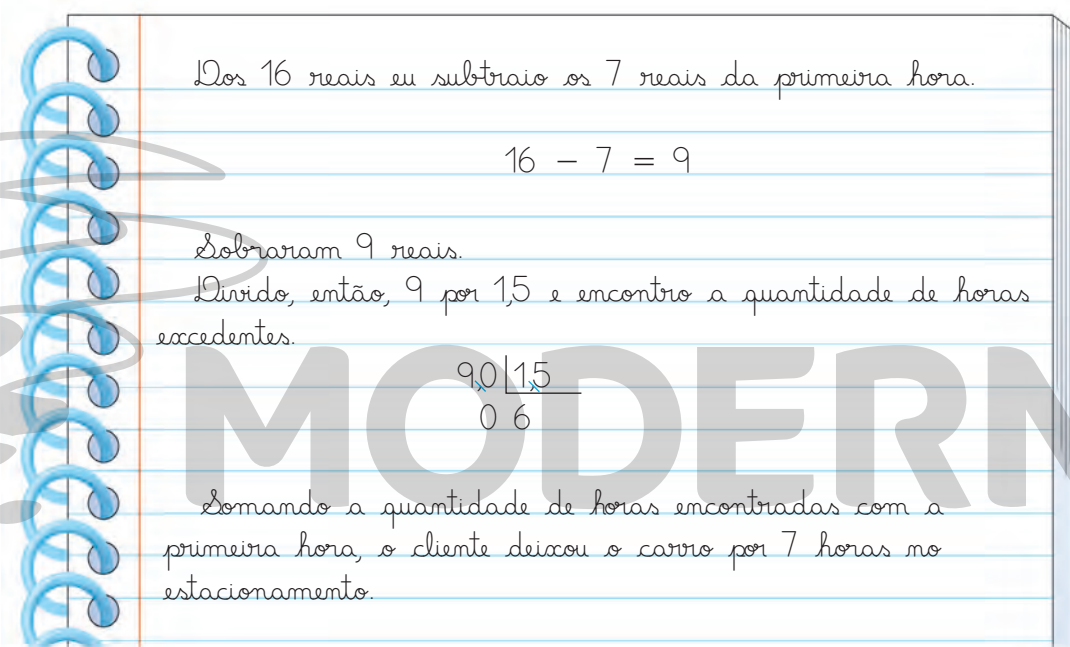
Equacionando problemas

O professor Paulo apresentou a seus alunos este problema:



JOSE LUIS JUHAS

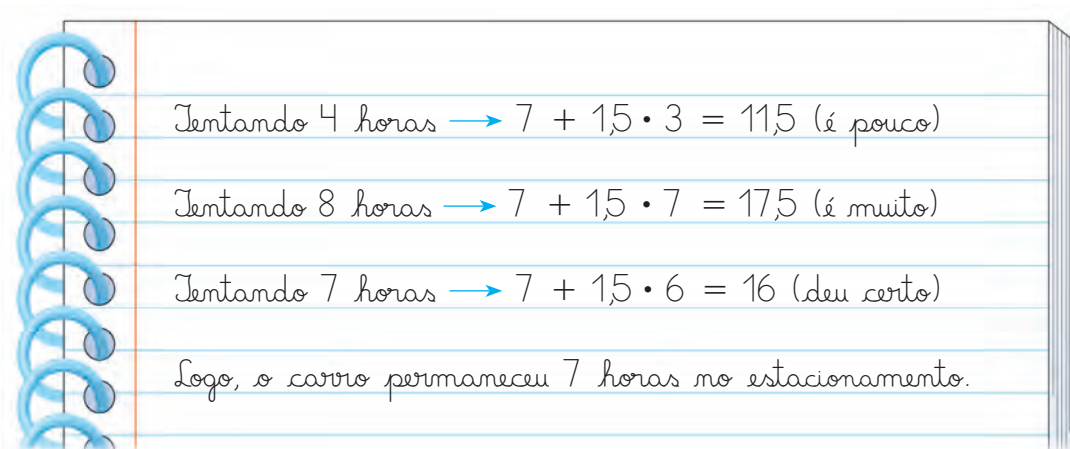
Lúcia resolveu o problema da seguinte maneira:



JOSE LUIS JUHAS

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Marcos, por sua vez, resolveu o problema por tentativas.



JOSE LUIS JUHAS

E Jair apresentou o seguinte raciocínio:

Indicando por x a quantidade de horas excedentes, temos:

$$7 + 1,5x = 16$$
$$7 + 1,5x - 7 = 16 - 7$$
$$1,5x = 9$$
$$\frac{1,5x}{1,5} = \frac{9}{1,5}$$
$$x = 6$$

Somando com a primeira hora, o total de horas que o carro permaneceu no estacionamento foi 7 horas.

OSÉ LUIS JUHAS

Note que os três alunos do professor Paulo resolveram corretamente o problema, empregando diferentes maneiras.

Com isso, você percebe que existem vários métodos para resolver um problema. O método da resolução por meio de equação, empregado por Jair, é um deles. Esse método, em muitos casos, facilita a resolução de problemas.

Veja mais algumas situações.

Situação 1

As reproduções das telas abaixo são assinadas por Elza Bernardes. Eu as comprei por R\$ 1.320,00. Pela tela A, paguei o dobro do que paguei pela tela B, e pela tela C, paguei o triplo do que paguei pela B. Quanto paguei pela tela C?

tela A



Frutas à mesa, óleo sobre tela, 77 cm x 54 cm, 1999.

tela B



Vila de pescadores, óleo sobre tela, 72 cm x 59 cm, 1987.

tela C



Choupana no Tietê, óleo sobre tela, 60 cm x 50 cm, 1990.

Indicando o valor da tela B por x , a tela A custou $2x$, e a tela C, $3x$.

Então, $x + 2x + 3x = 1.320$.

Resolvendo a equação, temos:

$$x + 2x + 3x = 1.320$$

$$6x = 1.320$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{1.320}{6}$$

$$x = 220$$

O valor da tela C é $3x$; logo:

$$3x = 3 \cdot 220 = 660$$

Portanto, paguei R\$ 660,00 pela tela C.

Situação 2

Danilo e Diego são ciclistas e resolveram percorrer uma estrada que tem um trecho asfaltado e outro de terra.

Danilo transpôs o trecho asfaltado e mais 6 km do trecho de terra. Depois, retornou ao ponto de partida.

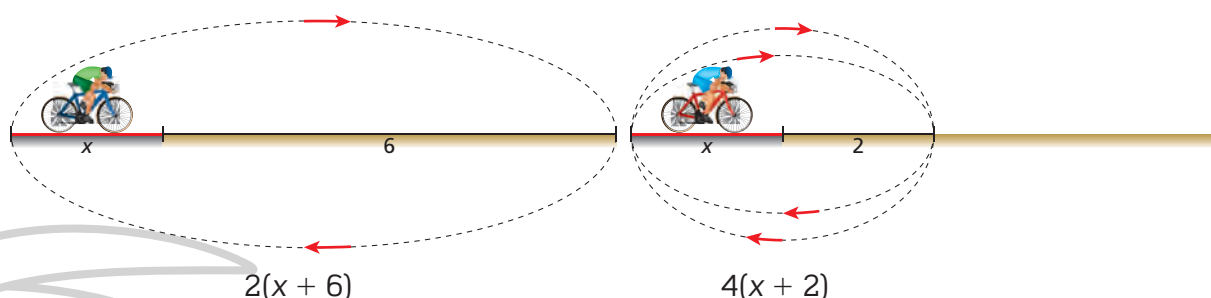
Diego percorreu o trecho asfaltado e mais 2 km do de terra, depois voltou ao ponto de partida. Ele fez esse percurso duas vezes.

Quando fizeram as contas, descobriram que haviam percorrido a mesma distância. Quantos quilômetros tem o trecho asfaltado?

Vamos esquematizar a situação indicando o comprimento do trecho asfaltado por x .

Número de quilômetros percorridos por Danilo.

Número de quilômetros percorridos por Diego.



Como o número de quilômetros percorridos é o mesmo, escrevemos a seguinte equação:

$$2(x + 6) = 4(x + 2)$$

Vamos eliminar os parênteses aplicando a propriedade distributiva da multiplicação. Em seguida, continuamos a resolução:



$$\begin{aligned} 2(x + 6) &= 4(x + 2) \\ 2x + 12 &= 4x + 8 \\ 2x + 12 - 4x - 12 &= 4x + 8 - 4x - 12 \\ 2x - 4x &= 8 - 12 \\ -2x &= -4 \\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{-4}{-2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Verificando:

$$\left. \begin{aligned} \text{Danilo percorreu: } 2(2 + 6) &= 2 \cdot 8 = 16 \\ \text{Diego percorreu: } 4(2 + 2) &= 4 \cdot 4 = 16 \end{aligned} \right\} \text{distâncias iguais (16 km)}$$

Logo, o trecho asfaltado tem 2 quilômetros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

34 Maria tem o dobro da idade de Lúcia. Se Maria tivesse 8 anos a menos, e Lúcia, 4 anos a mais, elas teriam a mesma idade.

- Representando a idade de Lúcia por y , como se representa a idade de Maria? $2y$
- Determine a equação correspondente ao problema. $2y - 8 = y + 4$
- Qual é a idade de Lúcia? **12 anos**
- Qual é a idade de Maria? **24 anos**

35 Uma mesa plástica custa o triplo de uma cadeira plástica. Duas dessas mesas e oito dessas cadeiras custam R\$ 226,80.

- Qual é o preço de uma cadeira? **R\$ 16,20**
- Qual é o preço de uma mesa? **R\$ 48,60**
- Quanto custam 5 mesas e 20 cadeiras? **R\$ 567,00**

36 Sabendo que hoje a soma da idade de Guilherme e de Laura é 70 meses, há quantos meses a foto abaixo foi tirada? **16 meses**



Guilherme, aos 18 meses, e Laura, aos 20 meses.

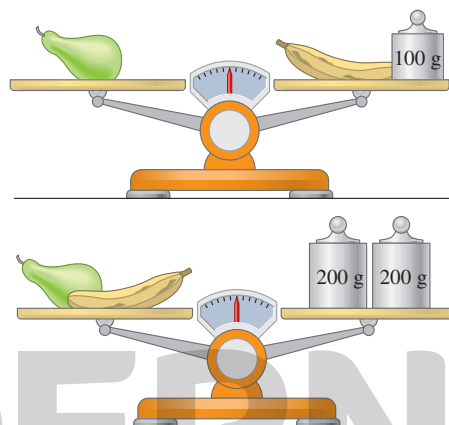
37 Em um jogo de basquete, foram marcados 118 pontos. A equipe vencedora ganhou por uma diferença de 12 pontos. Quantos pontos marcou a equipe vencedora? **65**



38 Quatro candidatos disputavam a prefeitura de uma cidade. Após a apuração dos 5.219 votos, foram obtidos os resultados: o primeiro candidato conseguiu 22 votos a mais que o segundo, 130 a mais que o terceiro e 273 votos a mais que o último. Quantos votos recebeu o candidato eleito? **1.411**

39 Ricardo e Julinho subiram juntos em uma balança, e o ponteiro da balança marcou 80 kg. Ricardo desceu, e Julinho pôde, então, verificar que ele tinha 6 kg a mais que Ricardo. Quantos quilogramas tem Julinho? **43 kg**

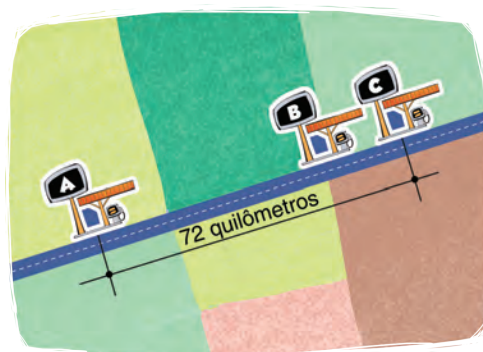
40 Observe o esquema das balanças e responda.



De acordo com o que as balanças indicam, quantos gramas tem a pera? E a banana?

250 g; 150 g

41 Na figura abaixo, uma estrada com três postos de gasolina, A, B e C, está representada. A distância entre A e B é o triplo da distância de B a C. Calcule mentalmente qual é a distância entre A e B. **54 quilômetros**



42 Invente um problema que possa ser resolvido pelas equações: **respostas pessoais**

a) $3x + 4 = 22$

b) $\frac{x}{2} - 8 = 1$

Pense mais um pouco...

André gosta de impressionar as pessoas fazendo adivinhações. Ele consegue descobrir o número pensado por uma pessoa. Observe a conversa entre ele e Fernando.



Reúna-se a um colega para responder às questões.

André representou por x o número pensado e chegou à expressão $4x$. Depois, resolveu a equação $4x = 20$.

- Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.
- Montem uma regra que possibilite adivinhar números, brinquem com outras duplas da classe e, em seguida, descubram as regras elaboradas pelas outras duplas. *respostas pessoais*

A Matemática na História

A palavra **álgebra** deriva da palavra árabe *al-jabr*, presente no título do livro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá, por volta do ano 825 d.C., pelo matemático árabe al-Khowarizmi.

A tradução literal do título desse livro é “Ciência da restauração ou reunião (*al-jabr*) e redução (*al-muqabalah*)”, que pode ser entendida matematicamente como a passagem de termos subtraídos para o outro membro de uma equação (*al-jabr*) e o cancelamento de termos semelhantes em membros opostos da equação (*al-muqabalah*).

A evolução do processo de resolução de equações abrange um período que vai de 1700 a.C. até 1700 d.C., caracterizando-se principalmente pelo uso de abreviações e pela utilização de vários métodos.

Vamos tratar aqui de um método utilizado inicialmente pelos egípcios, conhecido mais tarde na Europa como “regra da falsa posição”, cuja notação era verbal.

A regra da falsa posição é um método de resolução de equações que atribui inicialmente um valor à incógnita. Caso, ao se fazer a verificação, as condições dadas não forem satisfeitas, altera-se a estimativa inicial, multiplicando-a por um valor conveniente.

Atualmente, como temos à disposição um bom instrumental simbólico, pode parecer impossível que o uso da palavra tenha dificultado a resolução de uma equação.

Mas observe como a equação $x + \frac{x}{7} = 24$ era representada com a notação verbal.

“Qual deve ser o valor de um número que, ao ter sua sétima parte somada, torna-se equivalente a 24?”.



CLAUDIO CHIYO

Esse é um exemplo relativamente simples, que permite, entretanto, imaginar o quanto se torna complicado o enunciado na notação verbal quando a equação é mais complexa.

Para resolver essa equação, vamos atribuir a x o valor 7. Então:

$$x + \frac{x}{7} = 7 + \frac{7}{7} = 8$$

Observe que o resultado obtido difere de 24. Precisamos multiplicar 8 por 3 para obter o resultado desejado (24). Assim, o valor procurado de x será o valor estimado inicialmente (7) multiplicado por 3, ou seja, 21 (7×3).

Veja que 21 satisfaz a equação

$x + \frac{x}{7} = 24$, pois:

$$21 + \frac{21}{7} = 21 + 3 = 24$$

A regra da falsa posição tornou-se conhecida na Europa, na Idade Média, por meio dos árabes, aparecendo nas obras de al-Khowarizmi – a mais antiga aritmética árabe – e de muitos outros, como o matemático italiano Fibonacci (cerca de 1180-1250), o matemático alemão Johann Widmann

(1462-1498) e o matemático inglês Robert Recorde (1510-1558).

Esse método desapareceu no decorrer do século XVI, com a descoberta de métodos mais sofisticados para a resolução de equações mais complexas.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Resolva pelo método da falsa posição a equação $x + \frac{x}{2} = 21$ $x = 14$
- 2 Invente uma equação do 1º grau com uma incógnita e resolva-a pela regra da falsa posição. resposta pessoal

► **Voltando aos problemas históricos**

Agora podemos resolver os problemas propostos no início deste capítulo. Vamos começar com o problema do papiro Rhind. Observe-o ao lado.

Considerando a quantidade que queremos encontrar como x , podemos escrever a equação:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

$$4 \cdot \left(x + \frac{1}{4}x \right) = 15 \cdot 4 \rightarrow \text{Multiplicando ambos os membros da equação por 4.}$$

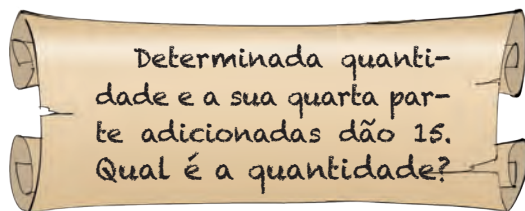
$$4x + x = 60$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5} \rightarrow \text{Dividindo ambos os membros da equação por 5.}$$

$$x = 12$$

Logo, a quantidade procurada é 12.

Agora vamos resolver o problema apresentado em *Lilavati*.



CLAUDIO CHIYO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

... o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foi para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar.

CLAUDIO CHIYO

Considerando a quantidade total de pérolas do colar como x , temos:

- Quantidade que caiu no chão: $\frac{1}{3}x$
- Quantidade que foi para debaixo da cama: $\frac{1}{5}x$
- Quantidade que a esposa apanhou: $\frac{1}{6}x$
- Quantidade que o amado apanhou: $\frac{1}{10}x$
- Quantidade que ficou no fio original: 6

A equação correspondente à situação descrita é:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x = x - 6$$

Assim como na adição de frações, procuramos frações equivalentes de mesmo denominador para fazer as operações.

$$\frac{10}{30}x + \frac{6}{30}x + \frac{5}{30}x + \frac{3}{30}x = x - 6$$

$$30 \cdot \left(\frac{10}{30}x + \frac{6}{30}x + \frac{5}{30}x + \frac{3}{30}x \right) = 30 \cdot (x - 6)$$

$$10x + 6x + 5x + 3x = 30x - 180$$

$$24x = 30x - 180$$

$$24x - 30x = 30x - 180 - 30x$$

$$-6x = -180$$

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{-180}{-6}$$

$$x = 30$$

Logo, o número total de pérolas no colar é 30.



CLAUDIO CHIYO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

43 Um número é somado a 10. Multiplica-se essa soma por 3, e o resultado é 72.

a) Qual das equações a seguir traduz o problema? $(n + 10) \cdot 3 = 72$
 $n + 10 \cdot 3 = 72$ ou $(n + 10) \cdot 3 = 72$

b) Que número é esse? 14

44 A uma festa compareceram 43 convidados. Se tivessem ido mais dois jovens, eles seriam o quádruplo do número de adultos.

a) Indicando o número de adultos por x , represente o número de jovens. $4x - 2$

b) Qual é a equação correspondente a essa situação?

c) Quantos adultos compareceram a essa festa? E quantos jovens?

9; 34

44. b) $x + 4x - 2 = 43$



45 Enuncie um problema que possa ser solucionado por meio da equação $4x - 45 = 3$. Depois, resolva-o. resposta pessoal; $x = 12$

46 Um terreno retangular tem 100 m de perímetro. O comprimento é o triplo da largura.

a) Indicando a largura desse terreno por x , determine o comprimento dele. $3x$

b) Determine o perímetro desse terreno, usando a letra x . $8x$

$8x = 100$

c) Escreva a equação associada ao problema.

d) Qual é a largura do terreno? E qual é o comprimento? 12,5 m; 37,5 m

e) Calcule a área do terreno. 468,75 m²

47 Dentro de um ano, Ana Maria terá o triplo da idade que tinha há nove anos. Qual é a idade de Ana Maria hoje? 14 anos

48 Considerando o conjunto universo o conjunto dos números racionais, calcule o valor de x nas equações.

a) $4(x + 3) = 20$ $x = 2$

b) $5(2x - 1) = 2(x + 4)$ $x = -\frac{13}{8}$

c) $10 - 2(x + 3) = 8 + 3(2x + 5)$ $x = -\frac{19}{8}$

d) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = x - \frac{2}{5}$ $x = -\frac{1}{4}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2x}{6} - \frac{1}{3}$ $x = -\frac{13}{2}$

f) $\frac{3y}{2} - 1 = \frac{3}{4} - 2y$ $y = \frac{1}{2}$

- 49 Determine o número inteiro mais próximo da solução da equação: -4

$$\frac{12x - 4}{6} - \frac{8x - 3}{9} = x + \frac{2x + 5}{3}$$

- 50 Sonhei que no Pantanal Mato-Grossense uma arara pousou em uma árvore e cumprimentou os jaburus que lá se encontravam.

— Bom dia a todos os 57 jaburus amigos que se encontram nesta árvore.

Os jaburus responderam em coro:

— Bom dia!

Um jaburu comentou:

— Nós não somos tantos, dona Arara. Mas, se a senhora somar a nós $\frac{1}{3}$ de nós e mais $\frac{1}{6}$ de nós, aí, sim, seremos 57.

Quantos jaburus havia na árvore? 38



Os jaburus são aves de grande porte, que vivem em bandos e constroem ninhos coletivos. Pantanal Mato-Grossense (MT).

- 51 Hoje, em uma classe, o número de meninos presentes é igual ao número de meninas presentes. Isso aconteceu, porque faltaram 5 meninas e 1 menino. Quantos alunos há nessa classe, se o número de meninas é $\frac{5}{9}$ do número de alunos da classe? 36

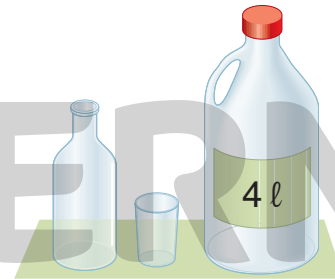
- 52 Resolva o problema a seguir que também está presente na obra *Lilavati*, de Bhaskara.

Um terço, um quinto e um sexto de uma quantidade de lótus foram oferecidos, respectivamente, ao Lorde Siva, ao Lorde Visnu e ao Sol; e um quarto foi oferecido a Parvati. Os seis lótus que sobraram foram presenteados ao venerável preceptor. Diz depressa o número total de lótus. 120



Lótus é uma flor aquática, muito comum na Índia.

- 53 Observe esta figura.



Com três copos de água, enche-se totalmente a garrafa. Colocando-se no garrafão quatro garrafas de água e mais um copo de água, ainda assim falta 0,75 litro de água para enchê-lo totalmente.

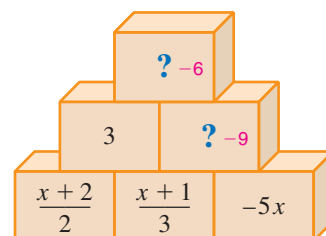
- a) Quantos litros de água cabem nesse copo? $0,25$ litro
b) Quantos litros de água cabem nessa garrafa? $0,75$ litro

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

A partir do bloco de cima, cada número é a soma dos dois números que estão nos blocos imediatamente abaixo.

- a) Descubra o valor de x . 2
b) Escreva no seu caderno os números que devem ser colocados nos blocos com “?”.



Média e estimativas

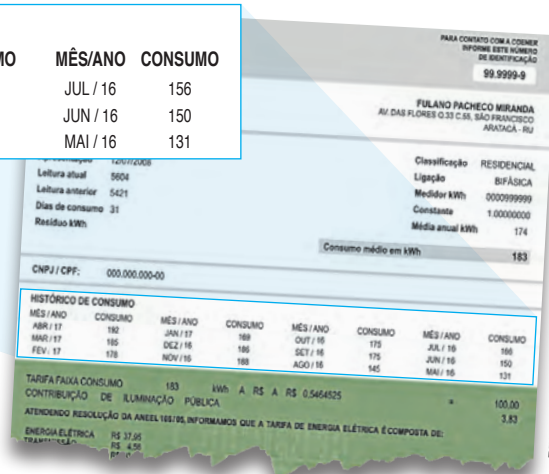
Quando algumas empresas fornecedoras de energia elétrica não conseguem fazer a leitura do consumo de uma residência, elas estimam o valor da próxima conta pela média do consumo dos últimos três meses.

Vamos ver um exemplo.

Considere parte da conta de energia elétrica da família Miranda.

NELSON MATSUUDA

HISTÓRICO DE CONSUMO							
MÊS/ANO	CONSUMO	MÊS/ANO	CONSUMO	MÊS/ANO	CONSUMO	MÊS/ANO	CONSUMO
ABR / 17	192	JAN / 17	169	OUT / 16	175	JUL / 16	156
MAR / 17	185	DEZ / 16	186	SET / 16	175	JUN / 16	150
FEV / 17	178	NOV / 16	188	AGO / 16	145	MAI / 16	131



Nos últimos três meses, temos:

Mês	Abril	Março	Fevereiro
Consumo	192 kWh	185 kWh	178 kWh

Calculando a **média**, temos:

$$\frac{192 + 185 + 178}{3} = \frac{555}{3} = 185$$

A fornecedora estimou que o consumo do mês de maio da família Miranda foi de 185 kWh.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Considerando a conta da família Miranda, responda às questões.
 - Supondo que a leitura não tivesse sido feita no mês de fevereiro, estime qual seria o valor cobrado para esse mês com base no consumo dos 3 meses anteriores. **181 kWh**
 - O valor que você encontrou foi igual ao consumido nesse mês? Qual foi a diferença? **não; 3 kWh**
 - Supondo que a fornecedora estime o valor cobrado para o mês com base na média de consumo dos 12 meses anteriores, qual seria a estimativa para o consumo de maio de 2016? **aproximadamente 169 kWh**
 - Que motivos podem ser levantados para a fornecedora considerar os últimos 3 meses, e não os últimos 12 meses, para fazer a estimativa de consumo de um mês? Converse com os colegas sobre isso. **resposta pessoal**
- Suponha que para uma residência tenham sido registradas as seguintes leituras:

Leitura de julho feita no dia 31 de julho: 8.120 kWh

Leitura de agosto feita no dia 23 de agosto: 8.396 kWh

Nesse caso, a fornecedora também faz uma estimativa para calcular o consumo de 31 dias.

Período entre uma leitura e outra: 23 dias

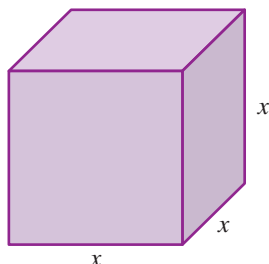
Consumo entre os 23 dias: $8.396 - 8.120 = 276$ (276 kWh)

A empresa calcula o **consumo médio** de um dia e, com base nesse valor, o de 31 dias.

Com essas informações, determine o consumo médio do mês de agosto. **372 kWh**

MODERNA

- 1 De acordo com o cubo representado abaixo, faça o que se pede.



- Escreva a expressão algébrica que representa a soma das medidas das arestas. $12x$
- Escreva a expressão algébrica que represente a área de cada face. x^2
- Escreva a expressão algébrica que represente a soma das áreas das faces. $6x^2$
- Escreva a expressão algébrica que represente o volume do cubo. x^3
- Qual é o volume desse cubo se $x = 1,2$ m? $1,728$ m³

- 2 Fernanda disse para José:

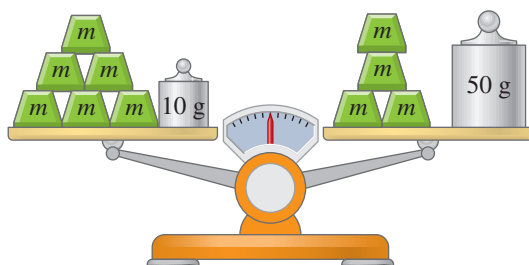
— Pense em um número. Já pensou? Então, dobre esse número, some 8, multiplique o resultado por 5, some 60 e tire 100. Quanto deu?

José respondeu para Fernanda:

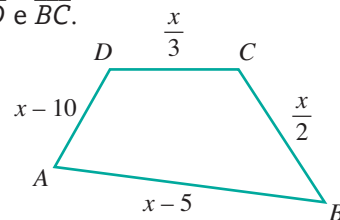
— Deu 10.

- Descubra o número em que José pensou e escreva a resposta no caderno. José pensou no número 1.
- Representando por x o número pensado e por y o resultado do cálculo proposto por Fernanda, escreva uma equação que relacione x com y . $(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100 = y$
- Se você simplificar a equação do item b, o que se pode dizer de y e x ? $y = 10x$

- 3 O esquema abaixo representa uma balança em equilíbrio. Calcule o valor de m . 20 g



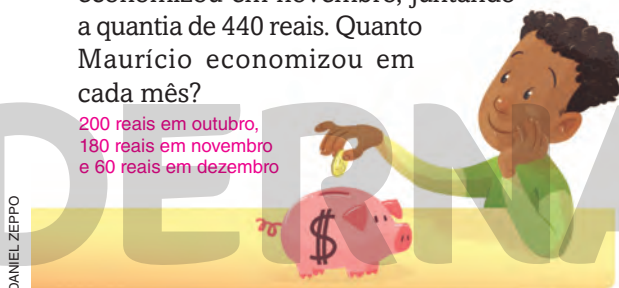
- 4 No polígono abaixo, a soma das medidas dos lados \overline{AB} e \overline{CD} é igual à soma das medidas dos lados \overline{AD} e \overline{BC} .



Calcule:

- o valor de x ; $x = 30$
 - o perímetro do polígono. 70
- 5 Uma batedeira e um liquidificador custam, juntos, 151 reais. A batedeira custa 21 reais a mais que o liquidificador. Qual é o preço da batedeira? 86 reais
- 6 Maurício economizou certa quantia no mês de outubro. Em novembro, economizou 20 reais a menos que em outubro; em dezembro, conseguiu economizar apenas um terço do que economizou em novembro, juntando a quantia de 440 reais. Quanto Maurício economizou em cada mês?

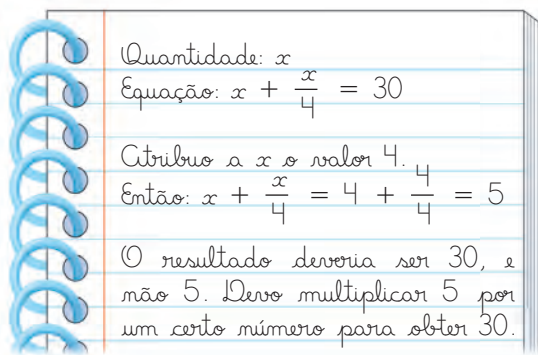
200 reais em outubro,
180 reais em novembro
e 60 reais em dezembro



- 7 Usando a regra da falsa posição, Juliana começou a resolver o seguinte problema:

“A quantidade e sua quarta parte adicionadas dão 30. Qual é essa quantidade?”

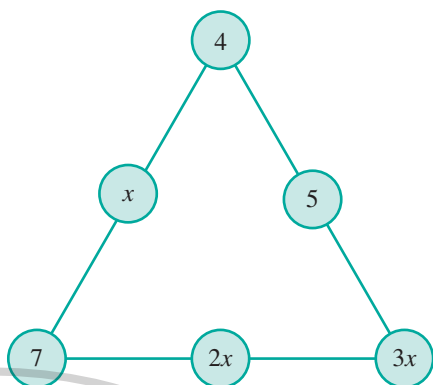
Veja o que Juliana já fez no caderno.



Calcule o número procurado por Juliana e termine a resolução desse problema.

O número procurado é 6, e a quantidade é 24.

- 8 Entre as equações a seguir, quais têm como solução $x = 5$? **alternativas b e c**
- a) $5x + 4 - 2x = 26 - 3x$
 b) $3x - 4 = 11$
 c) $x - (x + 1) = 12 - (3x - 2)$
 d) $4x + 9 = 3x + 5$
- 9 Determine o valor de x de modo que a soma em cada lado do triângulo seja a mesma. **$x = 1$**



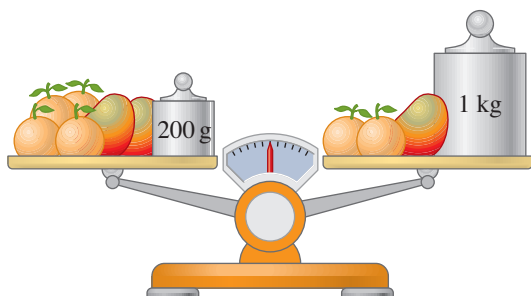
- 10 Multiplicando as soluções das duas equações abaixo, encontraremos um número inteiro. Que número é esse? **-1**

$$\frac{2y}{3} - \frac{1}{2} = \frac{y}{4} - \frac{3}{2}$$

$$3x = \frac{5}{4}$$

- 11 Resolva as equações a seguir.
- a) $7(y - 1) = 2(3y + 1)$ **9**
 b) $y + 4(y - 1) = 9 - 2(y + 3)$ **1**
 c) $4(y - 2) + 3(2y - 1) = 6(2y - 3)$ **$\frac{7}{2}$**
 d) $\frac{2 - a}{10} + \frac{a - 5}{8} = -\frac{1}{2}$ **-3**
 e) $\frac{3y}{2} - \frac{y - 5}{3} = 1 + \frac{2y - 4}{4}$ **$-\frac{5}{2}$**

- 12 Observe esta balança em equilíbrio.



Sabendo que cada manga tem 300 g, calcule quantos gramas tem uma laranja. **250 g**

- 13 Um número menos 12 é igual a $\frac{3}{4}$ do mesmo número. Qual é esse número? **48**
- 14 Leonardo tinha de dividir um número por 3, mas se enganou e multiplicou-o por 3. Com isso, encontrou 120 unidades a mais do que deveria ter encontrado. Qual é o número que Leonardo deveria dividir? **45**
- 15 Um terreno de 670 m^2 foi repartido em dois lotes, e um deles tem 30 m^2 a mais que o outro. Qual é a área de cada lote? **320 m^2 e 350 m^2**
- 16 Um triângulo tem 72 cm de perímetro. As medidas de seus lados são expressas por três números inteiros e consecutivos. Calcule essas medidas. **23 cm, 24 cm e 25 cm**
- 17 (FCC-BA) Um grupo de amigos quer dividir a despesa de uma lanchonete. Se cada um pagar R\$ 20,00, faltarão R\$ 60,00; se cada um der R\$ 30,00, sobrarão R\$ 90,00. O número de pessoas nesse grupo é: **alternativa d**
- a) 10. b) 12. c) 14. d) 15. e) 18.
- 18 (Unifor-CE) Os departamentos A, B e C de uma empresa devem receber 850 mil reais para investimentos. Por razões estratégicas, A deve ficar com a mesma quantia que os outros dois departamentos juntos e B deve receber 50 mil reais a mais que C. Nessas condições: **alternativa b**
- a) C receberá 175.000 reais.
 b) C receberá 187.500 reais.
 c) B receberá 225.000 reais.
 d) B receberá 250.000 reais.
 e) A receberá 420.000 reais.
- 19 (Unifor-CE) José ganhou um prêmio no valor de R\$ 5.000,00 e dividiu-o entre seus três filhos da seguinte forma: Pedro recebeu R\$ 300,00 a menos que João, que, por sua vez, recebeu R\$ 100,00 a mais que Antônio. É verdade que a quantia recebida por: **alternativa e**
- a) Antônio foi R\$ 1.800,00.
 b) João foi R\$ 1.700,00.
 c) Antônio foi R\$ 1.600,00.
 d) João foi R\$ 1.600,00.
 e) Pedro foi R\$ 1.500,00.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

20 Pedro, Paulo e Antônio foram jogar videogame. Pedro comprou $\frac{2}{3}$ do número de fichas compradas por Paulo, e Antônio, $\frac{5}{4}$ do número de fichas compradas por Pedro. Depois de ter usado 3 fichas, Antônio comentou com Pedro:



FERNANDA OLIVER

Quantas fichas cada um deles havia comprado?

Paulo: 6, Pedro: 4 e Antônio: 5

21 Responda: qual é a equação equivalente a

$$\frac{x-4}{5} - \frac{x-5}{2} = \frac{x+2}{10} ?$$

alternativa a

a) $4x = 15$

c) $4x = 35$

b) $4x = -15$

d) $4x = -35$

24 (Etec) Eduardo e Mônica estavam brincando de adivinhações com números inteiros positivos.

<p>Mônica, pense em um número.</p> <p>Já pensei.</p>	<p>Multiplique esse número por 10.</p> <p>Pronto.</p>	<p>Agora, subtraia o número pensado do resultado obtido.</p> <p>Já subtraí.</p>
<p>Some 180 ao novo resultado.</p> <p>Somei.</p>	<p>Finalmente, divida o último resultado obtido por 9.</p> <p>Pronto.</p>	<p>Quanto deu?</p> <p>Deu 68!</p>

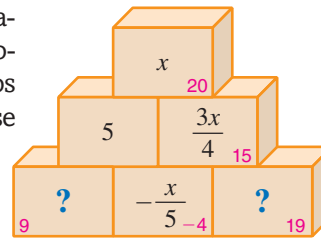
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Ao ouvir a resposta de Mônica, Eduardo imediatamente revelou o número original que Mônica havia pensado. O número que Mônica havia pensado era um: **alternativa e**

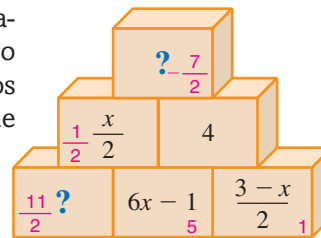
- a) divisor de 12. b) divisor de 15. c) divisor de 24. d) múltiplo de 5. e) múltiplo de 12.

22 Calcule o valor de x e, a seguir, o valor de cada bloco nas pilhas.

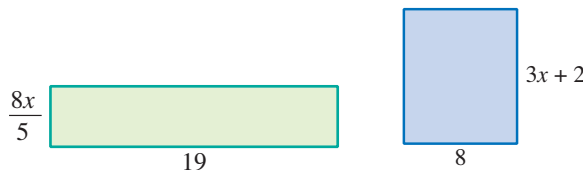
a) Nesta pilha, o valor de cada bloco é a soma dos blocos em que se apoia.
 $x = 20$



b) Nesta pilha, o valor de cada bloco é a diferença dos blocos em que se apoia.
 $x = 1$



23 Observe as regiões retangulares e responda.



O valor de x para que as duas regiões tenham áreas iguais é: **alternativa a**

- a) 2,5. b) $\frac{5}{16}$. c) 3,2. d) $\frac{2}{5}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Papiros famosos

Os conhecimentos que temos da Matemática egípcia provêm, essencialmente, de dois textos escritos em papiro: o papiro Rhind e o papiro de Moscou. Nesses documentos, há problemas resolvidos, o que revela a preocupação pedagógica, pois muitos cálculos dos papiros são exercícios propostos para jovens estudantes.

Alguns problemas desses papiros não mencionam objetos concretos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações, na forma $x + ax = b$, em que a e b são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de “*aha*”.

Um pouco de “mágica”

Siga os passos indicados a seguir e tenha uma surpresa.

- Pense em um número natural entre 1 e 5.
- Multiplique-o por 2.
- Some 8 ao resultado.
- Divida por 2.
- Subtraia o número que você pensou.
- Associe esse resultado ao alfabeto.
Por exemplo: se o resultado for 1, você escolherá a letra **A**; se for 2, escolherá a letra **B**; se for 3, escolherá a letra **C**; e assim por diante.
- Agora, pense no nome de um país europeu iniciado com a letra escolhida.
- Com a 5ª letra do nome desse país, pense no nome de um mamífero que voa.

Você, por acaso, pensou no país Dinamarca e no animal morcego?

2. respostas possíveis: a) Determine um número cujo dobro mais 3 seja igual a 5.
b) Eu tinha 5 figurinhas e dei algumas para meu amigo. No final, fiquei com uma figurinha. Quantas figurinhas dei a meu amigo? c) Um número mais seu dobro é igual a 3.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 O problema 24 do papiro Rhind, por exemplo, pede o valor de *aha*, informando que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19. Encontre o valor de *aha*. $\frac{133}{8}$
- 2 Escolha uma das equações abaixo e crie um problema cuja resolução seja efetuada pela equação que você escolheu.

a) $2x + 3 = 5$	b) $5 - x = 1$	c) $x + 2x = 3$
-----------------	----------------	-----------------
- 3 Repita o processo descrito na “mágica” acima, mas escolhendo o número racional $\frac{1}{2}$. Qual foi o resultado? 4
- 4 Aplicando o que você estudou nos capítulos anteriores, explique por que o resultado da conta que você fez no exercício 3 sempre será 4.
- 5 Se uma pessoa pensar em um número maior que 5, essa “mágica” funcionará? E se for um número racional qualquer? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos percebam que, independentemente do número, por meio da equação que representa esse problema, o número pensado será cancelado ao final da conta.

4. O resultado será sempre 4, porque $\frac{-2x + 8}{2} - 4 = 4$. Provavelmente os alunos usarão

uma linguagem não formal; porém, é possível explicar sem o uso da linguagem algébrica.

1 O que é inequação?

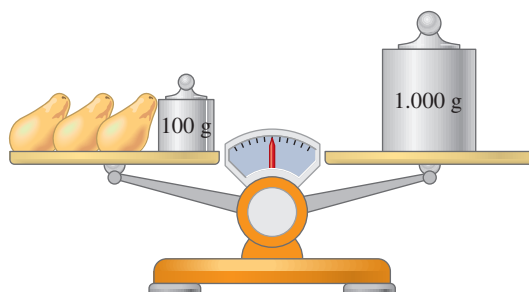
CHRISTOPHER JONES/ALAMY/GLOW IMAGES

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para determinar a massa das ameixas que estão em um dos pratos da balança, é necessária a comparação com a massa de alguns pesos que foram escolhidos como unidade.

Observe as situações a seguir. Nelas, consideramos que a massa de cada mamão é de x gramas.

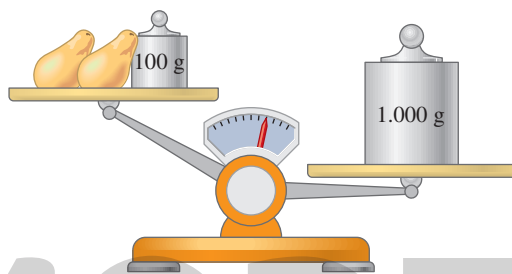
Situação 1



NELSON MATSUDA

Na situação 1, a balança está em **equilíbrio**, o que indica uma **igualdade** de massas, que pode ser expressa pela equação $3x + 100 = 1.000$.

Situação 2



NELSON MATSUDA

Na situação 2, a balança está em **desequilíbrio**. Nesse caso, o conteúdo do prato da esquerda tem massa menor que o conteúdo do prato da direita. Por isso, não podemos escrever uma igualdade que expresse a situação. Aqui, empregamos um sinal de **desigualdade**.

Toda sentença matemática em que aparece um destes sinais \neq (diferente), $>$ (maior), $<$ (menor), \geq (maior ou igual) ou \leq (menor ou igual) expressa uma **desigualdade**.

Veja alguns exemplos.

a) $5 + 3 \neq 10$

c) $7 > 5$

e) $2x \geq 100$

b) $8^3 \neq 8 + 3$

d) $10 < 15$

f) $y \leq -3$

Considerando a desigualdade $a \neq b$, temos:

$$a > b \quad \text{ou} \quad a < b$$

Nos exemplos acima, temos:

$$5 + 3 < 10 \quad \text{e} \quad 8^3 > 8 + 3$$

Retomando a situação 2, a desigualdade que traduz a situação da balança é:

$$\underbrace{2x}_{\text{massa dos dois mamões}} + \underbrace{100}_{\text{peso de 100 g}} < \underbrace{1.000}_{\text{peso de 1.000 g}}$$

Observe que podemos escrever essa mesma desigualdade de outra forma:

$$1.000 > 2x + 100$$

Note, ainda, que a letra x representa a massa desconhecida do mamão, ou seja, x é uma **incógnita**.

A sentença $2x + 100 < 1.000$ é um exemplo de **inequação**.

Inequação é toda sentença matemática expressa por uma desigualdade que apresenta uma ou mais incógnitas.

Veja outros exemplos de inequações.

a) $x + 5 > 12$

b) $2x - 4 \leq x + 2$

c) $x^2 - 5x \geq 0$

d) $x + y < 0$

Observe que as duas primeiras inequações têm uma só incógnita (a letra x) com expoente 1. Elas são exemplos de **inequações do 1º grau com uma incógnita**.

Já as duas últimas não são inequações do 1º grau com uma incógnita.

Assim como as equações, as inequações também têm dois membros. Vamos analisar isso, considerando a seguinte situação:

Marly tirou, em dezembro, 6 dias a mais de férias do que havia tirado em julho. No total (julho e dezembro), foram menos de 30 dias de férias.

Primeiro, indicaremos:

- o número de dias de férias de julho por y ;
 - o número de dias de férias de dezembro por $y + 6$.
- } $2y + 6$ (total)

Sabendo que, no total, foram menos de 30 dias de férias, a quantidade de dias pode ser representada por esta inequação:

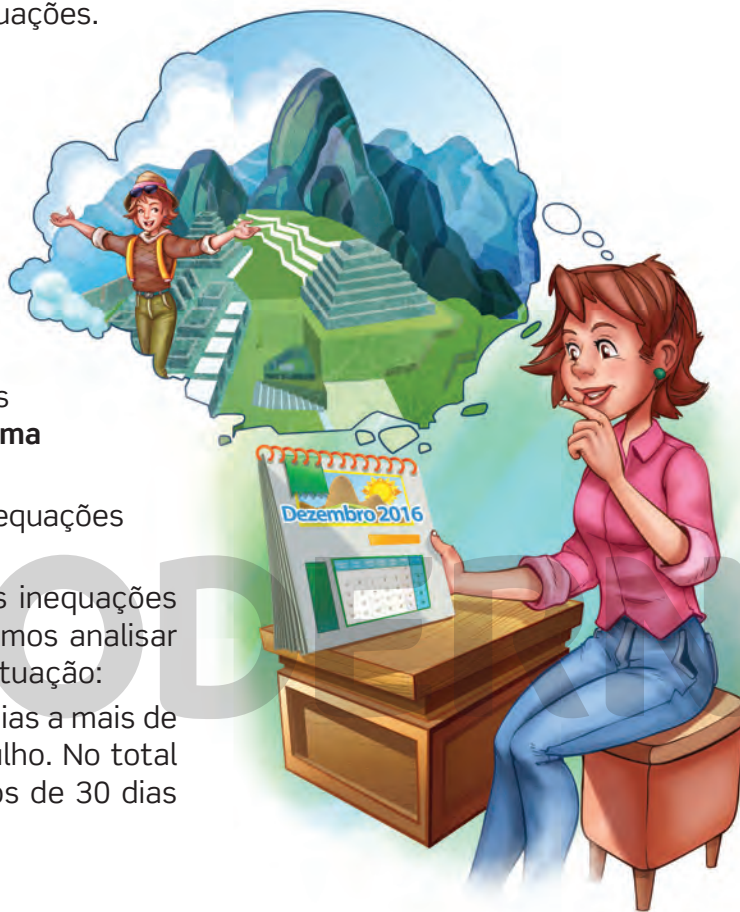
$$2y + 6 < 30$$

A expressão à esquerda do sinal de desigualdade é chamada de **primeiro membro** da inequação, e a expressão à direita do sinal de desigualdade, de **segundo membro** da inequação.

Portanto, na inequação $2y + 6 < 30$:

- a incógnita é y ;
- o primeiro membro é $2y + 6$;
- o segundo membro é 30.

Neste capítulo, estudaremos apenas as inequações do 1º grau com uma incógnita.





REPRODUÇÃO

Resolver problemas é uma arte!

No prefácio da primeira edição do livro *A arte de resolver problemas*, do matemático húngaro George Polya (1887-1985), lemos:

Uma grande descoberta resolve um grande problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

A proposta de Polya é fundamentada em um longo e sério estudo de métodos de resolução, conhecido por heurística, que, segundo um dicionário, é: *arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta dos fatos; método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar.*

Para a resolução de problemas, Polya sugere abordagem em quatro etapas de procedimento.

1. Compreensão do problema

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?
- Para determinar a incógnita, a condição é suficiente ou é insuficiente? É excessiva? É contraditória?

2. Estabelecimento de um plano

- Qual é a ligação entre os dados e a incógnita?
- Trace um caminho para a resolução: é possível descobrir algo para determinar a incógnita? E o que é preciso para descobrir esse algo?
- Já viu um problema parecido ou que corresponda a esse? Conhece um problema auxiliar?
- Conhece uma propriedade, um teorema, uma fórmula que seja útil para a resolução?

3. Execução do plano

- Verifique cada etapa da execução. É possível verificar se essa etapa está correta?

4. Reflexão sobre o que foi feito

- É possível verificar o resultado? E o argumento?
- É possível seguir um caminho diferente?
- O resultado obtido tem sentido no contexto do problema?

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Ao folhear um livro antigo de enigmas, Carlos se deparou com estes:

Minha idade, em anos, não é o triplo de 15, não é igual ou menor que o dobro de 20 mais 3, nem maior que a metade de 92 menos 1. Qual é minha idade se ela é representada por um número natural?

44 anos

Dentro de uma caixa, o número de bolas é maior que o triplo de 7 menos 1 e menor que a quinta parte de 105. Quantas bolas há nessa caixa?

O número de irmãos de Reginaldo é maior que o triplo de 2 menos 3, menor que a metade de 12 mais 2 e diferente de 5. Qual é exatamente o número de irmãos de Reginaldo?

- a) Resolva esses três enigmas. resposta pessoal
- b) Carlos resolveu os três enigmas e afirmou que somente um deles tem solução. Ele está correto? Justifique sua resposta.
- c) Redija um texto explicando como você fez para resolver cada um desses enigmas. resposta pessoal

b) Sim, só o 1º enigma tem solução determinada: 44 anos.

2º enigma: Não tem solução, pois o número de bolas é um número natural, e não existe número natural que satisfaça a condição $20 < x < 21$.

3º enigma: Espera-se que os alunos percebam que não é possível dizer exatamente a quantidade de irmãos de Reginaldo. Nesse caso, só é possível dizer que o número de irmãos de Reginaldo pode ser 4, 6 ou 7.

1 Verifique, entre as sentenças abaixo, quais são inequações. Em seguida, identifique o primeiro e o segundo membro de cada inequação.

- a) $3x - 1 = 10$ f) $3x - 2 < x + 4$
 b) $7x < 10$ g) $x - 15 = 20$
 c) $x - 5 \leq 0,25$ h) $5x - 3 \geq x + 10$
 d) $2x - 5 \neq x + 6$ i) $2 + 9 \neq -\frac{9}{7}$

e) $7 - 2 < 10$ alternativas b, c, d, f, h; 1º membro à esquerda do sinal e 2º membro à direita do sinal de desigualdade

2 Formule, em cada item, um problema que possa ser representado pela inequação apresentada.

- a) $2x + 5 < 30$ b) $3x + 12 > x - 8$

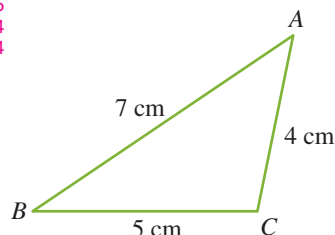
respostas pessoais

3 Escreva, usando o sinal $<$, a inequação que tem como primeiro membro $2x + 3$ e como segundo membro $x - 2$. Descubra um número inteiro negativo que torne essa sentença verdadeira. $2x + 3 < x - 2$; resposta possível: -6

4 Em um triângulo, a medida de um lado qualquer é menor que a soma das medidas dos outros dois.

a) Escreva três desigualdades que relacionem as medidas dos lados do triângulo abaixo.

$4 < 7 + 5$
 $5 < 7 + 4$
 $7 < 5 + 4$



NELSON MATSUUDA

b) Verifique se é possível construir um triângulo com 6 cm, 8 cm e 12 cm de lado. Justifique sua resposta.

c) Em um triângulo, dois lados medem 5 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é o maior número inteiro que pode representar a medida do terceiro lado? E o menor? 12; 4

4. b) Sim, pois a medida de qualquer um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Solução de uma inequação

Considere as situações a seguir.

Situação 1

O departamento de esportes de um clube comprou x pares de tênis a 50 reais cada par, além de outros materiais esportivos que custaram 300 reais. Foram gastos mais de 1.000 reais e comprados menos de 20 pares de tênis. Determine as possíveis quantidades de pares de tênis encomendados.



JOSE LUIS JUHAS

Essa situação pode ser representada pela inequação:

$$50x + 300 > 1.000$$

A quantidade de pares de tênis encomendados tem de ser um número natural. Então, precisamos encontrar os números naturais que, colocados no lugar de x , tornam a sentença verdadeira. Veja.

- Para $x = 10$, temos:

$$50 \cdot 10 + 300 > 1.000$$

$$500 + 300 > 1.000$$

$$800 > 1.000 \text{ (falsa)}$$

Por isso, dizemos que **10 não é uma solução** da inequação dada.

- Para $x = 12$, temos:

$$50 \cdot 12 + 300 > 1.000$$

$$600 + 300 > 1.000$$

$$900 > 1.000 \text{ (falsa)}$$

Por isso, **12 também não é uma solução** da inequação dada.

- Para $x = 14$, temos:

$$50 \cdot 14 + 300 > 1.000$$

$$700 + 300 > 1.000$$

$$1.000 > 1.000 \text{ (falsa)}$$

Então, **14 não é uma solução** da inequação dada.

- Para $x = 15$, temos:

$$50 \cdot 15 + 300 > 1.000$$

$$750 + 300 > 1.000$$

$$1.050 > 1.000 \text{ (verdadeira)}$$

Por isso, dizemos que **15 é uma solução** da inequação dada.

Assim, percebemos que qualquer número natural maior que 15 é solução dessa inequação. Portanto, os números naturais que satisfazem a inequação são: 15, 16, 17, 18, ...

Porém, foram encomendados menos de 20 pares de tênis; portanto, $x < 20$. Assim, a quantidade de pares de tênis encomendados pode ter sido 15, 16, 17, 18 ou 19.

Situação 2

Verifique se os números $-5,2$ e -1 são soluções da inequação $3x + 4 \leq 1$.

- Substituindo x por $-5,2$, temos:

$$3 \cdot (-5,2) + 4 \leq 1$$

$$-15,6 + 4 \leq 1$$

$$-11,6 \leq 1 \text{ (verdadeira)}$$

Logo, $-5,2$ é uma solução da inequação dada.

- Substituindo x por -1 , temos:

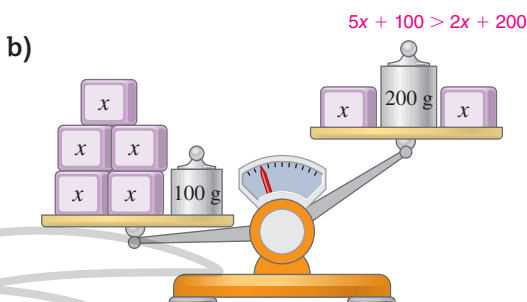
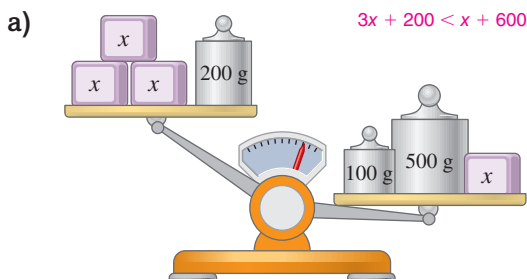
$$3 \cdot (-1) + 4 \leq 1$$

$$-3 + 4 \leq 1$$

$$1 \leq 1 \text{ (verdadeira)}$$

Logo, -1 também é uma solução da inequação dada.

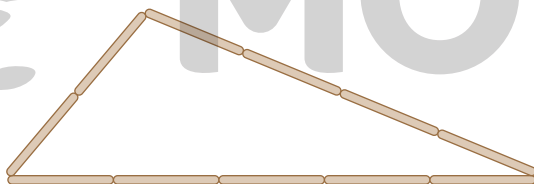
5 Escreva que inequação pode ser associada a cada balança.



6 Determine os números inteiros negativos que são soluções da inequação $2x + 3 \geq x - 1$.

$-4, -3, -2$ e -1

7 Veja o triângulo que Enrico representou com palitinhos.



Todos esses palitinhos enfileirados não chegam a 20 cm. Representando a medida de cada palitinho por x , faça o que se pede.

a) Determine uma inequação que relacione as medidas dos lados com o perímetro do triângulo. $4x + 2x + 5x < 20$

b) Cada palitinho poderia medir 0,5 cm? E 2,5 cm? **sim; não**

c) Descubra outras duas medidas possíveis para os palitinhos. **respostas possíveis: 1 e 1,5**

8 Considerando a inequação $4x - 5 < 13 - 2x$, verifique entre os números a seguir quais são soluções dela. **alternativas b, c, e, f**

- | | | |
|--------|------|-------------------|
| a) 3 | c) 0 | e) -2 |
| b) 1,5 | d) 4 | f) $-\frac{1}{2}$ |

9 Sendo $x > 20$ e $x \leq 21$, com x racional, verifique entre as sentenças a seguir quais são verdadeiras. **alternativas b, c**

- a) x pode ser um número negativo.
- b) x pode ser um número inteiro.
- c) 20,1 pode ser um valor de x .
- d) 21,1 pode ser um valor de x .

10 Um número é maior que -5 e menor que 4. Esse fato pode ser representado usando uma destas notações:

$x > -5$ e $x < 4$ ou $-5 < x < 4$

Agora, considerando $-3 < x < 2$, quais são os valores inteiros que x pode assumir? **-2, -1, 0 e 1**

11 Escreva uma inequação para cada item.

- a) Por razões econômicas, os produtos de uma indústria não devem ser embalados em menos de 20 unidades por caixa. **$x \geq 20$**
- b) Para que esses produtos fiquem bem acondicionados, não devem ser embalados em mais de 30 unidades por caixa. **$x \leq 30$**
- c) Cada caixa tem capacidade para 20 a 30 unidades desse produto. **$20 \leq x \leq 30$**

12 Associe a cada situação abaixo uma sentença matemática.

- a) A soma de um número com 7 é menor ou igual ao dobro desse número. **$x + 7 \leq 2x$**
- b) Um dos lados de um terreno retangular é 5 metros maior que o outro, e seu perímetro é maior que 1.000 metros. **$4x + 10 > 1.000$**
- c) O salário de Júlia não é R\$ 1.500,00. **respostas possíveis: $(x \neq 1.500)$ ou $(x > 1.500$ ou $x < 1.500)$**

13 Um feirante, após ter vendido x melões a R\$ 9,00 cada um, vendeu os restantes por um total de R\$ 140,00. Depois de vender todos os melões, ele obteve mais de R\$ 500,00.

- a) Represente essa situação por meio de uma inequação. **$9x + 140 > 500$**
- b) 40 é solução dessa inequação? E 41? **não; sim**
- c) Qual é a quantidade de melões que ele deve ter vendido a R\$ 9,00?

mais de 40 melões



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 de Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

JOSÉ LUIS JUHAS

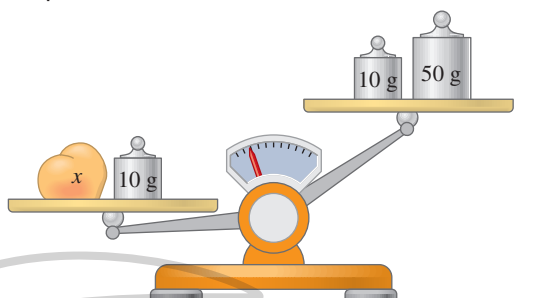
3 Resolução de inequações

Na situação a seguir, vamos descobrir quais são as possibilidades para a massa do pêssigo, indicada pela letra x .

A balança, representada ao lado, está em desequilíbrio: o prato da esquerda está com a maior massa. A inequação correspondente é:

$$2x + 10 > x + 10 + 50$$

Vamos retirar um pêssigo de x gramas de cada prato.

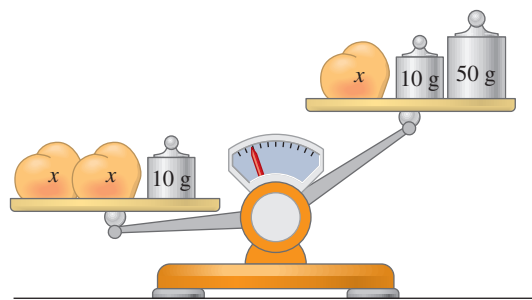


A balança continua em desequilíbrio, mantendo a mesma elevação dos pratos, e o prato da esquerda ainda é o que tem maior massa. A inequação correspondente é:

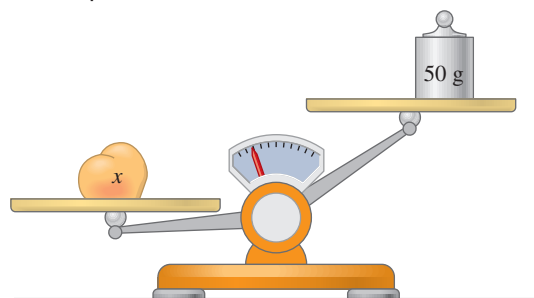
$$x + 10 > 10 + 50$$

As inequações obtidas em cada passo são equivalentes, ou seja, elas têm as mesmas soluções. Assim, concluímos que a massa de cada pêssigo é maior que 50 gramas.

A resolução de inequações do 1º grau com uma incógnita é feita procedendo-se de maneira semelhante à resolução de equações, ou seja, transformando-se cada inequação em uma inequação equivalente mais simples, até que se obtenham as possíveis soluções.



Agora, vamos retirar um peso de 10 gramas de cada prato.



Observe que a balança continua em desequilíbrio, mantendo a mesma elevação dos pratos. O prato da esquerda continua com maior massa. A inequação correspondente é:

$$x > 50$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

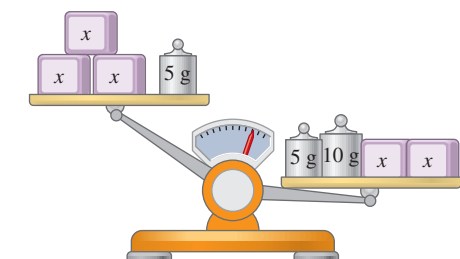
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15. b) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} \cdot 2 > 2 \cdot 2$ FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

c) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} - 2 > 2 - 2$

- 14 Desenhe cada etapa com os esquemas das balanças para encontrar a maior massa possível de cada cubinho, em grama, expressa por um número inteiro. **9 gramas**



- 15 Copie as afirmações falsas e, depois, modifique-as de modo que elas se tornem verdadeiras.

a) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} + 5 > 2 + 5$. verdadeira

b) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} \cdot 2 < 2 \cdot 2$. falsa

c) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} - 2 < 2 - 2$. falsa

d) Se $-3 > -5$, então $-3 \cdot (-1) < (-5) \cdot (-1)$. verdadeira

e) Se $2x + \frac{5}{3} < \frac{8}{3}$, então $2x < 1$. verdadeira

NELSON MATSUDA

Pense mais um pouco...

Em um grupo de 9 bolinhas, uma delas difere das outras apenas por ser um pouco mais leve. Usando uma balança de dois pratos, descubra qual bolinha tem menor massa, fazendo apenas duas pesagens. Descreva o procedimento que você utilizou.

Veja a resolução no *Suplemento do professor*.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

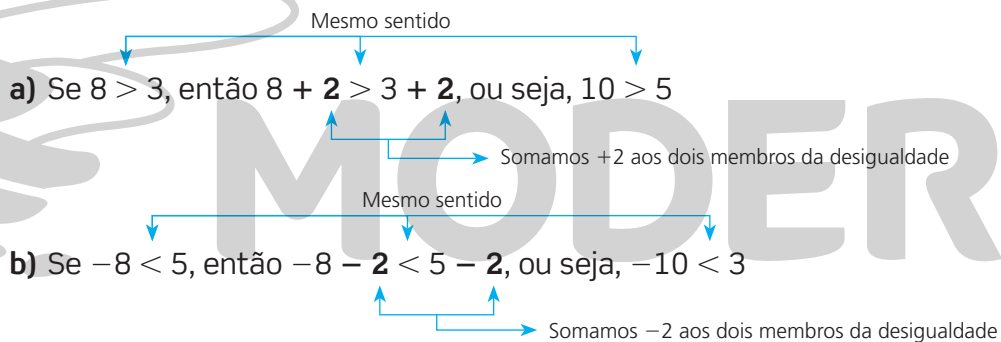
Propriedades da desigualdade

Na resolução de inequações, aplicaremos as propriedades da desigualdade que veremos a seguir.

Inicialmente, vamos estabelecer que:

- os sinais $<$ e $<$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $<$ e $>$ têm sentidos opostos;
- os sinais $>$ e $>$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $>$ e $<$ têm sentidos opostos.

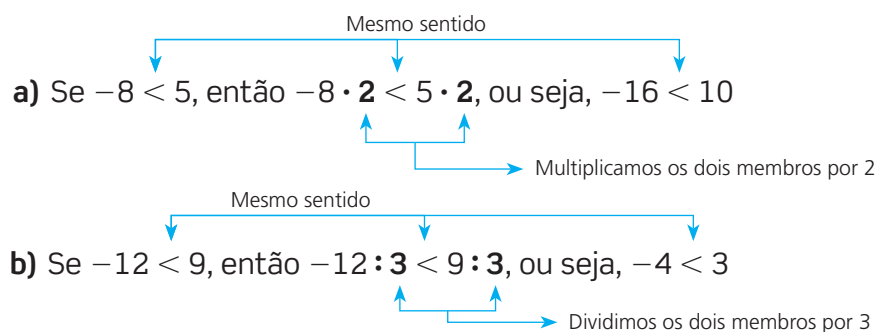
Veja o que acontece com o sentido de uma desigualdade quando somamos um mesmo número a seus dois membros.



Note que o sentido das desigualdades não foi alterado.

Uma desigualdade não muda de sentido quando adicionamos ou subtraímos um mesmo número a seus dois membros.

Agora, observe o que acontece quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma desigualdade por um número positivo.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Repare que o sentido das desigualdades também não foi alterado.

Uma desigualdade não muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número positivo.

Veja, ainda, o que acontece quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma desigualdade por um número negativo.

Mudou de sentido

a) Se $8 > 3$, então $8 \cdot (-2) < 3 \cdot (-2)$, pois $-16 < -6$.

Multiplicamos os dois membros por -2

Mudou de sentido

b) Se $-12 < 9$, então $-12 : (-3) > 9 : (-3)$, pois $4 > -3$.

Dividimos os dois membros por -3

Nesse caso, podemos observar que a desigualdade mudou de sentido.

Uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número negativo.

Para exemplificar, vamos resolver a inequação $5x + 3 > 2x - 14$, considerando x um número racional.

Aplicando as propriedades das desigualdades, temos:

$$5x + 3 > 2x - 14$$

$$5x + 3 - 3 > 2x - 14 - 3 \longrightarrow \text{Somamos } (-3) \text{ aos dois membros.}$$

$$5x > 2x - 17 \longrightarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

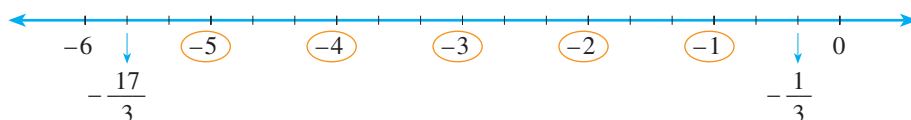
$$5x - 2x > 2x - 17 - 2x \longrightarrow \text{Somamos } (-2x) \text{ aos dois membros.}$$

$$3x > -17 \longrightarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

$$x > -\frac{17}{3} \longrightarrow \text{Dividimos os dois membros por } 3.$$

Logo, qualquer número racional maior que $-\frac{17}{3}$ satisfaz essa inequação.

Se quiséssemos determinar os números inteiros negativos que satisfazem a inequação dada, teríamos de encontrar todos os números inteiros negativos que são maiores que $-\frac{17}{3}$.



Portanto, os números inteiros negativos maiores que $-\frac{17}{3}$ são $-5, -4, -3, -2$ e -1 .

Resolvendo problemas com inequações

Veja algumas situações de resoluções de inequações.

Situação 1

Alex depositou no tanque de piscicultura de seu sítio 2.500 tilápias e, com isso, ficou com uma quantidade maior que o triplo do que possuía. Antes disso, qual era o número máximo de tilápias que havia no tanque?



FÁBIO COLOMBINI

Tanques de criação (piscicultura) de tilápias em Zacarias, São Paulo. (Foto de 2008.)

Indicaremos por x a quantidade de tilápias que havia inicialmente no tanque. Note que x tem de ser um número natural.

Dessa forma, podemos representar a situação pela inequação $x + 2.500 > 3x$, sendo x um número natural.

Resolvendo essa inequação, podemos responder à questão.

$$x + 2.500 > 3x$$

$$x + 2.500 - x > 3x - x \longrightarrow \text{Somamos } (-x) \text{ aos dois membros.}$$

$$2.500 > 2x \longrightarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

$$\frac{2.500}{2} > \frac{2x}{2} \longrightarrow \text{Dividimos os dois membros por 2.}$$

$$1.250 > x$$

Como 1.250 é maior que o número de tilápias que havia inicialmente no tanque e x tem de ser um número natural, concluímos que havia, no máximo, 1.249 tilápias nesse tanque.

Situação 2

Vamos determinar os números inteiros que são soluções da inequação $2(x - 5) \geq 3(x - 4)$.

$$2(x - 5) \geq 3(x - 4)$$

$$2x - 10 \geq 3x - 12 \longrightarrow \text{Aplicamos a propriedade distributiva.}$$

$$2x - 10 + 10 \geq 3x - 12 + 10 \longrightarrow \text{Somamos } (+10) \text{ aos dois membros.}$$

$$2x \geq 3x - 2 \longrightarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

$$2x - 3x \geq 3x - 3x - 2 \longrightarrow \text{Somamos } (-3x) \text{ aos dois membros.}$$

$$-x \geq -2 \longrightarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

$$\frac{-x}{-1} \leq \frac{-2}{-1} \longrightarrow \text{Dividimos os dois membros por } (-1). \text{ Como dividimos por um número negativo, a desigualdade muda de sentido.}$$

$$x \leq 2$$

Logo, qualquer número inteiro menor ou igual a 2 é solução dessa inequação.

Situação 3

Sabendo que x é um número natural, vamos agora resolver a inequação $\frac{x-3}{3} + \frac{2x-1}{2} < 12$.

$$\frac{x-3}{3} + \frac{2x-1}{2} < 12$$

$$\frac{2(x-3)}{6} + \frac{3(2x-1)}{6} < \frac{72}{6} \rightarrow \text{Reduzimos ao mesmo denominador. Multiplicamos os dois membros por 6.}$$

$$2(x-3) + 3(2x-1) < 72 \rightarrow \text{Aplicamos a propriedade distributiva.}$$

$$2x - 6 + 6x - 3 < 72$$

$$8x - 9 < 72 \rightarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

$$8x - 9 + 9 < 72 + 9 \rightarrow \text{Somamos 9 aos dois membros.}$$

$$8x < 81$$

$$\frac{8x}{8} < \frac{81}{8} \rightarrow \text{Dividimos os dois membros por 8.}$$

$$x < \frac{81}{8}$$

Dividindo 81 por 8, temos:

$$\begin{array}{r} 81 \overline{) 8} \\ 01 \quad 10 \end{array}$$

Então, $\frac{81}{8}$ é um número entre 10 e 11. Logo, os números naturais menores que $\frac{81}{8}$ são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

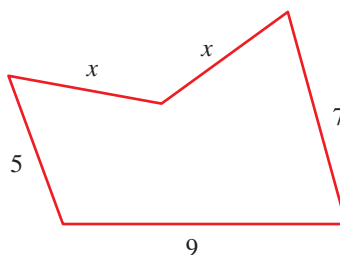
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16. b) $x > \frac{15}{2}$, com x racional
- 16 Resolva as inequações a seguir. **0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6**
- $x + 5 < 12$, sendo x um número natural.
 - $2x - 3 > 12$, sendo x um número racional.
 - $3x - 4 > 5x - 10$, sendo x um número inteiro. **..., -2, -1, 0, 1 e 2**
 - $4x + 3 < x - 18$, sendo x um número natural. **Não tem solução.**
- 17 Resolva as inequações, considerando x um número racional.
- $4(x + 3) > 2(x - 1)$ **$x > -7$**
 - $3(x + 2) > 2(2x + 4)$ **$x < -2$**
 - $5x - (x - 2) \leq 6$ **$x \leq 1$**
 - $7(x - 2) < 2(3x + 4)$ **$x < 22$**
 - $x - 2(x - 3) \leq x + 5$ **$x \geq \frac{1}{2}$**

- 18 Enuncie um problema que possa ser solucionado por meio da inequação $5x + 2 \leq 3x - 15$. Depois, resolva-o. **resposta pessoal; $x \leq -\frac{17}{2}$**
- 19 No polígono abaixo, sabe-se que x é maior que 4 e que o perímetro é menor que 32. Quais são os possíveis valores inteiros de x ? **apenas 5**



NELSON MATSUDA

20 Subtraindo 3 anos da idade de Marlene e multiplicando a diferença por 8, obtém-se um número menor que o sêxtuplo de sua idade aumentada de 8 anos. Qual é a idade de Marlene, sabendo que ela é a maior possível? **15 anos**

21 Dada a inequação $2(x + 3) \leq 4(x - 1)$, encontre:
a) os números naturais menores que 8 que sejam soluções; **5, 6 e 7**
b) o menor número inteiro de três algarismos que seja solução. **100**

22 De um garrafão contendo 10 litros de caldo de cana, até quantos copos com capacidade de 0,25 litro podem ser retirados de modo que restem mais de 3 litros? **27**



23 Meu carro percorre 12 quilômetros com 1 litro de gasolina. Quantos litros de gasolina, no mínimo, preciso ter no tanque para percorrer mais de 700 quilômetros sem abastecer? **59**

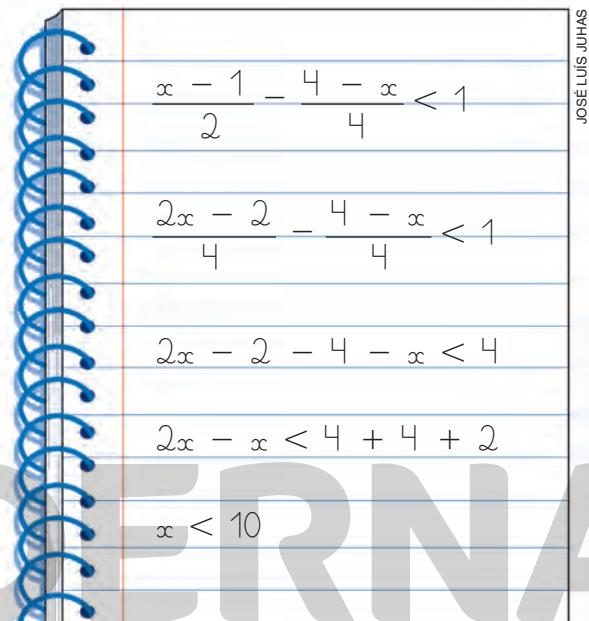
24 Meu pai tem 25 anos a mais que eu. Hoje, o triplo da minha idade mais a idade de meu pai é maior que a idade do meu avô. Sabendo que meu avô tem 65 anos, qual é a idade mínima de meu pai? **35 anos**

25 Considere $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, com x racional, e responda às questões no caderno.
a) O número 2 é solução? Por quê? **sim, porque $2 > \frac{7}{6}$**
b) Existe algum número negativo que seja solução? Por quê? **não, porque $x > \frac{7}{6}$**

26 Um bloco retangular tem 15 cm de comprimento, 12 cm de largura e 5 cm de altura. Paulo deseja construir outro bloco com a mesma largura e a mesma altura daquele, porém com mais de 1.200 cm^3 de volume. Quantos centímetros, no mínimo, deve ter o comprimento desse outro bloco? (As medidas são expressas em números inteiros.) **21 cm**

27 Veja como Joana resolveu a inequação

$$\frac{x - 1}{2} - \frac{4 - x}{4} < 1.$$



Ao conferir o resultado, ela percebeu que havia errado. Quando encontrou o erro, corrigiu-o e obteve a solução correta.

- Que maneira ela pode ter escolhido para conferir o resultado?
- Descubra qual foi o erro de Joana.
- Qual foi a solução que Joana encontrou quando acertou? **$x < \frac{10}{3}$**

27. a) resposta possível: Ela substituiu valores no lugar de x , por exemplo o 9, e verificou se obteve uma sentença verdadeira.
b) O erro começou na 3ª linha, que deveria ser assim:
 $2x - 2 - 4 + x < 4$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Digitei todo o trabalho do meu grupo no computador e imprimi as páginas sem usar o verso. Para isso, cada membro do meu grupo deu 3 folhas, e ainda tive de colocar mais 1 folha além das 3. Assim, usamos menos de 13 folhas no trabalho todo. Quantos eram os membros do meu grupo? **2 ou 3**

Trabalhando com gráficos e tabelas

O ano de 2014 foi atípico para o mercado imobiliário. Economia instável, calendário com Copa do Mundo e eleições, além de clientes cada vez mais exigentes e bem informados que procuram imóveis. O resultado disso foi um grande número de imóveis em estoque em São Paulo. Veja a notícia.

Estoque recorde em SP cria oportunidade para comprar imóvel

Segundo dados do Secovi-SP (sindicato do setor imobiliário) apresentados na última semana, a cidade fechou 2014 com 27.255 imóveis em estoque – aqueles que não foram vendidos até três anos após o lançamento –, o maior número dos últimos dez anos. [...]

Dos dez distritos de São Paulo com o maior número de imóveis residenciais lançados e ainda não vendidos, cinco estão na zona sul. [...]

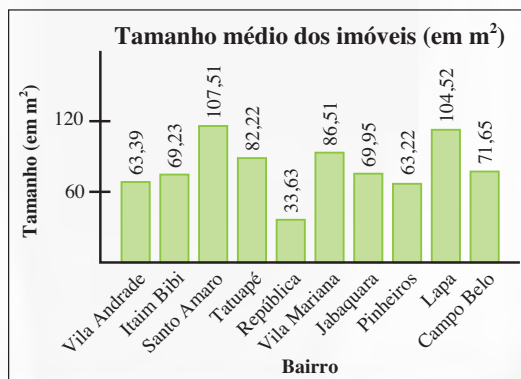
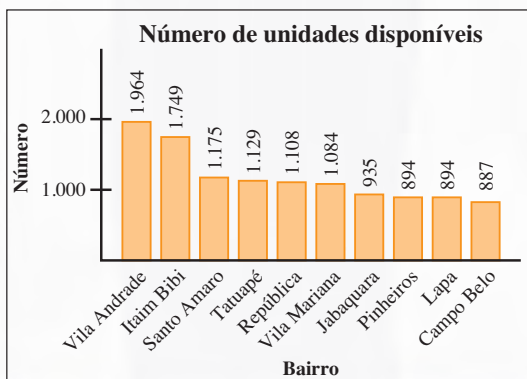
Apesar da concentração das ofertas na zona sul, as construtoras avalliam que há demanda para a região e que a cidade está bem atendida.

Estará servido também quem deseja comprar imóveis em bairros como Lapa, Itaim Bibi e Pinheiros (zona oeste), República (centro) e Tatuapé (zona leste), que somam ofertas generosas.



MOACYR LOPES JUNIOR/FOLHAPRESS

Cidade de São Paulo, também conhecida por sua grandiosidade e seus inúmeros prédios, vive um momento de baixa no mercado imobiliário. Prédio em construção na Vila Olímpia, em São Paulo. (Foto de 2013.)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Fonte: <<http://classificados.folha.uol.com.br>>. Acesso em: 1º mar. 2015.

Você já aprendeu que os mesmos dados podem ser organizados de maneiras diferentes. Por exemplo, os dados apresentados no gráfico da reportagem acima poderiam ser organizados em forma de tabela, de texto, ou, ainda, em forma de gráfico de barras.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

JOSÉ LUIS JUHAS

Veja como ficariam esses dados dispostos em forma de tabela.

Imóveis disponíveis na cidade de São Paulo										
	Vila Andrade	Itaim Bibi	Santo Amaro	Tatuapé	República	Vila Mariana	Jabaquara	Pinheiros	Lapa	Campo Belo
Número de unidades disponíveis	1.964	1.749	1.175	1.129	1.108	1.084	935	894	894	887
Tamanho médio dos imóveis (em m ²)	63,39	69,23	107,51	82,22	33,63	86,51	69,95	63,22	104,52	71,65

Dados obtidos em: <<http://classificados.folha.uol.com.br>>. Acesso em: 1º mar. 2015.

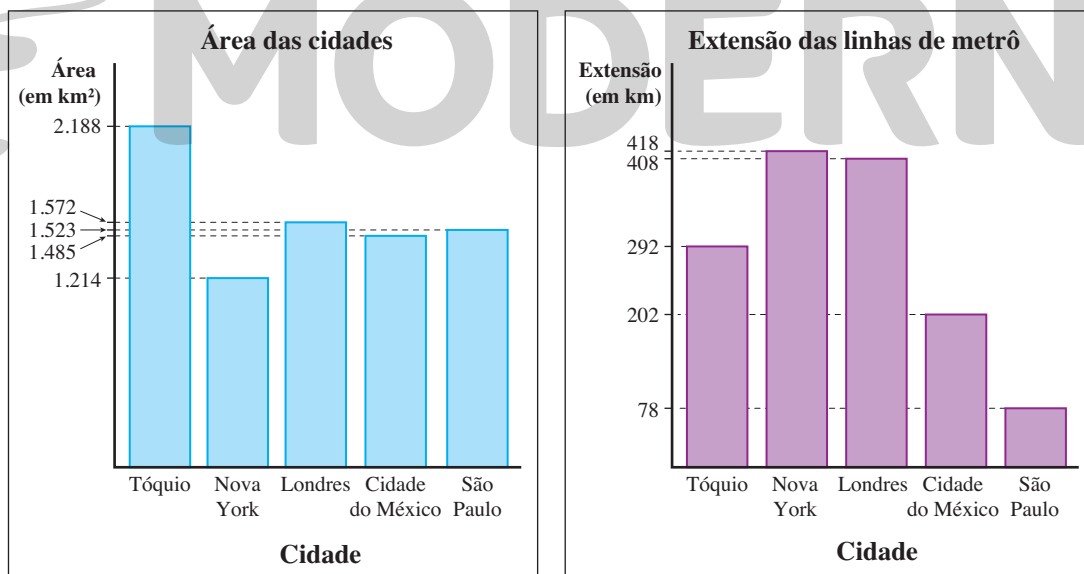
Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Responda às perguntas abaixo.

- Qual é o bairro que possui a maior quantidade de imóveis disponível? **Vila Andrade**
- Qual bairro possui o menor tamanho médio dos imóveis (em m²)? **República**
- Pesquise na internet o mercado imobiliário de sua região e verifique se também possui excesso de oferta de imóveis que ainda não foram vendidos. **resposta pessoal**
- Qual bairro oferece imóveis com maior tamanho médio, em metro quadrado? Qual é essa área? **Santo Amaro; 107,51 m²**

2 A mobilidade nas grandes cidades é um grande problema e um desafio para as respectivas administrações. Veja no gráfico a área das cidades e a extensão de suas linhas de metrô, em quilômetro.



Dados obtidos em: <www.mobilize.org.br> Acesso em: 1º mar. 2015.

- Qual é a extensão total em quilômetro das linhas de metrô dessas cidades? **1.398 km**
- Qual cidade apresenta maior extensão territorial? Ela é a que possui maior extensão de metrô? **Tóquio; Não, a cidade de Nova York possui a maior extensão de linhas de metrô.**
- Qual é a extensão territorial da menor cidade? Quantos quilômetros de linha de metrô essa cidade possui? **1.214 km²; 418 km**
- Elabore uma tabela que represente os dados dos gráficos acima.

d)

Extensão das linhas de metrô pelo mundo					
	Tóquio	Nova York	Londres	Cidade do México	São Paulo
Área (em km ²)	2.188	1.214	1.572	1.485	1.523
Extensão (em km)	292	418	408	202	78

Dados obtidos em: <www.mobilize.org.br>. Acesso em: 1º mar. 2015.

1 Entre os números -3 , 0 e 3 quais são soluções da inequação $5x - 2 < 2x + 3$? -3 e 0

2 Determine os números racionais que satisfazem as inequações a seguir.

a) $4(x + 3) > 2(x - 1)$ $x > -7$

b) $x - 2(x - 3) \leq x + 5$ $x \geq \frac{1}{2}$

c) $2 + 5(3x + 1) > 0$ $x > -\frac{7}{15}$

3 A quantidade de CDs que eu tenho é o quádruplo da quantidade de CDs que meu irmão tem subtraída de 5. Juntos, temos, no máximo, 10 CDs. Quantos CDs pode ter meu irmão?
 2 ou 3

4 Emendando dois pedaços de barbante, obtém-se mais de 1 m. O comprimento do pedaço menor, em centímetro, é representado por um número inteiro. O pedaço maior tem 20 cm a mais que o menor. Qual é o comprimento mínimo, em centímetro, do barbante menor?
 41 centímetros

5 Uma empresa tem a opção de embalar seu produto em dois tipos de caixa, A e B: na caixa do tipo A, é possível embalar de 20 a 30 unidades, e na caixa do tipo B, de 15 a 20 unidades. Para este mês, a empresa usou 100 unidades de cada tipo de caixa.

a) Qual é a quantidade máxima de produtos que a empresa pode embalar neste mês? E qual é a quantidade mínima? 5.000 ; 3.500

b) Represente por meio de uma inequação a quantidade de produtos que a empresa pode embalar neste mês. $3.500 \leq x \leq 5.000$

c) A empresa poderá embalar 5.001 produtos neste mês? E 4.896 produtos? Justifique sua resposta.
Não, pois o máximo possível é 5.000 unidades.
Sim, pois 4.896 está entre 3.500 e 5.000.

6 Existe algum número racional maior que -4 que seja solução da inequação

$\frac{x - 2}{3} + 2x \geq \frac{5x}{2}$? Justifique sua resposta.
não, pois $x \leq -4$

7 Quais números inteiros menores que 10 satisfazem a inequação $5 - \frac{x}{2} \leq \frac{x}{3} + 1$?
 $5, 6, 7, 8$ e 9

8 Um tonel tem 100 litros de azeite. Quantas garrafas de 0,9 litro é possível encher, no máximo, de modo que ainda sobrem mais de 10 litros no tonel? 99

9 Dois meninos faltaram na aula de informática. Ainda assim, nessa aula, o número de meninos era maior que o número de meninas. Sabendo-se que havia 10 meninas na classe, qual é o menor número possível de alunos dessa classe? 23

10 Ao final de uma prova de Matemática, realizada para selecionar os alunos que participarão de uma Olimpíada de Matemática, Mariana comenta com seu amigo Rodrigo:

— Eu fui muito bem. Pelo gabarito que está afixado no quadro de avisos, acertei 75 questões. E você?

Rodrigo responde:

— Infelizmente não fui nada bem. Mesmo que tivesse acertado o dobro do que acertei, ainda precisaria de mais três acertos para superar o número de pontos que você obteve.

Qual foi a quantidade mínima de pontos que Rodrigo obteve? 36



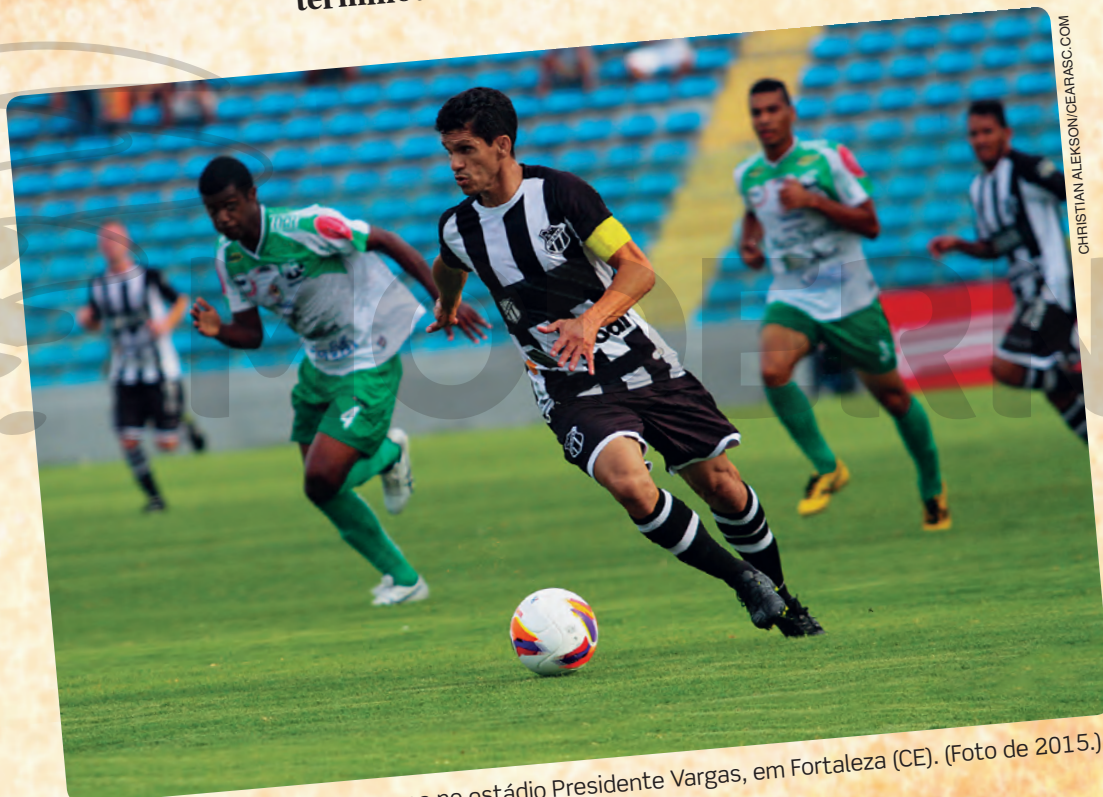
11 Preciso cercar um terreno, que tem a forma de um quadrilátero, para fazer uma horta. O perímetro do terreno é maior que 120 metros. Dois dos lados têm a mesma medida. O terceiro mede a metade da medida de um dos outros lados de mesma medida. O quarto lado tem 21 metros. Todos os lados têm medidas expressas por números inteiros. Nessas condições, qual é a quantidade mínima de metros de arame necessária para cercar esse terreno com seis voltas, que deve ter um portão com 1 metro de largura? 720 m

Sistemas de equações

1 Equações com duas incógnitas

Considere a seguinte manchete de jornal.

Na primeira rodada do Campeonato Cearense de Futebol, o jogo entre Ceará e Maranguape terminou com 7 gols marcados.



Partida entre Ceará e Maranguape no estádio Presidente Vargas, em Fortaleza (CE). (Foto de 2015.)

Com a informação da manchete, não é possível saber quantos gols cada equipe marcou. Representando por x a quantidade de gols marcados pelo Ceará e por y a quantidade de gols marcados pelo Maranguape, podemos escrever a equação:

$$x + y = 7 \text{ (equação com duas incógnitas: } x \text{ e } y)$$

Observe no quadro a seguir os possíveis resultados desse jogo, considerando o número de gols informado na manchete.

Gols marcados pelo Ceará (x)	Gols marcados pelo Maranguape (y)
7	0
6	1
5	2
4	3
3	4
2	5
1	6
0	7

Nesse caso, dizemos que os pares de números (x, y) , que representamos por $(7, 0)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(2, 5)$, $(1, 6)$ e $(0, 7)$, são soluções da equação $x + y = 7$, em que x e y são números naturais. Esses pares de números são chamados de **pares ordenados**.

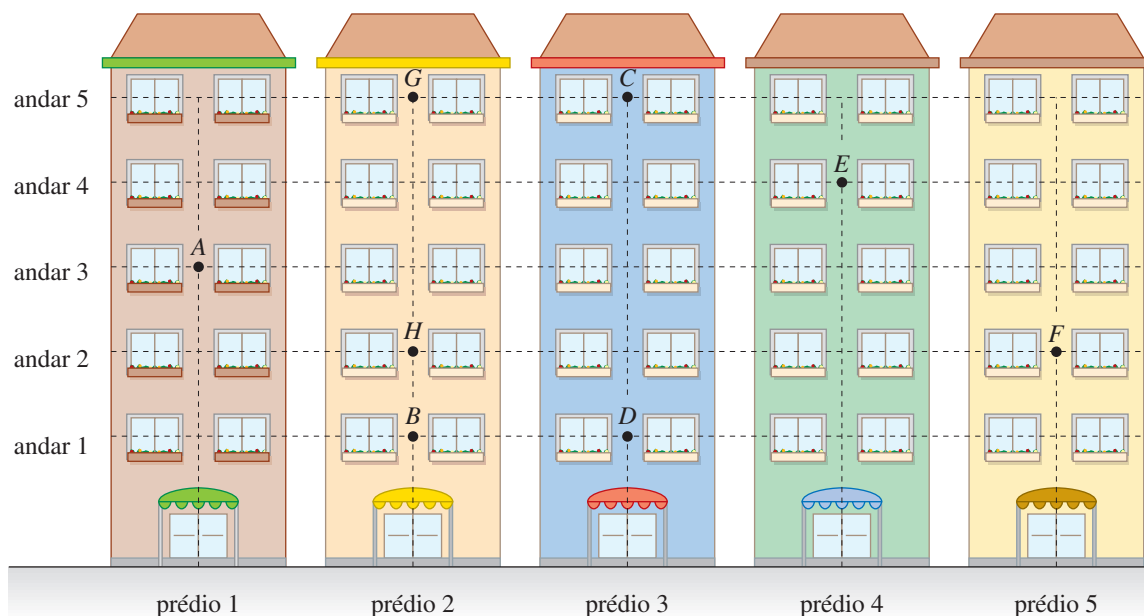
Neste capítulo, vamos estudar um pouco mais sobre os pares ordenados, além de resolver problemas que envolvem equações do 1º grau com duas incógnitas.

► O conceito de par ordenado

Considere as situações a seguir.

► Situação 1

A figura abaixo representa um condomínio residencial formado por cinco prédios de apartamentos, cada um com cinco andares, sendo um apartamento por andar.



Podemos usar pares de números para identificar ou localizar cada apartamento do condomínio representado na página anterior. Um dos números do par indicará o prédio, e o outro, o andar. Veja alguns exemplos no quadro a seguir. *Elabore questões em que você fornece o par de números, e os alunos têm de dizer em que prédio e andar se localiza o apartamento.*

Apartamento	Prédio/Andar	Par de números
A	prédio 1/andar 3	(1, 3)
B	prédio 2/andar 1	(2, 1)
C	prédio 3/andar 5	(3, 5)
D	prédio 3/andar 1	(3, 1)
H	prédio 2/andar 2	(2, 2)

Observe que:

- os pares (1, 3) e (3, 1) indicam apartamentos diferentes: o primeiro par corresponde ao apartamento A, enquanto o outro par corresponde ao apartamento D, o que nos faz perceber a importância da ordem nesses pares de números;
- os apartamentos B e H, que pertencem a um mesmo prédio, estão associados a pares de números em que o primeiro número é o mesmo (no caso, o número 2);
- os apartamentos B e D, situados no mesmo andar, estão associados a pares de números em que o segundo número é o mesmo (no caso, o número 1).

Situação 2

Cruzando palavras

Horizontais

1. Unidade de medida de massa
2. Por dois pontos passa uma só
3. Socorro
4. Osso do esqueleto humano
5. Caminhar
6. Lodo

Verticais

1. Unidade de medida de ângulo
2. Nota musical/Dez centenas
3. Todo cubo tem (palavra invertida)
4. Faltou o i para ser maior
5. Parte do sapato em contato com o solo

	1	2	3	4	5
1	G	R	A	M	A
2	R	E	T	A	
3	A		S	O	S
4	U	M	E	R	O
5		I	R		L
6		L	A	M	A

O par de números (3, 3) corresponde a qual letra neste quadro? **Letra S**

Pergunte aos alunos qual foi a regra adotada para associar cada letra deste quadro a um par de números. Eles devem concluir, a partir dos exemplos, que o primeiro número do par corresponde à linha em que a letra está no quadro, e o segundo número corresponde à coluna.



Considerando o quadro completo, podemos fazer algumas associações:

(2, 3) → T

(4, 1) → U

(5, 5) → L

Retomando o problema apresentado no início do capítulo, podemos notar que os pares de números $(7, 0)$ e $(0, 7)$, por exemplo, representam diferentes resultados para o jogo. O par $(7, 0)$ indica a vitória do Ceará por 7 a 0, enquanto o par $(0, 7)$ representa a vitória do Maranguape por 7 a 0.

Os pares de números associados a situações em que a ordem dos elementos deve ser respeitada são chamados de **pares ordenados**.

OBSERVAÇÕES

- ▶ Dado o par ordenado (a, b) , dizemos que a é o primeiro elemento do par, e b , o segundo elemento. Exemplos:
 - No par ordenado $(4, 3)$, o primeiro elemento é 4 e o segundo é 3.
 - No par ordenado $(-4, 0)$, o primeiro elemento é -4 e o segundo é 0.
- ▶ Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se $a = c$ e $b = d$. Exemplos:
 - Se $(a, b) = (-4, 5)$, temos $a = -4$ e $b = 5$.
 - Se $(x, y) = (0, 3)$, temos $x = 0$ e $y = 3$.
- ▶ Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são diferentes se $a \neq c$ ou $b \neq d$. Exemplos:
 - O par ordenado $(7, 1)$ é diferente do par ordenado $(7, -1)$.
 - O par ordenado $(-2, 6)$ é diferente do par ordenado $(6, -2)$.

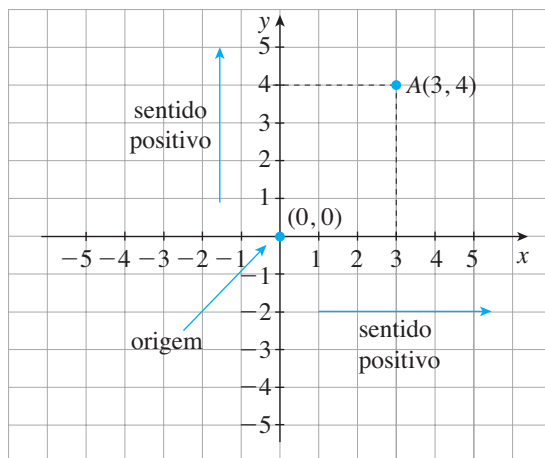
Representação geométrica de pares ordenados

Para fazer a representação geométrica de pares ordenados, traçamos, em um plano, duas retas numéricas perpendiculares. Ao ponto de intersecção entre elas atribuímos o par ordenado $(0, 0)$ e damos o nome **origem**.

Chamamos a reta horizontal de **eixo x** e a reta vertical de **eixo y**.

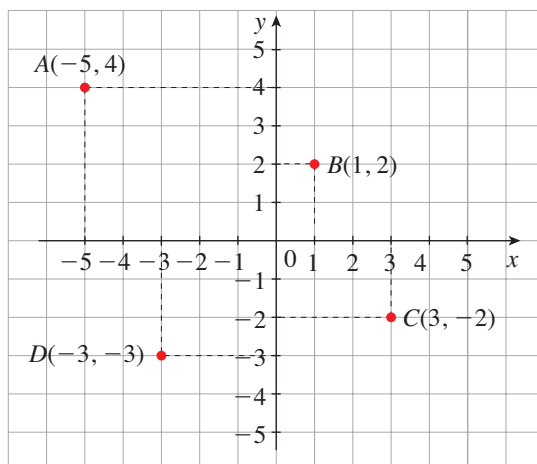
Nessa representação, os pares ordenados são associados a pontos; por isso, eles são chamados de **coordenadas dos pontos**, e a representação recebe o nome de **sistema de coordenadas**.

Observe a representação do ponto $A(3, 4)$.



O primeiro elemento indica a posição em relação ao eixo horizontal, e o segundo elemento, a posição em relação ao eixo vertical.

Veja como representamos os pares ordenados $A(-5, 4)$, $B(1, 2)$, $C(3, -2)$ e $D(-3, -3)$.



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

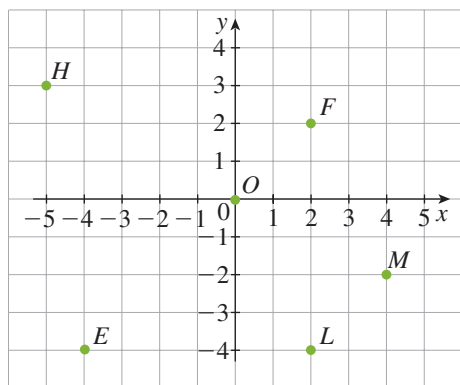
1 Volte a observar a ilustração da página 145. Usando um par de números em que o primeiro número indica o prédio, e o segundo, o andar, dê a posição dos apartamentos:

- a) E ; $(4, 4)$ b) F ; $(5, 2)$ c) G ; $(2, 5)$

2 Indique o valor de a e de b nos pares ordenados.

- a) $(3, 7) = (a, 7)$ $a = 3$
 b) $(a, b) = (0, -1)$ $a = 0$ e $b = -1$
 c) $(a, 2) = (-3, b)$ $a = -3$ e $b = 2$
 d) $(a + 3, 8) = (5, b)$ $a = 2$ e $b = 8$
 e) $(3a - 1, b + 4) = (8, 2)$ $a = 3$ e $b = -2$

3 Observe o sistema de coordenadas com alguns pontos indicados.



NELSON MATSUDA

Agora, determine as coordenadas desses pontos. $H(-5, 3)$; $O(0, 0)$; $F(2, 2)$; $L(2, -4)$; $E(-4, -4)$; $M(4, -2)$

4 Construa um sistema de coordenadas em uma folha de papel quadriculado e represente os seguintes pontos:

- $A(-3, 3)$
- $B(-3, -3)$
- $C(3, -3)$
- $D(3, 3)$

Se unirmos os pontos A , B , C , D e A , nessa ordem, por segmentos, obteremos um polígono. Que polígono é esse? **um quadrado**

5 Considere o problema apresentado na página 144. Represente em um sistema de coordenadas os pares ordenados que são soluções daquele problema. Se unirmos esses pontos por segmentos, o que poderemos observar? **Que eles estão alinhados.**

6 Em uma folha de papel quadriculado, construa um sistema de coordenadas e marque nele quatro pontos que sejam vértices de um:

- a) retângulo;
- b) trapézio;
- c) losango;
- d) pentágono;
- e) hexágono.

• Após a escolha dos pontos, construa para cada item o respectivo polígono. **respostas pessoais**

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Equações do 1º grau com duas incógnitas

No início deste capítulo, apresentamos uma situação que envolvia uma equação com duas incógnitas:

$$x + y = 7$$

Essa equação é uma **equação do 1º grau com duas incógnitas**.

Uma equação que pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é chamada de **equação do 1º grau com duas incógnitas**.

Consideremos agora a equação $5x + 2y = 7$, em que x e y são números racionais.

Essa é uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Vamos ver um modo de encontrar uma das soluções dessa equação. Para isso, escolhemos um valor qualquer para x e, em seguida, substituímos esse valor na equação para determinar o valor de y . O par (x, y) será uma das soluções da equação.

Como exemplo, atribuiremos a x o valor -2 :

$$5x + 2y = 7$$

$$5 \cdot (-2) + 2y = 7$$

$$-10 + 2y = 7$$

$$2y = 7 + 10$$

$$2y = 17$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{17}{2}$$

$$y = \frac{17}{2}$$

Atribuir a x o valor -2 quer dizer substituir x por -2 .



CLAUDIO CHIYO

Portanto, o par $(-2, \frac{17}{2})$ é uma solução da equação $5x + 2y = 7$.

Mas essa solução não é única. Podemos atribuir a x outro valor. Por exemplo, atribuindo a x o valor 1 , temos:

$$5x + 2y = 7$$

$$5 \cdot (1) + 2y = 7$$

$$5 + 2y = 7$$

$$2y = 7 - 5$$

$$2y = 2$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{2}{2}$$

$$y = 1$$

Aqui, substituímos x por 1 .



CLAUDIO CHIYO

O par $(1, 1)$ é outra solução da equação $5x + 2y = 7$.

Como x e y são números racionais, a equação $5x + 2y = 7$ tem **infinitas soluções**.

7 Entre os pares ordenados indicados a seguir, quais são soluções da equação $3x + 2y = 4$?

- a) (2, 1) *alternativas b e c*
 b) (2, -1)
 c) $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$
 d) $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$

8 Considere a equação $4x - 2y = 6$ e responda às questões.

- a) Para que valor de x temos $y = 7$? $x = 5$
 b) Para que valor de y temos $x = \frac{1}{2}$? $y = -2$
 c) Se uma das soluções é o par (1,5; y), qual é o valor de y nesse caso? $y = 0$
 d) Se uma das soluções é o par (x , -3), qual é o valor de x nesse caso? $x = 0$

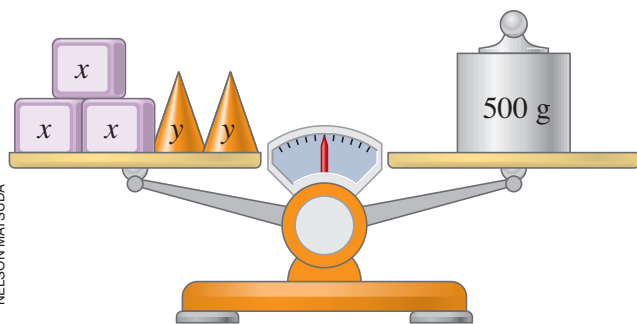
9 Considerando a equação $x + y = 4$, calcule o valor de y quando se atribui a x o valor:

- a) 9; $y = -5$ b) -3; $y = 7$ c) 2,5; $y = 1,5$

10 Considere novamente a equação $x + y = 4$. Multiplique cada termo dela por um mesmo número diferente de zero, à sua escolha. Se, na nova equação, você substituir x por 9, por -3, por 2,5, que valores de y espera obter? Seriam os mesmos valores de y obtidos na atividade anterior, ou seriam aqueles valores multiplicados pelo número que você escolheu? Depois de responder no caderno, faça os cálculos e verifique a sua resposta.

Os mesmos valores obtidos na atividade anterior.

11 Expresse a situação mostrada na balança por meio de uma equação do 1º grau com as incógnitas x e y . $3x + 2y = 500$



- Agora, responda: qual é a massa de cada cubo, se a massa de cada cone for 70 g? **120 g**

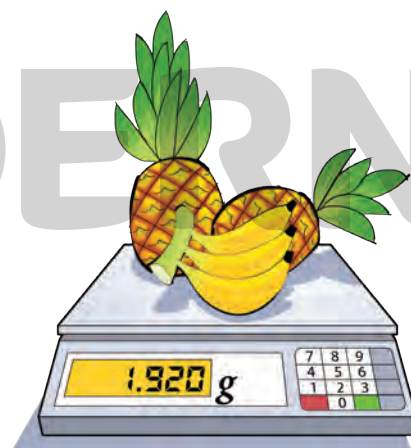
12 Joana brincava com dois dados de cores diferentes quando os deixou cair, simultaneamente, no chão. Observou o par de números obtidos e notou que a soma deles era 8. Indicando os números por x e y , ache a equação correspondente a essa situação. Em seguida, determine todos os pares possíveis que podem ter saído nos dados.

$x + y = 8$
 (2, 6), (3, 5),
 (4, 4), (5, 3) e
 (6, 2)



13 Em uma balança digital que indica a massa em grama, Adriano pesou as frutas trazidas da feira.

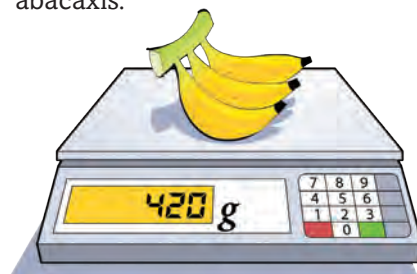
a) Veja quantos gramas têm essas frutas:



$2x + 3y = 1.920$

Supondo que cada abacaxi tem x gramas e que cada banana tem y gramas, expresse essa situação por meio de uma equação.

b) Observe a balança após a retirada dos abacaxis.



Quantos gramas tem cada abacaxi? **750 gramas**

CLAUDIO CHIYO

CLAUDIO CHIYO

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CLAUDIO CHIYO

Possibilidades e probabilidades

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados.

Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?

Para calcular a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada, devemos inicialmente descobrir todas as possibilidades de soma de números que ele pode tirar nos dados.

Ao lançar dois dados, Hugo pode tirar os seguintes pares de números:



OSÉ LUIS JUHAS

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Observe que há 36 pares diferentes de números, mas nem todos têm soma igual a 10 ou maior. Por isso, circulamos os pares de números que satisfazem essa condição. Então, entre as 36 possibilidades, há somente 6 pares cuja soma de números é igual a 10 ou maior.

Como há 6 possibilidades em 36 de Hugo obter uma soma igual a 10 ou maior, dizemos que a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada é:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO


Considerando o problema de Hugo, responda às questões a seguir.

- Supondo que Hugo precise obter nos dados uma soma igual a 8 ou maior, a probabilidade de ele ganhar o jogo aumenta? Justifique sua resposta. *Sim, ela passa a ser de $\frac{15}{36}$.*
- Se a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada fosse de 100%, quantas casas ele precisaria andar? *uma ou duas casas*

3 Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Considere a manchete apresentada no início do capítulo e uma segunda manchete, de outro jornal, sobre a mesma notícia.

Na primeira rodada do Campeonato Cearense de Futebol, o jogo entre Ceará e Maranguape terminou com 7 gols marcados.



Partida entre Ceará e Maranguape no Estádio Presidente Vargas, em Fortaleza (CE). (Foto de 2015.)

CHRISTIAN ALEKSON/CEARASC.COM

JOSE LUIS JUHAS

Campeonato Cearense de Futebol: Ceará vence Maranguape por 1 gol de diferença no Estádio Presidente Vargas.



ALAN CARVALHO

JOSE LUIS JUHAS

Já vimos que somente com a informação da primeira manchete não é possível determinar a quantidade de gols marcados pelas equipes. E o mesmo acontece se considerarmos apenas a informação da segunda manchete. Mas, se unirmos as informações apresentadas nas duas manchetes, poderemos resolver esse problema.

Para isso, vamos considerar x a quantidade de gols marcados pelo Ceará e y a quantidade de gols marcados pelo Maranguape.

Já vimos que é possível associar à primeira manchete a seguinte equação:

$$x + y = 7, \text{ em que } x \text{ e } y \text{ são números naturais}$$

Também vimos que os pares ordenados $(7, 0)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(2, 5)$, $(1, 6)$ e $(0, 7)$ são soluções dessa equação.

À segunda manchete, podemos associar a equação:

$$x = y + 1, \text{ em que } x \text{ e } y \text{ são números naturais}$$

Observe, no quadro abaixo, alguns dos possíveis resultados desse jogo, de acordo com a segunda manchete:

Gols marcados pelo Ceará	1	2	3	4	5	6	7
Gols marcados pelo Maranguape	0	1	2	3	4	5	6
Pares ordenados	(1, 0)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)

Os pares ordenados (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5) e (7, 6) são, portanto, algumas das soluções da equação $x = y + 1$.

Note que o único par ordenado comum às duas situações é o par (4, 3), pois é o único em que a soma dos gols é igual a 7 e que representa a vitória do Ceará por 1 gol de diferença. Logo, de acordo com essas informações, podemos afirmar que o Ceará venceu o jogo por 4 a 3.

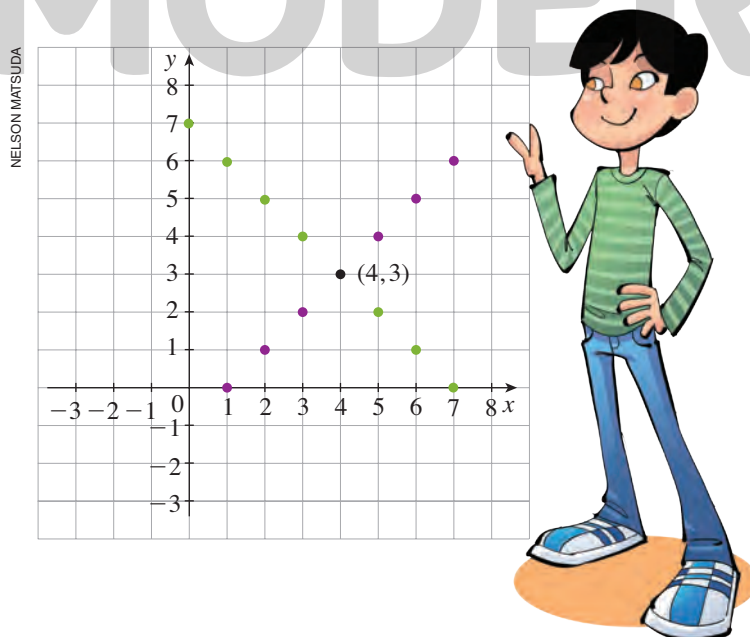
As equações $x + y = 7$ e $x = y + 1$ também podem ser indicadas por:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Elas constituem um exemplo de **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**.

O par ordenado (4, 3), que verifica as duas equações, é a solução do sistema.

Veja o que acontece quando representamos, em um mesmo sistema de coordenadas, os pares ordenados que destacamos como soluções das duas equações:



Observe que, se traçássemos um segmento unindo os pontos que representam as soluções de uma mesma equação, obteríamos dois segmentos que se cruzariam no ponto de coordenadas (4, 3), que é a **solução do sistema**.

Resolução de sistemas

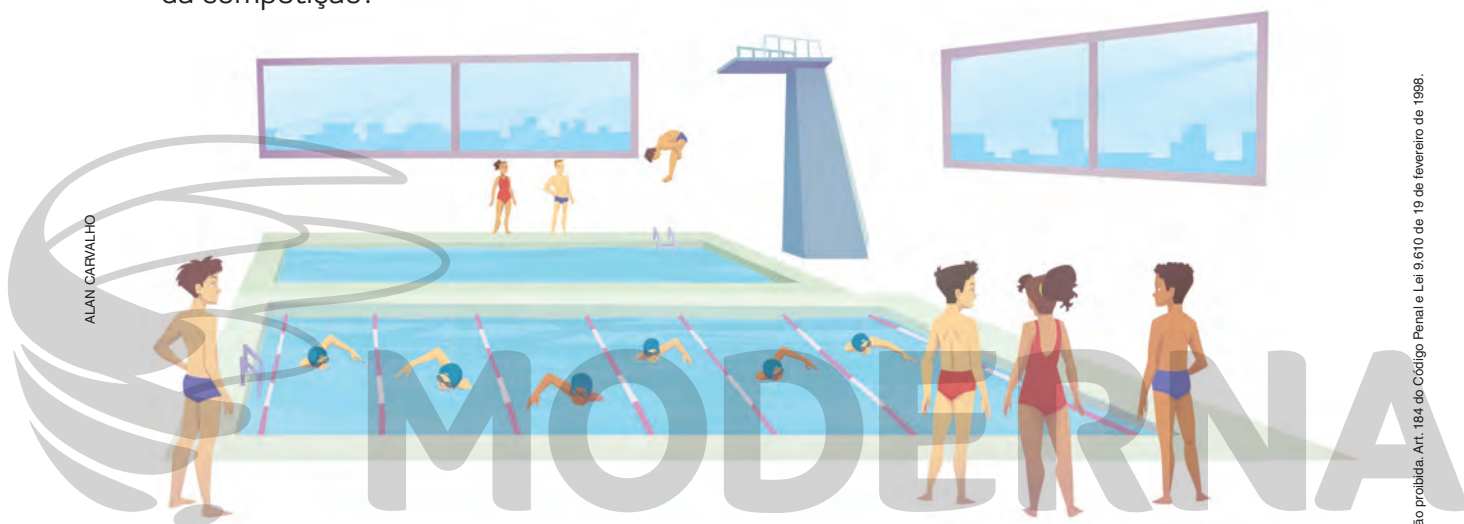
Existem vários métodos para resolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Estudaremos os métodos da substituição e da adição, que são processos algébricos de resolução.

Método da substituição

O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir na outra equação a expressão encontrada. Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Em uma competição de esportes aquáticos, nas modalidades de natação e saltos ornamentais, participaram 32 equipes e 344 atletas. Cada equipe de natação inscreveu 12 atletas, e cada equipe de saltos ornamentais, 10 atletas. Quantas equipes de natação participaram da competição?



Indicando por x a quantidade de equipes de natação e por y a quantidade de equipes de saltos ornamentais, podemos montar o seguinte sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da substituição, podemos escolher, por exemplo, a equação $x + y = 32$ e isolar a incógnita x . Assim, temos:

$$x + y = 32$$

$$x + y - y = 32 - y$$

$$x = 32 - y \quad \text{equação com duas incógnitas}$$

Depois desta resolução, se considerar oportuno, peça aos alunos que resolvam o sistema isolando a incógnita y .

Agora, substituindo x por $(32 - y)$ na equação $12x + 10y = 344$, temos:

$$12x + 10y = 344$$

$$12 \cdot (32 - y) + 10y = 344 \quad \text{equação com uma incógnita}$$

Ao resolver essa equação, encontramos o valor de y :

$$384 - 12y + 10y = 344$$

$$-2y = -40$$

$$2y = 40$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{40}{2}$$

$$y = 20$$

Reduzimos os termos semelhantes.

Multiplicamos os dois membros por -1 .

Dividimos os dois membros por 2.

Substituindo y por 20 na equação $x + y = 32$, encontramos o valor de x :

$$x + y = 32$$

$$x + 20 = 32$$

$$x = 32 - 20$$

$$x = 12$$

Se considerar oportuno, proponha aos alunos que resolvam o sistema com os valores encontrados para x e y .

Pergunte aos alunos: quantas equipes de saltos ornamentais participaram da competição? Eles devem concluir que foram 20. Em seguida, pergunte como eles descobriram. Alguns podem ter identificado essa quantidade olhando para o par ordenado. Outros podem ter feito a subtração $32 - 12$, uma vez que o total de equipes era um dado do problema.

Deixe que os alunos compartilhem suas ideias.

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (12, 20).

Portanto, 12 equipes de natação participaram da competição.

Situação 2

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ pelo método da substituição.

Isolando a incógnita y na equação $2x + y = 12$, temos:

$$y = 12 - 2x \quad \text{equação com duas incógnitas}$$

Substituindo y por $(12 - 2x)$ na equação $x + 3y = 11$, encontramos o valor de x :

$$x + 3y = 11$$

$$x + 3 \cdot (12 - 2x) = 11 \quad \text{equação com uma incógnita}$$

$$x + 36 - 6x = 11$$

$$x - 6x = 11 - 36$$

$$-5x = -25$$

$$5x = 25$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$$

$$x = 5$$

Substituindo x por 5 em $y = 12 - 2x$, encontramos o valor de y :

$$y = 12 - 2x$$

$$y = 12 - 2 \cdot 5$$

$$y = 12 - 10$$

$$y = 2$$

Logo, o par (5, 2) é a solução do sistema.

MODERNA

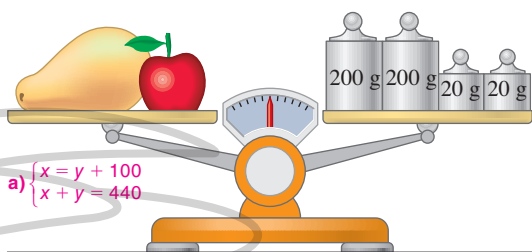
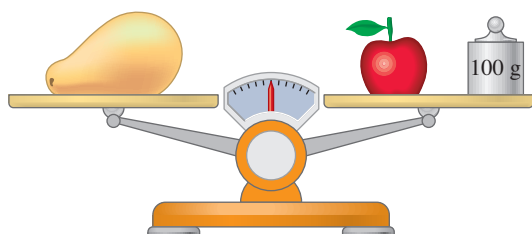


14 Verifique se o par ordenado $(5, -3)$ é solução

do sistema:
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

O par $(5, -3)$ é solução do sistema.

15 A mesma balança manteve-se equilibrada em dois momentos:



a)
$$\begin{cases} x = y + 100 \\ x + y = 440 \end{cases}$$

a) Chame de x a massa do mamão e de y a massa da maçã. Determine o sistema de equações correspondente a essa situação.

b) Resolva o sistema. $(270, 170)$

c) Quantos gramas tem o mamão?
 270 g

16 Meu avô e meu pai foram pescar. Eles trouxeram 25 peixes de diversas espécies. Meu avô disse que pescou o quádruplo do número de peixes que meu pai. Quantos peixes cada um pescou? O avô pescou 20 peixes, e o pai, 5.



17 Para confeccionar duas alianças, foram usados 13 gramas de ouro. Uma das alianças tem 3 gramas a mais que a outra.

a) Escreva, em seu caderno, o sistema correspondente a essa situação.

b) Resolva mentalmente o sistema e diga quantos gramas tem a aliança maior. 8 g

17. a)
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

18 Resolva os sistemas.

a)
$$\begin{cases} x = 5y \\ x + y = 12 \end{cases} \quad (10, 2)$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 3 \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right) \\ 12x - 9y = -20 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \quad (8, -2)$$

d)
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases} \quad (1, 5)$$

19 Faça o que se pede em cada caso.

a) Encontre os valores de a , b e c , de maneira que os pares ordenados $(1, a)$, $(3, b)$ e $(5, c)$ sejam soluções da equação $x + y = 6$. $a = 5, b = 3, c = 1$

b) Encontre os valores de l , m e n , de maneira que os pares ordenados $(1, l)$, $(3, m)$ e $(5, n)$ sejam soluções da equação $x - y = 2$. $l = -1, m = 1, n = 3$

c) Construa um sistema de coordenadas em uma folha de papel quadriculado e represente os pares ordenados dos itens a e b . construção de figura

d) Com base nessa representação, estime o par ordenado que é solução do sistema

de equações
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
 resposta pessoal

e) Resolva esse sistema em seu caderno e verifique se sua estimativa estava correta. $(4, 2)$

20 Um terreno retangular tem 84 m de perímetro. O comprimento tem 18 m a mais que a largura. Qual é a área desse terreno? 360 m^2

21 Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Agora faça o que se pede.

a) Encontre três pares ordenados que sejam soluções da 1ª equação. resposta pessoal

b) Encontre três pares ordenados que sejam soluções da 2ª equação. resposta pessoal

+ c) Procure, mentalmente, um par ordenado que seja solução das duas equações. O que você encontrou? Registre em seu caderno suas conclusões. resposta pessoal

d) Resolva o sistema e confronte com suas conclusões. O que você observou?
o sistema não tem solução

Pense mais um pouco...

Júlia guardou durante um mês, em um cofre, moedas de 25 e 10 centavos. Ao abri-lo, constatou que possuía 210 moedas, em um total de R\$ 35,70. Quantas moedas de cada tipo Júlia guardou?

98 moedas de 25 centavos e 112 de 10 centavos.



FOTOS: ACERVO DO BANCO CENTRAL DO BRASIL

Método da adição

Para resolver um sistema pelo método da adição, adicionamos membro a membro as equações, a fim de anular uma das incógnitas. Acompanhe algumas situações.

Situação 1

Vanessa comprou uma blusa e uma calça e gastou R\$ 96,00. Sabendo que a calça custa R\$ 16,00 a mais que a blusa, determine quanto Vanessa pagou em cada peça.

Indicando por x o preço da blusa e por y o preço da calça, podemos montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} y + x = 96 \\ y - x = 16 \end{cases}$$



BLEND IMAGES/SHUTTERSTOCK

Para resolvê-lo, vamos adicionar membro a membro as duas equações:

$$\begin{cases} y + x = 96 \\ y - x = 16 \end{cases} \quad \downarrow \text{Somamos.} \\ \hline 2y = 112 \quad \text{equação com uma incógnita} \\ \frac{2y}{2} = \frac{112}{2} \\ y = 56$$

Substituindo y por 56 na equação $y + x = 96$, temos:

$$\begin{aligned} 56 + x &= 96 \\ x &= 96 - 56 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Portanto, o par (40, 56) é a solução do sistema.

Logo, Vanessa pagou R\$ 40,00 pela blusa e R\$ 56,00 pela calça.

Situação 2

Vamos resolver o sistema:
$$\begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

Para aplicar o método da adição na resolução do sistema dado, de modo a anular a incógnita x , devemos multiplicar a 1ª equação por -3 e a 2ª equação por 2 :

$$\begin{cases} 2x + 5y = -4 & \times (-3) \\ 3x + 4y = 1 & \times 2 \end{cases} \text{ que implica } \begin{cases} -6x - 15y = 12 \\ 6x + 8y = 2 \end{cases}$$

Somando membro a membro as equações, temos:

$$\begin{cases} -6x - 15y = 12 \\ -6x + 8y = 2 \end{cases} \downarrow \text{Somamos.}$$
$$-7y = 14 \quad \text{equação com uma incógnita}$$
$$7y = -14$$
$$\frac{7y}{7} = \frac{-14}{7}$$
$$y = -2$$

Substituindo y por -2 na 1ª equação do sistema, temos:

$$2x + 5y = -4$$
$$2x + 5 \cdot (-2) = -4$$
$$2x - 10 = -4$$
$$2x = -4 + 10$$
$$2x = 6$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado $(3, -2)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Resolva, pelo método da adição, os sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 24 \end{cases}$ $(10, -4)$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ $(1, -2)$

b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$ $(-1, 3)$ e) $\begin{cases} x + 3y = 6 \left(4, \frac{2}{3}\right) \\ -4x + 6y = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ $(5, 1)$ f) $\begin{cases} -x = -1 - y \\ x - y = 0 \end{cases}$ impossível

23 Em um pátio estão estacionados carros e motos, que totalizam 40 veículos e 140 rodas. Há quantas motos nesse pátio? **30**

24 A soma das idades de dois irmãos é 29 anos, e a diferença é 5 anos. Indique por x a idade do mais velho e por y a idade do mais novo.

a) Escreva o sistema de equações associado ao problema.

b) Determine a idade de cada um. **a)** $\begin{cases} x + y = 29 \\ x - y = 5 \end{cases}$
12 anos e 17 anos

25 Um carro de motor bicombustível (etanol e gasolina) necessita de gasolina para dar a partida. Pedro gastou no posto R\$ 62,50 em combustível. Ele colocou 5 litros de gasolina no reservatório e 40 litros de etanol no tanque. Quanto Pedro pagou por litro de gasolina e por litro de etanol, se o total dos dois combustíveis, por litro, é R\$ 3,75? **R\$ 2,50 e R\$ 1,25**

26 Mauro e Laura colecionam figurinhas. Veja o diálogo entre eles.

Se você me der 3 figurinhas, ficaremos com quantidades iguais.

Se você me der 5 figurinhas, ficarei com o dobro das suas.



Quantas figurinhas cada um possui? Mauro 21, Laura 27

27 Os atletas de um clube foram divididos em grupos. Para os jogos de futebol, os grupos são de 11 atletas; para os jogos de vôlei, os grupos são de 6 atletas. No total, foram formados 16 grupos. O clube tem 126 atletas participando dos jogos. Quantos grupos participarão dos jogos de vôlei? 10

28 Um grupo de 20 jovens foi a uma lanchonete. Os rapazes gastaram em média R\$ 24,00 cada um, e as garotas, R\$ 16,00 cada uma. No final, o total gasto pelos rapazes foi igual ao total gasto pelas garotas. Quantos rapazes havia nesse grupo? 8

29 Um supermercado apresentou as seguintes ofertas:



Nessa promoção, a quanto está sendo vendido cada bombom? R\$ 0,54

30 (Unifor-CE) Paguei R\$ 35,00 por uma calça e uma camiseta. Se eu tivesse pago R\$ 8,00 a menos pela calça e R\$ 7,00 a mais pela camiseta, seus preços teriam sido iguais. Quanto paguei pela calça? alternativa a

- a) R\$ 25,00
- b) R\$ 22,00
- c) R\$ 20,00
- d) R\$ 18,00
- e) R\$ 15,00

31 (Unirio-RJ) Em um escritório de advocacia, trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como dr. André e dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária Cláudia coloca 1 grampo em cada processo de dr. André e 2 grampos em cada processo de dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que ao todo são 78 processos, nos quais foram usados 110 grampos, podemos concluir que o número de processos de dr. Carlos é igual a: alternativa d

- a) 64.
- b) 46.
- c) 40.
- d) 32.
- e) 28.

Pense mais um pouco...

Um rapaz está embalando algumas taças e observa que:

- após colocar 7 taças em cada caixa, restam 19 taças fora das caixas;
- tentando colocar 10 taças em cada caixa, uma delas fica com 5 taças a menos do que as outras.

- a) Quantas caixas esse rapaz está usando? 8 caixas
- b) Quantas taças estão sendo embaladas? 75 taças



FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Interpretando um gráfico de linha

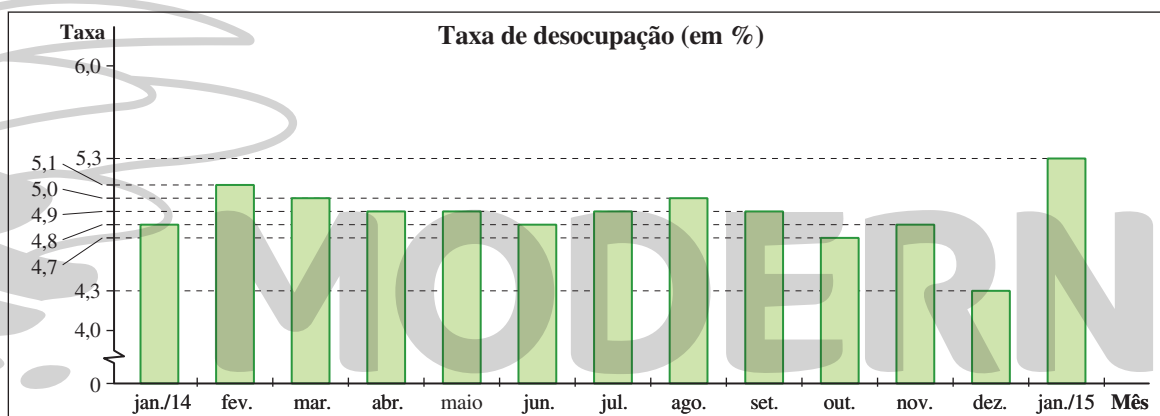
O desemprego é medido sistematicamente pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em seis regiões metropolitanas do país: Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre. Ele é representado por um índice que mede a taxa de desocupação (ou desemprego aberto), isto é, considera apenas quem procurou emprego nos 30 dias anteriores à pesquisa e não exerceu nenhum tipo de trabalho – remunerado ou não – nos últimos sete dias.

Veja na tabela abaixo os índices de janeiro de 2014 a janeiro de 2015.

Taxa de desocupação (em %)													
Mês/ano	jan./14	fev.	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.	dez.	jan./15
Índice	4,8	5,1	5,0	4,9	4,9	4,8	4,9	5,0	4,9	4,7	4,8	4,3	5,3

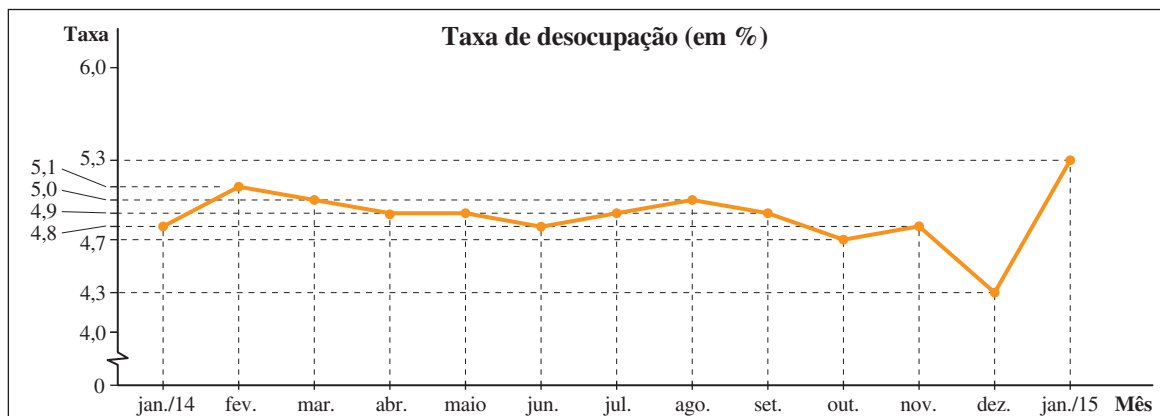
Fonte: IBGE, 2015.

Podemos representar os dados da tabela por um gráfico de colunas.



Fonte: IBGE, 2015.

Para perceber melhor a variação da taxa ao longo do tempo, usamos um gráfico de linha. Podemos construí-lo, com base no gráfico acima, marcando o ponto médio da parte superior de cada coluna. A seguir, apagamos as colunas e ligamos os pontos por segmentos de reta consecutivos.



Fonte: IBGE, 2015.

ADILSON SECCO

ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe no gráfico que, nesse período, a taxa de desocupação subiu em 5 meses e caiu em 6. A taxa de desocupação no mês de maio de 2014 se manteve estável em relação ao mês anterior.

Veja também que a variação da taxa pode ser maior em valor absoluto (segmento mais próximo da vertical, mais “em pé”) ou menor (segmento mais “deitado”), positiva (da esquerda para a direita, sobe) ou negativa (da esquerda para a direita, desce). Por exemplo, no período observado, no último mês, cujo aumento foi 1,0% (5,3% – 4,3%), o segmento está mais “em pé” do que o do primeiro mês, cujo aumento foi 0,3% (5,1% – 4,8%), que está mais “deitado”. Ou seja, aumento menor implica inclinação menor do segmento.



ALTON DE FREITAS/AGÊNCIA O GLOBO

Operários trabalhando na construção da ferrovia Norte Sul, Anápolis, GO. (Foto de 2014).

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

c) *resposta possível: no final do ano há aquecimento do comércio com as compras natalinas, o que gera novos empregos.*


Observando o gráfico de linha da página anterior, responda às questões em seu caderno.

a) Dê dois meses em que as inclinações de queda são iguais. Neles, ocorreram quedas iguais? *resposta possível: março e setembro; sim*

b) Dê um mês em que ocorreu menor queda e um em que ocorreu maior queda. *resposta possível: março; dezembro*

c) Tradicionalmente, em dezembro o desemprego diminui. A que você atribui isso?

d) Reúna-se com um colega e comentem a seguinte afirmação:

 “Se substituíssemos a linha poligonal do gráfico por um único segmento com extremidades no primeiro e no último ponto dessa linha, teríamos a variação total do período jan./14 a jan./15, porém, não saberíamos que variações teriam ocorrido nos meses desse período”. *resposta pessoal*
Espera-se que os alunos concordem com a afirmação.

- 1 Veja o cartaz que estava afixado em um teatro.



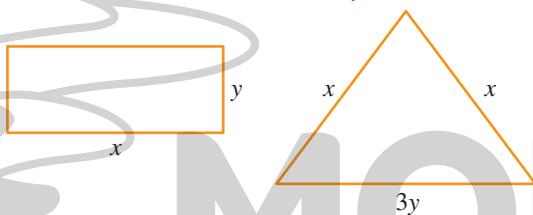
CLAUDIO CHIYO

Se, em uma apresentação teatral, foram vendidos 125 ingressos e arrecadados R\$ 2.140,00, quantas crianças assistiram a essa apresentação?

45 crianças

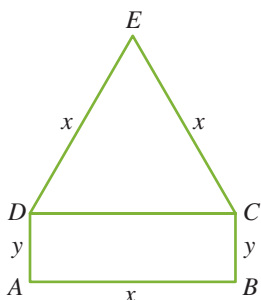
- 2 O perímetro do retângulo é 28 cm, e o do triângulo, 32 cm. Calcule x e y .

$x = 10 \text{ cm}$
 $e y = 4 \text{ cm}$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

- 3 Com base na figura a seguir, enuncie um problema que possa ser solucionado por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.



NELSON MATSUDA

Resolva o problema que você elaborou.

resposta pessoal

- 4 (UFMG) Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida assim: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Se um aluno totalizou 210 pontos, o número de questões que ele acertou é:
a) 25. b) 30. c) 35. d) 40. e) 45.

alternativa e

- 5 Carla gosta de natação e judô. Em uma academia, a natação exige um gasto médio, entre a mensalidade e a condução, de R\$ 20,00 por aula, e o judô, de R\$ 15,00 por aula. Carla pretende pagar R\$ 360,00 por mês e tem tempo disponível para praticar 20 aulas por mês entre os dois esportes. Quantas aulas Carla poderá fazer de cada um desses esportes?
natação: 12 aulas;
judô: 8 aulas



ILUSTRAÇÕES: ALAN CARVALHO

- 6 Um clube ofereceu a seus associados um baile de Carnaval. Cada sócio titular pagou R\$ 20,00, e seus dependentes, apenas metade. Com os 1.200 participantes, o clube arrecadou R\$ 18.000,00. Qual foi o número de dependentes presentes nesse baile? 600



CANARYLUC/SHUTTERSTOCK

- 7 (Unifor-CE) Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:
alternativa d
a) 20 balas de hortelã.
b) 26 balas de laranja.
c) duas balas de laranja a mais que de hortelã.
d) igual número de balas dos dois tipos.
e) duas balas de hortelã a mais que de laranja.

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- 8 Verifique quais dos pares ordenados abaixo são soluções da equação $6x + 3y = 33$. alternativas c e d
- a) $(-2, 7)$
 - b) $(7, -2)$
 - c) $(2, 7)$
 - d) $(5, 1)$

9 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ (2, 1)	d) $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ x = y \end{cases}$ (2, 2)
b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$ (2,5; 2)	e) $\begin{cases} 2x = 3y \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ (-3, -2)
c) $\begin{cases} x = -2y \\ x - 3y = 17,5 \end{cases}$ (7; -3,5)	f) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ (-1, 3)

- 10 Em uma sorveteria, os sorvetes são servidos em taças, umas de 150 ml e outras de 200 ml. Em um dia foram servidas 72 taças e 12,8 l de sorvete. Quantas taças de 200 ml foram servidas? 40 taças



CLAUDIO CHIYO

- 11 Uma pessoa pagou uma dívida de R\$ 37,00 com 11 notas: algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 2,00. Quantas notas de cada valor foram utilizadas para pagar essa dívida? 5 notas de R\$ 5,00 e 6 notas de R\$ 2,00

- 12 Em um restaurante existem 60 mesas. Todas elas estão ocupadas, algumas por 4 pessoas e outras por 3 pessoas. No total são 195 pessoas. Quantas são as mesas ocupadas por 4 pessoas? 15 mesas



ALAN CARVALHO

- 13 Uma padaria vende em média 2.000 pãezinhos por dia, entre baguetes e bisnagas, obtendo com essa venda R\$ 850,00. Quantas baguetes e quantas bisnagas são vendidas, sabendo-se que cada baguete custa R\$ 0,40, e cada bisnaga, R\$ 0,50? 1.500 baguetes e 500 bisnagas



CLAUDIO CHIYO

- 14 Um fazendeiro cria porcos e galinhas. Quando um amigo lhe perguntou o número desses animais, ele respondeu que havia contado 84 cabeças e 208 pés. Qual é o número de porcos? 20 porcos



RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

- 15 Eu tenho 25 cubos, uns com 5 cm de aresta e outros com 8 cm de aresta. Colocando uns sobre os outros, formo uma pilha com 1,70 m de altura. Quantos cubos de cada tamanho eu tenho? 10 cubos de 5 cm de aresta e 15 cubos de 8 cm de aresta

- 16 A solução do sistema $\begin{cases} -x + 6y = 14 \\ 5x + 3y = 29 \end{cases}$ é o par (x, y) tal que: alternativa a
- a) $x > y$ e $y = 3$.
 - b) x e y são negativos.
 - c) $x < y$ e $y = 4$.
 - d) $x = 1,2$ e $y = 3,5$.

Simetria e ângulos

1 Reconhecendo a simetria

A natureza produz formas de extrema beleza, e o ser humano apropria-se disso em suas criações. Não há quem não admire o equilíbrio e a harmonia de figuras como as que aparecem nas fotos abaixo.



CHAIN FOTO24/SHUTTERSTOCK



MARC ANDERSON/ALAMY/GLOW IMAGES

A disposição da estrutura das asas da borboleta e da flor confere a elas uma beleza incomparável.

Note que podemos imaginar – tanto para a figura da borboleta quanto para a da flor – uma linha reta que as divida em duas partes praticamente iguais. É a ideia da simetria presente na natureza!

TIM GRAHAM/GETTY IMAGES



Taj-Mahal, o palácio em Agra (Índia), símbolo do amor do príncipe persa Sha Jaham por Arjumand Begum, também apresenta simetria. (Foto de 2012.)

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Mas, afinal, o que é simetria?

Mesmo sem conhecer a definição desse conceito, é possível reconhecer intuitivamente a simetria em várias figuras planas.

Vamos fazer uma pequena experiência para obter uma figura que apresenta simetria.

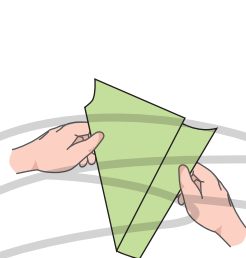
Passo 1: Pegue uma folha de papel e uma tesoura com pontas arredondadas.

Passo 2: Dobre a folha de papel, passando a mão sobre o papel dobrado e sobre o vinco.

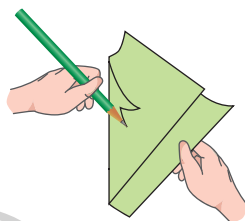
Passo 3: Desenhe uma das metades de uma figura.

Passo 4: Recorte o papel na linha do desenho.

Passo 5: Abra novamente o papel e observe a figura obtida. Ela ficou dividida pelo vinco do papel em duas partes idênticas, que coincidem ao dobrar o papel no vinco.



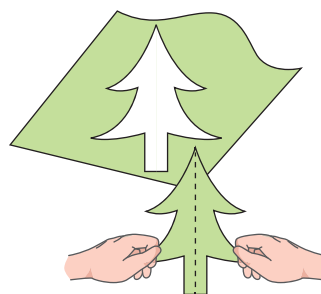
Dobrando o papel e fazendo o vinco.



Fazendo um desenho.



Recortando o papel.



Desdobrando o papel.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O vinco formado pela dobra representa uma linha reta que podemos chamar de **eixo de simetria**, pois ela divide a figura em **duas partes com mesma forma e mesmo tamanho**, como se uma fosse a imagem, refletida em um espelho, da outra. Por isso, dizemos que a figura obtida no papel é uma figura que apresenta **simetria**.

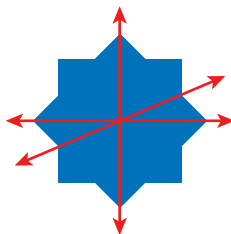
Se uma figura não tem simetria, dizemos que ela é assimétrica.

Veja um exemplo:



Note que, nessa figura, não podemos traçar um eixo de simetria.

Observe agora esta figura:



Para os alunos identificarem mais facilmente os outros eixos de simetria da figura, pode-se sugerir que a recortem de um papel e, por meio de dobraduras, descubram os eixos.

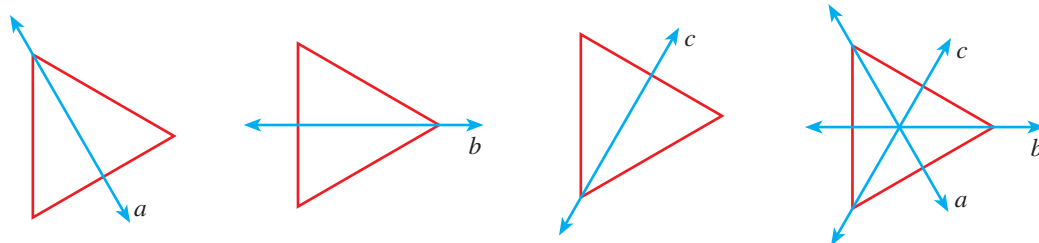
Ela tem mais de um eixo de simetria. Destacamos três, mas há outros. Você consegue identificar quais são os outros eixos?



JOSE LUIS JUHAS

Figuras com mais de um eixo de simetria

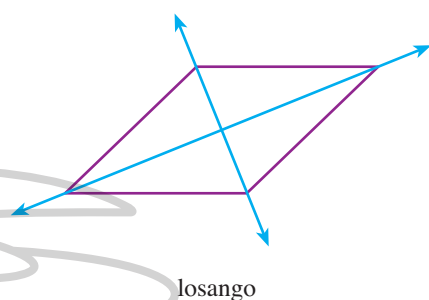
Observe o triângulo equilátero, reproduzido quatro vezes.



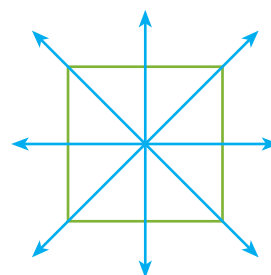
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Note que as retas a , b e c são eixos de simetria desse triângulo. Por isso, dizemos que o triângulo equilátero tem três eixos de simetria.

Existem outros polígonos com mais de um eixo de simetria. Veja.



losango



quadrado

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O triângulo equilátero tem 3 lados e 3 eixos de simetria. O quadrado também segue esse padrão: tem 4 lados e 4 eixos de simetria. No entanto, o losango apresentado tem 4 lados e somente 2 eixos de simetria. O que os diferencia?

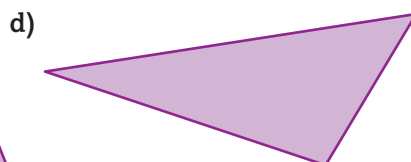
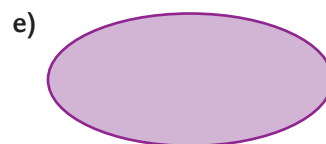
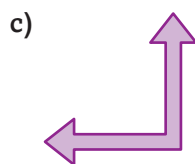
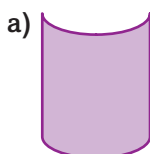
Todo polígono que tem o número de lados igual ao número de eixos de simetria é denominado **polígono regular**.

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Desenhe uma figura assimétrica e uma figura simétrica, identificando seu eixo de simetria. resposta pessoal
- 2 Entre as figuras geométricas representadas a seguir, quais possuem eixo de simetria? alternativas a, b, c e e

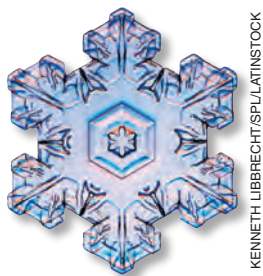


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Veja as fotos abaixo. Agora, responda em seu caderno: em qual das imagens há simetria? alternativas a e c

a)



KENNETH LIBBRECHT/SPL/ATINSTOCK

b)



JOHN GRANT/STONE/GETTY IMAGES

c)

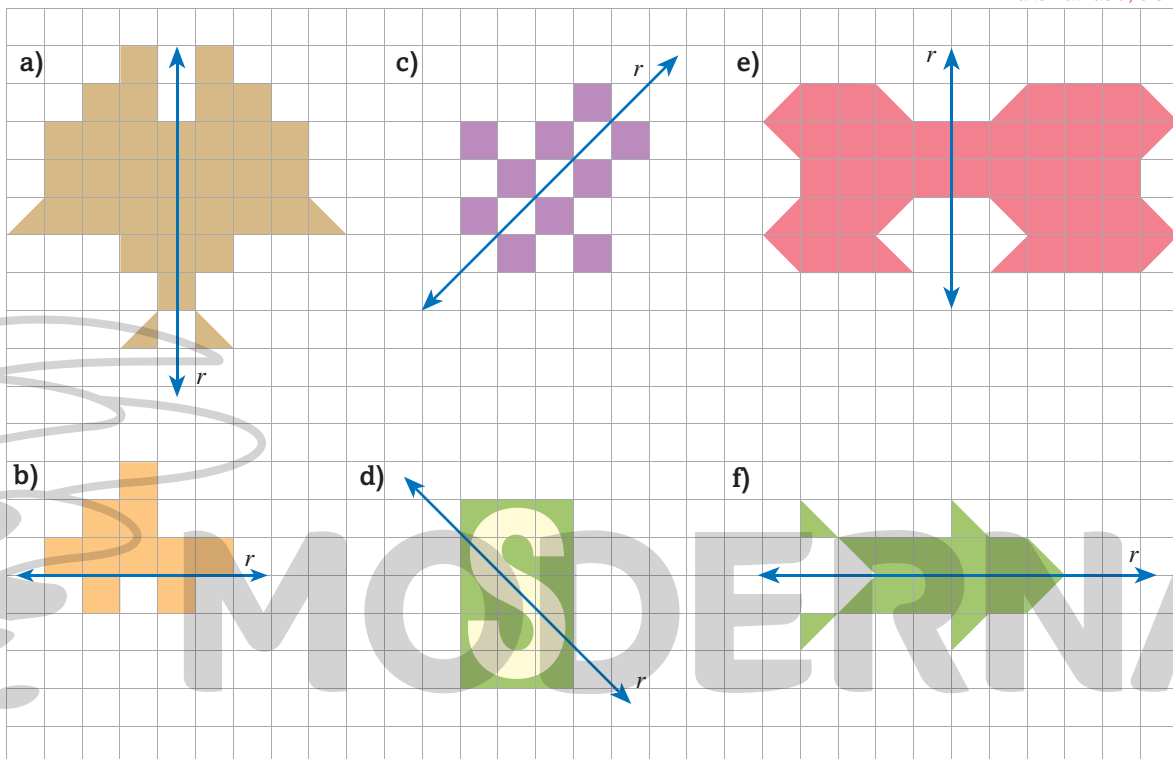


PHOTODISC/GETTY IMAGES

De a para c, temos as imagens de: floco de neve, folha de begônia, estrela-do-mar.

4 Em que casos a reta r representa um eixo de simetria da figura? Responda em seu caderno.

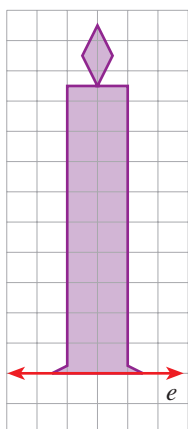
alternativas a, c e f



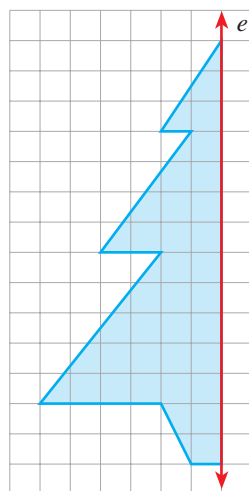
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

5 Reproduza os desenhos em uma folha de papel quadriculado e desenhe a metade que está faltando, sabendo que a reta e é um eixo de simetria de cada figura. construção de figuras

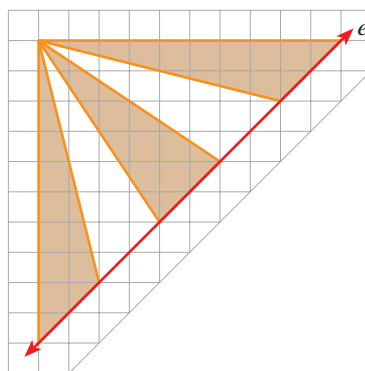
a)



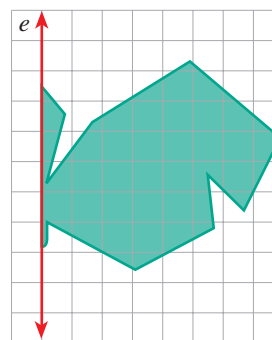
b)



c)



d)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

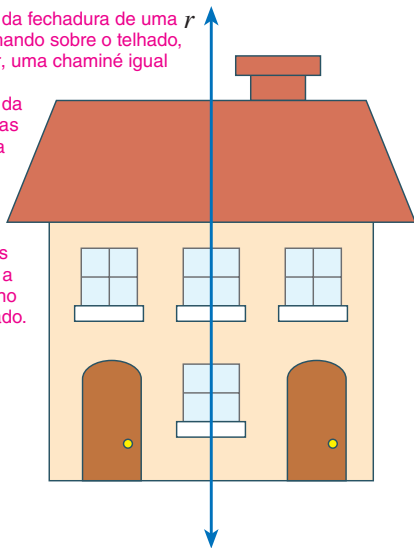
7. a) Os polígonos das figuras II e IV. Eles têm ângulos internos de mesma medida e lados de mesma medida.

6 Descreva como você pode modificar a casa representada abaixo para que ela se torne simétrica em relação à reta r .

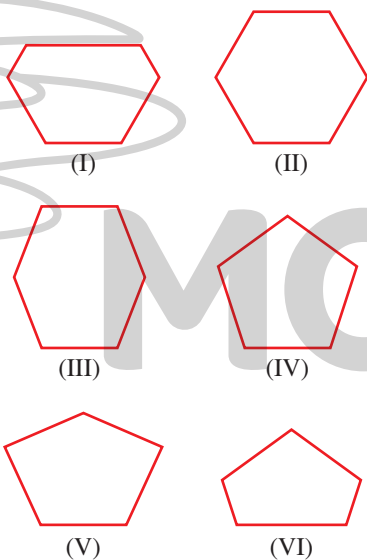
Respostas possíveis:

- Mudando a posição da fechadura de uma das portas e desenhando sobre o telhado, à esquerda da reta r , uma chaminé igual à da direita.
- Mudando a posição da fechadura de uma das portas e apagando a chaminé dada.
- Mudando a posição da fechadura de uma das portas e desenhando a chaminé bem no centro do telhado.

ADILSON SECCO



7 Observe os polígonos a seguir.



ADILSON SECCO

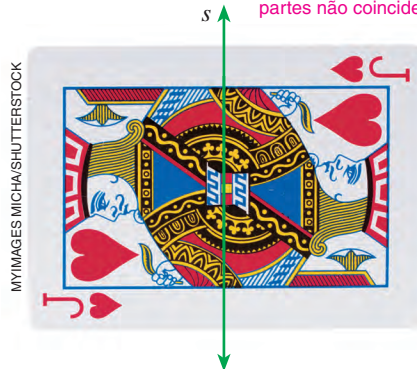
Responda em seu caderno.

- Entre os polígonos dados, quais têm tantos lados quanto são seus eixos de simetria? Com uma régua e um transferidor, meça os lados e os ângulos internos dos polígonos que você identificou. O que você observa?
- A afirmação a seguir é verdadeira? Todos os polígonos que têm todos os ângulos de mesma medida são polígonos regulares. Justifique sua resposta.
- A afirmação a seguir é verdadeira? Todos os polígonos que têm todos os lados de mesma medida são polígonos regulares. Justifique sua resposta.

Não, as figuras III e V têm todos os lados de mesma medida, e o número de eixos de simetria é diferente do número de lados.

8 Marina desenhou a reta s , afirmando que essa reta representa o eixo de simetria da carta de baralho representada abaixo. Na sua opinião, Marina tem razão?

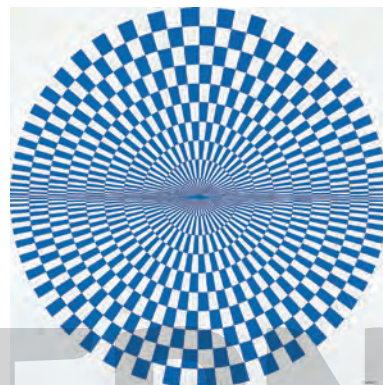
Não, porque se a figura for dobrada em s , as duas partes não coincidem.



MYIMAGES MICHAEL SHUTTERSTOCK

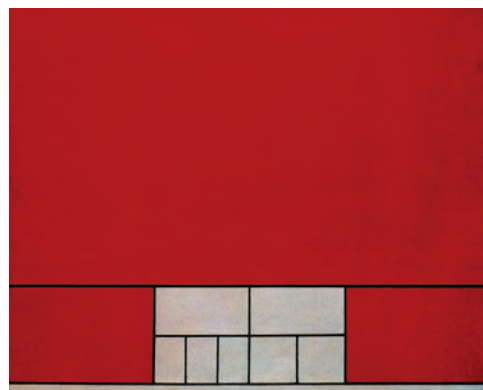
9 Observe as pinturas dos artistas Luiz Sacilotto e Milton Dacosta.

Espera-se que os alunos percebam que apenas a obra de Luiz Sacilotto apresenta simetria. Na obra de Milton Dacosta um suposto eixo de simetria seria uma reta vertical central, porém teríamos dois retângulos pequenos à direita e três retângulos à esquerda dessa reta.



VALTER SACILOTTO - COLEÇÃO PARTICULAR

Luiz Sacilotto. *Concreção*, 1979. Óleo sobre tela fixada em madeira, 100 cm x 100 cm.



ALEXANDRE DACOSTA - COLEÇÃO BOZANO SIMONSEN

Milton Dacosta. *Em vermelho*, 1958. Óleo sobre tela, 73 cm x 92 cm.

Em qual das duas obras há simetria? Justifique sua resposta.

10 Com o auxílio de um compasso, desenhe um círculo. Trace alguns eixos de simetria no círculo e, em seguida, responda: é possível traçar mais de 10 eixos de simetria em um círculo?

Espera-se que o aluno perceba que ele pode traçar quantos eixos de simetria quiser.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Simetria em relação a uma reta

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Observe esta foto.

A paisagem real e a imagem formada na água dão a ideia de figuras simétricas em relação a uma reta.



JAROSLAV MORAVICK/SHUTTERSTOCK

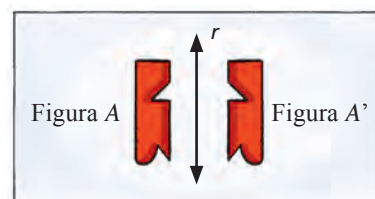
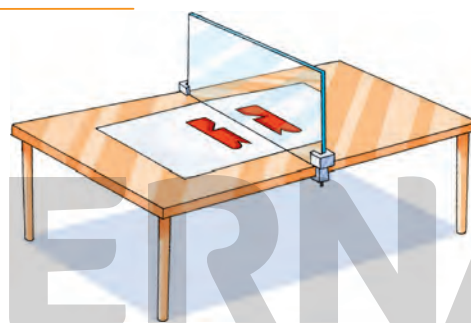
Liptov, Liptovská Mara, Eslováquia. (Foto de 2012.)

Situação 2

Na ilustração ao lado, o espelho acoplado à mesa fornece a imagem refletida da figura vermelha, que está desenhada na folha de papel.

A figura e sua imagem têm mesma forma e mesmo tamanho, porém estão em posições opostas em relação à linha reta na qual o espelho está apoiado. Representando na folha de papel a imagem da figura (A) refletida no espelho (A') e a reta r em que este se apoia, obtemos a figura ao lado.

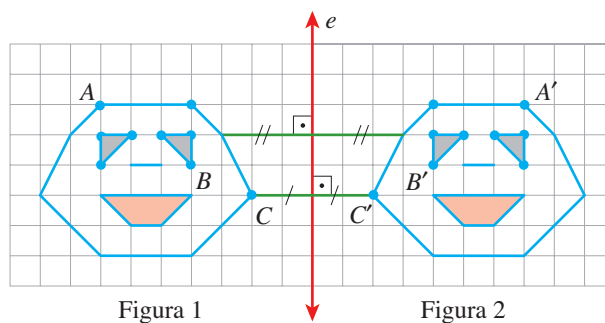
Dizemos que as duas figuras são simétricas em relação à reta r , que é o eixo de simetria. Dizemos também que fizemos uma **reflexão** da figura A em relação à reta r , obtendo a figura refletida A'.



ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUIS JUHAS

Situação 3

Observe a malha quadriculada abaixo.



NELSON MATSUDA

Note que as figuras 1 e 2 são simétricas em relação à reta e .

Dessa forma, cada ponto da figura 1 tem um ponto correspondente na figura 2, que é seu simétrico em relação ao eixo e .

Por exemplo:

- A e A' são simétricos em relação à reta e ;
- B' é o simétrico de B em relação à reta e ;
- C' é a imagem de C por meio da reta e .

Também podemos afirmar que dois pontos simétricos em relação à reta e estão à mesma distância dessa reta, em posições opostas.

Representando a medida do lado da quadrícula da malha por u , verificamos que:

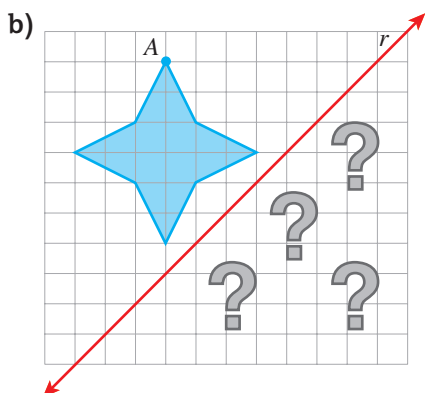
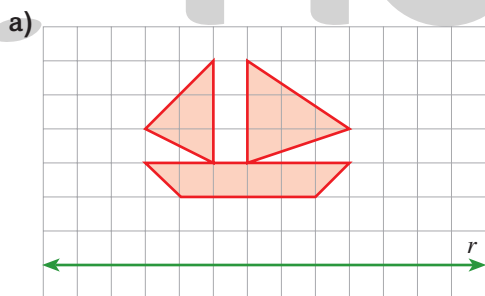
- A e A' estão a $7u$ da reta e ;
- B e B' estão a $4u$ da reta e ;
- C e C' estão a $2u$ da reta e .

Isso sempre ocorre com duas figuras simétricas em relação a uma reta: cada ponto de uma delas é simétrico de um ponto da outra em relação à mesma reta, e vice-versa, e os pontos simétricos estão à mesma distância da reta considerada.

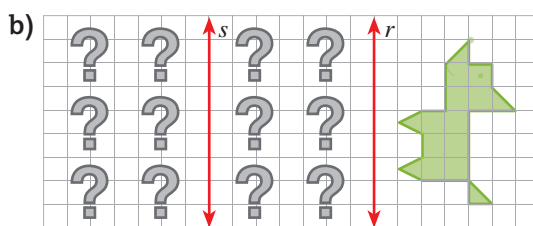
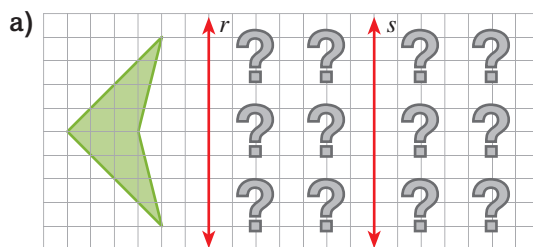
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 11** Reproduza cada figura e a reta r em uma folha quadriculada. Em seguida, desenhe a figura simétrica em relação a essa reta. construção de figuras



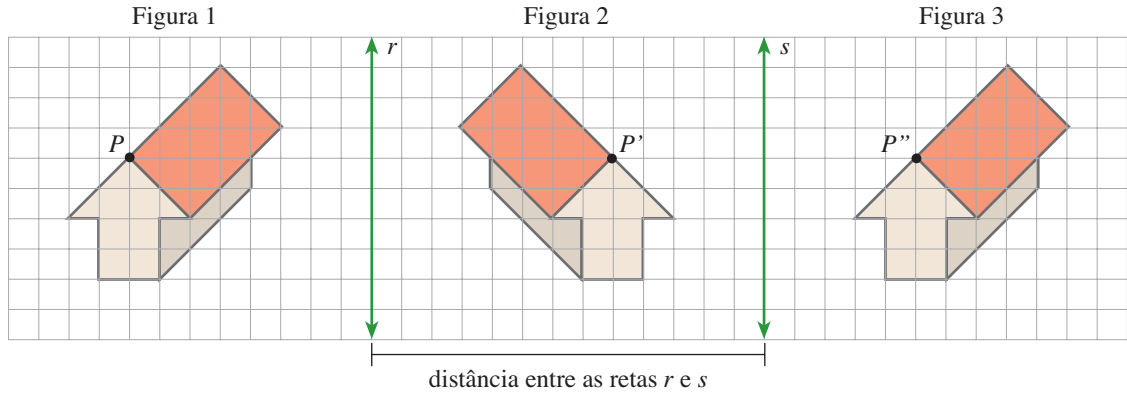
- 12** Reproduza as figuras em uma folha quadriculada, sem as interrogações. Desenhe as figuras obtidas destas por reflexões sucessivas em relação às retas r e s , nessa ordem. construção de figuras



- Nos dois itens, considere como figura 1 a figura dada, como figura 2, a figura obtida após a primeira reflexão, e como figura 3, a figura obtida após a segunda. Qual será a posição da figura 3 em relação à figura 1?

Estarão na mesma posição.

13 Na malha quadriculada abaixo, a figura 2 é simétrica da figura 1 em relação à reta r , e a figura 3 é simétrica da figura 2 em relação à reta s .



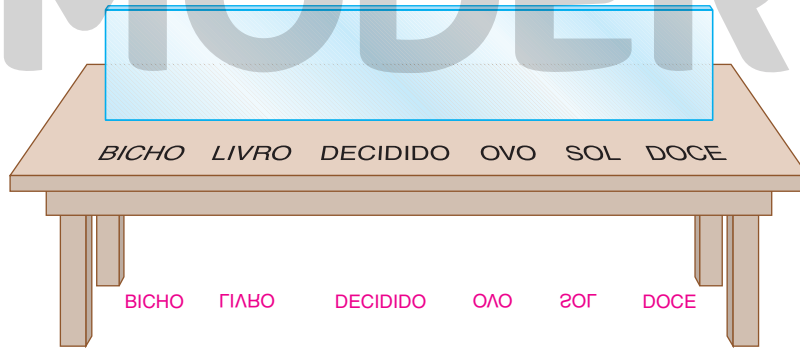
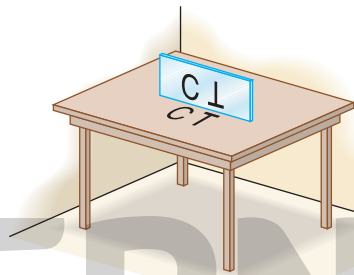
Considere o lado do quadradinho da malha como unidade de medida de comprimento (u).

- a) Expresse a distância entre as retas paralelas r e s nessa unidade. **13 u**
- b) Qual é a distância entre P e P'' nessa mesma unidade? **26 u**
- c) O que você observa quanto às distâncias obtidas nos itens **a** e **b**? **A distância entre as retas é a metade da distância entre P e P'' .**
- d) As figuras 1 e 3 são simétricas em relação a alguma reta? Por quê? **Não, porque elas não estão em posições contrárias.**
- e) Que relação existe entre a figura 1 e a figura 3? **Elas são idênticas.**

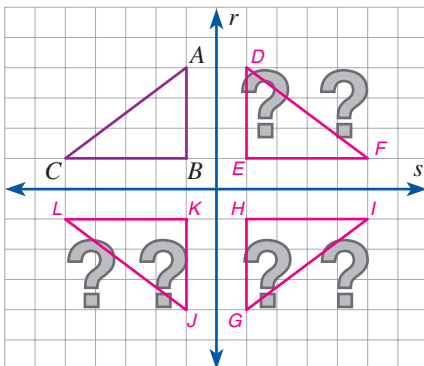
14 Algumas letras vistas no espelho aparecem inalteradas; outras, não. Veja como exemplo as letras C e T, representadas no desenho ao lado.

As letras que aparecem inalteradas quando vistas em um espelho colocado verticalmente sobre uma mesa são as que têm eixo de simetria horizontal. No alfabeto, há nove letras com essa propriedade. Quais são elas? **B, C, D, E, H, I, K, O e X**

Agora, no caderno, desenhe a imagem das seguintes palavras refletidas no espelho.



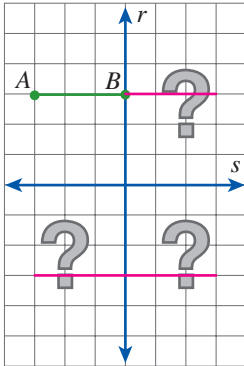
15 Considere as retas perpendiculares r e s e o triângulo ABC , representados a seguir.



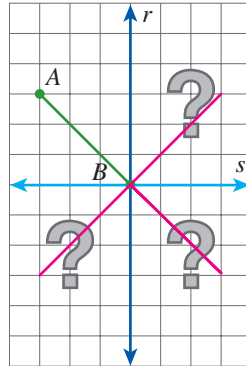
- a) Copie essa representação em uma folha de papel quadriculado.
- b) Construa os triângulos: DEF , simétrico ao triângulo ABC em relação à reta r ; GHI , simétrico ao triângulo DEF em relação à reta s ; e JKL , simétrico ao triângulo GHI em relação à reta r . **construção de figuras**
- c) O triângulo JKL é simétrico ao triângulo ABC em relação a qual reta? **em relação à reta s**

16 Se, a partir do segmento \overline{AB} , construímos as três figuras conforme as simetrias indicadas na atividade anterior, que figura será formada em cada item?

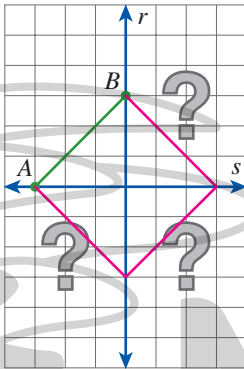
a) dois segmentos paralelos



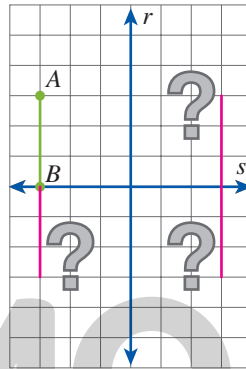
c) dois segmentos perpendiculares



b) um quadrado



d) dois segmentos paralelos



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

17 Construa dois pontos simétricos em relação a uma reta, seguindo as instruções abaixo.

Em uma folha de papel sulfite, construa uma reta r e um ponto P fora dela. Dobre a folha na reta r e decalque o ponto P , obtendo um novo ponto. Desdobre a folha e nomeie esse novo ponto como P' . O ponto P' , assim construído, é simétrico a P em relação à reta r ?

construção de figura; sim

18 Há simetria também em muitos objetos de decoração, como nos exemplos a seguir.



CHRISTIAN KNEPPER/
OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Os azulejos coloniais decorativos são característicos de São Luís, capital do Maranhão.



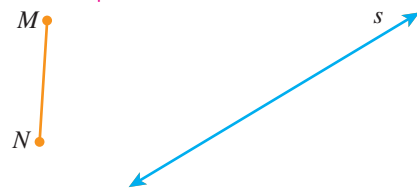
GEORGE H. HUEY/CORBIS/LATINSTOCK

Tapete com desenhos da cultura navajo (EUA).

Nas faixas decorativas e na tapeçaria de inspiração geométrica, os padrões se repetem preenchendo toda a superfície.

- Elabore padrões que apresentem simetria, como em uma faixa decorativa. *construção de figura*
- Faça uma descrição detalhada do processo que usou para criar seu desenho. *resposta pessoal*
- Apresente seu desenho aos colegas da classe, identificando um eixo de simetria.

19 Dados a reta s e o segmento \overline{MN} , explique como você construiria, por meio de dobraduras, o segmento $\overline{M'N'}$, simétrico a \overline{MN} em relação à reta s . *Espera-se que o aluno perceba que o processo será parecido com o do exercício anterior.*



ILUSTRAÇÕES:
NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

1. Faça as seguintes construções.

- Partindo de um ponto P e de uma reta r , construa, usando régua e compasso, um ponto P' , simétrico a P em relação à reta r . *construção de figura*
- Partindo de um segmento \overline{MN} e de uma reta s , construa, usando régua e compasso, um segmento $\overline{M'N'}$, simétrico a \overline{MN} em relação à reta s . *construção de figura*

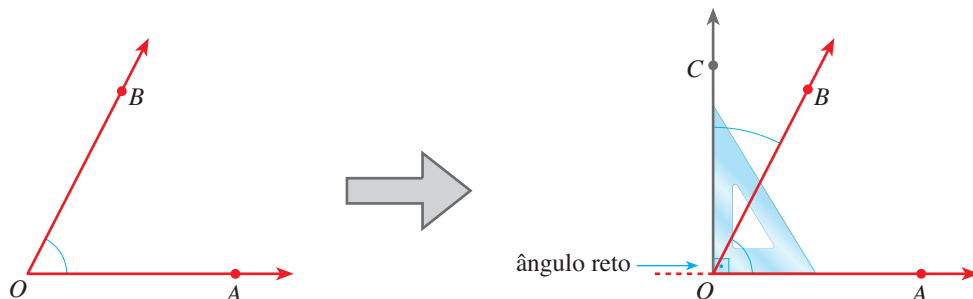
2. Escreva um texto explicando como você fez para construir as figuras pedidas. *resposta pessoal*

3. Reúna-se com um colega e compare o texto que você escreveu com o dele. Há diferenças nos processos de construção? *resposta pessoal*

3 Ângulos complementares e ângulos suplementares

▶ Ângulos complementares

Considere o ângulo \widehat{AOB} . Com o auxílio de régua e esquadro, traçamos pelo vértice O a semirreta \overrightarrow{OC} , perpendicular a \overrightarrow{OA} :



Com isso, obtemos dois novos ângulos: o ângulo \widehat{AOC} , que é reto, e o ângulo \widehat{BOC} . A soma das medidas dos ângulos \widehat{AOB} e \widehat{BOC} é, portanto, 90° . Dizemos, por isso, que \widehat{AOB} e \widehat{BOC} são **ângulos complementares**.

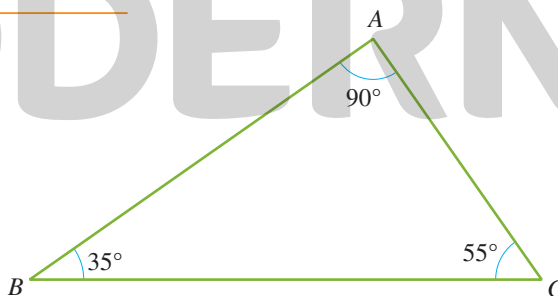
Dois ângulos são **complementares** quando a soma de suas medidas é 90° . Dizemos, então, que um é **complemento** do outro.

No caso acima, \widehat{BOC} é o complemento de \widehat{AOB} , e vice-versa.

Veja as situações a seguir.

Situação 1

Ao medirmos os ângulos internos \widehat{B} e \widehat{C} do triângulo ABC , obtemos as medidas indicadas. Como $35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$, então \widehat{ABC} e \widehat{BCA} são ângulos complementares ou, ainda, \widehat{ABC} é o complemento de \widehat{BCA} , e vice-versa.



Situação 2

Vamos calcular a medida do complemento dos ângulos de 20° e de $50^\circ 30'$.

Ao indicarmos por x a medida do complemento do ângulo de 20° , temos:

$$x + 20^\circ = 90^\circ$$

$$x = 90^\circ - 20^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

Ao indicarmos por y a medida do complemento do ângulo de $50^\circ 30'$, temos:

$$y + 50^\circ 30' = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 50^\circ 30'$$

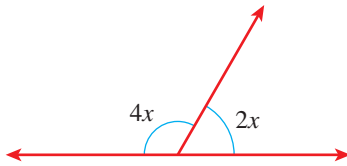
$$y = 89^\circ 60' - 50^\circ 30'$$

$$y = 39^\circ 30'$$

Situação 3

Vamos calcular a medida x , em graus, nas figuras abaixo.

a)

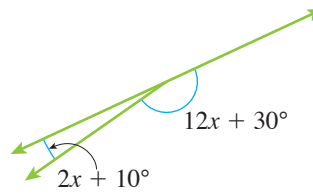


$$4x + 2x = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

b)



$$2x + 10^\circ + 12x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$14x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$14x = 180^\circ - 40^\circ$$

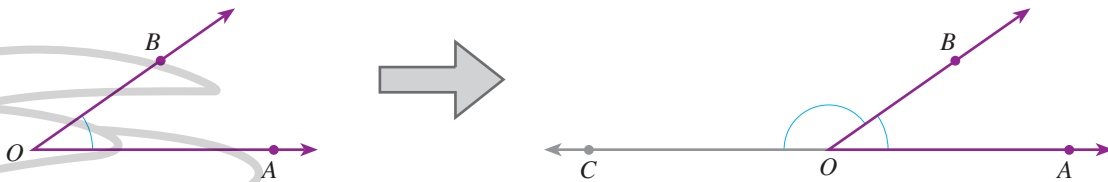
$$14x = 140^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

ILUSTRAÇÕES:
ADILSON SECCO

Ângulos suplementares

Considere o ângulo $A\hat{O}B$. Com o auxílio de uma régua, vamos traçar a semirreta \overrightarrow{OC} , oposta a \overrightarrow{OA} :



Com isso, obtemos dois novos ângulos: $A\hat{O}C$, que é raso, e $B\hat{O}C$.

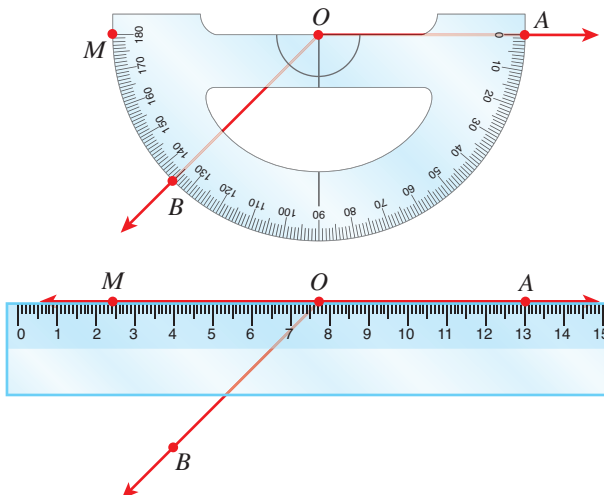
A soma das medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ é, portanto, 180° .

Dizemos, por isso, que $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são **ângulos suplementares**.

Dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas é 180° . Dizemos, então, que um é **suplemento** do outro.

No caso acima, $B\hat{O}C$ é o suplemento de $A\hat{O}B$, e vice-versa.

Veja como, com um transferidor e uma régua, construímos o suplemento do ângulo $A\hat{O}B$.



O ângulo $B\hat{O}M$ é o suplemento do ângulo $A\hat{O}B$, e vice-versa.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184. do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.

OBSERVAÇÕES

- ▶ A medida do ângulo $B\hat{O}M$ (suplemento de $A\hat{O}B$) é calculada assim:

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

- ▶ A semirreta \overrightarrow{OM} é **simétrica** à semirreta \overrightarrow{OA} em relação ao ponto O .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

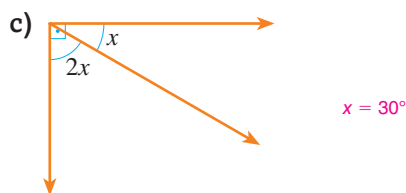
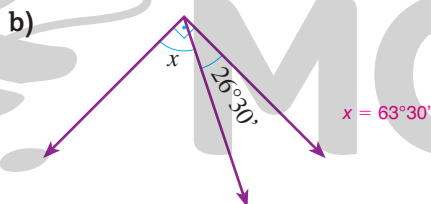
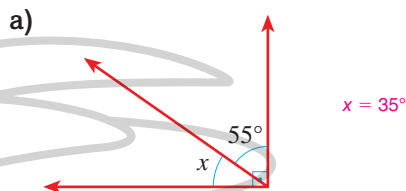
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 20** Construa dois ângulos agudos quaisquer e seus respectivos complementos. *construção de figuras*

- 21** No caderno, determine a medida do complemento dos ângulos cujas medidas são:

- a) 30° ; b) 50° ; c) $40^\circ 20'$
 60° 40° $49^\circ 40'$

- 22** Calcule a medida de x nas figuras abaixo.



- 23** Dois ângulos suplementares são congruentes. O que podemos dizer de suas medidas?

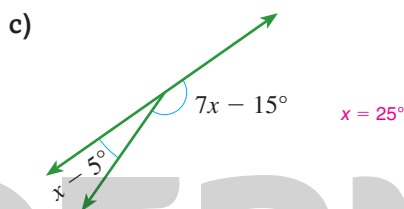
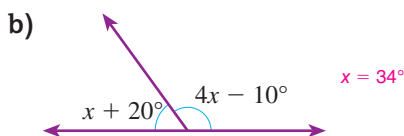
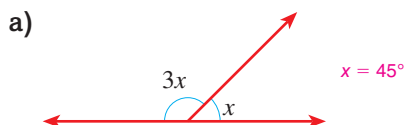
São iguais a 90° .

- 24** Construa dois ângulos agudos quaisquer e seus respectivos suplementos. *construção de figuras*

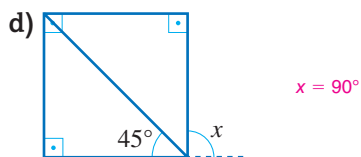
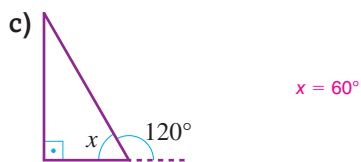
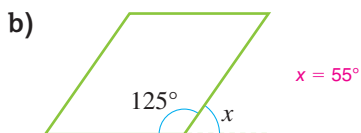
- 25** No caderno, determine a medida do suplemento dos ângulos cujas medidas são:

- a) 50° ; 130° c) $40^\circ 30'$; $139^\circ 30'$
b) 120° ; 60° d) $110^\circ 30' 40''$; $69^\circ 29' 20''$

- 26** Calcule a medida x nas figuras abaixo.



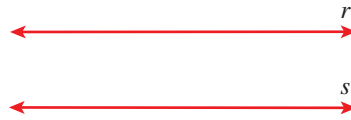
- 27** Calcule a medida x dos ângulos destacados em cada figura.



4 Ângulos opostos pelo vértice

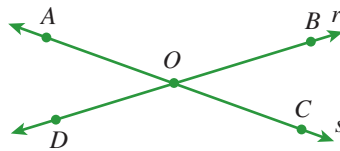
Já aprendemos que:

- Duas retas coplanares podem ser **paralelas**, ou seja, não se interceptam em nenhum ponto.



Assim, não determinam nenhum ângulo entre elas.

- Duas retas coplanares podem ser **concorrentes**, interceptando-se em um ponto (ponto O).



Essas retas definem quatro semirretas com origem no ponto O : \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} . As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} são denominadas **semirretas opostas**, da mesma maneira como as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} .

As retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BD} também definem quatro ângulos: $\hat{A}OB$, $\hat{B}OC$, $\hat{C}OD$ e $\hat{D}OA$.



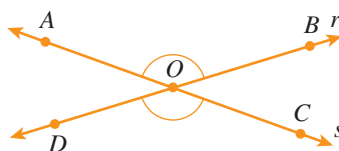
Observe que os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$ têm o vértice O em comum. Como a semirreta \overrightarrow{OA} é oposta a \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OB} é oposta a \overrightarrow{OD} , dizemos que os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$ são **opostos pelo vértice**.

Dois ângulos são **opostos pelo vértice** (indicamos por **o.p.v.**) quando os lados de um ângulo são semirretas opostas aos lados do outro.

De maneira similar, dizemos que os ângulos $\hat{B}OC$ e $\hat{D}OA$ são opostos pelo vértice.

Propriedade dos ângulos opostos pelo vértice

Na figura a seguir, os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$ são opostos pelo vértice.



Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são suplementares e, portanto, a soma de suas medidas é igual a 180° :

$$m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = 180^\circ$$

Considere agora os ângulos $C\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$. Esses ângulos também são suplementares, pois a soma de suas medidas é igual a 180° :

$$m(C\hat{O}D) + m(B\hat{O}C) = 180^\circ$$

Para encontrar a medida dos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, fazemos estes cálculos:

$$m(A\hat{O}B) = 180^\circ - m(B\hat{O}C)$$

$$m(C\hat{O}D) = 180^\circ - m(B\hat{O}C)$$

Observe que, para determinar as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, subtraímos de 180° a medida do ângulo $B\hat{O}C$; assim, podemos concluir que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ têm medidas iguais, ou seja, são congruentes.

De maneira análoga, concluímos que os ângulos $B\hat{O}C$ e $D\hat{O}A$ também são congruentes.

Dois ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida, ou seja, são congruentes.

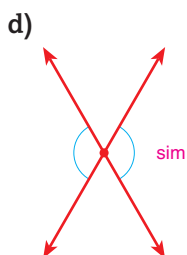
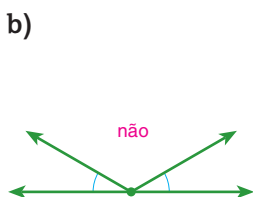
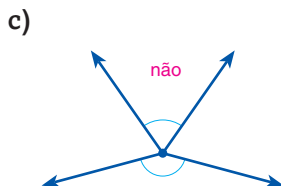
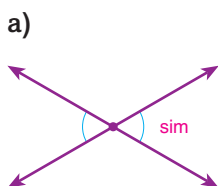
OBSERVAÇÃO

Dois ângulos opostos pelo vértice são sempre **simétricos** em relação ao vértice.

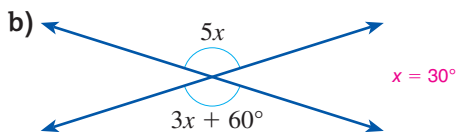
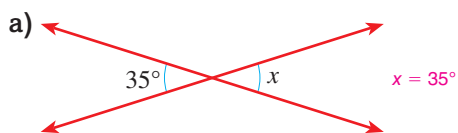
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Verifique, em cada caso, se os pares de ângulos assinalados são opostos pelo vértice.

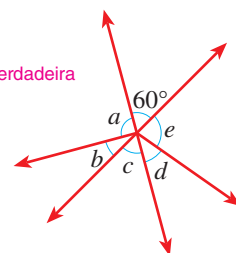


29 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.



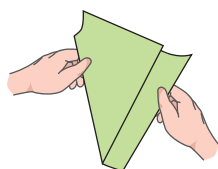
30 Observe a figura e verifique quais sentenças são verdadeiras.

- a) $a = e$ falsa
- b) $a + b + 60^\circ = 180^\circ$ verdadeira
- c) $b + c + d = 180^\circ$ falsa
- d) $c = 60^\circ$ verdadeira
- e) $a = d$ falsa
- f) $a = e + d$ falsa

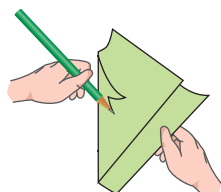


A simetria e a bissetriz

No início deste capítulo, por meio da dobra de uma folha de papel, construímos uma figura que apresenta simetria em relação a uma linha reta. Vamos retomar a sequência realizada.



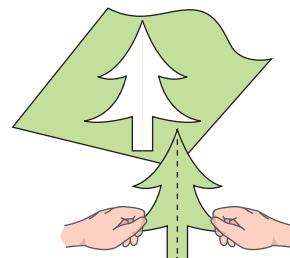
Dobrando o papel e fazendo o vinco.



Fazendo um desenho.



Recortando o papel.



Desdobrando o papel.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

No capítulo 3, também por meio de dobradura, obtivemos a bissetriz de um ângulo.

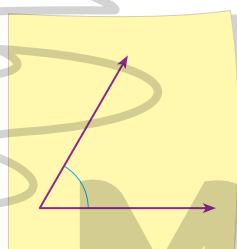


figura 1

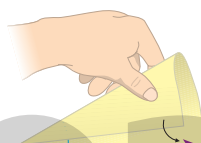


figura 2

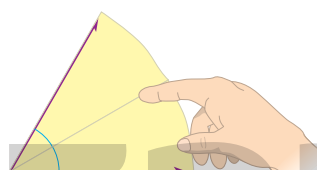


figura 3

ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIYO

Observe que a bissetriz de um ângulo é uma linha reta que funciona como um eixo de simetria para os lados desse ângulo. Em outras palavras, ângulo pode ser definido como uma figura que apresenta simetria e tem como eixo de simetria a sua bissetriz.

Agora é com você!

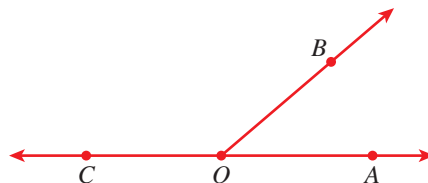
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Desenhe, em uma folha de sulfite, a figura ao lado, que representa dois ângulos suplementares.

Por dobradura, obtenha as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$.

Em seguida, meça com o transferidor o ângulo formado pelas bissetrizes OM de $A\hat{O}B$ e ON de $B\hat{O}C$.

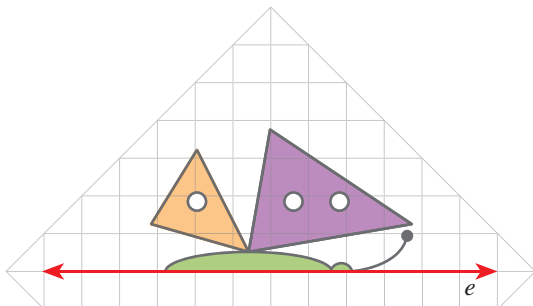
- Qual é a medida obtida? 90°
- Verifique se os colegas obtiveram a mesma medida. O que você conclui? *resposta pessoal*
- Para justificar sua conclusão, considere a medida de $A\hat{O}B$ igual a $2x$ e a medida de $B\hat{O}C$ igual a $2y$. Depois, represente as medidas dos ângulos $M\hat{O}B$, $B\hat{O}N$ e $M\hat{O}N$. Agora, responda: quanto vale $2x + 2y$? E quanto vale $x + y$? $x, y, x + y, 2x + 2y = 180^\circ; x + y = 90^\circ$



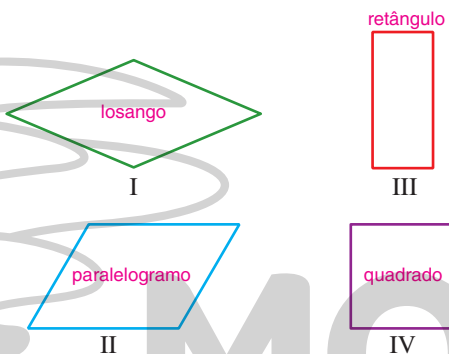
NELSON MATSUDA

- 1 Reproduza a malha com a figura e desenhe a parte que falta para obter uma figura simétrica em relação à reta e . *construção de figura*

NELSON MATSUDA



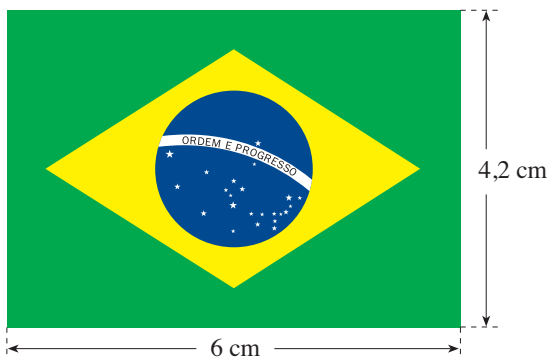
- 2 Considere os paralelogramos abaixo.



Responda às questões.

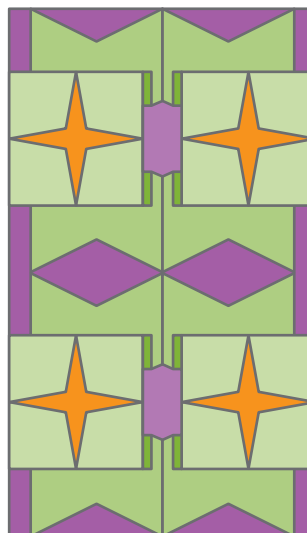
- Qual é a classificação de cada paralelogramo?
 - Quais deles têm pelo menos um eixo de simetria? *o losango, o retângulo e o quadrado*
 - Quais deles têm mais de dois eixos de simetria? Nesse caso, identifique a quantidade de eixos. *O quadrado tem quatro eixos de simetria.*
- 3 A bandeira nacional brasileira apresenta simetria? Justifique sua resposta.

NELSON MATSUDA/REPRODUÇÃO



Não, por causa das estrelas e da faixa branca central e do que está escrito nela.

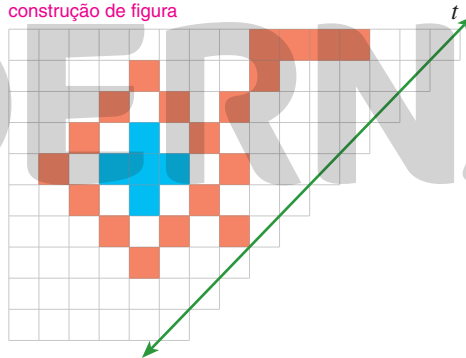
- 4 Quantos eixos de simetria podemos identificar na figura abaixo? *2 eixos*



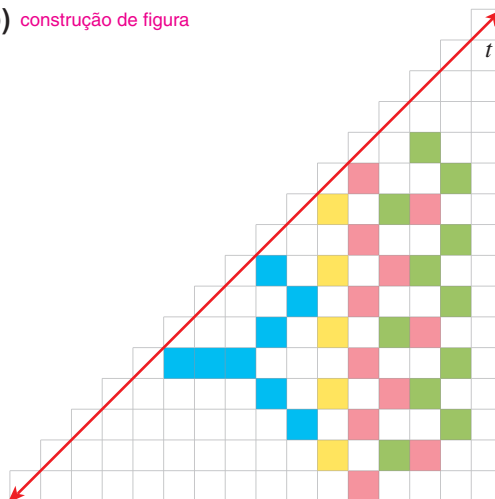
NELSON MATSUDA

- 5 Reproduza em uma folha de papel quadriculado as figuras mostradas abaixo e construa a simétrica em relação à reta t .

a) *construção de figura*



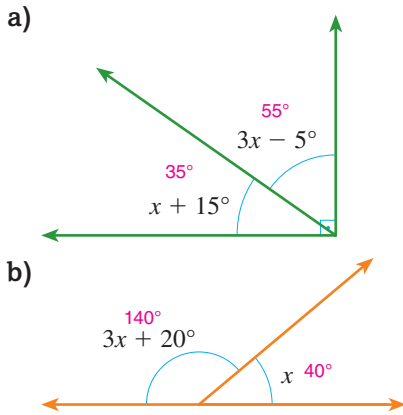
b) *construção de figura*



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

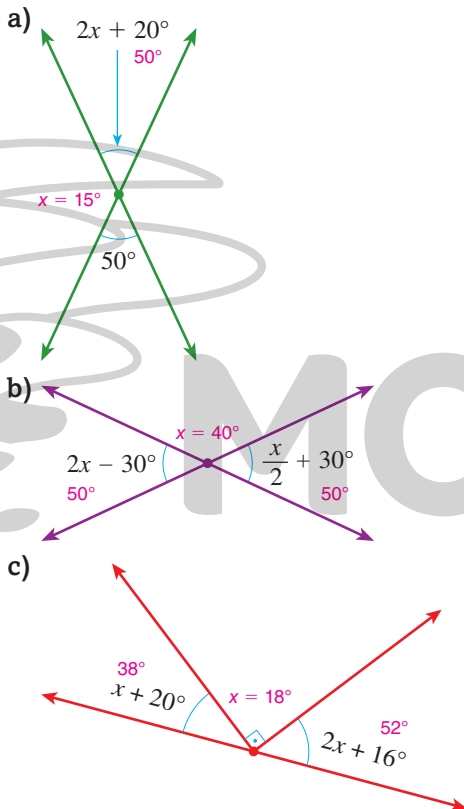
Lembre-se:
Não escreva no livro!

6 Calcule a medida de cada ângulo assinalado nas figuras.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

7 Determine x , em grau, e a medida de cada ângulo desconhecido nas figuras.

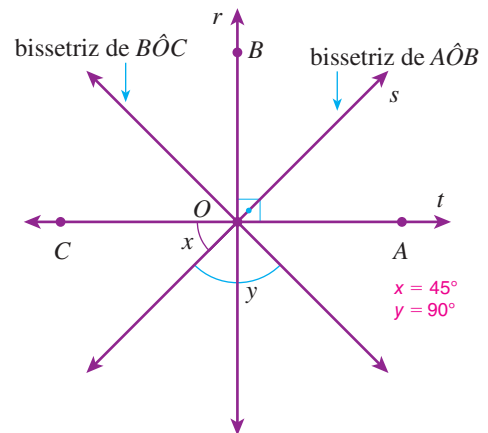


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

8 Sendo x a medida de um ângulo, a medida de seu complemento pode ser indicada por $90^\circ - x$. Sabendo disso e, sabendo que a medida de um ângulo mais o dobro da medida do seu complemento é igual a 150° , calcule a medida desse ângulo. 30°

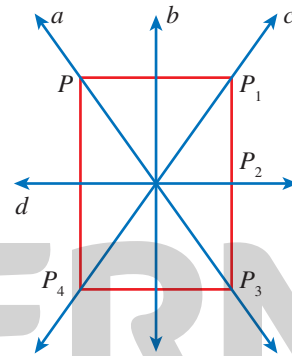
9 Sendo x a medida de um ângulo, a medida de seu suplemento pode ser indicada por $180^\circ - x$. Sabendo disso e, sabendo que a medida do complemento de um ângulo mais a medida de seu suplemento é 170° , calcule a medida do ângulo. 50°

10 Observe a figura abaixo e determine os valores de x e y , em grau.



NELSON MATSUDA

11 Na figura abaixo, $PP_1P_3P_4$ é um retângulo. As retas d e b são paralelas a dois lados desse retângulo.



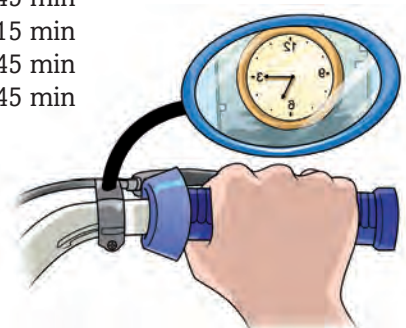
Então, é possível afirmar que: alternativa c

- a) P e P_3 são simétricos em relação à reta c .
- b) P_1 e P_2 são simétricos em relação à reta d .
- c) P_1 e P_3 são simétricos em relação à reta d .
- d) P_1 e P_4 são simétricos em relação à reta a .

12 (OBM) Benjamim passava pela praça de Quixajuba quando viu o relógio da praça pelo espelho da bicicleta, como na figura abaixo.

Que horas o relógio estava marcando? alternativa a

- a) 5 h 15 min
- b) 5 h 45 min
- c) 6 h 15 min
- d) 6 h 45 min
- e) 7 h 45 min

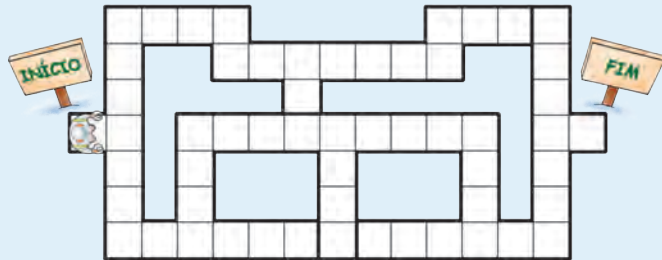


LEONARDO DA CONCEIÇÃO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ângulos e simetria

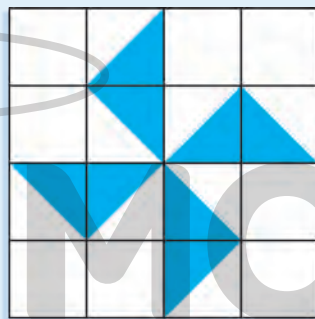
Vanessa vai participar do campeonato “O labirinto dos robôs”. Cabe a ela escrever as informações corretas do caminho que o robô deve fazer. O objetivo é fazer o robô chegar ao final do percurso sem que ele bata nas paredes do labirinto.



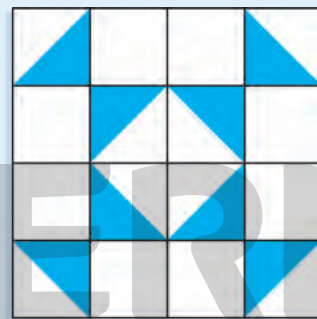
ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUIS JUHAS

Azulejos

Pedro conseguiu juntar dinheiro para colocar azulejos novos em sua cozinha. Na loja de materiais para construção, ele resolveu combinar alguns azulejos. Veja as combinações que conseguiu fazer.



1ª combinação



2ª combinação

1. resposta possível: Dê 1 passo e vire 90° à direita. Dê 3 passos e vire 90° à esquerda. Dê 2 passos e vire 90° à esquerda. Dê 3 passos e vire 90° à direita. Dê 8 passos e vire 90° à direita. Dê 3 passos e vire 90° à esquerda. Dê 2 passos e vire 90° à esquerda. Dê 3 passos e vire 90° à direita. Dê 1 passo à frente.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Com o auxílio da ilustração acima, “O labirinto dos robôs”, escreva todos os passos que o robô deve andar para completar o percurso sem bater nas paredes. Por exemplo: “Dê 1 passo e vire 90° à esquerda”. Cada passo corresponde a um quadrado.
- O labirinto apresenta simetria? E o caminho que o robô deve fazer para chegar ao final do percurso? Justifique suas respostas. *Espera-se que os alunos percebam que o labirinto não apresenta simetria e que o caminho que o robô deve fazer apresenta simetria. O eixo de simetria estaria localizado ao centro, uma linha vertical.*
- Quantos tipos de azulejo Pedro usou para fazer a primeira combinação? E a segunda? *2; 2*
- Entre essas combinações qual apresenta uma figura com eixo de simetria? Quantos eixos de simetria essa combinação tem? *a segunda; 4 eixos de simetria*
- Formem grupos e, considerando os azulejos vistos acima, façam uma nova combinação que apresente uma figura com eixo de simetria. Escolham um representante do grupo para desenhar a combinação na lousa, explicar e mostrar o eixo de simetria. *construção de figura*

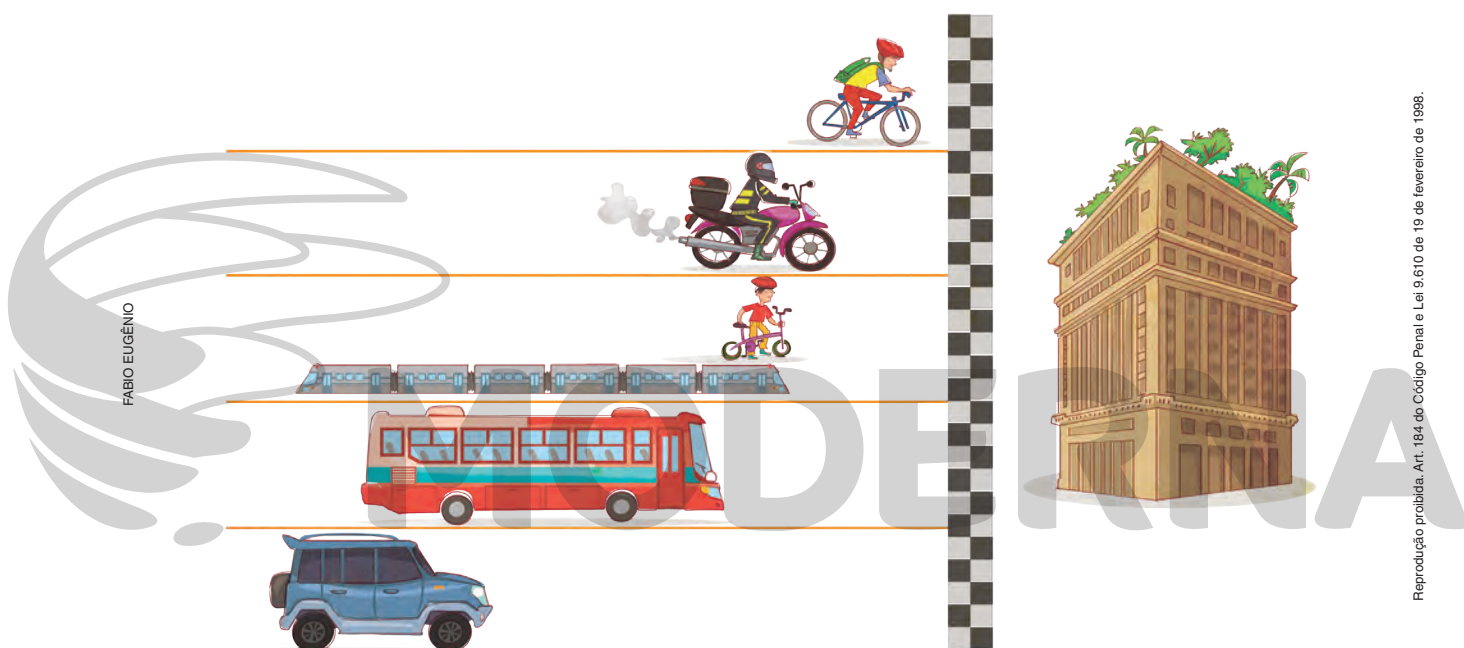
ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUIS JUHAS

Razões e proporções

1 O conceito de razão

Observe as situações.

Situação 1



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A bicicleta pode ser mais rápida?

Em uma quarta-feira do mês de março de 2015, foi proposto um desafio a algumas pessoas: elas deveriam se deslocar da praça General Gentil Falcão, no bairro do Brooklin, zona sul da cidade de São Paulo, ao edifício da Prefeitura da Cidade de São Paulo, no centro. Nesse percurso, algumas pessoas utilizaram um destes meios: moto, carro, ônibus, trem e metrô, bicicleta por vias calmas, bicicleta por vias rápidas, bicicleta e metrô ou *skate*. Outras pessoas foram caminhando com passo normal e outras, correndo.

O primeiro a chegar à sede da Prefeitura foi o ciclista que utilizou as vias rápidas. Ele fez o percurso de 10 km em 20 minutos.

O quadro ao lado apresenta os cinco primeiros colocados e os respectivos tempos.

9º Desafio Intermodal de São Paulo	
Modo	Tempo (s)
Bicicleta por vias rápidas	1.209
Motocicleta	1.387
Bicicleta dobrável + metrô	2.775
Ônibus	3.238
Carro	3.585

Dados obtidos em: <www.ciclobr.org.br>. Acesso em: 3 mar. 2015.

Com os dados do quadro, podemos estabelecer uma relação entre os tempos gastos pela bicicleta e pelo carro, escrevendo:

$$\frac{\text{tempo gasto pela bicicleta}}{\text{tempo gasto pelo carro}} = \frac{1.209}{3.585} \approx 0,3$$

O resultado obtido significa que para cada segundo que o carro gastou nesse percurso a bicicleta gastou 0,3 segundo.

Esse quociente é chamado de **razão**. Podemos dizer, então, que a razão dos tempos gastos, pela bicicleta e pelo carro, nesse percurso, é de 0,3 para 1.

Situação 2

A primeira fase do vestibular Fuvest 2015 aconteceu em 30 de novembro de 2014. Os 141.888 inscritos concorreram a 11.177 vagas, sendo 11.057 vagas dos 249 cursos da Universidade de São Paulo (USP) e 120 vagas da Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo (FCMSCSP).

Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>.
Acesso em: 2 mar. 2015.

Vista aérea da
Universidade de São
Paulo, São Paulo, SP.
(Foto de 2012.)



JUVENAL PEREIRAPULSAR IMAGENS

FABIO EUGÊNIO

Veja algumas razões relativas a essa situação.

- A razão entre o número de vestibulandos e o número de vagas do vestibular da Fuvest é $\frac{141.888}{11.177}$. Calculando esse quociente, encontramos aproximadamente 12,69, o que significa que havia cerca de 13 concorrentes para cada vaga oferecida.
- A razão entre o número de vagas da USP e o número de vagas da FCMSCSP é $\frac{11.057}{120}$, ou seja, aproximadamente 92,14. Então, podemos dizer que havia cerca de 92 vagas na USP para cada vaga da FCMSCSP.

A **razão** entre dois números é o quociente entre eles, com o segundo diferente de zero.

Considere a razão $\frac{1}{5}$ (lemos: razão de um para cinco). Ela pode ser representada por:

$$\frac{1}{5} \text{ ou } 1 : 5 \text{ ou } 0,2 \text{ ou } 20\%$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2. b) Espera-se que o aluno perceba que, para cada quantidade indicada no numerador da fração, corresponde a quantidade indicada no denominador.

1 Leia novamente a situação 1 da página 182.

- Qual é a razão aproximada entre os tempos gastos pela motocicleta e pelo carro? $0,39$
- Qual é a razão aproximada entre os tempos gastos pelo ônibus e pelo carro? $0,90$
- Escreva as razões obtidas nos itens **a** e **b** na forma de porcentagem. 39% ; 90%
- Qual é o significado das razões que encontrou? Espera-se que o aluno perceba que a motocicleta gasta 39% do tempo gasto pelo carro, e que o tempo gasto pelo ônibus é 90% do tempo gasto pelo carro.

2 Entre os alunos de uma escola, existem 350 meninas e 210 meninos.

- Determine a razão entre:
 - o número de meninas e o número de meninos; $\frac{5}{3}$
 - o número de meninas e o número de meninos; $\frac{3}{5}$
 - o número de meninas e o número de alunos da escola; $\frac{5}{8}$
 - o número de meninos e o número de alunos da escola. $\frac{3}{8}$
- Escreva o significado de cada uma das razões obtidas.

3 Durante um jogo de futebol entre Grêmio e Internacional de Porto Alegre, havia 30.000 torcedores no estádio. De cada 5 torcedores, 2 torciam para o Grêmio e 3 para o Internacional.



Estádio Beira-Rio, Porto Alegre, RS. (Foto de 2015.)

- Determine a razão entre o número de torcedores do Grêmio e o de torcedores do Internacional. $\frac{2}{3}$
- Determine a razão entre o número de torcedores do Grêmio e o total de torcedores no estádio. $\frac{2}{5}$
- É correto afirmar que, dos 30.000 torcedores, 12.000 eram torcedores do Grêmio? Por quê? *sim*, $\frac{2}{5} = \frac{12.000}{30.000}$
- Qual é a porcentagem de torcedores do Internacional que assistiam a esse jogo no estádio? 60%

4 A turma A do 7º ano da escola Girassol tem igual número de alunas e de alunos. Uma recente pesquisa revelou o esporte preferido entre as meninas. Observe o quadro.

Futebol	Vôlei	Basquete	Tênis
12	5	2	1

Determine a razão entre:

- o número de meninas que preferem futebol e o total de meninas; $\frac{3}{5}$
- as meninas que preferem vôlei e as que preferem futebol; $\frac{5}{12}$
- as meninas que preferem tênis e as que preferem basquete; $\frac{1}{2}$
- as meninas que preferem basquete e as que preferem vôlei; $\frac{2}{5}$
- o número de meninas e o número de meninos; e) $\frac{1}{1}$
- o número de meninas que preferem futebol e o total da turma. $\frac{3}{10}$

5 Observe a tabela abaixo.

Número de habitantes de algumas capitais brasileiras em 2014	
Capital	Número de habitantes
Rio de Janeiro	6.453.682
Fortaleza	2.571.896
Curitiba	1.864.416
Belo Horizonte	2.491.109
Vitória	352.104

Dados obtidos em: <www.cidades.ibge.gov.br>. Acesso em: 3 mar. 2015.



Jardim Botânico de Curitiba, PR. (Foto de 2014.)

- Calcule a razão entre o número de habitantes de Fortaleza e o do Rio de Janeiro. Escreva essa razão na forma de porcentagem. *aproximadamente 40%*
- Qual é a razão na forma de porcentagem do número de habitantes de Vitória em relação ao de Curitiba? *aproximadamente 19%*

Pense mais um pouco...

A tabela a seguir apresenta algumas informações sobre a participação e os resultados do Brasil nas olimpíadas de 2000 a 2012.

Participação do Brasil nas olimpíadas de 2000 a 2012					
Olimpíada	Número de atletas		Medalhas		
	Homens	Mulheres	Ouro	Prata	Bronze
Sydney (Austrália, 2000)	111	94	0	6	6
Atenas (Grécia, 2004)	125	122	5	2	3
Pequim (China, 2008)	144	133	3	4	8
Londres (Inglaterra, 2012)	136	123	3	5	9

Dados obtidos em:
<www.cob.org.br>
Acesso em: 3 mar. 2015.

Agora, faça o que se pede.

- b) 84,68%; 97,60%; 92,36%; 90,44%
- Escreva as razões que representam, em cada olimpíada, a participação feminina em relação à participação masculina. Sydney: $\frac{94}{111}$; Atenas: $\frac{122}{125}$; Pequim: $\frac{133}{144}$; Londres: $\frac{123}{136}$
 - Represente na forma percentual (com duas casas decimais) as razões encontradas no item a.
 - Em relação ao número total de atletas brasileiros, em qual dessas olimpíadas a participação feminina foi maior? Com qual percentual? Atenas; aproximadamente 49,39%
 - É possível encontrar a razão entre o número de medalhas de prata e o de medalhas de ouro na Olimpíada de Sydney? Justifique sua resposta. Não, pois não podemos construir uma razão com denominador igual a zero.
 - Qual foi o número total de medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nessas quatro olimpíadas? E de prata? E de bronze? E o número total de medalhas? ouro: 11; prata: 17; bronze: 26; total de medalhas: 54
 - Escreva a razão entre o número de medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nessas quatro olimpíadas e o número total de medalhas. Faça o mesmo para as medalhas de prata e bronze.

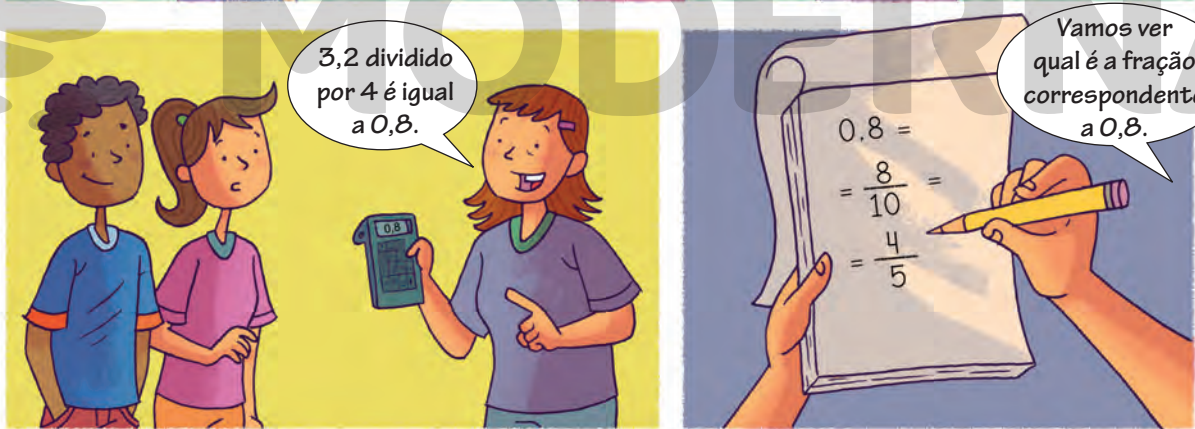
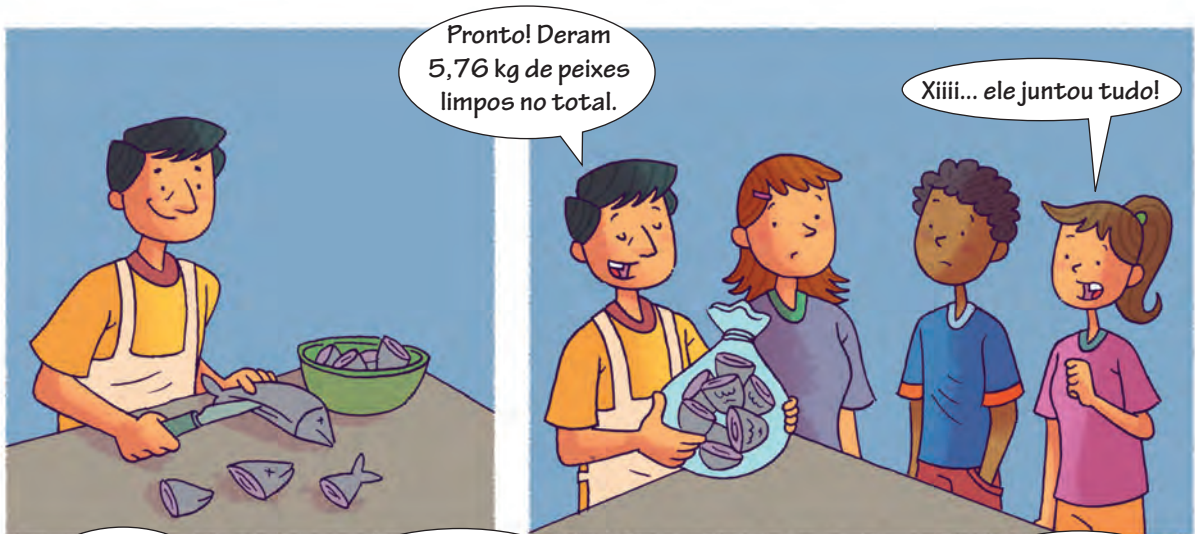
f) ouro: $\frac{11}{54}$; prata: $\frac{17}{54}$; bronze: $\frac{13}{27}$

PARA SABER MAIS +

As razões de uma boa pescaria



ILUSTRAÇÕES: LEO FANELLI



ILUSTRAÇÕES: LEO FANELLI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Então, dividindo a massa total de peixes limpos em 9 partes iguais, 4 delas pertencem a Bruna, e as outras 5, a Diego!

Massa total dividida em 9 partes

Bruna: 4 partes

Diego: 5 partes

Ah! Então, vamos dividir 5,76 por 9. Isso vai dar o valor de uma das partes da massa total.

$5,76 : 9 = 0,64$

Como eu tenho direito a 4 partes, vou ficar com 2,56 kg.

$4 \cdot 0,64 = 2,56$

E eu vou ficar com 5 partes. Ou seja, 3,2 kg.

$5 \cdot 0,64 = 3,2$

Beleza! Ainda bem que deu tudo certo.

Poxa, a matemática ajudou mesmo!

Bruna, vá com o Diego. Não deixe ninguém "robalo"! HEHEHE...

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Sabendo que Antônio cobrou R\$ 12,60 pela limpeza dos peixes, responda.

- Cada um deve pagar a metade desse valor? *Espera-se que os alunos digam que não.*
- Fazendo uma divisão similar à feita anteriormente, quanto Diego vai pagar pela limpeza? E Bruna? **R\$ 7,00; R\$ 5,60**

2 Razão entre grandezas de mesma natureza

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Observe os quadrados ao lado.

- A razão entre a medida de um dos lados do quadrado menor e a medida de um dos lados do quadrado maior é $\frac{2}{3}$.

Note que aqui comparamos dois comprimentos que são grandezas de mesma natureza.

- O perímetro do quadrado menor é 8 cm, e o do quadrado maior, 12 cm.

A razão entre o perímetro do quadrado menor e o perímetro do quadrado maior é $\frac{8}{12}$.
Simplificando, obtemos $\frac{2}{3}$.

Aqui também comparamos dois comprimentos.

- A área do quadrado menor é 4 cm^2 , e a área do quadrado maior, 9 cm^2 .

A razão entre a área do quadrado menor e a área do quadrado maior é $\frac{4}{9}$.

Nesse caso, comparamos duas áreas, que são grandezas de mesma natureza.

A **razão** entre duas grandezas de mesma natureza é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas em uma mesma unidade.

Situação 2

A caixa-d'água da casa de Fernando tem capacidade de 1.000 l . A piscina da casa dele tem capacidade de 60 m^3 . Para determinar a razão entre a **capacidade da caixa-d'água** e a **capacidade da piscina**, devemos, inicialmente, escrever essas duas grandezas em uma mesma unidade de medida.

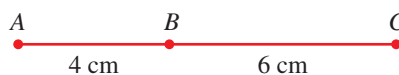
$$1.000 \text{ l} = 1.000 \text{ dm}^3 = 1 \text{ m}^3$$

Então, a razão procurada é $\frac{1}{60}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO


- 6 Considere o segmento \overline{AC} .



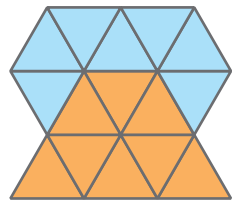
Determine a razão entre as medidas dos segmentos:

- a) \overline{AB} e \overline{BC} ; $\frac{2}{3}$ b) \overline{AB} e \overline{AC} ; $\frac{2}{5}$ c) \overline{BC} e \overline{AC} ; $\frac{3}{5}$ d) \overline{BC} e \overline{AB} ; $\frac{3}{2}$

- 7 Uma latinha de refrigerante tem capacidade de 350 ml , e uma garrafa, de 2 l . Determine a razão entre a capacidade dessa latinha e a capacidade dessa garrafa. $\frac{7}{40}$

8 Considerando  como unidade de medida de área e a figura abaixo, determine a razão entre as áreas:

- a) da parte laranja e da parte azul; $\frac{8}{7}$
- b) da parte azul e da parte laranja; $\frac{7}{8}$
- c) da parte azul e da figura. $\frac{7}{15}$



9 Observe os anúncios abaixo.

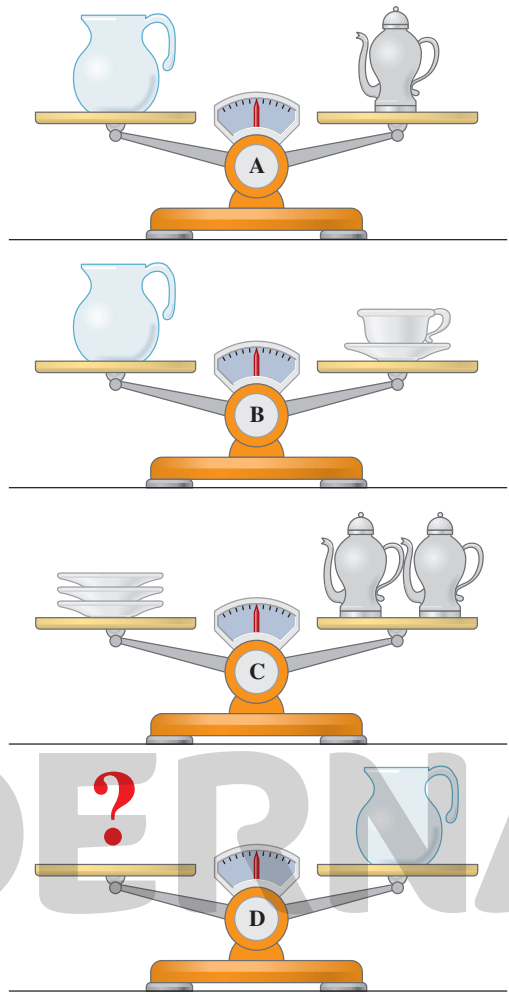


Agora, responda em seu caderno.

- a) Qual é a razão entre o preço do molho de tomate da marca A e o do molho de tomate da marca B? $\frac{12}{25}$
- b) Qual é a razão entre a massa do molho de tomate da marca A e a do molho de tomate da marca B? $\frac{4}{9}$
- c) Qual é a massa de 9 caixas do molho da marca A? E qual é o preço delas? $1.800\text{ g}; \text{R\$ } 21,60$
- d) Qual é a massa de 4 caixas do molho da marca B? E qual é o preço delas? $1.800\text{ g}; \text{R\$ } 20,00$
- e) Supondo que tenham a mesma qualidade, é mais vantajoso comprar o da marca A ou da B? **B**

10 Um jogo de equilíbrio!

Observe as balanças a seguir e encontre o número de xícaras que devem estar no prato da balança D para que ela fique em equilíbrio com a jarra. **3 xícaras**



Agora, responda em seu caderno.

- a) Qual é a razão entre a massa de um pires e a massa de uma xícara? $\frac{2}{1}$
- b) Qual é a razão entre a massa de um bule e a massa de um pires? $\frac{3}{2}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LEONARDO CONCEIÇÃO

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

LEONARDO DA CONCEIÇÃO

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Um programa de televisão distribuiu prêmios em dinheiro para quatro participantes. Pedro e Melissa, juntos, receberam a metade dos prêmios. A razão entre o valor recebido por Pedro e o valor recebido por Melissa é $\frac{4}{3}$. Vanessa recebeu o dobro de Melissa. E Márcio, o último participante, recebeu R\$ 50.000,00. Qual foi o valor total dos prêmios distribuídos? **R\$ 700.000,00**



Escala

Observe o mapa ao lado.

Nele, a distância entre Porto Alegre e Florianópolis, em linha reta, é 1,9 cm. A distância real, em linha reta, entre essas duas cidades é 380 km.

Vamos calcular a razão entre a distância que está no mapa e a distância real entre as duas cidades. Para isso, precisamos expressá-las em uma mesma unidade de medida.

Transformamos 380 km (distância real) em centímetro:

$$380 \text{ km} = 38.000.000 \text{ cm}$$

Portanto, a razão procurada é dada por:

$$\frac{1,9}{38.000.000} = \frac{1}{20.000.000} = 1 : 20.000.000$$

A razão 1 : 20.000.000 significa que cada centímetro no mapa corresponde a 20.000.000 cm reais, isto é, cada centímetro corresponde a 200 km. Em um mapa, indicamos isso assim:



A esse tipo de razão chamamos de **escala**.

Escala é a razão entre um comprimento em um desenho (ou outra representação qualquer) e o comprimento real correspondente, expressos em uma mesma unidade de medida.

$$\text{escala} = \frac{\text{número que expressa o comprimento no desenho}}{\text{número que expressa o comprimento real}}$$

Veja outros exemplos.

- a) As miniaturas de trens são construídas segundo uma escala. Uma das escalas mais usadas nesse tipo de construção é a H0 (*half zero*) cuja razão é $\frac{1}{87}$. Isso significa que cada unidade de medida na miniatura corresponde a 87 unidades de medida no tamanho real. Por exemplo, cada 1 cm na miniatura corresponde a 87 cm no tamanho real.



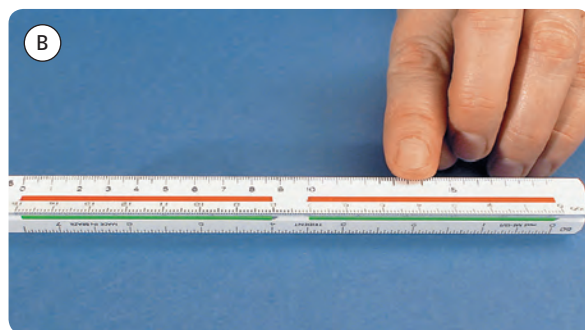
Dados obtidos em: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

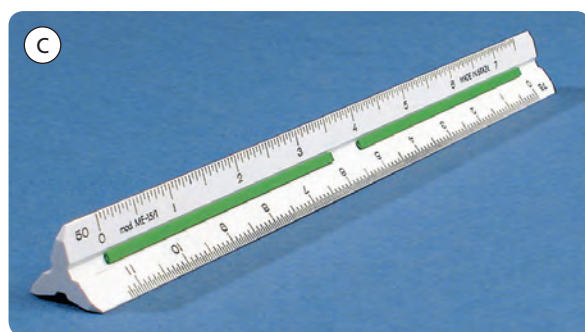
TYCSONI/SHUTTERSTOCK

- b) As plantas de casas e apartamentos também são desenhadas obedecendo a uma escala. Existem programas de computador próprios para isso. Entretanto, quando essas plantas são feitas à mão, geralmente se usa uma régua chamada **escalímetro**. Observe as fotos.



No escalímetro, o número que está ao lado esquerdo do zero indica a escala que está sendo utilizada. Por exemplo, na foto A, o número 20 indica que a escala é de 1 para 20.

O escalímetro facilita o traçado do desenho, pois as unidades nele marcadas correspondem a 1 metro em todas as escalas apresentadas.



Fotos de um mesmo escalímetro.

O escalímetro das fotos apresenta estas escalas:

$$\frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{75}, \frac{1}{100} \text{ e } \frac{1}{125}$$

- c) Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado em um desenho por 20 cm. Qual é a escala do desenho?

Primeiro, transformamos 8 m (comprimento real) em centímetro: $8 \text{ m} = 800 \text{ cm}$. Agora, podemos fazer os cálculos.

$$\text{escala} = \frac{\text{número que expressa o comprimento no desenho}}{\text{número que expressa o comprimento real}} = \frac{20}{800} = \frac{1}{40} \text{ ou } 1 : 40$$

Logo, a escala desse desenho é $\frac{1}{40}$.

- d) Um mapa foi desenhado na escala $\frac{1}{31.000.000}$, e a distância entre as cidades de Brasília e João Pessoa, em linha reta, foi representada por 5,5 cm. Qual é a distância aproximada, em quilômetro, entre essas cidades?

A escala indica que cada centímetro, no mapa, representa uma distância real de 31.000.000 cm, o que equivale a 310 km.

Logo, 5,5 cm equivalem a $5,5 \cdot 310 \text{ km} = 1.705 \text{ km}$.

Portanto, a distância entre as duas cidades é 1.705 km.

MODERNA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 A distância entre duas cidades, em linha reta, é 500 km e foi representada em um mapa por um segmento de 5 cm. Qual foi a escala utilizada nesse mapa? $\frac{1}{10.000.000}$ (1 : 10.000.000)

12 O comprimento da sala de um apartamento é representado em uma planta por 28 cm. Sabendo que o comprimento real da sala é 7 m, que escala foi usada nessa planta? $\frac{1}{25}$ ou 1 : 25

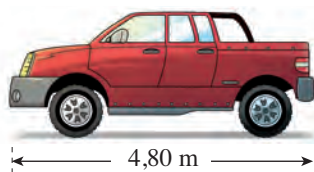
13 Mauro quer desenhar o terreno de sua casa, que é retangular e mede 15 m de frente por 20 m de fundo. Ele quer desenhá-lo em uma folha que tem 28 cm de comprimento e 18 cm de largura, na escala $\frac{1}{100}$. O desenho do terreno caberá nessa folha? E se a escala usada for $\frac{1}{20}$? **sim; não**

14 Com um escalímetro, a planta de uma casa foi desenhada na escala $\frac{1}{125}$. Nessas condições, responda.

- Qual é o comprimento real, em metro, de uma sala que, nessa planta, foi representada por um segmento de 5,2 cm? **6,5 m**
- Os quartos dessa casa medem 3 m por 4 m. Quais são as medidas dos quartos nessa planta? **2,4 cm por 3,2 cm**
- Na planta, o terreno mede 6,4 cm por 28 cm. Quais são as medidas reais desse terreno, em metro? **8 m por 35 m**

15 Desenhe a planta do cômodo em que você dorme. Use a escala 1 : 75. **construção de figura**

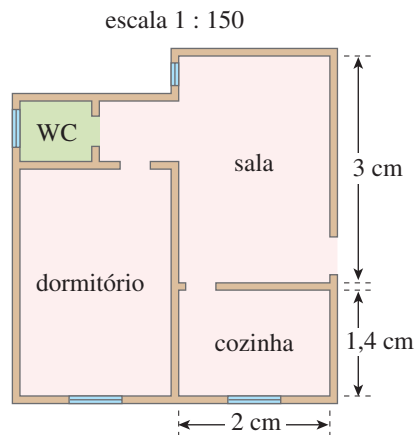
16 Uma caminhonete de 4,80 m de comprimento foi representada na figura abaixo.



Determine a escala utilizada para fazer essa figura. $\frac{1}{120}$

17 Observe a planta de um apartamento e responda às questões a seguir. **2,1 m por 3 m**

- Quais são as medidas reais da cozinha? **2,1 m por 3 m**
- Determine a área real da sala. **13,50 m²**



18 No mapa a seguir, estão marcados os pontos extremos do Brasil: no Norte, a nascente do rio Ailã (fronteira do Brasil com a Guiana), no monte Caburá, em Roraima; no Sul, o arroio Chuí, no Rio Grande do Sul (fronteira do Brasil com o Uruguai); no Leste, banhada pelo oceano Atlântico, a Ponta do Seixas, na Paraíba; e, no Oeste, a nascente do rio Moa (fronteira do Brasil com o Peru), na serra de Contamana, no Acre. Calcule a escala usada nesse mapa. **Cada 1 cm equivale a 676 km.**



Fonte: *Enciclopédia do estudante: geografia do Brasil, aspectos físicos, econômicos e sociais*. São Paulo: Moderna, 2008. p. 18.

Pense mais um pouco...

Em um folheto de propaganda de um novo condomínio, junto ao mapa do local, vem escrito: “Mapa da localização sem escala”. O que isso quer dizer? *Não há proporção entre as distâncias indicadas no mapa e as distâncias reais.*

3 Razão entre grandezas de naturezas diferentes

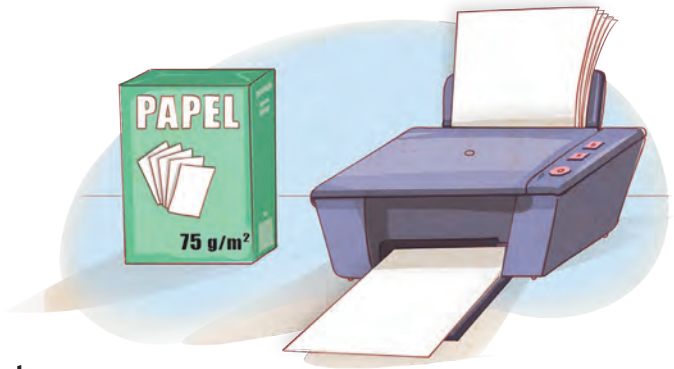
Já sabemos como determinar a razão entre duas grandezas de mesma natureza. Nessas razões, usamos apenas os números que expressam as medidas dessas grandezas.

Agora, vamos conhecer algumas razões com grandezas de naturezas diferentes.

Gramatura de um papel

Observe, ao lado, o pacote de papel para impressão.

Na parte inferior da embalagem, está escrito 75 g/m^2 . Isso significa que cada metro quadrado desse papel tem 75 g de massa.



A esse tipo de razão chamamos de **gramatura**.

$$\text{gramatura} = \frac{\text{massa do papel}}{\text{área do papel}}$$

Note que as grandezas **massa** e **área** são de naturezas diferentes. Por isso, a razão não é expressa só por um número, mas por um número acompanhado da unidade de medida correspondente.

Nesse exemplo, a razão (gramatura) é dada por 75 g/m^2 (lemos: “setenta e cinco gramas por metro quadrado”).

Velocidade média

Um carro parte da cidade A para a cidade B. A distância entre elas é 140 km, e o carro leva 2 horas (2 h) para fazer esse trajeto.

Vamos calcular a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso. Observe que essas grandezas são de naturezas diferentes. Então:

$$\frac{140 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 70 \text{ km/h} \text{ (lemos: “setenta quilômetros por hora”)}$$

A esse tipo de razão chamamos de **velocidade média**.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

► Densidade demográfica

O estado da Bahia tem uma área aproximada de 564.733,1 km² e, em 2014, sua população era de 15.126.371 habitantes.

Dividindo o número de habitantes pela área, vamos obter o número de habitantes por quilômetro quadrado (hab./km²): $\frac{15.126.371 \text{ hab.}}{564.733,1 \text{ km}^2}$, que é cerca de 26,78 hab./km² (lemos: vinte e seis vírgula setenta e oito habitantes por quilômetro quadrado).

A esse tipo de razão chamamos de **densidade demográfica**.



RONALDO NINAYIBA

Vista do Elevador Lacerda em Salvador, Bahia. (Foto de 2014.)

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área da região}}$$

► Consumo médio

Um carro percorreu 444 km e gastou 37,5 l de combustível. Dividindo o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumido, temos o número de quilômetros que esse carro percorreu com 1 l de combustível. Observe.

$$\frac{444 \text{ km}}{37,5 \text{ L}} = 11,84 \text{ km/l} \text{ (lemos: onze vírgula oitenta e quatro quilômetros por litro)}$$

A esse tipo de razão chamamos de **consumo médio**.

$$\text{consumo médio} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{volume de combustível consumido}}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

19. a) de cima para baixo, aproximadamente: 0,33 h; 0,39 h; 0,77 h; 0,90 h; 1 h
b) de cima para baixo: 30,3 km/h; 26,04 km/h; 12,99 km/h; 11,11 km/h; 10 km/h

19 Releia a situação 1 apresentada na página 182 e faça o que se pede.

- Converta, para hora, o tempo apurado para cada modo de locomoção usado para ir da Praça General Gentil Falcão à sede da prefeitura de São Paulo.
- Calcule, em km/h, a velocidade de cada participante do Desafio Intermodal.
- Construa uma tabela com os valores obtidos no item b, relacionando cada modo com a respectiva velocidade. *construção de tabela*
- Faça uma pesquisa na classe sobre o modo como cada colega vai de casa à escola. Com os dados obtidos, acrescente uma linha à sua tabela do item c. *resposta pessoal*

20 Entre 1968 e 1969, Robin Knox-Johnston foi a primeira pessoa a dar a volta ao mundo em um barco a vela, sozinho e sem aportar, isto é, sem parar em lugar nenhum. Percorreu um total de 48.478 km em 312 dias. Qual foi sua velocidade média em quilômetros por dia?

aproximadamente 155,37 km/dia



BETTMAN/CORBIS/LATINSTOCK

21 A distância rodoviária entre São Paulo e Rio de Janeiro é de aproximadamente 400 km.



Vista aérea do bairro e da orla da Praia da Barra da Tijuca, Rio de Janeiro, RJ. (Foto de 2013.)

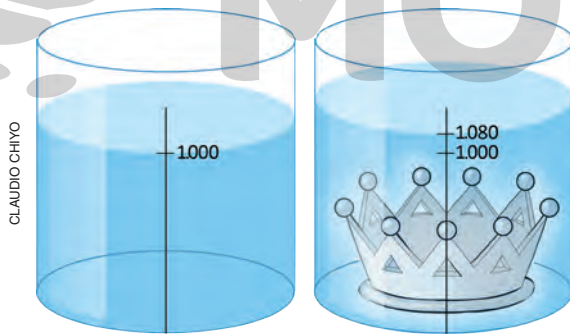
Qual é a velocidade média de um ônibus que faz esse percurso em 6 horas e 30 minutos?

aproximadamente 61,5 km/h

22 A área do estado do Rio Grande do Sul é 281.731,445 km². Segundo o IBGE, em 2014, a densidade demográfica desse estado era, aproximadamente, 39,78 hab./km². Determine a população aproximada que o estado do Rio Grande do Sul tinha naquele ano.

11.207.277 habitantes

23 Em um leilão de obras de arte, um colecionador comprou uma coroa de prata. Para verificar se a coroa tinha de fato a densidade da prata, 10,5 g/cm³, ele mediu a massa e obteve 840 g. Depois colocou-a em uma cuba com 1.000 cm³ de água. Veja quanto a água subiu.



A diferença das medidas, em centímetro cúbico, é o volume da coroa.

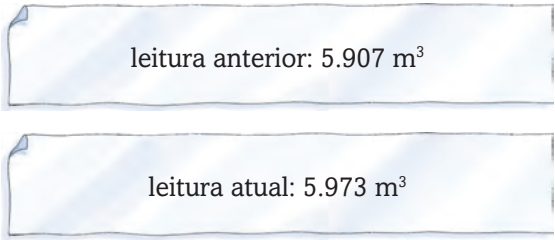
A densidade da coroa, calculada pelo colecionador, coincide com a densidade da prata?

sim

24 A densidade do mármore é de 2,6 g/cm³. Quantos quilogramas tem uma pedra de mármore com 12,40 dm³? *32,24 kg*

25 Enchi de gasolina o tanque do carro e percorri 392 km em uma rodovia. Parei para abastecê-lo novamente, e foram necessários 35 litros de gasolina para encher o tanque. Qual foi o consumo médio do carro nesse trajeto? *11,2 km/l*

26 A conta de um serviço de água e esgoto apresentou os seguintes dados, referentes ao consumo de água em uma residência no mês de junho.



Determine o consumo médio diário de água, em litros por dia (l/dia), dessa residência nesse mês. *aproximadamente 2.133 l/dia*

27 Em um condomínio, há uma piscina com estas dimensões: 15 m de comprimento, 5 m de largura e 2 m de profundidade. Ela está cheia de água até a borda. Para a limpeza dos azulejos, é preciso esvaziá-la usando uma bomba que retira a água à razão de 2.000 litros por hora. Quanto tempo é necessário para esvaziar completamente essa piscina? *75 horas*

28 Rodrigo foi ao supermercado comprar sabão em pó e encontrou duas opções de embalagens da marca que costuma usar.

28. a) Sim, pois a embalagem maior deveria custar R\$ 19,20 se seguisse a mesma relação (preço pago por quilograma) da menor, pois $(5,12 : 1,2) \cdot 4,5 = 19,2$.

28. b) resposta pessoal; Na embalagem maior o preço por quilograma é de R\$ 4,89 e na embalagem menor o preço por quilograma é de R\$ 4,27.



a) Rodrigo decidiu comprar a embalagem menor, pois considerou-a mais vantajosa. Ele tem razão? Como ele pode ter chegado a essa conclusão?

b) Troque ideias com um colega, e redijam um texto que justifique a decisão de Rodrigo.

c) Se a embalagem menor não tivesse os 200 gramas gratuitos, ela ainda seria a mais vantajosa? Justifiquem a resposta.

d) Quando vão às compras, vocês costumam fazer comparações entre embalagens e preços de produtos de mesma qualidade? Qual é a importância de ter essa atitude? *resposta pessoal*

28. c) Não, pois, seguindo a mesma relação (preço pago por quilograma) da embalagem maior, ela deveria custar em torno de R\$ 4,89, pois $22 : 4,5 \approx 4,89$.

Pense mais um pouco...

O **Produto Interno Bruto (PIB)** é o total de bens e serviços produzidos por um país durante um ano. A razão entre o PIB e o número de habitantes de um país é chamada de **renda per capita**. A renda *per capita* de um país equivale à quantia, em dólar, que cada habitante receberia caso o PIB fosse dividido igualmente por toda a população.

Considere os dados da tabela a seguir e calcule a renda *per capita* de cada um destes países.

A: 12 dólares/hab.; B: 11,25 dólares/hab.; e C: 5,30 dólares/hab.

País	Produto Interno Bruto (em dólares)	Número de habitantes
A	300.000.000	25.000.000
B	450.000.000	40.000.000
C	530.000.000	100.000.000

Agora, responda:

- a) Comparando as rendas *per capita* calculadas acima, qual dos países é mais rico? **A**
- b) O fato de a renda *per capita* de um país ser alta significa que todos os habitantes vivem bem? Justifique sua resposta. **Não, pois esse valor é uma média.**

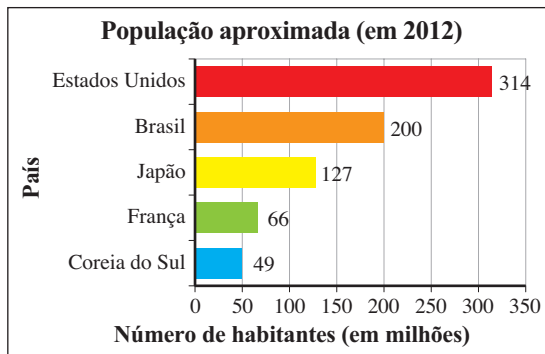
TRABALHANDO A INFORMAÇÃO **i**

Comparando gráficos de barras

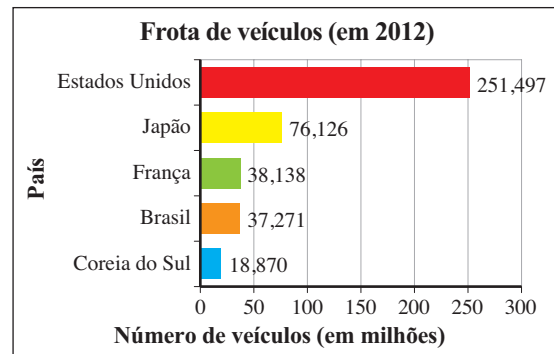
De acordo com o *Anuário da Indústria Automobilística Brasileira* de 2015, uma publicação da Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores (Anfavea), o Brasil apresentou uma queda na taxa de motorização (número de habitantes por veículo) de 2003 a 2012, passando de 8,4 habitantes por veículo em 2003 para 5,3 habitantes por veículo em 2012. Essa queda indica um expressivo aumento da frota de veículos no Brasil.

É importante observar que uma baixa taxa de motorização reflete, principalmente, nos grandes centros e aglomerações urbanas, agravando problemas como congestionamentos e más condições de qualidade ambiental.

Veja nos gráficos abaixo a população aproximada e a quantidade de veículos em alguns países em 2012.



Dados obtidos em: <www.indexmundi.com>. Acesso em: 8 mar. 2015.



Anuário da Indústria Automobilística Brasileira de 2015, da Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores (Anfavea).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comparando-os, podemos ter rapidamente uma ideia sobre a ordem de grandeza da taxa de motorização nesses países, dada pela razão entre a população e a frota de veículos.

Como os valores são muito grandes, não fazemos uma leitura precisa; no entanto, podemos obter valores aproximados. Vamos tomar como exemplo o Brasil, que tinha em 2012 uma população de cerca de 200 milhões de habitantes e uma frota de veículos de aproximadamente 37 milhões.

$$\text{Brasil} \rightarrow \frac{200.000.000 \text{ hab.}}{37.000.000 \text{ veículos}} \approx 5,4 \text{ hab./veículo}$$

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Apenas observando os gráficos, responda: a taxa de motorização na Coreia do Sul era maior do que a do Brasil em 2012? **Não, era menor.**
- 2 Com uma calculadora, obtenha os valores aproximados das taxas de motorização dos Estados Unidos, Japão e França. **Estados Unidos: 1,2 hab./veículo; Japão: 1,7 hab./veículo; França: 1,7 hab./veículo**
- 3 Pesquise dados atuais sobre a população e a frota de veículos no Brasil. Verifique se hoje a taxa de motorização do Brasil aumentou ou diminuiu.

Os alunos podem pesquisar nos sites do IBGE (www.ibge.gov.br) e da Anfavea (www.anfavea.com.br). A resposta depende dos dados obtidos pelos alunos.

4 Proporção

Juliana é colecionadora de gibis. A cada 5 gibis de sua coleção, 1 é de histórias em quadrinhos feitas no estilo japonês (mangá).



Dessa maneira, a cada 10 gibis, 2 são mangás; a cada 15 gibis, 3 são mangás; a cada 20 gibis, 4 são mangás; e assim por diante.

Podemos, então, obter as razões:

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{10}$$

$$\frac{3}{15}$$

$$\frac{4}{20}$$

Observe que todas essas razões são iguais a $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$$

Sentenças como essas, que representam uma igualdade entre duas razões, são chamadas de **proporção**.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

A proporção $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ também pode ser indicada assim: $1 : 5 = 2 : 10$.

Em ambos os casos, essa proporção é lida: “um está para cinco assim como dois está para dez”.

De modo geral, podemos dizer que os números a , b , c e d , não nulos, formam, nessa ordem, uma proporção quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- Os números a , b , c e d são os **termos** da proporção.
- Os termos a e d são chamados de **extremos** da proporção.
- Os termos b e c são chamados de **meios** da proporção.

Por exemplo, na proporção $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ os extremos são 1 e 10, e os meios, 5 e 2.

Agora, vamos verificar se os números 4, 6, 10 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

- $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

As razões são iguais; logo, $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$.

Portanto, os números 4, 6, 10 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30. a) sim; $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ d) sim; $\frac{0,9}{0,6} = \frac{15}{10}$

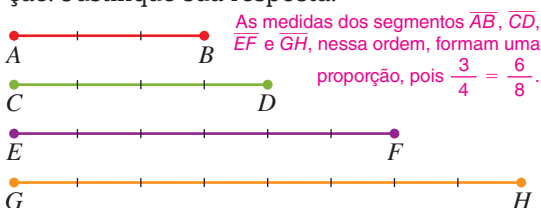
29 Escreva como se lê a proporção $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$. Em seguida, identifique: *quatro está para cinco assim como oito está para dez*

- a) os termos dessa proporção; 4, 5, 8 e 10
 b) os meios dessa proporção; 5 e 8
 c) os extremos dessa proporção. 4 e 10

30 Verifique em cada caso se os números, nessa ordem, formam uma proporção. Em caso afirmativo, escreva a proporção.

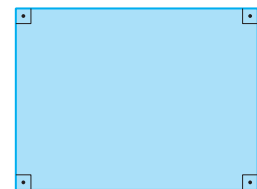
- a) 2, 5, 8 e 20 c) 6, 14, 9 e 27 *não*
 b) 2, 8, 20 e 5 *não* d) 0,9; 0,6; 15 e 10

31 Verifique se as medidas dos segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} , nessa ordem, formam uma proporção. Justifique sua resposta.



32 Meça os lados das regiões retangulares a seguir e determine:

- a) a razão entre o comprimento do retângulo menor e o do retângulo maior; $\frac{2}{3,2}$
 b) a razão entre a largura do retângulo menor e a largura do retângulo maior; $\frac{1,5}{2,4}$
 c) a proporção formada no caso de essas razões serem iguais. $\frac{2}{3,2} = \frac{1,5}{2,4}$



ADILSON SECCO

33 Escreva uma proporção na qual uma das razões seja $\frac{5}{9}$. *resposta pessoal*

34 Para que os números 15, x , 3 e 4 formem, nessa ordem, uma proporção, qual deve ser o valor de x ? $x = 20$

- 35** Um mercado vende o mesmo tipo de feijão em dois tipos de pacote:
- de 2 kg por R\$ 2,60;
 - de 5 kg por R\$ 6,40.
- a) Para cada pacote, determine a razão entre o preço e a massa. $\frac{2,60}{2}$; $\frac{6,40}{5}$

- b) Essas razões formam uma proporção? Justifique sua resposta. *não, pois $\frac{2,60}{2} \neq \frac{6,40}{5}$*
- c) Entre os dois pacotes, qual deles é mais vantajoso comprar? Por quê?
- d) Quanto deveria custar o pacote de 2 kg para que o seu preço fosse equivalente ao preço do pacote de 5 kg?

35. c) O pacote de 5 quilogramas, porque custa R\$ 0,02 por quilograma mais barato em relação ao pacote de 2 quilogramas.
d) R\$ 2,56. Discuta com os alunos o que mudaria se as razões formassem uma proporção.

5 Propriedade fundamental das proporções

Considere a proporção $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$.

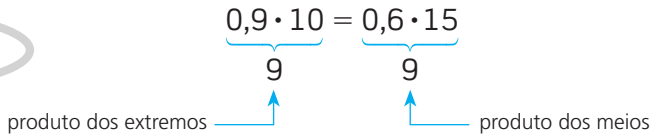
- Os extremos dessa proporção são 6 e 15, e seu produto é 90.
- Os meios são 5 e 18, e seu produto também é 90.

Perceba que, nessa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Considere estas outras proporções.

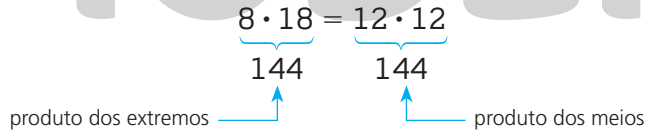
a) $\frac{0,9}{0,6} = \frac{15}{10}$

Note que:



b) $\frac{8}{12} = \frac{12}{18}$

Observe que:



Isso acontece em todas as proporções.

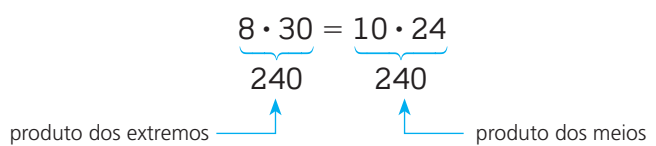
Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Essa é a **propriedade fundamental das proporções**.

Por meio dessa propriedade, também podemos reconhecer quando duas razões formam uma proporção.

Veja alguns exemplos.

- a) $\frac{8}{10}$ e $\frac{24}{30}$ formam uma proporção, pois:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



b) $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois:

$$\begin{array}{ccc} & 4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 & \\ & \underbrace{\quad\quad}_{36} & \underbrace{\quad\quad}_{36} \\ \text{produto dos extremos} & \uparrow & \uparrow \text{produto dos meios} \end{array}$$

c) $\frac{2}{4}$ e $\frac{5}{3}$ não formam uma proporção, pois o produto dos extremos ($2 \cdot 3 = 6$) é diferente do produto dos meios ($4 \cdot 5 = 20$).

Nas situações a seguir, observe como podemos encontrar o valor desconhecido de um termo em uma proporção usando a propriedade fundamental.

Situação 1

A maquete de um ginásio de esportes foi construída na escala $\frac{9}{250}$; ou seja, nela, cada 9 cm corresponde a 250 cm na realidade. Além disso, a altura da maquete é 54 cm. Vamos calcular a altura real desse ginásio de esportes.

Assim, temos:

$$\text{escala} = \frac{\text{número que expressa o comprimento no desenho}}{\text{número que expressa o comprimento real}}$$

$$\frac{9}{250} = \frac{54}{x}$$

Observe que obtivemos uma proporção.

Aplicando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo a equação obtida, temos:

$$9x = 54 \cdot 250$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{54 \cdot 250}{9}$$

$$x = 1.500$$

Logo, a altura real desse ginásio é 1.500 cm, ou seja, 15 m.



FABIO EUGÊNIO

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Situação 2

Vamos calcular o valor de x na proporção $\frac{3x-1}{x+4} = \frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{produto dos extremos} & & \text{produto dos meios} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 \cdot (3x - 1) = 2 \cdot (x + 4) \\ 9x - 3 = 2x + 8 \\ 9x - 2x = 8 + 3 \\ \frac{7x}{7} = \frac{11}{7} \\ x = \frac{11}{7} \end{array}$$

Pense mais um pouco...



Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

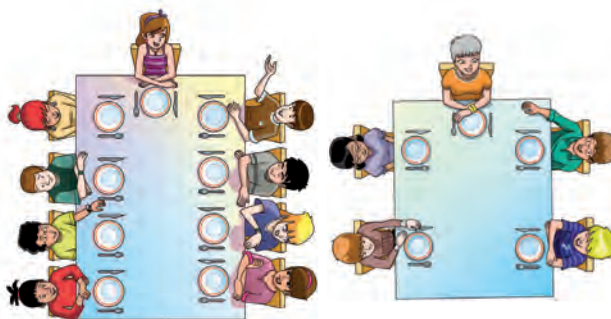
- Inventem, cada um, uma proporção com números inteiros não nulos e troquem-nas entre si.
 - Somem 1 a cada razão da proporção recebida do outro. *resposta pessoal*
 - Verifiquem se as novas sentenças matemáticas obtidas representam uma proporção. *sim*
- Agora, inventem mais uma proporção cada um e façam a troca.
 - Subtraíam 1 de cada razão da proporção recebida do outro. *resposta pessoal*
 - Verifiquem se as novas sentenças matemáticas obtidas representam uma proporção. *sim*
- Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, respondam.
 - $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ é uma proporção? Justifiquem. *sim; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$*
 - $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ é uma proporção? Justifiquem. *sim; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$*
- A que condições devem obedecer os números inteiros a e b para que $a, a + 1, b, b + 1$ formem, nessa ordem, uma proporção? *$a = b \neq -1$*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Aplicando a propriedade fundamental das proporções, verifique se o par de razões $\frac{9}{6}$ e $\frac{12}{8}$ forma uma proporção. *sim*
- Em uma proporção, o produto dos extremos é 24 e um dos meios é 8. Calcule o outro meio. *3*
- Uma proporção tem meios 6 e 10. Um dos extremos é 4, qual é o outro extremo? *15*
- Calcule o valor de x nas proporções.
 - $\frac{6}{x} = \frac{9}{12}$ *$x = 8$*
 - $\frac{3}{4} = \frac{5x}{20}$ *$x = 3$*
 - $\frac{2x}{3} = \frac{-24}{15}$ *$x = -\frac{12}{5}$*
 - $\frac{x+5}{3} = \frac{x-1}{5}$ *$x = -14$*
- Para que valor de x os números 8, 6, 4 e x formam, nessa ordem, uma proporção? *$x = 3$*
- Douglas e Eduardo participaram do sorteio de um prêmio em dinheiro. Eles combinaram que, se um dos dois fosse sorteado, eles dividiriam o prêmio na razão de 5 para 3, de modo que o amigo sorteado ficaria com a maior parte. Eduardo foi sorteado e ficou com R\$ 6.250,00.
 - Com quanto Douglas ficou? *R\$ 3.750,00*
 - Qual foi o valor total do prêmio? *R\$ 10.000,00*

- A miniatura de um carro, construída na escala 1 : 96, tem 5,5 cm de comprimento. Qual é o comprimento real do carro? *5,28 m*
- Luciana foi a uma pizzaria comemorar seu aniversário com alguns amigos. Como havia muitas pessoas, não foi possível acomodá-los na mesma mesa. Então, eles foram divididos em dois grupos da seguinte forma:



- Sabendo que os convidados da mesa menor comeram 2 pizzas e meia e os da mesa maior comeram proporcionalmente a mesma quantidade de pizzas da mesa menor, quantas eles comeram? *4 pizzas e meia*
- Ao dividir a conta, os convidados da mesa menor pagaram R\$ 90,00 no total, e os da mesa maior, R\$ 120,00. Essa divisão foi justa? Justifique sua resposta.

Nesse caso, os alunos poderão afirmar que a divisão da conta não foi justa, pois não foi proporcional ao número de convidados de cada mesa.

PARA SABER MAIS



Antes de os alunos realizarem as atividades desta seção, faça algumas questões como estas:

- Se 1 jovem em cada 8 vai ao museu, quantos iriam se o total fosse 16? E se o total fosse 24? E se fosse 32? (respostas: 2 jovens; 3 jovens; 4 jovens)
- Se 1 jovem em cada 2 vai ao Parque Nacional, quantos iriam se o total fosse 20? (resposta: 10 jovens)

Resolvendo problemas com o auxílio de esquemas

Em um passeio escolar, 160 jovens podiam escolher entre visitar o Museu Nacional, o Parque Nacional ou o Teatro Nacional. Sabe-se que 1 em cada 8 jovens decidiu visitar o Museu, 1 em cada 2 jovens decidiu visitar o Parque Nacional e 3 em cada 8 jovens decidiram visitar o Teatro Nacional. A professora pediu a Pedro que calculasse o número de jovens que iria em cada um desses três locais. Veja como ele fez.

Visita ao Museu Nacional

$$\begin{array}{r|l} \cdot 20 & \\ \hline 1 & 20 \\ 8 & 160 \\ \hline \cdot 20 & \end{array}$$

Visita ao Parque Nacional

$$\begin{array}{r|l} \cdot 80 & \\ \hline 1 & 80 \\ 2 & 160 \\ \hline \cdot 80 & \end{array}$$

Visita ao Teatro Nacional

$$\begin{array}{r|l} \cdot 20 & \\ \hline 3 & 60 \\ 8 & 160 \\ \hline \cdot 20 & \end{array}$$

Para cada local, fiz um esquema com os dados conhecidos.

Foi fácil calcular que 20 jovens iriam ao museu. Bastou perceber que, se 1 está para 8, 20 está para 160.



Usando a mesma estratégia, descobri que 80 jovens iriam ao Parque Nacional.

... E que 60 jovens visitariam o Teatro Nacional.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2. a) Quadras: 40 pessoas; piscina: 120 pessoas; restaurante: 80 pessoas

1. Explique o raciocínio de Pedro para calcular os números procurados.
2. Para cada situação a seguir, faça um esquema para calcular o que se pede.
 - a) Em certo dia de verão havia 240 pessoas em um clube. Dessas pessoas, 1 em cada 6 estava nas quadras, 1 em cada 2 estava na piscina e 1 em cada 3 estava no restaurante. Calcule quantas pessoas estavam em cada local.
 - b) Durante um jogo de futebol, havia 2.800 torcedores no estádio. De cada 7 torcedores, 4 torciam para o time A e 3 torciam para o time B. Calcule quantos torcedores torciam para cada time nesse dia. 1.600 torciam para o time A e 1.200 torciam para o time B.
 - c) Em certo dia, ao pedalar de bicicleta, em cada 3 horas João percorria 51 km. Calcule quantos quilômetros foram percorridos em 2 horas e 30 minutos. 42,5 km
 - d) Uma moto tem 2,1 m de comprimento. Sua miniatura foi construída com 7 cm de comprimento. Que escala foi usada na construção dessa miniatura? 1 : 300
 - e) Em um mapa, duas cidades, A e B, estão separadas por uma distância de 5 cm. No mapa, cada 1 cm representa 2.500 m. Calcule, em quilômetro, a distância que separa as duas cidades. 12,5 km

Espera-se que os alunos percebam que o conceito envolvido nesses cálculos é o de proporcionalidade.

1. exemplo de resposta: No cálculo do número de jovens que foi ao museu, por exemplo, a ideia é perceber que se deve obter o total de jovens (160) a partir do número 8 (multiplicando 8 por 20); feito isso, é obrigatório multiplicar também o número 1 por 20, resultando no total de 20 jovens.

FABIO EUGÊNIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- 1 Um quadrado tem 12 cm de lado, e outro, 15 cm de lado. Qual é a razão entre:
- a medida do lado do quadrado menor e a medida do lado do quadrado maior? $\frac{4}{5}$
 - o perímetro do quadrado menor e o perímetro do quadrado maior? $\frac{4}{5}$
 - a área do quadrado menor e a área do quadrado maior? $\frac{16}{25}$

- 2 (Vunesp) Em uma festa, a razão entre o número de moças e o de rapazes é $\frac{13}{12}$. A porcentagem de rapazes na festa é: alternativa d

- 44%.
- 45%.
- 40%.
- 48%.
- 46%.

- 3 (UFC-CE) Em um mapa cartográfico, 4 cm representam 12 km. Nesse mesmo mapa, 10 cm representarão quantos quilômetros? 30 km

- 4 Um ourives confecciona joias e coloca 6 gramas de prata em cada 18 gramas de ouro puro.

- Qual é a razão entre a massa de prata e a massa de ouro puro que esse ourives usa? $\frac{1}{3}$
- Se em uma joia esse ourives usar 4,5 gramas de ouro puro, de quantos gramas de prata ele precisará? 1,5 g

- 5 (UFRGS-RS) Se a escala de um mapa é 5 por 2.500.000 e dois pontos no mapa estão à distância de 25 cm, ao longo de uma rodovia, a distância real em km é: alternativa b

- 100.
- 125.
- 150.
- 200.
- 250.

- 6 Uma moto percorreu 225 km em 2,5 h.

- Qual foi a velocidade média da moto, em km/h, nesse percurso? 90 km/h
- Nessa mesma velocidade, em quanto tempo essa moto percorreria 270 quilômetros? 3 horas
- Qual é o consumo médio dessa moto se, percorrendo 259 km, ela gastou 14 litros de combustível? 18,5 km/l

- 7 (UFC-CE) A planta de um apartamento está confeccionada na escala 1 : 50. Então, a área real, em m², de uma sala retangular, cujas medidas na planta são 12 cm e 14 cm, é: alternativa d

- 24.
- 26.
- 28.
- 42.
- 54.

- 8 Verifique em cada caso se os números, nessa ordem, formam uma proporção.

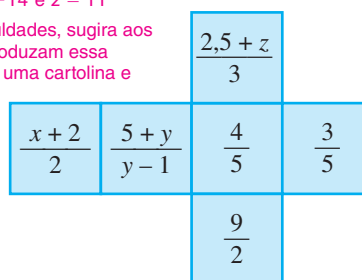
- 3, 2, 9 e 6 sim
- 4, 3, 3 e 8 não

- 9 Em uma proporção, o produto dos extremos é 80 e um dos meios é 4. Calcule o outro meio. 20

- 10 Observe a planificação de um cubo no qual foi escrita uma razão em cada uma de suas faces. Determine o valor de x , y e z , sabendo que as razões das faces opostas formam uma proporção.

$$x = -\frac{2}{5}, y = -14 \text{ e } z = 11$$

Se houver dificuldades, sugira aos alunos que reproduzam essa planificação em uma cartolina e montem o cubo.



- 11 A razão entre as medidas das arestas de dois cubos é de 2 para 3. A aresta do cubo menor mede 3,6 cm. Determine:

- a medida da aresta do cubo maior; 5,4 cm
- a razão entre as áreas de uma das faces do cubo menor e do cubo maior; $\frac{4}{9}$
- a razão entre os volumes do cubo menor e do cubo maior. $\frac{8}{27}$

- 12 Um poste de 5,40 m projeta uma sombra de 1,80 m. Nesse mesmo instante, um prédio projeta uma sombra de 14 m. Qual é a altura do prédio? 42 m

- 13 Caatinga (que em tupi-guarani significa “mata branca”) é um sistema ambiental exclusivamente brasileiro, encontrado no Nordeste e em uma pequena parte de Minas Gerais.

A vegetação da caatinga é formada por pequenas árvores, comumente espinhosas, que perdem as folhas na longa estação de seca, época em que os troncos adquirem um tom acinzentado.

A caatinga abriga a mais povoada região semiárida do planeta. São aproximadamente 24 milhões de pessoas distribuídas em uma superfície de 844 mil km². Qual é a densidade demográfica dessa região? 28,44 hab./km²

Grandezas proporcionais e porcentagem

1 A proporcionalidade entre grandezas

Entendemos como **grandeza** tudo o que pode ser medido ou contado. Assim, o comprimento, a superfície, a temperatura, a massa e o tempo são exemplos de grandeza.

Veremos a seguir algumas situações que envolvem uma relação de dependência entre duas grandezas.

Situação 1

Gabriel percebeu que a torneira da cozinha estava vazando.



Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado sob a torneira. Veja o que ele observou.

Tempo (em minuto)	1	2	3	4	5
Volume de água (em ml)	5	10	15	20	25

Note que:

- quando duplicamos o número de minutos, o volume de água também duplica;
- quando triplicamos o número de minutos, o volume de água também triplica; e assim por diante.

Nesse caso, dizemos que as grandezas **tempo** e **volume de água** estão em uma relação de **proporcionalidade direta**, ou seja, são **grandezas diretamente proporcionais**.

Não desperdice água. Se a torneira estiver vazando, conserte-a. Assim, você estará contribuindo para a preservação de nosso planeta. Cada gota de água que se economiza é um ponto a favor para o futuro da humanidade!



Situação 2

Suponha que, em uma doceria, um funcionário faça certa quantidade de bolos em 6 horas. Com a proximidade das festas de fim de ano, o proprietário da doceria resolve produzir a mesma quantidade de bolos em um tempo menor. Para isso, aumenta a quantidade de funcionários, de igual produtividade e trabalhando nas mesmas condições, conforme a necessidade.

Veja a relação entre o número de funcionários e o tempo gasto para a produção desses bolos.

Número de funcionários	1	2	3	4
Tempo (em hora)	6	3	2	1,5

- Quando duplicamos o número de funcionários, o número de horas fica reduzido à metade.
- Quando triplicamos o número de funcionários, o número de horas fica reduzido à terça parte; e assim por diante.

Nesse caso, dizemos que as grandezas **número de funcionários** e **tempo** estão em uma relação de **proporcionalidade inversa**, ou seja, são **grandezas inversamente proporcionais**.

OBSERVAÇÃO

- ▶ Ao lidarmos com grandezas proporcionais aplicadas a uma situação real, devemos ter o cuidado de analisar até que ponto a proporcionalidade existe nessa situação. Por exemplo, poderíamos pensar em aumentar muito o número de funcionários, de modo que a produção dos bolos acontecesse em segundos. Contudo, sabemos que na realidade isso é impossível, pois há um tempo mínimo para a produção de um bolo, e há também a limitação do espaço físico da doceria etc.

Situação 3

Observe, no quadro abaixo, a relação entre a idade e a altura média dos alunos de 1 a 5 anos da Escola Pequenitos.

Idade (em ano)	1	2	3	4	5
Altura média dos alunos (em cm)	73,2	84,1	91,9	99,1	105,9



Note que, quando a idade é duplicada, a altura nem dobra nem se reduz à metade. A altura simplesmente aumenta sem respeitar nenhuma proporção em relação à idade. Então, altura e idade não são grandezas nem direta nem inversamente proporcionais. Nesse caso, dizemos que **altura e idade** são **grandezas não proporcionais**.

Neste capítulo, vamos estudar detalhadamente as grandezas diretamente proporcionais e as grandezas inversamente proporcionais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. b) diretamente proporcionais

- 1 Classifique as grandezas de cada situação a seguir como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.
 - a) Velocidade média e tempo gasto para percorrer determinado trajeto. *inversamente proporcionais*
 - b) Número de pães e quantidade de farinha de trigo necessária para fazer esses pães.
 - c) Idade e massa de uma pessoa. *não proporcionais*
 - d) Número de máquinas de um mesmo modelo e tempo gasto para a execução de certo trabalho com essas máquinas. *inversamente proporcionais*
- 2 Sabendo que 100 g de maçã contêm 84 g de água, responda.
 - a) Quantos gramas de água há em 5 kg de maçã? *4.200 g*
 - b) Identifique as grandezas envolvidas nessa situação. *massa de maçã e massa de água*
 - c) Essas grandezas são direta ou inversamente proporcionais? *diretamente proporcionais*

- 3 Veja o quadro abaixo, que mostra a velocidade média de um automóvel e o tempo que ele leva para percorrer determinado trajeto. Em seguida, responda às questões.

Velocidade (em km/h)	120	80	60	48
Tempo (em hora)	1	1,5	2	2,5

- a) Qual é a velocidade média do automóvel quando percorre esse trajeto em 2 horas e meia? *48 km/h*
- b) Quantas horas o automóvel levará para percorrer esse trajeto se a velocidade média for de 80 km/h? *1 hora e meia*
- c) As grandezas “velocidade” e “tempo” são direta ou inversamente proporcionais? *inversamente proporcionais*

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

O relógio de Márcio está com defeito. Ele atrasa 4 minutos a cada 2 dias.

Nos últimos 14 dias, Márcio esqueceu de acertar o relógio e, por esse motivo, chegou atrasado ao encontro com a namorada.



- a) Construa uma tabela que indique o tempo de atraso, em minuto, correspondente a cada 2 dias que Márcio esqueceu de acertar seu relógio. *construção de tabela*
- b) Quantos minutos o relógio atrasa em 10 dias? *20 minutos*
- c) Quantos minutos Márcio chegou atrasado ao encontro? *28 minutos*
- d) As grandezas apresentadas (tempo de atraso e número de dias) são direta ou inversamente proporcionais? *diretamente proporcionais*
- e) Supondo que o defeito continue, quantos minutos o relógio estará atrasado no 22º dia? *44 minutos*
- f) Quantos dias serão necessários para que o relógio registre 1 hora (60 minutos) de atraso? *30 dias*

2 Grandezas diretamente proporcionais

Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de cinco dias, montando o quadro abaixo.

Tempo de produção (em dias)	Produção de açúcar (em número de sacas)
1	5.000
2	10.000
3	15.000
4	20.000
5	25.000

Para montar o quadro, Mariana trabalhou com duas grandezas: **tempo** e **produção**. Ela mediu o tempo em número de dias e a produção em sacas de açúcar. Então, as unidades de medida empregadas para o tempo e para a produção são, respectivamente, *dias* e *sacas de açúcar*.

Sabendo que cada saca de açúcar tem 50 kg, Mariana apresentou, também, a produção dessa usina em quilograma e, dessa forma, obteve os seguintes dados:

Tempo de produção (em dias)	Produção de açúcar (em kg)
1	250.000
2	500.000
3	750.000
4	1.000.000
5	1.250.000



CLAUDIO CHIYO

Não confunda grandeza com unidade de medida. No segundo quadro, as grandezas continuam sendo **tempo** e **produção**, mas a unidade para medir a produção foi o *quilograma*, e não a *saca de açúcar*.

Ao examinar esses quadros, observe que:

- duplicando o número de dias, duplica-se a produção de açúcar;
- triplicando o número de dias, triplica-se a produção de açúcar, e assim por diante.

Por isso, as grandezas **tempo** e **produção** são **diretamente proporcionais**.

Note também que, de duas em duas, as razões entre o tempo de produção (em dias) e a produção de açúcar (em número de sacas ou em quilograma) são iguais. Veja, por exemplo, essas razões para os valores referentes ao primeiro quadro.

$$\frac{1}{2} = \frac{5.000}{10.000}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5.000}{20.000}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{10.000}{15.000}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{10.000}{25.000}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{15.000}{25.000}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5.000}{15.000}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{5.000}{25.000}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{10.000}{20.000}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{15.000}{20.000}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{20.000}{25.000}$$

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando a razão entre dois valores da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda.

Repare ainda que as razões entre os valores da primeira coluna e os valores correspondentes da segunda coluna são iguais.

$$\frac{1}{5.000} = \frac{2}{10.000} = \frac{3}{15.000} = \frac{4}{20.000} = \frac{5}{25.000}$$

Todas essas frações são redutíveis à mesma fração, ou seja, $\frac{1}{5.000}$.

Dizemos, então, que os números da sequência 1, 2, 3, 4 e 5 são **diretamente proporcionais** aos números da sequência 5.000, 10.000, 15.000, 20.000 e 25.000.

Acompanhe mais alguns exemplos.

a) Para montar uma pequena empresa, Márcia, Cláudio e Ricardo formaram uma sociedade. Márcia entrou com R\$ 24.000,00, Cláudio, com R\$ 27.000,00, e Ricardo, com R\$ 30.000,00. Depois de seis meses, a empresa obteve um lucro de R\$ 32.400,00, que foi dividido entre os sócios em partes diretamente proporcionais à quantia que cada um investiu.

Vamos calcular a parte que coube a cada sócio.

Representaremos a parte do lucro de Márcia por x , a de Cláudio por y e a de Ricardo por z ; assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 32.400 \\ \frac{x}{24.000} = \frac{y}{27.000} = \frac{z}{30.000} = r \end{cases} \quad \text{(Nesse caso, } r \text{ é o valor correspondente a essas razões.)}$$

Assim, obtemos as seguintes proporções:

$$\frac{x}{24.000} = \frac{r}{1} \qquad \frac{y}{27.000} = \frac{r}{1} \qquad \frac{z}{30.000} = \frac{r}{1}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos:

$$x = 24.000r \qquad y = 27.000r \qquad z = 30.000r$$

Substituindo x por $24.000r$, y por $27.000r$ e z por $30.000r$ em $x + y + z = 32.400$, calculamos o valor de r . Assim:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 32.400 \\ 24.000r + 27.000r + 30.000r &= 32.400 \\ 81.000r &= 32.400 \\ \frac{81.000r}{81.000} &= \frac{32.400}{81.000} \\ r &= 0,4 \end{aligned}$$



Com o valor encontrado para r , calculamos os valores de x , y e z .

$$x = 24.000 \cdot r$$

$$x = 24.000 \cdot 0,4$$

$$x = 9.600$$

$$y = 27.000 \cdot r$$

$$y = 27.000 \cdot 0,4$$

$$y = 10.800$$

$$z = 30.000 \cdot r$$

$$z = 30.000 \cdot 0,4$$

$$z = 12.000$$

Portanto, Márcia recebeu R\$ 9.600,00, Cláudio, R\$ 10.800,00, e Ricardo, R\$ 12.000,00.

- b) Vamos determinar x e y , de modo que a sequência de números 2, 8 e y seja diretamente proporcional à sequência de números 3, x e 21.

$$2 \quad 8 \quad y$$

$$3 \quad x \quad 21$$

Para que as sequências sejam diretamente proporcionais, as razões entre os números correspondentes devem ser iguais, isto é: $\frac{2}{3} = \frac{8}{x} = \frac{y}{21}$

Assim:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$$

$$2x = 3 \cdot 8$$

$$2x = 24$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{24}{2}$$

$$x = 12$$

$$\frac{2}{3} = \frac{y}{21}$$

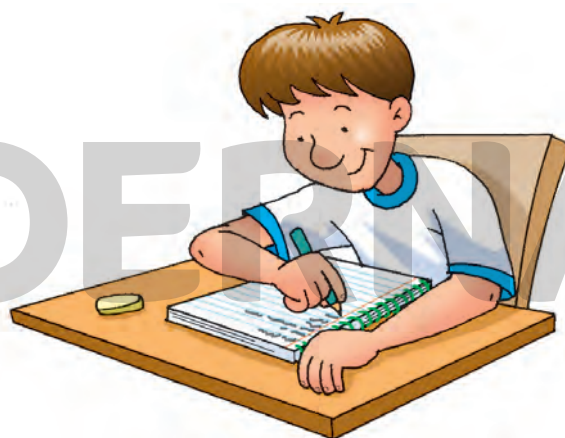
$$3y = 2 \cdot 21$$

$$3y = 42$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{42}{3}$$

$$y = 14$$

Portanto, para que as duas sequências sejam diretamente proporcionais, devemos ter $x = 12$ e $y = 14$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 4 Em uma fábrica, determinado tipo de detergente é armazenado em tambores. Sabendo que todos os tambores são iguais e que 2 tambores armazenam 360 litros desse detergente, determine:
- o número de tambores necessários para armazenar 720 litros; **4 tambores**
 - o número de litros de detergente armazenado em 10 desses tambores; **1.800 litros**
- c) o número de litros armazenado em 21 tambores e meio. **3.870 litros**
- 5 Em um concurso para escolha das melhores fotos de monumentos, foi oferecido um prêmio de R\$ 3.600,00. Esse prêmio foi dividido entre os dois primeiros colocados em partes diretamente proporcionais aos pontos obtidos. Sabendo que o primeiro colocado atingiu 10 pontos e o segundo, 8, qual foi o prêmio de cada um?
R\$ 2.000,00 e R\$ 1.600,00

7. b) É importante conversar com os alunos sobre como pequenas atitudes como escovar os dentes com a torneira fechada, não acionar a descarga de um vaso sanitário sem necessidade, não lavar a calçada com mangueira, entre outras coisas, são importantes para promover o uso racional da água.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

6 Determine o valor das letras do quadro abaixo, de modo que as sequências de números sejam diretamente proporcionais. $a = 10$, $b = 20$ e $c = 50$

4	6	8	a	20
10	15	b	25	c

7 Em um banho de ducha, são gastos 135 litros de água em 15 minutos. Para economizar água, é preciso fechar o registro enquanto se ensaboa, reduzindo para 5 minutos o tempo de banho com o registro aberto.

a) Quantos litros de água se economizam dessa maneira? **90 litros**

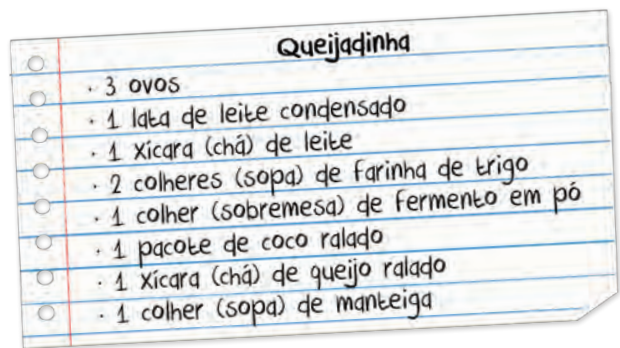


b) Vamos imaginar que toda a água do mundo coubesse em uma garrafa de 1 litro. Se tirássemos da garrafa toda a água salgada, a porção de água doce seria suficiente apenas para encher um copinho de café. Porém, a porção de água doce disponível para consumo direto não representa mais do que algumas gotinhas retiradas desse copinho. Pouco, não é? Por esse motivo, é importante adotarmos certas atitudes como fechar o registro de água enquanto nos ensaboamos durante o banho. Você conhece outras atitudes?

Troque ideias com seus colegas e façam uma lista de outras atitudes que podemos tomar para fazer um uso racional da água.



8 Márcia adora doces. Sabendo disso, uma amiga lhe passou uma receita de queijadinha cujos ingredientes necessários são:



a) Com base nessa receita, Márcia quer fazer uma quantidade maior de queijadinhas. Para isso, aumentará proporcionalmente a quantidade de todos os ingredientes da receita. Quantos ovos serão necessários se ela utilizar 4 colheres de sopa de farinha? E quantas colheres de sopa de farinha serão necessárias se ela utilizar 9 ovos? **6; 6**

b) Se Márcia quiser fazer quatro dessas receitas, quantas colheres de sopa de farinha serão necessárias? E quantos ovos? **8; 12**

9 O perímetro de um triângulo (soma das medidas dos lados) cujos lados, em centímetro, medem x , y e z é 18 cm.

a) Sabendo que $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, calcule x , y e z . **$x = 4,5$ cm, $y = 6$ cm e $z = 7,5$ cm**

b) Usando régua e compasso, desenhe dois triângulos. **construção de figura**

• Triângulo ABC com $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm.

• Triângulo $A'B'C'$ com $A'B' = x$ cm, $B'C' = y$ cm, $A'C' = z$ cm.

c) Usando um transferidor, meça os ângulos dos triângulos do item b. O que acontece com as medidas de \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , respectivamente, em relação às medidas de \hat{A}' , \hat{B}' e \hat{C}' ?

As medidas são respectivamente iguais.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...



Reúna-se com um colega e troquem ideias sobre as questões a seguir.

a) O perímetro de um quadrado e a medida de seus lados são grandezas diretamente proporcionais? Justifiquem a resposta. **Sim, pois, ao duplicar (triplicar, e assim sucessivamente) a medida do lado, o perímetro também duplica (triplica etc.).**

b) A área de um quadrado e a medida de seus lados são grandezas diretamente proporcionais? Justifiquem a resposta. **Não, pois a área e a medida do lado não se alteram na mesma razão.**

c) E a medida da aresta de um cubo é proporcional a seu volume? Expliquem a resposta. **Não, pois o volume e a medida da aresta não se alteram na mesma razão.**

3 Grandezas inversamente proporcionais

Antes de estudarmos as grandezas inversamente proporcionais, veremos o conceito de **razões inversas**.

Ao trabalhar com números racionais, você já se deparou com números inversos. Por exemplo, os números $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$ são inversos, assim como os números 3 e $\frac{1}{3}$.

Vamos considerar as razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$. Note que o produto delas é igual a 1, pois:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$$

Nessas condições, dizemos que as **razões** são **inversas**. Portanto, $\frac{3}{4}$ é a razão inversa de $\frac{4}{3}$, e $\frac{4}{3}$ é a razão inversa de $\frac{3}{4}$.

Veja outros exemplos.

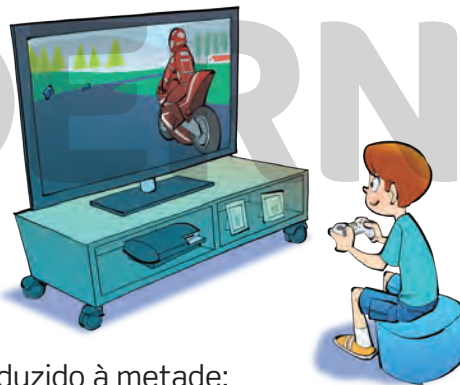
a) A razão inversa de $\frac{5}{6}$ é $\frac{6}{5}$, e a razão inversa de $\frac{6}{5}$ é $\frac{5}{6}$.

b) A razão inversa de $\frac{1}{7}$ é $\frac{7}{1}$, e a razão inversa de $\frac{7}{1}$ é $\frac{1}{7}$.

Agora, observe uma situação que envolve as grandezas **velocidade** e **tempo**.

Fernando tem um jogo de *videogame* que simula uma corrida de motos. Algumas vezes, ele percorreu o mesmo trajeto com velocidades diferentes e anotou o tempo que levou a cada vez.

Velocidade (em km/h)	Tempo (em minuto)
30	12
60	6
90	4
120	3



Examinando o quadro, observamos que:

- duplicando a velocidade da moto, o tempo fica reduzido à metade;
- triplicando a velocidade, o tempo fica reduzido à terça parte, e assim por diante.

Por isso, as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

Veja ainda que, duas a duas, as razões entre os números que indicam a velocidade são iguais ao inverso das razões que indicam o tempo.

$$\frac{30}{60} = \frac{6}{12} \quad \rightarrow \text{inverso da razão } \frac{12}{6}$$

$$\frac{30}{90} = \frac{4}{12} \quad \rightarrow \text{inverso da razão } \frac{12}{4}$$

$$\frac{30}{120} = \frac{3}{12} \quad \rightarrow \text{inverso da razão } \frac{12}{3}$$

$$\frac{60}{90} = \frac{4}{6} \quad \rightarrow \text{inverso da razão } \frac{6}{4}$$

$$\frac{60}{120} = \frac{3}{6} \quad \rightarrow \text{inverso da razão } \frac{6}{3}$$

$$\frac{90}{120} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \text{inverso da razão } \frac{4}{3}$$

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando a razão entre dois valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda.

Note também que a multiplicação dos valores da primeira coluna do quadro pelos valores correspondentes da segunda é igual.

$$30 \cdot 12 = 60 \cdot 6 = 90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

Todos esses produtos são iguais a 360.

Dizemos, então, que os números da sequência 30, 60, 90 e 120 são **inversamente proporcionais** aos números da sequência 12, 6, 4 e 3.

Acompanhe mais alguns exemplos.

a) Cinco máquinas iguais realizam um trabalho em 36 dias. De acordo com essas informações, podemos supor que:

- o dobro do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na metade do tempo, isto é, em 18 dias;
- o triplo do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na terça parte do tempo, isto é, em 12 dias.

Então, concluímos que as grandezas **quantidade de máquinas e tempo** são **inversamente proporcionais**.

b) Vamos determinar x e y de modo que a sequência de números 4, x e 8 seja inversamente proporcional à sequência de números 20, 16 e y .

$$\begin{array}{ccc} 4 & x & 8 \\ 20 & 16 & y \end{array}$$

Para que as duas sequências sejam inversamente proporcionais, os produtos dos números correspondentes devem ser iguais, isto é:

$$4 \cdot 20 = x \cdot 16 = 8 \cdot y$$

Assim:

$$x \cdot 16 = 4 \cdot 20$$

$$16x = 80$$

$$\frac{16x}{16} = \frac{80}{16}$$

$$x = 5$$

$$8 \cdot y = 4 \cdot 20$$

$$8y = 80$$

$$\frac{8y}{8} = \frac{80}{8}$$

$$y = 10$$



10 Cinco iogurteiras iguais produzem certa quantidade de iogurte em 28 dias. Nessas condições, responda.

- a) O dobro do número dessas iogurteiras produz essa mesma quantidade de iogurte em quantos dias? **14 dias** 7 dias
- b) O quádruplo do número de iogurteiras realiza esse mesmo trabalho em quantos dias?
- c) As grandezas **quantidade de iogurteiras** e **tempo** são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?
inversamente proporcionais

11 Para encher um tanque, usam-se três torneiras iguais. Com apenas uma torneira aberta, enche-se o tanque em 8 horas.

- a) Em quantas horas duas torneiras abertas encheriam o tanque? **4 horas**
- b) Em quantos minutos as três torneiras abertas encheriam o tanque? **160 minutos**
- c) Quantas torneiras iguais a essa seriam necessárias para encher o tanque em 1 hora?
8 torneiras

12 Os dados do quadro a seguir referem-se ao número de máquinas (iguais) e ao tempo necessário para a produção de 36 litros de sorvete.

Número de máquinas	1	2	b	6
Tempo (em minuto)	60	a	15	c

- a) Determine os valores de a , b e c . **$a = 30; b = 4$ e $c = 10$**
- b) Com apenas uma máquina, em quanto tempo seriam produzidos 108 litros de sorvete? **3 horas**
- c) Para produzir 72 litros de sorvete em 30 minutos, seriam necessárias quantas máquinas? **4 máquinas**

13 Divida o número 132:

- a) em três partes iguais; **44**
- b) em partes diretamente proporcionais a 2, 4 e 6; **22, 44 e 66**
- c) em partes inversamente proporcionais a 2, 4 e 6. **72, 36 e 24**

4 Regra de três simples

Os problemas que envolvem duas grandezas direta ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos por meio de um processo prático chamado de **regra de três simples**. Para entender tal processo, considere as situações a seguir.

Situação 1

Um automóvel faz 180 km com 15 l de etanol. Vamos calcular quantos litros de etanol esse automóvel gastaria para percorrer 210 km.



O problema envolve duas grandezas: **distância percorrida** e **consumo de etanol**. As unidades empregadas para medir essas grandezas são, respectivamente, **quilômetro** e **litro**.

Ao indicar por x o número de litros de etanol que serão consumidos, podemos montar o seguinte quadro:

Distância percorrida (em km)	180	210
Consumo de etanol (em litro)	15	x

As grandezas **distância percorrida** e **consumo de etanol** são **diretamente proporcionais**, pois, se a distância percorrida aumenta, o consumo de etanol aumenta proporcionalmente, ou seja, se a distância dobra, triplica..., o consumo de etanol também dobra, triplica... etc.

Logo, a razão entre as distâncias percorridas é igual à razão entre os correspondentes consumos de etanol.

Assim, temos a proporção $\frac{180}{210} = \frac{15}{x}$, que nos leva ao valor de x .

$$180x = 15 \cdot 210$$

$$\frac{180x}{180} = \frac{3.150}{180}$$

$$x = 17,5$$

Portanto, esse automóvel gastaria 17,5 litros de etanol para percorrer 210 km.

Situação 2

Ao viajar de automóvel, à velocidade média de 60 km/h, Vânia leva 4 horas para fazer certo percurso. Certo dia, ela aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h. Vamos calcular o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto.

O problema envolve duas grandezas: **velocidade**, em quilômetro por hora, e **tempo**, em hora. Indicando por x o número de horas, montamos este quadro:

Velocidade média (em km/h)	60	80
Tempo (em hora)	4	x

As grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**, pois, ao se aumentar a velocidade, o tempo de percurso diminui proporcionalmente. Se, por exemplo, a velocidade for duplicada, o tempo de percurso ficará reduzido à metade.

Assim, os produtos dos valores de cada velocidade média e dos tempos de percurso correspondentes são iguais:

$$80x = 60 \cdot 4$$

Resolvendo a equação, obtemos o valor de x :

$$\frac{80x}{80} = \frac{240}{80}$$

$$x = 3$$



Portanto, quando Vânia aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h, o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto foi de 3 horas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 14** Se 9 metros de tecido custam R\$ 117,00, então:
- quanto custam 12,5 m desse tecido? **R\$ 162,50**
 - quantos metros é possível comprar com R\$ 109,20? **8,4 m**
- 15** Uma usina produz 350 litros de álcool com 5 toneladas de cana-de-açúcar.
Para produzir 8.750 litros de álcool, são necessárias quantas toneladas de cana-de-açúcar? **125 toneladas**
- 16** No rio que atravessa certa cidade, foram encontradas 3 toneladas de peixes mortos, em decorrência de um grande vazamento de uma indústria química. A prefeitura da cidade contratou 45 funcionários de uma empresa de limpeza urbana, que, em 4 dias, retiraram do rio todos os peixes mortos.
- Supondo que a prefeitura tivesse contratado mais 15 funcionários, de mesma produtividade, quantos dias seriam necessários para retirar do rio aquela quantidade de peixe? **3 dias**
 - Para evitar desastres ambientais como esse, que atitudes você acha que as empresas podem tomar? **resposta pessoal**
- c)** Pequenas atitudes – como não jogar lixo na rua, separar lixos recicláveis e evitar o uso de automóvel para percorrer pequenas distâncias – podem preservar o meio ambiente. Troque ideias com os colegas e façam uma lista de outras atitudes que acham que podem ser tomadas para ajudar o planeta. **resposta pessoal**



CLAUDIO CHYO

- 17** Uma padaria produz 400 pães com 10 kg de farinha de trigo.
- Quantos pães ela produzirá com 12,5 kg de farinha? **500 pães**
 - Quantos quilogramas de farinha são necessários para a produção de 750 pães? **18,75 kg**
- 18** Para construir uma roda dentada com determinada máquina, perdem-se 30 gramas de material. Depois de 10 dias utilizando essa máquina, que produz 150 rodas dentadas por dia, quantos quilogramas de material serão perdidos? **45 kg**
- 19** Um automóvel faz certo percurso em 4,5 horas com velocidade média de 80 km/h.
- Se a velocidade média fosse 90 km/h, esse percurso seria feito em quanto tempo? **4 horas**
 - Desejando-se fazer esse percurso em 5 horas, qual deve ser a velocidade média do automóvel? **72 km/h**
- 20** Uma torneira fornece 24 litros de água por minuto e enche um tanque em 45 minutos.
- Duas torneiras iguais a essa encheriam o tanque em quantos minutos? **22,5 minutos**
 - Para encher o tanque em 15 minutos, seriam necessárias quantas dessas torneiras? **3 torneiras**
- 21** Em uma cidade, 600 ônibus transportam 240.000 pessoas por dia. Para cortar gastos, a prefeitura propôs retirar 200 ônibus de circulação.
- Supondo que os usuários desses 200 ônibus passem a usar automóveis e que cada automóvel transporte 4 pessoas por dia, quantos automóveis serão necessários? **20.000 automóveis**
 - O que você acha que acontecerá com o trânsito e o meio ambiente da cidade se a prefeitura de fato tomar essa medida? **resposta pessoal**

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Um navio zarpou para uma viagem carregando alimentos suficientes para 30 dias. Entre passageiros e tripulantes, havia 250 pessoas a bordo. Passados 6 dias, o navio atracou em um porto, onde 10 passageiros desembarcaram, desistindo da viagem. Para quantos dias foram suficientes os alimentos restantes? **25 dias**

Construindo gráficos de barras e de colunas

Fred observou o infográfico ao lado e resolveu fazer um gráfico de barras para comparar a população extremamente pobre dos países em destaque. Ele usou os dados em porcentagem.

Para o gráfico não ficar muito grande, Fred estabeleceu 5 cm de comprimento para a barra correspondente à maior porcentagem (Etiópia – 88%). A seguir, ele calculou o comprimento das outras barras por meio da regra de três. Observe dois cálculos que ele fez.

País	Porcentagem (%)	Comprimento da barra (cm)
Etiópia	88	5
Paquistão	46	x

$$\frac{88}{46} = \frac{5}{x} \Rightarrow 88x = 230 \Rightarrow x = \frac{230}{88} \approx 2,6$$

País	Porcentagem (%)	Comprimento da barra (cm)
Etiópia	88	5
Bangladesh	49	y

$$\frac{88}{49} = \frac{5}{y} \Rightarrow 88y = 245 \Rightarrow y = \frac{245}{88} \approx 2,8$$

Assim, as barras referentes ao Paquistão e a Bangladesh ficaram com 2,6 cm e 2,8 cm, respectivamente.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Calcule o comprimento das barras referentes aos outros países destacados no infográfico e faça o mesmo gráfico que Fred fez. Brasil: 0,2 cm; China: 0,3 cm; Índia: 3,1 cm; Indonésia: 0,3 cm; Quênia: 2,7 cm.
- 2 Elabore um gráfico de colunas comparando a população extremamente pobre, em milhões, desses países. (*Sugestão:* deixe a coluna maior com 10 cm de altura.)
- 3 Comparando os países destacados no infográfico, responda: o país com a maior porcentagem de extremamente pobres é o que tem o maior número de pessoas extremamente pobres? Escreva uma explicação para isso. construção de gráfico

Não, pois a população do Quênia é pequena em relação a outros países destacados.

A POBREZA NO MUNDO

Em 2013, o mundo tinha cerca de 1,5 bilhão de pessoas consideradas extremamente pobres. Veja o mapa que mostra o IDH (Índice de Desenvolvimento Humano) e a situação de alguns países nesse ano.

País	IDH
Brasil	0,744
Paquistão	0,537
Bangladesh	0,558
China	0,719
Etiópia	0,435
Índia	0,586
Indonésia	0,684
Quênia	0,535

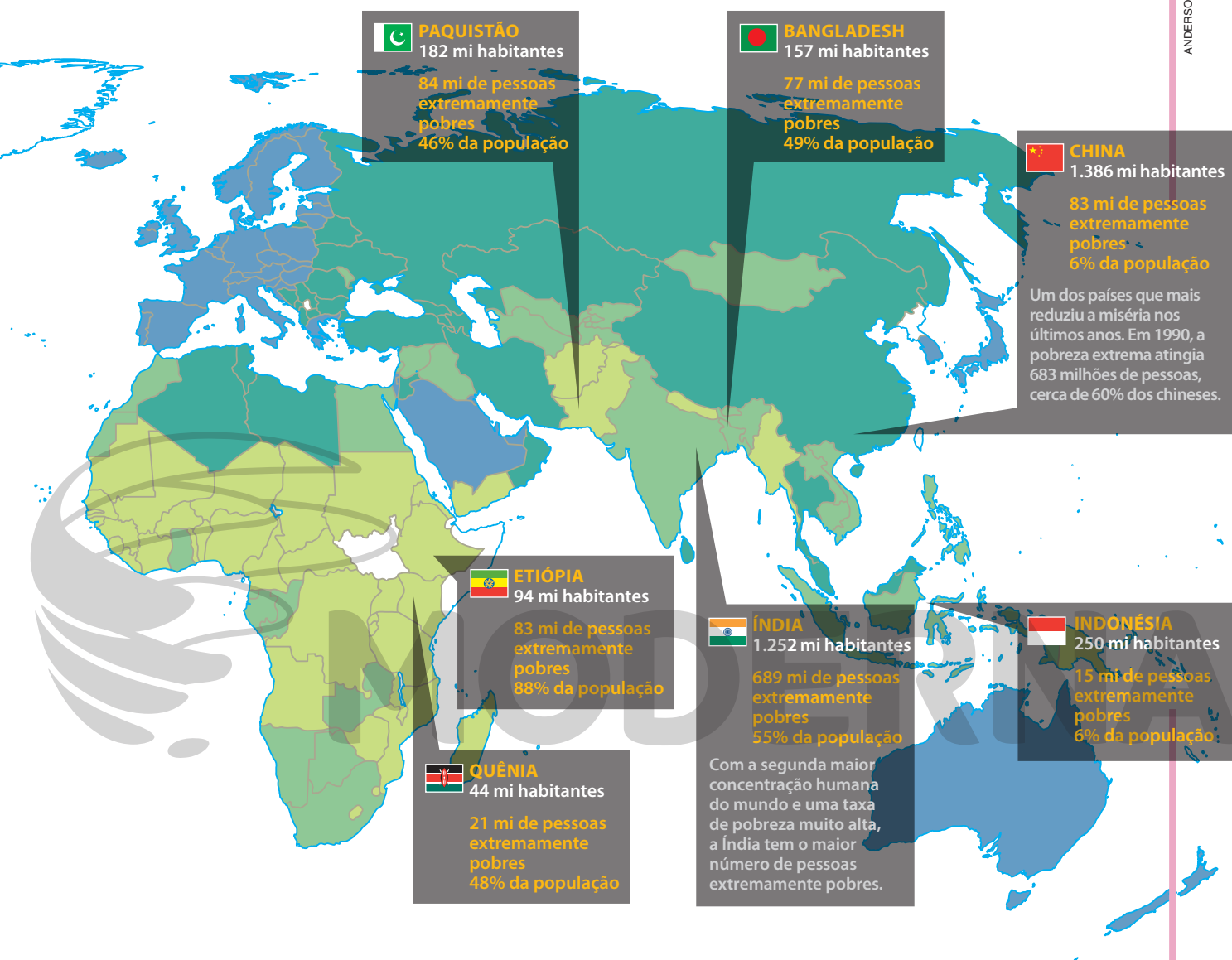


BRASIL
200 mi habitantes

6 mi de pessoas extremamente pobres
3% da população

Um quarto dos brasileiros sobrevivia com até US\$ 1,25 por dia em 1990. O país melhorou muito desde então, mas ainda é o nono na classificação dos países com população vivendo na miséria.

Dados obtidos em: <www.data.worldbank.org> e <hdr.undp.org>. Acesso em: 6 mar. 2015.



Países com enormes taxas de pobreza não aparecem entre os que têm mais miseráveis.

IDH	
■ Muito alto	■ Médio
■ Alto	■ Baixo

Linha de pobreza extrema internacional

Uma forma simplificada de estimar quantas pessoas extremamente pobres existem no mundo é contar o número de pessoas que vivem com renda menor que US\$ 1,25 por dia (dólar norte-americano). Em 2013, isso valia cerca de R\$ 2,31 por dia no Brasil.



1. b) Exemplo de resposta: Inicialmente, Miriam associou o total de lugares disponíveis a 100%. Depois, ela calculou o número de lugares correspondente a 60%, dividindo o percentual e o número de lugares por 10 e, em seguida, multiplicando os resultados obtidos por 6. Como o percentual pedido é 62%, Miriam teve de calcular o número correspondente a 2%. Ela optou por, primeiro, descobrir o número de lugares correspondente a 1% (dividindo

PARA SABER MAIS



por 100 os valores da primeira coluna do quadro) e, em seguida, o número correspondente a 2% (multiplicando os resultados obtidos por 2). Para finalizar seus cálculos, Miriam somou os números correspondentes a 60% e 2%.

Resolvendo problemas com o auxílio de um quadro

Juca resolveu o problema a seguir usando um quadro para organizar seus cálculos.

Em um supermercado que vende por atacado, 20 kg de cebola custam R\$ 32,00. Calcule o preço de 1 kg de cebola.

Como as grandezas massa e preço são diretamente proporcionais, se eu dividir a massa por 2, também tenho que dividir o preço por 2...

... E usando esse mesmo raciocínio, descobro o preço de 1 kg, dividindo os resultados obtidos por 10.



Massa (em kg)	20	10	1
Preço (em real)	32	16	1,6

: 2 : 10
: 2 : 10

Assim, Juca descobriu que o preço de 1 kg de cebola é R\$ 1,60.

Miriam também fez um quadro para organizar seus cálculos na resolução de um problema.

Em um estádio de futebol existem 8.600 lugares disponíveis. Em certo dia de jogo, 62% dos lugares estavam ocupados. Quantos lugares estavam ocupados?

Percentual	100	10	60	1	2	60 + 2 = 62
Número de lugares	8.600	860	5.160	86	172	5.160 + 172 = 5.332

: 10 × 6
: 100 × 2

Miriam descobriu que 5.332 lugares estavam ocupados.

1. a)

Massa (em kg)	20	5	1
Preço (em real)	32	8	1,6

: 4 : 5
: 4 : 5

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Reúna-se com um colega para responder às questões.
 - Como ficaria o quadro de Juca se ele inicialmente dividisse a massa e o preço por 4?
 - Qual foi o raciocínio de Miriam para elaborar o quadro e obter o número de lugares ocupados no estádio?
- Faça como Juca e Miriam para resolver os problemas a seguir.
 - Se 18 kg de banana custam R\$ 45,00, calcule o preço de 1 kg de banana. **R\$ 2,50**
 - Um automóvel gasta 4 litros de gasolina para percorrer 60 km. Calcule quantos litros de gasolina ele gastará ao percorrer 150 km. **10 litros**
 - Em um estádio de futebol existem 24.500 lugares. Em um dia de jogo, 48% dos lugares estavam ocupados. Calcule a quantidade de lugares ocupados desse estádio. **11.760**
 - Um relógio que custava R\$ 550,00 em determinada loja estava na promoção com um desconto de 38%. Calcule o valor do desconto. **R\$ 209,00**

LEONARDO DA CONCEIÇÃO

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5 Regra de três composta

O processo usado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, é chamado de **regra de três composta**.

Considere as situações a seguir, que envolvem três grandezas.

Situação 1

Uma empresa fornece café da manhã para 80 funcionários, gerando-lhe um custo de R\$ 5.000,00 para um período de 120 dias. Vamos calcular quanto essa empresa gastaria para fornecer o mesmo café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias.

Vamos chamar de x o preço em reais desse café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias.



LEONARDO DA CONCEIÇÃO

Número de funcionários	Tempo (em dias)	Preço (em reais)
80	120	5.000
150	100	x

Fixando o número de dias em 120, temos **número de funcionários** e **preço** como grandezas. Assim, é possível determinar o preço em reais que essa empresa pagaria para fornecer o café da manhã para 150 funcionários durante 120 dias. Vamos indicar esse preço por z .

Número de funcionários	Tempo (em dias)	Preço (em reais)
80	120	5.000
150	120	z

As grandezas **número de funcionários** e **preço** são diretamente proporcionais. Então, podemos escrever a proporção abaixo e determinar o valor de z .

$$\frac{80}{150} = \frac{5.000}{z}$$

$$80z = 150 \cdot 5.000$$

$$\frac{80z}{80} = \frac{750.000}{80}$$

$$z = 9.375$$

Agora, fixando o número de funcionários em 150, temos as grandezas **tempo** e **preço**. Então, vamos encontrar o valor de x , que é o preço do café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias.

Número de funcionários	Tempo (em dias)	Preço (em reais)
150	120	9.375
150	100	x

As grandezas **tempo** e **preço** são diretamente proporcionais. Então, podemos escrever a proporção abaixo e determinar o valor de x.

$$\frac{120}{100} = \frac{9.375}{x}$$

$$120x = 100 \cdot 9.375$$

$$\frac{120x}{120} = \frac{937.500}{120}$$

$$x = 7.812,5$$

Portanto, o preço que a empresa pagaria para fornecer o café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias é R\$ 7.812,50.

Observe que a grandeza **preço** é diretamente proporcional à grandeza **tempo** e à grandeza **número de funcionários**. Essa relação conduz a outra forma de resolução desse problema, por meio da aplicação da seguinte propriedade:

Se uma grandeza é proporcional a outras grandezas, então ela é proporcional ao produto dessas outras grandezas.

Observe o quadro abaixo com os dados iniciais do problema.

Número de funcionários	Tempo (em dias)	Preço (em reais)
80	120	5.000
150	100	x

Vamos resolver esse problema aplicando a propriedade apresentada acima.

$$\frac{5.000}{x} = \frac{80}{150} \cdot \frac{120}{100}$$

razão entre o número de funcionários

razão entre os preços

razão entre o número de dias

$$\frac{5.000}{x} = \frac{9.600}{15.000}$$

$$9.600x = 5.000 \cdot 15.000$$

$$\frac{9.600x}{9.600} = \frac{75.000.000}{9.600}$$

$$x = 7.812,5$$



Situação 2

Em uma indústria, 5 máquinas iguais produzem 600 peças em 5 dias.

Vamos calcular quantas dessas máquinas produziriam 720 peças em 3 dias.



Vamos chamar de x o número de máquinas que produziriam 720 peças em 3 dias.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dias)
5	600	5
x	720	3

Fixando o número de dias em 5, temos as grandezas **número de máquinas** e **número de peças**. Então, vamos determinar o número de máquinas que produziriam 720 peças em 5 dias, indicando-o por z .

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dias)
5	600	5
z	720	5

As grandezas **número de máquinas** e **número de peças** são diretamente proporcionais. Então, podemos escrever a proporção abaixo e determinar o valor de z .

$$\frac{5}{z} = \frac{600}{720}$$
$$600z = 5 \cdot 720$$
$$\frac{600z}{600} = \frac{3.600}{600}$$
$$z = 6$$

Fixando o número de peças em 720, vamos agora trabalhar com as grandezas **número de máquinas** e **tempo**. Então, encontramos o valor de x , que é o número de máquinas que produziriam 720 peças em 3 dias.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dias)
6	720	5
x	720	3

As grandezas **número de máquinas** e **tempo** são inversamente proporcionais. Então, a razão entre o número de máquinas é igual ao inverso da razão entre o número de dias.

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$$
$$3x = 30$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{30}{3}$$
$$x = 10$$

Portanto, o número de máquinas que produziriam 720 peças em 3 dias é 10.

Vamos resolver novamente esse problema aplicando a propriedade estudada.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dias)
5	600	5
x	720	3

As grandezas **número de máquinas** e **número de peças** são diretamente proporcionais. No entanto, as grandezas **número de máquinas** e **tempo** são inversamente proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{5}{x} = \frac{600}{720} \cdot \frac{3}{5}$$

↑ razão entre o número de peças

↑ razão entre o número de máquinas

↑ razão inversa entre o número de dias

$$\frac{5}{x} = \frac{1.800}{3.600}$$

$$1.800x = 5 \cdot 3.600$$

$$\frac{1.800x}{1.800} = \frac{18.000}{1.800}$$

$$x = 10$$



LEONARDO DA CONCEIÇÃO

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Em um restaurante, 150 fregueses consomem 3.000 esfirras em 5 dias. Calcule quantas esfirras 200 fregueses vão consumir em 30 dias, admitindo que todos esses fregueses tenham hábitos iguais. **24.000 esfirras**

23 Toda semana, os veículos de uma empresa transportam para o aeroporto da cidade uma carga composta de pequenos volumes. Três vans iguais precisam fazer, cada uma delas, duas viagens ao dia, durante quatro dias, para que esse trabalho seja realizado. Recentemente, essa empresa adquiriu mais uma van, idêntica às outras três, para auxiliar nesse serviço. Sabendo que, atualmente, cada uma das vans faz três viagens ao dia, calcule em quantos dias elas realizam todo o transporte. **2 dias**

24 Uma gráfica tem 5 máquinas iguais que imprimem 36.000 panfletos em duas horas. Considerando que duas dessas máquinas não estejam funcionando, calcule em quanto tempo as restantes imprimiriam 27.000 exemplares do mesmo panfleto. **2 h 30 min**



EDSON GRANDISOLIPULSAR IMAGENS

Lembre-se:
Não escreva no livro!

25 Uma jovem percorreu 320 km em 10 dias, andando, a pé, 8 horas por dia. Quantos quilômetros ela poderia percorrer em 8 dias, na mesma velocidade, se andasse 12 horas por dia? **384 km**

26 Nove amigos foram acampar por 6 dias. Para isso, levaram alimento suficiente, calculando 4 refeições diárias. Se chegassem mais 3 amigos e o grupo fizesse 3 refeições diárias, a quantidade de alimento que levaram inicialmente seria suficiente para quanto tempo? **6 dias**



LEONARDO DA CONCEIÇÃO

27 Se 4 tratores iguais realizam um serviço em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia, calcule em quantos dias esse serviço seria realizado com 2 tratores trabalhando 10 horas por dia. **16 dias**



OLLY/SHUTTERSTOCK

28 Em 4 horas, 9 pessoas colhem uma quantidade de laranjas que preenche um total de 360 caixas. Quantas pessoas colhem a quantidade necessária para preencher 510 caixas em 3 horas? **17 pessoas**

29 Uma empresa foi contratada para fornecer refeições a 72 funcionários, durante 60 dias, por R\$ 13.824,00. Vinte dias depois, foram contratados mais 8 funcionários. Qual é o valor do novo contrato? **R\$ 14.848,00**

6 Porcentagem

Já vimos que a razão $\frac{30}{100}$ pode ser representada na forma percentual, ou seja, $\frac{30}{100} = 30\%$.

Agora, vamos ver diferentes maneiras de resolver problemas que envolvam porcentagens. Observe algumas situações a seguir.

Situação 1

Uma saca de arroz integral, após o processo de beneficiamento (retirada da casca e do farelo), sofreu perda de 25% da massa inicial. Se a saca de arroz contém 60 kg, quantos quilogramas foram perdidos no beneficiamento dessa saca?

Esse problema pode ser resolvido de vários modos.

1º modo:

Precisamos calcular 25% de 60. Como $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, temos:

$$25\% \text{ de } 60 = \frac{1}{4} \text{ de } 60 = \frac{1}{4} \cdot 60 = \frac{60}{4} = 15$$

Note que calcular 25% de 60 equivale a dividir 60 por 4.

2º modo:

Como $25\% = \frac{25}{100} = 0,25$, temos:

$$25\% \text{ de } 60 = 0,25 \cdot 60 = 15$$

3º modo:

Como 100% de 60 é 60, indicando 25% de 60 por x , podemos resolver o problema montando uma proporção. Veja.

$$\frac{100}{25} = \frac{60}{x}$$

$$100 \cdot x = 25 \cdot 60$$

$$100x = 1.500$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{1.500}{100}$$

$$x = 15$$

4º modo:

Usando uma calculadora simples para determinar 25% de 60, procedemos da seguinte maneira:



Logo, foram perdidos 15 kg de arroz no beneficiamento.

OBSERVAÇÃO

► O método empregado no 1º modo de resolução (na página anterior) é muito utilizado no cálculo mental de algumas porcentagens. Veja alguns exemplos.

a) $1\% \text{ de } 400 = \frac{1}{100} \cdot 400 = \frac{400}{100} = 4$

Calcular 1% de 400 equivale a dividir 400 por 100.

b) $10\% \text{ de } 400 = \frac{10}{100} \cdot 400 = \frac{1}{10} \cdot 400 = \frac{400}{10} = 40$

Calcular 10% de 400 equivale a dividir 400 por 10.

c) $20\% \text{ de } 400 = \frac{20}{100} \cdot 400 = \frac{1}{5} \cdot 400 = \frac{400}{5} = 80$

Calcular 20% de 400 equivale a dividir 400 por 5.

d) $50\% \text{ de } 400 = \frac{50}{100} \cdot 400 = \frac{1}{2} \cdot 400 = \frac{400}{2} = 200$

Calcular 50% de 400 equivale a dividir 400 por 2.



Situação 2

Na escola Aprender, 882 alunos estão matriculados no período da manhã. Isso corresponde a 63% do total de alunos da escola. Quantos alunos estudam nessa escola?

Esse problema também pode ser resolvido de diferentes modos.

1º modo:

Representando o número de alunos da escola Aprender por x , temos:

$$63\% \text{ de } x = 882$$

$$\frac{63}{100} \cdot x = 882$$

$$\frac{63x}{100} = 882$$

$$63x = 882 \cdot 100$$

$$\frac{63x}{63} = \frac{88.200}{63}$$

$$x = 1.400$$



LEONARDO DA CONCEIÇÃO

2º modo:

Como x representa 100% dos alunos, podemos resolver o problema montando uma proporção.

$$\frac{882}{x} = \frac{63}{100}$$

$$63x = 882 \cdot 100$$

$$\frac{63x}{63} = \frac{88.200}{63}$$

$$x = 1.400$$

Portanto, na escola Aprender estudam 1.400 alunos.

Situação 3

Uma prancha de surfe é vendida nas seguintes condições:

À vista: R\$ 360,00

Pagamento em 30 dias: R\$ 388,80

Qual é a taxa de porcentagem (ou quantos por cento) cobrada sobre o preço à vista na compra para pagamento em 30 dias?

Esse problema também pode ser resolvido de diferentes modos.

1º modo:

Precisamos calcular a diferença entre o preço a prazo e o preço à vista para encontrar a quantia correspondente à porcentagem procurada.

$$388,80 - 360,00 = 28,80$$

ILUSTRAÇÕES:
JOSÉ LUIS JUHAS

Indicando a taxa de porcentagem por $x\%$, temos:

$$\begin{aligned} x\% \text{ de } 360 &= 28,80 \\ \frac{x}{100} \cdot 360 &= 28,80 \\ 360 \cdot x &= 28,80 \cdot 100 \\ 360x &= 2.880 \\ \frac{360x}{360} &= \frac{2.880}{360} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

2º modo:

Podemos resolver o problema montando uma proporção.

$$\begin{aligned} \frac{360}{28,80} &= \frac{100}{x} \\ 360 \cdot x &= 28,80 \cdot 100 \\ 360x &= 2.880 \\ \frac{360x}{360} &= \frac{2.880}{360} \\ x &= 8 \end{aligned}$$



CLAUDIO CHYO

Portanto, a taxa de porcentagem cobrada sobre o preço à vista é 8%.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

30 Calcule mentalmente.

- a)** 10% de 850 **85** **e)** 100% de 125 **125**
b) 20% de 500 **100** **f)** 25% de 200 **50**
c) 50% de 75 **37,5** **g)** 30% de 120 **36**
d) 1% de 520 **5,2** **h)** 15% de 80 **12**

31 Responda.

- a)** 40 é quantos por cento de 100? **40%**
b) 5 é quantos por cento de 50? **10%**
c) 2,5 é quantos por cento de 5? **50%**
d) 10 é quantos por cento de 40? **25%**
e) 10 é quantos por cento de 80? **12,5%**

32 Ao comprar uma bicicleta no valor de R\$ 245,00, obtive um desconto de 10% por ter pago à vista.

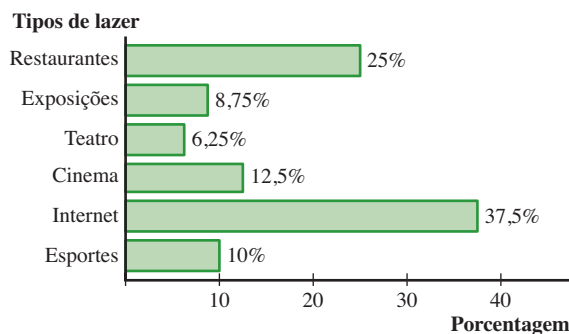
- a)** Qual foi o valor do desconto que obtive? **R\$ 24,50**
b) Quanto paguei pela bicicleta? **R\$ 220,50**

33 Eduardo fez uma pesquisa com 960 internautas para saber o que eles mais gostam de fazer no fim de semana. Veja os resultados obtidos.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

33. c) Haveria um empate, pois "restaurante" e "internet" representariam, cada um, 37,5% dos internautas pesquisados.

O que os internautas mais gostam de fazer no fim de semana



Dados obtidos por Eduardo.

- a)** O que os internautas mais gostam de fazer no fim de semana? **Navegar na internet.**
b) Dos internautas pesquisados, quantos gostam de ir ao cinema no fim de semana? **120 internautas**
c) Se os internautas que escolheram cinema tivessem escolhido restaurante, o que teria acontecido em relação à opção "internet"?

NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

34 Na casa de Pedro, eram gastos, em média, 960 quilowatts-hora de energia elétrica por mês. Com a mudança de alguns hábitos, como a redução no tempo de banho e o uso de lâmpadas fluorescentes, o consumo foi reduzido em 20%.

- a) Essa redução corresponde a quantos quilowatts-hora? **192 quilowatts-hora**
- b) Sabendo que o chuveiro elétrico representa, em média, 30% do consumo de energia elétrica em uma residência, calcule quantos quilowatts-hora são gastos, aproximadamente, na casa de Pedro com o uso de chuveiro. **230,4 quilowatts-hora**

35 A população de uma cidade cresceu de 54.600 para 68.250 habitantes. De quantos por cento foi esse aumento? **25%**

36 Uma loja vende determinado tipo de *tablet* nestas condições:

- em três vezes: R\$ 400,00;
- à vista: desconto de 4% sobre o valor financiado em 3 vezes;
- em 10 pagamentos (1 + 9): acréscimo de 12% sobre o valor financiado em três vezes.

Responda.

- a) Qual é o valor do desconto quando se compra esse aparelho à vista? **R\$ 16,00**

- b) Qual é o valor desse *tablet* à vista? **R\$ 384,00**
- c) Qual é o preço desse *tablet* em 10 prestações? **R\$ 448,00**
- d) Qual é a diferença entre o preço à vista e o preço em 10 pagamentos? **R\$ 64,00**

37 Em uma compra de material escolar, observou-se que na nota fiscal constava o valor do Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), que deve ser pago pela empresa sobre o valor da nota fiscal. Calcule a taxa de porcentagem referente a esse imposto. **18%**

Cálculo do imposto		
Base de cálculo do ICMS	Valor do ICMS	Valor total dos produtos
98,08	17,66	98,08
		Valor total da nota
		98,08

NELSON MATSUDA

38 O abastecimento de água em uma região metropolitana é feito por 8 sistemas que produzem 65 m³ de água por segundo. Um desses sistemas atende 9 milhões de pessoas e produz 33 m³ de água por segundo. Quantos por cento, aproximadamente, esse sistema representa na produção de água? **50,77%**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PARA SABER MAIS



A Matemática na História

A ideia de porcentagem já era conhecida pela civilização romana, no século I a.C., quando o imperador Augusto estabeleceu vários impostos sobre mercadorias vendidas e sobre libertação e venda de escravos. Por exemplo, havia o *centesima rerum venalium* cujo significado é “centésimo das coisas a serem vendidas”, que era uma taxa de $\frac{1}{100}$ sobre o valor das mercadorias vendidas em mercados públicos. Sobre o valor de venda de escravos, cobrava-se $\frac{1}{25}$, e sobre cada escravo libertado, $\frac{1}{20}$ do valor correspondente.

Os romanos não lidavam com o “por cento” como tal, mas o conceito de porcentagem já estava presente, na medida em que eles usavam as frações que eram facilmente redutíveis a centésimos. Por exemplo, para as frações mencionadas anteriormente, temos:

- $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, ou seja, 4 centésimos de imposto sobre a venda de escravos;
- $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$, ou seja, 5 centésimos de imposto.

Na Idade Média, tanto no Oriente quanto no Ocidente, grandes quantidades monetárias tornaram-se mais frequentes, o que levou à necessidade de uma base comum

para a realização dos cálculos. Essa base foi o número 100. Contudo, nesse período, ainda não havia a porcentagem como a conhecemos atualmente. Ela se tornou popular no século XV em situações que envolviam questões comerciais, como cálculo de juros, de lucros e prejuízos, bem como de impostos.

Em manuscritos italianos do fim desse mesmo século, encontramos um número maior de exemplos que envolvem expressões como “X p cento” e “VI p c” para indicar, em linguagem moderna, 10% e 6% respectivamente.

Portanto, quando se iniciou a impressão de aritméticas comerciais, no fim do sécu-

lo XV, a forma de expressar porcentagens já estava estabelecida. Por exemplo, o matemático italiano Giorgio Chiarino utilizou, em 1481, diversas expressões, como “XX. per. c.” para representar 20%, e “VIII in X perceto” para expressar 8 a 10%.

No que diz respeito à nomenclatura, o símbolo %, como o conhecemos hoje, aparece nas suas formas primitivas em manuscritos sobre aritmética comercial, com expressões como “per c^o” ou “p c^o”, uma abreviação para “por cento”. Em meados do século XVII, esse símbolo evoluiu para “per $\frac{0}{0}$ ”, deixando posteriormente de apresentar o “per” e chegando à forma atual: %.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Com base no texto, responda às questões a seguir.

- Qual porcentagem sobre o valor de venda de uma mercadoria um comerciante deveria pagar como imposto ao imperador Augusto? **1%**
- Qual é o significado de “4 centésimos de imposto sobre o valor de venda de escravos”?

resposta possível: Deveriam ser pagos 4% sobre o valor de venda de escravos como imposto.

7 Problemas

Considere as situações a seguir.

Situação 1

A pista de pouso e decolagem de um aeroporto tinha 3.240 m. Seu comprimento foi aumentado em 15%, pois passou a operar voos internacionais, que utilizam aviões maiores. Vamos encontrar o novo comprimento dessa pista.



Os 3.240 m correspondem a 100% do comprimento da pista. Então, o novo comprimento equivale a 115% (100% + 15%).

Calculando 115% de 3.240, encontramos o novo comprimento sem precisar conhecer a quantidade de metros que a pista foi aumentada.

$$115\% \text{ de } 3.240 = \frac{115}{100} \cdot 3.240 = 1,15 \cdot 3.240 = 3.726$$

Portanto, o novo comprimento da pista será 3.726 m.

Situação 2

Uma loja de informática está vendendo um *notebook* ao preço de R\$ 2.550,00. No pagamento à vista, há um desconto de 8%. Vamos encontrar o preço à vista sem conhecer o valor do desconto.

Os R\$ 2.550,00 correspondem a 100% do valor do *notebook*. Então, o preço com desconto equivale a 92% (100% – 8%).

Calculando 92% de R\$ 2.550,00, encontramos o valor do *notebook*.

$$92\% \text{ de } 2.550 = \frac{92}{100} \cdot 2.550 = 0,92 \cdot 2.550 = 2.346$$

Portanto, o preço do *notebook* à vista é R\$ 2.346,00.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

LEONARDO DA CONCEIÇÃO

39 José recebia R\$ 1.200,00 por mês. Ele foi promovido, obtendo um aumento de 9% no salário. Calcule quanto José ganha atualmente.

R\$ 1.308,00

40 Mariana é dona de uma loja. Ela compra os produtos a serem vendidos por um valor e os revende com um acréscimo de 24%. Qual será o preço final de uma mercadoria pela qual ela pagou R\$ 72,50? Se Mariana der 20% de desconto sobre o valor de venda, terá algum lucro sobre o preço de custo? R\$ 89,90; não

41 Um retângulo mede 48 cm de comprimento por 36 cm de largura. Diminuindo 12,5% na medida do comprimento e aumentando 12,5% na medida da largura, obtém-se um novo retângulo. Com base nessas informações, faça o que se pede.

a) Determine as medidas do comprimento e da largura do novo retângulo. 42 cm e 40,5 cm

b) Calcule a área, em centímetro quadrado, do novo retângulo. 1.701 cm²

c) A área do novo retângulo aumentou ou diminuiu em relação à área do primeiro? Em quantos por cento aproximadamente?

Diminuiu aproximadamente 1,57%.

42 Ao final de cada estação do ano, as lojas que comercializam roupas fazem liquidações. Por exemplo, com a chegada do outono, a liquidação de verão procura acabar com os estoques, para receber novas mercadorias. Supondo que um biquíni custava R\$ 45,00 e, com a liquidação, será vendido por R\$ 27,00, qual é a taxa percentual de desconto? 40%

43 Um teclado eletrônico custa R\$ 540,00 e é vendido em 3 prestações iguais. Na compra à vista, há um desconto de 10%. Qual é o valor do teclado à vista? R\$ 486,00



LEONARDO DA CONCEIÇÃO

44 Veja a seguir o anúncio de uma geladeira das lojas *Vende Mais!*



LEONARDO DA CONCEIÇÃO

Um cliente fez um bom negócio e conseguiu um desconto de 7,5% sobre o preço à vista. R\$ 617,90

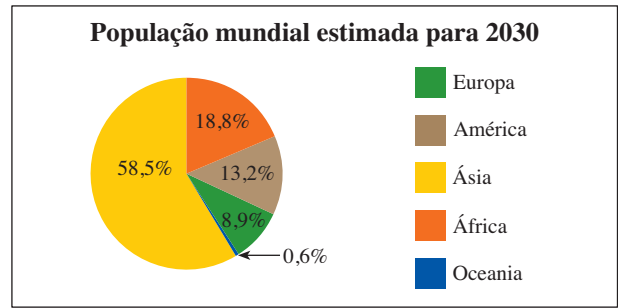
a) Quanto o cliente pagou por essa geladeira?

b) Considerando o valor a prazo, qual seria o desconto que ele obteria? aproximadamente 25,7%

45 Observe o gráfico ao lado.

Sabendo que a população mundial estimada para o ano de 2030 é 8,3 bilhões de habitantes, responda.

- Qual será a população da América nesse ano? **1.095.600.000 de habitantes**
- Supondo que o Brasil tenha 215 milhões de habitantes em 2030, quantos por cento isso representará, aproximadamente, da população do continente americano? **aproximadamente 19,6%**



Disponível em: <<http://esa.un.org>>. Acesso em: 6 mar. 2015.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Na loja de materiais esportivos Araruá, uma bicicleta ergométrica estava à venda por 300 reais. A gerente da loja autorizou o funcionário Fred a aumentar o preço da bicicleta em 20%. Fred, então, marcou o novo preço. A bicicleta não foi vendida depois de um mês. Portanto, a gerente pediu a Fred que reduzisse o preço em 20%. E assim foi feito.



A gerente, ao ver o novo preço, chamou o funcionário.



Quem está com a razão? A gerente ou Fred? Faça as contas e descubra qual dos dois está certo. **Fred está com a razão, pois, ao reduzir 20% de 360 reais (preço com aumento), temos 288 reais, e não 300 reais (preço inicial).**

Construindo um gráfico de setores

Em sua sorveteria, Marcelo deixa um freezer reservado apenas para os sorvetes dietéticos. Como conhece bem seus clientes, ele abastece o freezer com a mesma quantidade de cada um dos sabores existentes, conforme representado na tabela abaixo.

Sorvetes dietéticos da Sorveteria do Marcelo		
Sabor	Quantidade de sorvetes	Porcentagem de sorvetes
Limão	105	35%
Uva	60	20%
Maçã verde	60	20%
Maracujá	45	15%
Abacaxi	30	10%

Dados obtidos por Marcelo.



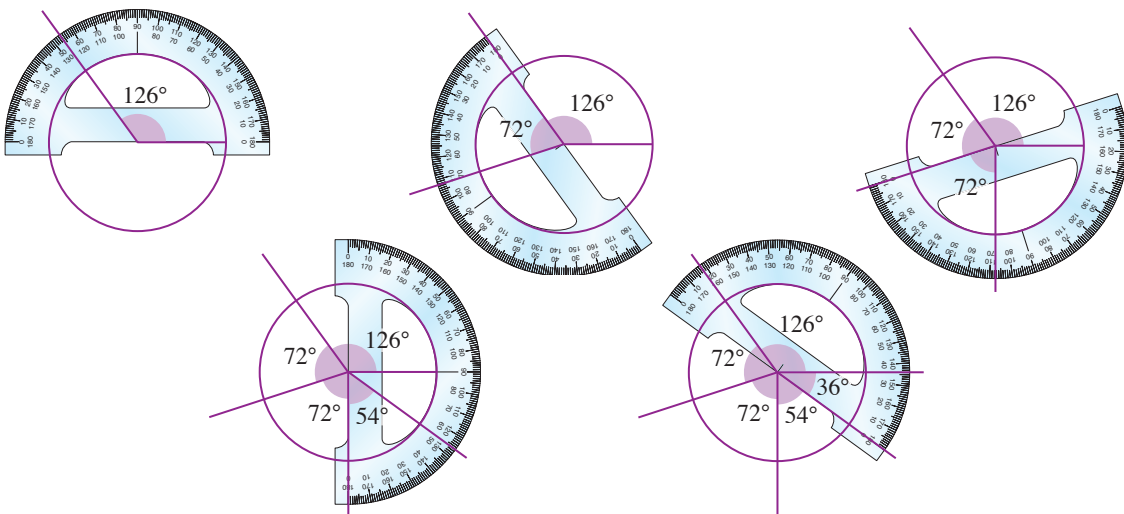
LEONARDO DA CONCEIÇÃO

Com base nesses dados, podemos construir um gráfico de setores, que é formado por um círculo dividido em cinco partes; cada parte é chamada de **setor circular**.

O tamanho dos setores é determinado pelos ângulos centrais, e a medida de cada um é obtida do seguinte modo:

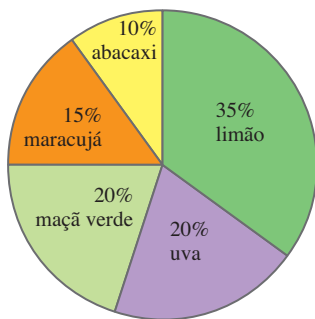
Sabor	Na tabela	No gráfico	Cálculo
Limão	35% do total de sorvetes	medida do ângulo central: 35% de 360°	$\frac{35}{100} \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Uva	20% do total de sorvetes	medida do ângulo central: 20% de 360°	$\frac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ$
Maçã verde	20% do total de sorvetes	medida do ângulo central: 20% de 360°	$\frac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ$
Maracujá	15% do total de sorvetes	medida do ângulo central: 15% de 360°	$\frac{15}{100} \cdot 360^\circ = 54^\circ$
Abacaxi	10% do total de sorvetes	medida do ângulo central: 10% de 360°	$\frac{10}{100} \cdot 360^\circ = 36^\circ$

Após determinar a medida do ângulo correspondente a cada setor, desenha-se uma circunferência e marcam-se, com o auxílio de uma régua e de um transferidor, os ângulos centrais associados a cada sabor de sorvete.

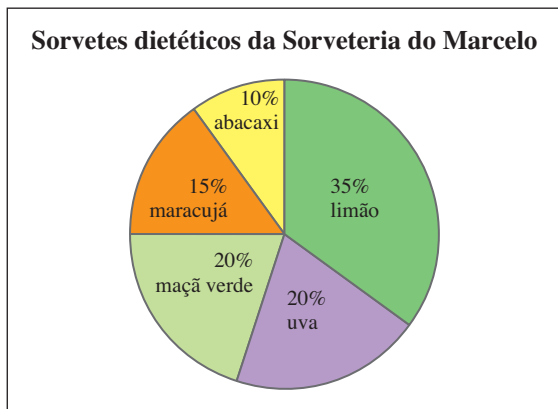


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Em seguida, cada setor é pintado com uma cor diferente. Registram-se, então, o nome e a porcentagem que correspondem a cada um dos setores.



Observe que a medida dos ângulos centrais não aparece no gráfico. Para finalizá-lo, é preciso colocar o título e a fonte.



Ao interpretar a situação apresentada pelo gráfico, percebe-se, por exemplo, que 35% dos sorvetes dietéticos da Sorveteria do Marcelo são de limão e que há uma mesma quantidade de sorvetes de maçã verde e de uva.

Esse tipo de gráfico é o mais indicado quando se quer comparar cada parte com o total ou comparar partes entre si.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Durante uma aula de Matemática no 7º A da Escola São Lucas, a professora Ana fez uma pesquisa para identificar a preferência musical dos alunos dessa classe. Após a pesquisa, Ana organizou os resultados obtidos em uma tabela como esta:

Preferência musical dos alunos do 7º A		
Gênero musical	Quantidade de alunos	Porcentagem de alunos
Rock	16	40%
Pagode	8	20%
Forró	12	30%
Outros	4	10%

Dados obtidos pela professora Ana.

Construa um gráfico de setores para a situação apresentada na tabela. **construção de gráfico**

- 1 Sabendo que 1.200 frangos consomem 90 kg de ração diariamente, calcule quantos quilogramas de ração 2.000 frangos consumirão por dia. **150 kg**



CLAUDIO CHIYO

- 2 Uma embalagem de geleia traz, entre outras, as seguintes informações:

Valor nutricional médio para cada porção de 30 g	
Cálcio	3,8 mg
Ferro	0,26 g

- a) Quantos gramas de ferro há em 165 gramas dessa geleia? **1,43 g**
- b) Para ingerir 9,5 mg de cálcio, é necessário comer quantos gramas dessa geleia? **75 g**
- 3 Em uma exposição de equipamentos, foi apresentada uma máquina que, segundo o fabricante, varre, lava e enxuga uma área de 5.100 m² em 6 horas. Em iguais condições, em quantas horas a máquina executará a mesma operação em uma área de 11.900 m²? **14 horas**
- 4 A reciclagem de uma única latinha de alumínio economiza energia suficiente para manter um televisor ligado por três horas. Quantas latinhas recicladas são necessárias para manter um televisor ligado por um dia inteiro? **8 latinhas**



MARCOS ANDRÉ/OPÇÃO BRASIL

- 5 Trabalhando 8 horas por dia, 3 pedreiros construíram metade de um muro em 15 dias. Como um pedreiro saiu da equipe, os outros passaram a trabalhar 9 horas por dia para terminar o serviço. No total, o muro foi construído em quanto tempo? **35 dias**

- 6 Uma editora consumiu 6.510 kg de papel para produzir 5.000 livros de 280 páginas cada um. Se cada livro fosse reduzido a 240 páginas, quantos quilogramas de papel seriam consumidos na produção de 4.000 desses livros? **4.464 kg**

- 7 (UFU-MG) As idades de um pai e seus dois filhos são diretamente proporcionais aos números 27, 14 e 11, respectivamente. Se a soma de suas idades é de 104 anos, então, as idades de cada um deles, na mesma ordem, são: **alternativa a**
- a) 54 anos, 28 anos e 22 anos.
 b) 50 anos, 28 anos e 26 anos.
 c) 56 anos, 26 anos e 22 anos.
 d) 59 anos, 23 anos e 22 anos.
 e) 55 anos, 27 anos e 22 anos.

- 8 (Unifor-CE) Dividindo-se o número 204 em partes diretamente proporcionais aos números 4 e $\frac{1}{4}$, a menor das partes será: **alternativa b**
- a) 8. c) 34. e) 68.
 b) 12. d) 48.

- 9 Uma rede de televisão fez uma pesquisa entre os habitantes de uma cidade cuja população é 21.000 pessoas. Foram entrevistadas 7.500 pessoas, e descobriu-se que 3.000 delas assistem aos programas dessa rede. Supondo que os resultados da pesquisa sejam proporcionais aos que seriam obtidos se todos os moradores fossem entrevistados, quantas pessoas dessa cidade assistem aos programas dessa rede de televisão? **8.400 pessoas**



JOSÉ LUIS JUHAS

10 A cada mês, para que seja preservada uma área de floresta equivalente a 18 campos de futebol, 1.000.000 de pessoas deveriam usar o verso do papel. Para que a área preservada fosse pelo menos a de um campo de futebol, quantas pessoas, aproximadamente, deveriam usar o verso do papel? **55.556 pessoas**

11 (Fuvest-SP) Um nadador, disputando a prova de 400 metros, nado livre, completou os primeiros 300 metros em 3 minutos e 51 segundos. Se esse nadador mantiver a velocidade média nos últimos 100 metros, completará a prova em:

a) 4 minutos e 51 segundos. **alternativa b**
 b) 5 minutos e 8 segundos.
 c) 5 minutos e 28 segundos.
 d) 5 minutos e 49 segundos.
 e) 6 minutos e 3 segundos.

12 (Unifor-CE) Se 6 impressoras iguais produzem 1.000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziram 2.000 desses panfletos? **alternativa d**

a) 1 hora e 50 minutos
 b) 2 horas
 c) 2 horas e 30 minutos
 d) 2 horas e 40 minutos
 e) 3 horas

13 (Unifor-CE) Um texto ocupa 6 páginas de 45 linhas cada uma, com 80 letras (ou espaços) em cada linha. Para torná-lo mais legível, diminuiu-se para 30 o número de linhas por página e para 40 o número de letras (ou espaços) por linha. Nas novas condições, o número de páginas ocupadas pelo texto será: **alternativa c**

a) 24.
 b) 21.
 c) 18.
 d) 12.
 e) 9.

14 (UFRGS-RS) Se foram empregados 4 kg de fios para tecer 14 m de fazenda com 80 cm de largura, quantos quilogramas serão necessários para produzir 350 m de fazenda com 120 cm de largura? **alternativa b**

a) 130
 b) 150
 c) 160
 d) 180
 e) 250

15 Neste anúncio, o valor economizado está manchado. Considerando uma compra à vista, determine esse valor. **R\$ 443,76**



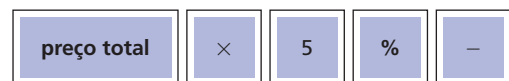
16 Comprei um celular. Não me lembro do preço, mas sei que houve um desconto de R\$ 129,50, que equivale a 7% do valor do aparelho. Quanto paguei pelo celular? **R\$ 1.850,00**

17 (UEMS) Dentro de um recipiente há um líquido que perdeu, por meio de evaporação, 5% de seu volume total, restando 42,75 litros. Qual era o volume total desse líquido? **45 litros**

18 (UFPB) Em uma eleição, um candidato recebeu $\frac{7}{20}$ dos votos dos eleitores. Portanto, o percentual de votos obtidos por esse candidato foi: **alternativa a**

a) 35%.
 b) 20%.
 c) 7%.
 d) 14%.
 e) 27%.

19 (Uerj) Um lojista oferece 5% de desconto ao cliente que pagar suas compras à vista. Para calcular o valor com desconto, o vendedor usa uma máquina calculadora do seguinte modo:



Um outro modo de calcular o valor com desconto seria multiplicar o preço total das mercadorias por: **alternativa c**

a) 0,05. **c) 0,95.**
 b) 0,5. **d) 1,05.**

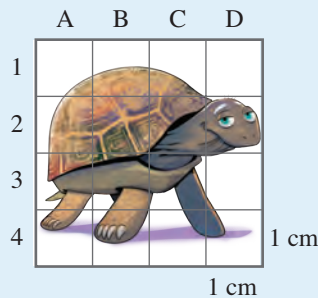
Ampliar e reduzir

Existem algumas técnicas para ampliar e reduzir proporcionalmente um desenho ou uma figura. Um modo simples é dividir o desenho em quadradinhos, como se o tivéssemos colocado em uma malha quadriculada. Depois, basta copiar em outra folha o mesmo número de quadradinhos – em tamanho maior, no caso de ampliação, e em tamanho menor, no caso de redução. Veja um exemplo.

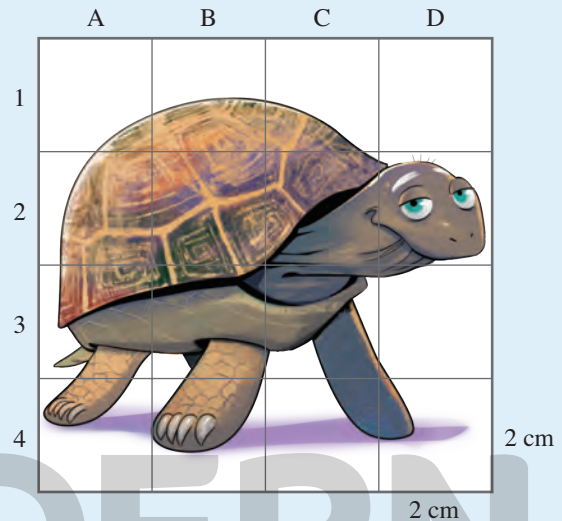
desenho sem malha quadriculada



desenho com malha quadriculada



desenho ampliado em duas vezes

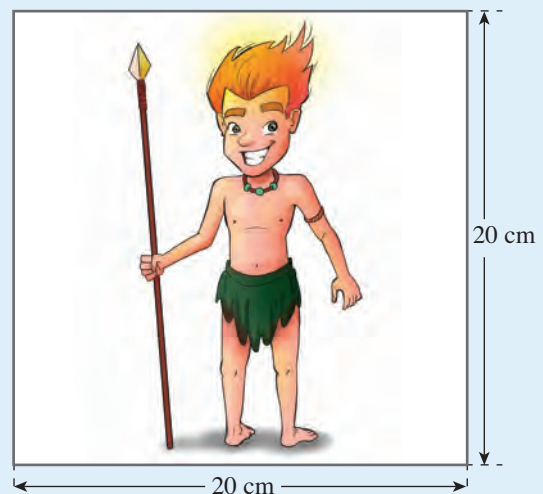


Observe que, para ampliar o desenho em duas vezes, o quadradinho cujo lado mede 1 cm passou a medir, no desenho novo, 2 cm. Note que o número de quadradinhos é o mesmo, o que muda é o tamanho. Por isso, os olhos da tartaruga, que no desenho original estava na linha 2, coluna D, continuam nessa posição no desenho ampliado.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Mariana quer fazer os enfeites de sua própria festa. Para isso, escolheu um tema: o folclore brasileiro. Ela pretende ampliar um desenho do curupira, pintar e colá-lo na parede principal, que ficará atrás da mesa do bolo. A parede em que Mariana vai colar o desenho mede 3 m por 2 m. Sabendo que o desenho tem as medidas indicadas ao lado, qual será o tamanho máximo que a pintura de Mariana deverá ter?
- 2 Se Mariana usar a técnica de ampliação descrita acima, qual deverá ser o tamanho dos quadradinhos que ficarão sobre o desenho a ser ampliado?



1. A pintura de Mariana pode ser ampliada em até 10 vezes. Desse modo, a pintura teria as seguintes medidas: 2 m por 2 m.
 2. resposta possível: Os quadradinhos podem ter as seguintes medidas: 1 cm por 1 cm, 2 cm por 2 cm, 4 cm por 4 cm, 5 cm por 5 cm ou 10 cm por 10 cm, pois são divisores de 20.

1 O conceito de área

Desde tempos muito remotos, o ser humano tem necessidade de medir superfícies. No antigo Egito, por exemplo, a cada ano, os estiradores de cordas, homens incumbidos de demarcar as terras inundadas pelo rio Nilo, determinavam a área de cada propriedade, não apenas para que os proprietários pudessem preservar suas terras, mas também, e principalmente, para que fosse garantido o pagamento dos impostos sobre essas propriedades aos faraós.

Hoje, a necessidade de determinar áreas está presente, por exemplo, na previsão de gastos para azulejar uma cozinha, ou na decisão da área que uma sala deve ter para acomodar certa quantidade de alunos.

No estudo de áreas que faremos a seguir, vamos considerar que a **área** de um polígono é a área da superfície limitada por esse polígono. Por exemplo, a área de um triângulo é a área da região triangular relativa a esse triângulo.

No futebol, para determinar quantos metros quadrados de rede são necessários para cercar as balizas, deve-se calcular a área de dois retângulos e de dois trapézios.

ERIK ISAKSON/RUBBERBALL GETTY IMAGES



As laterais da rede de futebol têm a forma de trapézio, e as partes superior e de trás têm a forma de retângulo.



CLAUDIO CHIYO

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Já estudamos que, para medir uma superfície, é preciso tomar outra superfície como unidade de medida e verificar quantas vezes a superfície escolhida cabe naquela que se deseja medir.

Observe como isso pode ser feito com o **tangram**, quebra-cabeça chinês formado por 7 peças:

- 2 triângulos grandes iguais;
- 1 triângulo médio;
- 2 triângulos pequenos iguais;
- 1 quadrado;
- 1 paralelogramo.

Como se vê na figura ao lado, essas peças se encaixam perfeitamente, formando um quadrado.

Reproduzindo esse tangram em uma folha de cartolina ou papelão e recortando as peças, podemos medir a superfície de cada uma delas, tomando a peça triangular pequena como unidade de medida.

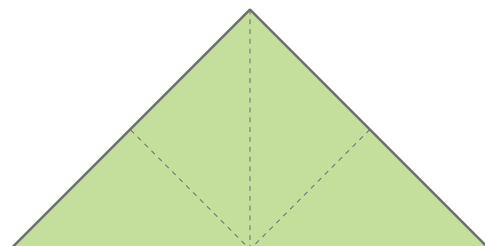
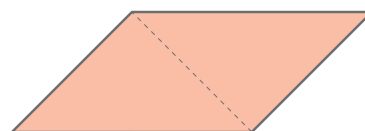
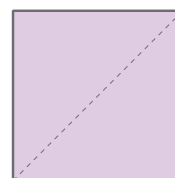
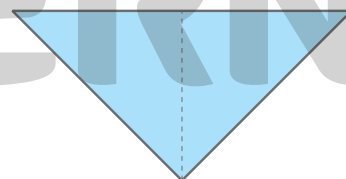
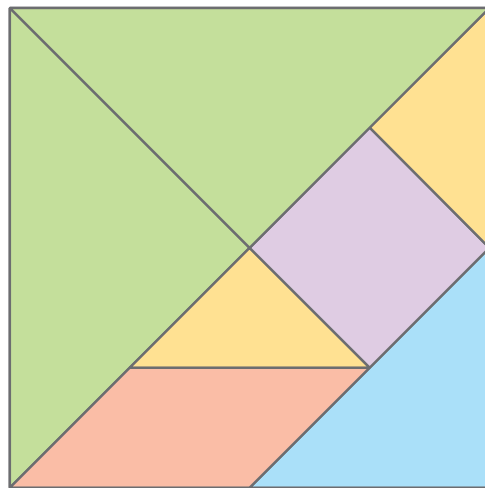
Vamos ver como isso funciona.

Primeiro, indicamos por t a unidade de medida; logo, a área T_p de cada peça triangular pequena será igual a $1 t$.

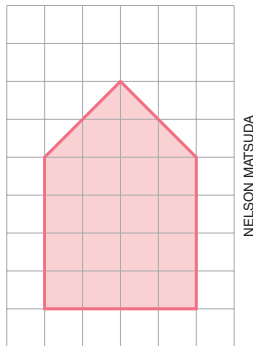
Depois, indicamos por T_g a área de cada triângulo grande, por T_m a área do triângulo médio, por Q a área do quadrado e por P a área do paralelogramo.

Com as peças recortadas, verificamos que:

- O triângulo médio pode ser recoberto por dois triângulos pequenos. Ou seja, $T_m = 2 t$.
- O quadrado pode ser recoberto por dois triângulos pequenos. Ou seja, $Q = 2 t$.
- O paralelogramo pode ser recoberto por dois triângulos pequenos. Ou seja, $P = 2 t$.
- O triângulo grande pode ser recoberto por quatro triângulos pequenos. Ou seja, $T_g = 4 t$.



Podemos medir superfícies utilizando unidades de medida não padronizadas, como o quadradinho de uma malha quadriculada, ou unidades de medida padronizadas, entre as quais o metro quadrado (m^2), seus múltiplos e submúltiplos.



A área da figura rosa é 20 .



Dados obtidos em: <<http://atlasescolar.ibge.gov.br>>
Acesso em: 9 maio 2015.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Reproduza o tangram da página 237 e faça o que se pede.

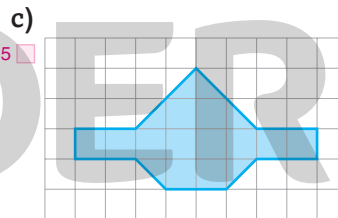
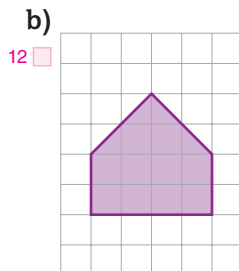
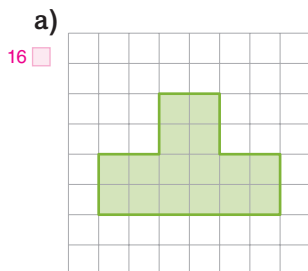
a) Expresse a área do tangram com as seguintes unidades de área:

- o paralelogramo; 8
- um dos triângulos grandes; 4
- o quadrado. 8

Monte uma tabela para apresentar os resultados obtidos. *construção de tabela*

b) Compare a área do quebra-cabeça, calculada com a unidade de área de um dos triângulos pequenos, com a área do quebra-cabeça, calculada com a unidade de área do triângulo médio.

2 Usando como unidade de medida de área, determine a área das figuras.



• Agora, responda: o que acontecerá com a área de cada figura se a unidade de medida for a metade do quadradinho?

Se a unidade de medida for a metade do quadradinho, a área calculada em cada item será o dobro.

3 Com dois triângulos iguais ao da figura 1, posso compor o retângulo da figura 2.

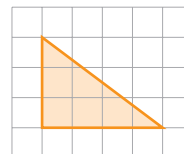


Figura 1

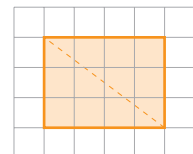


Figura 2

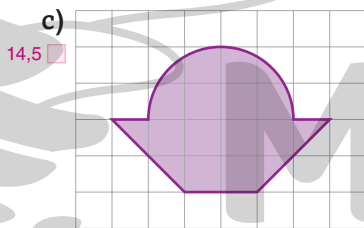
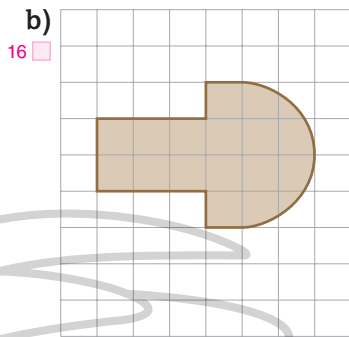
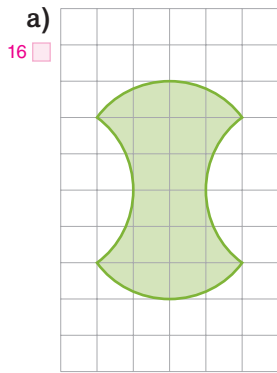
a) Escreva a fração que representa a parte que cada região triangular ocupa em relação à região retangular. $\frac{1}{2}$

b) Se a área da região retangular é $40 m^2$, qual é a área da região triangular? $20 m^2$

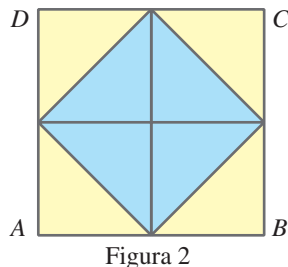
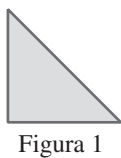
1. b) Nesse caso, considerando que as unidades de medidas são diferentes, vamos comparar apenas os números que representam a área. Quando a unidade usada é o triângulo médio, o número que dá a área é a metade do número que dá a área calculada, tendo por unidade o triângulo pequeno.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Usando \square como unidade de medida de área, determine a área aproximada de cada figura abaixo.

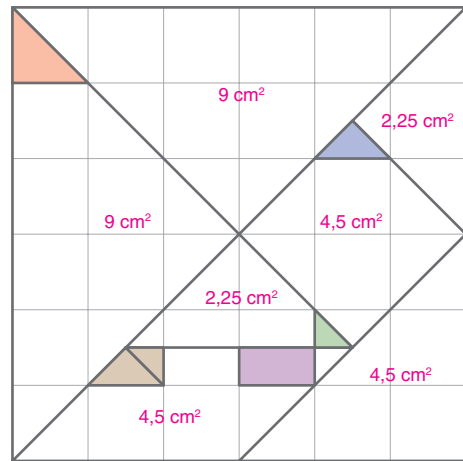


5 Com alguns triângulos iguais ao da figura 1, posso compor vários retângulos como os da figura 2.

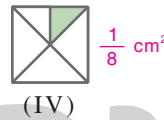
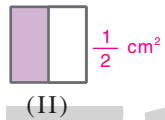
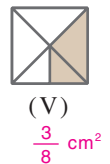
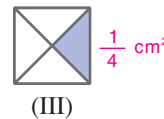
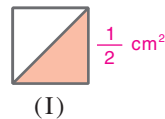


- Escreva a fração que cada região triangular representa em relação à maior região retangular ($ABCD$). $\frac{1}{8}$
- Determine a fração irredutível que a parte azul representa em relação ao interior do retângulo $ABCD$. $\frac{1}{2}$
- Se a área do interior do retângulo $ABCD$ é 120 cm^2 , qual é a área da figura azul? 60 cm^2

6 O tangram a seguir foi construído em um papel quadriculado, no qual cada quadradinho tem 1 cm de lado e área de 1 cm^2 .

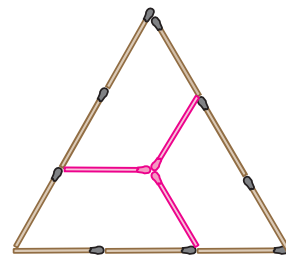


a) Encontre a área de cada parte colorida indicada pelos quadradinhos abaixo.



- Calcule a área de cada peça do tangram em centímetro quadrado.
- Que relações você observa entre as áreas das peças do tangram?
- A área do triângulo grande corresponde a que porcentagem da área do quebra-cabeça montado? 25%
- Se o tangram fosse construído em um papel quadriculado com quadradinhos de 2 cm de lado, a resposta obtida para o item **d** mudaria? Não, pois a proporção entre as figuras é mantida, independentemente do tamanho da malha.

7 Monte a figura abaixo com palitos de fósforo usados, colando-os em uma folha de papel.



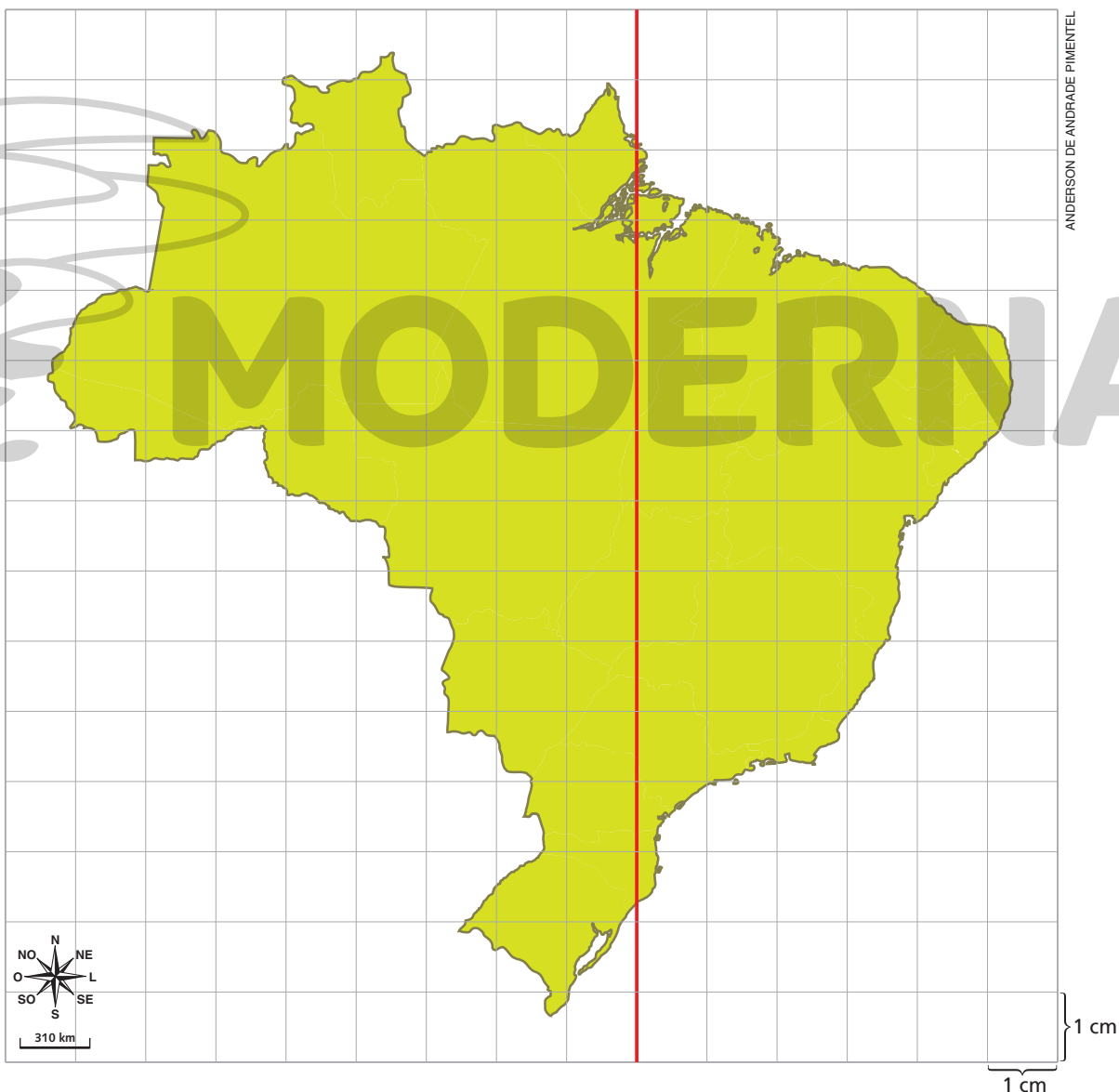
Depois, com outros palitos, divida a região triangular em três partes iguais. Mostre a solução na figura montada por você.

6. c) resposta possível: $T_m = Q = P = \frac{1}{2}T_g, T_p = \frac{1}{2}T_m$

8 A chegada à América da expedição espanhola comandada por Cristóvão Colombo, em 1492, gerou intensa rivalidade entre Portugal e Espanha. Como pioneiros nas viagens pelo oceano Atlântico, os portugueses consideravam-se donos de todas as terras ultramarinas descobertas. Após longas discussões, os governos de Portugal e Espanha assinaram, em 1494, o Tratado de Tordesilhas, que estabelecia uma linha imaginária, a 370 léguas a oeste do arquipélago de Cabo Verde (ilhas situadas na costa noroeste da África, que foram colônias de Portugal até 1975), e dividia as terras entre os dois países. As terras a leste dessa linha seriam de Portugal, e as de oeste pertenceriam à Espanha.

No mapa atual do Brasil, reproduzido a seguir, foi traçada uma linha que corresponde aproximadamente à divisão estabelecida pelo Tratado de Tordesilhas. Calcule quantos centímetros quadrados desse mapa corresponderiam às terras pertencentes a Portugal e quantos seriam pertencentes à Espanha em 1494.

resposta possível: 31 cm² para Portugal e 53 cm² para a Espanha



Dados obtidos em: <<http://atlascolar.ibge.gov.br>>. Acesso em: 9 maio 2015.

Estimativa da quantidade de pessoas que habitaram um sítio arqueológico

Vários indícios são levados em consideração. A primeira coisa a ser feita para saber o tamanho de uma população extinta é determinar o tamanho do sítio arqueológico, ou seja, o espaço onde aquele grupo viveu. E aí já entra a subjetividade.

[...]

O arqueólogo não escava a área toda. Faz-se uma regra de três: se em 5 m² de escavação de um sítio foram encontrados restos de dez esqueletos humanos e aquele sítio tem 500 m², estima-se que ali viveram cerca de mil pessoas.

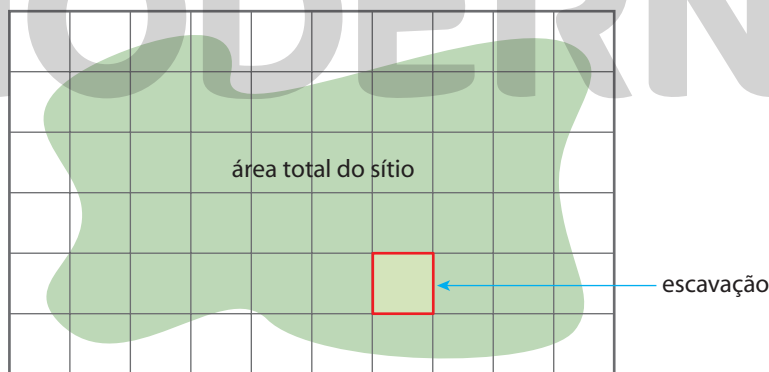
Mas esse cálculo pode não ser muito fiel: o cenário de um sítio arqueológico representa um momento no tempo, e não a ocupação daquele lugar em várias etapas do tempo.

Fonte: Carmem Júlia de Verney. Como calculamos quantas pessoas habitaram um sítio arqueológico? *Galileu*, São Paulo, ano 9, n. 210, p. 32, jan. 2009.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

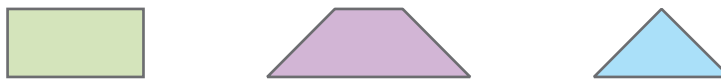
Observe abaixo a esquematização de um sítio arqueológico em que é feita uma escavação.



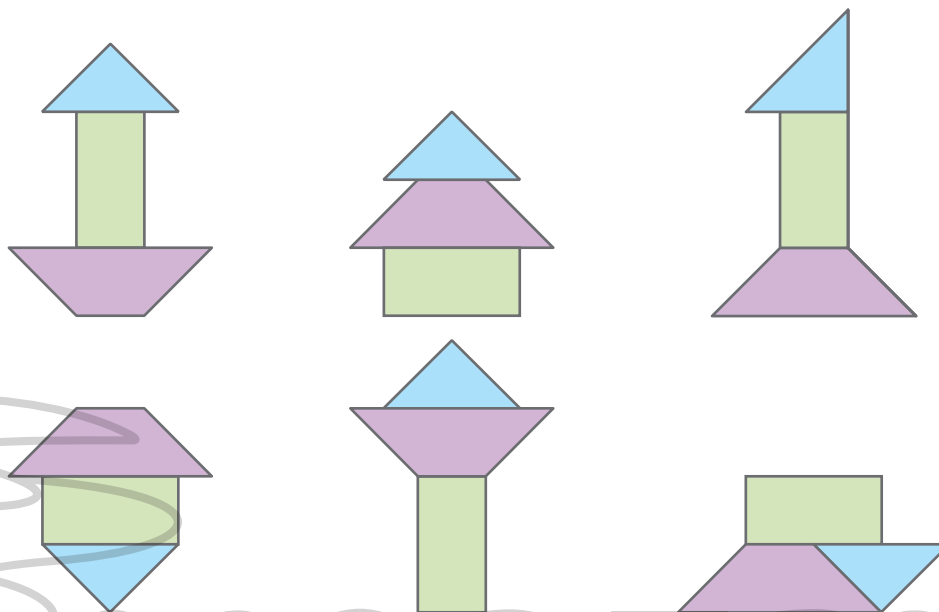
- Pesquise e escreva quais são as atribuições de um arqueólogo, em que lugares trabalha e qual deve ser sua formação educacional. *resposta pessoal*
Ver comentários no Suplemento com orientações para o professor.
- Supondo que a área de escavação do sítio do esquema acima seja 16 m², faça uma estimativa da área total do sítio. *cerca de 600 m²*
- Supondo que na área de escavação do sítio foram encontrados restos de 12 esqueletos, qual seria a população estimada por um arqueólogo? *450 pessoas*
- Em civilizações conhecidas, como a romana, em um sítio com 50 casas, por exemplo, os arqueólogos estimam com mais certeza que cada uma delas foi habitada por 5 pessoas. Considerando essa hipótese, quantas casas teria o sítio do esquema acima? *90 casas*

2 Figuras equivalentes

Considere estas figuras.



Com elas podemos compor diversas outras, como estas:



As figuras formadas, embora tenham formatos diferentes, têm mesma área, já que todas foram compostas pelas mesmas figuras. Em razão disso, dizemos que elas são **figuras equivalentes**.

Duas figuras são **equivalentes** quando têm áreas iguais na mesma unidade.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

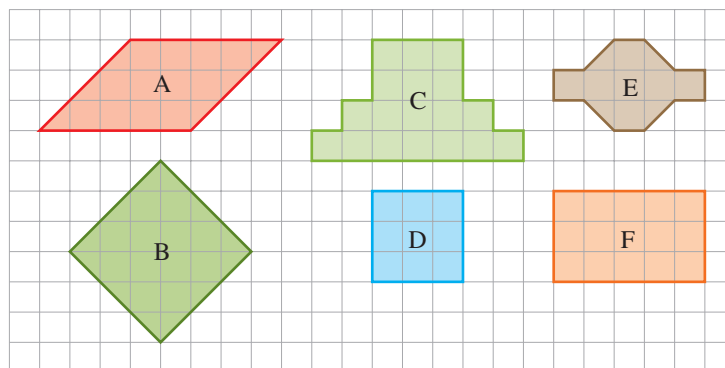
Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Abaixo, há três pares de figuras equivalentes. Quais são eles? Responda em seu caderno.

A e F, B e C, D e E

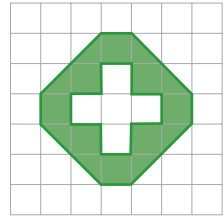


CLAUDIO CHIVO

NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

10 Desenhe em um papel quadriculado três figuras equivalentes à figura pintada de verde a seguir. *construção de figura*



NELSON MATSUDA

11 Entre as figuras abaixo, quais são equivalentes? *todas*

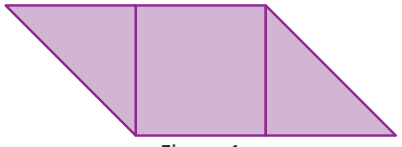


Figura 1

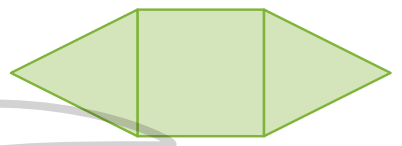


Figura 2

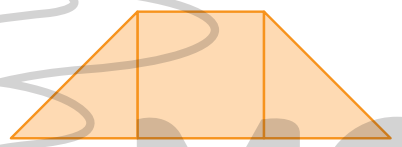
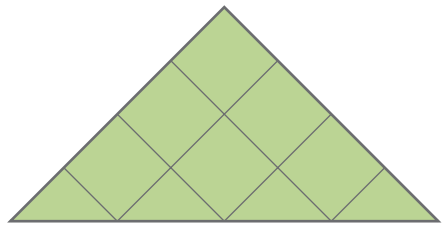


Figura 3

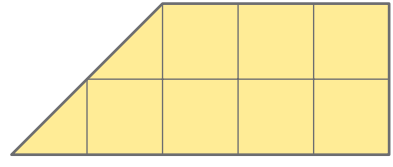


Figura 4

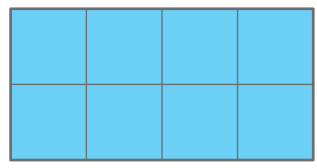
12 Reúna-se com um colega e façam o que se pede. Reproduzam em uma folha de papel quadriculado as figuras a seguir, de acordo com a quantidade indicada.



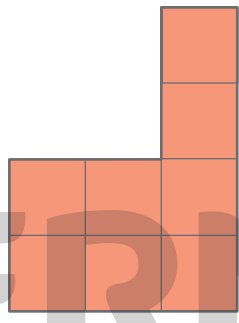
(uma)



(duas)



(duas)



(três)



Notem que essas figuras têm 8 cm^2 de área. Recortem-nas e, usando todas, construam um quadrado com 8 cm de lado. Vocês podem colar as figuras em uma cartolina para facilitar a montagem do quebra-cabeça. Criem outro quebra-cabeça com figuras que tenham mesma área e entreguem as peças para outra dupla montar. *construção de figura*

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Se cada uma das figuras abaixo fosse recortada nas linhas tracejadas e as peças obtidas fossem rearranjadas, em que casos seria possível montar uma região retangular? Por quê?
Em todos, pois, nas três figuras obtidas, as diagonais formam ângulos retos com um dos lados.

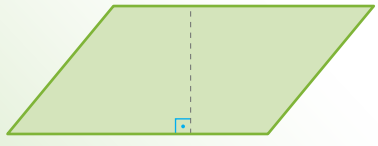


Figura 1

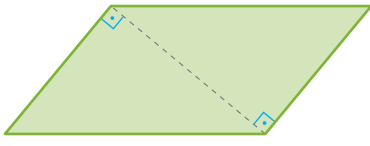


Figura 2



Figura 3

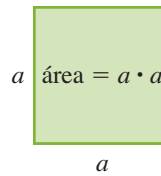
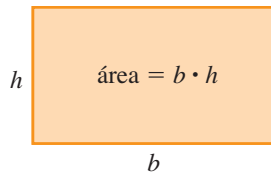
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

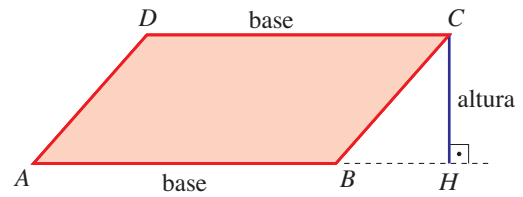
3 Área do paralelogramo

Já estudamos como determinar a área de superfícies retangulares, que têm base de medida b e altura de medida h , e, em particular, a área de regiões quadradas com base e altura medindo a .

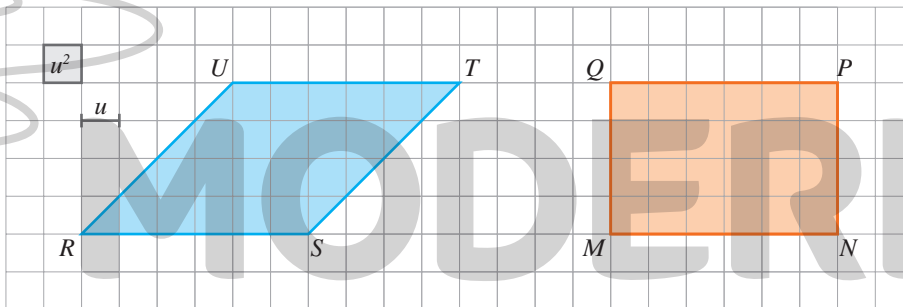


Vamos estudar a área de um paralelogramo, considerando o paralelogramo $ABCD$ ao lado.

Qualquer segmento perpendicular a uma base, com uma extremidade nela e outra extremidade na reta suporte da base oposta, é chamado de **altura do paralelogramo**. Vamos considerar os lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} como **bases**. O segmento \overline{CH} , por exemplo, é uma altura do paralelogramo $ABCD$.



Agora, observe o paralelogramo $RSTU$ e o retângulo $MNPQ$ abaixo.



Considerando u unidade de comprimento e u^2 unidade de área, temos:

paralelogramo $RSTU$

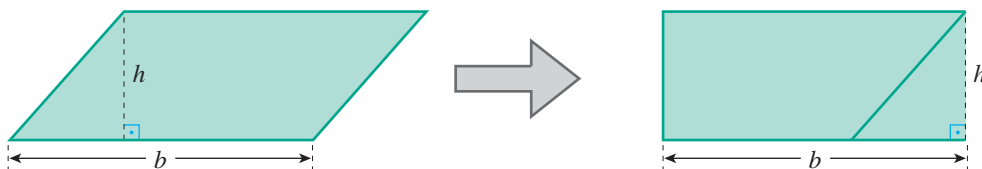
- medida da base = $6u$
- medida da altura = $4u$
- área = $24u^2$

retângulo $MNPQ$

- medida da base = $6u$
- medida da altura = $4u$
- área = $24u^2$

Note que as duas figuras (o paralelogramo e o retângulo) são equivalentes.

Isso acontecerá sempre que um paralelogramo e um retângulo tiverem as medidas das bases iguais (b) e as medidas das alturas também iguais (h), pois nesse caso sempre temos a possibilidade de decompor o paralelogramo em figuras que, rearranjadas, compõem o retângulo. Observe.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

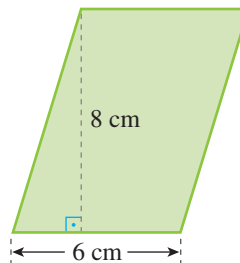
A **área de um paralelogramo** de base medindo b e altura medindo h é igual à área de um retângulo de base medindo b e altura medindo h .

Portanto, a área do paralelogramo é indicada por:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

Como exemplo, vamos calcular a área de um paralelogramo de 6 cm de base e 8 cm de altura.

$$\begin{aligned} A_{\text{paralelogramo}} &= b \cdot h \\ A_{\text{paralelogramo}} &= 6 \cdot 8 \\ A_{\text{paralelogramo}} &= 48 \end{aligned}$$

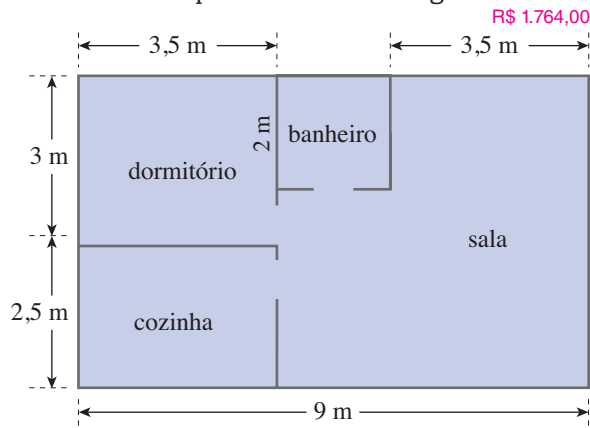


Logo, a área desse paralelogramo é 48 cm^2 .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

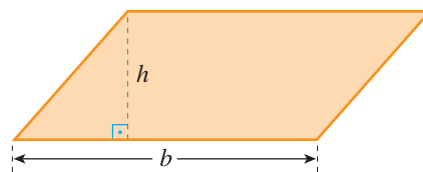
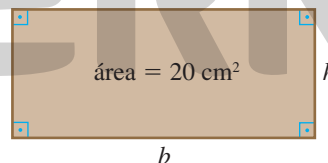
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 13** A figura a seguir representa a planta de um apartamento. O dono desse apartamento deseja colocar carpete na sala e no dormitório. Sabendo que o metro quadrado colocado do carpete escolhido custa R\$ 48,00, quanto o dono do apartamento deverá gastar?

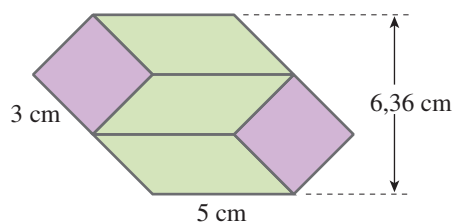


- 14** A área de um retângulo cuja base mede x metros e a altura mede y metros é 80 m^2 . Qual é a área de um paralelogramo de base y metros e altura x metros? 80 m^2
- 15** Um paralelogramo tem 56 cm^2 de área. A base mede 8 cm. Calcule a medida da altura. 7 cm

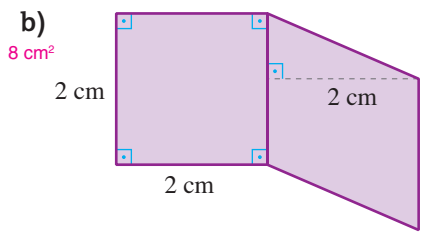
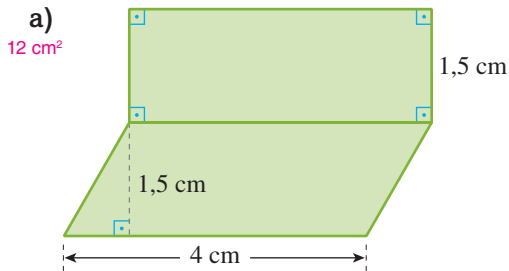
- 16** Considerando as figuras abaixo, determine a área do paralelogramo pintado de laranja. 20 cm^2



- 17** No mosaico abaixo, os paralelogramos são equivalentes entre si. Os quadrados também são. Determine a área da superfície do mosaico.



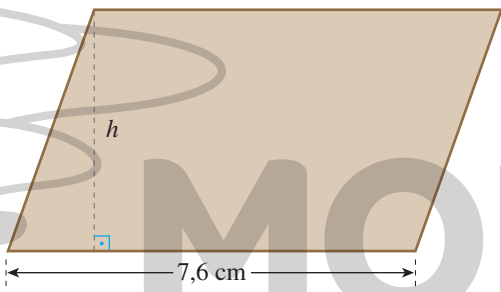
18 Calcule a área de cada figura a seguir.



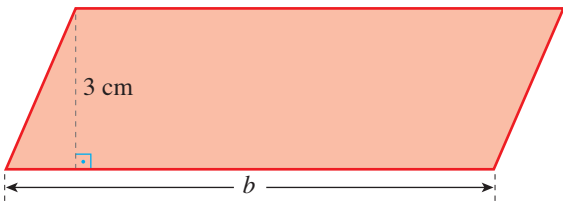
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

19 Obtenha o que se pede.

a) A medida da altura (h) deste paralelogramo de área $34,20 \text{ cm}^2$. $4,5 \text{ cm}$

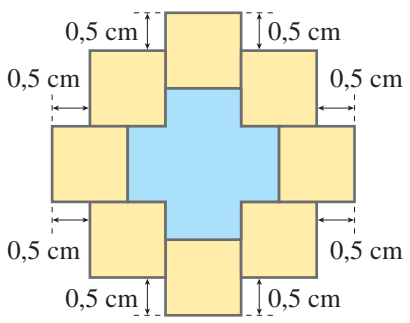


b) A medida da base (b) deste paralelogramo de área $27,3 \text{ cm}^2$. $9,1 \text{ cm}$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

20 Observe a figura abaixo.

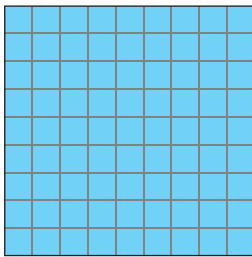
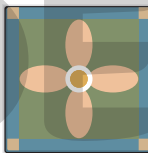
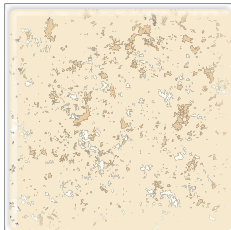


ADILSON SECCO

A região pintada de azul é circundada por quadrados de lados medindo 1 cm. Determine quantos centímetros quadrados tem essa região. 3 cm^2

21 Mário quer revestir o piso de sua cozinha, que mede $2,40 \text{ m} \times 3,00 \text{ m}$.

Estes foram os revestimentos de que Mário mais gostou.

Pesquisa de revestimento de piso		
Revestimento	Medidas da peça (em cm)	Preço do metro quadrado (em R\$)
 placa de pastilhas de porcelana	$1,5 \times 1,5$ (cada pastilha)	150,00
 ladrilho hidráulico	20×20	350,00
 porcelanato	30×30	76,00

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184. do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

quantidade: 32.000; 180; 80
custo: R\$ 1.080,00; R\$ 2.520,00; R\$ 547,20

Dados obtidos por Mário.

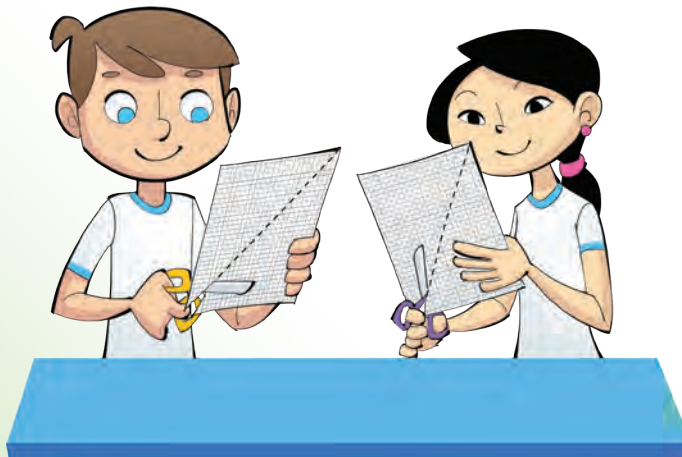
Copie a tabela de Mário e acrescente duas colunas:

- uma com a quantidade de peças de cada revestimento necessária para o piso da cozinha;
- outra com o custo total que corresponderia a cada piso.

Pense mais um pouco...

 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

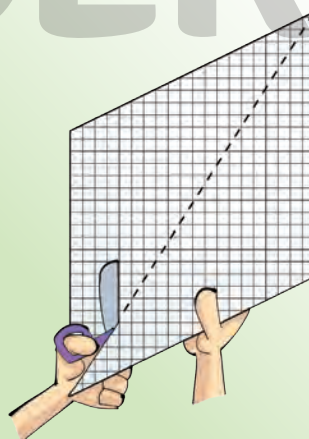
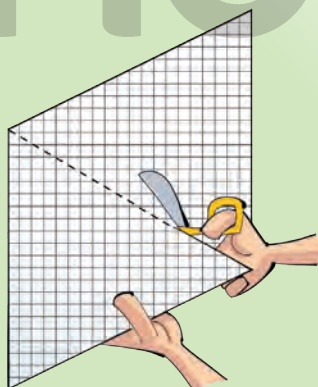
- De uma folha de papel quadriculado, recortem vários retângulos de diferentes medidas de base e de altura. Em seguida, cortem cada retângulo por uma de suas diagonais, obtendo pares de triângulos.



CLAUDIO CHIVO

Agora, respondam.

- Para cada par de triângulos assim obtido, é possível sobrepor um triângulo ao outro? **sim**
 - Se a área de um desses retângulos fosse 18, qual seria a área de um dos triângulos dele obtido? **9**
 - Se x é a área de um dos triângulos obtidos pelo corte de uma das diagonais de um retângulo, qual é a área desse retângulo? **$2x$**
- De outra folha de papel quadriculado, recortem dois paralelogramos não retângulos idênticos, que vamos chamar de I e II. Em seguida, cortem I pela diagonal menor e II pela diagonal maior, obtendo pares de triângulos.



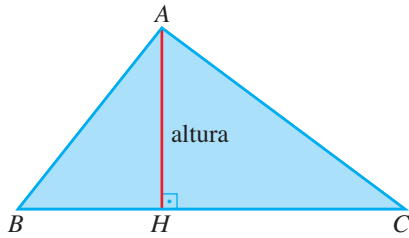
ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIVO

Respondam.

- É possível sobrepor um triângulo de I ao outro triângulo de I? Eles são equivalentes? **sim; sim**
- É possível sobrepor um triângulo de II ao outro triângulo de II? Eles são equivalentes? **sim; sim**
- É possível sobrepor um triângulo de I a um triângulo de II? **não**
- Se a área do paralelogramo I é igual a x , qual é a área do paralelogramo II? E a área de um dos triângulos de I? E a área de um dos triângulos de II? **$x; \frac{x}{2}; \frac{x}{2}$**
- Um triângulo de I é equivalente a um triângulo de II? **sim**

4 Área do triângulo

Observe o triângulo ABC abaixo.

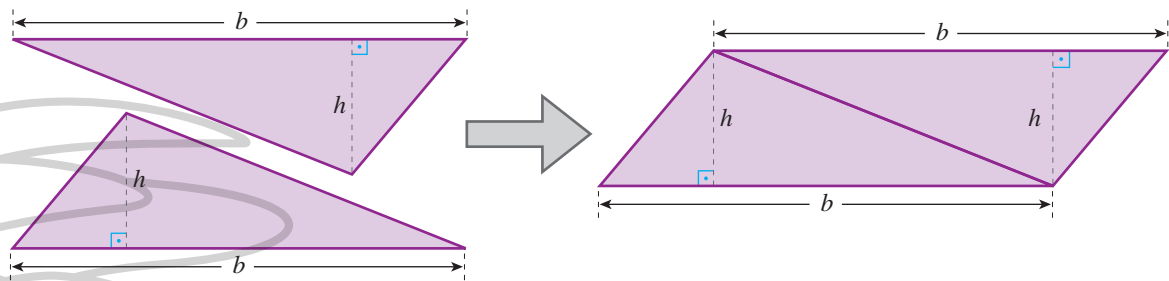


Qualquer segmento de reta cujas extremidades estão em um vértice e na reta suporte do lado oposto a esse vértice, e que é perpendicular a essa reta, é chamado de **altura do triângulo**.

No triângulo ABC , vamos considerar o lado \overline{BC} como **base**. Observe que o segmento \overline{AH} é a altura desse triângulo relativa ao lado \overline{BC} .

Agora, observe dois triângulos com bases de medidas iguais (b) e alturas relativas a essas bases também de medidas iguais (h).

Com esses dois triângulos, é possível compor um paralelogramo com base medindo b e altura medindo h . Observe.



Então, a área de cada triângulo é metade da área do paralelogramo.

A **área de um triângulo** de base medindo b e altura relativa a essa base medindo h é igual à metade da área de um paralelogramo de base medindo b e altura medindo h .

Assim, a área do triângulo é indicada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

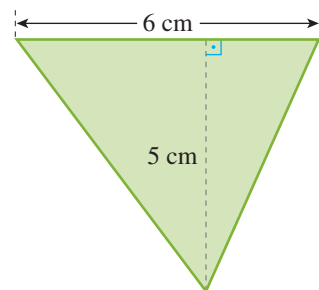
Veja alguns exemplos.

a) Vamos calcular a área de um triângulo com 6 cm de base e 5 cm de altura, como mostra a figura ao lado.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 15$$



Portanto, a área desse triângulo é 15 cm².

- b) Vamos calcular a medida da altura relativa à base de medida 12,5 cm do triângulo ao lado, sabendo que sua área é 50 cm².

A área desse triângulo é a metade da área do paralelogramo de mesma base e mesma altura. Como a área desse triângulo é 50 cm², então a área do paralelogramo de mesma base e mesma altura é 100 cm².

Assim, temos:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

$$100 = 12,5 \cdot h$$

$$\frac{100}{12,5} = \frac{12,5h}{12,5}$$

$$h = 8$$

Portanto, a altura desse triângulo mede 8 cm.

- c) No triângulo retângulo ABC ao lado, os lados perpendiculares entre si medem 3 cm e 6 cm. Um desses lados pode ser considerado uma base desse triângulo, e o outro, a altura relativa a essa base.

- \overline{AB} é a altura relativa à base \overline{BC} .
- \overline{BC} é a altura relativa à base \overline{AB} .

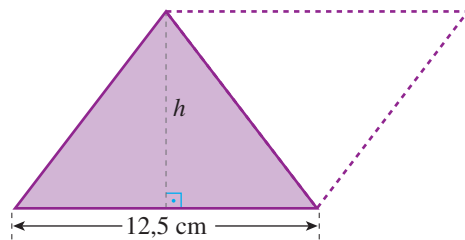
Assim, a área desse triângulo pode ser calculada desta forma:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

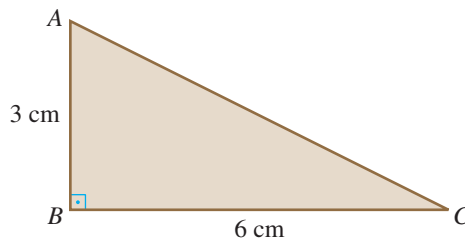
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{6 \cdot 3}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 9$$

Portanto, a área desse triângulo é 9 cm².



NELSON MATSUDA



NELSON MATSUDA



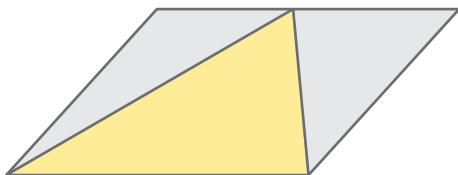
DANIEL ZEPPA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

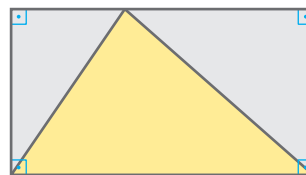
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 22 Calcule a área do triângulo pintado de amarelo em cada caso.

a) $A_{\text{paralelogramo}} = 80 \text{ m}^2$ 40 m²



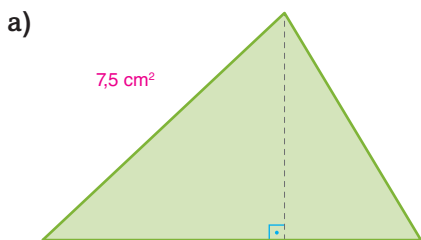
b) $A_{\text{retângulo}} = 290 \text{ m}^2$ 145 m²



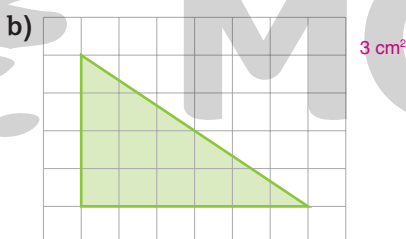
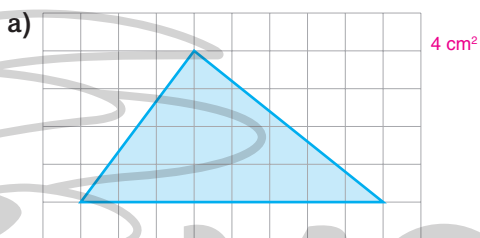
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

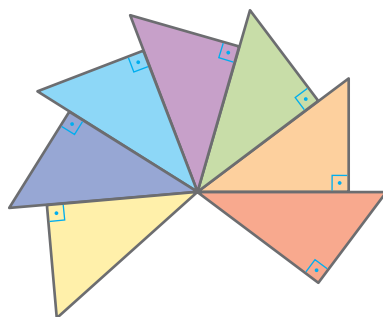
23 Com uma régua, meça em cada triângulo uma base e a altura relativa a essa base. Em seguida, calcule a área aproximada, em centímetro quadrado.



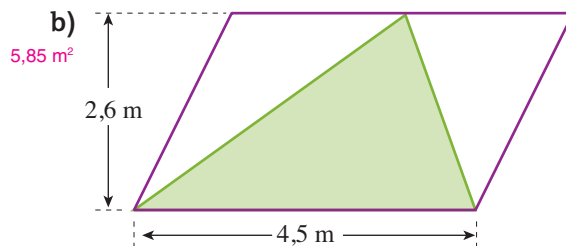
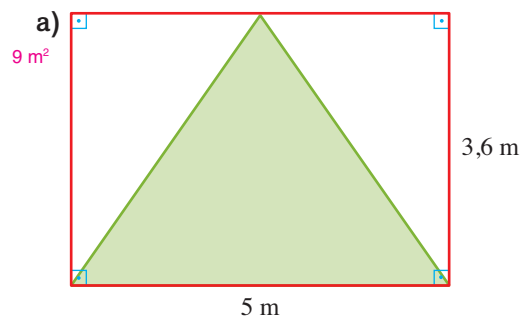
24 Determine a área de cada um dos triângulos a seguir, sabendo que o lado do quadradinho do quadriculado mede 0,5 cm.



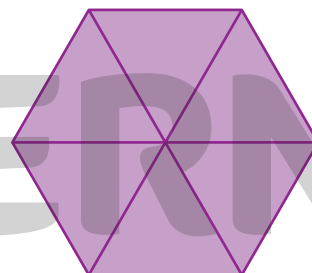
25 Na aula de Arte, Camila desenhou uma figura que é formada por sete triângulos retângulos, como mostra a figura abaixo. Sabendo que os lados perpendiculares de cada triângulo da figura de Camila medem 3 cm e 4 cm, calcule a área dessa figura. 42 cm²



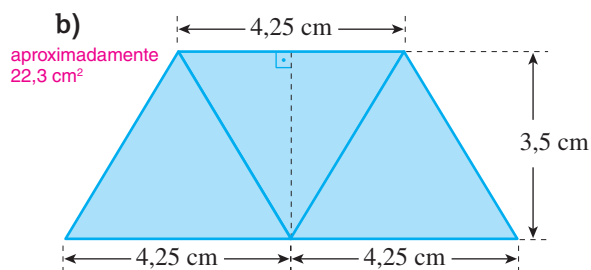
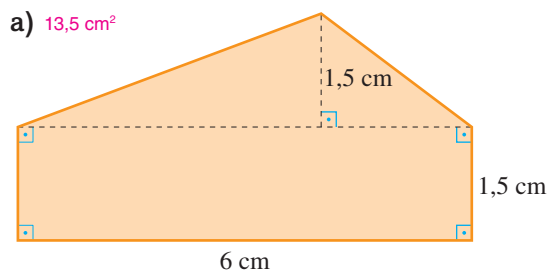
26 Determine a área de cada região pintada de verde.



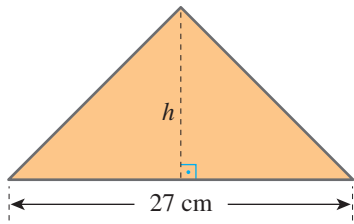
27 Calcule a área aproximada do hexágono abaixo, sabendo que a base de cada triângulo que o compõe mede 2 cm e que a altura relativa a essa base mede, aproximadamente, 1,7 cm.



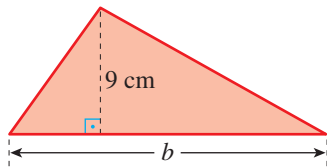
28 Determine a área de cada figura.



- 29** Determine o que se pede.
a) A medida h da altura deste triângulo de área $182,25 \text{ cm}^2$. **13,5 cm**



- b) A medida b da base deste triângulo de área $101,25 \text{ cm}^2$. **22,5 cm**



- 30** Uma base de um triângulo mede $7,2 \text{ cm}$. A altura relativa a essa base mede $\frac{2}{3}$ da medida dessa base. Calcule a área desse triângulo. **17,28 cm²**

- 31** Reúna-se com colegas e façam o que se pede.



De um triângulo ABC , são conhecidas as medidas do lado \overline{AB} , que é igual a 9 cm , do lado \overline{AC} , igual a 7 cm , da altura relativa ao lado \overline{AC} , igual a $8,9 \text{ cm}$, e da altura relativa ao lado \overline{BC} , igual a $6,2 \text{ cm}$. Calculem as medidas aproximadas do lado \overline{BC} e da altura relativa ao lado \overline{AB} . **10 cm, 7 cm**

Sigam as etapas abaixo para resolver o problema acima.

- Façam um esboço do triângulo ABC citado no problema. Nesse esboço, indiquem com números as medidas dadas e com letras as medidas pedidas.
- Verifiquem se já resolveram um problema parecido com este ou com parte dele que possa ajudar na resolução.
- Tracem e executem um plano de resolução.
- Para verificar as respostas obtidas, convém calcular a área do triângulo ABC três vezes, usando em cada vez as medidas de um lado e da respectiva altura.

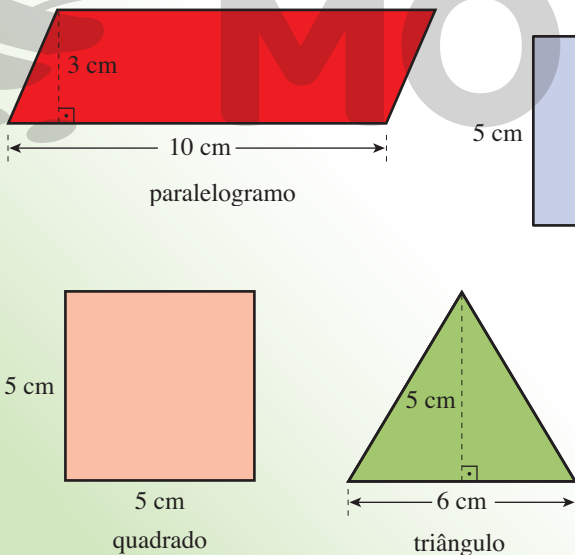
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

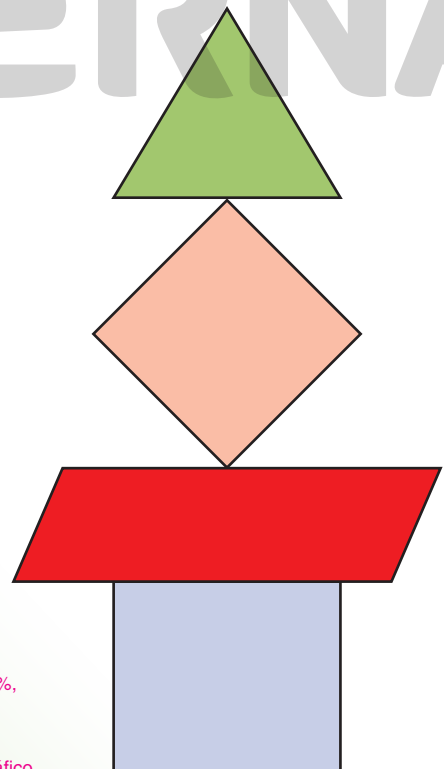
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Observe estas figuras.



- a) Calcule a área de cada figura. **paralelogramo: 30 cm^2 , quadrado: 25 cm^2 , retângulo: 30 cm^2 e triângulo: 15 cm^2**
- b) Veja ao lado a composição formada com as figuras acima. Indique na forma percentual a parte que cada figura representa nessa composição. **paralelogramo: 30%, quadrado: 25%, retângulo: 30% e triângulo: 15%**
- c) Construa um gráfico de setores para representar a porcentagem da área de cada figura do mosaico. **construção de gráfico**



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

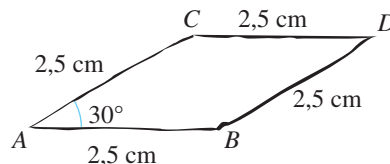
Construindo e explorando um losango

Você já sabe que o losango é um quadrilátero que tem os quatro lados de mesma medida.

Vamos construir, como exemplo, um losango cujos lados meçam 2,5 cm e que tenha um ângulo interno de 30° .

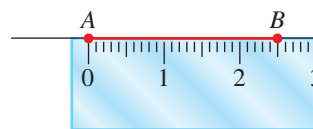
Inicialmente, podemos imaginar o losango pronto e desenhar, à mão, um esboço dele.

Nesse esboço, vamos indicar as medidas dadas.

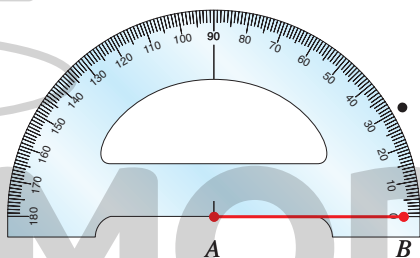


Observando o esboço e com o auxílio de régua, transferidor e compasso, vamos adotar os seguintes passos de construção:

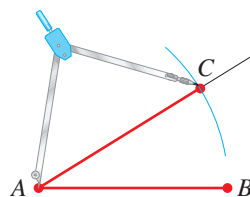
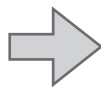
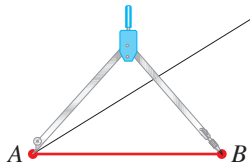
- Traçamos uma reta e nela um segmento de reta de 2,5 cm, que será o lado \overline{AB} .



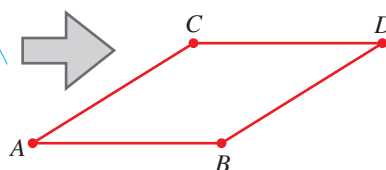
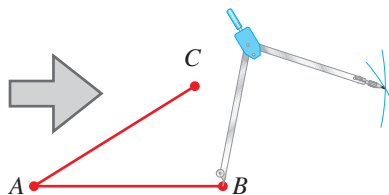
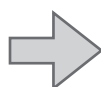
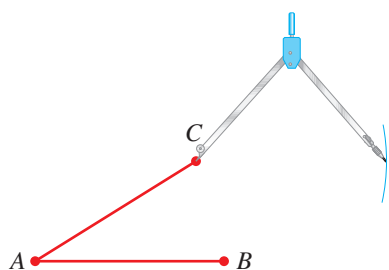
- Construimos um ângulo de 30° com vértice em A e um lado \overrightarrow{AB} .



- Com a ponta-seca do compasso em A e abertura AB, traçamos um arco obtendo o ponto C no outro lado do ângulo de 30° .



- Com a mesma abertura de 2,5 cm e a ponta-seca do compasso em C, depois em B, traçamos dois arcos que se cruzam, determinando o ponto D, que é o quarto vértice do losango. Assim, obtemos o losango ABCD.



b) resposta possível: Que o ângulo formado pelas diagonais é reto. Além disso, o losango fica dividido em quatro triângulos idênticos e, portanto, de mesma área.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Agora é com você!

- Escolha outra medida para o lado e para o ângulo e, repetindo o procedimento da página anterior, construa seu losango em uma folha de papel à parte. *construção de figura*
- Trace as diagonais do losango que você construiu. Em seguida, recorte o losango, faça dobraduras pelas duas diagonais e observe o que obteve. Desdobre o losango e escreva o que você verificou a respeito dos quatro triângulos menores obtidos na dobradura.
- Com o transferidor, meça os ângulos formados pelas diagonais. Com a régua, meça as distâncias entre o ponto em que as diagonais se cruzam e cada um dos vértices. O que você verificou? *Que todos os ângulos medem 90° , ou seja, as diagonais do losango são perpendiculares e se cruzam no meio.*

5 Área do losango

Vamos considerar o losango da figura 1.

Indicamos por D a medida da diagonal maior e por d a medida da diagonal menor.

Essas diagonais dividem o losango em quatro triângulos retângulos iguais.

Com mais outros quatro triângulos iguais a esses, é possível compor um retângulo que tem base de medida D e altura de medida d (figura 2).

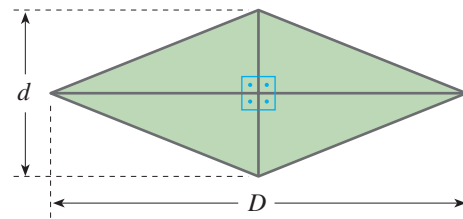


Figura 1

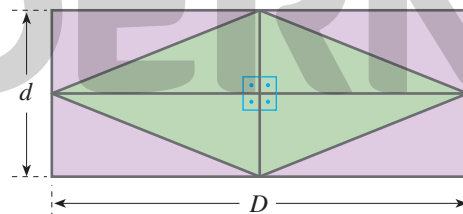


Figura 2

Note que a área do retângulo formado é dada por: $A_{\text{retângulo}} = D \cdot d$

Veja também que a área do losango é metade da área do retângulo.

A **área de um losango** de diagonais medindo D e d é igual à metade da área de um retângulo de dimensões D e d .

Assim, a área do losango é indicada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Acompanhe alguns exemplos.

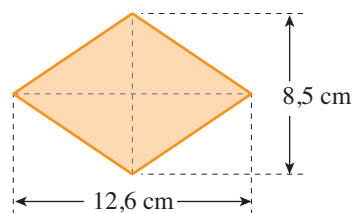
a) Vamos calcular a área de um losango cujas diagonais medem 12,6 cm e 8,5 cm.

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{12,6 \cdot 8,5}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{107,10}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = 53,55$$



Portanto, a área desse losango é 53,55 cm².

b) A área do losango ao lado é 8,64 cm². Vamos calcular a medida da diagonal menor d , sabendo que a diagonal maior mede 4,8 cm.

A área desse losango é metade da área de um retângulo, em que a base mede 4,8 cm, e a altura, d . Podemos dizer também que a área desse losango é igual ao semiproduto das medidas de suas diagonais.

Assim, temos:

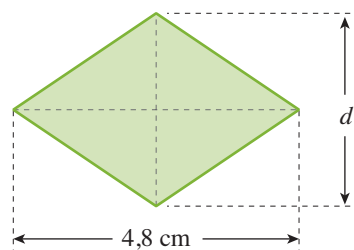
$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$8,64 = \frac{4,8 \cdot d}{2}$$

$$4,8d = 17,28$$

$$\frac{4,8d}{4,8} = \frac{17,28}{4,8}$$

$$d = 3,6$$



Portanto, a diagonal menor desse losango mede 3,6 cm.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

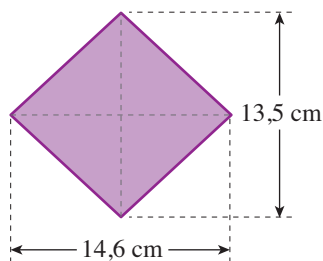
CLAUDIO CHIYO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 32** Conhecidas as medidas das diagonais do losango ao lado, calcule sua área.

98,55 cm²



- 33** Para formar um losango, retira-se de cada canto de uma placa retangular não quadrada um triângulo retângulo cujos lados menores medem 15 cm e 20 cm.

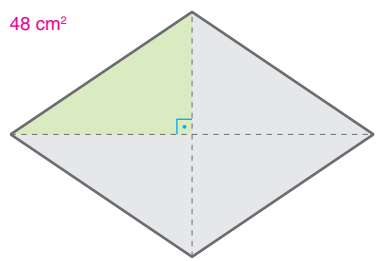
construção de figura

- a) Faça um desenho correspondente à situação.
b) Determine a área de cada triângulo retirado e do losango formado. 150 cm², 600 cm²

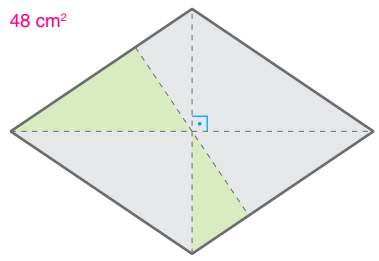
Lembre-se:
Não escreva no livro!

34 Calcule a área do losango, sabendo que a parte pintada de verde tem 12 cm^2 de área.

a) 48 cm^2



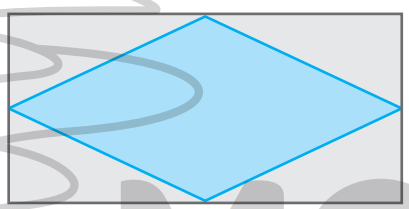
b) 48 cm^2



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

35 Calcule a área do losango, sabendo que a base do retângulo mede $12,6 \text{ m}$ e a altura mede $4,5 \text{ m}$.

$28,35 \text{ m}^2$



36 Com auxílio de régua, transferidor e compasso, construa dois losangos. Para o primeiro, você escolherá a medida do lado e a medida de um ângulo interno. Para o segundo, o lado deve ter medida igual ao dobro da medida do lado do primeiro e um ângulo interno que seja suplementar do ângulo escolhido para o primeiro. Quantas vezes o primeiro losango “cabe” no segundo? 4 vezes

NELSON MATSUDA

37 A área de um losango é 48 cm^2 , e as medidas de suas diagonais, dadas em centímetro, são expressas por números naturais. Que medidas podem ter essas diagonais? $1 \text{ cm e } 96 \text{ cm}; 2 \text{ cm e } 48 \text{ cm}; 3 \text{ cm e } 32 \text{ cm}; 4 \text{ cm e } 24 \text{ cm}; 6 \text{ cm e } 16 \text{ cm}; 8 \text{ cm e } 12 \text{ cm}$

38 Observe as figuras abaixo. Na figura 1, temos um quadrado $ABCD$, com lados de medida 12 cm . E temos as seguintes congruências: $\overline{DH} \equiv \overline{HC}$, $\overline{CG} \equiv \overline{GB}$, $\overline{BF} \equiv \overline{FA}$, $\overline{AE} \equiv \overline{ED}$. A figura 2 foi obtida da figura 1, com aumento dos lados \overline{BA} e \overline{DC} , de 12 cm para 16 cm , e redução dos lados \overline{AD} e \overline{CB} , de modo que o quadrado $ABCD$ resultou no retângulo $A'B'C'D'$ e a área do losango rosa foi mantida. De quantos centímetros foi a redução do lado \overline{AD} ? 3 cm

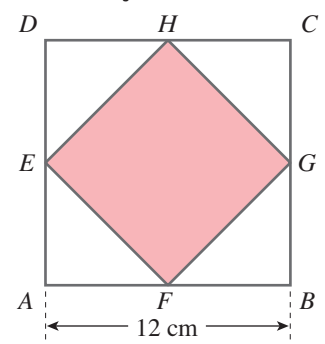


Figura 1

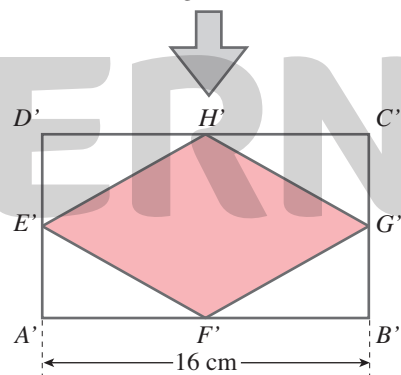


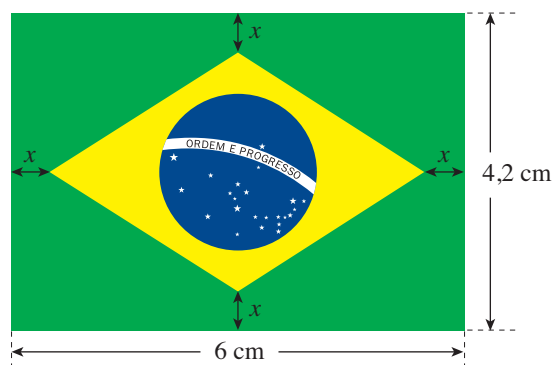
Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Para construir a bandeira nacional brasileira, é necessário obedecer a algumas regras. A bandeira ao lado é uma réplica que obedece às proporções indicadas nessas regras. A medida x é igual a $0,51 \text{ cm}$. Qual é a área da parte verde? $17,2818 \text{ cm}^2$

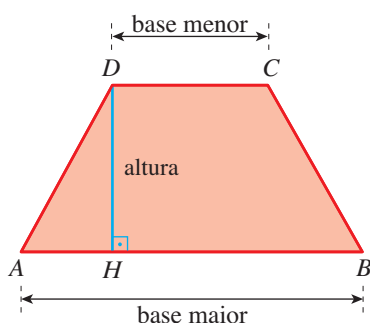


NELSON MATSUDA/REPRODUÇÃO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6 Área do trapézio

Considere o trapézio $ABCD$ abaixo.



NELSON MATSUDA



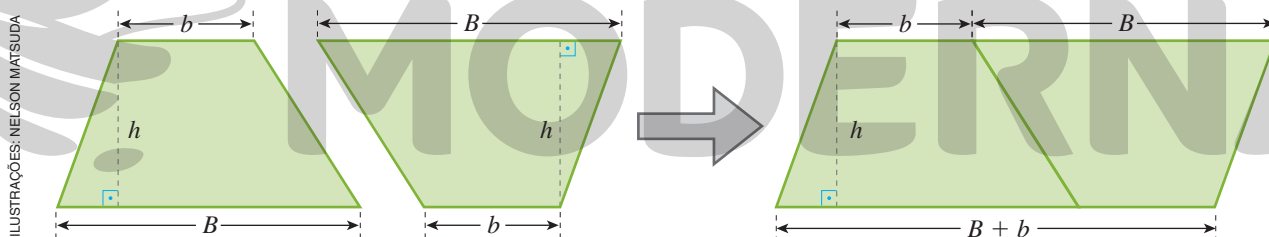
DANIEL ZEPPPO

Nele, os lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} são as **bases do trapézio**, sendo \overline{AB} a base maior e \overline{CD} a base menor.

Qualquer segmento que tem extremidades em uma das bases e na reta suporte da outra, e é perpendicular a elas, é chamado de **altura do trapézio**. Observe que o segmento \overline{DH} é uma altura do trapézio $ABCD$.

Agora, vamos considerar dois trapézios iguais cujas bases medem B e b e cuja altura mede h .

Com esses dois trapézios, podemos compor um paralelogramo com base medindo $(B + b)$ e altura medindo h . Observe.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.

Note que a área do paralelogramo formado é dada por:

$$A_{\text{paralelogramo}} = (B + b) \cdot h$$

Veja também que a área do trapézio é metade da área do paralelogramo.

A **área de um trapézio** de bases medindo B e b e altura medindo h é igual à metade da área de um paralelogramo de base medindo $B + b$ e altura medindo h .

Assim, a área do trapézio é indicada por:

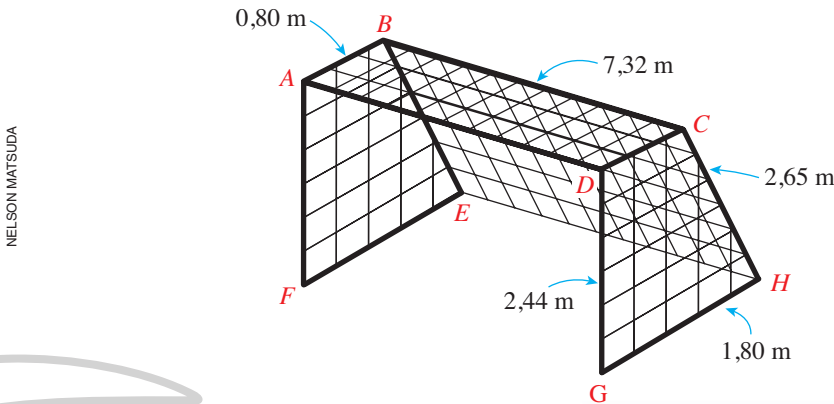
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Para exemplificar, vamos retomar uma das situações citadas no início deste capítulo e, por enquanto, calcular apenas a área do trapézio $DCHG$ da ilustração reproduzida abaixo.

(Etec-SP) As redes são usadas nas traves de futebol para impedir a passagem da bola e, desta forma, facilitar a identificação do gol. Considerando a ilustração abaixo, quantos metros quadrados de rede são necessários para cobrir essa trave de futebol?

Dados: Retângulos $ABCD$ e $BCHE$.

Os trapézios $ABEF$ e $DCHG$ são congruentes.



- a) $28,426 \text{ m}^2$ b) $31,598 \text{ m}^2$ c) $31,598 \text{ m}$ d) $51,56 \text{ m}^2$ e) $51,56 \text{ m}$

Cálculo da área do trapézio $DCHG$:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(1,80 + 0,80) \cdot 2,44}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{2,60 \cdot 2,44}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = 3,172$$

Portanto, a área desse trapézio é $3,172 \text{ m}^2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 39** Agora, resolva o teste da Etec-SP apresentado no exemplo anterior e indique a alternativa correta. **alternativa a**

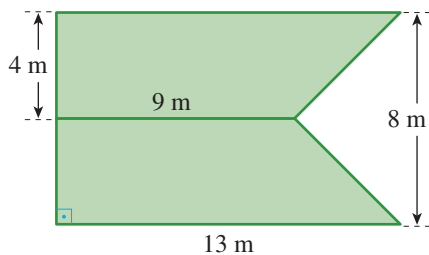
- 40** Um trapézio tem $12,4 \text{ cm}$ de altura. A soma das medidas de suas bases é $15,3 \text{ cm}$. Calcule a área desse trapézio. **$94,86 \text{ cm}^2$**

- 41** Com uma régua, meça as bases e a altura do trapézio abaixo. Em seguida, calcule a área dele em centímetro quadrado. **8 cm^2**



- 42** Um jardineiro precisa gramar um terreno que tem o formato da figura abaixo. Quantos metros quadrados de grama serão necessários para cobrir esse terreno? **88 m²**

NELSON MATSUDA

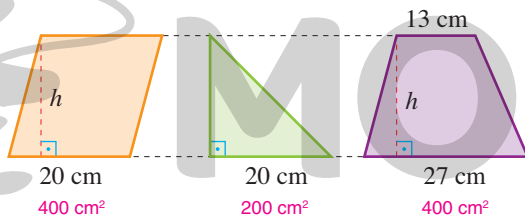


- 43** Um trapézio cujos lados não paralelos têm medidas iguais é chamado de **trapézio isósceles**. Um trapézio isósceles de lados não paralelos medindo 5 cm e altura medindo 4 cm tem perímetro igual a 22 cm. Determine a área desse trapézio. **24 cm²**

- 44** Determine a medida da base maior de um trapézio de área 260 cm² cuja altura mede 10 cm e cuja base menor mede 12 cm. **40 cm**

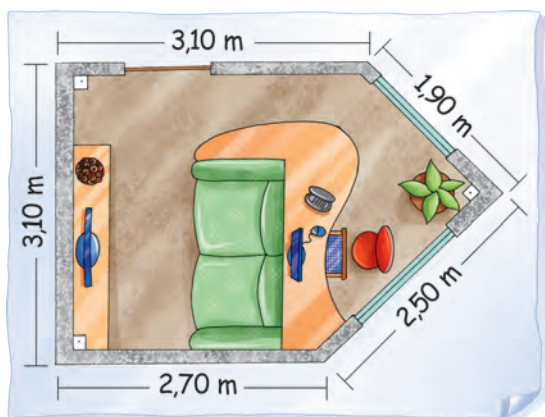
- 45** Sabendo que $h = 20$ cm, determine a área de cada figura.

NELSON MATSUDA



- 46** Dirceu fez um croqui para o projeto de seu escritório.

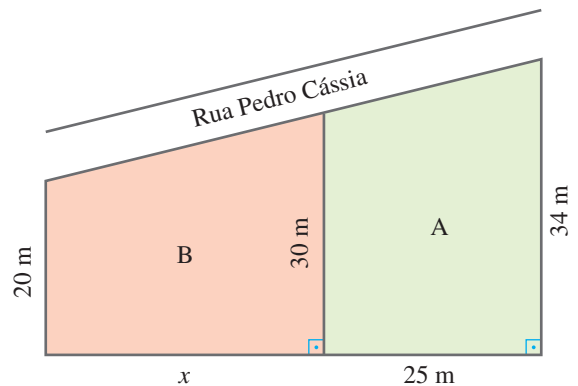
JOSÉ LUIZ JUHAS



Faça uma estimativa da área do escritório de Dirceu (incluindo as paredes). Depois, calcule a área exata e apresente, em porcentagem, o erro cometido. **11,365 m²**
O erro cometido depende da estimativa.

- 47** A figura abaixo representa dois terrenos na forma de trapézio. Sabendo que as áreas desses terrenos são iguais, determine:

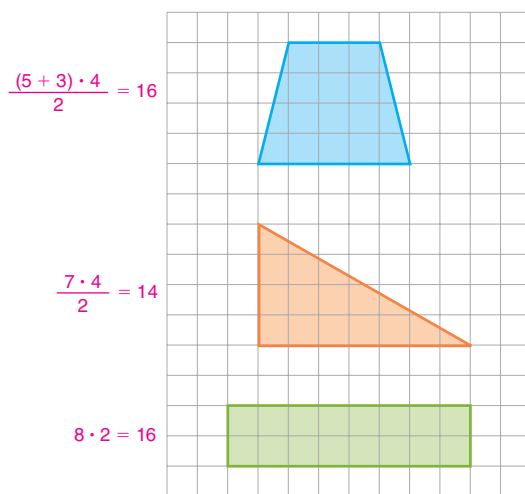
- a) a área do terreno A; **800 m²**
b) a medida x no terreno B. **32 m**



NELSON MATSUDA

- 48** Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

- a) Em uma folha de papel quadriculado, cada um desenha, sem que o outro veja, um trapézio, um triângulo e um retângulo que tenham mesma área, isto é, com a mesma quantidade de quadradinhos; depois, informa ao outro apenas qual é essa área. Então, cada um deve construir, em seu papel quadriculado, os três polígonos com a área fornecida pelo colega. **construção de figuras**
- b) Imaginem que um colega de outra dupla informou a área 16 e que o outro colega desenhava as seguintes figuras:



A resposta dada está correta? **Não, o triângulo não tem área igual a 16.**

- c) Em outra folha de papel quadriculado, cada um desenha os três polígonos do item a, com área igual a 32,5, e passa para o colega corrigir. **resposta pessoal**

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

Pictograma

Segundo o relatório da Organização das Nações Unidas (ONU), Perspectivas da Urbanização Mundial (World Urbanization Prospects, em inglês), de cada 100 pessoas da população mundial, 54 viviam em áreas urbanas, em 2014.

Dados obtidos em: <www.un.org>. Acesso em: 11 mar. 2015.

De cada 100 pessoas no mundo:

◆ 54 viviam em áreas urbanas

◆ 46 viviam em áreas rurais

Veja como podemos representar essa situação por pictogramas, que são símbolos usados para transmitir informação.



DANIEL ZEPPA

Agora, acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

O **autismo** é um transtorno mental que compromete o desenvolvimento da criança, afetando as áreas da sociabilidade, da comunicação e do comportamento.

Os sintomas nas áreas citadas são:

Dustin Hoffman em *Rain man*, direção de Barry Levinson, 1988.

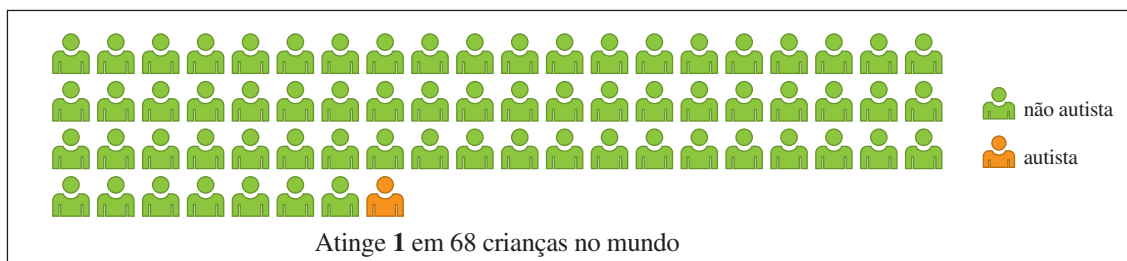
O filme conta o encontro de dois irmãos, um deles autista, que desconheciam a existência um do outro.



UNITED ARTISTS/EVERETT COLLECTION/LATINSTOCK

Sociabilidade	Comunicação	Comportamento
<ul style="list-style-type: none"> Falta de interesse em se relacionar com as pessoas Não responde a chamados Evita olhar nos olhos Evita o contato físico 	<ul style="list-style-type: none"> Tem a fala prejudicada Não consegue conversar Tem dificuldade para compreender a linguagem e as emoções 	<ul style="list-style-type: none"> Apresenta gestos e movimentos repetitivos Não gosta de alterações na rotina Apega-se a objetos inusitados Comporta-se de forma agressiva quando contrariado

Veja, no gráfico abaixo, a razão entre o número de crianças afetadas pelo autismo e as demais crianças, no mundo, em 2010.



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <www.revistaautismo.com.br>. Acesso em: 11 mar. 2015.

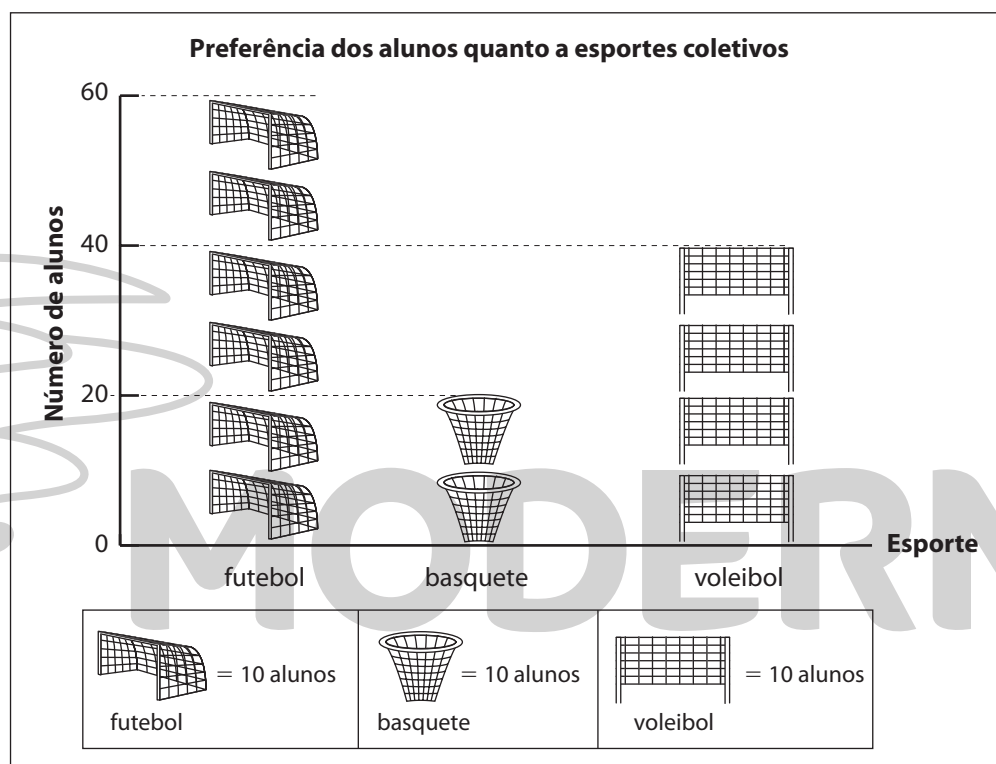
Situação 2

A professora Mara fez seu planejamento anual com base em uma pesquisa sobre a preferência dos alunos quanto a esportes coletivos. Ela registrou o resultado da pesquisa na tabela abaixo.

Preferência dos alunos quanto a esportes coletivos			
Esporte	Futebol	Basquete	Voleibol
Número de alunos	60	20	40

Dados obtidos pela professora Mara.

No quadro de avisos, a professora fixou um gráfico pictórico, em que cada símbolo equivale a 10 alunos, de acordo com a legenda.



Dados obtidos pela professora Mara.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Em 2014 a população humana era de aproximadamente 7 bilhões. Quantas pessoas viviam no campo? *aproximadamente 3,2 bilhões*
- 2 Considere a população mundial de crianças atual como 2 bilhões. Quantas aproximadamente são atingidas pelo autismo? *29,4 milhões*
- 3 Em relação ao total de alunos da professora Mara, qual é o índice percentual dos alunos que preferem voleibol? *cerca de 33,3%*
- 4 Faça um gráfico pictórico que informe a quantidade de alunos de sua classe, separados por sexo. Crie um símbolo para cada sexo e determine a quantidade de pessoas que cada símbolo representa. Coloque uma legenda ao lado do gráfico e não se esqueça do nome e da fonte do gráfico. *construção de gráfico*

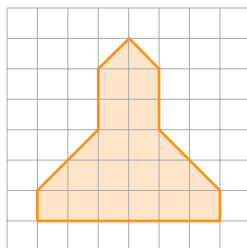
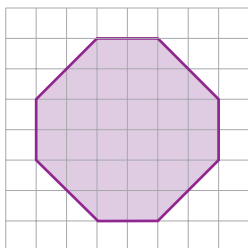
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUJDA

Reprodução proibida. Art. 184. do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Nas figuras abaixo, considere que cada quadradinho tenha área igual a $0,36 \text{ m}^2$. Nessas condições, calcule a área das figuras.

a) $10,08 \text{ m}^2$

b) $6,84 \text{ m}^2$



2 (FMU-SP) Sendo E um ponto qualquer do lado \overline{CD} do retângulo $ABCD$, a área do triângulo hachurado será: **alternativa a**

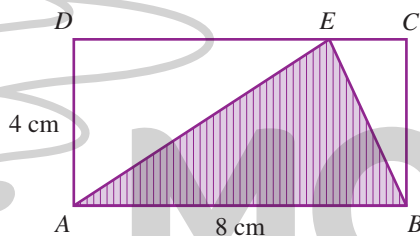
a) 16 cm^2 .

c) 8 cm^2 .

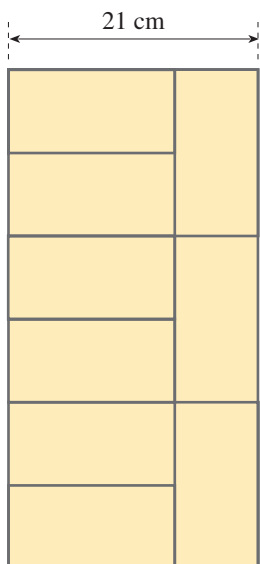
e) 6 cm^2 .

b) 12 cm^2 .

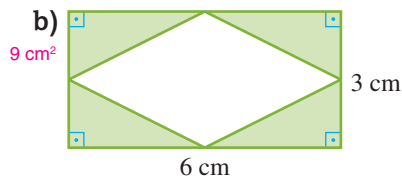
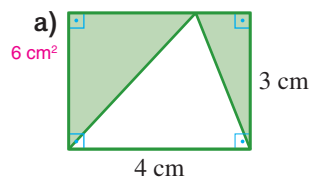
d) 32 cm^2 .



3 Mariana fez um mosaico com nove retângulos idênticos, como mostra a figura abaixo. Qual é a área desse mosaico? 882 cm^2

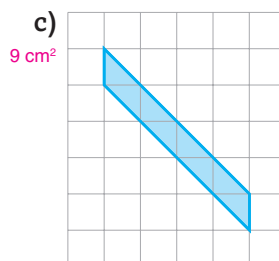
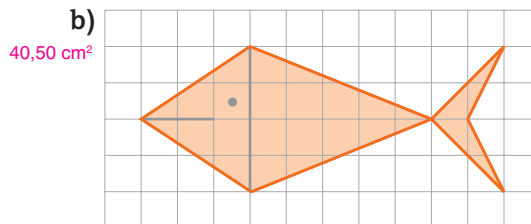
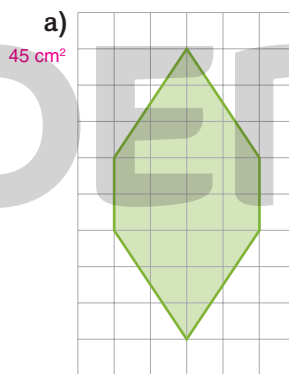


4 Calcule a área da parte pintada de verde de cada figura abaixo.



5 Um vitral é formado por 6 losangos com diagonais de 40 cm e 30 cm e por 8 triângulos de 30 cm de base por 20 cm de altura. Qual é a área total desse vitral em centímetro quadrado? 6.000 cm^2

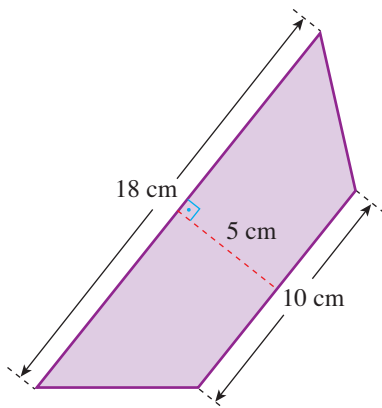
6 Determine a área de cada figura, considerando que o lado do quadradinho do quadriculado mede $1,5 \text{ cm}$.



Lembre-se:
Não escreva no livro!

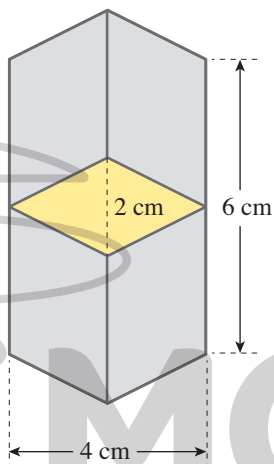
7 Calcule a área da figura abaixo. **70 cm²**

NELSON MATSUDA



8 A figura abaixo representa uma placa de ouro (losango pintado de amarelo) e prata (paralelogramos pintados de cinza).

NELSON MATSUDA

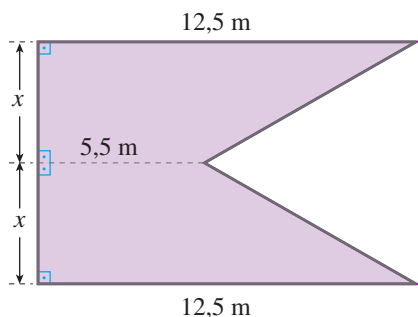


Admitindo que o preço da prata seja R\$ 4,00 por centímetro quadrado e o do ouro R\$ 90,00 por centímetro quadrado, qual seria o preço dessa placa? **R\$ 456,00**

9 Um losango e um triângulo são equivalentes. As diagonais do losango medem 12,8 cm e 8,5 cm. A base do triângulo mede 13,6 cm. Quanto mede a altura relativa a essa base? **8 cm**

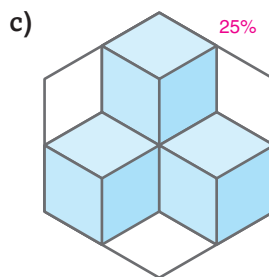
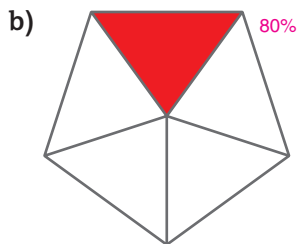
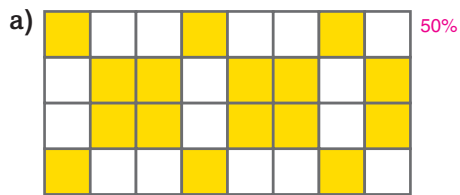
10 A figura abaixo tem 72 m² de área.

NELSON MATSUDA

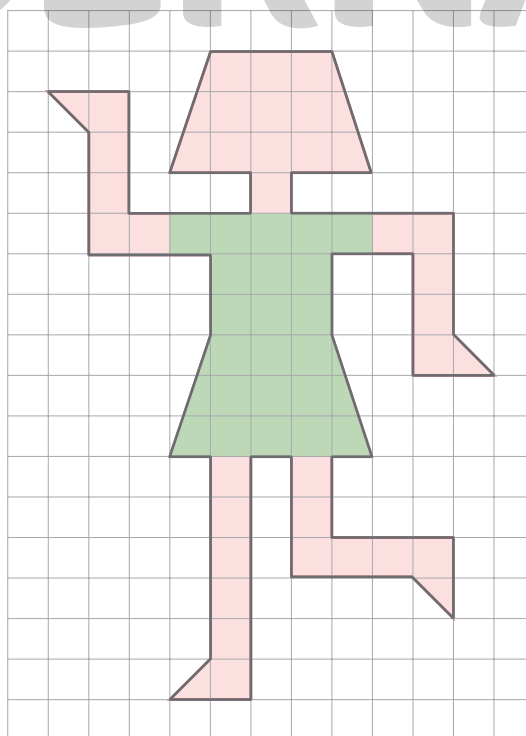


Calcule o valor de x . **4 m**

11 Determine a porcentagem correspondente à área da parte pintada de branco em cada figura abaixo.



12 Calcule a área da figura desenhada na malha quadriculada a seguir, sabendo que o lado do quadradinho da malha mede 1,5 cm. **135 cm²**



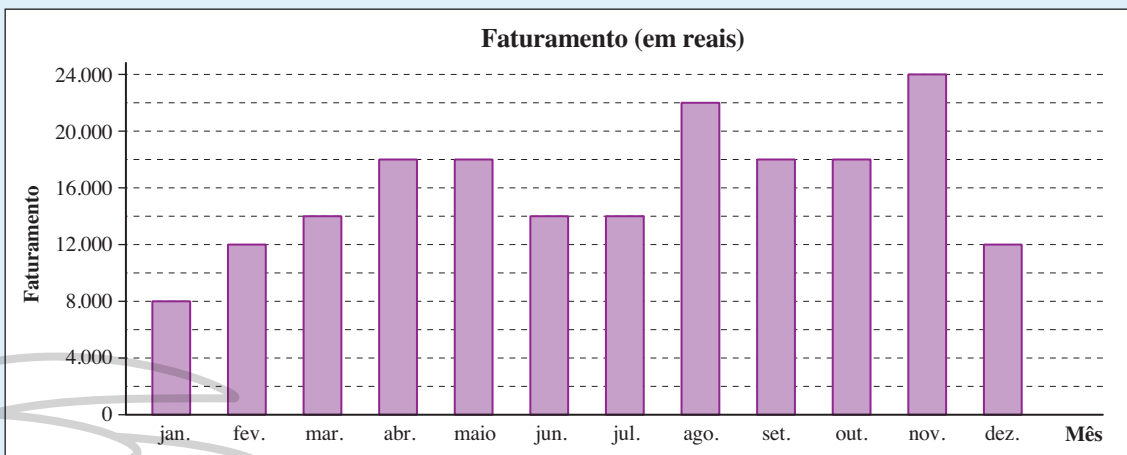
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

Matemática na administração da pequena empresa

Sandra é dona de uma mercearia localizada no centro da cidade que funciona de segunda a sábado. No ano passado, com 50% do saldo do seu negócio, ela conseguiu reformar a área onde armazena as caixas de alimentos enlatados. Veja no gráfico a seguir o faturamento por mês que Sandra teve no ano passado.



Dados obtidos por Sandra.

Sandra tem uma despesa mensal média com a mercearia de R\$ 12.000,00. Observe a fórmula que ela usou para ver seu saldo:

$$S_m = F_m - D_m$$

em que S_m é o saldo mensal; F_m é o faturamento mensal e D_m é a despesa mensal.

Por exemplo, para obter o saldo no mês de fevereiro, basta fazer o seguinte cálculo:

$$S_m = 12.000 - 12.000 = 0$$

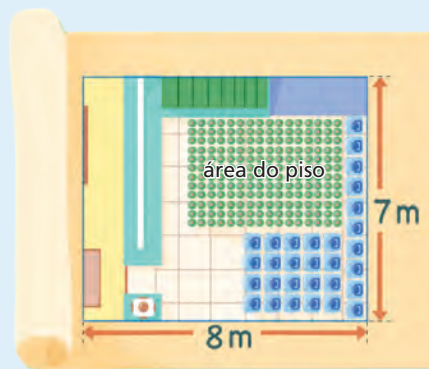
Portanto, o saldo de Sandra foi nulo no mês de fevereiro.

2. resposta possível: $S_a = F_a - D_a$, em que S_a é o saldo anual, F_a é o faturamento anual e D_a é a despesa anual. A despesa anual é dada por $D_a = 12 \cdot 12.000$, e o faturamento anual, por $F_a =$ soma dos faturamentos mensais.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Agora é com você!

- Qual foi o saldo de Sandra no mês de janeiro? *Espera-se que os alunos percebam que em janeiro Sandra recebeu menos do que gasta por mês. Portanto, teve um saldo de -R\$ 4.000,00.*
- Explique com suas palavras como Sandra poderia calcular o saldo do ano inteiro. Com base em sua explicação, escreva uma fórmula que expresse o saldo anual. Lembre-se de que, por mês, Sandra tem uma despesa média de R\$ 12.000,00 com a mercearia.
- Neste ano, como Sandra obteve o mesmo saldo do ano passado, ela resolveu reformar o local onde armazena os refrigerantes e as garrafas de água mineral. Para isso, separou 5% do saldo anual para comprar o piso. Sabendo que o metro quadrado do piso custa R\$ 40,00 e que o local tem as medidas representadas ao lado, ela separou a quantia necessária? Explique.



3. Sim, pois 5% do saldo anual é R\$ 2.400,00 e, como o local onde ela armazena os refrigerantes e as garrafas de água mineral tem 56 m^2 , seu gasto com o piso será de R\$ 2.240,00, uma vez que o metro quadrado do piso custa R\$ 40,00.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

Exercícios complementares

Páginas 42, 43 e 44

- a) -30 c) -25 e) 19
b) -16 d) 40
- a) -18 b) 38 metros
- a) $|+2|$ c) $|+5|$
b) -100 d) $|0|$
- a) $-75 < 42$ c) $2 > -20$
b) $-300 < -10$ d) $-5 > -30$
- a) -5, 8, 9 e 12
b) -10, -5 e 8
c) -21, -15 e 12
d) -10, -5, 8 e 9
- 2, -1, 0, 1 ou 2
- a) março e junho
b) março e junho
c) fevereiro, abril e maio
d) fevereiro
e) Não, pois lucro e prejuízo se alternam no gráfico.
- a) subiu
b) 44 metros
c) $-228 + 44 = -184$
- alternativas a e b
- a) 464°C
b) 530°C
- a) $-5.200 + 12.560$
b) 7.360 reais
- 97
- a) 1 c) -14 e) -4
b) -4 d) 14 f) 35
- a) -32 c) -100 e) -15
b) -2 d) 21 f) 9
- a) -9 d) 30 g) 2
b) 10 e) -4
c) 28 f) -17
- positivo
- a) -15 e 2 c) -10 e 10
b) -10 e 4
- a) 2^2 c) $(-5)^{10}$
b) -6 d) $(-3)^{17}$
- a) 25 e 25 c) 34 e 64
b) -216 e 216

- a) 24 c) 1 e) -15
b) -39 d) 18 f) 7
- a) 7 e 5 c) 33 e 33
b) 6 e 12 d) 2 e 2
• resposta pessoal
- I. -14 III. 8
II. -3 IV. -22
-14 e -22; -14 e -3, -3 e 8

Pense mais um pouco...

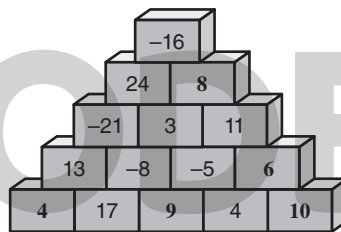
Página 13

O número natural zero não é positivo nem negativo.

Página 28

Para obter o número do bloco superior, devemos subtrair o número do bloco inferior à esquerda do bloco inferior à direita.

NELSON MATSUDA



Página 31

resposta possível:

2	-3	-2
-5	-1	3
0	1	-4

Página 33

- O outro fator tem de ser negativo.
- Não. Como um dos fatores está entre -7 e -1, o 2º jogador sabe que esse fator, é negativo. Sobre o outro fator nada pode ser afirmado.
- Como pelo menos um dos fatores deve ser negativo, ou os dois fatores são negativos (produto positivo), ou um dos fatores é zero (produto zero).

Para saber mais

Página 26

- 11 h; 12 h
- 17 h
- O Brasil mantém seus quatro fusos, mas muda a disposição, pois os estados das Regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste adiantam o relógio em uma hora. Os estados das Regiões Norte e Nordeste, não sofrem alteração.
- Recife: 11 horas; Cuiabá: 11 horas; Boa Vista: 10 horas

Trabalhando a informação

Páginas 23 e 24

- a) quiosque 1; quiosque 1: 43.453 reais e quiosque 2: 33.169 reais
b) 76.622 reais
c) resposta pessoal
- a) loja 1; 60.305 reais
b) setembro; 14.250 reais
c) loja 1; 33.365 reais
d) resposta pessoal
- a) Eureka; Monteiro
b) 6°C
c) Katmandu

Diversificando

Página 45

Brincando um pouco

- Ele vencerá o jogo, pois com esse valor chegará ao número -1.000.
- Dez, porque, ao acertar o número -200 todas as vezes, a pessoa conseguirá chegar, ao final de todas as jogadas, ao número -1.000.
- resposta possível: Sim, basta que ele acerte três vezes no número -200 e uma vez no número -50.
- A afirmação é falsa, pois, ao efetuar $800 + (-200)$, a resposta será 600, e não -1.000.

5. A afirmação é falsa, pois, se os alunos multiplicarem os valores, nunca conseguirão obter o valor -1.000 , a não ser que, em uma das circunferências, houvesse o valor -1 , já que o valor inicial é 1.000 .

CAPÍTULO 2

Exercícios complementares

Páginas 76, 77 e 78

- 0,75 e 1,333...
- Nenhum, pois não são números naturais.
- a) $\frac{12}{3}$ e 3
b) 3,5; $-\frac{2}{3}$, 4,333... e $-4,5$
c) 3,5; 4,333... e $-4,5$
d) 4,333...
- a) $-3,2$ c) $-2,9$
b) $-\frac{31}{10}$ d) $-3,0$
- a) $\frac{1}{5}$ b) $-0,8$ e $0,8$
- a) $|-2,5| = 2,5$
b) $3,426 > 3,4181$
c) $-11,3 < -2,51$
d) $-\frac{3}{8} > -\frac{1}{2}$
e) $0,12 < \frac{1}{5}$
f) $|-2,1| > |0,3|$
- 1.517,83 km²
- a) $\frac{63}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ e) $-\frac{119}{18}$
b) $-\frac{7}{20}$ d) $-\frac{3}{5}$ f) $\frac{23}{4}$
- a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $-\frac{10}{23}$
- a) resposta pessoal: Dependerá do ano em que essa atividade será realizada e da população contabilizada nessa data. Tomando como exemplo o ano de 2010, com 190,7 milhões de pessoas, a quantidade de lixo eletrônico produzido nesse ano seria de 95.350.000 quilogramas.

b) aproximadamente 14.000 elefantes

11. a) 10^{-2} c) $(-5)^{-2}$ e) 15^{-1}
b) 2^{-4} d) 5^{-3} f) $(-10)^{-2}$

12. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-9}$ 13. $\frac{5}{24}$

14. afirmação b 15. $\frac{1}{27}$

16. 0,2; 1 e 0,016

17. cartão laranja: 4; cartão azul: -9 ;
cartão rosa: $-\frac{6}{10}$; cartão verde:
 $-\frac{5}{2}$

I - azul, II - laranja, III - verde e
IV - rosa

18. $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{4}$; sim, pois $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

19. $\frac{25}{36}$; $\frac{25}{36}$; São iguais.

20. alternativa b

21. a positivo; b, c e d negativos

22. alternativa c

23. a) $\frac{5}{14}$ c) não existe

b) $\frac{1}{14}$

24. a) $\frac{69}{9}$, $\frac{79}{9}$, $\frac{89}{9}$, $\frac{99}{9}$, $\frac{109}{9}$,
 $\frac{119}{9}$

b) A fração tem denominador 9. Para obter o numerador da fração, multiplicamos por 10 o numerador da parte fracionária do número misto e, em seguida, somamos 9.

c) $\frac{31 \cdot 10 + 9}{9} = \frac{319}{9}$

d) $-\frac{29}{9}$

e) sim

Pense mais um pouco...

Página 49

Um número racional inteiro, pois o numerador é divisível pelo denominador.

Página 59

$-51,75$

Página 62

resposta possível:

$$7 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \div 1 \times 0 \times 0 \times 3 \times 7 \div 1 \times 0$$

Página 64

Pode-se trocar $-0,15$ por $-0,125$.

Página 69

1. a) -20 e 20 b) 20

2. a) $-4,8$ e $4,8$ b) $4,8$

Página 73

$$A = \frac{4}{3}, M = -\frac{1}{5}, Q = \frac{2}{15},$$

$$G = \frac{13}{30} \text{ e } R = -\frac{20}{13}$$

Para saber mais

Páginas 50 e 51

construção de figura

Páginas 71 e 72

1. a) 44
b) $11 \cdot 4$; $19 \cdot 4$

2. $123456789 \cdot 36 = 4444444440$;
 $123456789 \cdot 45 = 5555555505$;
 $123456789 \cdot 54 = 6666666606$;
 $123456789 \cdot 63 = 7777777707$;
 $123456789 \cdot 72 = 8888888808$;
 $123456789 \cdot 81 = 9999999909$

Trabalhando a informação

Páginas 74 e 75

1. a) Hiperlâpis; saldo negativo de R\$ 9.486,00

b) junho; R\$ 17.533,00

2. construção de gráfico

3. respostas pessoais

Diversificando

Página 79

Treinando Mais

1. $\frac{9}{10}$

- A classificação feita por Bruno está incompleta, pois todos os números naturais também são inteiros e todos os números inteiros também são racionais.
- A capacidade do pote era de 1.000 ml de sorvete.

CAPÍTULO 3

Exercícios complementares

Página 94

- verde: ângulo agudo; laranja: ângulo reto
 - roxo: ângulo obtuso; laranja: ângulo reto; vermelho: ângulo agudo
- construção de figura
- 3
 - 6
- duas voltas e meia
- Ângela deverá girar 135° à esquerda para retornar ao ponto de partida em linha reta.

Pense mais um pouco...

Página 93

alternativa b

Trabalhando a informação

Páginas 92 e 93

- trilha sonora: 36° ; detalhes: $64,8^\circ$; visual: $147,6^\circ$; roteiro: $68,4^\circ$; jogabilidade: $43,2^\circ$
- De 1999 a 2009, a parte da população autodenominada branca foi a única que diminuiu percentualmente. As demais aumentaram.

Diversificando

Página 95

Girando no parque

- $12^\circ 51' 25''$
- a) J

- Leandro em A e Juliana em J.
- G; P
- 20° ; 340°
- P
- resposta possível: D \hat{S} F, C \hat{S} G e B \hat{S} H

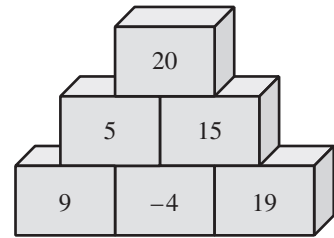
CAPÍTULO 4

Exercícios complementares

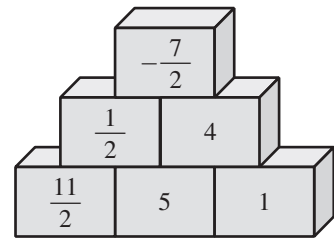
Páginas 124, 125 e 126

- $12x$
 - x^2
 - $6x^2$
 - x^3
 - $1,728 \text{ m}^3$
- José pensou no número 1.
 - $(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100 = y$
 - $y = 10x$
- 20 g
- $x = 30$
 - 70
- 86 reais
- 200 reais em outubro, 180 reais em novembro e 60 reais em dezembro
- O número procurado é 6, e a quantidade é 24.
- alternativas b e c
- $x = 1$
- 1
- 9
 - 1
 - $\frac{7}{2}$
 - 3
 - $-\frac{5}{2}$
- 250 g
- 48
- 45
- 320 m^2 e 350 m^2
- 23 cm, 24 cm e 25 cm
- alternativa d
- alternativa b
- alternativa e
- Paulo: 6, Pedro: 4 e Antônio: 5
- alternativa a

22. a) $x = 20$



b) $x = 1$



23. alternativa a

24. alternativa e

Pense mais um pouco...

Página 99

- $x + 3$
- 28; zero
- Não é possível que Lucas ou Lia falem o maior número.
- $2x + 5$
- 5; zero
- Não é possível que Lucas ou Lia falem o maior número.

Página 113

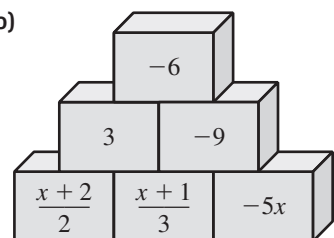
5

Página 118

- André representou por x o número pensado e chegou à expressão $4x$. Depois, resolveu a equação $4x = 20$.
- respostas pessoais

Página 122

- 2
-



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184, do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 6

Exercícios complementares

Páginas 162 e 163

- 45 crianças
- $x = 10$ cm e $y = 4$ cm
- resposta pessoal
- alternativa e
- natação: 12 aulas; judô: 8 aulas
- 600
- alternativa d
- alternativas c e d
- a) (2, 1) d) (2, 2)
b) (2,5; 2) e) (-3, -2)
c) (7; -3,5) f) (-1, 3)
- 40 taças
- 5 notas de R\$ 5,00 e 6 notas de R\$ 2,00
- 15 mesas
- 1.500 baguetes e 500 bisnagas
- 20 porcos
- 10 cubos de 5 cm de aresta e 15 cubos de 8 cm de aresta
- alternativa a

Pense mais um pouco...

Página 157

Júlia guardou 98 moedas de 25 centavos e 112 de 10 centavos.

Página 159

- a) 8 caixas b) 75 taças

Trabalhando a informação

Página 151

- a) Sim, ela passa a ser de $\frac{15}{36}$.
b) uma ou duas casas

Páginas 160 e 161

- a) resposta possível: março e setembro; sim
b) resposta possível: março; dezembro

- c) resposta possível: no final do ano há aquecimento do comércio com as compras natalinas, o que gera novos empregos.
d) resposta pessoal

CAPÍTULO 7

Exercícios complementares

Páginas 179 e 180

- construção de figura
- a) I – losango; II – paralelogramo; III – retângulo; IV – quadrado
b) o losango, o retângulo e o quadrado
c) O quadrado tem quatro eixos de simetria.
- Não, por causa das estrelas e da faixa branca central e do que está escrito nela.
- dois eixos
- a) construção de figura
b) construção de figura
- a) $35^\circ; 55^\circ$ b) $140^\circ; 40^\circ$
- a) $x = 15^\circ; 50^\circ$
b) $x = 40^\circ; 50^\circ; 50^\circ$
c) $x = 18^\circ; 38^\circ; 52^\circ$
- 30°
- 50°
- $x = 45^\circ, y = 90^\circ$
- alternativa c
- alternativa a

Pense mais um pouco...

Página 172

- a) construção de figura
b) construção de figura
- resposta pessoal
- resposta pessoal

Para saber mais

Página 178

- a) 90°
b) resposta pessoal
c) $x, y, x + y, 2x + 2y = 180^\circ; x + y = 90^\circ$

Diversificando

Página 181

Ângulos e simetria — Azulejos

- resposta possível: Dê um passo e vire 90° à direita. Dê três passos e vire 90° à esquerda. Dê dois passos e vire 90° à esquerda. Dê três passos e vire 90° à direita. Dê oito passos e vire 90° à direita. Dê três passos e vire 90° à esquerda. Dê dois passos e vire 90° à esquerda. Dê três passos e vire 90° à direita. Dê um passo à frente.
- O labirinto não apresenta simetria. O caminho que o robô deve fazer apresenta simetria. O eixo de simetria estaria localizado ao centro, uma linha vertical.
- 2; 2
- a segunda combinação; quatro eixos de simetria
- construção de figura

CAPÍTULO 8

Exercícios complementares

Página 203

- a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{16}{25}$
- alternativa d
- 30 km
- a) $\frac{1}{3}$ b) 1,5 g
- alternativa b
- a) 90 km/h c) 18,5 km/ℓ
b) 3 horas
- alternativa d
- a) sim b) não
- 20
- $x = -\frac{2}{5}, y = -14$ e $z = 11$
- a) 5,4 cm b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{8}{27}$
- 42 m
- 28,44 hab./km²

■ Pense mais um pouco...

Página 185

- a) Sydney: $\frac{94}{111}$; Atenas: $\frac{122}{125}$;
Pequim: $\frac{133}{144}$; Londres: $\frac{123}{136}$
- b) 84,68%; 97,60%; 92,36%;
90,44%
- c) Atenas; aproximadamente
49,39%
- d) Não, pois não podemos cons-
truir uma razão com denomi-
nador igual a zero.
- e) ouro: 11; prata: 17; bronze: 26;
total de medalhas: 54
- f) ouro: $\frac{11}{54}$; prata: $\frac{17}{54}$;
bronze: $\frac{13}{27}$

Página 189

R\$ 700.000,00

Página 193

Não há proporção entre as dis-
tâncias indicadas no mapa e as
distâncias reais.

Página 196

- A: 12 dólares/hab.;
 - B: 11,25 dólares/hab.;
 - C: 5,30 dólares/hab.
- a) A
- b) Não, pois esse valor é uma
média.

Página 201

1. a) resposta pessoal b) sim
2. a) resposta pessoal b) sim
3. a) sim; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- b) sim; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
4. $a = b \neq -1$

■ Trabalhando a informação

Páginas 196 e 197

1. Não, era menor.
2. Estados Unidos: 1,2 hab./veículo;
Japão: 1,7 hab./veículo; França:
1,7 hab./veículo
3. A resposta depende dos dados
obtidos.

■ Para saber mais

Páginas 185, 186 e 187

- a) não
- b) R\$ 7,00; R\$ 5,60

Página 202

1. exemplo de resposta: Para obter
o total de jovens (160) que foi
ao museu, a partir do número 8,
Pedro precisou multiplicar 8 por
20. Após esse cálculo, é obrigató-
rio multiplicar 1 por 20, resultan-
do no total de 20 jovens.
2. a) Quadras: 40 pessoas; piscina:
120 pessoas; restaurante: 80
pessoas.
- b) 1.600 torciam para o time A e
1.200 torciam para o time B.
- c) 42,5 km
- d) 1 : 300
- e) 12,5 km

CAPÍTULO 9

■ Exercícios complementares

Páginas 233 e 234

1. 150 kg
2. a) 1,43 g b) 75 g
3. 14 horas
4. 8 latinhas
5. 35 dias
6. 4.464 kg
7. alternativa a
8. alternativa b
9. 8.400 pessoas

10. 55.556 pessoas
11. alternativa b
12. alternativa d
13. alternativa c
14. alternativa b
15. R\$ 443,76
16. R\$ 1.850,00
17. 45 litros
18. alternativa a
19. alternativa c

■ Pense mais um pouco...

Página 206

- a) construção de tabela
- b) 20 minutos
- c) 28 minutos
- d) diretamente proporcionais
- e) 44 minutos
- f) 30 dias

Página 210

- a) Sim, pois, ao duplicar (triplicar, e assim sucessivamente) a medida do lado, o perímetro também duplica (triplica etc.).
- b) Não, pois a área e a medida do lado não se alteram na mesma razão.
- c) Não, pois o volume e a medida da aresta não se alteram na mesma razão.

Página 215

25 dias

Página 230

Fred está com a razão, pois, ao reduzir 20% de 360 reais (preço com aumento), temos 288 reais, e não 300 reais (preço inicial).

■ Trabalhando a informação

Páginas 216 e 217

1. Brasil: 0,2 cm; China: 0,3 cm;
Índia: 3,1 cm; Indonésia: 0,3 cm;
Quênia: 2,7 cm.
2. construção de gráfico
3. Não, pois a população do Quênia é pequena em relação a outros países destacados.

Páginas 231 e 232

construção de gráfico

■ Para saber mais

página 218

1. a)

Massa (em kg)	20	5	1
Preço (em real)	32	8	1,6

$\begin{matrix} & :4 & :5 & \\ & \text{---} & \text{---} & \\ & & & \\ & :4 & :5 & \end{matrix}$

b) exemplo de resposta: Inicialmente, Miriam associou o total de lugares disponíveis a 100%. Depois, ela calculou o número de lugares correspondente a 60%, dividindo o percentual e o número de lugares por 10 e, em seguida, multiplicando os resultados obtidos por 6. Como o percentual pedido é 62%, Miriam teve de calcular o número correspondente a 2%. Ela optou por, primeiro, descobrir o número de lugares correspondente a 1% (dividindo por 100 os valores da primeira coluna do quadro) e, em seguida o número correspondente a 2% (multiplicando os resultados obtidos por 2). Para finalizar seus cálculos, Miriam somou os números correspondentes a 60% e 2%.

- 2. a) R\$ 2,50
- b) 10 litros
- c) 11.760
- d) R\$ 209,00

Páginas 227 e 228

- a) 1%
- b) resposta possível: Deveriam ser pagos 4% sobre o valor de venda de escravos como imposto.

■ Diversificando

Página 235

- 1. A pintura de Mariana pode ser ampliada em até 10 vezes. Desse modo, a pintura teria as seguintes medidas: 2 m por 2 m.

2. resposta possível: Os quadradinhos podem ter as seguintes medidas: 1 cm por 1 cm, 2 cm por 2 cm, 4 cm por 4 cm, 5 cm por 5 cm ou 10 cm por 10 cm, pois são divisores de 20.

CAPÍTULO 10

■ Exercícios complementares

Páginas 261 e 262

- 1. a) 10,08 m² b) 6,84 m²
- 2. alternativa a
- 3. 882 cm²
- 4. a) 6 cm² b) 9 cm²
- 5. 6.000 cm²
- 6. a) 45 cm² c) 9 cm²
- b) 40,50 cm²
- 7. 70 cm²
- 8. R\$ 456,00
- 9. 8 cm
- 10. 4 m
- 11. a) 50%
- b) 80%
- c) 25%
- 12. 135 cm²

■ Pense mais um pouco...

Página 243

Em todos, pois, nas três figuras obtidas, as diagonais formam ângulos retos com um dos lados.

Página 247

- 1. a) sim b) 9 c) 2x
- 2. a) sim; sim d) $x; \frac{x}{2}; \frac{x}{2}$
- b) sim; sim e) sim
- c) não

Página 251

- a) paralelogramo: 30 cm², quadrado: 25 cm², retângulo: 30 cm² e triângulo: 15 cm²
- b) paralelogramo: 30%, quadrado: 25%, retângulo: 30% e triângulo: 15%
- c) construção de gráfico

Página 255

17,2818 cm²

■ Trabalhando a informação

Página 241

- a) resposta pessoal
- b) cerca de 600 m²
- c) 450 pessoas
- d) 90 casas

Páginas 259 e 260

- 1. aproximadamente 3,2 bilhões
- 2. 29,4 milhões
- 3. cerca de 33,3%
- 4. construção de gráfico

■ Para saber mais

Páginas 252 e 253

- a) construção de figura
- b) resposta possível: Que o ângulo formado pelas diagonais é reto. Além disso, o losango fica dividido em quatro triângulos idênticos e, portanto, de mesma área.
- c) Que todos os ângulos medem 90°, ou seja, as diagonais do losango são perpendiculares e se cruzam no meio.

■ Diversificando

Página 263

- 1. -R\$ 4.000,00
- 2. resposta possível: $S_a = F_a - D_a$, em que S_a é o saldo anual, F_a é o faturamento anual e D_a é a despesa anual. A despesa anual é dada por $D_a = 12 \cdot 12.000$, e o faturamento anual, por $F_a =$ soma dos faturamentos mensais.
- 3. Sim, pois 5% do saldo anual é R\$ 2.400,00 e, como o local onde ela armazena os refrigerantes e as garrafas de água mineral tem 56 m², seu gasto com o piso será de R\$ 2.240,00, uma vez que o metro quadrado do piso custa R\$ 40,00.

SIGLAS

Etec-SP – Escola Técnica Estadual

FCC-BA – Fundação Carlos Chagas da Bahia

FMU-SP – Faculdades Metropolitanas Unidas

Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

UEMS – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UFC-CE – Universidade Federal do Ceará

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

UFRGS-RS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia

Unifor-CE – Universidade de Fortaleza

Unirio-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

UPF-RS – Universidade de Passo Fundo

Vunesp – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ALUNO

GUELLI, Oscar. *Equação: o idioma da álgebra*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a história da Matemática)

_____. *Jogando com a Matemática*. São Paulo: Ática, 2005. (Coleção Contando a história da Matemática)

_____. *Números com sinais: uma grande invenção!* São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a história da Matemática)

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Álgebra*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Ângulos*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Estatística*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Frações e números decimais*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Números negativos*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Proporções*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

MARCONDES, Carlos. *Como encontrar a medida certa*. São Paulo: Ática, 2006. (Coleção A descoberta da Matemática)

RAMOS, Luzia Faraco. *Encontros de primeiro grau*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A descoberta da Matemática)

_____. *História de sinais*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A descoberta da Matemática)

_____. *O que fazer primeiro?* São Paulo: Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática)

_____. *Uma proporção ecológica*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A descoberta da Matemática)

BIBLIOGRAFIA

- AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo: CAEM-USP, 1995.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- CASTRUCCI, Benedito. *Fundamentos da Geometria*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.
- COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1998.
- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.
- DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.
- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 1995.
- FRANCISCO, Walter de. *Estatística básica*. Piracicaba: Unimep, 1995.
- GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. Nova York: Dover Publications, Inc., 1972.
- IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2004.
- _____. *Censo demográfico 2000: resultados preliminares*. Rio de Janeiro: IBGE, 2000.
- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomo 1.
- KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1994.
- LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papyrus, 1997.
- MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *O ensino de Matemática no primeiro grau*. São Paulo: Atual, 1986.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- PÈNE, N.; DEPRESLE, P. *Décimale*. Paris: Éditions Belin, 1996. Math 6.
- ROSA NETO, Ernesto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1996.
- SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo: CAEM-USP, 1996.
- SOUZA, E. R. et al. *A Matemática das sete peças do tangram*. São Paulo: CAEM-USP, 1997.
- STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.
- TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.
- WALDEGG, G.; VILLASEÑOR, R.; GARCÍA, V. *Matemáticas en contexto: aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Cidade do México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1999. Tercer curso.

**SUPLEMENTO COM
ORIENTAÇÕES PARA
O PROFESSOR**



MODERNA **70**
ano



MODERNA

Sumário

Parte geral - Orientações para o professor

• Apresentação	277
• A coleção	277
Objetivos gerais da obra	278
Estrutura da obra	278
• A importância de aprender Matemática	279
Matemática acadêmica X Matemática escolar	280
• A Matemática como disciplina do currículo escolar do Ensino Fundamental	280
A Matemática no currículo	281
• O papel do livro didático	282
• Temas transversais	283
• Propostas didáticas	283
A resolução de problemas	283
O uso da calculadora nas aulas de Matemática	284
O trabalho em grupo	285
Outras possibilidades de trabalho	285
• A avaliação e as práticas avaliativas	285
Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática	287
• Formação continuada e desenvolvimento profissional docente	289
• Algumas associações e centros de Educação Matemática	289

• Sugestões de leituras para o professor	291
Álgebra	291
Avaliação	291
Educação Matemática	291
Espaço e forma	292
História da Matemática	292
Jogos	292
Matemática e temas transversais	293
Números e operações	293
Tecnologia	293
Tratamento da Informação	293
Resolução de problemas	294
Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática	294

• Bibliografia consultada	295
--	------------

**Parte específica - Orientações gerais
para o desenvolvimento dos capítulos**

Capítulo 1 Números inteiros	296
Capítulo 2 Números racionais	301
Capítulo 3 Ângulos	308
Capítulo 4 Equações	313
Capítulo 5 Inequações	319
Capítulo 6 Sistemas de equações	321
Capítulo 7 Simetria e ângulos	323
Capítulo 8 Razões e proporções	327
Capítulo 9 Grandezas proporcionais e porcentagem	330
Capítulo 10 Área de regiões poligonais	332

Apresentação

Professor(a),

Como material de apoio à prática pedagógica, este Suplemento traz, de forma concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do aluno como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que ele o(a) auxilie no melhor aproveitamento e na compreensão das diretrizes pedagógicas que nortearam a atualização dos quatro volumes desta coleção.

Este Suplemento também discute variadas propostas de avaliação da aprendizagem sob a luz dos atuais *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN). Além disso, oferece indicações de leituras complementares e *sites* de centros de formação continuada, na tentativa de contribuir para a ampliação de seu conhecimento e sua experiência e para sua constante atualização.

As características da coleção, assim como as escolhas didáticas da obra, as opções de abordagem e os objetivos educacionais a alcançar são, também aqui, expostos e discutidos.

A coleção

Esta coleção tem como principal objetivo servir de apoio ao(a) professor(a) no desenrolar da prática didática e oferecer ao aluno um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos.

Através do desenvolvimento dos conteúdos curriculares próprios do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, a obra procura possibilitar ao aluno a aquisição do conhecimento matemático e subsidiar o trabalho docente. Nesse sentido, dispensa especial importância à apreensão de conceitos de forma precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para as noções de maior importância, cuidando da linguagem para que não sejam geradas dificuldades nas aprendizagens posteriores.

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o aluno a dar conta da totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de “esgotar” o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas dos conteúdos, não apenas com o objetivo de revisão, mas de complementação e aprofundamento dos conhecimentos desses conteúdos, de forma que o aluno possa ter diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos.

Em relação à abordagem, a apresentação de cada conteúdo é clara e objetiva, buscando situações contextualizadas e problematizadoras que possibilitem ao aluno estabelecer relações da Matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano, com sua realidade social e entre os diversos campos conceituais da própria Matemática.

Essa contextualização abarcou situações comuns, vivenciadas pelos jovens em seu cotidiano, assim como informações mais elaboradas, que costumam aparecer nos grandes veículos de comunicação. A obra tem por objetivo, assim, contribuir para a formação global do educando, de modo que, enquanto assimila e organiza os conteúdos próprios da Matemática, coloque em prática, sempre que possível, suas capacidades reflexiva e crítica, inter-relacionando tanto os tópicos matemáticos entre si quanto estes com os de diferentes áreas do saber. O intento é colaborar de forma proficiente para a solidificação do conhecimento matemático e para o desenvolvimento da plena cidadania e da participação positiva na sociedade.

Na sequência, os conceitos teóricos são desenvolvidos e entremeados por blocos de exercícios e, algumas vezes, com atividades de outra natureza em algumas seções. A distribuição dos exercícios em diferentes seções procura facilitar e flexibilizar o planejamento do trabalho docente, bem como possibilitar ao aluno desenvolver habilidades diversas.

As atividades também foram pensadas segundo o mesmo viés da exposição teórica, intercalando-se às mais convencionais, de aplicação direta do aprendizado, algumas propostas que contemplam temas transversais pertinentes, abrangendo informações de outras áreas, como Biologia, Ecologia, Economia, História, Geografia, Política, Artes, Ciências e Tecnologia.

As seções de cada capítulo se inter-relacionam conforme o desenvolvimento do conteúdo abordado e são adequadas à profundidade do tema visto em cada ano escolar.

A obra procura trazer um número suficiente de exercícios, possibilitando a sistematização dos procedimentos e a reflexão sobre os conceitos em construção. Os exercícios procuram abordar diferentes aspectos do conceito em discussão por meio de variados formatos, apresentando, quando possível, questões abertas, que dão oportunidade a respostas pessoais, questões que apresentam mais de uma solução ou aquelas cuja solução não existe. Da mesma forma, há exercícios que colocam o aluno em ação, possibilitando o desenvolvimento de argumentações, a abordagem de problemas de naturezas diversas e as discussões entre colegas e em grupos de trabalho. O professor tem, então, uma gama de questões a seu dispor para discutir os conceitos matemáticos em estudo.

É importante reafirmar que, ao longo de toda a coleção, houve preocupação explícita com a precisão e a concisão da linguagem. A abordagem dos conteúdos procurou ser clara, objetiva e simples, a fim de contribuir adequadamente para o desenvolvimento da Matemática escolar no nível do Ensino Fundamental. Além do correto uso da língua materna e da linguagem propriamente matemática, procuramos auxílio da linguagem gráfica, com ilustrações, esquemas e diagramas que auxiliem a aprendizagem pelas mudanças dos registros de representação.

■ Objetivos gerais da obra

- Apresentar a Matemática, em seus diversos usos, como uma das linguagens humanas, explorando suas estruturas e seus raciocínios.
- Introduzir informações que auxiliem a apreensão de conteúdos matemáticos, com vistas à sua inserção em um corpo maior de conhecimentos e à sua aplicação em estudos posteriores.
- Possibilitar ao aluno o domínio de conteúdos matemáticos, os quais lhe deem condições de utilização dessa ciência no cotidiano e na realidade social.
- Propiciar, com o auxílio do conhecimento matemático, o desenvolvimento das múltiplas habilidades cognitivas do aluno, preparando-o como pessoa capaz de exercer conscientemente a cidadania e de progredir profissionalmente.
- Desenvolver hábitos de leitura, de estudo e de organização.

■ Estrutura da obra

A coleção é composta por quatro volumes, que cobrem do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental. Os conteúdos estão distribuídos em capítulos. Cada capítulo enfatiza conteúdos referentes a um dos seguintes eixos da Matemática:

- números e operações;
- grandezas e medidas;
- espaço e forma;
- tratamento da informação.

No entanto, sempre que possível, em um mesmo capítulo aparecem conteúdos relacionados a mais de um eixo.

Na maioria das unidades, encontram-se também as seguintes seções:

- **Pense mais um pouco...**

Atividades e desafios de aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos na unidade. Essas atividades solicitam do aluno um pensamento mais elaborado, com a criação de estratégias pessoais de resolução.

- **Para saber mais**

Conteúdos e atividades que, fundamentados em contextos diversos, integram a Matemática a outras áreas do saber. A seção geralmente é finalizada por **Agora é com você!**, proposta de exercícios relacionados com o tema exposto.

- **Trabalhando a informação**

Os conteúdos de Estatística e de tratamento da informação, como arredondamentos, tabelas, gráficos e probabilidades, são trabalhados nessa seção.

- **Diversificando**

Esta seção apresenta atividades que diversificam o conteúdo trabalhado no capítulo, relacionando a outros contextos, como jogos, aplicações e desafios.

As atividades presentes na coleção — distribuídas entre **Exercícios propostos**, **Exercícios complementares** e **Diversificando** — foram pensadas com o intuito de:

- estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas;
- propor temáticas atuais relevantes à faixa etária a que a obra se destina.

Essa estrutura de obra pretende ser organizadora do trabalho docente sem, contudo, tornar-se uma “camisa de força” para alunos e professores. Por isso, os capítulos contemplam aspectos fundamentais a serem trabalhados com os alunos, mas oferecem maleabilidade e flexibilidade em sua abordagem, na tentativa de facilitar o trabalho do(a) professor(a) em fazer as necessárias adaptações a cada turma.

A importância de aprender Matemática

Ao construir sua história, o homem tem modificado e ampliado constantemente suas necessidades, individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura. O corpo de conhecimentos desenvolvido nesse longo trajeto ocupa lugar central no cenário humano. No que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, muitos continuam atravessando os séculos, enquanto outros já caíram em desuso, e há outros que ainda estão sendo incorporados ao rol de conteúdos necessários ao desenvolvimento de nossas ações cotidianas — afinal, fomos absorvendo práticas cada vez mais novas, que solicitam a ampliação e o aprofundamento de conhecimentos matemáticos.

Até algumas décadas atrás, “saber bem” Matemática implicava basicamente dominar e aplicar as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na atualidade, contudo, as pesquisas educacionais e as diretrizes pedagógicas oficiais apontam para a necessidade de que, em todos os anos da Educação Básica, a escola trabalhe conteúdos dos eixos números e operações, grandezas e medidas, espaço e forma, e tratamento da informação, tendo como referência os temas transversais.

Na perspectiva mundial da permanente busca de melhor qualidade de vida, a Matemática, sobretudo em seus aspectos essenciais, contribui de modo significativo para a formação do cidadão crítico e autoconfiante, com compreensão clara dos fenômenos sociais e de sua atuação na sociedade.

Para entender a real importância da Matemática, basta pensar em nosso cotidiano. É fácil fazer uma longa lista de ações nas quais precisamos mobilizar os conhecimentos desse campo: calcular uma despesa para efetuar seu pagamento; examinar diferentes alternativas de crédito; estimar valores aproximados; calcular medidas e quantidades com alguma rapidez; compreender um anúncio ou uma notícia apresentados por meio de tabelas e gráficos; analisar criticamente a validade de um argumento lógico; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico ou estatístico; decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema; orientarmo-nos no espaço (para deslocamentos ou indicações de trajetórias), entre tantas outras situações.

Podemos afirmar que a maior parte das sociedades de hoje depende cada vez mais do conjunto de conhecimento produzido pela humanidade, incluindo de maneira notável as contribuições da ciência matemática. Ao mesmo tempo, esse arcabouço cultural revigora-se incessantemente, com grande diversificação e sofisticação. Os apelos de um mundo que se transforma em incrível velocidade, em uma crescente variedade de domínios, constituem uma das razões mais significativas para o maior desafio dos educadores: preparar os jovens para uma atuação ética e responsável, balizada por uma formação múltipla e consistente.

■ Matemática acadêmica × Matemática escolar

No âmbito específico da Matemática, há muito mais conhecimento já estabelecido do que o que chega à sala de aula. A seleção desses conhecimentos-conteúdos e a forma de apresentá-los aos estudantes exigem bom senso e uma série de estudos e adaptações.

Em sua formação inicial, na universidade, o futuro professor de Matemática tem contato simultâneo com a **Matemática acadêmica** e a **Matemática escolar**. No entanto, em seu exercício profissional, o destaque será para a Matemática escolar; daí a relevância de procurarmos entender a distinção entre ambas.

De acordo com Moreira e David (2003), a Matemática acadêmica, ou científica, é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais. Nesse caso, as demonstrações, definições e provas de um fato e o rigor na linguagem utilizada ocupam papel relevante, visto que é por meio deles que determinado conhecimento é aceito como verdadeiro pela comunidade científica.

No caso da Matemática escolar, há dois aspectos fundamentais que modificam significativamente o papel do rigor nas demonstrações. O primeiro refere-se ao fato de a “validade” dos resultados matemáticos, que serão apresentados aos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, não ser colocada em dúvida; ao contrário, já está garantida pela própria Matemática acadêmica. O segundo aspecto diz respeito à aprendizagem; neste caso, o mais importante é o desenvolvimento de uma prática pedagógica que assegure a compreensão dos conteúdos matemáticos essenciais, assim como a construção de justificativas que permitam ao jovem estudante utilizá-los de maneira coerente e conveniente, tanto na vida escolar quanto na cotidiana.

O pensador Jules Henri Poincaré também discute a diferença entre o rigor necessário e conveniente à Matemática científica e o rigor adequado a um processo educativo. Para ele, uma boa definição é aquela que pode ser entendida pelo estudante. Além disso, deve-se considerar, no contexto escolar, a necessidade e a oportunidade de apresentar uma definição formal para os conteúdos matemáticos em estudo.

Segundo os PCN (1998),

[...] Tornar o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. [...]

(BRASIL, 1998, p. 36)

Nessa perspectiva, facilitar a aprendizagem com definições mais descritivas e metodologias adequadas ao nível de escolarização do aluno e proceder à avaliação desse processo são elementos fundamentais da práxis da Matemática escolar.

A Matemática como disciplina do currículo escolar do Ensino Fundamental

Nos currículos da Educação Básica, a Matemática está presente como objeto de estudo desde o início da escolarização. Em nossa cultura, está enraizada a ideia de que é necessário ensinar a para todas as crianças. Mas, enfim, qual Matemática? E para quê?

Ao professor de Matemática é fundamental refletir sobre o que é ensinado aos alunos da disciplina no nível elementar, isto é, no Ensino Fundamental. Entender por que consideramos importante desenvolver na escola determinados saberes matemáticos em detrimento de outros e por que escolhemos dedicar um tempo maior a alguns conteúdos e menor a outros pode auxiliar o planejamento didático e orientar a prática pedagógica.

Partimos da proposição de que uma característica da Matemática é ser uma linguagem humana e, como forma linguística, tem o poder de decodificar, traduzir e expressar o pensamento humano.

A palavra **matemática** vem do grego *mathematike* e, em sua origem, estava ligada ao ato de aprender, pois significava “tudo o que se aprende”, enquanto **matemático**, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém “disposto a aprender”. O verbo **aprender** era originalmente, em grego, *manthanein*, mas hoje o radical *math*, antes presente nas palavras ligadas à aprendizagem, parece ter perdido essa conotação, do que talvez resulte a ideia geral de que a Matemática é uma disciplina que lida apenas com números, grandezas e medidas e que se aprende na escola de forma compulsória.

Na realidade, a Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja,

[...] a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar. É por isso que a Matemática, assim como a alfabetização, é algo que deveria ser tornado disponível para todos [...].

(NUNES; BRYANT, 1997, p. 105)

Ou seja, a Matemática é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio na sociedade.

Um ponto crucial a considerar é que as formas de pensar características da Matemática podem expandir-se para outros raciocínios, impulsionando a capacidade global de aprendizado. Ao lidar com a Matemática, fundamentamos o pensamento em um conjunto de axiomas, na geração e validação de hipóteses, no desenvolvimento de algoritmos e procedimentos de resolução de problemas — ferramentas aplicáveis a um conjunto de situações similares —, estabelecendo conexões e fazendo estimativas. Analisando situações particulares e inserindo-as na estrutura global, é possível construir estruturas de pensamento também úteis em situações não matemáticas da vida em sociedade.

Hoje sabemos da importância de o indivíduo aprender continuamente, durante toda a vida, para assimilar as incessantes inovações do mundo moderno e, desse modo, realimentar seu repertório cultural. Em um ambiente mundial cada vez mais competitivo e desenvolvido do ponto de vista tecnológico, é preciso tornar acessíveis a todas as pessoas as vantagens desses avanços. É responsabilidade também da escola levar o aluno a perceber criticamente a realidade, cuja interpretação depende da compreensão de sua estrutura lógica, do entendimento da simbologia adotada no contexto, da análise das informações veiculadas por dados numéricos, imagens, taxas, indexadores econômicos etc. Um indivíduo com poucos conhecimentos matemáticos pode estar privado de exercer seus direitos como cidadão, por não ter condições de opinar em situação de igualdade com os demais membros da sociedade, nem de definir seus atos políticos e sociais com base em uma avaliação acurada da situação.

No ensino da Matemática, assumem grande importância aspectos como o estímulo a relacionar os conceitos matemáticos com suas representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); a motivação para identificar no mundo real o uso de tais representações; o desafio à interpretação, por meio da Matemática, da diversidade das informações advindas desse mundo.

■ A Matemática no currículo

A importância de ensinar Matemática no Ensino Fundamental, conforme indicam os PCN, decorre também da contribuição que a disciplina representa na formação do cidadão. Por isso, um currículo de Matemática

[...] deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente [...].

(BRASIL, 1998, p. 30)

Diversos pesquisadores e profissionais ligados à Educação Matemática têm procurado sintetizar o papel social do ensino dessa disciplina. Na literatura, segundo Ponte (2002), cabem ao ensino da Matemática quatro diferentes papéis:

- instrumento da cultura científica e tecnológica, fundamental para profissionais como cientistas, engenheiros e técnicos, que utilizam a Matemática em suas atividades;
- filtro social para a continuação dos estudos e seleção para as universidades;
- instrumento político, como símbolo de desenvolvimento e arma de diversas forças sociais, que utilizam as estatísticas do ensino da Matemática para seus propósitos;
- promotora do desenvolvimento dos modos de pensar a serem aplicados na vida cotidiana e no exercício da cidadania.

É evidente que cada um desses papéis serve a diferentes interesses e finalidades. Contudo, considerando os indivíduos seres sociais, é o último desses papéis o mais importante e o que mais nos interessa. Como explica Ponte:

Incluem-se aqui os aspectos mais diretamente utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isto sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância.

(Ibidem)

A função de promotora dos modos de pensar, porém, não se concretiza na prática somente por estar explicitada no currículo e nos programas.

O sistema de avaliação, os manuais escolares e a cultura profissional dos professores podem influenciar de tal modo as práticas de ensino que as finalidades visadas pelo currículo em ação, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é solenemente proclamado nos textos oficiais.

(Ibidem)

Ponte, ao discorrer sobre esses papéis, analisa em particular a função de filtro de alunos – “a verdade é que este papel de instrumento fundamental de seleção tem pervertido a relação dos jovens com a Matemática” (ibidem) –, que passam a enxergá-la como obstáculo a ser transposto para a conquista de objetivos, em vez de entendê-la como aliada nesse processo. Ponte enfatiza a importância de identificar os fatores que originam o insucesso dos alunos em Matemática. Para o pesquisador, tais fatores estão relacionados com:

- a crise da escola como instituição, que se reflete na aprendizagem em geral e na Matemática em particular;
- aspectos de natureza curricular — tradição pobre de desenvolvimento curricular de Matemática; insuficiente concretização prática e caráter difuso das finalidades do aprendizado;
- o próprio fato de a Matemática constituir-se em instrumento de seleção, o que, de imediato, desencanta e amedronta o aluno;
- questões ligadas à formação dos professores.

O papel do livro didático

Entendemos que, em geral, os recursos presentes nas salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do aluno. Neste caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando grande parte desse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de atividades e exercícios. Assim, o livro didático passaria a ser um contribuinte no processo de ensino-aprendizagem, como mais um interlocutor para o diálogo entre educador e educando.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, não pode se tornar uma “camisa de força”; seu uso deve ser intercalado com outros recursos de modo que enriqueça o trabalho do professor.

Concordamos com Romanatto (2004) quando diz que, partindo do princípio de que o verdadeiro aprendizado apoia-se na compreensão, e não na memória, e de que somente uma real interação com os alunos pode estimular o raciocínio e o desenvolvimento de ideias próprias em busca de soluções, cabe ao professor aguçar seu espírito crítico perante o livro didático.

Por todas essas razões, é importante que o professor de Matemática, ao adotar um livro didático, verifique se ele está de acordo com seus objetivos e se mantenha atento em não deixar que esse livro comprometa sua autonomia didática.

Temas transversais

As atuais e inúmeras discussões na área educacional têm nos alertado sobre mudanças na forma de conceber a Educação Básica no mundo. No que diz respeito à Educação Matemática, podemos dizer que ela atravessa um grato momento de revitalização:

Novos métodos, propostas de novos conteúdos e uma ampla discussão dos seus objetivos fazem da Educação Matemática uma das áreas mais férteis nas reflexões sobre o futuro da sociedade.

(D'AMBRÓSIO, 2000)

Uma proposta inovadora para o trabalho de conhecimentos diversificados foi sintetizada nos PCN, que orientam a incorporação de **temas transversais** às propostas curriculares das escolas de Educação Básica.

A orientação de introduzir e interligar no âmbito escolar temas como Trabalho e consumo, Orientação sexual, Pluralidade social, Ética, Meio ambiente e Saúde traz efetivas possibilidades de expansão dos currículos, para além dos conteúdos das disciplinas tradicionais.

Claro que a seleção dos temas transversais não se restringe aos temas propostos oficialmente e que não é possível trabalhar com todas as sugestões em um único ano. Eles podem ser escolhidos de acordo com as necessidades dos estudantes e da comunidade em que estão inseridos.

O importante é ter em vista que, por meio dos temas transversais, é possível incluir as questões sociais nos currículos escolares. Dessa perspectiva, os conteúdos trabalhados em cada disciplina ganham novo papel; o aprendizado da Matemática, entre outras abordagens, concorre para a formação da cidadania e, conseqüentemente, para um entendimento mais amplo da realidade social.

Por compreender a importância do trabalho com temas transversais, esta coleção procura, na medida do possível, incorporar e discutir alguns conteúdos matemáticos em contextos diversificados.

Propostas didáticas

Os tópicos a seguir destinam-se a oferecer suporte à discussão sobre as atuais tendências de ensino, que priorizam a globalidade da formação educacional, no sentido de capacitar os jovens para a positiva atuação na sociedade.

■ A resolução de problemas

O trabalho com a resolução de problemas é um dos destaques do ensino matemático contemporâneo. Para atender aos pressupostos de uma educação globalmente formadora, o “problema matemático” deve, sempre que possível, ser apresentado em um contexto desafiador, que faça sentido ao aluno, possibilitando a mobilização dos conteúdos estudados na busca de soluções e, sobretudo, abrindo espaço para a criação de estratégias pessoais e para a produção de novos conhecimentos.

De acordo com os PCN, resolver um problema pressupõe que o aluno:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros alunos;
- valide seus procedimentos.

Nesta coleção, procuramos entremear aos exercícios convencionais, de pura fixação do conteúdo, aqueles que associam os contextos matemáticos aos de outras áreas do conhecimento. A constante recorrência a imagens, gráficos e tabelas, muitos deles publicados em mídias atuais, tem por objetivo estimular os alunos a estabelecer conexões razoáveis com o mundo em que vivem.

Dentro da mesma proposta, algumas unidades também apresentam jogos desafiadores, já que a atividade lúdica na sala de aula tem sido apontada como parte da estratégia de ensino, pois, além do prazer inerente ao jogo, promove um efetivo desenvolvimento cognitivo ao propiciar, entre outros benefícios:

- a introdução e (re)significação de conceitos;
- a descoberta de estratégias de resolução de problemas;
- o estímulo à tomada de decisões;
- a interação social;
- o conhecimento da própria forma de pensar.

É importante lembrar que, para as atividades lúdicas alcançarem os efeitos esperados, são necessários alguns cuidados, como: a análise do conteúdo do jogo; a escolha do momento adequado — momento real e momento do aprendizado; a organização da sala de aula; e as necessárias intervenções pedagógicas.

■ O uso da calculadora nas aulas de Matemática

Esta coleção sugere o uso da calculadora como auxiliar na resolução de problemas. Das tecnologias disponíveis na escola, a calculadora é sem dúvida uma das mais simples e de menor custo.

É importante salientar que, como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem, a calculadora é somente mais um recurso auxiliar, e não um substituto do exercício do raciocínio ou da capacidade analítica. O que propomos é o uso da calculadora de maneira consciente, de modo que contribua para a reflexão dos conteúdos matemáticos.

De acordo com os PCN, alguns estudos recentes evidenciaram que a calculadora pode ser utilizada como instrumento motivador na realização de atividades exploratórias e investigativas e, assim, contribuir para a melhoria do ensino.

Podemos tomar como orientação para o uso da calculadora em atividades matemáticas os seguintes aspectos:

- É um instrumento que possibilita o desenvolvimento de conteúdos pela análise de regularidades e padrões e pela formulação de hipóteses.
- É um facilitador da verificação e análise de resultados e procedimentos.
- Sua manipulação e utilização são, em si, conteúdos a serem aprendidos.

Sugerimos que, inicialmente, o(a) professor(a) verifique o conhecimento que os alunos têm sobre o funcionamento da calculadora. O ideal é que a escola disponha de calculadoras simples, que ofereçam as funções básicas. Caso não seja possível disponibilizar uma calculadora para cada aluno, pode-se trabalhar em duplas ou a critério do(a) professor(a).

As atividades sugeridas pela coleção pressupõem um uso simples da calculadora, o que, no entanto, poderá ser ampliado de acordo com as necessidades e interesses de cada turma.

■ O trabalho em grupo

O trabalho em grupo, quando orientado e praticado adequadamente, além de contribuir para o desenvolvimento da habilidade de interação e participação social, auxilia no cultivo de habilidades que dependem do confronto e da partilha de ideias, já que oferece a oportunidade de provar resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos de resolução e validar ou não o pensamento na busca de soluções.

Além de reforçar a aprendizagem conceitual, o trabalho em grupo contribui para o aprimoramento do desenvolvimento de procedimentos e atitudes, tanto em relação ao pensar matemático quanto em relação à dinâmica grupal.

Pesquisas acerca dos processos de aprendizagem indicam que, mesmo com o exercício em grupo, acaba prevalecendo o aprendizado individual, que apenas se enriquece com as múltiplas contribuições geradas pelo trabalho grupal, pela interação entre diferentes modos de pensar.

Repetimos que, de qualquer modo, o sucesso do trabalho em grupo depende notavelmente do planejamento e da supervisão pedagógica, respeitadas os diferentes tipos de aprendizes. No intuito de colaborar com a atuação do professor em sala de aula, esta coleção preocupou-se em indicar, pontualmente, as atividades que mais possibilitam a exploração em grupo.

■ Outras possibilidades de trabalho

Como já exposto, entendemos o livro didático como apoio do trabalho pedagógico. Nessa perspectiva, o conhecimento, a experiência e a autonomia profissional fazem do docente um coautor do material publicado. Assim, a despeito das propostas explícitas da coleção, o(a) professor(a) sempre poderá ampliar, complementar e inovar no desenvolvimento e nas discussões dos temas e atividades sugeridos, aproveitando as novas questões que emergem em sala de aula no desenrolar do estudo.

É sempre bom lembrar que o estímulo à imaginação e ao interesse dos alunos conta com uma gama interessante de recursos didáticos, como o trabalho com jogos ou com materiais manipulativos, vídeos e ferramentas da informática; a pesquisa em livros paradidáticos, dicionários, periódicos (jornais, boletins, revistas de informação geral e especializada) e internet; ou as propostas para a realização de feiras, gincanas e exposições.

A avaliação e as práticas avaliativas

O cenário de ampla discussão dos modelos e das práticas pedagógicas que se estabeleceu nos últimos anos de nossa história trouxe à tona um ponto vital para o estabelecimento de novas formas de pensar a educação: as concepções e os métodos de **avaliação da aprendizagem**.

Quanto à importância da avaliação, tomamos emprestadas as palavras de Regina Pavanello e Clélia Nogueira:

Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao aluno, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.

[...] Acreditamos que poucos educadores e educandos têm consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural aos seres humanos, de que os homens se avaliam constantemente, nas mais diversas situações, diante da necessidade de tomar decisões, desde as mais simples até as mais complexas.

(PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 30, 36)

As divergências, contudo, têm início quando se pretende **redefinir** a avaliação escolar e os **modos e graus de exigência** deste processo. Podemos dizer que, por longo tempo, na maior parte da história da educação matemática, o que vigorou foi a chamada **avaliação informativa**:

Na prática pedagógica da Matemática, a avaliação tem, tradicionalmente, centrado-se nos conhecimentos específicos e na contagem de erros. É uma avaliação somativa, que não só seleciona os estudantes, mas os compara entre si e os destina a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Porém, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do “certo ou errado”.

(Ibidem, p. 36-7)

Alguns autores, porém, concordam que mesmo na avaliação tradicional há algum espaço para uma busca mais consciente do processo formativo do aluno. As mesmas pesquisadoras, por exemplo, fazem a seguinte consideração:

Mesmo numa avaliação tradicional, na qual é solicitada ao aluno apenas a resolução de exercícios, é possível avançar para além da resposta final, considerando:

- o modo como o aluno interpretou sua resolução para dar a resposta;
- as escolhas feitas por ele para desincumbir-se de sua tarefa;
- os conhecimentos matemáticos que utilizou;
- se utilizou ou não a Matemática apresentada nas aulas; e
- sua capacidade de comunicar-se matematicamente, oralmente ou por escrito.

(BURIASCO, 2002, apud PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37)

Uma concepção de avaliação que tem se configurado nos últimos anos é a que se refere à **avaliação formativa**. Alguns autores esclarecem que ela consiste num conjunto de métodos e recursos cujos objetivos são recolher informações sobre a aprendizagem e lidar melhor com os problemas experimentados pelos estudantes, ou seja, fazer as devidas ponderações sobre cada caso e partir para as alterações que se fizerem necessárias.

Principalmente a partir da década de 1980, muitos estudiosos têm feito importantes contribuições ao entendimento que devemos ter sobre avaliação como processo, ação contínua. Entre esses pesquisadores, destacamos o trabalho de Luckesi (2001). Segundo o autor, a avaliação deve ser tomada como instrumento para a compreensão do estágio em que se encontra o estudante, tendo em vista a tomada de decisões, suficientes e satisfatórias, para avançar no processo de aprendizagem.

Os PCN, divulgados desde fins dos anos 1990, colaboraram para a ampliação do olhar sobre as funções da avaliação. Destacam, por exemplo, a **dimensão social** e a **dimensão pedagógica** da avaliação.

No primeiro caso, a avaliação tem a função de, para os estudantes, informar acerca do desenvolvimento das potencialidades que serão exigidas no contexto social, garantindo sua participação no mercado de trabalho e na esfera sociocultural. Para os professores, a avaliação deve auxiliar na identificação dos objetivos alcançados, com a intenção de reconhecer as capacidades matemáticas dos educandos.

No segundo caso, a avaliação tem a função de informar os estudantes sobre o andamento da aprendizagem propriamente dita, isto é, dos conhecimentos adquiridos, do desenvolvimento de raciocínios, dos valores e hábitos incorporados e do domínio de estratégias essenciais.

Os **instrumentos de avaliação** (provas, trabalhos e registros de atitudes, entre outros) devem ser capazes de fornecer informações ao professor sobre as condições de cada estudante com relação à resolução de problemas, ao uso adequado da linguagem matemática, ao desenvolvimento de raciocínios e análises e à integração desses aspectos em seu conhecimento matemático. Devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não se evidenciam em avaliações escritas.

Para Charles Hadji (2001, p. 21), a avaliação formativa implica, por parte do professor, flexibilidade e vontade de adaptação e de ajuste. O autor ressalta que a avaliação que não é seguida da **modificação das práticas pedagógicas** tem pouca capacidade de ser formativa. Posição semelhante é defendida pelas educadoras Pavanello e Nogueira:

É preciso reconhecer [...] que o professor deve selecionar, dentre as informações captadas, apenas o que é realmente importante [...]. Para isso, existem indicadores que, segundo Vergani (1993, p.155), podem nortear a observação pelo professor, entre os quais poderiam ser citados:

- o interesse com que o aluno se entrega às atividades matemáticas;
- a confiança que tem em suas possibilidades;
- sua perseverança, apesar das dificuldades encontradas;
- se formula hipóteses, sugere ideias, explora novas pistas de pesquisa;
- se avalia criteriosamente a adequação do processo que adotou ou a solução que encontrou;
- se reflete sobre a maneira de planificar uma atividade e de organizar seu trabalho;
- se pede ajuda em caso de dúvida ou de falta de conhecimentos; e
- se comunica suas dificuldades e descobertas aos colegas, de maneira adequada.

No entanto, para que essas atitudes possam ser cultivadas pelo aluno, a prática pedagógica não pode mais se centrar na exposição e reprodução de conteúdos que só privilegiam a memorização e não o desenvolvimento do pensamento.

(PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 38-9)

Afinal o que deve ser avaliado: conteúdos, habilidades, competências...?

Tudo deve ser avaliado. O fundamental, porém, é saber **como olhar, o que olhar e como analisar** as coletas. Para isso, o professor pode recorrer a diversificados instrumentos de coleta de informações, selecionando aqueles que permitam compor o melhor panorama da aprendizagem matemática de seus alunos.

■ Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática

Como sugestão ao professor, vamos apresentar aqui, resumidamente, um leque de modalidades de avaliação.

- **Autoavaliação:** em primeiro lugar, o professor deve auxiliar os alunos a compreenderem os objetivos da autoavaliação, fornecendo-lhes para isso um roteiro de orientação. Os alunos devem ser motivados a detectar suas dificuldades e a questionar as razões delas.
- **Prova em grupo seguida de prova individual:** nessa modalidade, as questões são resolvidas em grupo e, a seguir, cada aluno resolve questões do mesmo tipo individualmente. O intuito é colaborar para a metacognição, para que o aluno tenha consciência do próprio conhecimento, de suas potencialidades e dificuldades.
- **Testes-relâmpago:** os testes-relâmpago normalmente propõem poucas questões, uma ou duas apenas. Têm por objetivo não permitir que os alunos mantenham-se sem estudo durante longos períodos, de modo que se acumule uma grande quantidade de conteúdos. Este recurso, além de manter os alunos atentos aos assuntos contemplados em aula, ajuda-os na familiarização com os processos avaliativos.
- **Testes e/ou provas cumulativas:** este instrumento de avaliação traz à tona conteúdos trabalhados em momentos anteriores. Tal prática contribui para que os alunos percebam as conexões entre os conteúdos e a importância de usar os conhecimentos matemáticos de forma contínua.

- **Testes em duas fases:** este tipo de teste, ou prova, é realizado em duas etapas:
 - 1ª) a prova é realizada em sala de aula, sem a interferência do professor;
 - 2ª) os alunos refazem a prova dispondo dos comentários feitos pelo professor.
 O sucesso desse instrumento depende de fatores como:
 - a escolha das questões deve ser norteada pelos objetivos do teste;
 - o conteúdo dos comentários formulados pelo professor entre as duas fases;
 - a consciência, por parte dos alunos, de que a segunda fase não consiste em mera correção do que está errado, mas em uma oportunidade de aprendizagem.
 As questões devem ser de dois tipos:
 - as que requerem interpretação ou justificção, e problemas de resolução relativamente breve;
 - as abertas, e problemas que exijam alguma investigação e respostas mais elaboradas.
- **Resolução de problemas:** chamamos de “problema matemático” aquele que envolve um raciocínio matemático na busca por solução. Pode ser resolvido individualmente ou em grupo. A atividade de resolução de problemas deve envolver, entre outros fatores:
 - a compreensão da situação-problema por meio de diferentes técnicas (leitura, interpretação, dramatização etc.);
 - a promoção da criação de estratégias pessoais (não haver solução pronta);
 - a identificação do problema e a seleção e mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários a sua resolução;
 - a avaliação do processo, para verificar se, de fato, os objetivos estão sendo atingidos;
 - a interpretação e verificação dos resultados, para que se avaliem sua razoabilidade e validade.
- **Mapa conceitual:** durante a fase formal de avaliação, o professor pode solicitar aos alunos que construam o mapa conceitual sobre um tema já discutido e explorado em aula. Esse tipo de instrumento propicia a verificação da aprendizagem mais aberta e pode ser usado como autoavaliação.
- **Trabalho em grupo:** para que o grupo trabalhe de fato como grupo, são fundamentais a orientação e o auxílio do professor no sentido de estimular os alunos a desempenharem novas funções em sala de aula, em colaboração com os colegas. Um incentivo para isso é o grupo receber uma única folha de papel com as atividades propostas, para que todos resolvam em conjunto. A questão a ser respondida deve ser desafiadora, despertando a curiosidade e a vontade de resolvê-la.
- **Diálogos criativos:** a proposta é que os alunos produzam diálogos matemáticos em que estejam inseridos conceitos e propriedades de determinado conteúdo.
- **Histórias em quadrinhos:** nesta modalidade, os alunos criam histórias em quadrinhos para explorar os assuntos estudados em sala de aula. Esse é um recurso que, além de intensificar o interesse pela Matemática, permite ao professor a avaliação do conhecimento assimilado pelos alunos em contextos diversificados.
- **Seminários e exposições:** são atividades que oferecem oportunidade para os alunos organizarem seu conhecimento matemático e suas ideias sobre os assuntos explorados em aula, além de promover a desinibição e autonomia dos alunos.
- **Portfólios:** é uma coletânea dos melhores trabalhos que podem ser escolhidos pelos próprios estudantes. O professor deve orientá-los e sugerir que selecionem, durante um período, as atividades de Matemática que preferirem e que justifiquem as suas escolhas.

Pretendemos aqui apenas apresentar sugestões que auxiliem a prática avaliativa. Sem dúvida, outros instrumentos de avaliação podem ser contemplados em conformidade com o contexto escolar.

É importante reforçar que um processo fecundo de avaliação deverá considerar, além dos instrumentos apropriados, o estabelecimento de critérios de correção alicerçado em objetivos claros e justos. Chamamos a atenção para o tratamento que devemos dar ao “erro” nas

atividades de Matemática. Ele deve ser analisado criticamente, de modo que forneça indícios de sua natureza e da correção do percurso pedagógico, para o (re)planejamento e a execução das atividades em sala de aula.

Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no aluno um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para seu futuro pessoal.

(PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37)

Por fim, a observação atenta e a percepção aguçada do professor também são relevantes no processo de avaliação, no sentido de detectar as aprendizagens, que muitas vezes não são reveladas pelos instrumentos avaliativos escolhidos.

Formação continuada e desenvolvimento profissional docente

Assim como os estudantes precisam desenvolver habilidades e competências diversificadas, em sintonia com a época em que vivem, nós, professores, mais que outros profissionais, temos a máxima urgência e necessidade de cuidar da continuidade de nossa formação e do consequente desenvolvimento profissional.

O que aprendemos na universidade e a experiência que adquirimos com a prática pedagógica não são suficientes para nos manter longe de atividades de formação. Pesquisas e estudos no campo da Educação Matemática e áreas afins têm nos auxiliado a encontrar as respostas para as muitas dúvidas e angústias inerentes à profissão: “O que ensinar?”, “Por que ensinar?”, “Como ensinar?”...

O desenvolvimento profissional do(a) professor(a) deve ser entendido como um processo contínuo, que se dá ao longo de toda a vida profissional, não ocorre ao acaso, tampouco é espontâneo, mas é resultado do processo de busca que parte das necessidades e dos interesses que surgem no percurso.

Na realidade, a formação profissional docente tem início na experiência como aluno e na formação acadêmica específica, do período de iniciação à docência, até edificar-se com a experiência profissional e os processos de formação continuada.

Lembramos que as ações de formação continuada podem ser desenvolvidas por múltiplas modalidades, como leituras atualizadas, cursos, palestras, oficinas, seminários e grupos de estudos.

Algumas associações e centros de Educação Matemática

- APM – Associação de Professores de Matemática (Portugal)
Disponível em: <<http://www.apm.pt>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- Caem – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (USP)
Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/caem/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- CCE – Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Disponível em: <<http://www.uel.br/cce/portal/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- CECEMCA – Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp)
Disponível em: <<http://www2.fc.unesp.br/cecemca/index.htm>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- Cecimig – Centro de Ensino de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Disponível em: <<http://www.uel.br/cce/portal/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.

- Cempem – Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Disponível em: <<http://www.cempem.fae.unicamp.br/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- CREEM – Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino da Universidade Estadual de Blumenau (Furb)
Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- Edumatec – Programa de pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Disponível em: <<http://www.ufpe.br/ppgedumatec>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Disponível em: <<http://www.gepem.ufrj.br>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- Gepeticem – Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Disponível em: <<http://www.gepeticem.ufrj.br/>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- GPEEM - Grupo de Pesquisa e Estudo em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/faced/educacaomatematica>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- LEG – Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense (UFF)
Disponível em: <<http://www.uff.br/leg/>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- LEM – Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/lem/>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- LEM – Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo (USP)
Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/lem/>>. Acesso em: 17 abr. 2015.
- Lemat – Laboratório de Educação Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFGO)
Disponível em: <<http://lemat.mat.ufg.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- Lemat – Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Disponível em: <<http://lemat.sites.ufsc.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- Lepac – Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica da Universidade Federal da Paraíba (UFPB)
Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/lepac/frame.htm>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- PPGECEM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
Disponível em: <<http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- PPGECEM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Disponível em: <<http://www.posgraduacao.ufrn.br/ppgecm>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Disponível em: <<http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática
Disponível em: <<http://www.sbhmat.org/>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
Disponível em: <<http://www.sbm.org.br>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- SBMAC – Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
Disponível em: <<http://www.sbmac.org.br/>>. Acesso em: 23 abr. 2015.

Sugestões de leituras para o professor

■ Álgebra

- *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. Eliane Reame de Sousa e Maria Ignes Diniz. São Paulo: IME-USP, 1994.
- *Aplicações da matemática escolar*. D. Bushaw; M. Bell; H. O. Pollack. São Paulo: Atual, 1997.
- *Aprenda Álgebra brincando*. I. Perelmann. Curitiba: Hemus, 2001.
- *Erros e dificuldades no ensino da Álgebra: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula*. Renata Anastacia Pinto. 1997. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.
- *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. R. Lins; C. Rômulo; J. Gimenez. Campinas: Papirus, 1997.
- *Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro*. Ângela Miorin; Antonio Miguel; Dário Fiorentini. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp, n. 1, 1993.
- *Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental*. Nathalia Tornisiello Scarlassari. 2007. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.

■ Avaliação

- *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Helena Noronha Cury. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos*. Vânia Maria Pereira dos Santos (Coord.). Rio de Janeiro: UFRJ; Projeto Fundão, 1997.
- *Avaliação da aprendizagem escolar*. Cipriano Carlos Luckesi. São Paulo: Cortez, 2001.
- *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens*. Philippe Perrenoud. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- *Avaliação desmistificada*. Charles Hadji. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. Jussara Hoffmann. Porto Alegre: Mediação, 2000.
- *Currículo e avaliação: uma perspectiva integrada*. Maria Palmira Castro Alves. Porto: Porto, 2004.
- *O erro como estratégia didática: estudo dos erros no ensino da matemática elementar*. Neuza Bertoni Olinto. Campinas: Papirus, 2000.
- *Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão*. Regina Buriasco. *Educação em Revista*. Belo Horizonte: UFMG, n. 36, 2002.

■ Educação Matemática

- *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Cecília Parra; Irma Saiz (Org.). Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- *Educação Matemática, leitura e escrita: Armadilhas, utopias e realidade*. Celi Espasadin Lopes; Adair Mendes Nacarato (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2009.
- *Ensinar e aprender Matemática*. Luiz Carlos Pais. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- *Ensino de Matemática na escola de nove anos: Dúvidas, dívidas e desafios*. Vinício de Macedo Santos. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Adair Mendes Nacarato; Celi Espasandin Lopes (Org.). Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Ubiratan D'Ambrosio. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

- *Fundamentos da Didática da Matemática*. Saddo Ag Almouloud. Curitiba: UFPR, 2007.
- *Letramento no Brasil: habilidades matemáticas*. Maria da Conceição (Org.) F. R. Fonseca. São Paulo: Global, 2004.
- *Matemática, estupefação e poesia*. Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- *Múltiplos olhares: Matemática e produção de conhecimento*. Jackeline Rodrigues Mendes; Regina Célia Grando (Org.). São Paulo: Musa, 2007.
- *Para aprender Matemática*. Sérgio Lorenzato. Campinas: Autores Associados, 2006.

■ Espaço e forma

- *Aprendendo e ensinando Geometria*. Mary M. Lindquist; Albert P. Shulte (Org.). São Paulo: Atual, 1994.
- *Ensino de Geometria no virar do milênio: investigações em Geometria na sala de aula*. Eduardo Veloso; Helena Fonseca; João Pedro da Ponte; Paulo Abrantes (Org.). Lisboa: DEFCUL, 1999.
- *Espaço e forma*. Célia Maria C. Pires; Edda Curi; Tânia Maria M. Campos. São Paulo: Proem, 2000.
- *Experiências com Geometria na escola básica: narrativas de professores em (trans)formação*. Adair Mendes Nacarato; Adriana A. M. Gomes; Regina Célia Grando. São Carlos: Pedro & Editores, 2008.
- *Geometria na era da imagem e do movimento*. Maria Laura Lopes; Lilian Nasser (Org.). Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.
- O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. Regina Maria Pavanello. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp, n. 1, p. 7-17, mar. 1993.
- Por que não ensinar Geometria? Sérgio Lorenzato. *Educação Matemática em Revista*. Florianópolis: SBEM, n. 4, 1ª sem. 1995.

■ História da Matemática

- *Introdução à história da Educação Matemática*. Antonio Miguel; Maria Ângela Miorim. São Paulo: Atual, 1998.
- *Introdução à história da Matemática*. Howard Eves. Campinas: Unicamp, 1997.
- *História concisa das matemáticas*. Dirk J. Struik. Lisboa: Gradiva, 1998.
- *História da Matemática*. Carl B. Boyer. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Tatiana Roque. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- *História universal dos algarismos*. Georges Ifrah. São Paulo: Nova Fronteira, 1997.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra*. John K. Baumgart. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*. Howard Eves. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Números e numerais*. Bernard H. Gundlach. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Trigonometria*. Howard Eves. São Paulo: Atual, 1992.

■ Jogos

- *Aprender com jogos e situações-problema*. Lino de Macedo; Ana Lúcia S. Petty; Norimar C. Passos. Porto Alegre: Artmed, 2000.
- *Jogos de matemática de 6ª ao 9ª ano*. Kátia Stocco Smole; Estela Milani Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- *O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas*. Rosely Palermo Brenelli. Campinas: Papirus, 1996.

- *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. Regina Célia Grando. São Paulo: Paulus, 2004.
- *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*. Lino de Macedo; Ana Lúcia S. Petty; Norimar C. Passos. Porto Alegre: Artmed, 2005.

■ Matemática e temas transversais

- *A Matemática e os temas transversais*. Alexandrina Monteiro; Geraldo Pompeu Junior. São Paulo: Moderna, 2001.
- *Matemática escolar e Matemática da vida cotidiana*. José Roberto B. Giardinetto. Campinas: Autores Associados, 1999.
- *Matemática em projetos: uma possibilidade*. Celi Aparecida Espasandin Lopes (Org.). Campinas: Unicamp, 2003.

■ Números e operações

- *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa*. Analúcia Schliemann; David Carraher (Org.). Campinas: Papirus, 1998.
- *Bolema* (Boletim de Educação Matemática). Rio Claro: Unesp, v. 21, n. 31, 2008.
- *Conteúdo e metodologia da Matemática: números e operações*. Marília Centurión. São Paulo: Scipione, 1994.
- *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Rômulo Campos Lins; Joaquim Gimenez. Campinas: Papirus, 1997.
- *Repensando adição e subtração*. Sandra Magina; Tânia M. M. Campos; Terezinha Nunes; Verônica Gitirana. São Paulo: Proem, 2001.
- *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*. Maria José Ferreira da Silva. 1997. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

■ Tecnologia

- A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. Katia Maria de Medeiros. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo: SBEM, n. 14, 2003.
- *Ensinando com tecnologia: criando salas de aula centradas nos alunos*. Judith H. Sandholtz; Cathy Ringstaff; David C. Dwyer. Porto Alegre: Artmed, 1997.
- *Informática e Educação Matemática*. Marcelo de Carvalho Borba; Miriam G. Penteado. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- *Informática educativa: dos planos e discursos à sala de aula*. Ramon de Oliveira. Campinas: Papirus, 1997.
- *Prática pedagógica: ambientes informatizados de aprendizagem, produção e avaliação de software educativo*. Celina Couto Oliveira; José Wilson Costa; Mércia Moreira. Campinas: Papirus, 2001.
- *Projetos de trabalho em informática: desenvolvendo competências*. Sônia Petitto. Campinas: Papirus, 2003.
- *Uso didático da calculadora no ensino fundamental: possibilidades e desafios*. Juliana de Alcântara S. Rubio. 2003. Dissertação (Mestrado) – Unesp, Marília.

■ Tratamento da Informação

- *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular*. Celi Aparecida Espasandin Lopes. 1998. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.
- *Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas*. Anna Regina Lanner; Celi Aparecida Espasandin Lopes (Org.). Campinas: Unicamp, 2003.

- *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Irene Maurício Cazorla; Eurivalda dos Santos Santana. Ilhéus: Via Litterarum, 2006.
- *Tratamento da Informação: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais*. Maria Laura M. Leite Lopes (Org.). Rio de Janeiro: UFRJ, 2005.

■ Resolução de problemas

- *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. George Polya. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Stephen Krulik; Robert E. Reys (Org.). São Paulo: Atual, 1997.
- *Didática da resolução de problemas de Matemática*. Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 1991.
- *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática*. Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2001.

■ Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática

- **BOLEMA** (Boletim de Educação Matemática)
Publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociência e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (IGCE-Unesp), *campus* de Rio Claro.
Disponível em: <<http://www2.rc.unesp.br/bolema/>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Boletins do GEPEM**
Publicado pelo Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Disponível em: <<http://www.gepem.ufrj.br/>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Educação Matemática em Revista**
Publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Disponível em: <<http://www.sbem.com.br>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **História & Educação Matemática**
Publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática
Disponível em: <<http://www.sbhmat.com.br/>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Jornal do professor de Matemática**
Publicado pelo Departamento de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/lem/jpm.html>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Revemat – Revista eletrônica de Educação Matemática**
Publicada pelo Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática
Disponível em: <<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Revista Educação e Matemática e Revista Quadrante**
Publicada pela Associação de Professores de Matemática de Portugal
Disponível em: <<http://www.apm.pt>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Revista do professor de Matemática**
Publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática
Disponível em: <<http://www.sbm.org.br>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- **Revista Zetetiké**
Publicada pelo Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Disponível em: <<http://www.cempem.fae.unicamp.br/>>. Acesso em: 23 abr. 2015.

Bibliografia consultada

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Maria de Lurdes; OLIVEIRA, J. *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 1999.

ARAKI, Tetsuo. *As práticas avaliativas em sala de aula de Matemática: possibilidades e limites*. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco, Itatiba.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional no 9.394*. Brasília, 20 dez. 1996.

_____. Ministério da Educação e Cultura. *PNLD 2008 – Guia de Livros Didáticos*. Brasília: MEC, 2007.

_____. Ministério da Educação e do Desporto; Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Volume 3: Matemática, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília: MEC; SEF, 1998.

BURIASCO, Regina. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. *Educação em Revista (UFMG)*, Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002.

CAPORALE, Silvia M. M. *Formação continuada de professores que ensinam Matemática: possibilidades de desenvolvimento profissional a partir de um curso de especialização*. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco, Itatiba.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 2000.

FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes; PINTO, R. Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. *Quadrante*, v. 8, n. 1/2, p. 33-60, 1999.

FIORENTINI, Dario et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, n. 36, p. 137-160, 2002.

HADJI, Charles. *Avaliação desmistificada*. Trad. Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2001.

HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. 18. ed. Porto Alegre: Mediação, 2000.

LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem*. São Paulo: Cortez, 2001.

MEDEIROS, Katia Maria de. A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. *Educação Matemática em Revista*, n. 14, p. 19-28, 2003.

MONTEIRO, Alexandrina; POMPEU, Geraldo Jr. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, v. 11, n. 19, p. 57-80, 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da. O ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? Conferência plenária apresentada no seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas". Lisboa: CNE, 2002.

ROMANATTO, Manoel Carlos. O Livro Didático: alcances e limites. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. *Anais*.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: Métodos alternativos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 1997. v. 1. 224 p.

Parte específica - Orientações gerais para o desenvolvimento dos capítulos

CAPÍTULO

1

Números inteiros



Objetivos do capítulo

- Levar o aluno a:
- Ampliar o conceito de número pela incorporação dos números inteiros negativos.
 - Relacionar o conceito de números inteiros com situações cotidianas ou propriamente matemáticas.
 - Aplicar os conceitos e as técnicas na resolução de problemas.
 - Fazer uso da linguagem matemática para interpretar e expressar resultados e conclusões que envolvam números inteiros.
 - Analisar tabelas.

Orientações gerais do capítulo

O uso de *números inteiros negativos* desenvolveu-se historicamente da necessidade de atribuir significado a expressões numéricas do tipo $2 - 7$, as quais passaram a ser legitimadas com a diversificação das práticas sociais, como a presença das transações bancárias e contábeis, entre outras. Enquanto números na forma fracionária eram aceitos desde a Antiguidade, os números negativos foram incorporados plenamente à Matemática ocidental apenas por volta do século XVII.

Para enriquecer o trabalho com números inteiros, indicamos os seguintes livros:

GUELLI, Oscar. *Números com sinais: uma grande invenção!* São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática).

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Números negativos*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?).

RAMOS, Luzia Faraco. *História de sinais*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática).

Explorar com os alunos os exemplos apresentados no início desse capítulo que relacionam a ideia de número negativo a situações cotidianas, como a indicação de altitudes abaixo do nível do mar, de temperaturas negativas, de saldos bancários devedores e de saldos de gols de equipes esportivas. Explique para os alunos que os fatos apresentados na situação 1 e na situação 2 estão relacionados com a ideia de referencial, isto é, são convenções socialmente aceitas e úteis para padronizar medidas. Explore a situação 4 apoiando-se na ideia de que ganhos e perdas se compensam, pois, quando uma equipe sofre 3 gols, alterando seu saldo em -3 , a equipe adversária aumenta seu saldo em $+3$ gols. Questione os alunos sobre outras situações em que isso ocorre.

O **exercício 4** pode ser complementado com a seguinte atividade em grupo: os alunos imaginam quatro equipes (A, B, C e D) e, por meio do lançamento de dados de seis faces, realizam seis partidas entre elas, registrando os resultados em uma tabela. Suponhamos que, ao jogar o dado referente à equipe A, obtenha-se a face de número 3, e que, ao jogar o dado referente à equipe B, obtenha-se a face de número 2; o placar do jogo será então 3×2 para a equipe A. Após a realização das seis partidas, os alunos calculam o saldo de gols de cada equipe. Essa atividade permite que os alunos trabalhem habilidades como:

- Registrar, organizar e interpretar os resultados obtidos, estabelecendo conexão com o eixo de conteúdos “Tratamento da informação”.
- Aplicar os conceitos referentes a números inteiros.
- Explorar de forma não sistemática a adição de números inteiros, estabelecendo vínculos com o estudo posterior do tema.

O **exercício 9** exige do aluno uma compreensão maior da reta numérica. Seria interessante que, antes de começar o exercício, o professor desenhasse na lousa uma reta numérica, com indicações de -5 a 5 , e propusesse aos alunos questões como:

- a) Aponte um número inteiro que esteja entre -5 e 5 e à esquerda de zero. *Resposta:* -4 , -3 , -2 ou -1
- b) Dê um número inteiro que esteja entre -5 e 5 e à direita de 3 . *Resposta:* 4
- c) Qual número inteiro está entre 1 e 2 ? *Resposta:* Não há número inteiro entre 1 e 2

Ainda no exercício 9, os alunos devem perceber que, para o item **a**, existe mais de uma possibilidade (1 , 2 , 3 , 4 e 5), assim como para o item **b** (-1 , -2 , -3 , -4 e -5), enquanto para o item **c** não existe nenhum número inteiro nessas condições.

Ao trabalhar o **exercício 22**, é importante o professor explicar aos alunos que o calendário gregoriano, apesar de guardar algumas similaridades com o conjunto dos números inteiros, apresenta uma diferença significativa: não contém o ano zero.

Para a resolução do **exercício 24**, há diversas formas de correção das sentenças falsas. Por exemplo, a sentença “O zero é maior que qualquer número positivo” pode ser alterada para:



- O zero é menor que qualquer número positivo.
- O zero é maior que qualquer número negativo.

No **exercício 25**, o aluno encontra uma situação contextualizada, na qual é levado, de maneira intuitiva, a efetuar adições com números inteiros. Dessa forma, o aluno dá o primeiro passo na construção desse conceito e antecipa-se à apresentação formal que vem no item seguinte do capítulo.

Para complementar o **exercício 29**, o professor pode propor questões como:

- Se a soma de dois números inteiros de sinais diferentes é um número positivo, qual deve ser o sinal do número de maior valor? *Resposta:* O sinal do número de maior valor deve ser positivo.
 - Qual deve ser o sinal da soma de dois números de mesmo sinal? *Resposta:* O mesmo sinal dos números das parcelas.
- Pode-se ainda solicitar aos alunos que deem exemplos para confirmar as respostas.

Os **exercícios 32 e 33** propõem o uso de calculadora simples. Se não houver calculadoras em número suficiente, divida a sala em grupos, de modo que cada aluno tenha ao menos uma oportunidade de usar o instrumento. Nesse tipo de atividade, convém estar atento ao fato de que pode haver calculadora com programação diferente daquela que consideramos. Esse fato pode constituir um novo e rico desafio a ser explorado pelos alunos nas discussões em grupo. Após o **exercício 33**, pode-se sugerir aos alunos a atividade de digitar na calculadora as sequências de teclas a seguir e pedir que escrevam a operação que foi realizada:

- 
- 

Para complementar o trabalho proposto no “Trabalhando a informação” da **página 23**, sugerir aos alunos que, em grupos, selecionem dados de seu cotidiano que possibilitem o uso de números negativos. Depois, peça que organizem esses dados em uma tabela e inventem questões para que outro grupo as resolva. Por exemplo, os alunos podem pesquisar em padarias do bairro a massa, em grama, de 1 pãozinho (escolhido ao acaso) e registrar a variação em relação a um valor médio de 50 gramas. Quando a massa do pãozinho ultrapassar 50 gramas, registra-se a diferença por meio de um número positivo (por exemplo, 53 gramas seriam indicadas por $+3$); se a massa for inferior a 50 gramas, registra-se a diferença por um número negativo (por exemplo, 45 gramas seriam indicadas por -5). Suponha que um grupo de alunos tenha visitado seis padarias e registrado os dados como na tabela abaixo.


Padaria	Massa do pãozinho	Registro
Belo Pão	56	$+6$
Pérola	51	$+1$
Doçura	48	-2
Pingado da Hora	53	$+3$
Popular	50	0
Grão D'Ouro	46	-4

Com os dados da tabela, eles poderiam propor questões do tipo:

- Qual padaria apresentou o pãozinho com a maior variação em relação a 50 gramas?
- Com base na amostra de um único pãozinho, podemos afirmar que a padaria Belo Pão é a que sempre vende o pãozinho de maior massa?

O **exercício 36** exige que aluno observe as resoluções e tire as próprias conclusões. Esse é um momento de tomada de decisões, em que o aluno pode escolher o que considera a melhor maneira de resolver, adquirindo autonomia.

O “Para saber mais” da **página 26** explica os fusos horários que vigoram no Brasil. Explore-o fazendo mais perguntas sobre o horário em pontos variados do Brasil, como nos itens **a**, **b** e **d**. Se houver possibilidade, mostre o mapa-múndi com todos os fusos horários. Além de uma abordagem interdisciplinar com a Geografia, a História e as Ciências, o exercício propicia estabelecer conexões com o eixo de conteúdos “Espaço e forma”. Pode-se pesquisar e discutir, por exemplo, os motivos políticos pelos quais o meridiano tomado como referência para a determinação do horário em outros países foi o de Greenwich, na Inglaterra. Também é interessante chamar a atenção para a história da determinação das longitudes e sua importância para a navegação e o comércio marítimo seguro, entre outros aspectos da época.

O **exercício 44** exige uma calculadora que possua a tecla . Explique aos alunos que essa tecla muda o sinal do número que foi digitado antes, ou seja, pede o oposto do número que está no visor. Pode-se pedir a eles que digitem as seguintes teclas na calculadora e analisem o resultado:


a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

(Atenção, teste as calculadoras que serão usadas para essa atividade, pois algumas, embora tenham a tecla , não apresentam o recurso dos itens **d** e **e**.)

Para explorar o “Pense mais um pouco...” da **página 28**, divida os alunos em duplas e peça que construam duas “pilhas”, criando um “segredo”. A primeira pilha terá todos os números, e a segunda será incompleta. Cada dupla deverá trocar sua proposta com outra, para descobrir o segredo e, assim, completar a segunda pilha.

No **exercício 48**, orientar os alunos a observar um mapa-múndi e localizar o Egito. Se possível, peça que, em grupos, façam uma pesquisa sobre Cleópatra e seu reinado. A apresentação dos resultados da pesquisa pode ser por meio de cartazes ou de breves dramatizações.

O **exercício 49** pede aos alunos que formem pares num grupo de quatro elementos, o que, ao todo, resultará em seis pares distintos. Pergunte aos alunos: quantas adições seriam feitas se fossem cinco cartões? Como eles fariam essa conta? Explore a formação de duplas em um grupo de elementos; isso é um bom desenvolvimento intuitivo da *análise combinatória*. Uma variação interessante desse mesmo exercício é apresentar previamente os resultados desejados e pedir a expressão algébrica que os forneçam. Por exemplo:

Dados os números inteiros (-2) , (-1) , $(+4)$ e $(+3)$, obtenha o resultado indicado realizando a adição de três desses números em cada caso:

a) 0

b) +6

c) +1

d) +5

Respostas possíveis:

a) $(-2) + (-1) + (+3)$

b) $(-1) + (+4) + (+3)$

c) $(-2) + (-1) + (+4)$

d) $(-2) + (+4) + (+3)$

O **exercício 52** traz uma sequência de números inteiros, que é uma P.A. de razão igual a -5 . Nele, mesmo sem o conhecimento formal sobre progressões aritméticas, o aluno pode observar a lei de formação e, possivelmente, que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes. O exercício pode ser ampliado se for pedido ao aluno que obtenha um termo anterior a 17 e um termo posterior ao -18 . Depois, ele deve calcular a soma dos termos obtidos.

O **exercício 54** explica aos alunos o significado do *cheque especial*. Como atividade extra, sugerimos que a classe seja dividida em grupos para que elaborem uma situação-problema com dados hipotéticos da conta bancária de uma pessoa e depois a resolvam. Cada grupo pode, então, apresentar seu trabalho para toda a classe. Em seguida, o professor pode encaminhar uma discussão sobre os gastos de uma família e o momento ideal para uso do cheque especial. Podem ser abordados tópicos interessantes, como o exagerado consumismo que permeia as sociedades atuais e a importância de saber economizar.

Ao ampliar o conjunto de \mathbb{N} para \mathbb{Z} , algumas operações efetuadas tornam-se abstratas e podem se distanciar de uma representação concreta de quantidades. Ao introduzir o estudo da multiplicação de números inteiros, o professor deve estar atento às dificuldades que os alunos apresentem em decorrência do uso mecânico das regras de sinais da multiplicação em situações de adição ou vice-versa.

Uma variação para o **exercício 57** é pedir aos alunos que determinem todas as multiplicações de dois números inteiros cujo resultado seja igual a (-16) :

- $(+1) \cdot (-16)$
- $(-1) \cdot (+16)$
- $(+2) \cdot (-8)$
- $(-2) \cdot (+8)$
- $(-4) \cdot (+4)$

Uma sugestão para o **exercício 60** é a análise das diferentes resoluções possíveis para o item **a**, ampliando o repertório de resolução de problemas dos alunos. Um modo de resolvê-lo consiste em começar com uma tentativa – considerando o acerto total das 20 questões e totalizando 60 pontos – e depois completar as linhas da seguinte tabela:

Questões corretas	Questões erradas	Pontos obtidos com questões corretas	Pontos perdidos com questões erradas	Pontuação final
20	0	60	0	60
19	1	57	2	55
18	2	54	4	50

Os alunos devem observar que, para cada duas questões erradas, a pontuação diminui 10 pontos; assim, para chegar à pontuação desejada (30), Henrique deve ter acertado 14 questões e errado 6 delas. De fato, $14 \cdot (+3) - 2 \cdot (6) = 42 - 12 = 30$.

O **exercício 61** sugere o uso de calculadora e, mais uma vez, da tecla $\frac{+}{-}$. Verifique se os alunos compreenderam de fato seu significado.

O **exercício 65** proporciona ao aluno a análise das resoluções das operações e posterior seleção da melhor delas. Essa tomada de decisão pelo aluno será trabalhada no **exercício 66**, promovendo, assim, a autonomia do aluno.

No **exercício 67**, o aluno usará a calculadora para resolver as multiplicações. Uma sugestão para trabalhar a multiplicação de números inteiros é o professor fazer o jogo de lançamento de uma moeda, como no **exercício 74**, e depois pedir aos alunos que somem os pontos (ganha quem tiver mais pontos).

Pode-se ampliar o **exercício 70** pedindo aos alunos que obtenham todos os resultados possíveis da divisão: $(|x|) : (x)$, em que x representa um número inteiro não nulo. Um modo de abordar a questão é escolher um valor inteiro para x e analisar as possibilidades decorrentes dessa escolha, por exemplo:

- $x = -2$; nesse caso, $|-2| = 2$, e a divisão torna-se $2 : (-2) = -1$;
- $x = 2$; nesse caso, $|2| = 2$, e a divisão torna-se $2 : 2 = 1$.

Portanto, os resultados possíveis são -1 e 1 .

Para exploração do **exercício 71**, pode-se criar um código para todo o alfabeto e, depois, cada dupla (ou grupo) escreve uma frase (ou uma palavra) com esse código. O professor escreve as frases na lousa, e a turma tenta adivinhar seu significado.

Para a resolução do **exercício 77**, é necessário uma calculadora. A ideia de não poder usar as teclas **1** e **2** é justamente para o aluno descobrir outras possibilidades de resolução.

Na *potenciação de números inteiros*, ao sistematizar os resultados envolvendo potências com expoente ímpar, é importante comentar com os alunos que a análise do sinal do resultado obtido só é feita para os casos em que a base é negativa; no caso de base positiva, o sinal do resultado é sempre positivo. Analise com eles algumas situações, como:

- Registre os valores obtidos para a potência $(-1)^n$ quando n assume os valores: 0, 1, 2, 3, 4, ... Resposta: 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...
- Qual será o sinal da potência $(-17)^{482}$? Resposta: Como o expoente é par e a base é negativa, a potência será positiva.

Já as *propriedades da potenciação de potências de mesma base* são úteis para a compreensão de alguns resultados apresentados como definição, os quais são decorrência de tais propriedades.

Uma sugestão para o **exercício 84** é resolvê-lo sem o auxílio de uma calculadora e, no momento da correção, usá-la para conferir a escolha das teclas.

Para o **exercício 93**, temos mais de uma possibilidade de resposta. Apresentamos a seguir uma forma de encontrar as possíveis respostas:

De acordo com o enunciado, o produto dos números na vertical é igual ao produto dos números na horizontal. Assim, igualamos os produtos indicados:

$$a \cdot (-2) \cdot b = -\sqrt{49} \cdot (-2) \cdot (-\sqrt{36})$$

$$-2 \cdot a \cdot b = -7 \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$-2 \cdot a \cdot b = -84$$

$$a \cdot b = 42$$

Dessa forma, devemos encontrar dois números, a e b , cujo produto entre eles seja igual a 42, sabendo que a é menor que b . Disto, podemos concluir que: $a = 6$ e $b = 7$; $a = -7$ e $b = -6$; $a = -21$ e $b = -2$; ou $a = -42$ e $b = -1$.

No **exercício complementar 7**, explore a *leitura e a interpretação do gráfico* proposto para diagnosticar eventuais dificuldades dos alunos com relação a essas habilidades. A organização de dados na forma de gráficos de barras é usual nos textos de imprensa e em livros didáticos, mas, em geral, não é usada com frequência por alunos dessa faixa etária em suas práticas sociais, de modo que sua compreensão exige intervenção quanto:

- à observação atenta do título do gráfico;
- ao significado das grandezas representadas no eixo horizontal e no eixo vertical;
- à escala empregada nos eixos;
- a outras convenções porventura usadas, como cores, sinais gráficos e símbolos.

Sugestões de atividades

Trabalhando com fichas

Objetivo

Explorar a operação de adição com números inteiros por meio de materiais manipulativos.

Conteúdos específicos

– números inteiros

– adição com números inteiros

Material necessário

40 fichas de papel de duas cores diferentes, sendo 20 de cada cor.

Desenvolvimento

Convencionar que as fichas de uma cor representam a quantidade $(+1)$ e as fichas da outra cor representam a quantidade (-1) . Esse material pode ser usado como nos exemplos a seguir, em que usamos a ficha azul como $(+1)$ e a ficha vermelha como (-1) :

- **$(+5) + (+6)$** : Juntam-se 5 fichas azuis com 6 fichas azuis, totalizando 11 fichas azuis, que corresponderão, portanto, ao número **+11**.
- **$(-3) + (-4)$** : Juntam-se 3 fichas vermelhas com 4 fichas vermelhas, totalizando 7 fichas vermelhas, que corresponderão, portanto, ao número **-7**.
- **$(+7) + (-8)$** : Juntam-se 7 fichas azuis com 8 fichas vermelhas. Retome com os alunos a ideia de que números opostos têm soma zero, ou seja, quantidades iguais de fichas de cores diferentes cancelam-se mutuamente. Assim, as 7 fichas azuis são canceladas por 7 fichas vermelhas, e sobra 1 ficha vermelha, correspondendo à resposta **-1**.
- **$(+9) + (-2)$** : São canceladas 2 fichas azuis com 2 fichas vermelhas, restando 7 fichas azuis; portanto, o resultado é igual a **+7**.

Explorando a calculadora

1. Pedir aos alunos que se reúnam em duplas. Um dos alunos digita na calculadora um número inteiro, entre -30 e $+30$ por exemplo, e pede ao colega que obtenha, a partir desse valor, um número predeterminado, usando apenas a operação de adição. Por exemplo, um dos alunos digita o número -14 e pede ao colega que obtenha o número $+11$. Nesse caso, uma possibilidade é adicionar $+25$ a -14 , obtendo o resultado $+11$.
2. Obter um determinado valor por meio de duas operações de adição diferentes. Por exemplo, para obter o número -8 , podem ser feitas as operações: $(+1) + (-9)$ e $(-2) + (-6)$.

CAPÍTULO

2

Números racionais



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Ampliar o conceito de número incorporando ao conjunto \mathbb{Z} os números racionais positivos e negativos.
- Reconhecer situações nas quais são usados os números racionais.
- Aplicar os conceitos e as técnicas relativos aos números racionais para resolver problemas.
- Compreender as diversas representações dos números racionais: na forma de fração, na forma decimal e na reta numérica.
- Construir e interpretar um gráfico de dupla entrada.

Orientações gerais do capítulo

Explorar com os alunos o texto de abertura do capítulo levantando questões a respeito do contexto matemático:

- Todos os números racionais indicados estão representados na mesma forma?
- Todo número racional é um número inteiro? Caso contrário, dê exemplo de número racional não inteiro.
- Todo número inteiro é racional? Caso contrário, dê um exemplo de número inteiro que não seja racional.

Além de questões relativas à compreensão das relações entre os diversos conjuntos numéricos, o assunto pode gerar interessantes discussões interdisciplinares, que pode envolver outras disciplinas, como Ciências e Geografia. Um modo de abordar o tema de abertura é orientar os alunos para o levantamento de dados sobre hábitos de consumo da água, seus e de seus familiares, a serem organizados em tabelas e representados em gráficos respectivos.

Para a familiarização com os números racionais, comece observando com os alunos a existência de diversas formas de representação: *fração*, *decimal* e *percentual*. Um modo interessante de levar os alunos a reconhecer a forma de representação mais conveniente para cada caso é pedir que reescrevam cada frase a seguir nas outras formas de representação e verifiquem que, em alguns casos, a nova representação não fica adequada à informação que se quer transmitir:

- “Em certa cidade, 75% do esgoto produzido pelas residências é tratado.”

Resposta: “Em certa cidade, $\frac{75}{100}$ do esgoto produzido pelas residências é tratado.”; “Em certa cidade, 0,75 do esgoto produzido pelas residências é tratado.”

- “Gustavo comprou $\frac{1}{2}$ quilograma de carne no açougue.”

Resposta: “Gustavo comprou 50% de quilograma de carne no açougue.”; “Gustavo comprou 0,5 quilograma de carne no açougue.”

- “O muro mede 2,40 metros de altura.”

Resposta: “O muro mede 240% de metro de altura.”; “O muro mede $\frac{240}{100}$ metros de altura.”

Para ampliar essa abordagem, sugerimos o livro:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Frações e números decimais*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?).

Na resolução do **exercício 6**, comentar com os alunos que os números na forma decimal permitem tal simplificação. A nova unidade na qual a medida será expressa pode ser, contudo, pouco usual, como 123 decímetros. Observe ainda que medidas expressas na forma fracionária, apesar de muito usadas em diversas áreas industriais, são menos flexíveis em relação à conversão de unidades. Por exemplo, o diâmetro de um parafuso expresso como $\frac{1}{8}$ de polegada não terá sua escrita simplificada se a trocarmos por $\frac{2}{16}$ de polegada ou por qualquer fração equivalente a esta. Nesses casos, na prática, a conversão usual é entre as unidades de medida “polegadas” e “milímetros”; por exemplo, o parafuso citado pode ter sua medida em milímetros calculada aproximadamente por:

$$\frac{1}{8} \text{ de polegada} = \frac{1}{8} \text{ de } 25,4 \text{ milímetros} = \frac{1}{8} \cdot 25,4 \text{ milímetros} \approx 3,2 \text{ milímetros}$$

Complementar o **exercício 8** propondo aos alunos a obtenção de números racionais que estejam entre dois outros. Por exemplo, pedir aos alunos que determinem um número racional entre os pontos A e E ou um número racional e inteiro entre B e F . Mostre a eles que expressar todos os números racionais em uma única forma (fracionária ou decimal) permite obter mais facilmente as respostas.

O contexto do **exercício 10** auxilia a apresentação de questões como:

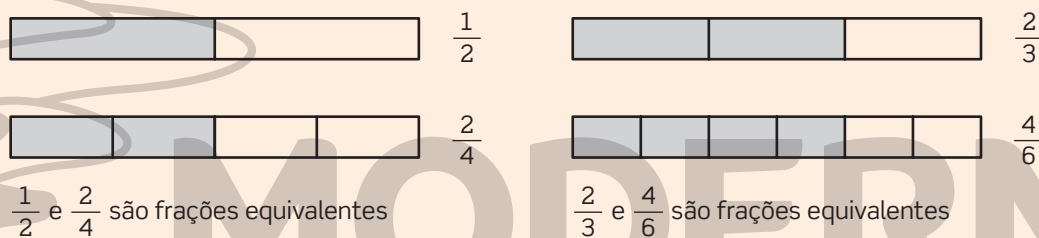
- Que número está à distância de 3,2 unidades de -5 e à distância de 4,2 unidades de -4 ?

Resposta: $-8,2$

- Que número está à mesma distância de $-2,4$ e $3,8$?

Resposta: $0,7$

No caso da comparação entre dois números racionais escritos na *forma de fração*, retome, se necessário, o conceito de frações equivalentes, preferencialmente associando-o a uma representação visual com barras de mesma medida de comprimento, mas divididas em partes de tamanhos diferentes, como mostram os exemplos:



Ao comparar números racionais na *forma decimal*, é comum os alunos questionarem por que, por exemplo, $1,34 > 1,278$, uma vez que $1,278$ tem mais casas decimais que $1,34$. Caso isso ocorra, retome com os alunos o significado das casas decimais, considerando que, no número $1,34$, a parte decimal $0,34$ corresponde a $\frac{34}{100}$ na forma fracionária e $\frac{34}{100} = \frac{340}{1.000}$; assim, $1,34$ é o mesmo que 1 inteiro e 340 milésimos, que é maior que $1,278$ (1 inteiro e 278 milésimos). Em outras palavras, para facilitar a comparação entre números com quantidades diferentes de casas decimais, podemos acrescentar zeros à direita da parte decimal sem alterar o valor do número: $1,34 = 1,340$

Os alunos devem perceber que a comparação de números racionais é útil na resolução de diversos problemas, como:

- Uma pesquisa feita em dois restaurantes diferentes a respeito da satisfação dos clientes com o atendimento revelou que:
 - no restaurante A , de 40 pessoas entrevistadas, 30 disseram estar satisfeitas;
 - no restaurante B , 24 dos 30 entrevistados responderam estar satisfeitos.

Em qual dos dois restaurantes a satisfação com o atendimento é maior?

Esse problema pode ser resolvido por meio da comparação entre as frações $\frac{30}{40}$ e $\frac{24}{30}$:

– restaurante A : $\frac{30}{40} = \frac{90}{120}$

– restaurante B : $\frac{24}{30} = \frac{96}{120}$

Assim, conclui-se que a satisfação com o atendimento é maior no restaurante B .

O **exercício 17** cita Fernando de Noronha, um arquipélago situado no oceano Atlântico, a leste do estado do Rio Grande do Norte e pertencente ao estado de Pernambuco. Fernando de Noronha, que é formado por 21 ilhas e ilhotas,

ocupa uma área de 26 km², sendo que a ilha principal tem 17 km² e fica a 545 km de Recife e a 360 km de Natal. Após uma campanha liderada pelo ambientalista gaúcho José Truda Palazzo Jr., em 1988, a maior parte do arquipélago foi declarada Parque Nacional, com cerca de 8 km², para a proteção das espécies endêmicas lá existentes. É um bom momento para a discussão sobre, por exemplo, as diferentes unidades de conservação instituídas no Brasil, como reservas biológicas, reservas ecológicas, estações ecológicas, parques nacionais, estaduais e municipais, florestas nacionais, estaduais e municipais, áreas de proteção ambiental, áreas de relevante interesse ecológico e reservas extrativistas, entre outras definidas pelo poder público. Os professores de Ciências e Geografia podem fornecer orientações interessantes para a pesquisa.

Observando os exemplos utilizados na **página 57**, pode-se explicar aos alunos que, historicamente, a adição de frações foi usada com frequência no Egito antigo, pois eles representavam quaisquer frações por meio da adição de duas ou mais *frações unitárias*, ou seja, por frações cujo numerador é igual a 1 (exceção feita à fração $\frac{2}{3}$). Por exemplo:

$$\bullet \frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \qquad \bullet \frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$$

O **exercício 23** oferece oportunidade para a discussão de algumas noções básicas da Economia, por exemplo: Como as exportações e as importações de um país participam da composição de sua balança comercial? O que é chamado de déficit e superávit na economia de uma nação? Os bens e serviços produzidos no exterior e adquiridos por um país constituem as importações. Da mesma forma, as exportações são constituídas pelos bens e serviços produzidos em um país e vendidos e enviados a pessoas de outros países. Balança comercial é a diferença entre o total de exportações e importações realizadas por um país. Quando essa diferença é positiva, ou seja, quando as exportações superam as importações, há o fenômeno chamado superávit comercial. De outra forma, quando o saldo é negativo, ou seja, quando as importações são maiores que as exportações, temos um déficit comercial. Quando o montante referente às exportações é igual ao montante das importações, dizemos que há um equilíbrio comercial. Para um país é sempre vantagem ter um superávit comercial, pois isso significa que está entrando mais recursos no país por meio dos ganhos das exportações do que os recursos pagos pelas importações.

Para melhor análise do **exercício 25**, sugerir aos alunos que comparem o resultado encontrado por meio do cálculo da representação da fração $\frac{5}{6}$ na forma decimal: 0,83333... A diferença obtida deve-se ao fato de não ser possível usar todas as infinitas casas decimais da dízima periódica 0,8333...; por esse motivo, se o que se deseja é um resultado sem aproximações, é conveniente fazer o cálculo usando a representação fracionária, como fez Manuela.

Aproveite o **exercício 28** para discutir com os alunos como fazer uma adição ou subtração de frações com o auxílio de uma calculadora. Digamos que se queira calcular o resultado de $\frac{7}{8} + \frac{1}{5}$. Para isso, é possível calcular o resultado da primeira divisão $7 : 8 = 0,875$, registrá-lo em papel, calcular o resultado de $1 : 5 = 0,2$ e depois adicionar 0,875 a esse valor, obtendo 1,075.

Entretanto, se julgar oportuno, ensinar os alunos a usar a tecla de memória; o trabalho de registrar o resultado parcial da primeira divisão não será necessário, o que permite maior agilidade ao cálculo:

- Realiza-se a primeira divisão $7 : 8 = 0,875$, mas, em vez de anotar o resultado em papel, aperta-se a tecla **M⁺**. Assim, a calculadora armazena o resultado 0,875 na memória. Depois, limpa-se o visor e realiza-se a segunda divisão $1 : 5 = 0,2$, apertando-se a tecla **M⁺**, para 0,2 ser adicionado ao resultado anterior, 0,875. Finalmente, aperta-se a tecla **M^R**, que mostrará o total armazenado na memória: 1,075.

Quanto ao **exercício 34**, é importante explicar aos alunos que o período de 176 horas e 24 minutos não pode ser representado por 176,24 horas, pois o sistema de medida de tempo não é decimal. Para saber a que fração de 1 hora o período de 24 minutos corresponde, podemos fazer: $\frac{24}{60} = 0,4$. Portanto, Beatriz trabalhou 176,4 horas, que, multiplicado pelo valor de cada hora de trabalho (R\$ 13,55), resulta em $176,4 \cdot 13,55 = 2.390,22$.

Para ampliar a abordagem do contexto desse exercício, peça aos alunos que pesquisem sobre a jornada de trabalho definida na CLT (Consolidação das Leis do Trabalho), instituída pelo Decreto-lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e sancionada pelo presidente Getúlio Vargas, que estabelece a duração de até 8 horas diárias e 44 horas semanais. Considerando essa jornada, solicite aos alunos que calculem quanto Beatriz receberia por dia de trabalho e por semana.

Resposta: R\$ 108,40; R\$ 596,20

Amplie o **exercício 36** considerando que, para resolver a expressão $120,30 - 10\% \cdot 120,30$ com uma calculadora, uma pessoa apertou as teclas a seguir, na mesma ordem em que aparecem na expressão:



- Que resultado foi obtido? *Resposta:* 13.024,881
- Qual seria o resultado correto da expressão? *Resposta:* 108,27
- Qual é o motivo da diferença? *Resposta:* Ao se apertarem as teclas na sequência da expressão, a calculadora obteve 90% de 120,30 e multiplicou esse resultado por 120,30, o que está errado.

Nesse tipo de atividade, convém estar atento ao fato de que pode haver calculadora com programação diferente daquela que consideramos. Assim, a ordem de digitação das teclas pode variar entre as calculadoras.

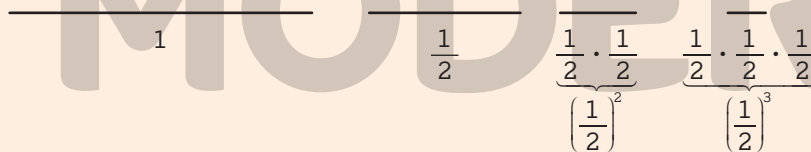
Aproveitar o “Pense mais um pouco...” da **página 62** para trabalhar a habilidade de estimativa do resultado da multiplicação $144,26 \cdot 3,7$. Para isso, pedir aos alunos que calculem o produto de fatores aproximados desses, mas inferiores a ambos, como $140 \cdot 3 = 420$. Em seguida, devem fazer o mesmo com fatores aproximados, mas superiores a ambos, como $150 \cdot 4 = 600$. Assim, os alunos poderão concluir que o produto $144,26 \cdot 3,7$ está entre 420 e 600.

Na *potenciação de números racionais*, explore essa operação com números maiores que 1 e menores que 1, pedindo aos alunos que observem os resultados e verifiquem se aumentam ou diminuem em cada caso. Espera-se que notem que, no primeiro caso, as potências aumentam e que, no segundo caso, diminuem.

Para justificar esse comportamento, basta considerar M um número racional tal que $M > 1$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por M , obtemos: $M > 1 \Rightarrow M \cdot M > 1 \cdot M$, ou $M^2 > M$. Se repetirmos a multiplicação por M na desigualdade $M^2 > M$, obteremos $M^3 > M^2$ e assim por diante.

No entanto, sendo N um número racional tal que $N < 1$, se multiplicarmos ambos os membros da desigualdade por N , obteremos: $N < 1 \Rightarrow N \cdot N < 1 \cdot N$, ou $N^2 < N$. Se repetirmos a multiplicação por N na desigualdade $N^2 < N$, obteremos $N^3 < N^2$ e assim por diante.

Ainda *potenciação de números racionais*, é possível aproveitar o assunto para estabelecer conexão entre os eixos de conteúdos “Números e operações” e “Espaço e forma”, considerando um segmento de medida unitária que é sucessivamente reduzido a uma fração de sua medida:



Nas *propriedades da potenciação*, explorar, por meio de exemplos particulares, a validade ou não de igualdades como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ e $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, em que a e b são números racionais:

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \frac{121}{225}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{25} = \frac{61}{225}$

Pela tabela acima, observa-se que a igualdade $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ **não** é válida.

Consideremos agora a tabela:

a	b	$(a \cdot b)^2$	$a^2 \cdot b^2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{15}\right)^2 = \frac{4}{225}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{25} = \frac{4}{225}$

A igualdade observada para esses valores particulares não constitui prova, mas sugere a validade da igualdade. A importância de atividades exploratórias é oferecer aos alunos oportunidades de elaborarem hipóteses, refutarem-nas por meio de contraexemplos ou observarem regularidades que devem ser provadas.

Utilizar o **exercício 47** para solicitar aos alunos que, ainda com o auxílio de uma calculadora, calculem outras potências, inclusive algumas com bases negativas. Faça perguntas até que percebam a regularidade quanto ao sinal da potência: se o expoente for par, o resultado será sempre positivo; se o expoente for ímpar, o resultado terá o mesmo sinal da base.

Aproveitar o **exercício 48** para comentar com os alunos o uso de prefixos gregos na designação das diferentes potências de 10:

Potências de 10 (10^n)			
n	Valor	Leitura	Prefixo
-9	0,000000001	um bilionésimo	nano
-6	0,000001	um milionésimo	micro
-3	0,001	um milésimo	mili
3	1.000	um mil	quilo
6	1.000.000	um milhão	mega
9	1.000.000.000	um bilhão	giga

Perguntar aos alunos se conhecem mais palavras com esses prefixos. Podem surgir palavras como: nanotecnologia, microbiologia, microscópio, microcomputador, micróbio, milímetro, miligrama, mililitro, quilograma, quilômetro, megalomania, *megabytes*, entre outras.

Comentar com os alunos que o uso dos prefixos de origem grega nos termos ligados à informática, como *megabyte* ou *gigabyte*, não expressa exatamente a relação da tabela **Potências de 10 (10^n)**. Os computadores “entendem”, “reconhecem” impulsos elétricos, positivos ou negativos, que são representados por 1 ou 0. Cada um desses impulsos elétricos recebe o nome de *bit*, cuja origem é *binary digit*. Um conjunto de 8 *bits* constitui uma unidade de informação ao computador chamada *byte*.

Como 1 *bit* representa dois tipos de valores, 1 e 0, e como 1 *byte* é formado por 8 *bits*, 1 *byte* pode representar 2^8 , ou seja, 256 tipos de unidades de informação diferentes, reconhecidos pelo computador. Assim, de modo geral, é formado o “alfabeto do computador”, em que cada *byte* representa uma letra, um acento, um sinal de pontuação, um sinal de operação matemática etc.

Para indicar a capacidade de armazenamento e de processamento foram criados agrupamentos na base 2 (binária), com certa proximidade aos agrupamentos na base 10 historicamente estabelecidos na linguagem numérica e alfabética.

Basta observar que $2^{10} = 1.024$ é próximo de $10^3 = 1.000$.

A seguir, veja a relação entre alguns agrupamentos binários.

1 *kilobyte* (KB) = 1.024 *bytes*

1 *megabyte* (MB) = 1.024 KB = 1.048.576 *bytes*

1 *gigabyte* (GB) = 1.024 MB = 1.048.576 KB = 1.073.741.824 *bytes*

1 *terabyte* (TB) = 1.024 GB = 1.099.511.627.776 *bytes*

Em *raiz quadrada de números racionais*, é interessante que os alunos explorem algumas características. Enquanto o cálculo de raízes quadradas limitava-se a números inteiros positivos, o resultado obtido sempre era menor que o próprio número ou igual a ele, mas isso nem sempre ocorre com números racionais. Por exemplo:

• $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

• $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$ e $\frac{3}{8} > \frac{9}{64}$

Uma curiosidade a respeito das raízes quadradas de números racionais maiores que 1, a qual pode ser explorada por meio de calculadora comum, é a realização do cálculo da raiz quadrada sucessivamente sobre o resultado anterior e a observação da regularidade encontrada:

$$\sqrt{3} = 1,73205080$$

$$\sqrt{3.000.000} = 1.732,050808$$

$$\sqrt{1,73205080} = 1,31607401$$

$$\sqrt{1.732,050808} = 41,6179145$$

$$\sqrt{1,31607401} = 1,14720269$$

$$\sqrt{41,6179145} = 6,451194812$$

$$\sqrt{1,14720269} = 1,0710754$$

$$\sqrt{6,451194812} = 2,539920237$$

$$\sqrt{1,0710754} = 1,0349277$$

$$\sqrt{2,539920237} = 1,593712721$$

Espera-se que os alunos observem que, à medida que o processo continua, o resultado aproxima-se cada vez mais de 1.

A seção “Para saber mais” das **páginas 71 e 72** oferece uma oportunidade para um trabalho interdisciplinar, com Língua Portuguesa nos estudos de Literatura. Mas essa interdisciplinaridade não envolve somente a Matemática e a Língua Portuguesa; ela pode ser estendida a outros componentes curriculares, pois nas ciências em geral a base de construção de conhecimentos está assentada na busca de padrões e regularidades. Keith Devlin nos apresenta alguns padrões humanos:

- Aristóteles usou a Matemática para tentar “ver” os padrões invisíveis do som que reconhecemos como música.
- Aristóteles também usou a Matemática para tentar descrever a estrutura invisível de uma cena de teatro.
- Na década de 1950, o linguista Noam Chomsky usou a Matemática para “ver” os padrões invisíveis, abstratos, das palavras que nós reconhecemos como pertencendo a uma sentença gramatical. Ele assim transformou a Linguística de um obscuro ramo da Antropologia em uma pujante ciência matemática.

(DEVLIN, Keith. *O gene da Matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2004. p. 97-98)

Conversar com os alunos, explicando que o exercício para busca de padrões e regularidades começa com casos mais simples, como a determinação de padrões em uma sequência de quadrados ou de produtos de números que possuem regularidades, como é o caso dos exercícios do “Agora é com você!”.

Explorar o **exercício complementar 5**, pedindo aos alunos que determinem dois números entre os valores obtidos no item **b**.

No **exercício complementar 6**, é válido sugerir aos alunos a seguinte questão:

- Se o módulo de um número A é maior que o módulo de um número B , podemos concluir que $A > B$? Se os alunos não conseguirem responder corretamente, dê um contra-exemplo:

$$|-3,5| > |2,4|, \text{ mas } -3,5 < 2,4.$$

Os alunos podem apresentar dificuldade para realizar o **exercício complementar 9** no que se refere a determinar qual característica é aplicada primeiro ao número: a inversão ou a oposição. Para facilitar, analisar com os alunos a

frase do item **a**: “Qual é o *oposto do inverso* de $-\frac{2}{5}$?”. Nesse caso, o oposto é aplicado ao número que vem em segui-

da, o inverso de $-\frac{2}{5}$. Então, primeiro determina-se o *inverso* de $-\frac{2}{5}$, que é a fração $-\frac{5}{2}$, e depois o *oposto* de $-\frac{5}{2}$,

que é a fração $\frac{5}{2}$.

Mas, se fosse pedido o *inverso do oposto* de $-\frac{2}{5}$, o inverso seria aplicado ao número que vem em seguida, o oposto

de $-\frac{2}{5}$. Assim, primeiro determina-se o *oposto* de $-\frac{2}{5}$, que é a fração $\frac{2}{5}$, e depois o *inverso* de $\frac{2}{5}$, obtendo-se a

fração $\frac{5}{2}$.

Comparando-se os resultados observa-se que eles são iguais.

Aproveite a situação do **exercício complementar 10** para conversar com os alunos sobre o consumismo brasileiro e o avanço da tecnologia de telecomunicações.

É importante que eles percebam que tanto o consumismo quanto o avanço da tecnologia são as principais causas da produção de lixo eletrônico. Assim, vale a pena destacar que:

Apenas 2% dos brasileiros destinam seus celulares usados para a reciclagem, embora 74% acreditem que essa é uma atitude positiva para o meio ambiente. O número é baixo mas está em sintonia com a média mundial: apenas 3% dos celulares vendidos voltam à linha de produção. [...]

O baixo índice de reciclagem dos aparelhos é causado tanto pela ausência de leis que obriguem as empresas a adotar procedimentos de coleta e destinação como pelo desconhecimento, por parte do consumidor, de que pode destinar seu celular antigo à reciclagem – 50% dos pesquisados afirmam não saber como reciclar o aparelho.

No Brasil, onde o mercado de telefonia celular cresce em média 20% ao ano e a base de usuários chega a 125 milhões de pessoas, as operadoras de telefonia celular e fabricantes começam a adotar iniciativas de recolhimento dos aparelhos. [...]

Em geral, a logística de recolhimento e o desmonte dos aparelhos e baterias são feitos por empresas especializadas, que separam os componentes plásticos, circuitos eletrônicos e metais. Ainda não existe obrigatoriedade de coleta de aparelhos. A exceção são as baterias fabricadas até 2000, que continham metais pesados como cádmio, chumbo e mercúrio – a resolução 257/1999 do Conama prevê a responsabilidade, por parte do fabricante, de retirar as baterias de circulação.

Disponível em: <www.reciclaveis.com.br>. Acesso em: 13 maio 2015.

Sugestões de atividades

Dízimas periódicas e a calculadora

Objetivos

- Observar o surgimento de dízimas periódicas em alguns casos de divisão de inteiros, como $1 : 7$; $2 : 3$ etc.
- Fazer conjecturas a respeito das regularidades que relacionam os números presentes na fração geratriz e na representação decimal das dízimas.

Desenvolvimento

1. Pedir aos alunos que calculem e observem os resultados das divisões a seguir:

- $1 : 9 = 0,111\dots$
- $2 : 9 = 0,222\dots$
- $4 : 9 = 0,444\dots$
- ...
- $1 : 90 = 0,0111\dots$
- $2 : 90 = 0,0222\dots$
- $4 : 90 = 0,0444\dots$

Por meio desses exemplos, pedir aos alunos que escrevam um texto explicando a regularidade presente nessas divisões.

2. Um modo de explicar o fato de a divisão entre dois números inteiros resultar em outro número inteiro ou em uma dízima periódica é mostrar aos alunos que, à medida que a divisão das sucessivas casas decimais é efetuada, os restos possíveis na divisão são finitos e, portanto, em algum momento, eles obrigatoriamente têm de se repetir. Por exemplo, em uma divisão por 7, há apenas sete restos possíveis: 0 (divisão exata e que, portanto, não gera dízima periódica), 1, 2, 3, 4, 5 ou 6; então, no máximo após sete divisões, poderá haver uma repetição dos algarismos, como em $1 : 7$:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) 7} \\ 0,1428571 \\ \hline \text{Repete-se o} \\ \text{período} \end{array}$$

Aproveitar esse exemplo para apresentar um tipo curioso de fração. Pedir aos alunos que, com o auxílio de uma calculadora, calculem e registrem o valor das seguintes frações:

- $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$
- $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$
- $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$
- $\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$
- $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$
- $\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$

Pedir aos alunos que observem os números que se repetem nas dízimas e que concluam que os mesmos algarismos do período 142857 obtido na fração $\frac{1}{7}$ repetem-se nas demais frações, apenas iniciando-se em uma posição diferente:

0,285714

0,428571

0,571428

e assim por diante.

Representação dos números racionais na reta numérica

Material necessário

Régua, lápis e uma tira retangular de papel previamente recortada e tomada como representação da unidade (1).

Desenvolvimento

Considerando uma das extremidades da tira correspondente ao ponto de abscissa zero e a outra ao ponto de abscissa 1, pedir aos alunos que obtenham, por meio de dobraduras, os pontos de abscissas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. Questione-os que outros pontos além desses podem ser determinados por meio das dobraduras. Sempre dobrando ao meio, é possível que eles respondam $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ e outros cujo denominador seja potências de 2.

CAPÍTULO

3

Ângulos



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Reconhecer situações que envolvam a ideia de ângulo.
- Utilizar a linguagem adequada à descrição de ângulos.
- Realizar operações que envolvam a medida de um ângulo em graus e seus submúltiplos.
- Identificar e construir a bissetriz de um ângulo.
- Interpretar gráficos de setores.

Orientações gerais do capítulo

Em *ângulos e seus elementos*, aproveite o contexto de abertura para discutir com os alunos questões como:

- Em que outras situações, além das citadas no texto, podemos reconhecer a ideia de ângulo?
- Na linguagem cotidiana, a palavra “ângulo” pode ser usada em um sentido um pouco diferente do conceito matemático apresentado. Por exemplo, nas frases a seguir, qual é o significado dessa palavra?

— O jogador chutou a bola, que entrou no *ângulo* esquerdo do goleiro.

Resposta: Aqui, “ângulo” representa apenas a região próxima do encontro entre uma das traves superior e uma trave lateral.

— Você está vendo o problema de um ângulo errado...

Resposta: Aqui, “ângulo” tem o sentido de “ponto de vista”.

Para os trabalhos referentes a ângulos, sugerimos o livro:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Ângulos*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?).

Além desse livro, sugerimos o trabalho com os seguintes *softwares* gratuitos:

Régua e compasso.

Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php>. Acesso em: 14 maio 2015.

Tangram.

Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_recreativos.php>. Acesso em: 14 maio 2015.

Em *medida de um ângulo*, questione os alunos quanto ao motivo pelo qual o transferidor é um instrumento circular ou semicircular, em contraste com a régua e o esquadro, por exemplo. Caso não percebam o motivo, proponha a eles a seguinte atividade:

- Fique de pé com o braço esticado e apenas a ponta do dedo indicador também esticada.
- Imagine que a ponta de seu dedo é uma caneta e gire-o dando uma volta completa.
- Se o ar fosse como papel e registrasse o desenho feito pelo movimento do dedo, que figura estaria desenhada?

Resposta: Espera-se que os alunos observem que seria uma circunferência; dessa maneira como ângulos estão associados a mudanças de direção, o instrumento que os mede terá naturalmente um formato circular.

Ao trabalhar o conteúdo *classificação de um ângulo*, questione os alunos sobre as situações em que se reconhecem ângulos agudos, retos ou obtusos. Podem surgir respostas como:

- Ângulos retos: cantos de uma folha de papel, cantos de uma porta retangular, paredes de uma casa em relação ao solo etc.
- Ângulos agudos: inclinação de telhados, rampas etc.
- Ângulos obtusos: encostos de cadeiras reclináveis etc.

Incentivar os alunos a classificar ângulos com base na medida do ângulo de um canto de uma folha de papel: se a abertura do ângulo medido for menor que a abertura do canto da folha, o ângulo será agudo; se for maior, o ângulo será obtuso; se for igual, o ângulo será reto.

Aproveitar o contexto do **exercício 3** para discutir o papel do campo visual na caracterização das espécies animais. Por exemplo, predadores têm os olhos em posição frontal, lado a lado, o que lhes possibilita “visão de profundidade”, para melhor estimar distâncias para a caça e o abate de suas presas. Já os animais que são presas geralmente têm os olhos em posição lateral, pois precisam de um campo visual ampliado, para melhor vigiar o ambiente ao redor e, assim, diminuir os riscos de ataques.

O contexto do **exercício 5** também é interessante para discutir a inclusão de pessoas portadoras de necessidades especiais na sociedade. Discuta a importância de promover ações destinadas a melhorar a qualidade de vida e incrementar a educação e o emprego, facilitando o acesso à saúde e liberando os espaços à locomoção e ao deslocamento de indivíduos com alguma necessidade especial, mesmo que temporária.

Pode-se levantar questões como:

- Como as pessoas com deficiências mental, física, auditiva e visual em minha comunidade são tratadas?
- Em minha comunidade, as pessoas com deficiência têm facilidade de acesso a computadores e à internet?
- As pessoas com deficiência têm acesso a recursos especiais para se comunicar por intermédio do computador e da internet?

No **exercício 9**, peça aos alunos que meçam os ângulos com o auxílio de um transferidor, para a verificação não se basear apenas na estimativa visual da abertura dos ângulos.

No **exercício 10**, pergunte aos alunos qual é a medida de cada um dos seis ângulos congruentes. Como o ângulo raso mede 180° , a medida de cada ângulo é obtida pelo cálculo: $180^\circ : 6 = 30^\circ$.

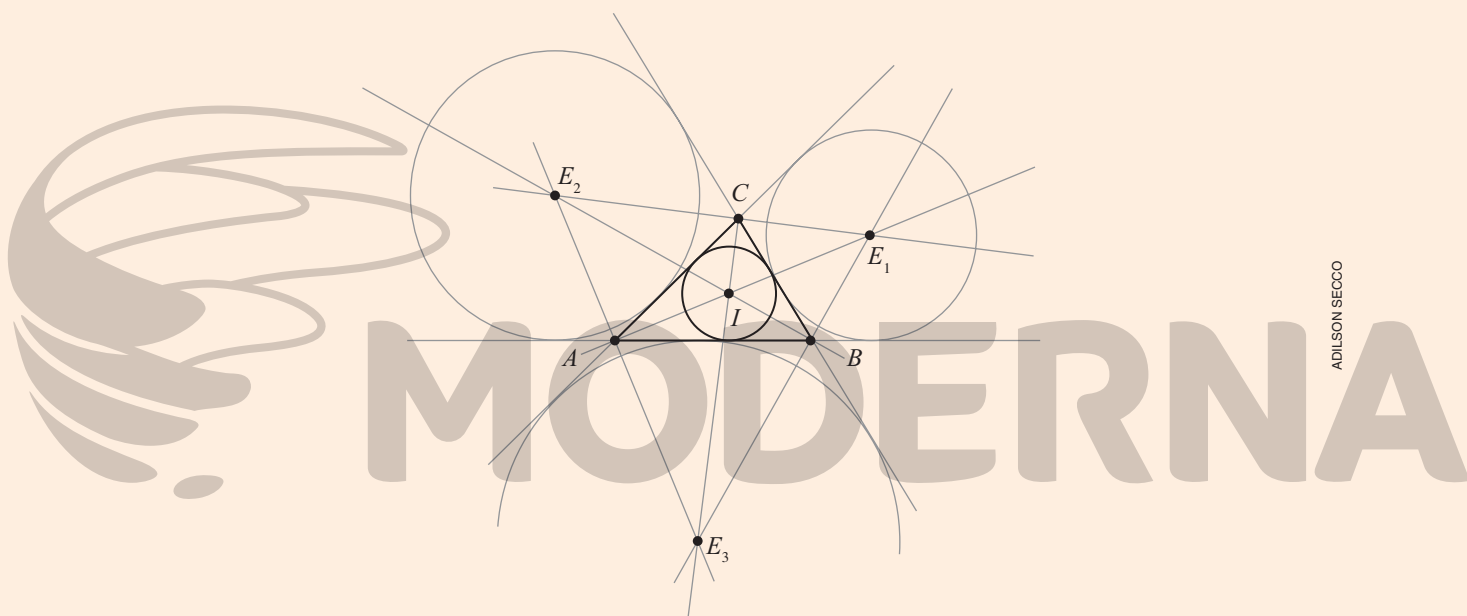
As operações com medidas de ângulos trazem a oportunidade de trabalhar com a conversão entre unidades que não têm correspondência decimal. Por exemplo, a representação $24,5^\circ$ não corresponde a $24^\circ 50'$: como 1° corresponde a $60'$, então $0,5^\circ$ equivale à metade de $60'$, ou seja, a $30'$. Esses cálculos podem ser feitos por meio de frações ou raciocínio de proporcionalidade:

$$\frac{1}{2} \text{ de } 60' \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 60' = 30'$$

Nos **exercícios 24 e 25**, explore o uso de régua e compasso para a construção da bissetriz de um ângulo, ajudando os alunos com a manipulação do compasso. Apesar de não ser do conhecimento dos alunos desse ano a justificativa da validade de tal procedimento para a obtenção da bissetriz, ela se apoia na congruência entre dois triângulos cujos lados possuem medidas respectivamente iguais; observe que o procedimento consiste em construir dois triângulos, cujos lados são respectivamente de mesma medida.

Se considerar conveniente, amplie a abordagem do **exercício 28** denominando o ponto obtido, intersecção das bissetrizes internas de um triângulo, como incentro I , centro da circunferência inscrita no triângulo.

Os alunos podem obter também os três ex-incentros (E_1, E_2, E_3) do triângulo, que são as intersecções do prolongamento de uma bissetriz interna com duas bissetrizes de ângulos externos. Cada ex-incentro, sendo também um ponto equidistante das três retas suporte dos lados do triângulo, é o centro de uma circunferência que tangencia essas retas.



Sugestão de leitura para o professor

Os Elementos de Euclides

Temos muito pouca informação sobre Euclides, que teria vivido por volta do ano 300 a.C. E esse pouco que dele sabemos nos vem dos comentários de Proclus (410-485), um autor que viveu mais de 700 anos depois de Euclides. Mesmo Proclus tem dificuldade em determinar a época em que viveu Euclides.

Euclides escreveu várias obras científicas. A mais famosa das quais, conhecida com o nome de *Os Elementos*, reúne quase todo o conhecimento matemático daquele tempo. Em parte por causa disso, e também por tratar-se de uma obra de escola, que reunia a maior parte da Matemática então conhecida, as obras anteriores aos *Elementos* desapareceram. A única exceção são alguns fragmentos atribuídos a *Hipócrates de Quio*, que viveu no século V a.C. Assim, *Os Elementos* de Euclides é praticamente tudo o que temos da Matemática grega, que se desenvolveu desde seu início com *Tales de Mileto*, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides – um período de cerca de 250 anos. Aliás, muito pouco tempo para que a Matemática, logicamente organizada, evoluísse do estágio embrionário em que se encontrava com Tales até o alto grau de sofisticação que transparece em *Os Elementos*.

Não sabemos se Euclides escreveu *Os Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou

os dois objetivos; a obra foi muito usada no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios. No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de *Legendre*, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive no português. Esse livro foi muito usado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX.

Um equívoco que se comete com frequência é pensar que *Os Elementos* é uma obra apenas sobre Geometria. Na verdade, há muito de Aritmética e Álgebra em vários dos livros de *Os Elementos*. O que é verdade – e isso explica, pelo menos em parte, a origem do equívoco – é que a Matemática grega, na época em que Euclides compôs sua obra, era toda ela geometrizada. De fato, a crise dos incomensuráveis e a genial solução que lhe deu Eudoxo, aliada a uma excessiva preocupação com o rigor, encaminhou toda a Matemática para o lado da Geometria. Isso se tornou tão arraigado que até cerca de 100 anos atrás os matemáticos costumavam ser chamados de “geômetras”.

Um outro equívoco não menos frequente é pensar que os fatos geométricos de *Os Elementos* sejam expressos numericamente como o são para nós hoje. Para exemplificar, enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula, exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura, e assim por diante. Para nós, hoje, a área de um círculo é πr^2 , mas para *Arquimedes* (287-212 a.C.), que viveu algumas décadas depois de Euclides, a área do círculo é igual à área de um triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao raio do círculo. Para nós o volume da esfera é $\frac{4\pi r^3}{3}$, enquanto o que Arquimedes nos diz é que o volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito, assim como 2 está para 3; e isso é informação suficiente.

Na Matemática grega, antes e durante o período helenístico, não havia fórmulas como as que conhecemos hoje; tudo era dado em termos de proporções, como no caso do volume da esfera que acabamos de mencionar. E isso perdurou no ocidente por mais um milênio após o declínio da civilização helenística. [...]

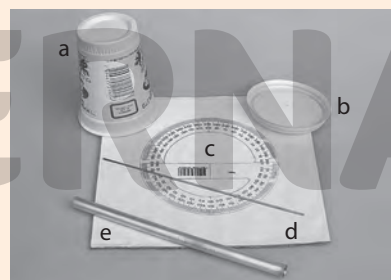
Fonte: ÁVILA, Geraldo. Euclides, Geometria e Fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 45.

Sugestão de atividade

Construindo um teodolito caseiro

Material necessário

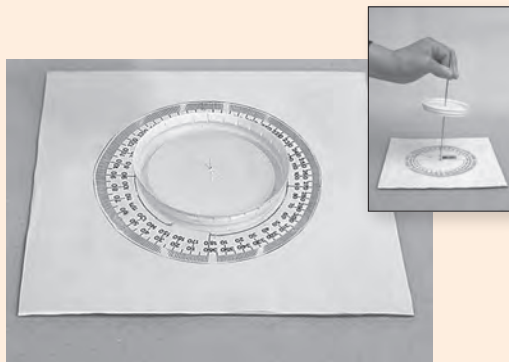
Um copo de plástico (a) com tampa (b), xerox de um transferidor alinhada e colada numa base quadrada de papelão (c), um pedaço de arame fino com cerca de 15 centímetros de comprimento (d) e um pedaço com a mesma medida de um tubo de alumínio de antena de TV (e).



LEONARDO CARNEIRO/EDITORIA ABRIL

O toque de precisão

A tampa do copo servirá de base para a rotação do teodolito e deverá ser colada, de cabeça para baixo, de modo que seu centro coincida com o centro do transferidor, o que dará mais precisão ao teodolito. Para encontrar o centro da tampa, trace nela dois diâmetros. E faça um furo onde eles se cruzarem. Tampas desse tipo geralmente trazem ranhuras na borda que podem ajudá-lo a encontrar o ponto certo. Use o arame fino como guia para alinhar o centro da tampa com o centro do transferidor (veja no destaque).



FOTOS: LEONARDO CARNEIRO/EDITORIA ABRIL

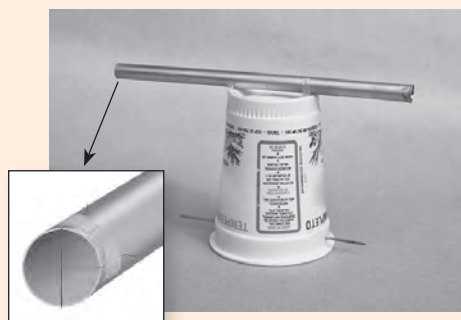
O ponteiro

O arame fino será o ponteiro do teodolito que permitirá fazer a leitura em graus no transferidor. Para instalá-lo, faça dois furos diametralmente opostos na lateral do copo, próximo de sua boca (use o diâmetro marcado na tampa como guia para fazer esses furos), e passe o arame pelos furos, deixando-o atravessado no copo.



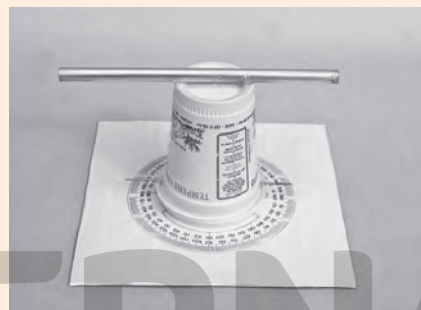
A mira

O tubo de antena será a mira por onde você avistará os pontos a serem medidos. Cole o tubo na base do copo, de forma que ele fique paralelo ao ponteiro (arame fino). Para refinar essa mira, cole na extremidade do tubo dois pedaços de linha formando uma cruz (veja na ilustração).



Pronto para usar

Finalize encaixando o copo na tampa. [...]. Com ele, você mede, a partir da sua posição, o ângulo formado entre dois outros pontos. Na horizontal ou na vertical, basta alinhar a indicação 0° do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará de quantos graus é a variação.



Fonte: FALZETTA, Ricardo. "Gaste 1 real e faça um teodolito".
Revista Nova Escola, São Paulo: Abril, nov. 1998.

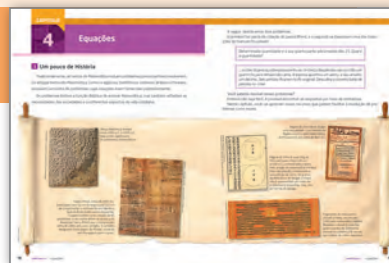
Para usar o teodolito, providencie uma mesa para apoio do instrumento (A). Depois, alinhe o ponteiro com o zero da escala, aponte-o para um objeto (B) e gire o teodolito até avistar outro objeto (C). O ponteiro indicará o ângulo $B\hat{A}C$ entre os objetos B e C, medido a partir do ponto A.

Realize diversas medidas com o instrumento e peça aos alunos que desenhem a situação com régua e transferidor, estabelecendo relação entre medidas práticas e sua representação em desenho. Comente com os alunos a respeito dos submúltiplos do grau: o minuto e o segundo. Explique que, em aplicações relacionadas com grandes distâncias, o uso desses submúltiplos é fundamental para assegurar precisão. Se possível, apresente fotografias ou um aparelho de localização por GPS, que indica as coordenadas de um lugar em graus, minutos e segundos.

Pode-se apresentar a eles o seguinte cálculo:

- uma volta (360°) em torno da linha do Equador corresponde a cerca de 40.000 quilômetros;
- assim, cada grau nessa linha corresponde a: $40.000 \text{ km} : 360 \approx 111 \text{ km}$

Nesse caso, um erro de 1 grau corresponde a cerca de 111 quilômetros! Se dividirmos esse resultado por 60, obteremos o erro correspondente a 1 minuto de grau: $111.000 \text{ m} : 60 \approx 1.850 \text{ m}$, o que prova que um desvio de apenas 1 minuto de grau corresponde a quase 2 quilômetros de distância. As consequências de um erro dessa magnitude podem ser muito graves em casos de salvamento em alto-mar, por exemplo.



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Utilizar a linguagem algébrica para descrever sentenças e equações.
- Reconhecer situações que podem ser resolvidas por meio de equações do 1º grau com uma incógnita.
- Aplicar as técnicas adequadas para resolver equações do 1º grau com uma incógnita.
- Compreender o conceito de média aritmética e aplicá-lo para fazer estimativas.

Orientações gerais do capítulo

Aproveite o texto de abertura do capítulo para discutir com os alunos algumas questões da História da Matemática, como:

- Que tipo de problemas práticos, nas civilizações da Antiguidade, envolviam o uso de Matemática em sua resolução?
- A linguagem matemática usada nas várias épocas, por diferentes civilizações, era igual à linguagem matemática atual?

Discutir com os alunos questões desse tipo permite evidenciar o caráter histórico da Matemática, com as muitas transformações que sofreu ao longo do tempo, e compreendê-la como uma produção humana em constante evolução.

Sugira aos alunos que resolvam o primeiro problema, presente no papiro de Rhind, por meio de estratégias próprias:

- “Determinada quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?”

Um modo interessante de resolver o problema é por meio de tentativas que se ajustem sucessivamente ao resultado. Por exemplo, podem ser testados valores múltiplos de 4, pois o cálculo envolve a quarta parte da quantidade procurada, e verificar o resultado obtido para fazer a próxima tentativa. Digamos que se queira testar o valor 4:

$$4 + \frac{4}{4} = 5.$$

Como o resultado deve ser 15 (o triplo de 5), a quantidade correta é o triplo do valor testado: $3 \cdot 4 = 12$.

$$\text{Então: } 12 + \frac{12}{4} = 15$$

Esse método de resolução de algumas equações do 1º grau com uma incógnita já era conhecido dos antigos egípcios, que o denominavam “regra da falsa posição”. Ao final do capítulo, no “Para saber mais” das **páginas 119 e 120**, fala-se desse método com mais detalhes.

Para enriquecer o trabalho nesse capítulo, indicamos os seguintes livros:

GUELLI, Oscar. *Equação: o idioma da Álgebra*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática).

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Álgebra*. São Paulo: Atual, 2007 (Coleção Pra que serve Matemática?).

RAMOS, Luzia Faraco. *Encontros de primeiro grau*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática).

_____. *O que fazer primeiro?* São Paulo: Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática).

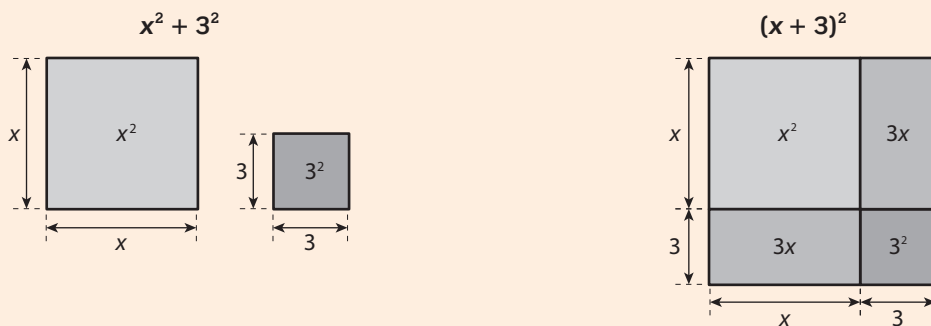
No **exercício 4**, é importante comentar com os alunos a respeito das expressões dos itens VI e VII, que envolvem os termos: a soma dos quadrados e o quadrado da soma. Apesar de muito parecidos, representam valores diferentes, e não podem ser confundidos. Leia com eles o que se pede em cada caso, chamando a atenção para o fato de que:

- na expressão do item VI, o que se pede é a soma de dois quadrados, portanto: $x^2 + 3^2$;
- na expressão do item VII, o que se elevará ao quadrado é uma soma, portanto: $(x + 3)^2$.

Se julgar oportuno, apresente uma representação geométrica para cada situação, convencendo que:

- x será representado por um segmento;
- x^2 será representado por um quadrado de área x^2 , ou seja, seus lados são iguais a x .

Assim, temos a seguinte representação das expressões anteriores:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Aproveite o contexto do **exercício 5** para apresentar alguns “truques” numéricos cuja explicação pode ser compreendida pela linguagem algébrica. Por exemplo, considere a adivinhação:

Pense em um número.
 Adicione 5.
 Multiplique por 2.
 Subtraia 10.
 Que resultado encontrou?

O número pensado é obtido dividindo-se o resultado apresentado por 2.

Para justificar o procedimento, pode-se usar a linguagem algébrica:

Pense em um número: x

Adicione 5: $x + 5$

Multiplique por 2: $2 \cdot (x + 5) = 2x + 10$

Subtraia 10: $2x + 10 - 10 = 2x$

Assim, ao realizar os cálculos pedidos pelo apresentador do truque, o resultado será sempre o dobro do número pensado inicialmente; portanto, para “descobrir” o número pensado, basta dividir o resultado por 2.

Aproveitar a situação do “Pense mais um pouco...” da **página 99** para sugerir aos alunos que, em duplas, façam brincadeira igual à apresentada. Um dos alunos inventa uma regra para aplicar a cada número que o colega enunciar. O objetivo é que o aluno que enunciar os números descubra a regra aplicada a eles e a escreva em linguagem algébrica.

No **exercício 10**, pedir aos alunos que respondam às mesmas questões, considerando que a figura seja um cubo de lado a . As respostas seriam, então:

a) $4a$

b) a^2

c) $12a$

d) a^3

Para complementar o **exercício 11**, proponha aos alunos a questão a seguir:

Para que preço de venda da camiseta o lucro seria igual a zero?

Sugerir aos alunos que, para encontrar a resposta, testem diferentes valores de preço. Para isso, basta que a receita obtida com a venda das 1.000 camisetas seja igual a R\$ 12.500,00:

$$1.000 \cdot \text{R\$ } 12,50 = \text{R\$ } 12.500,00$$

Portanto, o preço da camiseta para o qual o lucro seria igual a zero é R\$ 12,50.

O **exercício 20** tem por objetivo levar os alunos a perceber, sem que se exija deles qualquer domínio de nomenclatura formal matemática, a propriedade simétrica da igualdade.

No **exercício 27**, pedir aos alunos que verifiquem a igualdade resolvendo a equação em cada caso e observando se chegam ao mesmo valor da incógnita. Pode-se ampliar a atividade pedindo que modifiquem uma ou mais das equações de cada item para que se tornem equivalentes.

Por exemplo, no item **b**, uma modificação possível seria:

$$2y - 1 = y, 3y = 3, y + 4 = 5$$

Para a resolução do **exercício 28**, perguntar aos alunos:

Que alteração foi feita na balança 1 para que a situação chegasse à da balança 2?

Resposta: Espera-se que os alunos percebam que foi retirado x de ambos os lados da balança.

É importante que os alunos compreendam o significado de cada passo do processo de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, para que não seja apenas uma sequência de regras aplicadas mecanicamente. A discussão abordando outras formas de resolução é interessante para que os alunos façam uma comparação com o método aprendido. Por exemplo, uma possibilidade de resolução é por tentativas sucessivas registradas em uma tabela. Observe esse método para a resolução da equação $3x - 2 = -x + 6$:

Valor de x	$3x - 2$	$-x + 6$	Diferença entre os membros
3	$3 \cdot 3 - 2 = 7$	$-3 + 6 = 3$	$7 - 3 = 4$
4	$3 \cdot 4 - 2 = 10$	$-4 + 6 = 2$	$10 - 2 = 8$
2	$3 \cdot 2 - 2 = 4$	$-2 + 6 = 4$	0

Como a diferença aumentou, devemos testar valores de x menores que 3.

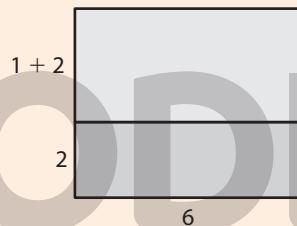
Como ambos os membros são iguais, a raiz da equação é $x = 2$.

O método por tentativas pode ser apresentado para o desenvolvimento das habilidades de cálculo mental e de raciocínio proporcional, pois os alunos podem, a cada tentativa, observar a correspondência entre a variação no valor de x e a correspondente variação da diferença entre os membros da equação. No exemplo anterior, ao aumentar x em uma unidade (de 3 para 4), a diferença aumentou em quatro unidades (de 4 para 8). Portanto, como se quer a diferença igual a zero, basta reduzir x uma unidade (de 3 para 2) para que a diferença diminua em quatro unidades (de 4 para zero).

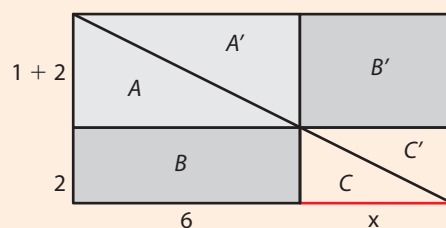
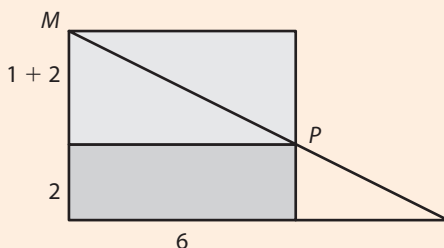
Outro método possível é o geométrico, usado pelos gregos antigos para resolver alguns tipos de equação do 1º grau com uma incógnita. Vejamos como seria resolvida a equação $x + 2x = 12$. Primeiro, desenhamos um retângulo cuja área seja igual a 12. Vamos escolher o retângulo de medidas 2 e 6:



Juntamos a esse retângulo um novo retângulo, de lados 6 e $(1 + 2)$, correspondentes aos coeficientes de $1x$ e $2x$:



Agora, construímos outro retângulo, de área igual à do retângulo de lados 2 e 6. Para isso, traçamos uma diagonal partindo do ponto M e passando por P e a estendemos até cruzar o prolongamento do lado de medida 6, conforme indicam as figuras:



Podemos observar que:

- área de A = área de A'
- área de C = área de C' e, portanto,
- área de B = área de B', pois a diagonal do retângulo maior o divide em duas partes de mesma área.

Assim, $2 \cdot 6 = (1 + 2) \cdot x$, que corresponde à equação que se deseja resolver: $x + 2x = 12$. Portanto, a raiz da equação é igual à medida x do segmento em destaque.

Para melhor explorar o “Trabalhando a informação” da **página 123**, pedir, com antecedência, aos alunos que levem para a aula uma conta de energia elétrica recente. Calculando a média de consumo de energia elétrica em sua residência durante um período de três meses consecutivos, os alunos podem verificar se o resultado corresponde aproximadamente ao valor consumido no mês seguinte ao período.

Comentar com os alunos que o cálculo dessa média pode ser útil tanto nos casos em que não é possível a leitura direta do consumo quanto nos casos em que o consumidor questiona uma leitura supostamente equivocada. Por exemplo, se uma família tem uma média de consumo mensal de 200 kWh e, em determinado mês, o consumo indicado é de 480 kWh, é possível questionar a leitura, uma vez que a variação foi muito grande em relação à média. Também importante os alunos perceberem que uma previsão baseada na média só será confiável se a variação mensal do consumo não for muito grande a cada mês. Por exemplo, se a família Miranda, do texto, consumisse nos meses de abril a junho, respectivamente, 130 kWh, 250 kWh e 175 kWh, seu *consumo médio* seria de:

$$\frac{(130 + 250 + 175)}{3} = 185$$

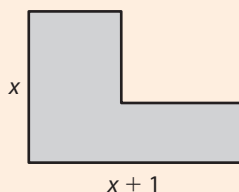
Observe que, apesar de a média ser igual à apresentada na situação do texto, a variação no consumo é grande, e uma previsão baseada nesse valor poderia não ser uma boa opção.

Finalmente, aproveite a situação para os alunos obterem uma previsão baseada na média aritmética com dados apresentados em outras representações, como em um gráfico.

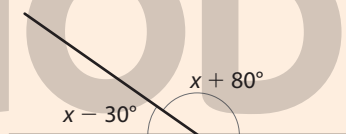
Realizar a leitura de dados em diferentes representações é uma importante habilidade, a ser incentivada pela apresentação de situações significativas, que permitam ao aluno compreender o cotidiano de forma crítica e participativa.

Aproveite o **exercício complementar 4** para propor outros problemas que estabeleçam conexão entre a Álgebra e o eixo de conteúdos “Espaço e forma”, como:

- Qual é o perímetro da figura abaixo? *Resposta:* Perímetro: $4x + 2$. Os alunos devem perceber que a soma das medidas dos dois segmentos verticais opostos ao lado de medida x é igual a x e que os dois segmentos horizontais opostos ao lado de medida $x + 1$ têm soma de suas medidas igual a $x + 1$.



- Qual é a medida de cada ângulo indicado na figura? *Resposta:* 35° e 145°



Ao explorar o **exercício complementar 16**, pedir aos que alunos apresentem formulações para o enunciado, ressaltando a possibilidade de mais de uma forma de expressá-lo algebricamente. Por exemplo, a soma dos números consecutivos pode ser expressa por:

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 72 \Rightarrow 3x = 72 \Rightarrow x = 24$$

Os lados, então, têm medidas iguais a:

$$(x - 1) = (24 - 1) \text{ cm} = 23 \text{ cm},$$

$$x = 24 \text{ cm e}$$

$$x + 1 = (24 + 1) \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

Ou:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 72 \Rightarrow 3x + 3 = 72 \Rightarrow x = 23$$

Os lados, então, têm medidas iguais a:

$$x = 23 \text{ cm},$$

$$x + 1 = (23 + 1) \text{ cm} = 24 \text{ cm e}$$

$$x + 2 = (23 + 2) \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

Observar com os alunos que, mesmo usando expressões algébricas diferentes, os resultados são iguais.

É possível que algum aluno resolva dividindo 72 por 3, obtendo, assim, a medida de um dos lados, 24 cm, que equivale à média aritmética das medidas dos três. Logo, os outros dois lados medem 23 cm e 25 cm. Para justificar esse procedimento, sejam $x - 1$, x e $x + 1$ as medidas dos três lados do triângulo. Assim, $(x - 1) + x + (x + 1) = 72$; logo, $3x = 72$ e, portanto, $x = 24$. Como $x = 24$, então $x - 1 = 23$ e $x + 1 = 25$.

Sugestão de leitura para o professor

Atentar para a linguagem matemática

Diariamente convivemos com vários tipos de linguagem, tais como: corporal, de mímica, de barras, culta, inculta, artística, gráfica, cada uma com suas características e seus modos de expressão. A Matemática também possui uma linguagem própria que se apresenta com seus termos, símbolos, tabelas, gráficos, entre outros. E um dos objetivos do ensino da Matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é a aprendizagem dessa linguagem para se comunicar matematicamente.

Como toda linguagem, a linguagem matemática é um movimento na história das civilizações. Houve época em que ela era prolixa e ambígua, por exemplo: no Egito antigo, a variável (ou incógnita) era “ahá”, que significava “montão” (no sentido de muitos). Já os europeus e árabes escolheram a palavra “coisa” para designar quantidades desconhecidas. Euclides utilizava figuras (linguagem geométrica) para estudar questões de aritmética ou álgebra; Diofanto, na Grécia antiga, escrevia $SS2x5Mu6$, correspondente ao que hoje escrevemos $2x^4 + 5x - 6$.

Até o século XVI, a linguagem matemática não utilizava vírgula (decimal), nem os sinais de vezes, maior, menor e igual. Também o “ x^7 ” era escrito AAAAAA ou Aqqc, sendo q indicador de “quadrado” e c de “cubo”; assim como $2 + 3$ era escrito 2 plus 3.

Com o objetivo de tornar-se mais precisa, a linguagem matemática evoluiu, pois tanto a figura quanto a palavra, muitas vezes, são ambíguas. No entanto, a História da Matemática mostra-nos que não foi sem dificuldade que os matemáticos conseguiram formas de traduzir questões de linguagem vulgar para linguagem matemática, e vice-versa.

Nas salas de aula, alunos e professores também enfrentam dificuldades para entender e para explicar o significado da linguagem matemática repleta de símbolos próprios. Mas foi justamente o simbolismo que internacionalizou a linguagem matemática, possibilitando que a Matemática fosse compreendida sem equívocos pelos matemáticos de qualquer país e que se tornasse uma indispensável ferramenta para outras ciências.

Nos dias atuais, a linguagem matemática caracteriza-se por ser resumida e precisa, além de possuir expressões, regras, vocábulos e símbolos próprios. Exemplos disso são as fórmulas matemáticas, que se tornam estigmas para muitos; elas são resultado de processos históricos e o significado de cada um de seus símbolos precisa ser conhecido para que possam ser compreendidas e empregadas corretamente. Cada fórmula representa uma síntese final de um processo e, por isso mesmo, pode ser enigmática para aqueles que tentam começar seus estudos por ela, se tornando um convite à memorização sem nexos. É o caso de $a^2 + b^2 = c^2$, que facilmente evoca “Pitágoras” ou “o quadrado da hipotenusa e o quadrado dos catetos”, mas que dificilmente nos remete à ideia básica de que essa propriedade é válida para triângulos e somente para triângulos que possuam um ângulo reto.

Sumariamente, pode-se dizer que a linguagem matemática escrita foi inicialmente influenciada pela retórica, como mostra o exemplo seguinte, escrito há cerca de 5 mil anos: “somei a superfície e o lado do meu quadrado e obtive 45”. Atualmente, escrevemos isto assim: $x^2 + x = 45$. Durante sua evolução, a linguagem matemática também se utilizou da forma sincopada; nessa frase, o que, hoje, escrevemos $6 + \sqrt{10}$, era escrito 6.p.R.10 (lembre-se de que p vem de plus e R de raiz).

Atualmente, como simbólica, ela se apresenta bem resumida, mas conserva a precisão, como mostra o exemplo seguinte: $\forall x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1$ (significando todos os infinitos números racionais que sejam maiores que zero e simultaneamente menores que um).

Os símbolos mais frequentes, além dos numerais, são: vírgula, +, -, ·, =, ≠, <, >, ÷, %, (), mas existem muitos outros, tais como: √, ∂, log, ∫, sen, ~, →, ↔, AB, α, A, π, ∞, e, ℝ, !, Σ, cada um com seu preciso significado. [...]

Ao lado da evolução da simbologia e dos termos utilizados para o registro, também evoluíram as concepções, os nexos; assim, por exemplo, o “ x ”, inicialmente concebido como representante de apenas um valor desconhecido, passou, séculos mais tarde, a representar também uma variável. Desse modo, o estático foi substituído pelo movimento, como se fora uma foto substituída por um filme.

Referente ao nexos, é importante lembrar que ele é fundamental ao raciocínio; sem ele, não haverá compreensão e toda linguagem matemática se tornará inútil. Nós, professores, devemos prestar atenção ao fato de que é possível fazer uso do simbólico mesmo sem conhecer o nexos correspondente. É o caso das crianças que reconhecem um numeral, por exemplo, 7, meramente como uma marca relacionada à porta da sua casa ou ao apartamento ou à camisa do jogador preferido, mas não conseguem relacionar o numeral com a quantidade de elementos ou unidades (sete), ou com a posição em uma sequência ordenada (sétimo). Também é o caso dos alunos que empregam corretamente uma fórmula, mas não sabem interpretar o resultado obtido. [...]

Na sala de aula, tanto a apresentação como o uso da linguagem matemática deve ser gradativo e respeitar o estágio de evolução dos alunos. Isso significa aceitar que os alunos inicialmente se exprimam através de

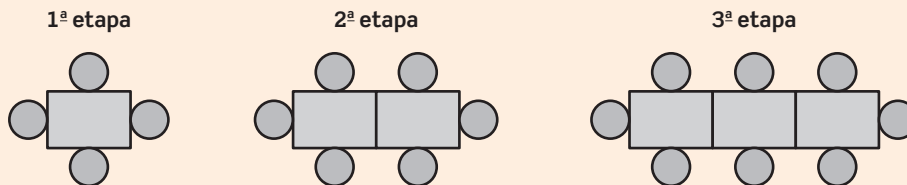
sua linguagem para, depois, apresentar os termos já consagrados pela linguagem matemática e, finalmente, os símbolos matemáticos. Um exemplo dessa graduação são as diferentes linguagens seguintes, referentes a um mesmo assunto: “as três pontas dão meia roda”, “os três ângulos juntos dão meia circunferência”, “a soma dos três ângulos dá 180°”, “a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°”, “ $\forall \Delta, \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ”.

Fonte: LORENZATO, Sérgio. *Para aprender Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006.

Sugestões de atividades

Sequências

1. Na sequência abaixo, cada retângulo representa uma mesa e cada círculo uma cadeira. A cada etapa, são acrescentadas uma mesa e três cadeiras. Quantas cadeiras haverá na etapa de número n ?



Resposta:

$$2 + 2n$$

2. Quantos triângulos de cor preta haverá na etapa de número n ?



Resposta:

$$3^{n-1}$$

Comentário:

A figura acima é um exemplo de fractal chamado Triângulo de Sierpinski. Um fractal pode ser definido simplificada-mente como uma figura gerada pela repetição de si em escalas cada vez menores. Para que os alunos observem a regra que relaciona o número de triângulos pretos com o número da etapa, peça que façam uma tabela que evidencie essa relação:

Número da etapa	Número de triângulos pretos
1	$1 = 3^0$
2	$3 = 3^1$
3	$9 = 3^2$
n	3^{n-1}

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Inequações



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Compreender a ideia de inequação do 1º grau.
- Reconhecer situações que podem ser resolvidas por meio de inequações do 1º grau com uma incógnita.
- Aplicar as técnicas adequadas para resolver inequações do 1º grau com uma incógnita.
- Ler e interpretar dados organizados na forma de gráficos e tabelas.
- Resolver problemas que envolvam inequações do 1º grau.

Orientações gerais do capítulo

Em *o que é inequação?*, comece explorando o significado da palavra *inequação*. Apresente aos alunos outras palavras com o prefixo *in-* e peça que façam analogias. Por exemplo, palavras como *inexistente* (não existente), *incompleto* (não completo) e *inalterado* (não alterado) oferecem um repertório básico para a compreensão da acepção em questão do prefixo *in-*, a de negação. Assim, se uma equação é uma igualdade, uma inequação envolve uma não igualdade, ou seja, uma desigualdade.

Conversar com os alunos a respeito da variedade de símbolos associados às desigualdades (\neq , $>$, $<$, \geq , \leq), comparando-os ao símbolo único que envolve as igualdades ($=$). Aproveitar o início do capítulo para questioná-los:

- Ao afirmar que determinado número desconhecido é maior que outro, a resposta corresponde a um valor único?

Resposta: Espera-se que os alunos observem que, de modo geral, uma desigualdade permite atribuir muitas ou mesmo infinitas respostas. Por exemplo, a resposta à pergunta “Quais são os números menores que 4?” só adquire significado se determinarmos o conjunto universo como resposta. Se o conjunto for o dos números naturais \mathbb{N} , a solução é finita: $\{0, 1, 2, 3\}$. Porém, se pertencente ao conjunto \mathbb{Z} , haverá infinitas soluções: $\{\dots -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Para se certificar de que os alunos interpretam bem o significado dos símbolos associados às desigualdades, é interessante ler uma desigualdade de duas formas diferentes, como:

- $3 < 7$ pode ser lido da esquerda para a direita como “três é menor que sete” ou da direita para a esquerda como “sete é maior que três”.

Habitua-los a usar com liberdade essas variações facilita a interpretação de desigualdades simultâneas, por exemplo, $2 < x < 9$ pode ser lida como “ x é maior que dois” ($2 < x$) e “ x é menor que nove” ($x < 9$), mais facilmente que “dois é menor que x , que é menor que 9”, pois mostra melhor a inserção de x em um intervalo entre 2 e 9.

A seção “Para saber mais” da **página 131**, sobre as sugestões de George Polya para a resolução de problemas, poderia ter sido apresentada em capítulos anteriores, visto que, desde o início desta coleção, problemas – elemento didaticamente imprescindível – são propostos para serem resolvidos pelos alunos. No entanto, a resolução de problemas não deve ser entendida como conteúdo. Essa atividade é, portanto, mais uma contribuição com o objetivo de instrumentalizar o aluno no desenvolvimento de habilidades inerentes ao processo ensino-aprendizagem e soma-se a sugestões apresentadas ao longo da coleção.

Aproveitar o **exercício 2** para pedir aos alunos que, em duplas, um aluno invente uma expressão cujo problema correspondente seja formulado pelo colega e vice-versa.

O **exercício 4** pode ser explorado com o auxílio de palitos de sorvete ou de pedaços de canudos plásticos. Pedir aos alunos que tentem construir triângulos em que um dos lados seja maior que a soma dos outros dois, como o de medidas 2, 3 e 6. Deixe que experimentem, para perceberem que, mesmo que os dois lados de menor medida estejam alinhados, é impossível a construção.

Quanto ao tópico *solução de uma inequação*, lembramos que, antes de abordar a técnica de resolução sistemática de inequações, o trabalho com tentativas para a obtenção de respostas permite que os alunos desenvolvam senso

numérico, habilidades de cálculo mental e estratégias para aproximações sucessivas das respostas. Por exemplo, na resolução da inequação $2x + 5 < x - 4$, o teste com o valor $x = -4$ fornece $-3 < -8$ (falso), mas não se pode afirmar, com base nessa resposta única, se a solução está entre valores de x maiores ou menores que -4 . Assim, é interessante fazer novas tentativas, para que a solução seja progressivamente refinada.

Em *resolução de inequações*, retome com os alunos os princípios de resolução de equações, para que percebam a similaridade no caso das inequações. O trabalho com as situações representadas por meio de balanças de dois pratos é importante para a compreensão das justificativas dos procedimentos adotados nas resoluções.

No “Pense mais um pouco...” da **página 136**, uma maneira de resolver é a seguinte:

Dividem-se as bolinhas em três grupos contendo três bolinhas em cada grupo: grupo I, grupo II e grupo III. Colocam-se as bolinhas do grupo I em um dos pratos e as do grupo II em outro.

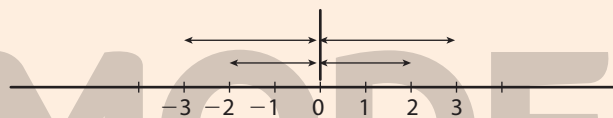
Primeiro caso: os dois pratos se equilibram, e, portanto, a bolinha mais leve se encontra no grupo III. Comparam-se, então, duas bolinhas do grupo III. Se houver desequilíbrio, a bolinha mais leve será a que se encontra no prato alto; se houver equilíbrio, será aquela que sobrou.

Segundo caso: se houver desequilíbrio entre os pratos, comparam-se as bolinhas do grupo mais leve.

Aproveitar também para apresentar outros problemas envolvendo desigualdades, como:

- Três pescadores estão de um mesmo lado de um rio e querem atravessá-lo para chegar à outra margem. O barco que está à disposição deles suporta até 150 kg de massa. Se os pescadores têm massas iguais a 50 kg, 80 kg e 110 kg, como podem fazer para chegar à outra margem? *Resposta:* Na 1ª viagem, vão os pescadores que têm massas iguais a 50 kg e 80 kg; um deles fica na outra margem e o outro volta, digamos o de 50 kg. Na 3ª viagem, o de 110 kg vai e, na viagem seguinte, o de 80 kg volta. Na 5ª viagem, os pescadores de 50 kg e 80 kg vão juntos, e assim todos atravessam o rio.

Em *propriedades da desigualdade*, no caso da multiplicação ou da divisão de ambos os membros da desigualdade por um mesmo número negativo, pode-se complementar a justificativa da inversão do sentido da desigualdade apoiando-se na ideia de simetria. Por exemplo, $2 < 3$ significa que 2 está mais próximo da origem que 3, de modo que seus pontos simétricos (-2 e -3 respectivamente) mantêm a mesma relação de proximidade. Mas, como -3 está mais à esquerda que -2 , então $-2 > -3$, o que inverte o sentido da desigualdade:



Ao trabalhar o tópico *resolvendo problemas com inequações*, lembre-se de que as questões que envolvem desigualdades exigem dos alunos os mesmos tipos de habilidade requeridos para a resolução de equações. A representação de uma situação-problema em linguagem matemática é um processo que demanda a compreensão do enunciado e das relações entre a incógnita e as condições do problema e o domínio da linguagem algébrica. Para alunos dessa faixa etária, é muito importante ficar claro o raciocínio que levou a determinada tradução em linguagem algébrica, além da apresentação de um vasto repertório de problemas que abordem diferentes situações.

Após a resolução do **exercício 22**, propor aos alunos uma variação do problema:

- Um barril contém 67 litros de leite, que serão distribuídos igualmente em garrafas com capacidade de 5 litros.
 - Quantas garrafas poderão ser enchidas com leite?
 - Quantos litros de leite sobrarão?

Esse problema pode ser representado pela inequação: $67 - 5x > 0$, cuja solução é $x < \frac{67}{5}$. Portanto, serão enchidas 13 garrafas e, como $13 \cdot 5 = 65$, sobrarão 2 litros de leite.

Note que esse problema recai em uma inequação de 1º grau cuja solução deve ser um número inteiro não negativo, facilmente determinável. Porém, existem problemas que recaem em desigualdades com duas incógnitas, para os quais não há método direto de resolução, como as inequações de 1º grau. Por exemplo:

- Em um sítio há galinhas e porcos, totalizando menos de 180 patas. Quantas galinhas e quantos porcos há nesse sítio?

Esse problema pode ser expresso algebricamente chamando-se a quantidade de galinhas de x e a quantidade de porcos de y . Teríamos, então: $2x + 4y < 180$

Embora a resolução de inequação desse tipo esteja além dos objetivos propostos aos alunos dessa faixa etária, é interessante que eles saibam que há muitos tipos de inequação, relacionadas com importantes aplicações matemáticas.

Ampliar o estudo com gráficos e tabelas do “Trabalhando a informação” das **páginas 141 e 142** para apresentar um recurso muito usual na organização de dados: agrupar dados muito maiores ou muito menores que a média dos valores

em estudo em categorias do tipo: “maiores que determinado valor” ou “menores que determinado valor”. Por exemplo, uma pesquisa realizada com 20 frequentadores de um clube, a respeito de sua idade, forneceu os seguintes dados:

12 27 21 43 8 12 12 48 6 57 11 32 62 73 5 30 44 38 26 36

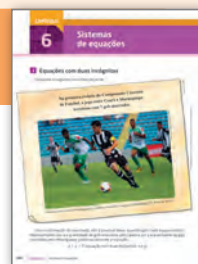
Como há poucos entrevistados com idade nas faixas de 50 a 59 anos, de 60 a 69 anos e de 70 a 79 anos, convém agrupar os valores 57, 62 e 73 em uma única categoria: “maiores de 50 anos”:

Idade (em anos)	Quantidade
De 0 a 9	3
De 10 a 19	4
De 20 a 29	3
De 30 a 39	4
De 40 a 49	3
Mais de 50	3

CAPÍTULO

6

Sistemas de equações



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Reconhecer problemas que recaem em sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.
- Compreender e aplicar as técnicas de resolução de sistemas de equações.
- Enumerar as possibilidades de ocorrência de um evento e representá-lo por meio de pares ordenados.
- Interpretar e construir um gráfico de linha.

Orientações gerais do capítulo

Explorar com os alunos o exemplo de uma manchete de jornal apresentada no início desse capítulo para trabalhar o fato de que as manchetes de jornais precisam ser breves e sucintas, pois dispõem de espaço limitado, e que sua principal função é atrair o leitor. Por isso, muitas vezes não é possível tirar conclusões de determinadas notícias baseando-se somente nas manchetes, sem ler o restante da matéria jornalística. Na situação apresentada no início do capítulo, não podemos tirar algumas conclusões, por exemplo, sobre quem venceu a partida ou qual foi o resultado do jogo.

Para os **exercícios da página 148**, é interessante dedicar especial atenção à localização de pontos de coordenadas $(x, 0)$ e $(0, y)$, que trazem maior dificuldade aos alunos. Um modo de auxiliá-los a não se equivocarem é pedir que considerem o processo de localização como duas etapas independentes; a coordenada x indica o número de unidades a serem deslocadas na direção horizontal (para a direita ou para a esquerda) e a coordenada y , o número de unidades a serem deslocadas na direção vertical (para cima ou para baixo). Por exemplo, o ponto de coordenadas $(-4, 0)$ pode ser localizado deslocando-se 4 unidades para a esquerda a partir da origem e, depois, realizando-se o deslocamento vertical, referente à coordenada y ; como $y = 0$, não deve subir nem descer, de modo que o ponto está sobre o eixo x . Da mesma forma, o ponto de coordenada $(0, 5)$ pode ser localizado deslocando-se 0 unidade na direção horizontal, ou seja, não se movimentando nem para a direita nem para a esquerda a partir da origem, o que indica que esse ponto estará sobre o eixo y . Depois, desloca-se verticalmente 5 unidades para cima, referente à coordenada y .

Aproveite o **exercício 10** para comentar sobre equações equivalentes. Observe que o número a ser escolhido para multiplicar cada termo da equação pode ser, por exemplo, o número $\frac{1}{2}$, que é o mesmo que dividir cada termo por 2. Esse comentário será útil e ganhará importância quando se comentar o **exercício 21**.

No **exercício 12** as soluções resumem-se a números naturais e, portanto, são finitas. Pode-se ampliar essa atividade saindo desse contexto e apresentando novos problemas, como:

- Considerando que essa equação admite como solução números inteiros, a quantidade de soluções é finita ou infinita?
- Considerando que essa equação admite como solução números racionais, a quantidade de soluções é finita ou infinita?

A seção “Trabalhando a informação” da **página 151** permite aos alunos desenvolver diversas habilidades, como:

- Organizar os resultados registrando-os na forma de pares ordenados.
- Interpretar os resultados obtidos em termos de jogadas possíveis.
- Utilizar a notação de números racionais na forma de fração para representar uma probabilidade.

Aproveite a atividade dessa seção para levantar outras questões:

- Se Hugo tirou o número 5 no lançamento do primeiro dado, qual é a probabilidade de que ele vença a partida?

Resposta: $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, pois os números cuja soma perfazem pelo menos 10 são 5 e 6.

- Se Hugo tirou o número 3 no lançamento do primeiro dado, qual é a probabilidade de ele vencer a partida nessa rodada? *Resposta:* Zero, pois ele precisaria tirar 7 para somar 10, e 7 não é um número possível.

Ao trabalhar o *método da substituição* para a resolução de sistemas com os alunos, é importante mostrar que a solução pode ser obtida isolando-se uma das incógnitas em qualquer uma das equações, de forma que os alunos percebam que ambos os modos são possíveis e igualmente válidos.

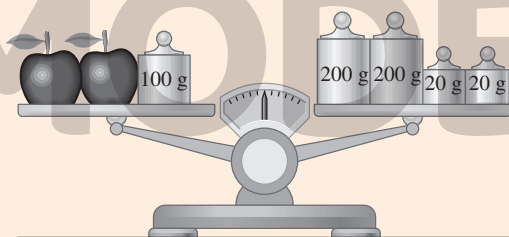
Utilizar o **exercício 14** para ressaltar com os alunos que a verificação deve ser feita para ambas as equações do sistema, pois o par ordenado pode satisfazer uma das equações, mas não a outra. Por exemplo, considerando o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

O par ordenado $(2, -3)$ satisfaz a primeira equação, mas não a segunda.

No **exercício 15**, o sistema pode ser resolvido manipulando-se os objetos das balanças, como segue:

Podemos trocar o mamão na segunda balança por 1 maçã mais 100 g, como mostra a situação na figura:



Retirando-se 100 g de cada prato da balança, percebemos que a massa de duas maçãs corresponde a 340 g. Logo, a massa de 1 maçã é igual à metade de 340 g, ou seja, 170 g.

O desafio que torna interessante essa resolução é como tirar 100 g de cada prato, uma vez que não há um peso, ou um conjunto de pesos, com 100 g no prato da direita. Instigue os alunos a procurar uma saída e aguarde a possibilidade de alguém propor a substituição de um dos pesos de 200 g do prato da direita pelo peso de 100 g a ser retirado do prato da esquerda.

Substituindo a massa da maçã na primeira igualdade, obtemos:

Massa de um mamão = $170 \text{ g} + 100 \text{ g} = 270 \text{ g}$. Chamando a massa do mamão de x e a massa da maçã de y , obtemos a solução: $(270; 170)$

Aproveite o **exercício 21** para comentar com os alunos que a impossibilidade da solução poderia ser obtida dividindo-se a primeira equação por 2 e comparando-a com a segunda equação $(x - y = -3)$:

$$\frac{2x}{2} - \frac{2y}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow x - y = 1$$

Comparando-as, vemos que a diferença $x - y$ não pode ser simultaneamente igual a 1 e a -3 , o que indica que o sistema não tem solução.

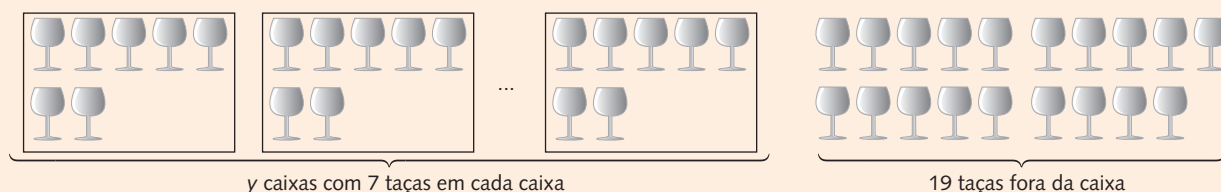
Se considerar oportuno, substituir o segundo membro da primeira equação por -6 . Perguntar, então, aos alunos se o novo sistema também tem solução e, se tiver, quantas soluções teria. Deverão concluir que o novo sistema tem infinitas soluções.

Ao expor a situação 2 da **página 158**, retomar com os alunos o conceito de mínimo múltiplo comum (mmc), pois, para haver a possibilidade de cancelamento dos termos na incógnita x ou na incógnita y , é necessário que uma dessas variáveis apareça em cada equação com mesmo valor absoluto e sinais contrários.

No **exercício 29**, pode ser explorado o cálculo por estimativa, perguntando-se aos alunos, antes que resolvam o problema, qual dos doces tem o maior preço. Espera-se que eles façam uso da noção de proporcionalidade e percebam que a embalagem que tem mais chocolate apresenta maior preço. Logo, o chocolate tem preço maior do que o bombom.

Ao trabalhar com a seção “Pense mais um pouco...” da **página 159**, pedir aos alunos que representem as informações dadas por meio de esquemas. Os esquemas vão facilitar a compreensão do problema e a representação em linguagem algébrica:

“Após colocar 7 taças em cada caixa, restam 19 taças fora das caixas.”



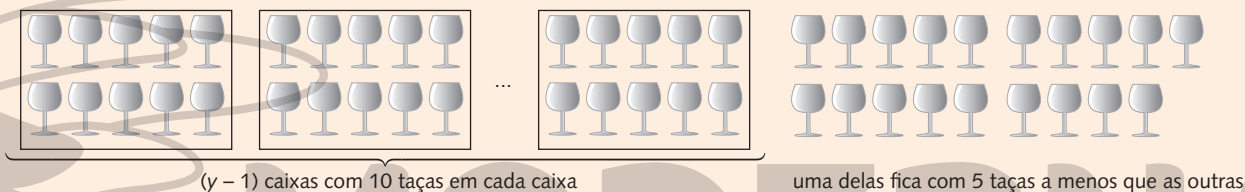
ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Chamando o número de taças de x e o número de caixas de y , as informações podem ser traduzidas na forma algébrica por:

$$7y + 19 = x \Rightarrow x - 7y = 19$$

A segunda afirmação diz:

“Tentando colocar 10 taças em cada caixa, uma delas fica com 5 taças a menos que as outras.”



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

$$10(y - 1) + 5 = x \Rightarrow x - 10y = -5$$

Multiplicando a primeira equação por (-1) e adicionando-a à segunda equação obtém-se $-3y = -24$ e, portanto, $y = 8$. Finalmente, substituindo o valor $y = 8$ em qualquer uma das duas equações obtemos $x = 75$.

Portanto, o rapaz está usando 8 caixas para embalar 75 taças.

Além da leitura e da realização dos exercícios da seção “Trabalhando a informação” das **páginas 160 e 161**, você pode conversar com os alunos sobre a temática proposta – o desemprego no Brasil ou em uma determinada região solicitando dados específicos de tal região aos alunos. É muito importante que os alunos, ao apresentarem dados estatísticos, o façam por meio de alguma ferramenta já estudada, como gráficos e tabelas.

CAPÍTULO

7

Simetria e ângulos



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Reconhecer a ideia de simetria em relação a um eixo.
- Identificar o conceito de simetria nas Artes e na Arquitetura.
- Desenhar a simétrica de uma figura.
- Definir ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice e realizar cálculos com eles.

Orientações gerais do capítulo

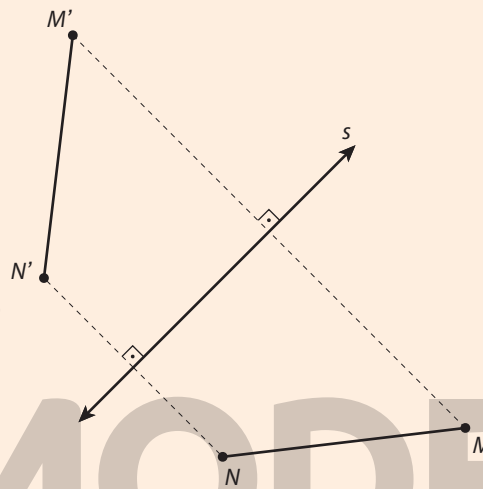
Ao iniciar esse capítulo, apresentar aos alunos algumas perguntas:

- Em que outras situações vocês reconhecem a ideia de simetria?
- Por que, na sua opinião, a simetria é usada com frequência nas Artes?
- Deem exemplos de objetos cotidianos que não apresentam simetria.

Se possível, providencie antecipadamente um espelho, para que, ao ser colocado sobre o eixo de simetria de uma figura, os alunos reconheçam a existência desse eixo, comprovando que ambos os lados da figura são idênticos.

Uma variação interessante do **exercício 17** é pedir aos alunos que, dados dois pontos, A e B , obtenham o eixo de simetria entre ambos por meio de dobraduras. Como o eixo de simetria deve estar à mesma distância dos pontos A e B , basta sobrepor os pontos e a dobra da folha corresponderá ao eixo de simetria procurado; mais que isso, essa linha corresponde à mediatriz do segmento \overline{AB} , ou seja, ao conjunto de todos os pontos que estão à mesma distância dos pontos A e B .

Pode-se mudar as condições do **exercício 19** de modo que os alunos obtenham o segmento simétrico com o auxílio de régua e esquadro, sem fazer dobraduras. Isso permitirá trabalhar a ideia de distância entre ponto e reta: como cada ponto do segmento \overline{MN} deve estar à mesma distância da reta s que os pontos simétricos correspondentes do segmento $\overline{M'N'}$, é necessário o uso de um esquadro que una cada ponto de \overline{MN} à reta s formando 90° com ela, como mostra a figura:



NELSON MATSUDA

Quanto ao “Pense mais um pouco...” da **página 172**, devemos lembrar que as construções com régua e compasso de um ponto simétrico em relação a uma reta podem ser realizadas por meio de tentativas e, nesse momento, o apelo a justificativas visuais pode servir como recurso interessante. Consideremos o procedimento clássico de obtenção de um ponto simétrico do ponto A em relação a uma reta r com o auxílio de régua e compasso:

- Com a ponta-seca em A e abertura qualquer, trace um arco que corte a reta r em dois pontos distintos, M e N (figura 1).
- Com a ponta-seca em M e abertura \overline{AM} , trace um arco. Depois, com a ponta-seca em N e a mesma abertura, trace outro arco, que cruzará o primeiro em um ponto T . Esse ponto será o simétrico do ponto A em relação à reta r (figura 2).

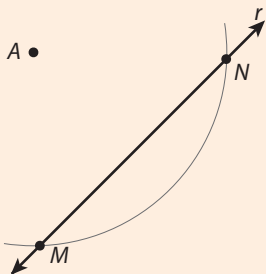


figura 1

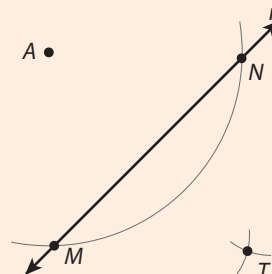


figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O estudo de *ângulos complementares* e *ângulos suplementares* é importante para futuras aplicações, como o estudo do triângulo retângulo e do teorema do ângulo externo. É interessante aproveitar o conteúdo para explorar habilidades de cálculo mental, fazendo perguntas como:

- Qual ângulo tem medida igual à de seu complemento? *Resposta:* 45°
- Qual é o ângulo cuja medida, somada com sua metade, é igual a 180° ? *Resposta:* 120°

Sugestão de leitura para o professor

Os padrões de beleza que os olhos não podem ver

Na Geometria, nós estudamos alguns dos padrões visuais que vemos no mundo a nossa volta. Esses padrões visuais podem ser as formas “obviamente matemáticas” estudadas pelos antigos gregos – triângulos, círculos, poliedros e outras semelhantes – ou os padrões da pelagem dos animais e os padrões de crescimento de plantas e flores. [...]

Entretanto, nossos olhos percebem outros padrões, padrões não tanto de formatos de figuras, mas de “forma”. A simetria é um exemplo óbvio. A simetria de uma flor ou de um floco de neve é claramente relacionada com sua regularidade geométrica. Contudo nós não vemos a simetria, realmente – pelo menos com os nossos olhos; nós a percebemos, sim, com nossas mentes. O único modo de “ver” os verdadeiros padrões de simetria (diferentemente dos padrões simétricos) é por meio da Matemática. Tornando visíveis os padrões de simetria de outro modo invisíveis, e que contribuem para a beleza, o estudo da simetria captura um dos aspectos mais profundos e abstratos da forma. [...]

O que é simetria? No dia a dia, dizemos que um objeto (um vaso, talvez, ou um rosto) é simétrico se ele parece semelhante de diferentes lados ou de diferentes ângulos, ou quando é refletido no espelho. Essas observações gerais não esgotam todas as possibilidades, mas contêm a ideia principal. [...]

Vamos começar esclarecendo o que queremos dizer com “olhando para a mesma coisa de um ângulo diferente”. Imagine que você tem um objeto na sua frente. Pode ser uma figura bidimensional ou um objeto tridimensional. Agora suponha que o objeto é girado em torno de alguma linha ou ponto (ver figuras 4.8 e 4.9). O objeto *parece* o mesmo depois da manipulação, igual ao que era antes – sua posição, forma e orientação são as mesmas? Se elas são, nós dizemos que o objeto é “simétrico” *para aquela determinado tipo de manipulação*.

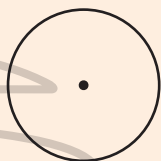


Figura 4.8 - A circunferência parece exatamente a mesma se nós a girarmos em torno do centro, em qualquer ângulo, ou se refletida no espelho.

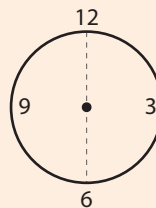


Figura 4.9 - Fazendo a reflexão do mostrador do relógio sobre o diâmetro que vai das 12 horas até as 6 horas, o ponto das 3 horas tem sua posição trocada pelo ponto das 9 horas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Por exemplo, se pegarmos uma circunferência e a girarmos em torno de seu centro em qualquer ângulo que quisermos, a figura resultante parece exatamente a mesma com que começamos (ver figura 4.8). Podemos dizer que a circunferência é simétrica para qualquer rotação em torno de seu centro. É lógico que, a menos que a rotação seja feita em 360° completos (ou um múltiplo de 360°), qualquer ponto da circunferência terminará numa posição diferente da original. A circunferência terá se deslocado. Mas, mesmo que os pontos individuais tenham se deslocado, a figura parece exatamente a mesma depois de executarmos a operação.

A circunferência é simétrica não apenas para qualquer rotação em torno de seu centro, mas também para uma reflexão sobre qualquer diâmetro. Reflexão aqui significa trocar cada ponto da figura com aquele que lhe é diretamente oposto, em relação a seu diâmetro. Por exemplo, com um mostrador de relógio, a reflexão sobre o diâmetro vertical troca o local das 9 horas com o das 3 horas, o local das 10 horas com o das 2 horas etc. [...]

Para continuar nós vamos nos deslocar da ideia cotidiana de “simetria” para uma noção mais precisa de *simetria em relação a uma determinada manipulação do objeto*. Quanto maior o número de manipulações que deixem uma figura ou um objeto parecendo o mesmo (em posição, forma e orientação), mais “simétrico” ele é no sentido correto. Como nós queremos aplicar nosso conceito de simetria a coisas outras que não figuras geométricas ou objetos físicos, nós devemos começar a usar a palavra “transformação”, em vez de manipulação, daqui para diante. Uma *transformação* toma um dado objeto (que pode ser um objeto abstrato) e o transforma numa outra coisa. A transformação pode ser simplesmente uma translação (deslocando o objeto de uma posição para outra, sem girá-lo) ou pode ser uma rotação (sobre um ponto, para uma figura bidimensional; sobre uma linha para um objeto tridimensional) ou uma reflexão (sobre uma linha para uma figura bidimensional; sobre um plano para um objeto tridimensional). Ou pode ser algo que geralmente não é possível para um objeto físico, tal como encolhê-lo ou esticá-lo.

A chave para o estudo matemático da simetria é olhar para as transformações dos objetos, em vez de fazê-lo para os objetos propriamente ditos.

Para um matemático, a simetria de uma figura é uma transformação que deixa a figura invariante. Invariante significa que, tomada como um todo, a figura *parece* a mesma que antes da transformação, em termos de posição, forma e orientação, mesmo que os pontos individuais da figura possam ter se deslocado.

Fonte: DEVLIN, Keith. *O gene da Matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2004. p. 115-120.

Sugestão de atividade

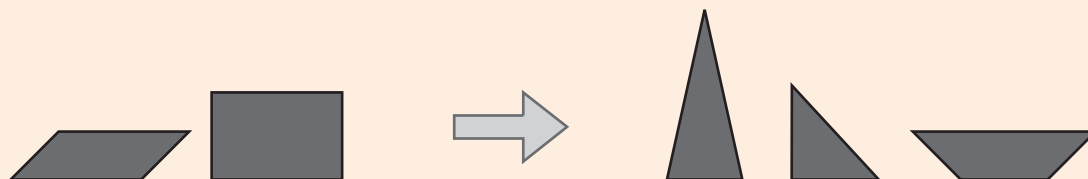
Jogo da simetria

Material necessário

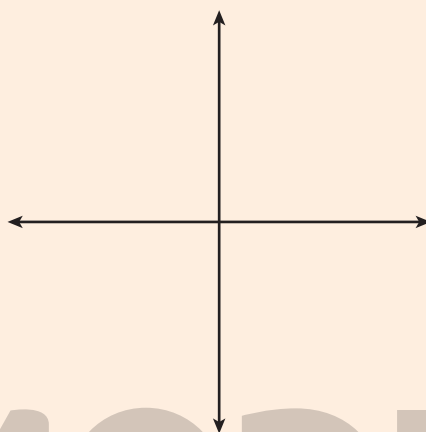
Folhas de sulfite, lápis, tesoura, régua e compasso.

Desenvolvimento

Pedir aos alunos que recortem cartas de formato retangular e, em cada uma, desenhem uma forma geométrica como as abaixo. Eles devem fazer quatro cartas de cada tipo:



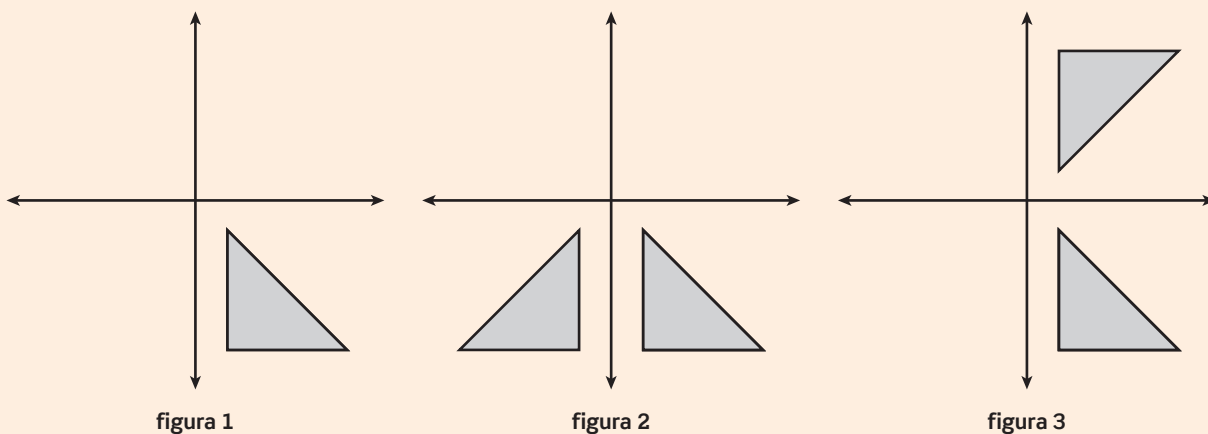
Após a confecção das cartas, pedir aos alunos que construam um tabuleiro, numa folha de sulfite, traçando duas retas perpendiculares:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Regras

- Os jogadores devem embaralhar as cartas e distribuir quatro para cada jogador. As restantes formam um monte para compras no centro da mesa.
- Após a escolha do jogador que vai começar o jogo, ele coloca uma de suas peças em qualquer um dos quatro quadrantes do tabuleiro (figura 1).
- O jogador que está à esquerda coloca, então, uma peça em um dos dois quadrantes ao lado do ocupado, de modo que a figura seja simétrica à figura inicial em relação a uma das retas. As figuras 2 e 3 mostram as duas possibilidades de jogada.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

- Caso não tenha a carta correspondente para colocar no tabuleiro, o próximo jogador deve comprar cartas no monte do centro da mesa até encontrar a correspondente.
- Após os quatro quadrantes serem completados, o jogador da vez reinicia, colocando uma nova carta em um dos quadrantes.
- O vencedor será aquele que primeiro acabar com suas cartas.



Razões e proporções

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Determinar a razão entre duas grandezas de mesma espécie e de espécies diferentes.
- Resolver problemas envolvendo o conceito de razões.
- Comparar gráfico de barras.
- Conceituar proporções.
- Resolver problemas aplicando a propriedade fundamental das proporções.

Orientações gerais do capítulo

Se considerar oportuno, aproveite a situação contextualizada do início do capítulo para conversar com os alunos sobre a concentração populacional do país nas grandes cidades e sobre as consequências desse fato.

Uma fonte de consulta útil e confiável, que traz, entre outros assuntos, dados sobre a densidade demográfica no Brasil, conceito abordado nesse capítulo, é o *site* <<http://vamoscontar.ibge.gov.br/atividades>>.

Paralelamente ao conceito de razão (densidade demográfica), há outras questões a serem abordadas: a questão política da prioridade histórica dos meios de transporte privados e particulares em detrimento do transporte público; a questão da especulação imobiliária que causa adensamento populacional em bolsões mais valorizados dos centros urbanos; a falta de planejamento estrutural das cidades entre outras.

Para enriquecer o assunto desse capítulo, sugerimos o livro:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Proporções*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Para que serve Matemática?).

Na seção “Pense mais um pouco...” da **página 185**, é interessante destacar com os alunos que, apesar de a quantidade de atletas brasileiros ser menor nas olimpíadas de Londres em relação às olimpíadas de Pequim, o número de medalhas ganhas no total foi maior.

O “Para saber mais” das **páginas 185 a 187** é um bom momento para explorar o processo de leitura nas aulas de Matemática, evidenciando a utilização do conhecimento matemático no cotidiano.

Uma maneira de ampliar o **exercício 9** é pedir, num momento posterior, quando trabalhar razões entre grandezas diferentes, que os alunos calculem as razões entre a massa e o preço de cada molho e concluam qual das duas embalagens apresenta uma compra mais vantajosa.

Na seção “Pense mais um pouco...” da **página 189**, pode-se pedir aos alunos que indiquem por x o valor total do prêmio. Assim, Pedro e Melissa receberam, juntos, metade dos prêmios na razão $\frac{4}{3}$, ou seja, $\frac{x}{2}$ divididos em 7 partes iguais ($4 + 3$), das quais 4 foram destinadas a Pedro e 3 a Melissa. Assim:

$$\text{– Pedro recebeu } \frac{4}{7} \text{ de } \frac{x}{2}, \text{ ou seja, } \frac{4x}{14};$$

$$\text{– Melissa recebeu } \frac{3}{7} \text{ de } \frac{x}{2}, \text{ ou seja, } \frac{3x}{14};$$

$$\text{– Vanessa recebeu o dobro de Melissa, ou seja, } 2 \cdot \frac{3x}{14} = \frac{6x}{14};$$

– Márcio recebeu R\$ 50.000,00. Assim, temos:

$$x = \frac{4x}{14} + \frac{3x}{14} + \frac{6x}{14} + 50.000$$

$$14x = 4x + 3x + 6x + 700.000$$

$$14x - 13x = 700.000$$

$$x = 700.000$$

Aproveite o **exercício 28** para trabalhar com os alunos a importância de avaliar campanhas publicitárias de promoção usando a proporção, do modo como foi trabalhada no exercício, promovendo, assim, a educação para o consumo e evidenciando a importância da proporcionalidade no dia a dia.

A seção “Pense mais um pouco...” da **página 196**, com foco na renda *per capita*, propicia uma articulação com a Geografia. Pode-se trabalhar em conjunto com o professor de Geografia para explorar mais esse assunto.

O **exercício complementar 10** alia conhecimentos dos eixos de conteúdos “Números e operações” e “Espaço e forma”. Para resolver esse exercício, os alunos devem imaginar o cubo montado, percebendo, assim, quais são as faces opostas entre si e montando as proporções:

- $\frac{x+2}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5(x+2) = 8 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$
- $\frac{5+y}{y-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5(5+y) = 3(y-1) \Rightarrow y = -14$
- $\frac{2,5+z}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2(2,5+z) = 27 \Rightarrow z = 11$

Portanto, $x = -\frac{2}{5}$, $y = -14$ e $z = 11$.

Sugestão de leitura para o professor

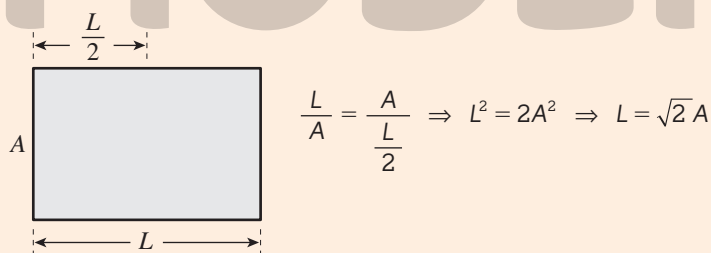
A intrigante folha de papel A4

O formato de papel mais usado para impressões e fotocópias, que recebe a denominação A4, tem 210 milímetros de altura por 297 milímetros de largura. Diferentemente do que se possa imaginar, a razão 297/210 não é a razão áurea (ver **RPM 6**, p. 9 ou **RPM 48**, p. 3). Analisaremos, a seguir, de onde vêm essas estranhas medidas.

Inicialmente padronizaremos neste artigo que as palavras *largura* e *altura* sempre serão usadas como referência ao maior e ao menor lado de um retângulo, respectivamente.

Imagine-se tendo que resolver o seguinte problema: qual deve ser a largura e a altura de uma folha retangular de modo que, quando ela for dividida ao meio, os dois novos retângulos obtidos mantenham a razão entre altura e largura da folha original?

O problema é de solução simples, como se vê a seguir:



NELSON MATSUDA

Portanto, a folha retangular com razão $\frac{L}{A}$ igual a $\sqrt{2}$ é a única que, quando dividida ao meio, conforme processo descrito, resultará em retângulos semelhantes ao da folha original. Lembramos que de forma diferente dos triângulos, onde bastam ângulos congruentes para que sejam figuras semelhantes, no caso dos quadriláteros a semelhança só se garante se os ângulos forem congruentes e se a razão entre os lados das figuras for preservada. No caso das medidas de uma folha A4, note que 297/210 é uma ótima aproximação racional para $\sqrt{2}$, com erro muito pequeno, da ordem de centésimo de milésimo.

A classificação de papéis da qual A4 faz parte chama-se série A, que começa com o A0 e vai até o A10. Essas folhas têm em comum a razão $\sqrt{2}$ entre largura e altura. A série começa com uma folha retangular de área 1 m², definida como A0. A partir dela obtemos a folha do formato seguinte, A1, dividindo-se A0 ao meio. As dimensões da folha A0, em metros, podem ser obtidas a partir da solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} L = \sqrt{2}A \\ LA = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \text{ e } L = \sqrt[4]{2} \text{ ou } A = 2^{-\frac{1}{4}} \text{ e } L = 2^{\frac{1}{4}}.$$

Passando essas medidas para milímetros, e aproximando para o milímetro mais próximo, encontramos as dimensões da folha A0, que são 841 mm de altura por 1189 mm de largura.

Façamos agora os cálculos da folha A1, que é obtida a partir da divisão ao meio da folha A0:

$$\begin{cases} L = \sqrt{2} A \\ LA = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = 2^{-\frac{3}{4}} \text{ e } L = 2^{-\frac{1}{4}}$$

Adota-se, nesse caso, a aproximação 594 mm por 841 mm.

Dividindo-se A1 ao meio, obtemos A2, que dividida ao meio resultará A3, e assim por diante até A10. Pode-se verificar de maneira simples que a altura e a largura de uma folha $A(k)$, em metros, serão dadas, respectivamente, por $2^{-\frac{1+2k}{4}}$ e $2^{\frac{1+2k}{4}}$. Para o caso da folha A4, aplicando $k = 4$ na fórmula, obtemos os “misteriosos” valores padronizados do formato, que são 210 mm por 297 mm.

Qual a vantagem da proporção $1 : \sqrt{2}$?

A literatura sobre artes gráficas cita dois aspectos importantes sobre a conveniência do uso de uma folha retangular de razão $1 : \sqrt{2}$. As páginas de um livro são impressas em uma folha de máquina de grande formato. Nela são feitas dobras e cortes e, a partir disso, são montados os cadernos que, juntos, compõem o livro. Normalmente as dobras são feitas “ao meio”, fazendo com que o número de páginas seja uma potência de 2. Se o papel for dobrado ao meio por uma dobra, resultará em 2 folhas (chamado *in-fólio*) que, quando impressas frente e verso, constituirão 4 páginas do livro. Se essa última folha for novamente dobrada ao meio, agora com dobras cruzadas, resultará em 4 folhas (*in-quarto*), ou seja, 8 páginas de livro. Com uma nova dobra teremos o *in-oitavo*: 3 dobras, 8 folhas e 16 páginas de livro; e assim sucessivamente.

Uma vez que cada formato deriva do seu precedente fazendo uma dobra sobre o maior lado do retângulo, a razão inicial $1 : \sqrt{2}$ sempre será mantida em todas as páginas do livro, seja qual for o número de dobras feitas na composição. Outros formatos não permitiriam isso como, por exemplo, um retângulo de razão 3:4 (também usado na confecção de livros) que obedece a um padrão de alternância no decorrer das sucessivas dobras. A primeira dobra gera retângulos de razão 2:3, a segunda gera retângulos 3:4, a terceira retângulos 2:3, e assim sucessivamente. Deixo por conta do leitor a demonstração do resultado: dada a razão $x : y$, se $\frac{y}{2} \leq x$, então as razões se alternam entre $x : y$ e $y : 2x$ no decorrer das sucessivas dobras que dividem o lado maior do retângulo ao meio (obs.: o único caso em que não há alternância será quando $\frac{x}{y} = \frac{y}{2x}$, que é justamente o caso em que temos a razão $1 : \sqrt{2}$).

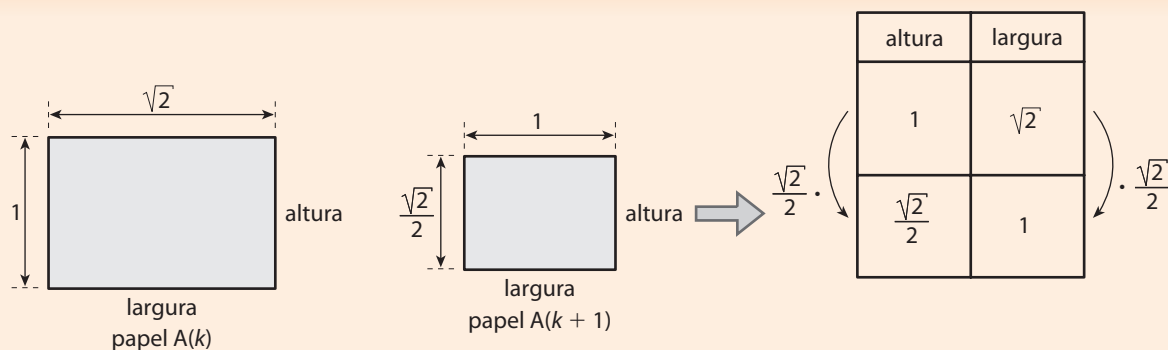
Vale citar que nem todos os estudiosos de composição em artes gráficas estão de acordo sobre a relevância da vantagem que acabamos de descrever da razão $1 : \sqrt{2}$ sobre outras razões. Para um bom acabamento final das dobras de um livro recomenda-se que as dobras sejam feitas paralelamente às fibras do papel. Com isso, folhas de papel que, em virtude da direção das fibras, são adequadas ao *in-quarto* não poderiam ser usadas para livros *in-oitavo* porque a fibra correria em direção errada. Portanto, a vantagem da razão preservada em $1 : \sqrt{2}$ após as dobras fica comprometida quando levamos em consideração a direção das fibras [1].

Outra vantagem que os papéis de razão $1 : \sqrt{2}$ da série A apresentam – e essa aceita por todos os especialistas – é a de que evitam o desperdício de papel nos trabalhos de fotocópias.

Imagine que você queira copiar duas folhas quadradas, juntas, em uma nova folha quadrada. Essa tarefa não pode ser realizada sem o desperdício de papel. Se os quadrados têm lado 10 cm, lado a lado formarão um retângulo de 10 por 20 cm, o que exigirá uma folha quadrada de 20 por 20 cm para que o serviço seja feito. Nesse caso, haverá desperdício de metade da folha. O mesmo não ocorre, por exemplo, com duas folhas A4 lado a lado, que podem ser copiadas, sem desperdício de papel, em uma folha A3.

Se você observar com atenção, as fotocopiadoras que fazem ampliação e redução a partir das folhas da série A possuem alguns comandos predefinidos, como, por exemplo, os de redução de 71%, 50%, 35%, 25%, 18% e 12,5%.

Você já se perguntou de onde vêm essas estranhas porcentagens? Responderemos essa pergunta calculando qual deve ser o fator de redução usado na altura e na largura de uma folha $A(k)$ para que ela seja reduzida a uma folha $A(k + 1)$:



Como $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$, uma redução de 71% fará o serviço desejado. As demais reduções indicadas referem-se, respectivamente, às reduções de $A(k)$ para $A(k+2)$, $A(k+3)$, $A(k+4)$, $A(k+5)$ e $A(k+6)$.

Fonte: MELLO, José Luiz Pastore. A Matemática da folha de papel A4. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 66, p. 38-41.

CAPÍTULO

9

Grandezas proporcionais e porcentagem



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Reconhecer quando duas grandezas são ou não proporcionais.
- Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.
- Resolver problemas utilizando a regra de três simples e a regra de três composta.
- Construir gráfico de barras e gráfico de colunas aplicando regra de três.
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de porcentagem.
- Construir gráfico de setores aplicando regra de três.

Orientações gerais do capítulo

Considerando a importância do assunto tratado na introdução do capítulo e no **exercício 7**, aproveite para falar sobre a economia de água, abordando hábitos na escola e em casa. Pode-se pedir a análise de outras situações de economia de água, como:

- Se uma pessoa escova os dentes em cinco minutos com a torneira não muito aberta, gasta 12 litros de água. No entanto, se molhar a escova e fechar a torneira enquanto escova os dentes e, ainda, enxaguar a boca com um copo de água, consegue economizar mais de 11,5 litros de água. Considerando que Carlos costuma ficar 7 minutos com a torneira não muito aberta enquanto escova os dentes, quantos litros de água são gastos nesse período? Quantos litros de água Carlos economizaria se adotasse o hábito de fechar a torneira enquanto escova os dentes e, ainda, enxaguasse a boca com um copo de água? *Respostas:* 16,8 litros; 16,3 litros
- Ao lavar o rosto em um minuto, com a torneira meio aberta, uma pessoa gasta 2,5 litros de água. Quantos litros de água uma pessoa gastará se ela ficar 3 minutos com a torneira aberta? *Respostas:* 7,5 litros

No *site* da Sabesp – Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo <site.sabesp.com.br> há outras dicas para a economia de água.

O **exercício 9** relaciona proporcionalidade com semelhança de triângulos. Se considerar conveniente, explore mais essa relação pedindo aos alunos que construam um triângulo $A''B''C''$ com lados de medidas $2x$, $2y$ e $2z$. Depois, peça que meçam os ângulos \hat{A}'' , \hat{B}'' e \hat{C}'' e comparem a forma dos três triângulos.

No **exercício 11**, é interessante chamar a atenção dos alunos para o fato de que, se aumentarmos o número de torneiras, o tempo para encher o tanque tende a diminuir. Desse modo, temos:

- a) Como 1 torneira aberta leva 8 horas para encher o tanque, temos que 2 torneiras abertas levam a metade do tempo. Logo, 2 torneiras abertas encheriam o tanque em 4 horas.
- b) Como 1 torneira aberta leva 8 horas para encher o tanque, temos que 3 torneiras abertas levam um terço do tempo. Logo, 3 torneiras abertas encheriam o tanque em $\frac{8}{3}$ de 4 horas. Como 1 hora é equivalente a 60 minutos, temos: $\frac{8}{3} \cdot 60 = 160$ (160 minutos).
- c) Sabemos que 1 torneira aberta leva 8 horas para encher o tanque. Assim, em 1 hora, 1 torneira enche $\frac{1}{8}$ do tanque. Logo, seriam necessárias 8 torneiras para encher o tanque em 1 hora.

Aproveite o assunto do **exercício 16** para conversar com os alunos sobre as atitudes que podem ser tomadas em relação à preservação do meio ambiente. Uma boa atitude de preservação é a diminuição do lixo descartável.

É bom lembrar com os alunos o tempo que a natureza leva para extinguir alguns dos principais lixos que recebe. Papel, de três a seis meses; tecido, de seis meses a um ano; filtro de cigarro, cinco anos; chiclete, cinco anos; madeira pintada, treze anos; náilon, mais de trinta anos; plástico, mais de cem anos; metal, mais de cem anos; borracha, tempo indeterminado e vidro, um milhão de anos.

No “Pense mais um pouco...” da **página 215**, pode-se pedir aos alunos que organizem os dados numa tabela, como essa a seguir:

Quantidade de pessoas	250	240
Número de dias de duração dos alimentos	24	x

Desse modo, a resolução do problema poderia ser encaminhada do seguinte modo:

As grandezas quantidade de pessoas e número de dias são inversamente proporcionais, pois, ao diminuir a quantidade de pessoas, o número de dias que os alimentos duram aumenta.

Assim, temos a proporção $\frac{250}{240} = \frac{x}{24}$, que nos leva ao valor de x.

$$240x = 250 \cdot 24$$

$$x = 25$$

Logo, a quantidade de alimento restante é suficiente para 25 dias.

A seção “Trabalhando a informação” das **páginas 216 e 217** se constitui em boa oportunidade para uma discussão interdisciplinar de temas como o da pobreza e da distribuição de renda. Nesse sentido, se julgar adequado, pode-se fazer um trabalho conjunto com os professores de História, Geografia e Ciências, chamando a atenção dos alunos para o desempenho dos países também em outros anos. Para complementar as informações, pode-se consultar o *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que disponibiliza um banco de dados com diversas informações, entre eles os indicadores sociais dos países. <<http://www.ibge.com.br/paisesat/>>

Após a resolução do **exercício 34**, pedir aos alunos que pesquisem o consumo médio da energia elétrica de sua casa e calculem quantos quilowatts-hora são gastos por mês com o uso do chuveiro.

Aproveite o **exercício 36** para conversar com os alunos sobre as diferentes formas de pagamento presentes no comércio. Destacar que, muitas vezes, quando os pagamentos são feitos em mais de uma parcela, pode haver um acréscimo em relação ao pagamento à vista.

Para ampliar o **exercício 37**, pode-se perguntar aos alunos qual seria o valor pago pela compra do material, caso não houvesse esse imposto.

No **exercício 45** e em outros, além da articulação com o eixo de conteúdos “Tratamento da informação”, chamar a atenção dos alunos para a forma de organização dos dados em tabela, gráficos de barras, de barras duplas e de setores e texto. Comentar com eles que esse tipo de tratamento aos dados é muito comum em jornais e revistas. Pode-se, então, pedir aos alunos que façam uma pesquisa em jornais e revistas sobre as diferentes formas de organizar os dados e tragam o material coletado para a classe.

A seção “Trabalhando a informação” das **páginas 231 e 232** também recorre a conhecimentos sobre procedimentos e eixos de conteúdos “Números e operações” e “Espaço e forma”, para a construção de gráficos de setores. Explorar bastante o uso do material de desenho geométrico nessa construção.



Área de regiões poligonais

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Compreender e aplicar o conceito de área.
- Resolver problemas que envolvem estimativas.
- Identificar figuras equivalentes.
- Calcular a área de paralelogramos, triângulos, losangos e trapézios.
- Resolver problemas envolvendo áreas de paralelogramos, triângulos, losangos e trapézios.
- Ler, interpretar e construir pictogramas.

Orientações gerais do capítulo

No início do capítulo trabalhamos com o tangram, para introduzir o conceito de área, tomando como unidade de medida a área do triângulo menor. Para ampliar o trabalho com esse material, pode-se conversar com os alunos sobre a lenda do tangram.

Não se conhece ao certo a origem do tangram, nem a data de criação nem seu autor. Sabe-se apenas que o tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa, usado há muitos séculos em todo o Oriente.

Conta a lenda que um jovem chinês despedia-se de seu mestre, pois iniciaria uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

— Com esse espelho você registrará tudo o que encontrar, durante a viagem, para mostrar-me na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

— Mas, mestre, como um simples espelho poderá lhe mostrar tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu, quebrando-se em sete peças.

Então, o mestre disse:

— Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

Sabemos que com essas peças é possível criar e montar cerca de 1.700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas e outros. Com o uso do tangram podemos trabalhar a identificação, a comparação, a descrição, a classificação e o desenho de formas geométricas planas, a visão e os aspectos de figuras planas, a exploração de transformações geométricas através de decomposição e composição de figuras, a abrangência das propriedades das figuras geométricas planas, a reprodução e a resolução de problemas usando padrões geométricos.

Para auxiliar na resolução do **exercício 1**, apresentamos neste **Suplemento** uma maneira de construir o tangram por meio de dobraduras.

O **exercício 8** possibilita uma integração com a história da América; por isso, pode ser trabalhado juntamente com o professor de História.

O “Pense mais um pouco...” da **página 243** oferece uma boa oportunidade para o aluno compor, de maneira diversa, retângulos a partir de partes de um paralelogramo não retângulo.

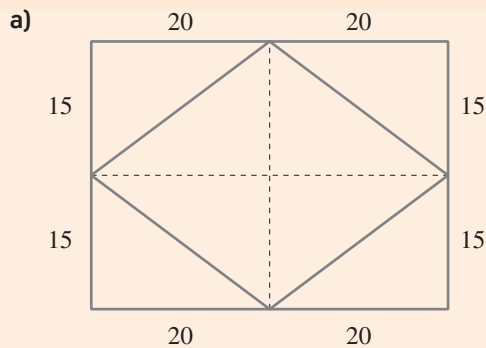
Pode-se explorar o **exercício 13** propondo aos alunos que tragam folhetos de propaganda de imóveis com desenho das plantas e pedir que calculem as áreas desses imóveis. Eles também podem desenhar diferentes plantas de imóveis, de acordo com uma área dada.

No **exercício 20** pode-se pedir aos alunos que expliquem o caminho que os levou à resolução, uma vez que as medidas da região cuja área se quer saber não são dadas diretamente.

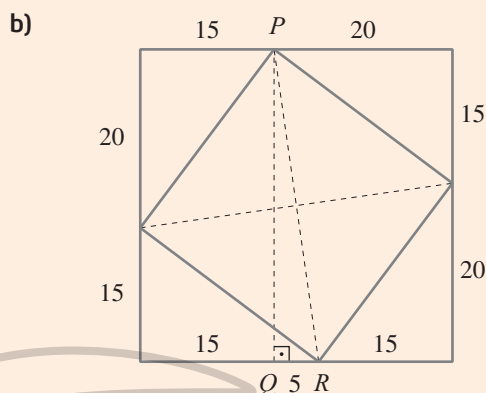
No “Pense mais um pouco...” da **página 247**, na 2ª questão, é importante que os alunos percebam que o fato de os dois triângulos não semelhantes terem áreas iguais, ou seja, serem equivalentes, deve-se à propriedade transitiva da igualdade. As áreas dos triângulos de I e de II são iguais à metade da área do paralelogramo que os originou; logo, são iguais entre si. Com isso esclarecido e depois do estudo formal da área do triângulo (item seguinte), pode-se explorar o fato de que esses triângulos não semelhantes têm bases e respectivas alturas de mesma medida e, portanto, têm áreas iguais.

O “Para saber mais” das **páginas 252 e 253** leva os alunos, por meio da construção geométrica com régua e compasso e também da dobradura, a intuir importantes propriedades das diagonais do losango.

O **exercício 33** pode ser ampliado caso se retire do enunciado a expressão “não quadrada”. Assim, teríamos duas possibilidades para o entendimento da questão, ambas ilustradas nas figuras a seguir.



Neste caso, o retângulo e o losango são não quadrados. Sua diagonal maior tem a medida do maior lado do retângulo, 40 cm. A área do losango é 600 cm².



Neste caso, o retângulo e o losango são quadrados. A diagonal do losango tem sua medida calculada pela aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo PQR.

$$(PR)^2 = 35^2 + 5^2 \Rightarrow PR = 25\sqrt{2}$$

Então, as diagonais do losango medem $25\sqrt{2}$ cm e a área do losango é 625 cm².

No "Pense mais um pouco..." da **página 255**, os alunos têm de descobrir a área da parte em verde da bandeira do Brasil. Comentar com os alunos que toda bandeira do Brasil deve ser confeccionada seguindo algumas proporções estabelecidas por uma lei (Lei nº 5.700, de 1º de setembro de 1971, que discorre sobre a forma e a apresentação dos Símbolos Nacionais):

Art. 5º A feitura da Bandeira Nacional obedecerá às seguintes regras (Anexo nº 2):

- I – Para cálculo das dimensões, tomar-se-á por base a largura desejada, dividindo-se esta em 14 (quatorze) partes iguais. Cada uma das partes será considerada uma medida ou módulo.
- II – O comprimento será de vinte módulos (20M).
- III – A distância dos vértices do losango amarelo ao quadro externo será de um módulo e sete décimos (1,7M).
- IV – O círculo azul no meio do losango amarelo terá o raio de três módulos e meio (3,5M).
- V – O centro dos arcos da faixa branca estará dois módulos (2M) à esquerda do ponto do encontro do prolongamento do diâmetro vertical do círculo com a base do quadro externo (ponto C indicado no Anexo nº 2).
- VI – O raio do arco inferior da faixa branca será de oito módulos (8M); o raio do arco superior da faixa branca será de oito módulos e meio (8,5M).
- VII – A largura da faixa branca será de meio módulo (0,5M).
- VIII – As letras da legenda Ordem e Progresso serão escritas em cor verde. Serão colocadas no meio da faixa branca, ficando, para cima e para baixo, um espaço igual em branco. A letra P ficará sobre o diâmetro vertical do círculo. A distribuição das demais letras far-se-á conforme a indicação do Anexo nº 2. As letras da palavra Ordem e da palavra Progresso terão um terço de módulo (0,33M) de altura. A largura dessas letras será de três décimos de módulo (0,30M). A altura da letra da conjunção E será de três décimos de módulo (0,30M). A largura dessa letra será de um quarto de módulo (0,25M).
- IX – As estrelas serão de 5 (cinco) dimensões: de primeira, segunda, terceira, quarta e quinta grandezas. Devem ser traçadas dentro de círculos cujos diâmetros são: de três décimos de módulo (0,30M) para as de primeira grandeza; de um quarto de módulo (0,25M) para as de segunda grandeza; de um quinto de módulo (0,20M) para as de terceira grandeza; de um sétimo de módulo (0,14M) para as de quarta grandeza; e de um décimo de módulo (0,10M) para a de quinta grandeza.
- X – As duas faces devem ser exatamente iguais, com a faixa branca inclinada da esquerda para a direita (do observador que olha a faixa de frente), sendo vedado fazer uma face como avesso da outra.

Disponível em: <www.planalto.gov.br>. Acesso em: 18 maio 2015.

Pode-se aproveitar os dados presentes nessa lei para fazer perguntas, como:

- Mariana confeccionou uma bandeira do Brasil com 28 metros de largura. Quantos metros quadrados ela usou de tecido? *Resposta:* 1.120 m^2
- Se uma bandeira do Brasil tem 30 metros de comprimento, qual a largura dessa bandeira? Quantos metros quadrados de tecido foram utilizados para a confecção dessa bandeira? *Respostas:* 21 m; 630 m^2

O “Trabalhando a informação” das **páginas 259 e 260** apresenta o trabalho com pictogramas. O trabalho com esse tipo de gráfico é muito importante, uma vez que aparece muito em meios de comunicação, pois emprega figuras sugestivas com o objetivo de chamar a atenção do leitor. Pode-se pedir aos alunos que coletem em jornais e revistas diferentes pictogramas e os compartilhem na classe. Com base nesses gráficos, pode-se propor atividades de leitura e interpretação dos dados. Verifique a conveniência de os alunos assistirem ao filme citado, cujo tema é autismo, e debaterem em trabalho interdisciplinar a inclusão social das pessoas afetadas por esse transtorno mental.

Sugestão de leitura para o professor

Construindo o tangram através de dobradura

Até aqui, para a realização das atividades, eram necessários um ou mais tangrams. Nesse capítulo, queremos salientiar o trabalho no sentido de elaborar estratégias para a construção do tangram. Para tal, é essencial que as propriedades das peças do tangram e as relações entre elas, tenham sido estudadas conforme sugerimos nas atividades dos capítulos anteriores.

A escolha do recurso dobradura para construir o tangram se justifica pelas múltiplas vantagens em relação ao desenvolvimento de diversas habilidades no aluno.

De fato, ao considerar a possibilidade de trabalho em sala de aula a partir do recurso da dobradura, devemos salientiar dois enfoques:

– **como estratégia para uma proposta interdisciplinar**, as atividades com dobradura, além do aspecto espontâneo, artístico e lúdico, despertam a imaginação, estimulam a criatividade, desenvolvem a discriminação visual, auditiva e, ainda, podem envolver várias linguagens, como a musical e cênica num projeto de diferentes disciplinas.

– **como estratégia para o estudo e exploração de noções matemáticas**, a dobradura permite desenvolver alguns conceitos, elementos e propriedades geométricas de forma experimental.

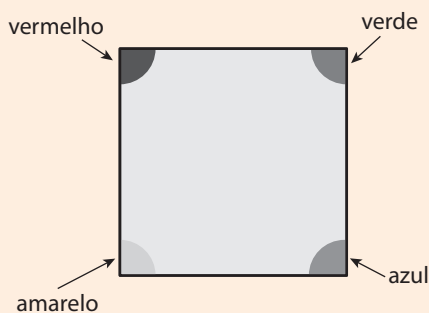
Ressaltamos ainda a riqueza desse recurso que permite o desenvolvimento da comunicação oral e escrita em Matemática.

Ao se defrontar com ordens orais ou escritas através de simbologias e esquemas, o aluno está diante de uma atividade de leitura e decodificação desses símbolos. De outra forma, ao descrever as etapas de uma dobradura, o aluno desenvolve e interioriza noções do espaço, utiliza e cria convenções para as representações gráficas e, principalmente, faz relações com conceitos já estudados anteriormente.

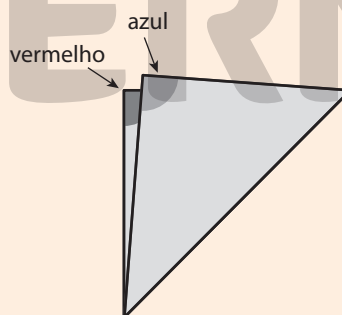
Inicialmente, sugerimos um procedimento para construir o tangram, através de dobradura, com alunos dos anos iniciais, fazendo possíveis explorações de noções geométricas.

Cada aluno deve ter uma folha de papel de dobradura ou similar, no formato de um quadrado. O professor apresenta à classe um quadrado com os vértices pintados e diz:

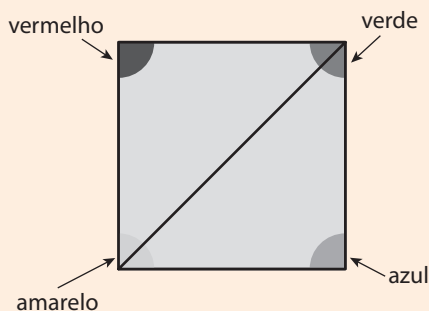
1. Pinte cada canto do quadrado, como mostra a figura.



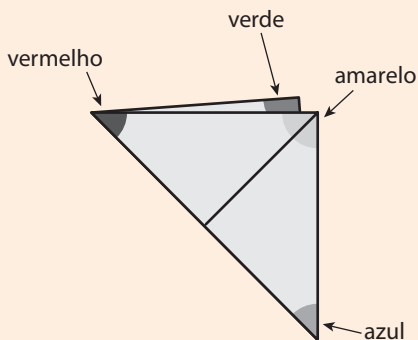
2. Dobre o quadrado, de modo que a ponta azul encoste na ponta vermelha.



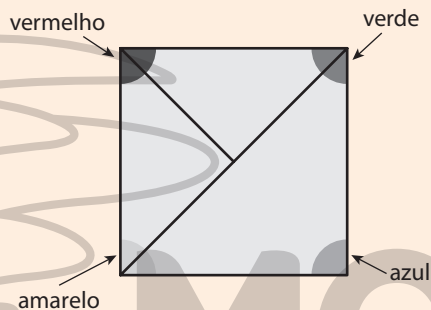
Abra o quadrado e risque com um lápis preto a marca da dobra. Essa linha é chamada de **diagonal** do quadrado. Quando dobramos o quadrado, que figuras apareceram? Elas são iguais ou diferentes? Por quê?



3. Dobre o quadrado de modo que a ponta amarela encoste na ponta verde. Atenção! Marque a dobra da ponta vermelha até a linha preta da marca anterior.



Quais figuras você acha que vão aparecer? Elas são iguais ou diferentes? Por quê?

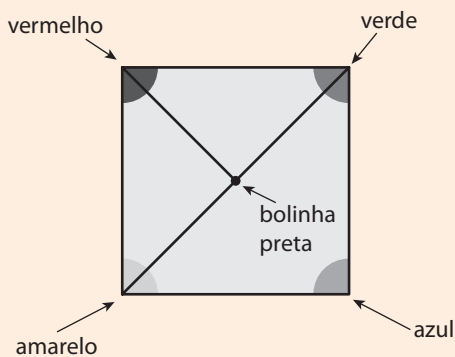


Abra o quadrado e risque a marca da dobra.

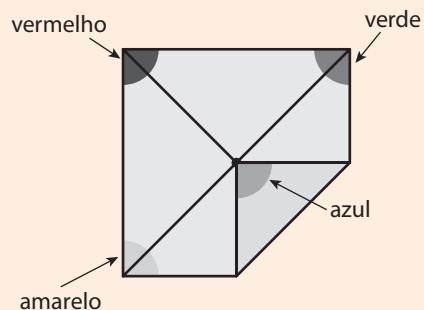
Formamos duas peças do tangram, **dois triângulos grandes** (Tg).

4. Pinte em seu tangram uma bolinha preta no centro do quadrado, onde se cruzam as duas dobras feitas.

Este é o **ponto médio** da diagonal do quadrado, ou seja, ele divide a diagonal em duas partes iguais.



5. Encoste a ponta azul na bolinha preta. Vinque a dobra.

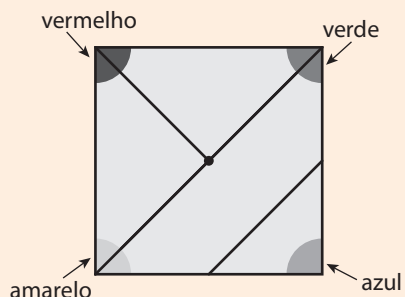


Que figura aparecerá?

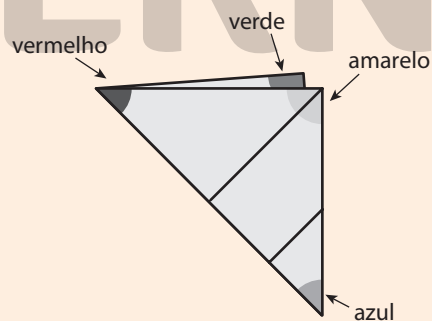
Quantas pontas (vértices) tem essa figura?

Abra e risque a dobra.

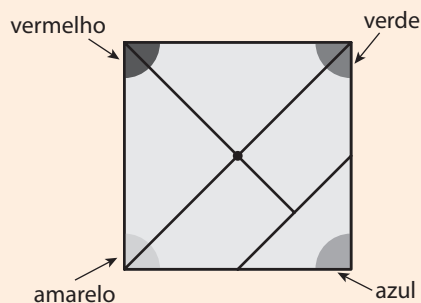
Formamos mais uma peça do tangram, **o triângulo médio** (Tm).



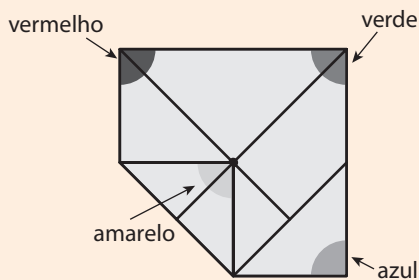
6. Encoste novamente a ponta amarela na ponta verde e marque a dobra até a linha do triângulo médio.



Abra e risque a marca da dobra.



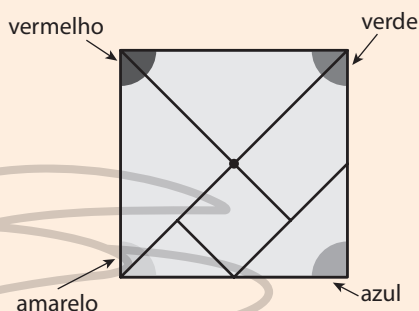
7. Encoste a ponta amarela na bolinha preta. Marque a dobra da linha preta até chegar no vértice do triângulo médio.



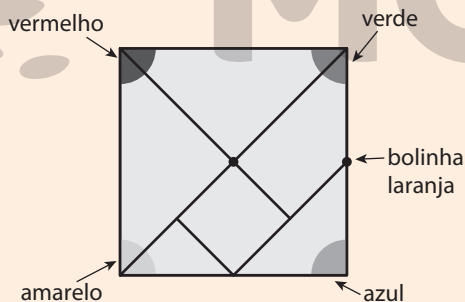
Que figuras irão aparecer?

Elas são iguais ou diferentes?

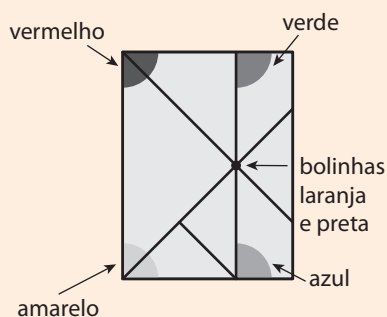
Formamos o **quadrado** (Q) e o **triângulo pequeno** (Tp).



8. Faça em seu tangram uma bolinha laranja no vértice do triângulo médio que não encosta no quadrado Q, conforme a figura abaixo.



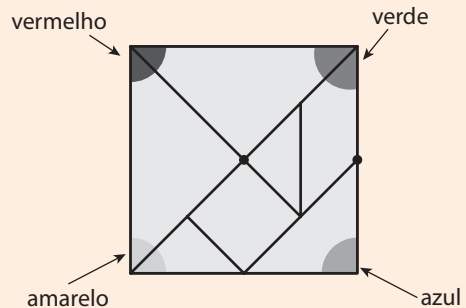
9. Encoste a bolinha laranja na bolinha preta. Marque a dobra da linha preta até o triângulo médio.



Abra e risque a marca da dobra.

Formamos o **paralelogramo** (P) e o outro **triângulo pequeno** (Tp).

O seu tangram está pronto! Pinte cada peça de uma cor, recorte e brinque como quiser.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O encaminhamento proposto merece algumas observações.

Inicialmente ressaltamos a importância do acompanhamento pelo professor de cada etapa da dobradura. Cada passo deve ser feito com destreza, devagar e a posição do professor também deve ser considerada. Sabemos que a noção de lateralidade é uma das habilidades a serem desenvolvidas desde a pré-escola. No entanto, crianças dessa faixa etária e as dos anos iniciais têm dificuldade em inverter a orientação de sentido para produzir uma ação de alguém que está à sua frente. Nesse caso, recomendamos que o professor fique de costas para a turma ao fazer cada passo da dobradura e que ele utilize uma folha quadriculada maior, para facilitar a visualização.

Em segundo lugar, a forma como o professor verbaliza passos de uma dobradura não deve seguir nenhuma "receita". A comunicação entre professor e alunos é um processo que se desenvolve naturalmente e depende de alguns fatores. Assim, o roteiro apresentado pode ser facilitado ou dificultado, de acordo com a comunicação que se estabeleça durante a atividade, a faixa etária ou escolar do grupo e o domínio de alguns elementos e propriedades das figuras geométricas.

Nesse sentido, com base no encaminhamento proposto, as cores de cada canto do quadrado podem ser substituídas, por exemplo, por letras ou números indicando os vértices da figura.

Da mesma forma, o uso da terminologia correta em Matemática, como o termo **vértice** ao invés de **canto** ou **ponta**, deve ser feito tendo em vista o domínio da linguagem usada pelos alunos.

Fonte: SOUZA, Eliane Reame de; DINIZ, Maria I. S. V.; PAULO, Rosa Monteiro; OCHI, Fusako Hori. *A Matemática das sete peças do tangram*. São Paulo: IME; USP, 1995. p. 55-61.



MO

