

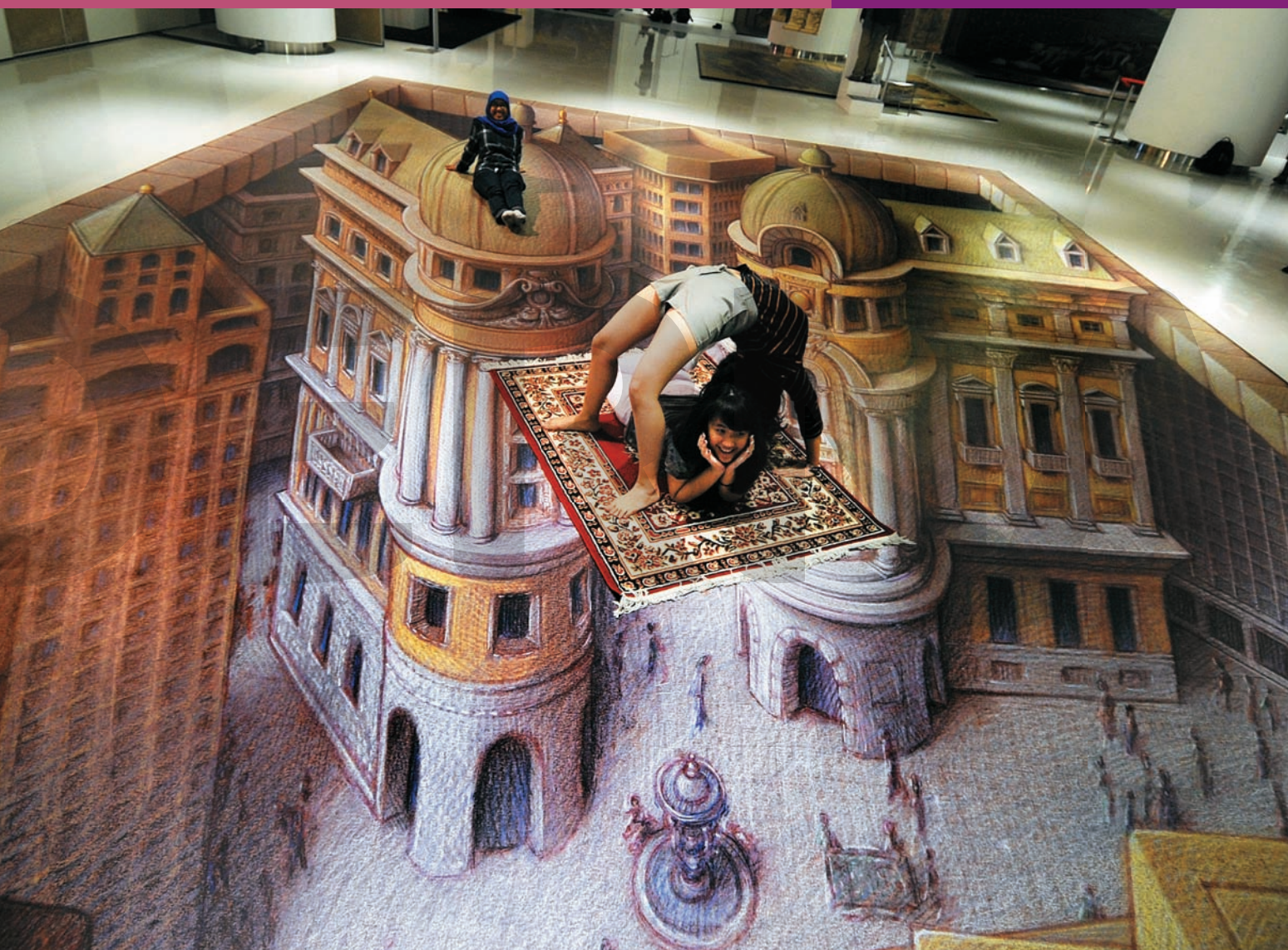
Edwaldo Bianchini

MATEMÁTICA BIANCHINI

8^o
ano

MANUAL DO
PROFESSOR

Componente curricular:
MATEMÁTICA



Edwaldo Bianchini

Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).

Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no ensino fundamental e médio, por 25 anos.

MATEMÁTICA BIANCHINI



MODERNA

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

8ª edição

São Paulo, 2015



Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay

Edição de texto: Enrico Brieese Casentini, Maria Cecília da Silva Veridiano, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Cármen Matricardi, José Joelson Pimentel de Almeida

Assistência editorial: Izabel Batista Bueno, Marcos Gasparetto de Oliveira

Preparação de texto: ReCriar editorial

Gerência de design e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma

Coordenação de design e produção gráfica: Everson de Paula

Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)

Projeto gráfico: Everson de Paula, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Everson de Paula

Foto: Visitantes posam para fotos em pintura 3D de Kurt Wenner durante Artphoria 2013, exposição no Ciputra Artpenuer Center, em Jacarta, Indonésia, dez. 2013.

© Kurt Wenner/Agung Kuncahya B./Xinhua Press/Corbis/Latinstock

Coordenação de arte: Patricia Costa, Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Enriqueta Monica Meyer, Estúdio Anexo

Editoração eletrônica: Estúdio Anexo, Formato Comunicação

Edição de infografia: William Taciro, Alexandre Santana de Paula

Ilustrações de vinhetas: Adriano Moreno Barbosa

Coordenação de revisão: Adriana Bairrada

Revisão: Cecília Setsuko Oku, Rita de Cássia Sam, Vânia Cobiaco

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Marcia Sato

Coordenação de bureau: Américo Jesus

Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Bureau São Paulo, Fabio N. Precendo, Marina M. Buzzinaro, Resolução Arte e Imagem

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira Silva, Fabio N. Precendo, Hélio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto, Rubens M. Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo

Matemática Bianchini / Edwaldo Bianchini. —
8. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos de 6^o ao 9^o ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02025

CDD-372.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.

Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904

Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510

Fax (0_ _11) 2790-1501

www.moderna.com.br

2015

Impresso no Brasil

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro foi feito especialmente para você.

Ele foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem e, também, ajudá-lo a ver como a Matemática está presente em tudo o que acontece à sua volta.

Aqui você vai encontrar exemplos de situações que permitem perceber que a Matemática faz parte do seu dia a dia.

Leia com atenção as explicações teóricas, para acompanhar as aulas e resolver os exercícios.

Faça deste livro um parceiro em sua vida escolar!

O autor



MODERNA

CONHEÇA O SEU LIVRO

A estrutura de cada capítulo é muito simples, pois permite encontrar com facilidade os assuntos fundamentais, os exemplos, as séries de exercícios e as seções enriquecedoras.

Página de conteúdo

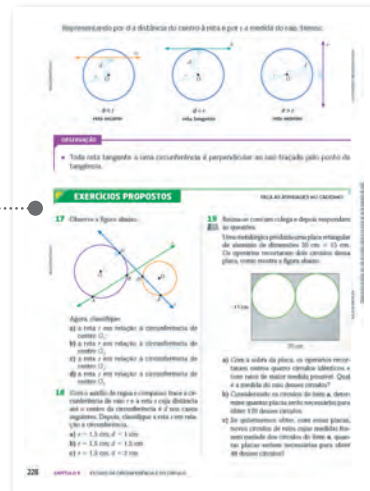
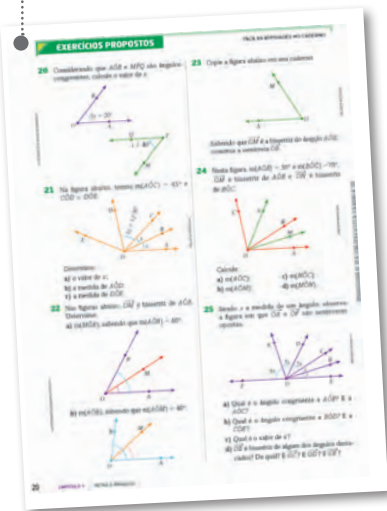
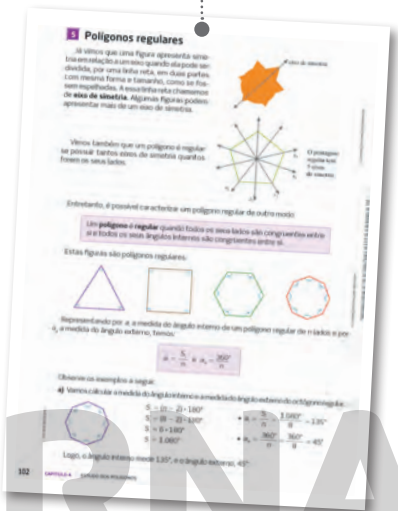
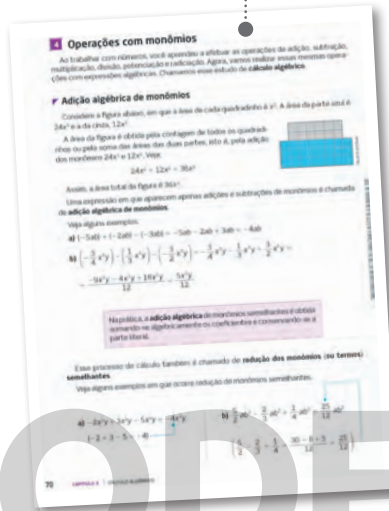
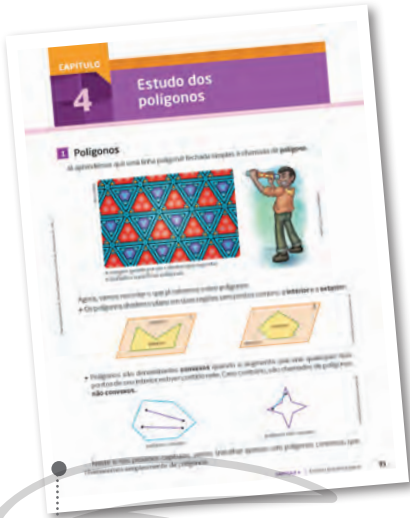
Contém a teoria explicada com linguagem clara e objetiva, apoiada por exemplos e ilustrações cuidadosamente elaborados para ajudar o entendimento da teoria.

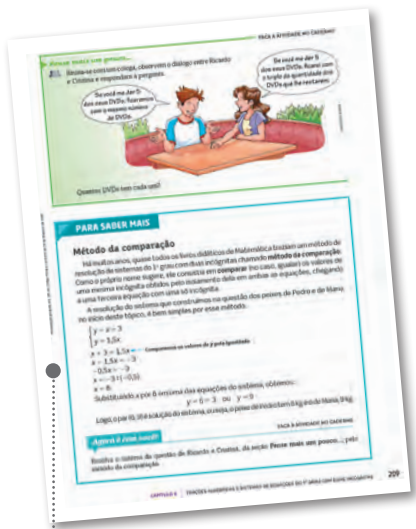
Página de abertura

O tema do capítulo é introduzido por meio de vários recursos, tais como textos com situações do dia a dia, imagens do cotidiano, História da Matemática etc.

Exercícios

O livro apresenta uma variedade de exercícios (de aplicação, de exploração, de sistematização, de aprofundamento), organizados segundo o grau de dificuldade.



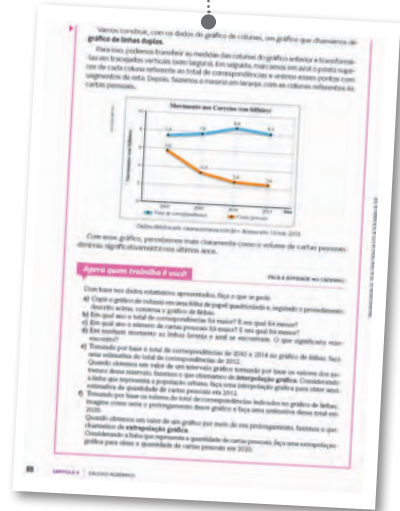
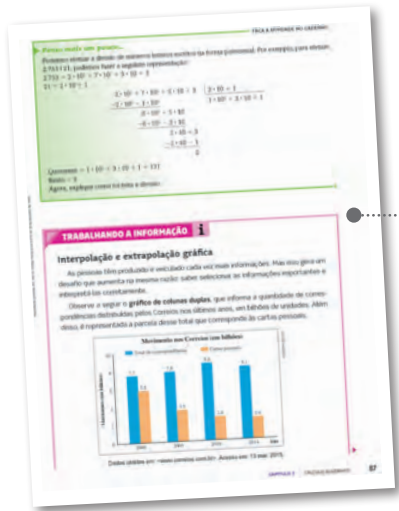


Para saber mais

Esta seção apresenta, entre outras coisas, textos sobre a Geometria e a História da Matemática para enriquecer e aprofundar diversos conteúdos matemáticos.

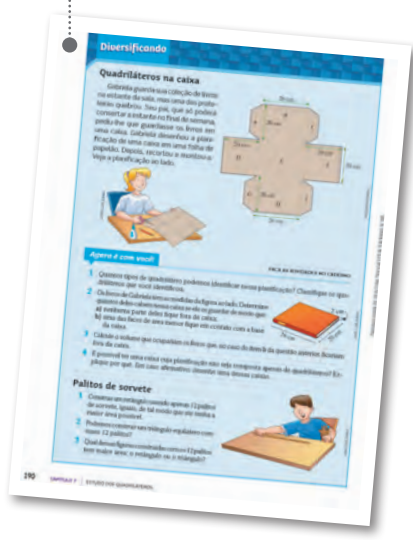
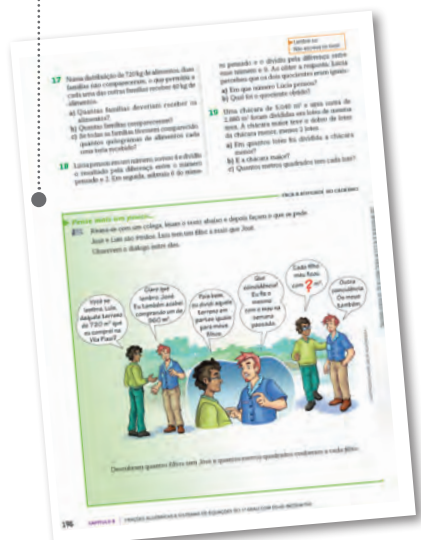
Trabalhando a informação

Esta seção permite que o aluno, além de atividades interdisciplinares, trabalhe a informação organizada em diferentes linguagens.



Atividades especiais

Estas seções apresentam atividades e objetivos diferentes. **Pense mais um pouco...** propõe atividades desafiadoras. **Diversificando** propõe ao aluno que entre em contato com atividades que envolvam temas variados.



Há, ainda atividades de **Calculadora** e de **Cálculo Mental**, além de atividades que podem ser feitas em **dupla** ou em **grupo**.



SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 Retas e ângulos

1. Retas	11
Posição de retas	12
Construindo retas paralelas com régua e compasso	13
Construindo perpendiculares com régua e esquadro	14
Partes da reta	15
Construindo segmentos congruentes com régua e compasso	17
Determinando o ponto médio de um segmento com régua e compasso	17
2. Ângulos	18
Bissetriz de um ângulo	19
Ângulos adjacentes	21
Ângulos complementares e ângulos suplementares	21
Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)	22
Ângulos formados por duas retas e uma transversal	25
Ângulos correspondentes	26
Ângulos alternos internos e ângulos alternos externos	28
Ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos	30
Trabalhando a informação	
Construindo um gráfico de setores	24

CAPÍTULO 2 Números reais

1. A história dos números	35
Números naturais	36
Números inteiros e números racionais	37
2. Representações dos números racionais	39
Da forma decimal para a forma de fração	41
3. Números quadrados perfeitos	43
4. Raiz quadrada de números racionais não negativos	46
Cálculo da raiz quadrada pela decomposição em fatores primos	47
Raiz quadrada aproximada	48
Raiz quadrada com aproximação decimal	49
5. Números irracionais e os números reais	51
6. Reta real	55
Para saber mais	
Os números irracionais, o triângulo retângulo e um quebra-cabeça	52
A Matemática na História	57
Trabalhando a informação	
Construindo e interpretando gráfico de linha	56
Diversificando	
Jogo do enfileirando	60

CAPÍTULO 3 Cálculo algébrico

1. Incógnita e variável	61
2. Expressões algébricas	62
Valor numérico de uma expressão algébrica	63
3. Monômios	67
Monômios semelhantes	68
4. Operações com monômios	70
Adição algébrica de monômios	70
Multiplicação e divisão de monômios	72
Potenciação de monômios	73
5. Polinômios	75
6. Operações com polinômios	76
Adição de polinômios	76
Subtração de polinômios	78
Multiplicação de polinômio por monômio	79
Multiplicação de dois polinômios	81
Divisão de polinômio por monômio	82
Polinômios com uma só variável	83
Divisão de polinômio por polinômio	84
Trabalhando a informação	
Interpolação e extrapolação gráfica	87
Diversificando	
Troca de e-mails	92

CAPÍTULO 4 Estudo dos polígonos

1. Polígonos	93
Elementos de um polígono	94
2. Número de diagonais de um polígono	95
3. Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono	97
Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo	97
Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados	98
4. Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono	99
Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados	100
5. Polígonos regulares	102
6. Congruência de polígonos	105
Elementos correspondentes em polígonos congruentes	105
Transformações geométricas e figuras congruentes	106
Diversificando	
O RPG e os poliedros de Platão	111

CAPÍTULO 5 Produtos notáveis e fatoração

1. Os produtos notáveis	112
Quadrado da soma de dois termos	112
Quadrado da diferença de dois termos	117
Produto da soma pela diferença de dois termos	120
Cubo da soma e da diferença de dois termos	122
2. Fatoração de polinômios	124
Fatoração colocando em evidência um fator comum	125
Fatoração por agrupamento	127
Fatoração da diferença de dois quadrados	129
Fatoração do trinômio quadrado perfeito	131
Fatoração da diferença e da soma de dois cubos	134
Para saber mais	
A Matemática na História	116
Fatorando expressões numéricas	124
Diversificando	
A Álgebra explica a Aritmética	137

CAPÍTULO 6 Estudo dos triângulos

1. Triângulos	138
Principais elementos de um triângulo	139
2. Classificação de triângulos	139
Classificação quanto às medidas dos lados	139
Classificação quanto às medidas dos ângulos	140
3. Construção de triângulos	141
Condição de existência de um triângulo	141
4. Outros elementos de um triângulo	144
Mediana	144
Bissetriz	144
Altura	145
5. Congruência de triângulos	147
Casos de congruência de triângulos	149
6. Demonstrações geométricas	156
Noções primitivas e postulados	156
Teoremas	157
Congruência de triângulos nas demonstrações geométricas	158
7. Propriedades do triângulo isósceles	163
8. Propriedades de um triângulo qualquer	166
Para saber mais	
A Matemática na História	154
Construção de mediatriz	165
Diversificando	
Fractais	171

CAPÍTULO 7 Estudo dos quadriláteros

1. Quadriláteros	173
Elementos dos quadriláteros.....	173
Ângulos de um quadrilátero.....	174
2. Paralelogramos	175
Propriedades dos paralelogramos.....	176
Propriedade dos retângulos.....	179
Propriedade dos losangos.....	179
Propriedades dos quadrados.....	180
3. Trapézios	182
Propriedades dos trapézios isósceles.....	182
4. Propriedades da base média do triângulo e do trapézio	185
Base média do triângulo.....	185
Base média do trapézio.....	185

Para saber mais

O trapézio no telhado.....	186
----------------------------	-----

Diversificando

Quadriláteros na caixa – Palitos de sorvete.....	190
--	-----

CAPÍTULO 8 Frações algébricas e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

1. Frações algébricas	191
2. Simplificando frações algébricas	192
3. Problemas e equações	194
4. Equações literais	198
5. Plano cartesiano	201
6. Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas	205
Método da substituição.....	206
Método da adição.....	207
7. Solução gráfica de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas	210
8. Classificação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas	213
Sistema determinado.....	213
Sistema impossível.....	214
Sistema indeterminado.....	215

Para saber mais

Método da comparação.....	209
---------------------------	-----

Trabalhando a informação

Construção de gráfico de barras 197
 Composição de um gráfico de colunas compostas a partir de outros gráficos 204

Diversificando

Onde está o erro? 218

CAPÍTULO 9 Estudo da circunferência e do círculo

1. Circunferência e círculo 219
 Circunferência 220
 Círculo 222
 Comprimento da circunferência 223

2. Posições relativas 226
 Posições relativas de um ponto em relação a uma circunferência 226
 Posições relativas de uma reta em relação a uma circunferência 227
 Posições relativas de duas circunferências 229
 Circunferências concêntricas 230

3. Propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência 232

4. Triângulo e quadrilátero circunscritos a uma circunferência 233
 Triângulo circunscrito 233
 Quadrilátero circunscrito 234

5. Arcos de circunferência e ângulo central 235
 Arco de circunferência 235
 Ângulo central 236

6. Ângulo inscrito 240

7. Medidas de ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência 242

Para saber mais

Medida de arcos de uma circunferência 238

Diversificando

Matemática na Arqueologia 245

Respostas 246

Lista de siglas 253

Sugestões de leitura para o aluno 254

Bibliografia 255

1 Retas

As ideias e os conceitos da Geometria relacionados a retas e ângulos estão entre os conhecimentos matemáticos mais antigos da humanidade, como indicam algumas tabletas de argila dos sumérios, alguns papiros egípcios e documentos escritos de gregos e romanos.

Retas e ângulos também aparecem nas artes plásticas, seja em pinturas antigas, seja em obras contemporâneas, como as dos grandes mestres abstracionistas. A obra do artista Theo van Doesburg (1883-1931), reproduzida abaixo, é um exemplo de aplicação desses conceitos nas artes plásticas.



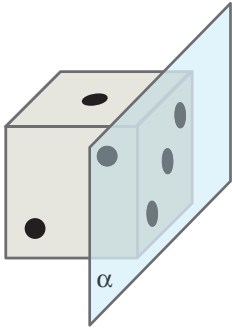
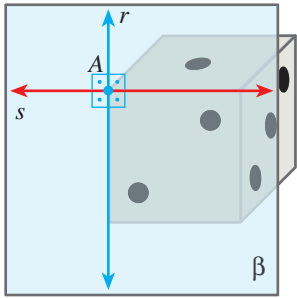
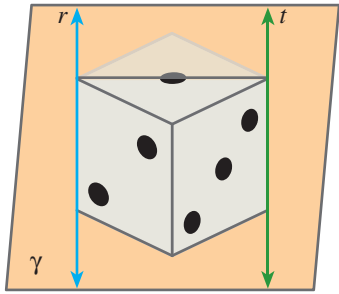
Contra-composição dissonâncias XVI, de Theo van Doesburg, 1925. Tinta a óleo (1,20 m × 1,99 m).

Como vimos em volumes anteriores, **reta** é um conceito primitivo, isto é, um conceito que não se define.

A preocupação em organizar todo o conhecimento geométrico acumulado começou com os gregos. Eles transformaram a Geometria que resolvia cada caso particular em uma Geometria que tratava das propriedades das figuras de maneira generalizada.

Posição de retas

No quadro abaixo, vamos rever alguns conceitos que você já conhece.

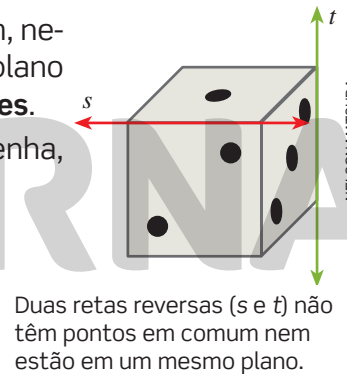
 <p>Cada face do dado sugere uma parte de um plano. Um plano é indicado por letras gregas minúsculas, como o plano α, que contém a face 3 do dado.</p>	 <p>As retas r e s têm um só ponto em comum (A) e estão em um mesmo plano (β). Dizemos que as retas r e s são concorrentes. Indicamos: $r \times s$. Duas retas concorrentes que formam, entre si, quatro ângulos retos são chamadas retas perpendiculares. Indicamos: $r \perp s$.</p>	 <p>As retas r e t não têm pontos em comum e estão em um mesmo plano (γ). Dizemos que as retas r e t são paralelas. Indicamos: $r \parallel t$.</p>
---	--	---

Para que duas retas sejam paralelas ou concorrentes, elas devem, necessariamente, estar em um mesmo plano, isto é, deve existir um plano que as contenha. Nesse caso, dizemos que elas são **retas coplanares**.

Dadas duas retas, s e t , caso não exista um plano que as contenha, chamamos s e t de **retas reversas**.

OBSERVAÇÃO

Duas retas de um plano são **coincidentes** quando têm todos os pontos em comum. Indicamos que as retas c e d são coincidentes por: $c \equiv d$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2. b) Falsa, pois r e s podem ser reversas.

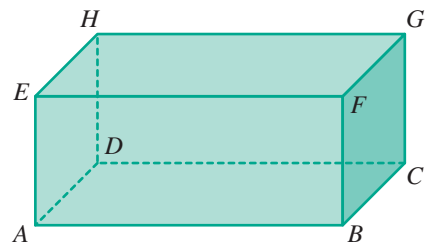
1 Escreva a posição relativa das retas coplanares r e s quando:

- elas não têm ponto em comum; **paralelas**
- elas têm apenas um ponto em comum. **concorrentes**

2 Identifique qual é a sentença falsa e justifique em seu caderno.

- Se A e B são dois pontos de um plano α , então a reta \overline{AB} está contida nesse plano. **verdadeira**
- Se duas retas, r e s , não têm ponto em comum, então elas são paralelas.
- Se duas retas são coplanares e não têm ponto em comum, então elas são paralelas. **verdadeira**

3 Considere o bloco retangular abaixo.



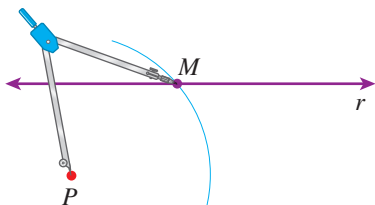
Identifique como paralelas, concorrentes ou reversas as retas que contêm os pares de arestas:

- \overline{AB} e \overline{BC} . **concorrentes**
- \overline{CD} e \overline{HG} . **paralelas**
- \overline{AB} e \overline{CG} . **reversas**
- \overline{BF} e \overline{AE} . **paralelas**
- \overline{AD} e \overline{BF} . **reversas**
- \overline{HG} e \overline{AB} . **paralelas**

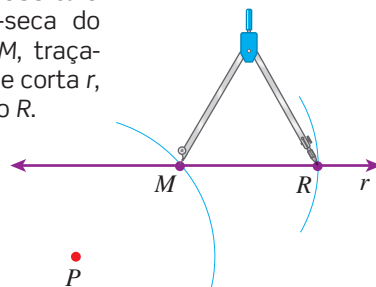
Construindo retas paralelas com régua e compasso

Considere uma reta r e um ponto P não pertencente a r . Vamos construir, com o auxílio de régua e compasso, uma reta paralela à reta r e que passe pelo ponto P .

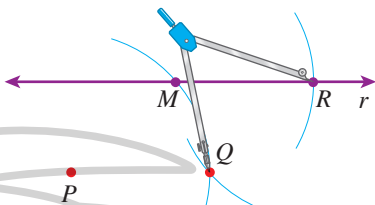
1. Com a ponta-seca do compasso em P , traçamos um arco que corta r , obtendo o ponto M .



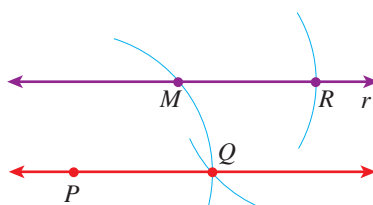
2. Com a mesma abertura PM e a ponta-seca do compasso em M , traçamos um arco que corta r , obtendo o ponto R .



3. Com a mesma abertura MR e a ponta-seca do compasso em R , traçamos um arco que corta o primeiro arco, obtendo o ponto Q .

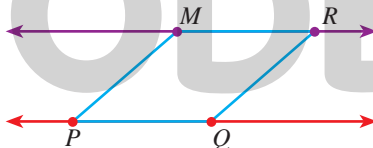


4. Com a régua, traçamos a reta \overleftrightarrow{PQ} , que é paralela à reta r .



Observe que \overline{PM} , \overline{MR} , \overline{RQ} e \overline{QP} têm mesma medida, que é a da abertura PM do compasso. Então, a figura $PMRQ$ é um losango.

Como os lados opostos de um losango são paralelos, então $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MR}$.

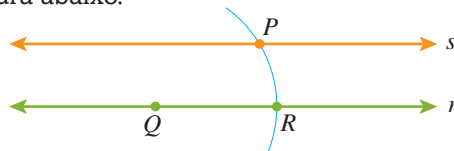


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Desenhe uma reta e um ponto fora dela. Construa uma reta paralela a essa reta que passe por esse ponto. *construção de figura*
- Desenhe uma reta m e cinco pontos que não pertençam a ela. Depois, construa retas paralelas a m por esses pontos e responda às questões.
 - Qual é o maior número de retas paralelas à reta m que podem ser traçadas passando por esses cinco pontos? *5 retas paralelas*
 - É possível deslocar os cinco pontos a fim de obter mais de cinco paralelas a m ? *não*
 - É possível trocar a posição de algum desses cinco pontos e traçar menos de cinco retas paralelas a m ? *sim*
 - Qual é o menor número de retas paralelas que podem ser traçadas? *1 reta paralela*

- Em uma folha de papel transparente, copie a figura abaixo.



Com a ponta-seca do compasso em R e abertura RP , obtenha no arco da figura o ponto P' , simétrico de P em relação a r . Em seguida, trace por P' a reta t paralela à reta r .

Considerando que s é paralela a r , r é paralela a t e P e P' são pontos simétricos em relação a r , o que você conclui sobre:

- a posição das retas s e t ?
- as distâncias de P a r e de P' a r ?

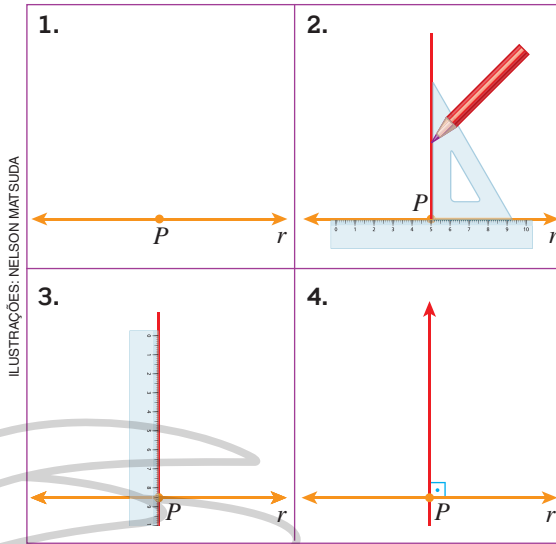
Espera-se que os alunos concluam que $s \parallel t$ e que as distâncias de P a r e de P' a r são iguais.

Construindo perpendiculares com régua e esquadro

Já vimos, nos volumes anteriores, como construir retas perpendiculares com o auxílio de régua e transferidor e régua e compasso. Agora, acompanhe a construção usando régua e esquadro.

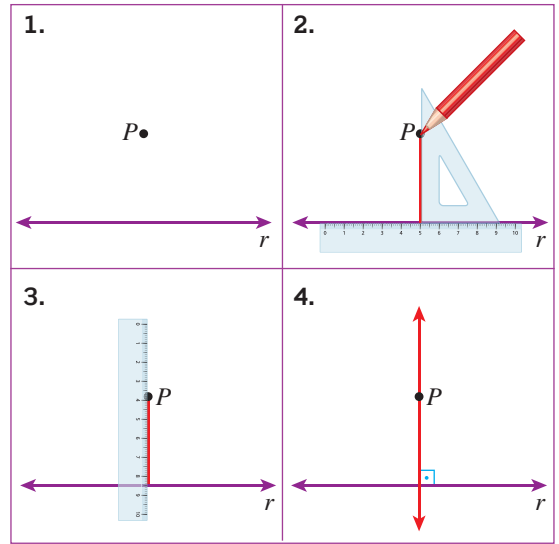
Considere uma reta r e um ponto P . Vamos traçar por esse ponto uma perpendicular à reta. Veja dois exemplos.

- Quando o ponto está na reta



Traçado de perpendicular por um ponto da reta com o uso de régua e esquadro.

- Quando o ponto não está na reta



Traçado de perpendicular por um ponto fora da reta com o uso de régua e esquadro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 7** Desenhe uma reta e trace, por um ponto, uma perpendicular a essa reta, nas seguintes condições:
- o ponto está na reta; *construção de figura*
 - o ponto não está na reta.

- 8** Reúna-se com um colega e desenhem um segmento \overline{AB} de 6 cm. Em cada extremidade do segmento, tracem uma reta perpendicular a ele. Marquem, sobre a perpendicular traçada

pelo ponto A e abaixo de \overline{AB} , um ponto C , de modo que $AC = 4$ cm. Depois marquem, sobre a perpendicular traçada pelo ponto B e acima de \overline{AB} , um ponto D , tal que $BD = 4$ cm.

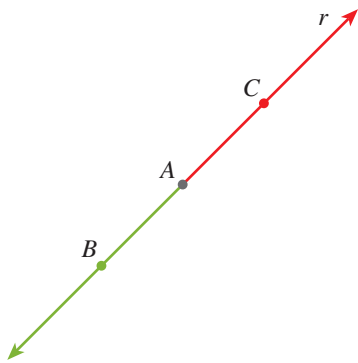
- Discutam e estimem a medida para o segmento \overline{CD} . *resposta pessoal*
- Unam os pontos C e D e meçam com uma régua o segmento \overline{CD} . Qual é essa medida? Vocês fizeram uma boa estimativa?

10 cm; resposta pessoal

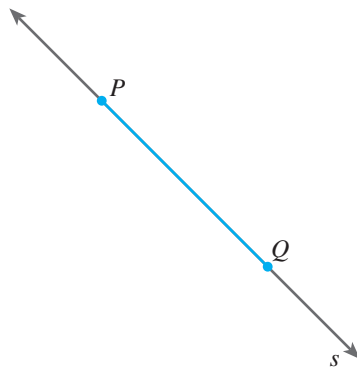
Partes da reta

Você também já aprendeu as partes de uma reta. Veja abaixo um resumo desses conceitos.

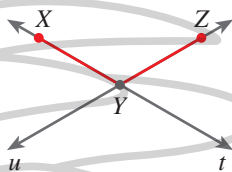
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



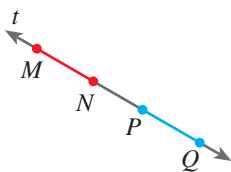
A semirreta \overrightarrow{AB} de origem A que passa por B está pintada de verde. As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são **opostas**: têm a mesma origem (A) e estão na mesma reta (r).



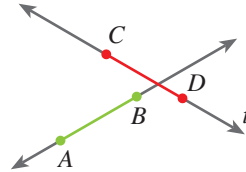
A parte pintada de azul é o **segmento de reta** \overline{PQ} de extremidades P e Q, formado pelos pontos P, Q e por todos os demais pontos da reta s que estão entre P e Q.



Os segmentos \overline{XY} e \overline{YZ} são **consecutivos**, pois têm uma extremidade de comum: o ponto Y.

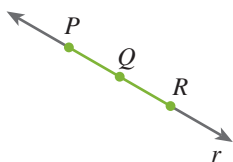


Os segmentos \overline{MN} e \overline{PQ} são **colineares**, pois estão na mesma reta.



Os segmentos \overline{CD} e \overline{AB} têm o mesmo comprimento. São **segmentos congruentes** ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$).

Agora, observe esta figura.



O ponto Q divide o segmento \overline{PR} em dois segmentos congruentes: \overline{PQ} e \overline{QR} . O ponto Q é o **ponto médio** de \overline{PR} .

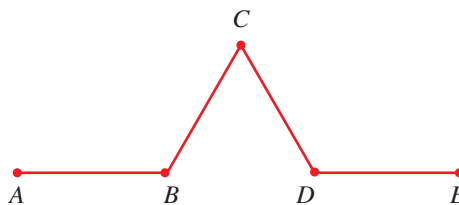
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Registre em seu caderno o significado de cada indicação abaixo: reta, semirreta ou segmento de reta.

- \overleftrightarrow{AB} reta
- \overrightarrow{AB} semirreta
- \overline{AB} segmento de reta
- \overrightarrow{PQ} semirreta
- \overline{PQ} segmento de reta

10 Escreva os segmentos consecutivos que aparecem na figura abaixo.



\overline{AB} e \overline{BC} , \overline{BC} e \overline{CD} , \overline{CD} e \overline{DE}

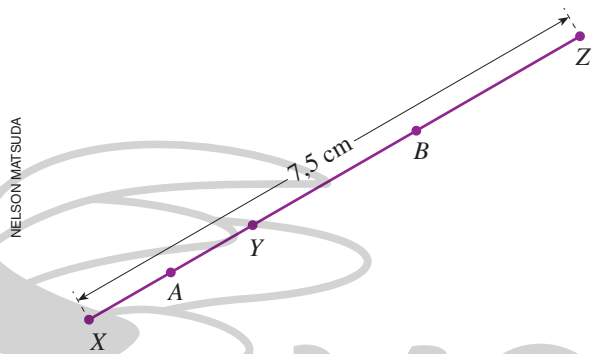
NELSON MATSUDA

12. \overline{AB} e \overline{BD} ; \overline{AB} e \overline{BE} ; \overline{AD} e \overline{DE} ; \overline{AD} e \overline{BD} ; \overline{AB} e \overline{AE} ; \overline{AB} e \overline{AD} ; \overline{AD} e \overline{DC} ; \overline{BD} e \overline{DC} ; \overline{BC} e \overline{BD} ; \overline{BC} e \overline{BE}

- 11** Identifique a sentença falsa e justifique sua resposta. alternativa d, pois $AB \neq CD$
- Se $AB = 8$ m e $CD = 800$ cm, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
 - Se $MN = 3$ cm e $XY = 3$ cm, então $\overline{MN} \cong \overline{XY}$.
 - Se $\overline{EF} \cong \overline{PQ}$, então $EF = PQ$.
 - Se $AB = 5$ cm e $CD = 5$ dm, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

- 12** Copie a figura do exercício 10 e acrescente o segmento \overline{BD} .
Além dos segmentos consecutivos já identificados naquele exercício, que outros segmentos consecutivos a nova figura apresenta?

- 13** Na figura, A é o ponto médio de \overline{XY} e B é o ponto médio de \overline{YZ} , que mede 5 cm.



- Quanto mede o segmento \overline{XY} ? 2,5 cm
- Qual é a medida do segmento \overline{AB} ? 3,75 cm

- 14** Observe os pontos destacados no segmento \overline{AF} representado abaixo.



- B é o ponto médio de \overline{AC} ;
- C é o ponto médio de \overline{AD} ;
- D é o ponto médio de \overline{BE} ;
- E é o ponto médio de \overline{DF} .

Sabendo que $BC = 0,5$ cm, determine:

- a medida do segmento \overline{AF} ; 5 cm
- a medida do segmento \overline{CE} . 2,5 cm

- 15** Considere que a figura abaixo representa um segmento \overline{AD} de medida 18 cm, sendo X o ponto médio de \overline{AB} , Y o ponto médio de \overline{BC} e Z o ponto médio de \overline{CD} .



Sabendo que a medida de \overline{AB} é o dobro da medida de \overline{CD} e que \overline{BC} mede o triplo de \overline{CD} , determine a medida dos segmentos:

- \overline{AB} ; 6 cm
- \overline{BC} ; 9 cm
- \overline{CD} ; 3 cm
- \overline{XY} ; 7,5 cm
- \overline{YZ} ; 6 cm
- \overline{XZ} . 13,5 cm

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

- A, B, C e D são pontos de uma mesma reta r de tal forma que $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 8$ cm e $BD = 1$ cm.

Nessas condições, representem, no caderno, a reta r e esses pontos. construção de figura

- Considerem o segmento \overline{AD} representado abaixo, em que $AD = 8$ cm e $BC = 2,5$ cm.

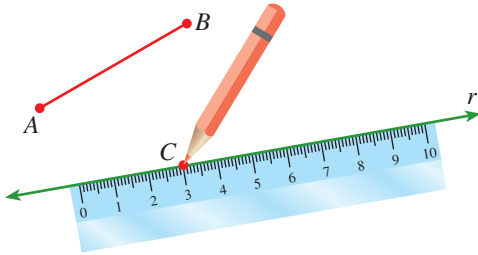


- É possível calcular AB ? E BD ? não; não
- CD pode valer 6 cm? Justifiquem a resposta. Não, pois $AD - BC = AB + CD$
 $8 - 2,5 = AB + 6$
 $AB = 5,5 - 6$
Logo, para CD valer 6 cm, AB deveria ser negativa.
- Quais são os possíveis valores de AC ? $2,5 < AC < 8$

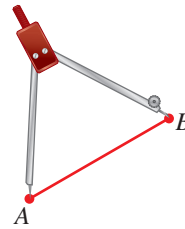
Construindo segmentos congruentes com régua e compasso

Com o auxílio de régua e compasso, observe os passos para a construção de um segmento \overline{CD} congruente a um segmento dado \overline{AB} .

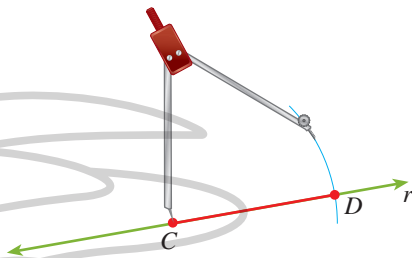
1. Com uma régua, traçamos uma reta r qualquer e sobre ela marcamos um ponto C .



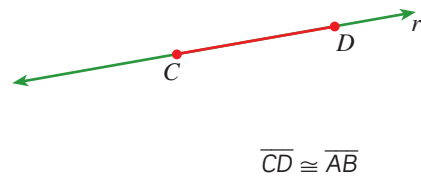
2. Com a ponta-seca do compasso em A , abrimos o compasso até o ponto B .



3. Com a ponta-seca do compasso em C e abertura igual a AB , traçamos um arco que corta a reta r no ponto D .



4. Os pontos C , D e todos os pontos da reta r que estão entre C e D formam o segmento \overline{CD} , que é congruente a \overline{AB} .

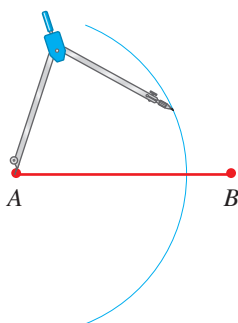


Nessa construção, o segmento \overline{CD} é congruente ao segmento \overline{AB} , pois ambos têm a mesma medida, dada pela abertura do compasso.

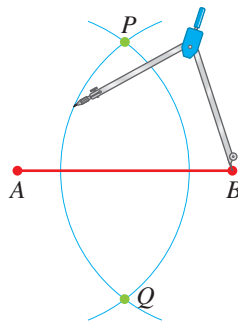
Determinando o ponto médio de um segmento com régua e compasso

Para determinar, com o auxílio de régua e compasso, o ponto médio de um segmento \overline{AB} dado, traçaremos uma reta perpendicular a esse segmento, de modo que o ponto de intersecção com o segmento seja seu ponto médio.

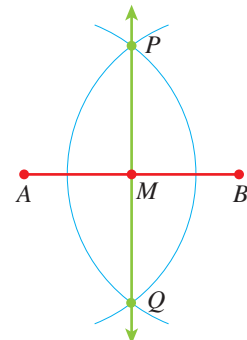
1. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura maior que a metade de AB , traçamos um arco.



2. Com a ponta-seca do compasso em B e com a mesma abertura, traçamos outro arco, que cruza o primeiro. Obtemos, assim, os pontos P e Q .

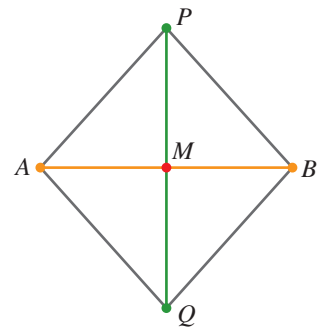


3. Traçamos a reta \overline{PQ} , perpendicular a \overline{AB} , que cruza o segmento \overline{AB} em M . Assim, determinamos o ponto médio do segmento \overline{AB} .



Observe que, nessa construção, a figura $APBQ$ é um losango, já que $\overline{AP} \cong \overline{PB} \cong \overline{BQ} \cong \overline{QA}$ (a abertura do compasso é a mesma). Então, \overline{PQ} e \overline{AB} são as diagonais desse losango. Essas diagonais dividem o losango em quatro triângulos retângulos idênticos, o que pode ser verificado por meio de dobradura. Dessa forma, M é o ponto médio de \overline{AB} .

Assim, as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cortam no ponto médio.



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 16** Desenhe, em seu caderno, um segmento de reta qualquer e determine o ponto médio desse segmento com o auxílio de régua e compasso.

construção de figura

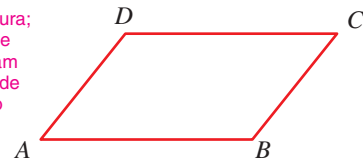
- 17** Desenhe duas retas, r e s , concorrentes em um ponto P e um segmento de reta \overline{AB} qualquer, fora de r e de s . Em seguida, com o auxílio de régua e compasso, construa em r e s quatro segmentos de reta, \overline{PQ} , \overline{PR} , \overline{PS} e \overline{PT} , com Q e S pertencentes a r e R e T pertencentes a s , todos congruentes a \overline{AB} .

- a) Traçando os segmentos \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{ST} e \overline{TQ} , que polígono obtemos? **retângulo**
- b) Os segmentos \overline{QS} e \overline{RT} são chamados de diagonais desse polígono. Essas diagonais se cruzam no ponto médio? Que ponto é esse?

sim; o ponto P

- 18** Decalque em uma folha de papel transparente o paralelogramo $ABCD$ representado abaixo.

Construção de figura; sim; espera-se que os alunos conclua que as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.



NELSON MATSUDA

Em seguida, com o auxílio de régua e compasso, obtenha o ponto médio da diagonal \overline{AC} e o ponto médio da diagonal \overline{BD} . Esses pontos médios coincidem? O que você pode concluir sobre a intersecção das diagonais de um paralelogramo?

- 19** Releia os passos para obter o ponto médio de um segmento e responda: por que, no primeiro passo, a abertura do compasso deve ser maior que a metade da medida do segmento dado?

Porque, caso contrário, os dois arcos não se cruzariam nos pontos que determinam a reta que passa pelo ponto médio.

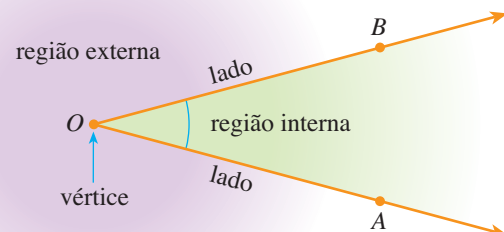
2 Ângulos

O ângulo é uma figura que você já conhece e com a qual tem trabalhado em muitas situações. Vamos retomar algumas características dos ângulos, começando por sua definição.

Ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.

Na figura ao lado, o ponto O é o **vértice** do ângulo, e as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os **lados**. Indicamos esse ângulo por \widehat{AOB} (lemos: ângulo AOB).

O arco marcado na figura indica a **abertura** do ângulo que estamos considerando.



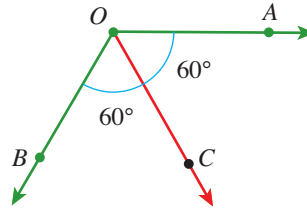
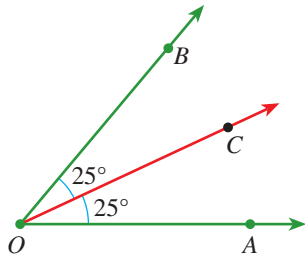
ADILSON SECCO

► Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

Nas figuras abaixo, a semirreta \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes, ou seja, em dois ângulos de mesma medida. Logo, \overrightarrow{OC} é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ em cada caso.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

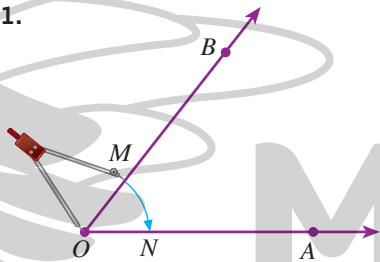


Como já estudamos no 7º ano, a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ pode ser traçada com o auxílio de régua e compasso. Vamos recordar.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

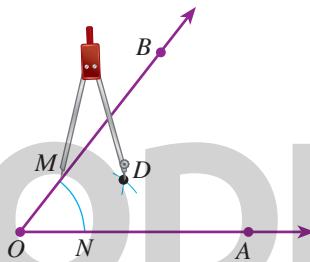
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

1.



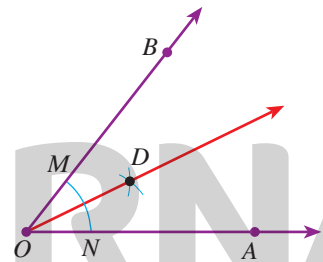
Com a ponta-seca do compasso em O , traçamos um arco determinando M e N .

2.



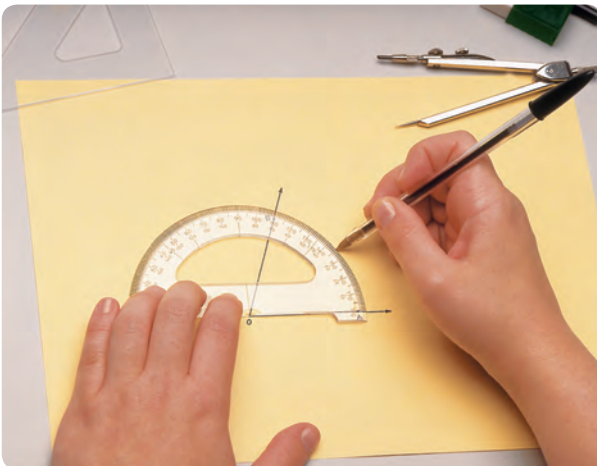
Com a ponta-seca do compasso em N e depois em M , traçamos com a mesma abertura do compasso os arcos que se cortam em D .

3.



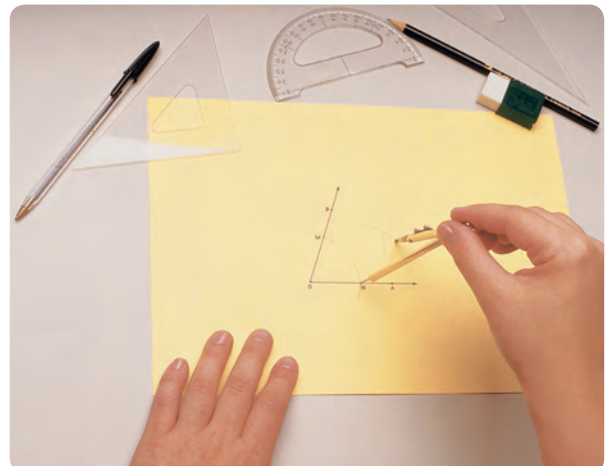
Traçamos a semirreta \overrightarrow{OD} , que é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

EDUARDO SANTALIESTRA



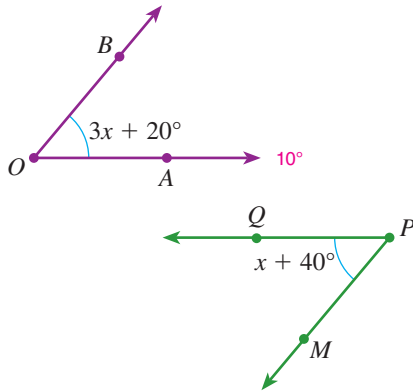
Traçado de bissetriz com o auxílio de transferidor.

EDUARDO SANTALIESTRA

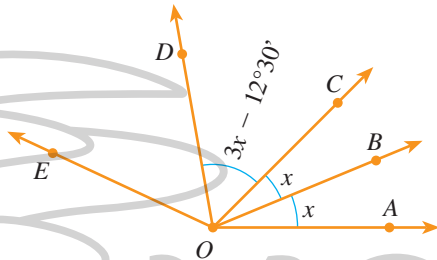


Traçado de bissetriz com o auxílio de compasso.

- 20** Considerando que $\hat{A}OB$ e $\hat{M}PQ$ são ângulos congruentes, calcule o valor de x .

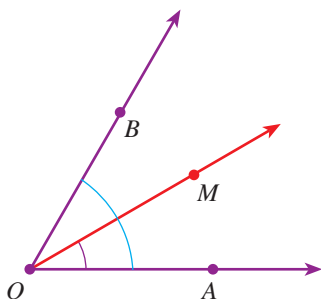


- 21** Na figura abaixo, temos $m(\hat{A}OC) = 45^\circ$ e $\hat{C}OD \cong \hat{D}OE$.



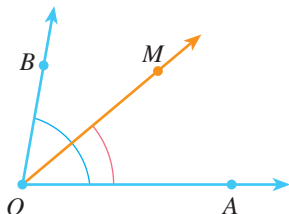
Determine:

- o valor de x ; $22^\circ 30'$
 - a medida de $\hat{A}OD$; 100°
 - a medida de $\hat{D}OE$. 55°
- 22** Nas figuras abaixo, \overrightarrow{OM} é bissetriz de $\hat{A}OB$. Determine:
- $m(\hat{M}OB)$, sabendo que $m(\hat{A}OB) = 60^\circ$. 30°

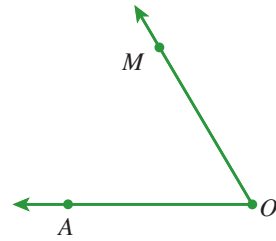


- $m(\hat{A}OB)$, sabendo que $m(\hat{A}OM) = 40^\circ$.

80°

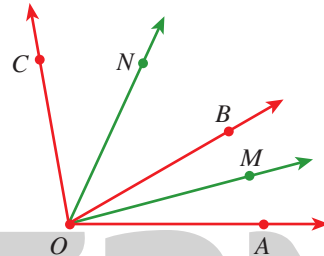


- 23** Copie a figura abaixo em seu caderno.



Sabendo que \overrightarrow{OM} é a bissetriz do ângulo $\hat{A}OB$, construa a semirreta \overrightarrow{OB} . *construção de figura*

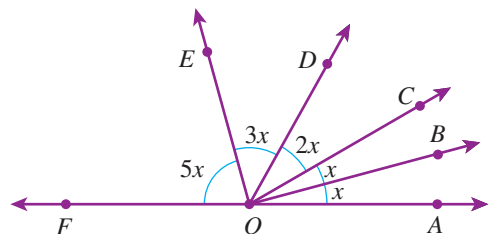
- 24** Nesta figura, $m(\hat{A}OB) = 30^\circ$ e $m(\hat{B}OC) = 70^\circ$, \overrightarrow{OM} é bissetriz de $\hat{A}OB$ e \overrightarrow{ON} é bissetriz de $\hat{B}OC$.



Calcule:

- $m(\hat{A}OC)$; 100°
- $m(\hat{A}OM)$; 15°
- $m(\hat{N}OC)$; 35°
- $m(\hat{M}ON)$. 50°

- 25** Sendo x a medida de um ângulo, observe a figura em que \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OF} são semirretas opostas.

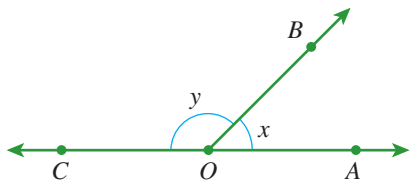


- Qual é o ângulo congruente a $\hat{A}OB$? E a $\hat{A}OC$? $\hat{B}OC$; $\hat{C}OD$
- Qual é o ângulo congruente a $\hat{B}OD$? E a $\hat{C}OE$? $\hat{D}OE$; $\hat{E}OF$
- Qual é o valor de x ? 15°
- \overrightarrow{OB} é bissetriz de algum dos ângulos destacados? De qual? E \overrightarrow{OC} ? E \overrightarrow{OD} ? E \overrightarrow{OE} ?
sim, $\hat{A}OC$; sim, $\hat{A}OD$; sim, $\hat{B}OE$; sim, $\hat{C}OF$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

26 Copie a figura abaixo, em que x e y representam as medidas de $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$, respectivamente.

NELSON MATSUDA



Com o auxílio de régua e compasso, construa as bissetrizes \overrightarrow{OM} de $\widehat{A\hat{O}B}$ e \overrightarrow{ON} de $\widehat{B\hat{O}C}$ e, em seguida, responda às questões. *construção de figura*

- a) Quanto vale $x + y$? 180°
- b) Qual é a medida de $\widehat{M\hat{O}B}$? E de $\widehat{B\hat{O}N}$? $\frac{x}{2}$; $\frac{y}{2}$
- c) Qual é a medida de $\widehat{M\hat{O}N}$? 90°
- d) O que você pode dizer a respeito das retas \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{ON} ? São perpendiculares.

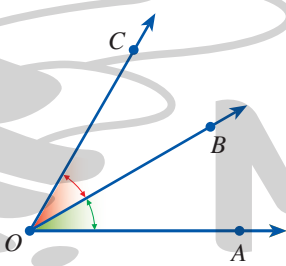
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Desenhe um triângulo qualquer e trace as bissetrizes de seus ângulos internos. O que você observa a respeito da intersecção dessas bissetrizes? *As três bissetrizes cortam-se em um único ponto.*

Ângulos adjacentes

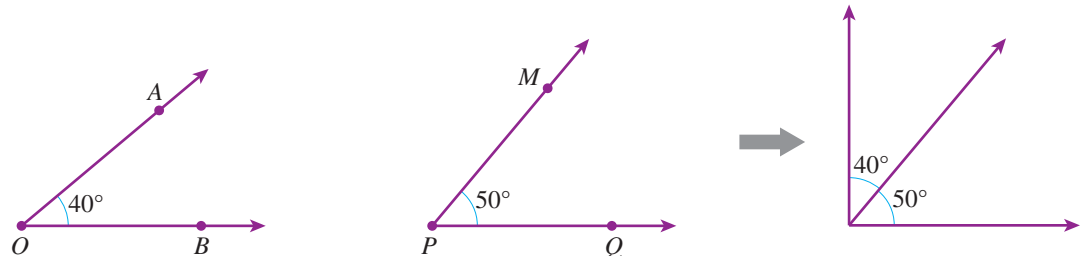
Na figura a seguir destacamos os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$. Observe que esses ângulos possuem o mesmo vértice e um lado comum, mas não possuem ponto em comum na região interna. Esses ângulos são chamados **adjacentes**.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 90° são **ângulos complementares**.

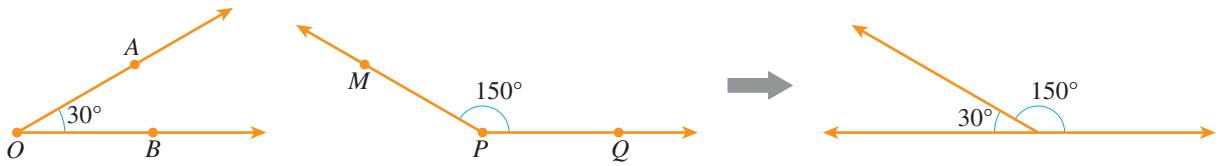


Os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{M\hat{P}Q}$ são complementares, pois: $m(\widehat{A\hat{O}B}) + m(\widehat{M\hat{P}Q}) = 90^\circ$
Portanto, a medida do complemento de um ângulo agudo que mede x é $(90^\circ - x)$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 180° são **ângulos suplementares**.



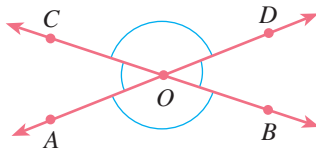
Os ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$ são suplementares, pois: $m(A\hat{O}B) + m(M\hat{P}Q) = 180^\circ$
Logo, a medida do suplemento de um ângulo que mede y é $(180^\circ - y)$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

► Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Note, na figura abaixo, que as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , que formam o ângulo $A\hat{O}B$, são opostas, respectivamente, às semirretas \overrightarrow{OD} e \overrightarrow{OC} , que formam o ângulo $C\hat{O}D$. Além disso, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ têm o vértice O em comum.

Por esse motivo, dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são **opostos pelo vértice (o.p.v.)**.



Os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ também são ângulos opostos pelo vértice.

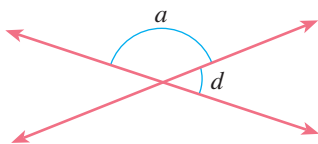
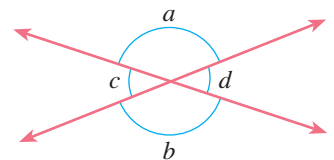
Dois ângulos são **opostos pelo vértice** quando os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro.

Uma propriedade importante dos ângulos opostos pelo vértice é:

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

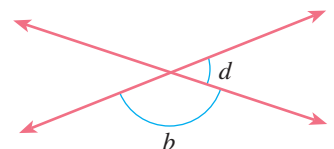
Vamos, então, demonstrar essa propriedade.

Considere as retas concorrentes r e s , representadas ao lado. Observe que elas formam quatro ângulos de medidas a , b , c e d .



Considere os ângulos de medidas a e d . Como esses ângulos são suplementares, temos: $a + d = 180^\circ$ (I)

Observe que os ângulos de medidas d e b também são suplementares, então: $d + b = 180^\circ$ (II)



De I e II podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\underbrace{a + d}_{180^\circ} = \underbrace{d + b}_{180^\circ}$$

Subtraindo d de ambos os membros da igualdade, temos:

$$a = b$$

NELSON MATSUDA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se empregarmos esses mesmos argumentos para os ângulos de medidas d e c e seguirmos os mesmos passos, concluiremos que $d = c$.

Assim, demonstramos que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 Determine:

- a medida do complemento do ângulo de 17° ;
- a medida do suplemento do ângulo de 73° ;
- a medida do complemento do ângulo de 69° .

28 Reúna-se com um colega e respondam às questões.

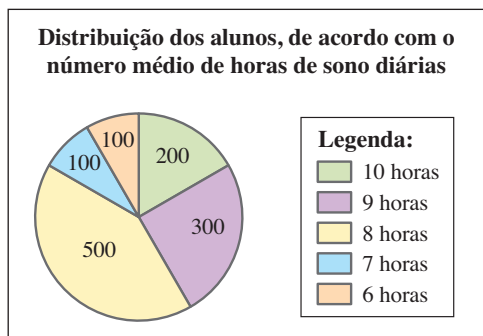


- Qual é a soma da metade da medida de um ângulo agudo com a metade da medida de seu suplemento? 90°
- A metade da medida de um ângulo mais a metade da medida de seu suplemento é igual a 90° . Quanto mede esse ângulo?

Qualquer uma das infinitas medidas entre 0° e 180° .

29 Somando-se a medida do complemento com a medida do suplemento de um ângulo obtêm-se 130° . Quanto mede esse ângulo? 70°

30 O gráfico de setores a seguir apresenta o resultado de uma pesquisa feita com 1.200 pré-adolescentes de 10 a 13 anos do Colégio Estudebem.

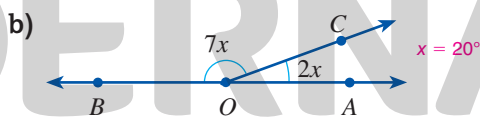
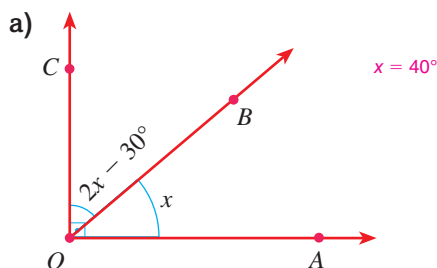


Dados obtidos pelo Colégio Estudebem.

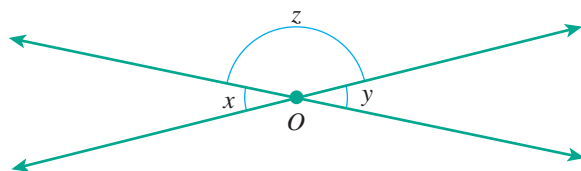
- Qual é o número médio de horas de sono da maioria dos pré-adolescentes entrevistados? 8 horas
- É correto afirmar que mais da metade dos entrevistados dormem, em média, oito ou mais horas por dia? **sim** ($500 + 300 + 200$)

- Determine a medida dos ângulos centrais correspondentes a cada setor. $30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 90^\circ$ e 60°
- Classifique os ângulos de cada setor como reto, agudo ou obtuso. **agudo:** $30^\circ, 30^\circ$ e 60° , **obtusos:** 150° e **reto:** 90°

31 Calcule o valor de x em cada figura.



32 Considere a figura abaixo, em que x , y e z são as medidas dos ângulos indicados.



- Quanto vale, em grau, $x + z$? E $z + y$? $180^\circ; 180^\circ$
- Qual é a relação entre $x + z$ e $z + y$? **São iguais.**
- Qual é a relação entre x e y ? **São iguais.**
- O que você pode concluir sobre as medidas de dois ângulos opostos pelo vértice? **São iguais.**

Construindo um gráfico de setores

A Serra da Mantiqueira é uma cadeia montanhosa com área aproximada de 4.350 km² que se estende ao longo de três estados brasileiros: São Paulo, Minas Gerais e Rio de Janeiro. Essa região atrai muitos turistas que estão em busca da tranquilidade das montanhas e do clima mais ameno.

Para planejar suas campanhas publicitárias em certo ano, uma grande agência de turismo fez uma pesquisa para conhecer melhor o perfil dos turistas da Serra da Mantiqueira. Veja o resultado desta pesquisa de acordo com a estação do ano.

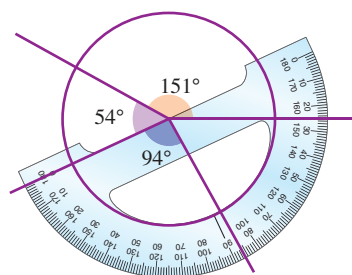
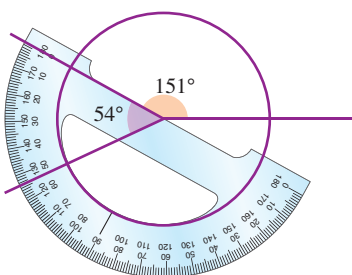
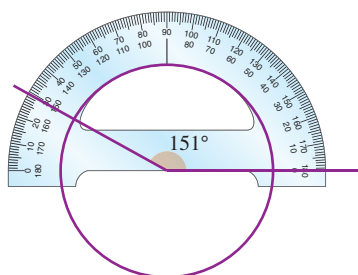
Perfil dos turistas da Serra da Mantiqueira		
	Inverno (em %)	Demais estações do ano (em %)
Famílias e casais	42	4
Amigos de 18 a 25 anos	15	24
Amigos de 26 a 50 anos	26	16
Pessoas acima de 50 anos	12	13
Participantes de eventos	5	43

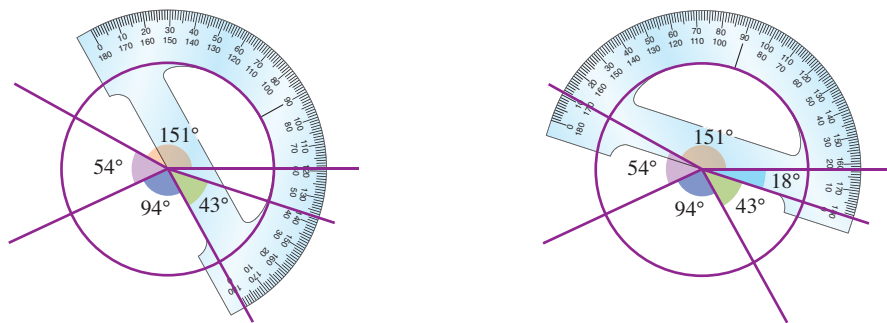
Dados obtidos por ViajandoBem.

A comparação entre as partes de um conjunto de dados, como os da tabela acima, é mais bem visualizada quando feita por meio de um gráfico de setores.

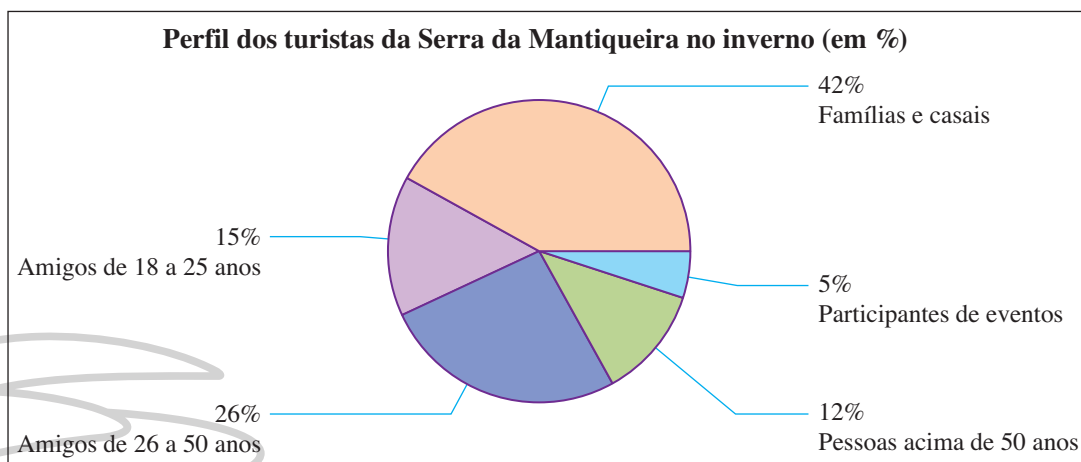
Para representar, por exemplo, o perfil dos turistas da Serra da Mantiqueira no inverno por um gráfico de setores, procedemos assim:

- ▶ Calculamos a medida, em grau, do setor referente a cada uma das partes:
 - 42% de 360° = 0,42 · 360° = 151,2° ≈ 151°
 - 15% de 360° = 0,15 · 360° = 54°
 - 26% de 360° = 0,26 · 360° = 93,6° ≈ 94°
 - 12% de 360° = 0,12 · 360° = 43,2° ≈ 43°
 - 5% de 360° = 0,05 · 360° = 18°
- ▶ Traçamos um círculo e nele construímos, com um transferidor, a partir de um raio qualquer, a seqüência dos setores cujas medidas calculamos.





- Identificamos e registramos cada setor com o nome e com a respectiva porcentagem.



Dados obtidos por ViajandoBem.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Construa o gráfico que representa o perfil dos turistas nas demais estações do ano.
construção de gráfico

2 Compare os dois gráficos e escreva uma frase sobre o perfil dos turistas no inverno e nas demais estações do ano.

exemplos de resposta:

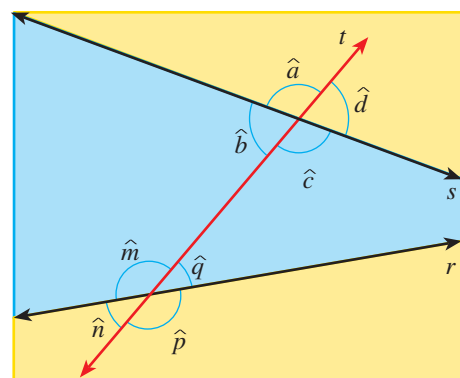
- No inverno, a maior parte dos turistas viaja em família e a menor parte é para participar de eventos.
- Nas duas épocas pesquisadas, há uma porcentagem parecida de turistas com mais de 50 anos.

➤ Ângulos formados por duas retas e uma transversal

Considere duas retas coplanares, r e s , cortadas por uma terceira reta t , chamada de **transversal**. Essas retas determinam oito ângulos.

Na figura ao lado, temos:

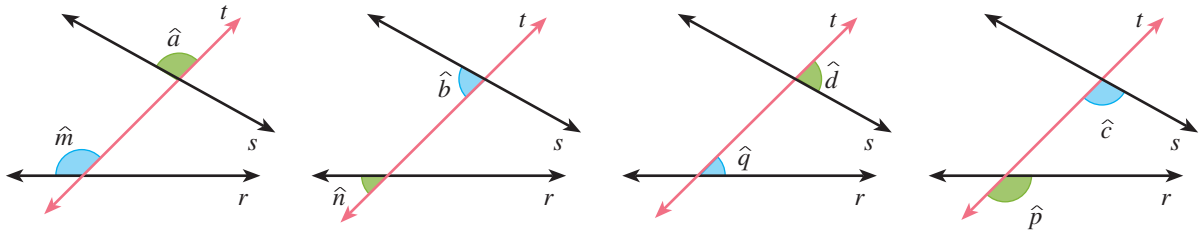
- os ângulos cujas indicações estão na faixa azul, entre as retas r e s , são chamados de **internos**; assim, são internos os ângulos \hat{b} , \hat{c} , \hat{m} e \hat{q} , de medidas b , c , m e q ;
- os ângulos cujas indicações estão na região amarela são chamados de **externos**; assim, são externos os ângulos \hat{a} , \hat{d} , \hat{n} e \hat{p} , de medidas a , d , n e p .



Esses oito ângulos, combinados dois a dois, recebem nomes especiais, como veremos a seguir.

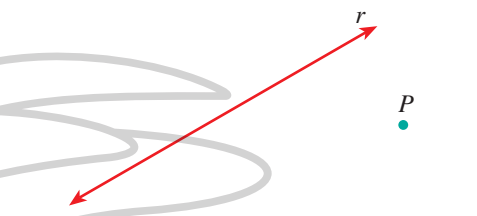
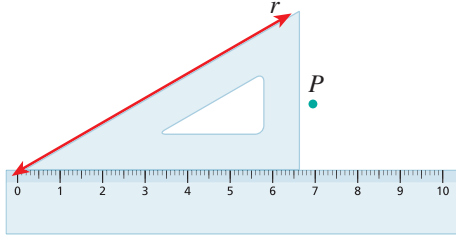
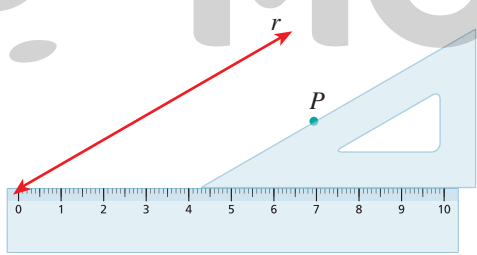
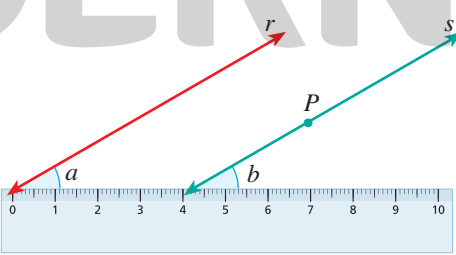
► Ângulos correspondentes

Dois ângulos são **correspondentes** quando um é interno e o outro é externo, não têm o mesmo vértice e estão situados em um mesmo lado em relação à transversal. Os ângulos destacados nas figuras a seguir são correspondentes.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Veja a relação que existe entre ângulos correspondentes e retas paralelas. Para isso, vamos traçar uma reta s paralela a uma reta r usando régua e esquadro.

<p>1. Vamos considerar a reta r e um ponto P fora da reta.</p> 	<p>2. Posicionamos um esquadro e uma régua como mostra a figura abaixo.</p> 
<p>3. Deslizamos o esquadro apoiado na régua até chegar ao ponto P.</p> 	<p>4. Traçamos a reta s, que é paralela à reta r, e indicamos por a e b as medidas dos ângulos correspondentes determinados.</p> 

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Note que trabalhamos com dois ângulos correspondentes congruentes (de medidas iguais, $a = b$) e obtivemos retas paralelas, já que estão igualmente inclinadas sobre a régua.

Logo:

Se uma transversal corta duas retas formando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas.

O inverso também é verdadeiro:

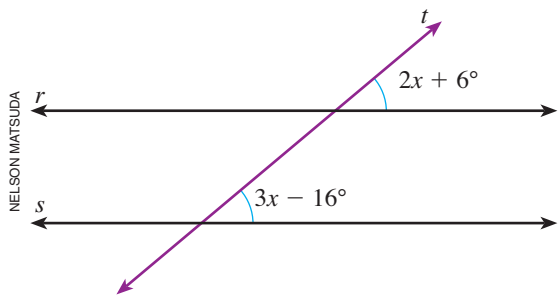
Peça aos alunos que façam o esboço de um par de retas cortadas por uma transversal. Eles devem nomear cada ângulo determinado e indicar aqueles que são correspondentes.

Se duas retas são paralelas, então os ângulos correspondentes formados com uma transversal são congruentes.

Essa propriedade permite descobrir medidas de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal conhecendo-se a medida de apenas um dos ângulos.

Acompanhe um exemplo.

Considerando a figura abaixo, em que $r \parallel s$, vamos descobrir o valor de x para calcular a medida dos ângulos assinalados.



Os ângulos destacados são congruentes, pois são ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal.

Logo, devemos escrever a igualdade:

$$\begin{aligned} 2x + 6^\circ &= 3x - 16^\circ \\ 2x - 3x &= -16^\circ - 6^\circ \\ -x &= -22^\circ \\ x &= 22^\circ \end{aligned}$$

Substituindo x por 22° nas expressões $2x + 6^\circ$ e $3x - 16^\circ$, obtemos a medida dos ângulos assinalados, que devem ser iguais.

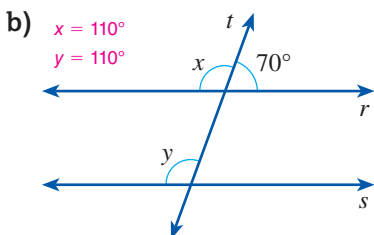
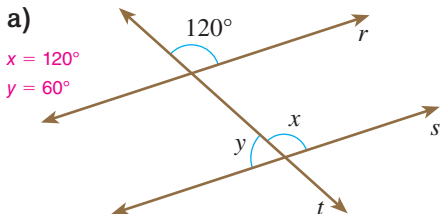
$$\begin{aligned} 2x + 6^\circ &= 2 \cdot 22^\circ + 6^\circ = 44^\circ + 6^\circ = 50^\circ \\ 3x - 16^\circ &= 3 \cdot 22^\circ - 16^\circ = 66^\circ - 16^\circ = 50^\circ \end{aligned}$$

Portanto, os ângulos assinalados na figura anterior medem 50° .

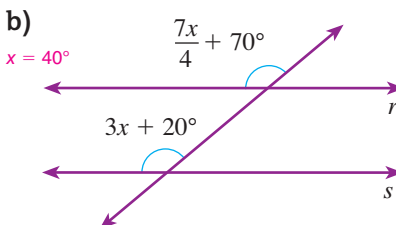
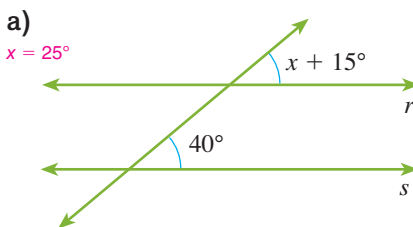
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 33** Nas figuras a seguir, $r \parallel s$ e t é transversal. Determine as medidas x e y dos ângulos destacados.



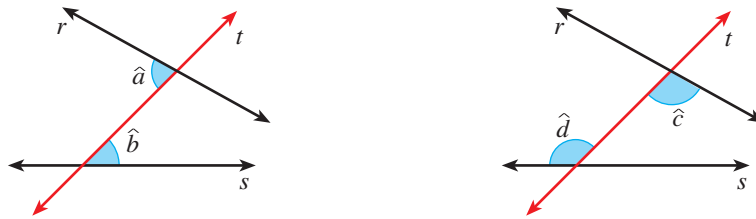
- 34** Sendo $r \parallel s$, calcule, em cada caso, o valor de x .



► Ângulos alternos internos e ângulos alternos externos

Vamos considerar duas retas coplanares, r e s , e uma transversal, t .

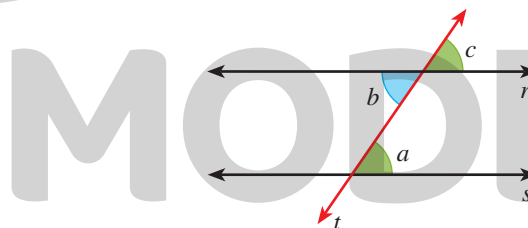
Dois ângulos são **alternos internos** quando são internos, não têm o mesmo vértice e estão situados em lados opostos em relação à transversal. Os ângulos destacados nas figuras são alternos internos.



Dois ângulos são **alternos externos** quando são externos, não têm o mesmo vértice e estão situados em lados opostos em relação à transversal. Os ângulos destacados a seguir são alternos externos.



Vamos considerar as retas paralelas r e s cortadas pela transversal t na figura abaixo.



Os ângulos de medidas a e b são alternos internos.

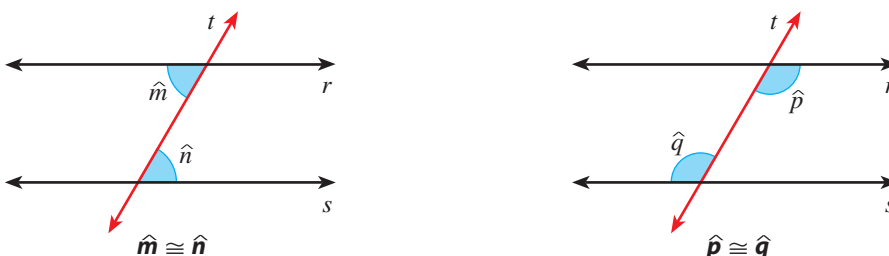
Então, temos:

- $a = c$, pois são medidas de ângulos correspondentes formados pelas paralelas r e s com a transversal t ;
- $c = b$, pois são medidas de ângulos opostos pelo vértice.

Logo, $a = b$, pois ambas as medidas são iguais a c .

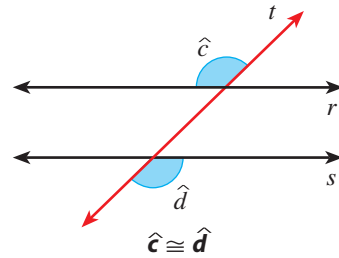
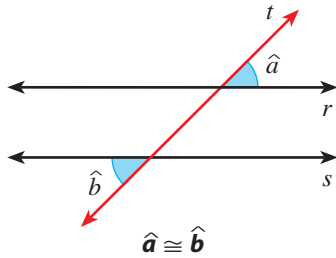
Isso significa que:

Se duas retas são paralelas, então os ângulos **alternos internos** formados com uma transversal são congruentes.



Essa propriedade também é válida para os ângulos alternos externos:

Se duas retas são paralelas, então os ângulos **alternos externos** formados com uma transversal são congruentes.



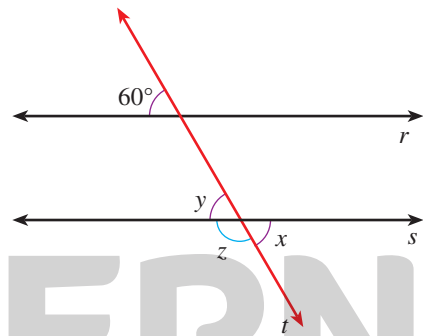
NELSON MATSUDA

Conforme vimos na página anterior, também podemos descobrir as medidas de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal conhecendo-se a medida de apenas um dos ângulos.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Na figura ao lado, $r \parallel s$ e t é transversal. Vamos calcular os valores de x , y e z .

O ângulo de medida 60° e o ângulo de medida x são alternos externos, formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Então, $x = 60^\circ$.



NELSON MATSUDA

Sabemos também que $y = 60^\circ$, pois x e y são medidas de ângulos opostos pelo vértice. Como $x + z = 180^\circ$, pois x e z são medidas de ângulos suplementares, temos:

$$60^\circ + z = 180^\circ$$

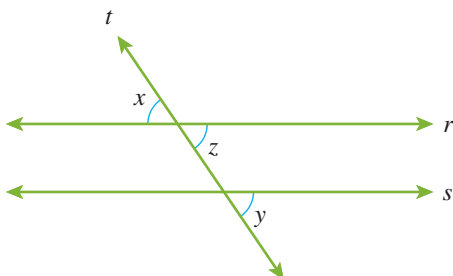
$$z = 120^\circ$$

Portanto, $x = 60^\circ$, $y = 60^\circ$ e $z = 120^\circ$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 35** Considere a figura abaixo, em que $r \parallel s$ e x , y e z são as medidas dos ângulos \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} respectivamente.



NELSON MATSUDA

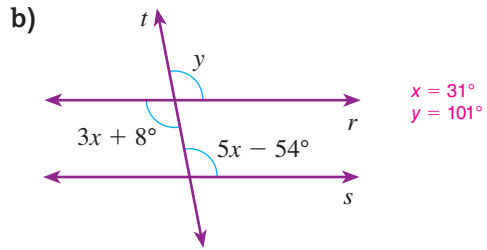
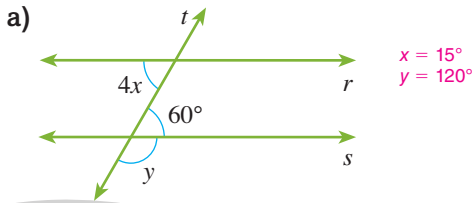
- Os ângulos \hat{x} e \hat{y} são ângulos alternos externos? **sim**
- Os ângulos \hat{x} e \hat{z} são ângulos complementares, suplementares ou opostos pelo vértice? Qual é a relação entre x e z ?
opostos pelo vértice; $x = z$
- Os ângulos \hat{z} e \hat{y} são ângulos correspondentes? Qual é a relação entre z e y ?
sim; $z = y$
- Comparando as respostas dos itens **b** e **c**, conclua qual é a relação entre x e y . **$x = y$**

36 Trace uma linha reta representando uma estrada principal e marque nela o ponto A e D . Com régua e transferidor, trace o roteiro de um caminho, seguindo as indicações e usando a medida de 1 cm para representar 100 m. No ponto A da estrada principal, gire para a esquerda 58° e ande 500 m, marcando o ponto B . Gire para a esquerda 122° e ande mais 300 m, marcando o ponto C .

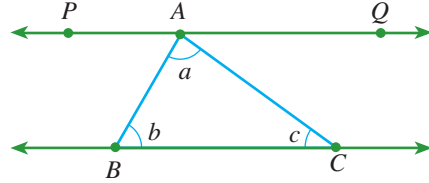
Agora responda: o segmento \overline{BC} é paralelo à estrada principal? Por quê?

Sim, pois os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{BAD} são ângulos alternos internos congruentes (medem 58°).

37 Determine as medidas x e y em cada caso, considerando que $r \parallel s$ e que t é transversal.



38 Copie a figura abaixo, em que as retas \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{BC} são paralelas e a , b e c são medidas dos ângulos.



- a) Qual é a medida de \widehat{PAB} ? E de \widehat{QAC} ? $b; c$
 b) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC ? $a + b + c = 180^\circ$
 c) O resultado obtido no item **b** vale para a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo? **sim**

► Ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos

Vamos considerar duas retas coplanares, r e s , e uma transversal, t .

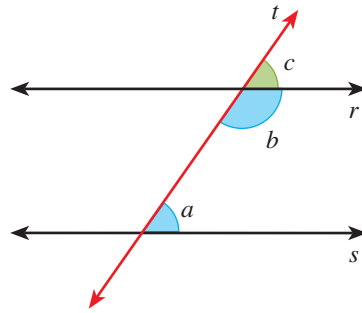
Dois ângulos são **colaterais internos** se são internos, não têm o mesmo vértice e estão situados no mesmo lado em relação à transversal. Veja que nas figuras a seguir foram destacados alguns ângulos colaterais internos.



Dois ângulos são **colaterais externos** se são externos, não têm o mesmo vértice e estão situados no mesmo lado em relação à transversal. Nas figuras a seguir, destacamos alguns ângulos colaterais externos.



Considere, na figura a seguir, as retas paralelas r e s , cortadas pela transversal t .



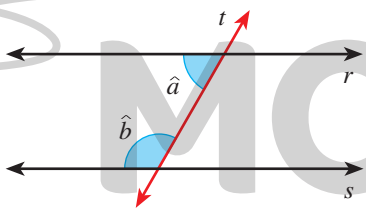
Os ângulos de medidas a e b são colaterais internos. Então, temos:

- $a = c$, pois são medidas de ângulos correspondentes formados pelas retas paralelas r e s com a transversal t ;
- $c + b = 180^\circ$, pois são medidas de ângulos suplementares.

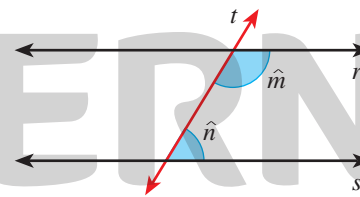
Logo: $a + b = 180^\circ$

Isso significa que:

Se duas retas são paralelas, então os ângulos **colaterais internos** formados com uma transversal são suplementares.



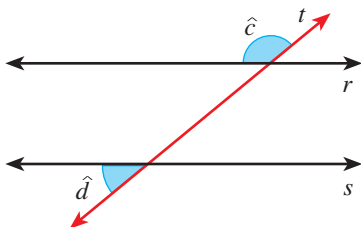
$$m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180^\circ$$



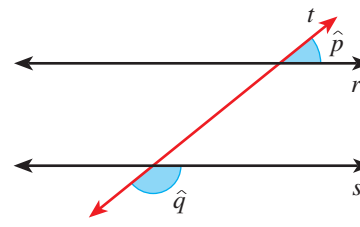
$$m(\hat{m}) + m(\hat{n}) = 180^\circ$$

Essa propriedade também é válida para ângulos colaterais externos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal:

Se duas retas são paralelas, então os ângulos **colaterais externos** formados com uma transversal são suplementares.



$$m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180^\circ$$



$$m(\hat{p}) + m(\hat{q}) = 180^\circ$$

Com essas propriedades, podemos resolver problemas que envolvam medidas de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

Acompanhe um exemplo.

Vamos calcular a medida dos ângulos assinalados na figura abaixo, em que $r \parallel s$.

Os ângulos destacados são suplementares, pois são ângulos colaterais internos, formados por duas retas paralelas e uma transversal. Então:

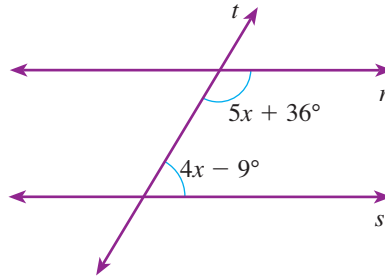
$$(5x + 36^\circ) + (4x - 9^\circ) = 180^\circ$$

$$5x + 4x = 180^\circ - 36^\circ + 9^\circ$$

$$9x = 153^\circ$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{153^\circ}{9}$$

$$x = 17^\circ$$



Substituindo x por 17° nas expressões $5x + 36^\circ$ e $4x - 9^\circ$, obtemos as medidas dos ângulos assinalados, cuja soma deve ser 180° .

$$5x + 36^\circ = 5 \cdot 17^\circ + 36^\circ = 121^\circ$$

$$4x - 9^\circ = 4 \cdot 17^\circ - 9^\circ = 59^\circ$$

$$121^\circ + 59^\circ = 180^\circ$$

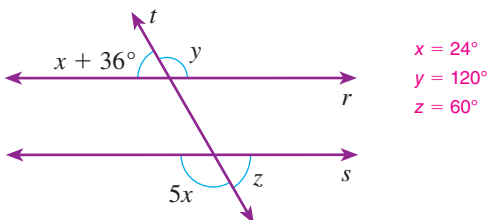
Portanto, os ângulos assinalados medem 121° e 59° .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

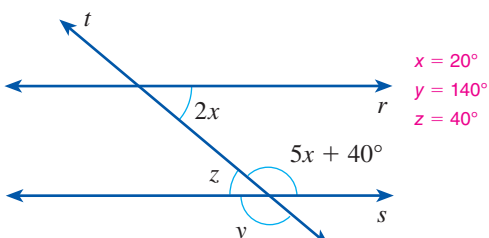
39 Sendo $r \parallel s$, determine as medidas x , y e z nos seguintes casos:

a)



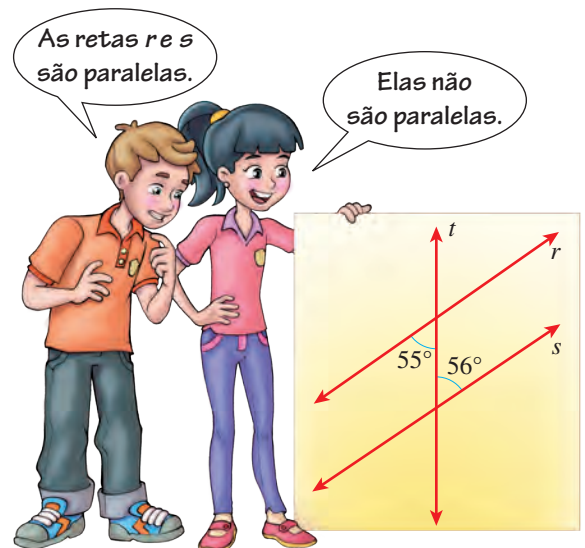
$$\begin{aligned} x &= 24^\circ \\ y &= 120^\circ \\ z &= 60^\circ \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} x &= 20^\circ \\ y &= 140^\circ \\ z &= 40^\circ \end{aligned}$$

40 Observe a conversa entre Mário e Vilma.

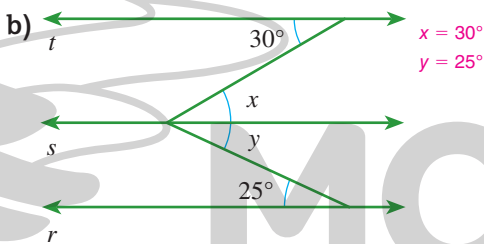
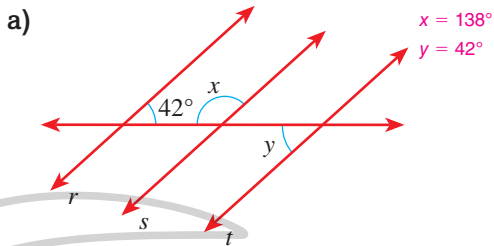


Quem tem razão? Justifique a resposta em seu caderno.
Vilma, pois, nesse caso, os ângulos alternos internos não são congruentes.

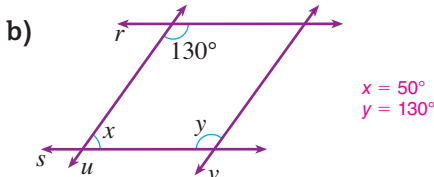
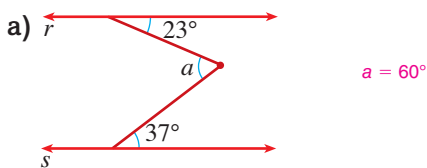
41 Considere que os ângulos mencionados nas sentenças a seguir são formados por duas retas paralelas e uma transversal. Identifique as sentenças falsas e corrija-as.

- a) Os ângulos correspondentes são suplementares. *Falsa; os ângulos correspondentes são congruentes.*
- b) Os ângulos alternos internos são congruentes. *verdadeira*
- c) Os ângulos alternos externos são complementares. *Falsa; os ângulos alternos externos são congruentes.*
- d) Os ângulos colaterais internos são congruentes. *Falsa; os ângulos colaterais internos são suplementares.*
- e) Os ângulos colaterais externos são suplementares. *verdadeira*

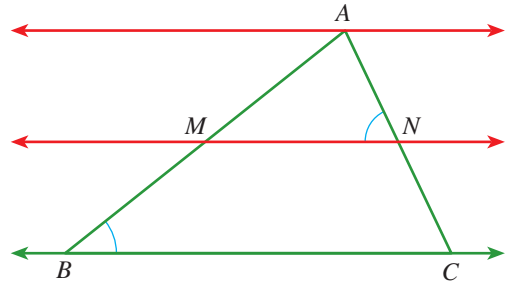
42 Sendo $r \parallel s \parallel t$, calcule as medidas x e y dos ângulos destacados nas figuras.



43 Sendo $r \parallel s$ e $u \parallel v$, calcule as medidas a , x e y nas figuras abaixo.

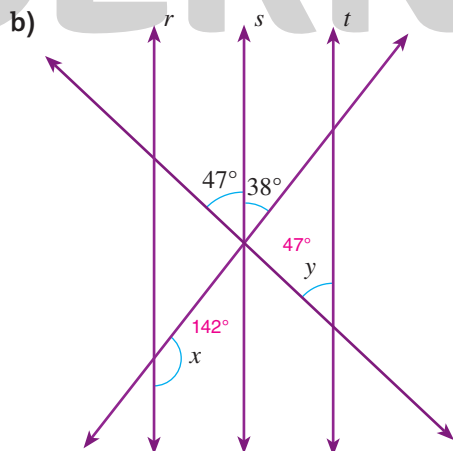
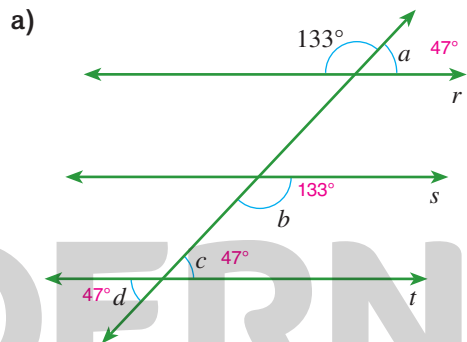


44 Observe o triângulo ABC . Nele foi traçada, pelo vértice A , uma reta paralela ao lado \overline{BC} . A reta \overline{MN} também é paralela ao lado \overline{BC} . A medida do ângulo $\hat{A}BC$ é $38,5^\circ$, e a do ângulo $\hat{M}NA$ é $64,5^\circ$.



- a) Qual é a medida do ângulo $\hat{M}NA$? $38,5^\circ$
- b) Qual é a medida do ângulo $\hat{B}MN$? $141,5^\circ$
- c) Qual é a medida do ângulo $\hat{B}CA$? $64,5^\circ$

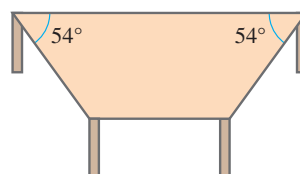
45 Sendo $r \parallel s \parallel t$, calcule as medidas a , b , c , d , x e y nas figuras.



FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

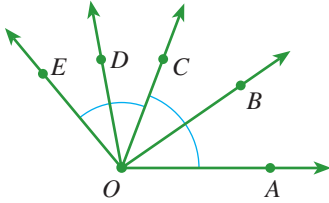
Pense mais um pouco...

O tampo de uma mesa tem a forma de um trapézio. Os ângulos agudos medem 54° . Quais são as medidas dos ângulos obtusos? 126°



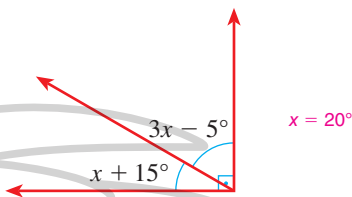
- 1 Considere que $m(\widehat{AOC}) = 70^\circ$, $m(\widehat{COE}) = 60^\circ$, \overrightarrow{OB} é bissetriz de \widehat{AOC} e \overrightarrow{OD} é bissetriz de \widehat{COE} . Calcule a medida de \widehat{BOD} . **65°**

NELSON MATSUDA

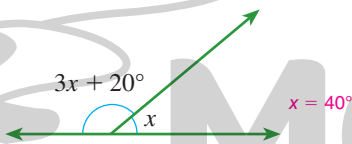


- 2 Calcule a medida x nas figuras a seguir.

a)



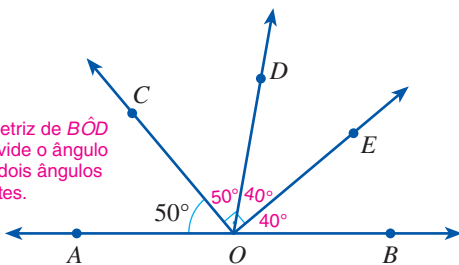
b)



- 3 Na figura abaixo, \overrightarrow{OC} é bissetriz de \widehat{AOD} . Explique por que \overrightarrow{OE} é bissetriz de \widehat{BOD} .

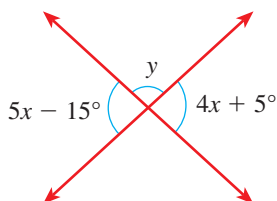
NELSON MATSUDA

\overrightarrow{OE} é bissetriz de \widehat{BOD} porque divide o ângulo \widehat{BOD} em dois ângulos congruentes.



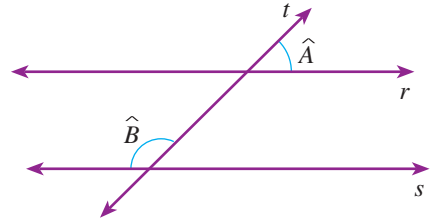
- 4 Determine as medidas x e y da figura.
 $x = 20^\circ$ e $y = 95^\circ$

NELSON MATSUDA



- 5 (Unibe-MG) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas, cortadas por uma reta transversal t .

NELSON MATSUDA



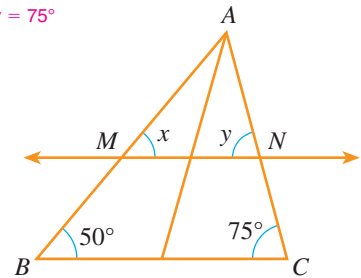
Se a medida do ângulo \widehat{B} é o triplo da medida do ângulo \widehat{A} , então a diferença $m(\widehat{B}) - m(\widehat{A})$ vale:

- a) 90° . b) 85° . c) 80° . d) 75° . e) 60° .

alternativa a

- 6 No triângulo abaixo, temos $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Calcule as medidas x e y .

$x = 50^\circ$; $y = 75^\circ$

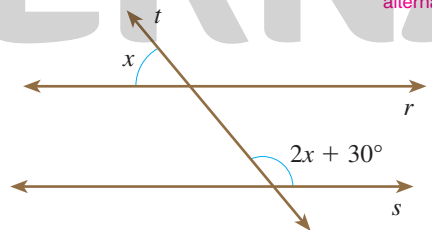


NELSON MATSUDA

- 7 (FAM-SP) Dadas as retas r e s , paralelas entre si, e t , concorrente com r e s , calcule o valor de x .

alternativa d

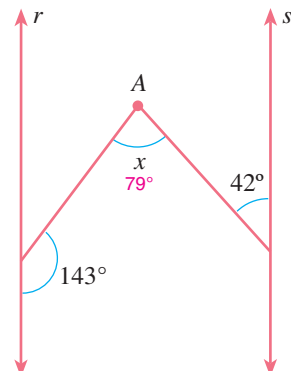
NELSON MATSUDA



- a) 51° b) 35° c) 90° d) 50° e) 45°

- 8 Sendo $r \parallel s$, calcule a medida x na figura abaixo.

NELSON MATSUDA



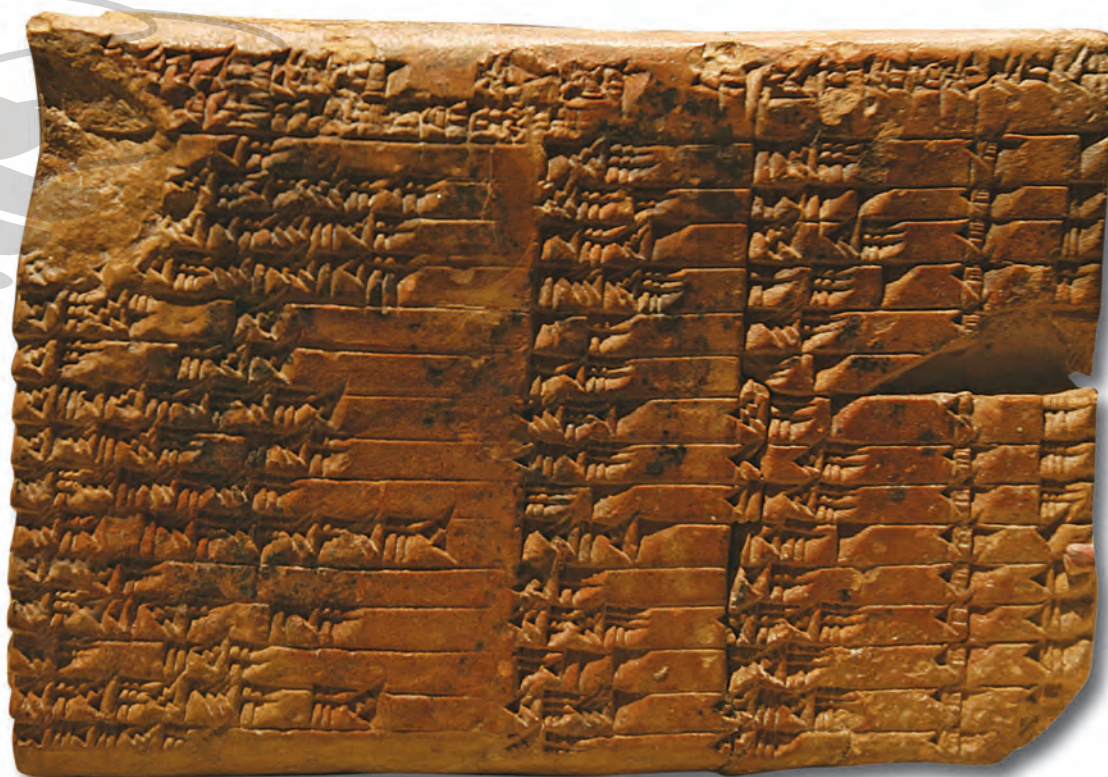
1 A história dos números

Desde a invenção da escrita, há cerca de 4 mil anos o ser humano começou a usar símbolos para representar quantidades como resultado da contagem de objetos: quantidade de aves que criava, de peixes que pescava, de cereais que colhia etc.

Os babilônios, por exemplo, muitos séculos antes de Cristo, empregavam símbolos em forma de cunha para representar números:

- Uma cunha “em pé”, ∇ , representava o número 1 e podia ser repetida até nove vezes.
- Uma cunha “deitada”, \blacktriangleleft , representava o número 10 e podia ser repetida até cinco vezes.

Esses símbolos eram impressos em tábuas de argila, como a da foto abaixo que mostra uma tábua do período entre 1800 a.C. e 1600 a.C.



Tábua de argila babilônica, Museu do Louvre, Paris, França.

Outros povos, como os egípcios e os romanos, tinham seus próprios símbolos e suas próprias regras para registrar quantidades.

Atualmente, a maioria dos povos adota o **sistema de numeração decimal**, composto de dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), denominados **algarismos indo-arábicos**.

► Números naturais

Números naturais são números que expressam o resultado de uma contagem.

O **conjunto dos números naturais**, representado por \mathbb{N} , pode ser indicado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Com os números naturais, efetuamos qualquer adição ou multiplicação. As subtrações, no entanto, só serão possíveis quando o minuendo for maior ou igual ao subtraendo, e as divisões, quando o dividendo for múltiplo do divisor.

Veja alguns exemplos de operações impossíveis de serem realizadas apenas com números naturais.

a) a subtração $6 - 7$ (Não há número natural que, somado com 7, resulte em 6.)

b) a divisão exata $8 : 5$ (Não há número natural que, multiplicado por 5, resulte em 8.)

Os números naturais não são suficientes para representar todas as situações do dia a dia. Com eles, não é possível representar, por exemplo, temperaturas abaixo de zero grau Celsius nem a medida do comprimento do nosso palmo em metro.

Para atender a situações como essas, foram criados os números racionais.

Veja alguns exemplos.

$$-3; \frac{1}{5}; -0,7; 0,333\dots; -\frac{9}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Identifique, entre as operações a seguir, quais não podem ser realizadas apenas com números naturais. **alternativas b, e, g, h**


- a)** $3 + 7$ **c)** $0 - 0$ **e)** $3 : 7$ **g)** $8 : 3$
b) $5 - 235$ **d)** $7 - 0$ **f)** $3 \cdot 7$ **h)** $7 : 10$

2 Responda às questões abaixo.

- a)** Por que é impossível efetuar a divisão exata $7 : 3$ dispondo apenas de números naturais?
b) E $3 - 7$? Por que é impossível efetuar-la?
a) Porque não há número natural que multiplicado por 3 dê 7.
b) Porque não há número natural que somado com 7 dê 3.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

 Reúna-se com um colega e façam as contagens que se pedem.

1. Uma loja de eletrodomésticos faz a seguinte promoção: dos quatro aparelhos, escolha dois para que o total de sua compra possa ser dividido em 6 parcelas iguais sem acréscimo. Os aparelhos que estão em promoção são televisão, micro-ondas, geladeira e máquina de lavar roupa. Determinem de quantas maneiras o cliente pode fazer sua compra. **6 maneiras**

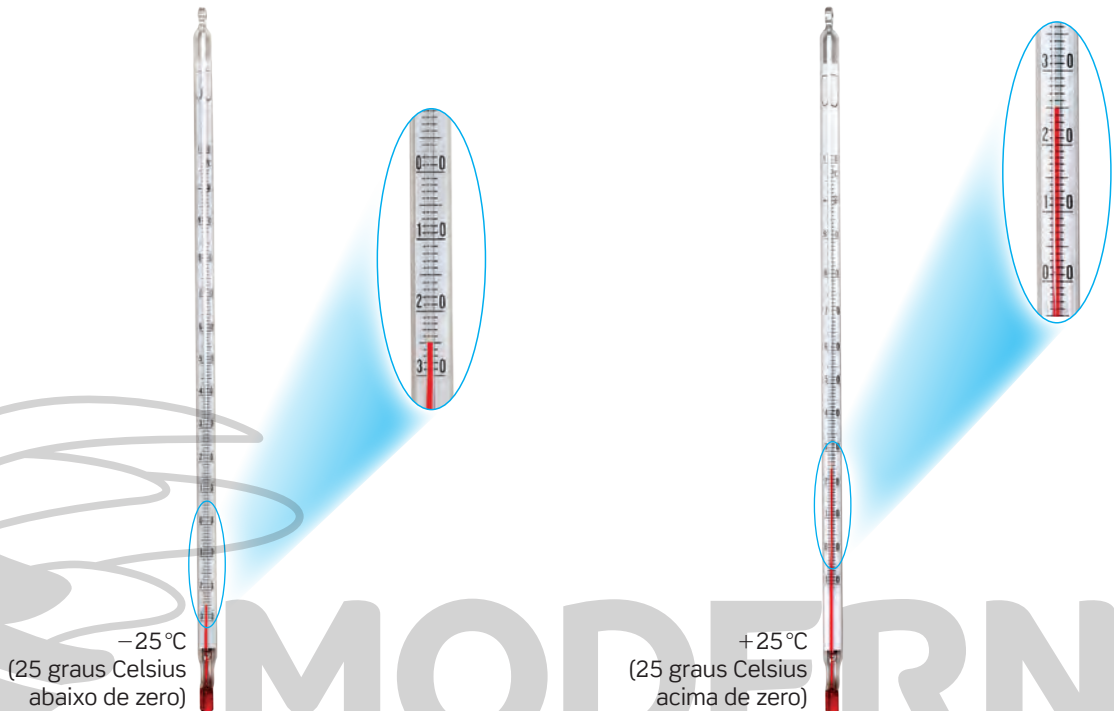
2. Uma sorveteria oferece 4 sabores de sorvete e 2 tipos de cobertura, ambos dietéticos, que podem ser servidos em 2 tipos de pote. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode escolher um sabor de sorvete dietético, uma cobertura dietética e um pote?
3. Paola esqueceu os dígitos que formam a placa de seu carro. A única informação que consegue lembrar é que a placa é formada por quatro algarismos distintos. Quantas possibilidades diferentes de placas Paola pode formar? **16 maneiras**
5.040 possibilidades ($10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$)

► Números inteiros e números racionais

Os números inteiros foram os primeiros números relativos (positivos ou negativos) criados pelo ser humano, em decorrência de necessidades impostas pelo comércio e de situações cotidianas que exigiram a representação de quantidades em relação ao referencial zero.

Veja alguns exemplos.

- a) Nos termômetros, para indicar temperaturas abaixo de zero grau Celsius (números negativos) ou acima de zero grau Celsius (números positivos). O referencial é 0 °C.



- b) Para descrever a movimentação bancária de uma conta, se o saldo é credor (números positivos) ou devedor (números negativos). O referencial é o saldo zero (nem credor nem devedor).

Movimentação de conta-corrente (valores em reais)				
Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
22/3	saldo anterior			+70,00
22/3	cheque 900392	-200,00		-130,00
22/3	depósito		+100,00	-30,00

Dados de uma conta-corrente.

O titular dessa conta tinha, ao final do dia 22 de março, saldo devedor de R\$ 30,00, isto é, devia ao banco R\$ 30,00.

O **conjunto dos números inteiros**, representado por \mathbb{Z} , pode ser indicado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Como os números inteiros não negativos (0, +1, +2, +3, ...) comportam-se como os números naturais, tanto na ordenação como nas operações, esses números passarão a ser indicados simplesmente por 0, 1, 2, 3, 4, ...

Por esse motivo, podemos dizer que qualquer número natural é um número inteiro:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots}_{\text{números naturais}}\}$$

Com a criação do conjunto dos números inteiros, tornou-se possível efetuar subtrações em que o minuendo é menor que o subtraendo. Veja alguns exemplos.

a) $6 - 7 = -1$

b) $0 - 3 = -3$

Os sinais **+** e **-** à esquerda dos números passam a indicar a posição que eles ocupam em relação ao zero, quando organizados em ordem crescente ou decrescente: os números menores que zero são negativos e os maiores, positivos.

Podemos também efetuar qualquer divisão de inteiros, desde que o divisor não seja zero. Veja alguns exemplos.

a) $8 : 5 = \frac{8}{5}$

b) $1 : (-2) = -\frac{1}{2}$

c) $-3 : 4 = -\frac{3}{4}$

d) $-1 : (-5) = \frac{1}{5}$

Agora, veja esses exemplos representados na reta numérica.



Todos os números racionais podem ser expressos na forma de fração com um número inteiro no numerador e um número inteiro não nulo no denominador.

Por exemplo, os números -2 ; $6,5$ e 7 têm infinitas representações na forma de fração. Vamos citar uma representação para cada número.

- $-2 = \frac{4}{-2}$, pois $4 : (-2) = -2$
- $6,5 = \frac{-65}{-10}$, pois $-65 : (-10) = +6,5 = 6,5$
- $7 = \frac{21}{3}$, pois $21 : 3 = 7$

Números racionais são números que expressam o resultado da divisão de dois números inteiros, com o divisor não nulo. Esse quociente pode ser representado por uma fração. Assim, o **conjunto dos números racionais**, representado por \mathbb{Q} , pode ser indicado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0 \right\}$$

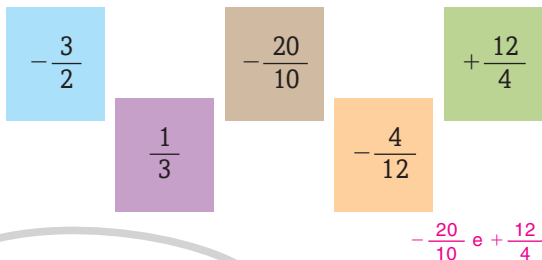
Observe o quadro abaixo, com alguns exemplos de números racionais.

	Número natural	Número inteiro	Número racional
3	X	X	X
-8		X	X
$\frac{1}{3}$			X
-0,3			X

3 Enquanto um avião sobrevoa a uma altitude de 5,8 km, um submarino está a uma profundidade de 0,24 km.

- a) Represente essas medidas com números relativos e explique qual foi o referencial utilizado. *+5,8 km; -0,24 km; nível do mar*
- b) Os números que aparecem no enunciado (5,8 e 0,24) são números racionais? Eles estão escritos na forma de fração?
Sim. Não, eles estão escritos na forma decimal.

4 Entre os números a seguir, quais são inteiros?



5 Identifique as sentenças falsas e justifique com um exemplo.

- a) Todo número natural é inteiro. *verdadeira*
- b) Todo número inteiro é racional. *verdadeira*
- c) Todo número natural é racional. *verdadeira*
- d) Todo número que pode ser escrito na forma de fração é racional. *verdadeira*
- e) Todo número natural é um número inteiro positivo. *Falsa, pois zero não é um número inteiro positivo.*
- f) Todo número inteiro é natural.
- g) Todo número racional é inteiro.

6 Reúna-se com um colega e respondam quantos números inteiros existem:

- a) entre dois números inteiros consecutivos; *nenhum*
- b) entre 1 e 9, entre -1 e 1, entre -9 e 9; *7; 1; 17*
- c) entre 0 e 10, entre 0 e 100, entre 0 e 1.000.000. *9; 99; 999.999*

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...



Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Calculem os números racionais:

- a , que é a média aritmética de 3 e 7; *5*
- b , que é a média aritmética de 3 e a ; *4*
- c , que é a média aritmética de 3 e b ; *3,5*
- d , que é a média aritmética de 3 e c . *3,25*

b) Representem os números racionais 3, a , b , c , d e 7 em uma mesma reta numérica.

c) As médias aritméticas de dois números obtidas no item a estão entre esses dois números? *sim*

d) É possível calcular os números e, f, g, h, \dots , que sejam as médias aritméticas, respectivamente, de 3 e e , de 3 e f , de 3 e g , de 3 e h e assim por diante?

- Considerando os itens acima, use sua intuição para dizer quantos números racionais existem entre 3 e 7 e também quantos números racionais existem entre dois números racionais distintos quaisquer. *Espera-se que os alunos respondam que existem infinitos números racionais.*



2 Representações dos números racionais

Com essa breve retomada sobre a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos, pudemos constatar que os algarismos indo-arábicos servem para representar todos os números que constituem esses conjuntos.

Notamos, também, que há mais de uma representação possível para todos os números racionais: a fracionária, mais antiga, e a decimal, bem mais recente.

No quadro a seguir, há algumas representações fracionária e decimal de alguns números racionais.

Número racional	Algumas representações	
-2	$-\frac{18}{9}$	-2,0
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{16}$	0,25
$\frac{4}{11}$	$\frac{8}{22}$	0,3636...
-5,3	$-\frac{53}{10}$	-5,300
$\frac{32}{15}$	$2\frac{2}{15}$	2,1333...
6	$\frac{12}{2}$	6,000



OSÉ LUÍS JUHAS

Muitos números racionais podem ser representados por uma fração decimal, isto é, de denominador 10, 100, 1.000 etc., como os números abaixo.

$$-2 = -\frac{20}{10} \quad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \quad -5,3 = -\frac{53}{10} \quad 6,000 = \frac{6.000}{1.000}$$

↑ ↑ ↑ ↑
frações decimais

Já os números $\frac{4}{11}$ e $\frac{32}{15}$ não podem ser representados por uma fração decimal. No entanto, eles podem ser escritos na forma decimal.

Note que nas representações 0,3636... e 2,1333... as reticências indicam infinitas casas decimais e periódicas. Por exemplo, em 0,3636..., as reticências indicam que 36 – chamado de **período** – continua se repetindo para sempre. Já em 2,1333..., temos uma representação decimal periódica de período 3.

A representação decimal periódica recebe o nome de **dízima periódica**.

Uma dízima periódica pode ser escrita abreviadamente, colocando-se um traço sobre o período. Veja a representação abreviada de algumas dízimas periódicas.

- a) $2,555... = 2,\overline{5}$ c) $1,2777... = 1,2\overline{7}$ e) $-8,612612... = -8,\overline{612}$
 b) $-0,1313... = -0,\overline{13}$ d) $0,21888... = 0,2\overline{18}$ f) $4,0979797... = 4,0\overline{97}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 Escreva a representação decimal das frações a seguir.

- a) $\frac{35}{10}$ 3,5 c) $-\frac{7}{100}$ -0,07 e) $\frac{542}{100}$ 5,42
 b) $\frac{28}{100}$ 0,28 d) $-\frac{321}{10.000}$ -0,0321 f) $\frac{12}{1.000}$ 0,012

8 Observando os resultados do exercício anterior, estabeleça a relação existente entre a quantidade de zeros do denominador de uma fração decimal e a quantidade de casas após a vírgula na representação decimal dessa fração.

A quantidade de zeros no denominador de uma fração decimal é igual à quantidade de casas após a vírgula na representação decimal dessa fração.

9 Represente cada fração na forma decimal.

- a) $\frac{2}{5}$ 0,4 c) $\frac{11}{3}$ 3,666... e) $-\frac{11}{90}$ ^{-0,1222...}
- b) $\frac{5}{6}$ 0,8333... d) $-\frac{45}{8}$ -5,625 f) $\frac{52}{25}$ 2,08

10 Somando os dois números de cada item, obtemos um outro número na forma de dízima periódica. Determine em cada caso essa dízima periódica na forma abreviada.

- a) 2,444... e 5,111... $7\bar{5}$
- b) 2,5 e 3,222... $5,7\bar{2}$

11 Em uma calculadora, aperte as teclas mostradas abaixo.



$3 \div 22 = 0,13636...$

- a) Para o último algarismo do número que aparece no visor, sua calculadora faz algum arredondamento? *A resposta depende da calculadora utilizada.*
- b) Represente o número obtido na forma de fração. $\frac{3}{22}$

12 Usando uma calculadora, faça o que se pede.



- a) Escreva o número que aparece no visor após apertar estas teclas: 3,66666...

$33 \div 9 =$

- b) Reserve esse resultado na memória aditiva, apertando a tecla M^+ .

- c) Escreva o número que aparece no visor após apertar estas teclas: 1,66666...

$15 \div 9 =$

- d) Para subtrair o resultado do item c do resultado do item a, basta apertar as teclas M^- da memória subtrativa e MRC , que recupera o último resultado da memória. Escreva o número que aparece no visor. 2

- e) Efetue $\frac{20}{9} - \frac{47}{9}$ e, em seguida, com uma calculadora, confira o resultado. -3

- f) Calcule o valor da expressão: $5,222... - 2,222... = 3$

Da forma decimal para a forma de fração

Já trabalhamos com a transformação de um número escrito na forma de fração para a forma decimal. Para isso, basta efetuarmos o algoritmo da divisão, como neste exemplo.

$\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0,2$

$10 \overline{) 5}$
0 0,2

Agora, vamos ver como transformar um número na forma decimal para a forma de fração.

1º caso: Quando o número tem finitas casas decimais, a leitura dele fornece uma boa indicação de como expressá-lo na forma de fração.

Veja alguns exemplos.

a) $0,2 = \text{dois décimos} = \frac{2}{10}$

leitura

um zero

uma casa decimal

b) $5,325 = \text{cinco inteiros, trezentos e vinte e cinco milésimos} = 5 \frac{325}{1.000}$

leitura

três casas decimais

três zeros

2º caso: Quando o número tem infinitas casas decimais, como o número 0,55555..., procedemos do seguinte modo:

- Primeiro, chamamos o número 0,55555... de x , obtendo a igualdade:

$$x = 0,55555\dots$$

- Em seguida, multiplicamos os dois membros por 10, chegando a uma nova igualdade:

$$10x = 5,5555\dots$$

- E, finalmente, subtraímos a primeira igualdade da segunda, membro a membro, obtendo:

$$10x - x = 5,555\dots - 0,555\dots$$

$$9x = 5$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{5}{9}$$

$$x = \frac{5}{9}$$

Logo: $0,55555\dots = \frac{5}{9}$

Nesse caso, os dois membros da primeira igualdade foram multiplicados por 10. De modo geral, eles devem ser multiplicados por uma potência conveniente de 10 (10, 100, 1.000, ...), a fim de se deslocar a vírgula para a direita do primeiro período.

Veja outro exemplo com o número 2,373737...

- Chamando 2,373737... de x , obtemos a igualdade $x = 2,373737\dots$
- Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 100, obtemos uma nova igualdade:

$$100x = 237,3737\dots$$

- Subtraindo a primeira igualdade da segunda, membro a membro, temos:

$$100x - x = 237,3737\dots - 2,3737\dots$$

$$99x = 235$$

$$\frac{99x}{99} = \frac{235}{99}$$

$$x = \frac{235}{99}$$

Logo: $2,3737\dots = \frac{235}{99}$



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998. JOSÉ LUIS JUHAS

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 13** Escreva as frações irredutíveis que representam: o número 0,36, o número 0,04 e a soma $0,36 + 0,04$. $\frac{9}{25}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{2}{5}$

- 14** Expresse os números abaixo na forma de fração.

- a) $3,444\dots$ $\frac{31}{9}$ c) $0,4\bar{5}$ $\frac{5}{11}$
 b) $-12,5$ $-\frac{113}{9}$ d) $-0,31222\dots$ $-\frac{281}{900}$

- 15** Determine a fração irredutível que representa o valor de cada expressão abaixo.

- a) $0,2 + 0,\bar{3}$ a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{47}{18}$
 b) $0,2\bar{7} + 2,\bar{3}$
 c) $0,3\bar{8} + 1,4\bar{5}$ c) $\frac{83}{45}$ d) $\frac{2}{9}$
 d) $1,\bar{8} \cdot \frac{2}{17}$

16 Dividindo um número x por um número y , obtém-se 2,555... Determine o valor de x e de y , sabendo que eles são números primos entre si. $x = 23$ e $y = 9$

17 Escreva o número 7 como:

- a soma de dois números racionais na forma de fração;
- a diferença de dois números racionais na forma decimal, cada um com duas casas decimais;
- a soma de duas dízimas periódicas.

respostas possíveis: a) $\frac{13}{2} + \frac{1}{2}$; b) $9,42 - 2,42$; c) $4,\overline{8} + 2,\overline{1}$

18 Em uma caixa, há sete bolas numeradas de 1 a 7. Márcio retira três bolas consecutivas sem recolocá-las na caixa para representar um número A . O número retirado na primeira bola representará as unidades de A , o número da segunda bola representará os décimos de A , e o da terceira bola, os centésimos.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

6,42; $\frac{321}{50}$

- Márcio retirou os números 6, 4 e 2, nessa ordem. Qual é o número A formado nesse caso? Indique-o por uma fração irredutível.
- Se, em seguida, Márcio retirar mais três bolas, qual é o maior número A possível que poderá ser formado com a retirada dessas bolas? E o menor? 7,53; 1,35

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Observe as expressões abaixo.

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{13}{8}$$

Seguindo o padrão, escreva a quarta expressão e calcule seu valor.

3 Números quadrados perfeitos

Se um número natural é a segunda potência de outro número natural, ele é chamado de **quadrado perfeito**. Então, um quadrado perfeito pode ser escrito como quadrado de outro número natural.

Observe alguns exemplos.

- 4 é quadrado perfeito, pois $4 = 2^2$.
- 81 é quadrado perfeito, pois $81 = 9^2$.

O número 32 não é quadrado perfeito, pois ele não é quadrado de nenhum número natural. Observe que 32 está entre dois quadrados perfeitos:

$$25 < 32 < 36,$$

em que $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, e entre 5 e 6 não há nenhum número natural.

Assim, é muito simples produzir quadrados perfeitos; basta escolher um número natural e elevá-lo ao quadrado. Por exemplo, 12 é um número natural; então, $12^2 = 144$, que é um quadrado perfeito.

Veja o que acontece quando decomposmos 12 e 144 em fatores primos.

12		2
6		2
3		3
1		

144		2
72		2
36		2
18		2
9		3
3		3
1		

Observe que 144 tem o dobro de fatores primos de 12:

- 12 tem **2** fatores iguais a 2 e **1** fator igual a 3;
- 144 tem **4** fatores iguais a 2 e **2** fatores iguais a 3.

Podemos verificar se um número é quadrado perfeito decompondo-o em fatores primos e verificando se o número de cada um desses fatores é par.

Como exemplo, vamos verificar se 324 é quadrado perfeito.

Decompondo 324 em fatores primos, temos:

324		2	}	2 fatores iguais a 2
162		2		
81		3	}	4 fatores iguais a 3
27		3		
9		3		
3		3		
1				

$$324 = 2^2 \cdot 3^4$$



JOSÉ LUIS JUHAS
 Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Note que todos os expoentes dos fatores são pares. Então, 324 é um quadrado perfeito.

Veja como podemos encontrar o número que gerou o quadrado perfeito 324:

$$324 = 2^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot (3^2)^2 = (2 \cdot 3^2)^2 = 18^2$$

Então, podemos dizer que 324 é quadrado perfeito, porque existe o número natural 18 que elevado ao quadrado resulta em 324.

Observe, agora, por que 72 não é um quadrado perfeito.

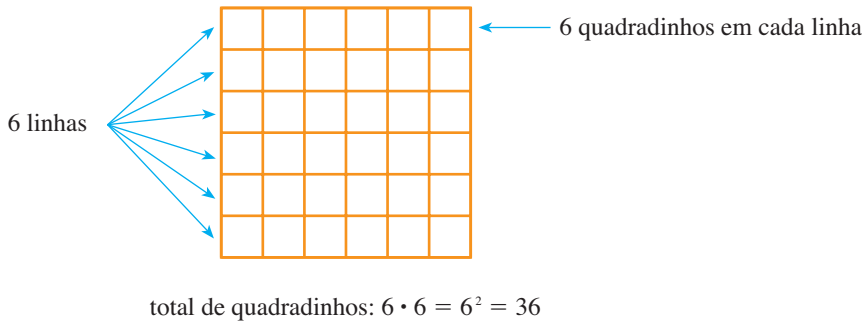
72		2
36		2
18		2
9		3
3		3
1		

ímpar
↓

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Note que 72 tem um número ímpar de fatores iguais a 2. Então, 72 não é um quadrado perfeito.

Podemos representar geometricamente um número quadrado perfeito. Por exemplo, com 36 quadradinhos iguais é possível formar um quadrado maior, porque 36 é um número quadrado perfeito.



Veja que, com 8 quadradinhos iguais, não é possível formar um quadrado maior, pois 8 não é quadrado perfeito.

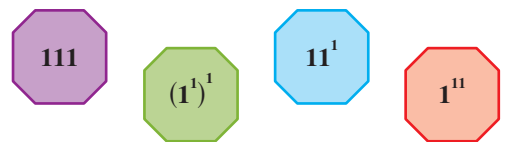


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

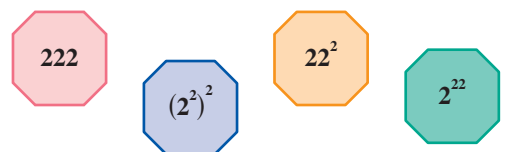
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 19** Determine os quadrados perfeitos entre 100 e 200. *121, 144, 169 e 196*
- 20** Efetuando a decomposição em fatores primos, verifique entre os números a seguir quais são quadrados perfeitos. *alternativas a, c, e, f*
- | | |
|--------|--------|
| a) 225 | d) 480 |
| b) 360 | e) 576 |
| c) 441 | f) 784 |
- 21** Com 144 quadradinhos iguais, Fernando pode construir um quadrado maior. Quantos quadradinhos há em cada linha desse novo quadrado? *12 quadradinhos*
- 22** Com quantos quadradinhos iguais posso construir um quadrado maior que tenha 8 quadradinhos em cada linha? *64 quadradinhos*
- 23** Reúna-se com um colega e leiam o texto a seguir. Vamos usar três algarismos iguais para formar alguns números. A única operação que pode

ser utilizada é a potenciação. Ao usar três algarismos iguais a 1, obtemos os números:



É fácil verificar que o maior desses números é 111, pois $(1^1)^1 = 1^1 = 1$, $11^1 = 11$ e $1^{11} = 1$. Com três algarismos iguais a 2, obtemos os números:



Agora, respondam:

- a) Qual é o maior desses números? *$2^{22} = 4.194.304$*
- b) Quais destes números são quadrados perfeitos: 2^{22} , $(2^2)^2$ ou 22^2 ? Justifiquem a resposta. *Todos, pois $2^{22} = (2^{11})^2$, $(2^2)^2 = 2^4 = (2^2)^2$ e 22^2 já está na forma de quadrado perfeito.*

4 Raiz quadrada de números racionais não negativos

Quando calculamos o quadrado de um número natural, estamos determinando um número quadrado perfeito. Por exemplo:

$$15^2 = 225$$

Nesse caso, podemos dizer:

- 225 é o quadrado de 15;
- 15 é a raiz quadrada de 225, que indicamos da seguinte maneira: $15 = \sqrt{225}$

Isso ocorre com qualquer número racional não negativo.

Observe alguns exemplos.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ $\begin{cases} \rightarrow \frac{4}{25} \text{ é o quadrado de } \frac{2}{5} \\ \rightarrow \frac{2}{5} \text{ é a raiz quadrada de } \frac{4}{25}, \text{ isto é, } \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \end{cases}$

b) $\sqrt{1,44} = 1,2$, pois $(1,2)^2 = 1,44$

c) $13^2 = 169$; então, $13 = \sqrt{169}$

Da mesma maneira que representamos os números quadrados perfeitos pela quantidade de quadradinhos que formam um quadrado maior, também podemos relacionar o quadrado de um número racional não negativo à área de uma região quadrada cujo lado tem a medida representada por esse número (em determinada unidade de medida).

OBSERVAÇÃO

No estudo que faremos em toda a coleção, vamos nos referir à área da região poligonal simplesmente por área do polígono. Por exemplo, a área de uma região quadrada será denominada área do quadrado.

Acompanhe duas situações a seguir.

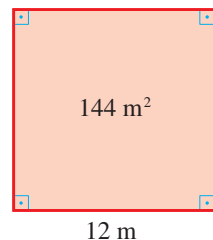
Situação 1

Uma região quadrada com área igual a 144 m^2 tem o lado medindo 12 m, pois $12^2 = 144$.

Então, $12 = \sqrt{144}$.

Assim, para encontrar a medida ℓ do lado de um quadrado, sabendo que sua área é A , basta encontrar a raiz quadrada de A .

$$\ell = \sqrt{A}, \text{ pois } \ell^2 = A$$



Situação 2

A área de um jardim, que tem a forma de um quadrado, é 256 m^2 . Para determinar a medida do lado desse jardim, temos de encontrar $\sqrt{256}$, pois $\ell^2 = 256$.

Como o número ℓ gera o quadrado perfeito 256, ele pode ser encontrado ao decompor 256 em fatores primos. Assim, podemos escrever:

$$256 = 2^8 = (2^4)^2 = 16^2$$

\uparrow
 ℓ

Portanto, o lado do jardim mede 16 m.

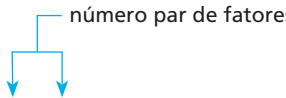
► Cálculo da raiz quadrada pela decomposição em fatores primos

Já vimos que, para identificar um número quadrado perfeito, verificamos se ele tem uma quantidade par de cada um de seus fatores primos.

Esse fato também nos permite encontrar o número que gerou o quadrado perfeito. Esse número gerador é a raiz quadrada do quadrado perfeito dado.

Veja um exemplo.

número par de fatores



$$225 \text{ é quadrado perfeito, pois: } 225 = 3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$$

Então, $225 = 15^2$ e, portanto, $15 = \sqrt{225}$.

Esse procedimento constitui um meio de determinar a raiz quadrada de um número quadrado perfeito.

Agora, para dar mais um exemplo, vamos determinar $\sqrt{576}$.

Ao decompor 576 em fatores primos, obtemos:

$$576 = 2^6 \cdot 3^2 = (2^3 \cdot 3^1)^2 = 24^2$$

Como $576 = 24^2$, concluímos que $\sqrt{576} = 24$.

Observe que 24 decomposto em fatores primos ($24 = 2^3 \cdot 3^1$) apresenta metade dos fatores primos de 576.

Assim, de modo prático, podemos dizer que, para extrair a raiz quadrada de números quadrados perfeitos, primeiro decomparamos o número em fatores primos; em seguida, dividimos cada expoente por 2; e, finalmente, efetuamos a multiplicação obtida.

No caso de números racionais representados na forma de fração, decomparamos o numerador e o denominador em fatores primos e, em seguida, calculamos a raiz quadrada de cada um deles.

Veja mais alguns exemplos.

$$\text{a) } \sqrt{\frac{36}{625}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3^2}{5^4}} = \frac{2 \cdot 3}{5^2} = \frac{6}{25}$$

$$\text{b) } \sqrt{12,96} = \sqrt{\frac{1.296}{100}} = \sqrt{\frac{2^4 \cdot 3^4}{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 9}{10} = \frac{36}{10} = 3,6$$



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24 Justifique cada igualdade abaixo.

a) $\sqrt{0,64} = 0,8$ ($0,8$)² = 0,64

b) $\sqrt{2^{10} \cdot 3^2} = 2^5 \cdot 3$ ($2^5 \cdot 3$)² = $2^{10} \cdot 3^2$

25 Extraia a raiz quadrada de cada número a seguir pela decomposição em fatores primos.

a) 256 16

c) 484 22

e) 1.600 40

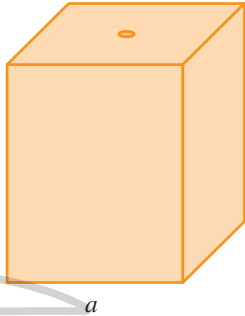
b) 196 14

d) 729 27

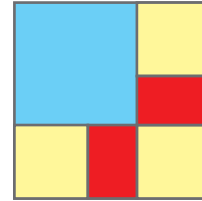
f) 1.024 32

- 26** (Unirio-RJ) O valor de $\sqrt{15 - \sqrt{32 + \sqrt{25 - \sqrt{81}}}}$ é: alternativa **c**
- a) 1. c) 3. e) 5.
b) 2. d) 4.

- 27** Um paliteiro de base quadrada tem a forma da figura abaixo. Sabendo que a soma das áreas das faces laterais do paliteiro é igual a 162 cm^2 e que a área de todas as faces é $202,5 \text{ cm}^2$, determine a medida a do lado da base desse paliteiro. $a = 4,5 \text{ cm}$



- 28** Usando a decomposição em fatores primos, calcule a raiz quadrada de:
- a) $\frac{25}{576}$; $\frac{5}{24}$ b) 0,01; c) $\frac{64}{1.225}$; $\frac{8}{35}$ d) 19,36; 4,4
- 29** Ivan vai construir uma pipa colorida na forma de um quadrado. Para isso, ele recortou um quadrado de papel azul com área igual a 2.500 cm^2 , três quadrados de papel amarelo de área igual a 900 cm^2 cada um, e dois retângulos de papel vermelho de 20 cm por 30 cm . Qual será a medida do lado dessa pipa? 80 cm



- 30** O piso de um salão na forma de um quadrado é coberto com 10.800 lajotas retangulares de 40 cm por 30 cm . Determine:
- a) a área do salão; b) as dimensões do salão.
 1.296 m^2 $36 \text{ m por } 36 \text{ m}$

► Raiz quadrada aproximada

Os números quadrados perfeitos têm como raiz quadrada um número natural que elevado ao quadrado reproduz o número dado.

Veja o que acontece quando queremos extrair a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito. Para exemplificar, vamos calcular a raiz quadrada do número 31.

O número 31 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 25 e 36.

$$25 < 31 < 36$$

Então, $\sqrt{31}$ deve estar compreendida entre $\sqrt{25}$ e $\sqrt{36}$.

$$\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$$

Como $\sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{36} = 6$, temos:

$$5 < \sqrt{31} < 6$$

Dizemos, então, que:

- **5** é a raiz quadrada **aproximada por falta, a menos de uma unidade**, do número 31;
- **6** é a raiz quadrada **aproximada por excesso, a menos de uma unidade**, do número 31.

Em geral, considera-se raiz quadrada aproximada de um número não quadrado perfeito a raiz quadrada **aproximada por falta**, a menos de uma unidade. Indica-se que 5 é a raiz quadrada aproximada por falta de 31, escrevendo-se:

$$\sqrt{31} \approx 5$$

(lemos: a raiz quadrada do número trinta e um é aproximadamente igual a cinco)

- 31** Considerando o número 110, responda.
- Entre quais números quadrados perfeitos ele está compreendido? **100 e 121**
 - A raiz quadrada desse número está compreendida entre quais números naturais? **10 e 11**
 - Qual é a raiz quadrada por falta, a menos de uma unidade? **10**
- 32** Qual é o menor número natural que devemos subtrair de 640 para obter um número quadrado perfeito? E qual é a raiz quadrada aproximada de 640 por falta, a menos de uma unidade?

15; 25

- 33** Faça estimativas para obter o valor aproximado de:

- $\sqrt{51} \approx 7$
- $50 \cdot \sqrt{51} \approx 350$
- $200 \cdot \sqrt{51} \approx 1.400$

Como você pode comprovar os resultados que obteve? **resposta possível: com uma calculadora**

- 34** No século XX, qual foi o único ano representado por um número quadrado perfeito? E no século XXI, qual será o ano? **1936; 2025**

► Raiz quadrada com aproximação decimal

A seguir, vamos aprender a calcular a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito com aproximação decimal.

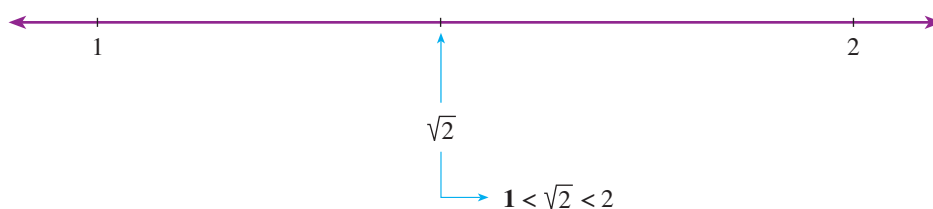
Como exemplo, vamos considerar o número 2. Qual é o número racional que elevado ao quadrado resulta em 2?

Veja.

1 não pode ser, pois $1^2 = 1$

2 não pode ser, pois $2^2 = 4$

Dessa forma, $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1 e 2 ($1 < \sqrt{2} < 2$).



Como não existe nenhum número inteiro cujo quadrado dê 2, dizemos que 1 é a raiz quadrada **aproximada** do número 2.

Vamos procurar um número com uma casa decimal cujo quadrado seja mais próximo de 2.

$$(1,1)^2 = 1,21 < 2$$

$$(1,2)^2 = 1,44 < 2$$

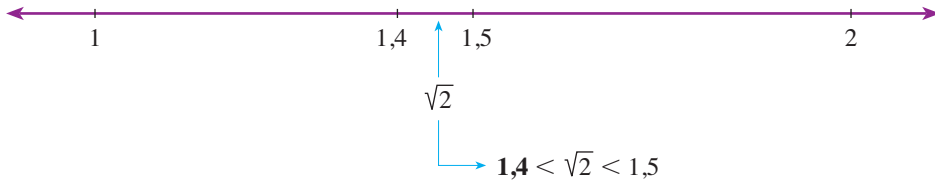
$$(1,3)^2 = 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2$$

$$(1,5)^2 = 2,25 > 2$$



Como também não existe número com uma casa decimal cujo quadrado seja igual a 2, concluímos que $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1,4 e 1,5.



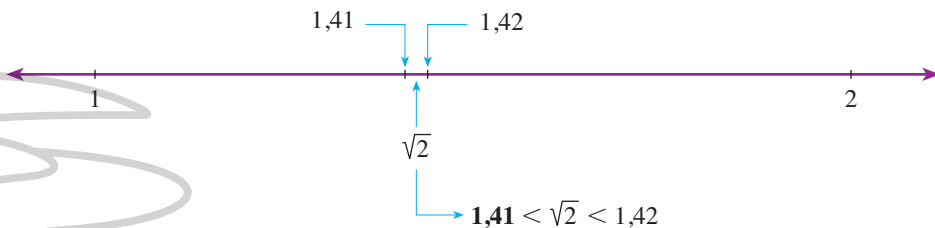
Nesse caso, dizemos que a raiz quadrada aproximada do número 2 com uma casa decimal é igual a 1,4 e escrevemos $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Vamos tentar uma aproximação maior, com duas casas decimais, para $\sqrt{2}$.

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2$$

$$(1,42)^2 = 2,0164 > 2$$

Logo, $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1,41 e 1,42.



Então, podemos dizer que a raiz quadrada aproximada do número 2 com duas casas decimais é igual a 1,41 e escrevemos $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Se prosseguirmos, vamos encontrar a raiz quadrada aproximada de 2 com quantas casas decimais desejarmos, sem, entretanto, encontrar um número decimal cujo quadrado dê 2.

Veja outros exemplos.

a) Calcule a raiz quadrada do número 58 com duas casas decimais.

$$\left. \begin{array}{l} 7^2 = 49 < 58 \\ 8^2 = 64 > 58 \end{array} \right\} \text{Então, } 7 < \sqrt{58} < 8.$$

7 é a raiz quadrada aproximada de 58.

$$(7,1)^2 = 50,41 < 58$$

$$(7,2)^2 = 51,84 < 58$$

$$(7,5)^2 = 56,25 < 58$$

$$(7,6)^2 = 57,76 < 58$$

$$(7,7)^2 = 59,29 > 58$$

$$\left. \begin{array}{l} (7,6)^2 = 57,76 < 58 \\ (7,7)^2 = 59,29 > 58 \end{array} \right\} \text{Então, } 7,6 < \sqrt{58} < 7,7.$$

7,6 é a raiz quadrada aproximada com uma casa decimal do número 58.

$$(7,61)^2 = 57,9121 < 58$$

$$(7,62)^2 = 58,0644 > 58$$

$$\left. \begin{array}{l} (7,61)^2 = 57,9121 < 58 \\ (7,62)^2 = 58,0644 > 58 \end{array} \right\} \text{Então, } 7,61 < \sqrt{58} < 7,62.$$

Assim, a raiz quadrada de 58 com duas casas decimais é 7,61. Escrevemos $\sqrt{58} \approx 7,61$.



- b) Calcule a raiz quadrada do número 7,2 com uma casa decimal.
O número 7,2 está compreendido entre os quadrados perfeitos 4 e 9.

Então:

$$\sqrt{4} < \sqrt{7,2} < \sqrt{9}, \text{ ou seja, } 2 < \sqrt{7,2} < 3$$

A raiz quadrada de 7,2 é um número compreendido entre 2 e 3.
Vamos começar testando 2,5.

$$(2,5)^2 = 6,25 < 7,2$$

$$(2,6)^2 = 6,76 < 7,2$$

$$(2,7)^2 = 7,29 > 7,2$$

Assim, a raiz quadrada do número 7,2 com uma casa decimal é 2,6. Escrevemos $\sqrt{7,2} \approx 2,6$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35 Verifique se 1,7 pode ser considerado uma raiz aproximada de 3. **sim**

36 Entre os números 3,87 e 3,88, qual deles se aproxima mais de $\sqrt{15}$? **3,87**

37 Qual é o número com uma casa decimal que representa a raiz quadrada aproximada de 265? **16,2**

38 Calcule a raiz quadrada aproximada com uma casa decimal de:

a) 572; **23,9** b) 28,19; **5,3** c) 42,55; **6,5** d) 12,6. **3,5**

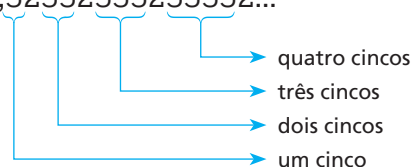
5 Números irracionais e números reais

Considere o número 0,101112...

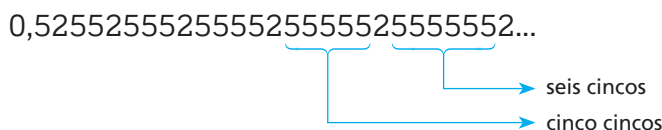
Observando a formação desse número, vamos supor que podemos dar continuidade à sua parte decimal do seguinte modo: 0,10111213...; 0,1011121314...; e assim por diante.

Como a representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica, não podemos obter sua forma de fração; logo, esse número não é racional.

Agora, veja este outro número: 0,52552555255552...



Imagine que, para continuar escrevendo esse número, devemos acrescentar sempre um algarismo 5 aos grupos de 5 separados por 2:



A representação desse número também não é decimal exata nem periódica. Portanto, esse número não pode ser escrito na forma de fração. Logo, não é um número racional.

Com esses exemplos, percebemos que existem números que não são representados nem por uma forma decimal exata (com um número finito de casas decimais), nem por uma dízima periódica. Portanto, não podem ser escritos na forma de fração e, conseqüentemente, não são números racionais. Esse tipo de número chamamos de **número irracional**.

Agora, considere a representação decimal dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ com sete casas decimais.

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135 \quad \text{e} \quad \sqrt{3} \approx 1,7320508$$

Por maior que seja o número de casas decimais que queiramos dar a esses números, nunca vamos encontrar para eles uma representação decimal exata ou periódica. Portanto, não há frações que os representem. Por isso, dizemos que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais. Também é irracional toda raiz quadrada de um número natural que não seja quadrado perfeito, assim como toda raiz quadrada de fração positiva irredutível cujo numerador e denominador não seja quadrado perfeito.

Como exemplo de números irracionais, temos:

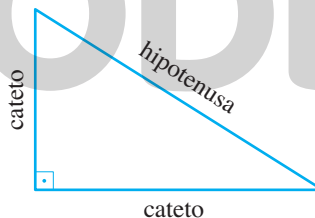
$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{9}$$

PARA SABER MAIS



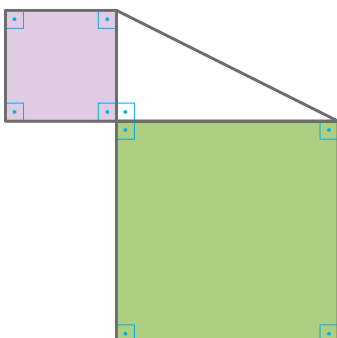
Os números irracionais, o triângulo retângulo e um quebra-cabeça

Uma figura geométrica conhecida pode manter uma relação com os números irracionais: o **triângulo retângulo**, cujos lados têm nomes especiais (catetos e hipotenusa).

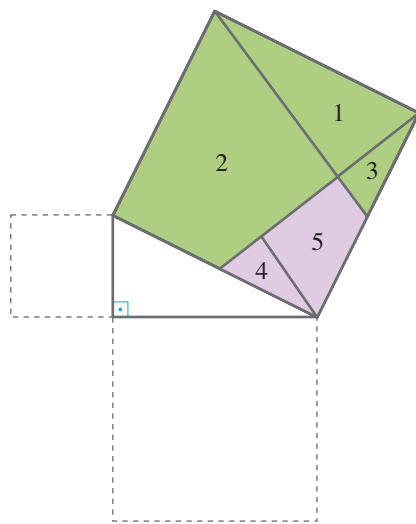
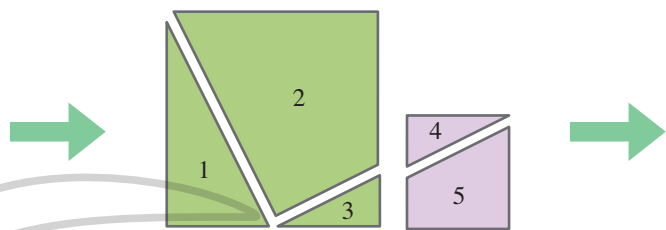
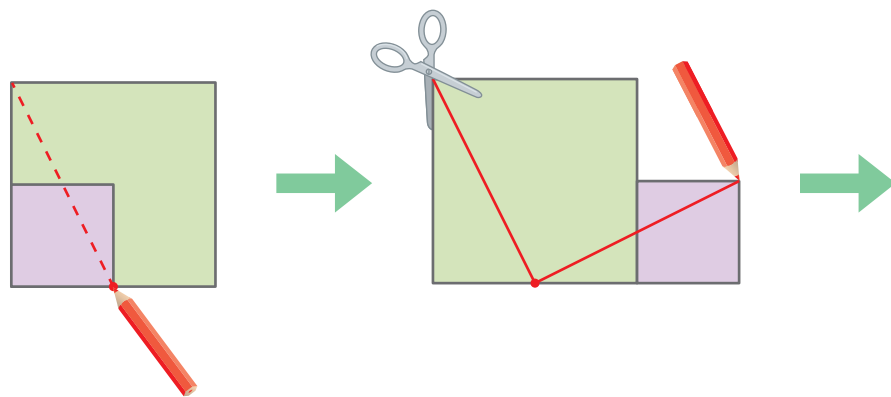


Os triângulos retângulos têm uma propriedade muito especial: construindo regiões quadradas sobre os catetos, sempre é possível construir uma região quadrada sobre a hipotenusa.

Observe a figura abaixo e veja como é possível verificar experimentalmente esse fato.



Nela, temos uma região quadrada (pintada de roxo) sobre um cateto e outra (pintada de verde) sobre o outro cateto. Vamos decompô-las de modo conveniente para formar uma região quadrada sobre a hipotenusa. Observe.



Note que a área da região quadrada formada sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das regiões quadradas construídas sobre os catetos.

Então, ao indicar por c e b as medidas dos catetos e por a a medida da hipotenusa, podemos escrever:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

↑ Área de cada região quadrada construída sobre os catetos.
 ↑ Área da região quadrada construída sobre a hipotenusa.

Essa relação vale para qualquer triângulo retângulo, e é por causa dela que esse tipo de triângulo pode ter uma relação com os números irracionais.

Veja um exemplo.

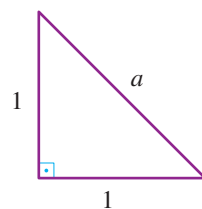
Considere o triângulo retângulo isósceles representado na figura ao lado.

Ele tem 1 unidade de medida de comprimento (u) em cada cateto.

Pela relação acima, escrevemos:

$$1^2 + 1^2 = a^2$$

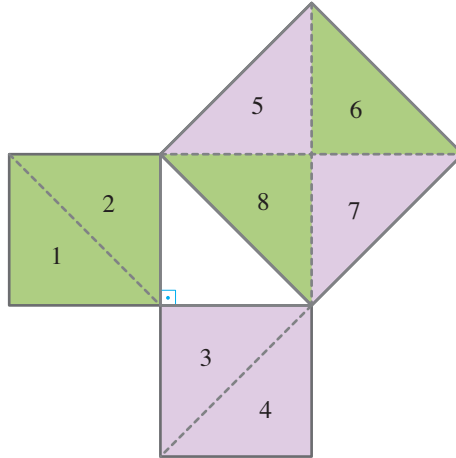
$$2 = a^2$$



O valor procurado é um número que, elevado ao quadrado, dá como resultado 2 e é positivo, pois indica a medida de um segmento. Esse número é $\sqrt{2}$.

Logo, $a = \sqrt{2} u$.

Note, também, que os quadrados construídos sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles podem ser divididos em triângulos iguais. Então, as regiões 1, 2, 3 e 4 são equivalentes às regiões 5, 6, 7 e 8. Mas isso só vale para triângulos retângulos isósceles!



Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Considerando o triângulo retângulo ao lado e tomando

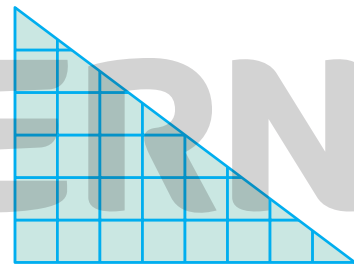


como unidade de área, determine:

- as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos;
- a área do quadrado construído sobre a hipotenusa;
- a relação entre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

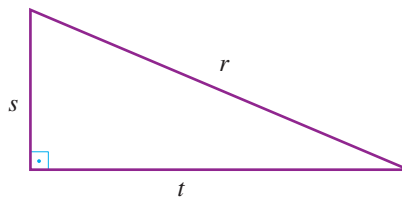
36 e 64

100 = 36 + 64

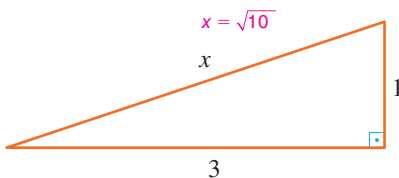


2. Escreva a relação entre as medidas r , s e t do triângulo retângulo representado abaixo.

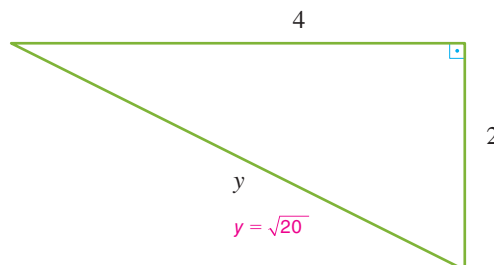
$$r^2 = s^2 + t^2$$



3. Calcule x e y nos triângulos a seguir.



$$x = \sqrt{10}$$



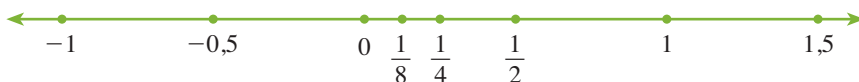
$$y = \sqrt{20}$$

6 Reta real

Já vimos como representar números inteiros em uma reta.



Da mesma forma, também vimos como representar números racionais em uma reta. Na reta abaixo, representamos alguns números racionais.



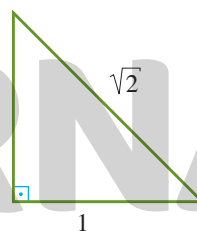
Como sabemos, é impossível representar todos eles, pois, entre dois números racionais, existe uma infinidade de outros números racionais. Mesmo que isso fosse possível, os pontos que representariam esses números não seriam suficientes para cobrir toda a reta numérica. Faltariam, ainda, os pontos correspondentes aos números irracionais para completá-la.

A representação de todos os números racionais e irracionais, isto é, dos números reais, preenche completamente a reta numérica. A essa reta chamamos de **reta real**.

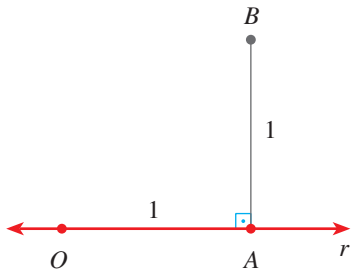
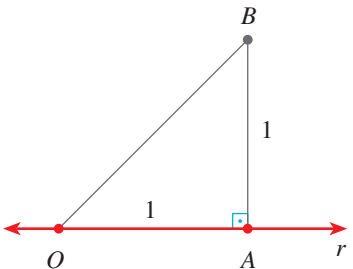
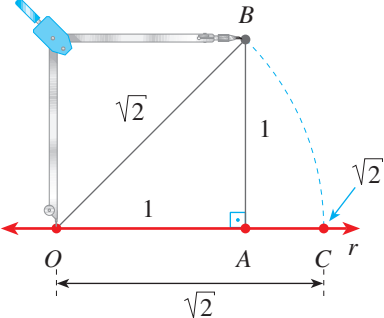
Acompanhe o exemplo a seguir.

Vamos representar na reta real o número irracional $\sqrt{2}$.

Já vimos que o número $\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1 unidade. Então, para localizar $\sqrt{2}$ na reta numérica, basta construir um triângulo retângulo isósceles, de modo que um de seus catetos seja o segmento que representa a unidade de 0 a 1.

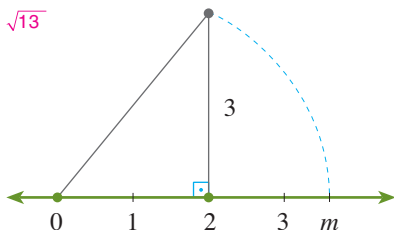


Veja como isso é feito com régua e compasso.

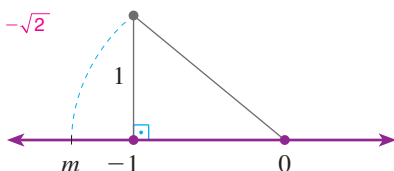
		
Por A, traçamos $\overline{BA} \perp r$, tal que $BA = 1$.	Unimos O com B. Assim, $OB = \sqrt{2}$.	Com centro em O e abertura OB, marcamos o ponto C.

39 Escreva o número irracional que está representado em cada reta pela letra m .

a) $\sqrt{13}$



b) $-\sqrt{2}$



40 Construa, com auxílio de régua e compasso, um triângulo retângulo com um cateto de 2 unidades de comprimento sobre uma reta numérica e outro cateto de 1 unidade de comprimento. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo e localize na reta numérica o número que expressa a medida da hipotenusa desse triângulo. $\sqrt{5}$

41 Represente na reta real os números:

construção de figura

- a) 3;
- b) 4;
- c) $\sqrt{8}$;
- d) $\sqrt{10}$;
- e) $\sqrt{17}$;
- f) $-\sqrt{5}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO



Construindo e interpretando gráfico de linha

Observe a tabela abaixo que mostra a variação do PIB (Produto Interno Bruto) brasileiro, em porcentagem, de 1989 a 2013.

Variação do PIB brasileiro (em %)													
Ano	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
PIB	3,2	-4,3	1,03	-0,54	4,92	5,85	4,22	2,20	3,40	0,0	0,30	4,30	1,30

Variação do PIB brasileiro (em %)												
Ano	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
PIB	2,7	1,1	5,7	3,2	4,0	6,1	5,2	-0,3	7,50	2,7	1,0	2,3

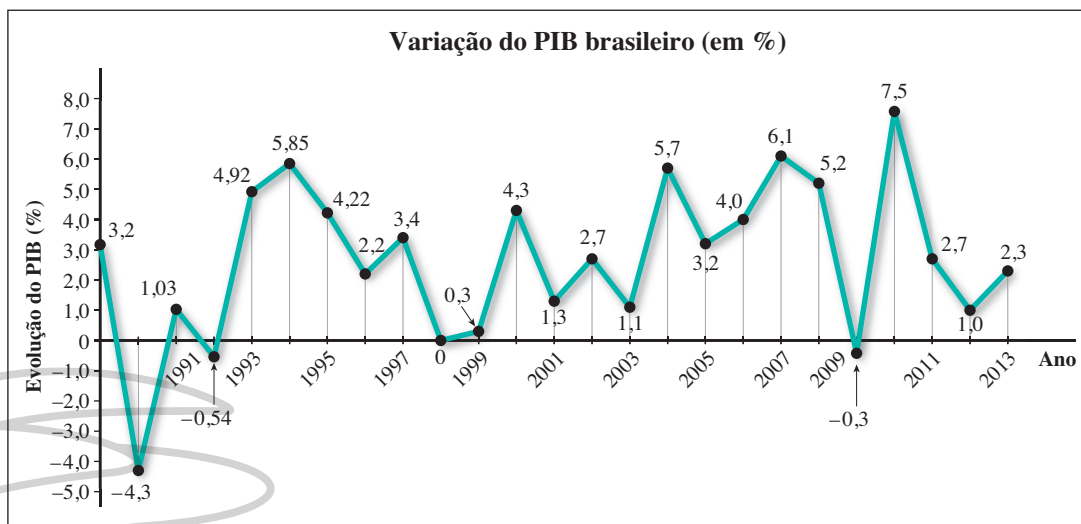
Dados obtidos em: <www.brasil.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2015.

O gráfico que melhor comunica a variação de valores no decorrer do tempo é o gráfico de linha. No livro do 7º ano, vimos a construção de um gráfico de linha com base em um gráfico de colunas. Lá construímos, usando os valores da tabela, um gráfico de colunas. Nesse gráfico, antes de apagarmos as colunas, marcamos o ponto médio do lado superior do retângulo de cada coluna e traçamos uma linha de segmentos consecutivos cujas extremidades são esses pontos assinalados. Porém, podemos construir o gráfico

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

de linhas sem passar pelo de colunas; basta traçarmos os eixos vertical e horizontal com as escalas respectivas e localizarmos os pontos dados pelas coordenadas (ano, PIB), por exemplo, (1989; 3,2), (1990; -4,3) etc. É como se reduzíssemos as colunas a linhas verticais tracejadas e destacássemos o “ponto de cima”. Nesse gráfico de linha, os únicos pontos confiáveis são os das extremidades dos segmentos; os outros só compõem o segmento que indica se, naquele intervalo de tempo, há acréscimo ou decréscimo do PIB.

Observe.



Dados obtidos em: <www.brasil.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2015.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Considerando o gráfico acima, responda.

- Em qual ano o índice percentual foi maior? Em que ano foi menor? **2010; 1990**
- Há algum ano em que o PIB não cresceu nem diminuiu? Qual? **sim, 1998**
- Em um papel vegetal, usando as mesmas unidades, reconstrua o gráfico, considerando apenas os pontos de ano par. Depois, sobreponha-o ao gráfico acima e escreva que diferenças observa entre eles. **construção de gráfico**

PARA SABER MAIS



A Matemática na História

O conceito de número real passou por transformações significativas até chegar à forma como o conhecemos hoje. Em um sentido mais prático, pode-se dizer que a ideia de medida implica noção de número real.

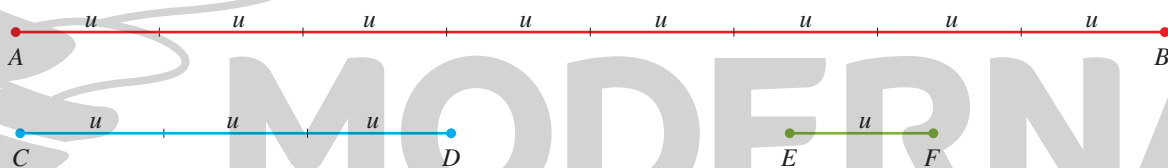
Para tentar compreender a motivação que desencadearia a noção de número real, precisamos pensar quando surgiu a necessidade da ideia de números irracionais (números que não podem ser expressos na forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$). Essa ideia teve origem, provavelmente, em contextos geométricos na Grécia antiga. Para os pitagóricos, o conceito de número era o que para nós são os números naturais, e as razões eram, então, somente estabelecidas entre números naturais.

Não se tem certeza a respeito da descoberta de razões irracionais, mas é certo que, para os gregos clássicos, foi muito difícil aceitá-las.

O filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) provou, no século IV a.C., que a diagonal do quadrado com seu lado estabelece uma razão irracional, ou seja, um número irracional. Essa é a prova mais antiga que se conhece para a característica irracional da diagonal do quadrado em relação ao seu lado. Ela envolve, teoricamente, números irracionais e, portanto, amplia a ideia original grega de número.

Do ponto de vista geométrico, dois segmentos estabelecerão uma razão, representada por um número racional, se for possível encontrar um pequeno segmento que meça ambos os segmentos dados, ou seja, que caiba um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos dados originalmente.

Por exemplo, considere os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} abaixo.



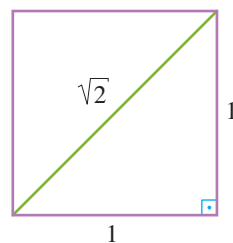
Note que o segmento \overline{EF} cabe 8 vezes no segmento \overline{AB} e 3 vezes no segmento \overline{CD} , o que implica que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} estabeleçam uma razão de 8 para 3, ou, em termos numéricos, o número racional $\frac{8}{3}$.

Inicialmente, os gregos não concebiam a existência de segmentos para os quais tal medida não existisse, o que resultaria numericamente em números irracionais, como no quadrado ao lado, em que a razão entre a diagonal e seu lado é $\sqrt{2}$.

Essas razões irracionais foram descobertas provavelmente por algum pitagórico, entre 500 a.C. e 375 a.C. Pois uma vez que na escola pitagórica os números naturais e suas razões formavam a essência de todas as coisas, uma descoberta dessa natureza deve ter gerado uma grande crise.

Tudo isso constituiu um importante passo na formação do número real.

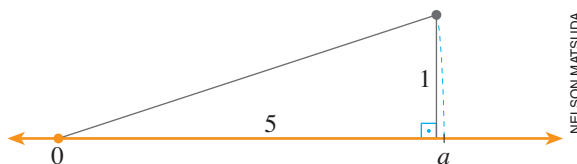
Essas razões irracionais refletiram-se posteriormente no que viriam a ser os números irracionais, ampliando o conceito de número na Grécia e contribuindo para a construção da ideia de número real, que foi sendo gradualmente esclarecida.



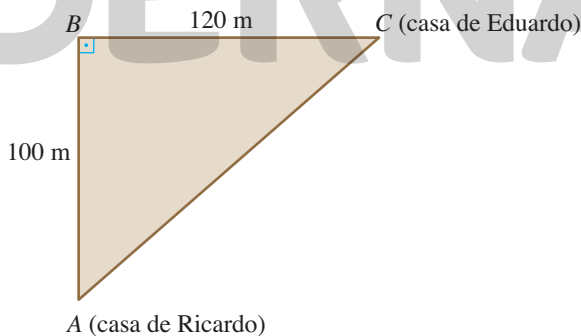
1. b) Falsa, $\frac{1}{2}$ não é número inteiro.

- Identifique as sentenças falsas e dê um exemplo para justificá-las.
 - Todo número inteiro é natural. *Falsa, -1 não é natural.*
 - Todo número racional é inteiro.
 - Todo número racional é real.
 - Todo número irracional é real.
- Considere $A = \frac{2}{3} - 1,4$ e $B = 0,7 - 0,777\dots$. Determine $A : B$. *10*
- Dadas as dízimas periódicas $2,555\dots$ e $0,222\dots$, determine:
 - a soma delas, escrevendo o resultado na forma abreviada; *2,7*
 - o produto delas, escrevendo o resultado na forma de fração. *$\frac{46}{81}$*
- Justifique por que $\sqrt{4,84} = 2,2$. *$(2,2)^2 = 4,84$*
- Se $x = 2^3 \cdot 5^2$, calcule a raiz quadrada de x . *80*
- Qual é o menor número pelo qual devemos multiplicar $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$ para obter um número natural que seja quadrado perfeito? *70*
- Se $A = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ e $B = 3 \cdot 5 \cdot 7$, calcule a raiz quadrada de $A \cdot B$. *315*
- Um terreno tem a forma de um quadrado, e sua área é igual a $231,04 \text{ m}^2$. Calcule o perímetro desse terreno. *60,8 m*
- (PUC-RJ) O valor de $\sqrt{2,777\dots}$ é: *alternativa b*
 - 1,2.
 - 1,666...
 - 1,5.
 - um número entre $\frac{1}{2}$ e 1.
 - 3,49.
- (PUC-RJ) O valor de $\frac{\sqrt{1,777\dots}}{\sqrt{0,111\dots}}$ é: *alternativa b*
 - 4,444...
 - 4.
 - 4,777...
 - 3.
 - $\frac{4}{3}$.
- Os catetos de um triângulo retângulo medem 12 cm e 5 cm.
 - Calcule a medida da hipotenusa. *13 cm*
 - Essa medida é um número racional ou irracional? *racional*

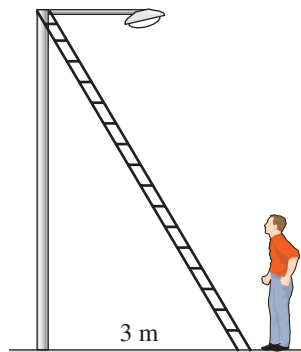
- Os catetos de um triângulo retângulo medem 6 cm e 2 cm.
 - Calcule a medida da hipotenusa. *$\sqrt{40}$ cm*
 - Essa medida é um número racional ou irracional? *irracional*
 - Determine a medida da hipotenusa com uma casa decimal. *6,3 cm*
- Qual número irracional está representado na reta pela letra a ? *$\sqrt{26}$*



- Represente na reta real os números $\sqrt{29}$ e $-\sqrt{5}$. *construção de figura*
- Ricardo faz uma visita a seu neto Eduardo todos os dias. Ele pode ir de duas maneiras diferentes ($A \rightarrow B \rightarrow C$ ou $A \rightarrow C$). Quantos metros ele anda quando escolhe o caminho mais curto? E quando escolhe o mais longo? *156,2 m; 220 m*



- Para saber a altura de um poste, Alexandre encostou nele uma escada de 15 m de comprimento, de modo que ela ficou apoiada no chão a 3 m do poste. Qual a altura aproximada do poste? *14,6 m*



Jogo do enfileirando

Número de participantes: 2 a 4 jogadores

Material:

- Vinte cartões numerados que possam ser confeccionados pelos alunos, com os números: 0, 2, 6, 7, 9, -8, -7, -4, -3, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$
- Quatro cartas de ação: uma de “ordem crescente”; uma de “ordem decrescente”; uma de “adição dos números”; e uma de “multiplicação dos números”.
- Dois saquinhos não transparentes: um para guardar os cartões numerados e outro para guardar as cartas de ação.
- Papel e lápis para resolver as operações.

Regras:

- Sem olhar os números, cada jogador pega, de dentro do saquinho, cinco cartões numerados.
- Depois, um dos jogadores tira uma carta de ação e coloca-a em cima da mesa para que todos a vejam e façam o que ela indica. Por exemplo, se sair a carta “ordem crescente”, cada jogador deverá colocar, em ordem crescente, os cartões que pegou.

Suponha que um dos jogadores tenha os números 2, -3, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ e 9; ele deverá colocar os cartões nesta disposição: $-3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2$ e 9. Então, anota-se o nome de quem terminou a tarefa em primeiro lugar e retira-se outra carta.

- Para os cálculos com $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, os jogadores devem usar os valores aproximados 1,4 e 1,7, respectivamente. Exemplo: $2 + (-3) + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + 9 = 9,9$
- Vence o jogo aquele que ganhar o maior número de rodadas, isto é, aquele que concluir as tarefas antes dos outros colegas mais vezes. Caso nenhum jogador consiga executar as tarefas, reinicia-se o jogo.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Observe a ilustração ao lado e responda à questão. Quem ganhou esta rodada? Justifique.

A menina, pois colocou os cinco números na ordem certa, como pedia a carta de ação.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

- 2 Formem grupos de 3 ou 4 pessoas, modifiquem uma regra do jogo e troquem com outro grupo. Depois de jogarem com a nova regra, escolham um representante para explicar a regra nova do outro grupo. Peça aos alunos que escrevam a nova regra de forma clara e objetiva para que os colegas consigam entendê-la, pois ele terá de explicá-la para os outros no final da atividade.

1 Incógnita e variável

Ao prescrever determinados remédios, é comum que os pediatras recorram à Matemática, principalmente à Álgebra.

Para calcular a dose que devem administrar a uma criança, a partir da dose indicada a adultos, os pediatras aplicam a chamada fórmula de Young:

$$\text{dose infantil} = \frac{\text{idade da criança (em ano)} \cdot \text{dose para adulto}}{\text{idade da criança (em ano)} + 12 \text{ anos}}$$



Pediatra atendendo uma paciente.

Por exemplo, para uma criança de 8 anos de idade, um médico calcula a dose infantil (x) de um medicamento, cuja dose para adultos é 250 miligramas, resolvendo a equação:

$$x = \frac{8 \cdot 250}{8 + 12}$$

No estudo das equações, representamos o termo desconhecido por uma letra chamada de **incógnita**.

Na equação $x = \frac{8 \cdot 250}{8 + 12}$, a incógnita é a letra x ; efetuando os cálculos, obtemos seu valor, que é 100. Isso significa que a dose de medicamento a ser administrada à criança é 100 miligramas.

Acompanhe agora outra situação.

EDUARDO BARCELLOS/SAMBAPHOTO



Márcia e seus filhos foram a um pesque e pague, onde se cobram R\$ 4,00 de entrada e R\$ 6,00 por quilograma de peixe pescado. Dessa forma, se Márcia pescar:

- 1 kg, deverá pagar, em real: $4,00 + 6,00 = 10,00$
- 1,5 kg, deverá pagar, em real: $4,00 + 6,00 \cdot 1,50 = 4,00 + 9,00 = 13,00$
- 2 kg, deverá pagar, em real: $4,00 + 6,00 \cdot 2 = 4,00 + 12,00 = 16,00$, e assim por diante.

Não sabemos quanto Márcia vai pescar, mas podemos determinar o valor que ela deve pagar por n quilogramas de peixe pescado: $4,00 + 6,00 \cdot n$

Nesse caso, a letra n pode assumir o valor 3, ou 3,2, ou 12,5, ou qualquer outro valor real não negativo. Por isso, ela é chamada de **variável**.

O uso de letras para representar números reais faz parte de um ramo da Matemática que trabalha com incógnitas e variáveis, a Álgebra. Nesse campo, estudamos generalizações de conceitos e de operações da aritmética.

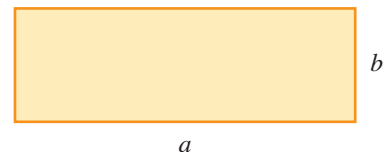
2 Expressões algébricas

Neste capítulo, vamos ampliar nosso estudo a respeito de expressões algébricas.

Expressão algébrica é aquela que tem apenas letras, ou números e letras.

Veja os exemplos a seguir.

- a) A expressão algébrica que representa a área do retângulo ao lado é **ab** .
- b) A expressão algébrica que representa o perímetro desse retângulo é **$2a + 2b$** .



O uso de letras para representar números facilita a tradução de sentenças escritas em linguagem comum para a linguagem matemática.

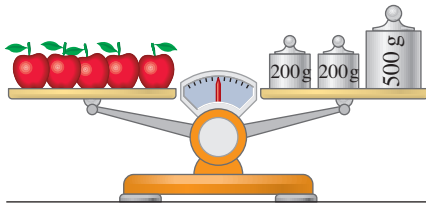
Veja alguns exemplos.

- a) O oposto do dobro de um número x somado a um número $y \rightarrow -2x + y$
- b) A diferença entre a terça parte de um número x e o oposto de 5 $\rightarrow \frac{x}{3} - (-5)$
- c) O inverso do dobro de um número x não nulo $\rightarrow \frac{1}{2x}$
- d) O dobro do inverso de um número x não nulo $\rightarrow 2 \cdot \frac{1}{x}$ ou $\frac{2}{x}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Orlando, dono de uma quitanda, colocou 5 maçãs em um dos pratos de uma balança e equilibrou-a colocando no outro prato um peso de 500 g e dois pesos de 200 g.



Indicando a massa média de cada maçã por x , represente essa situação por meio de uma equação.

$$5x = 900$$

- 2 Represente usando símbolos:

- $x - y$ a) a diferença entre o número x e o número y ;
 b) a soma do número m com o triplo do número n ; $m + 3n$
 c) o quociente do número a pelo número b (com $b \neq 0$); $\frac{a}{b}$

- d) a soma dos quadrados dos números r e s ; $r^2 + s^2$
 e) a diferença entre os quadrados dos números c e d ; $c^2 - d^2$
 f) o quadrado da diferença dos números c e d ;
 g) o cubo do número y . y^3 $(c - d)^2$

- 3 Em uma divisão com números naturais, o divisor é x , o quociente é y , e o resto é o maior possível. Qual é a expressão do dividendo?

$$xy + x - 1$$

- 4 O número 574, decomposto em centenas, dezenas e unidades, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$$

Agora, considere um número qualquer de quatro algarismos (a b c d).

- a) Determine a ordem de cada algarismo desse número.
 b) Decomponha o número a b c d de acordo com a ordem de seus algarismos.

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

Valor numérico de uma expressão algébrica

Vamos recordar o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica. Para isso, considere a situação a seguir.

Em uma loja de brinquedos, encontram-se x patinetes e y skates. A expressão que representa o número total de rodas é $2x + 4y$.

Se houver 12 patinetes e 15 skates, o número total de rodas será:

$$2 \cdot (12) + 4 \cdot (15) = 24 + 60 = 84$$

Então, dizemos que o valor numérico da expressão algébrica $2x + 4y$ para $x = 12$ e $y = 15$ é igual a 84.

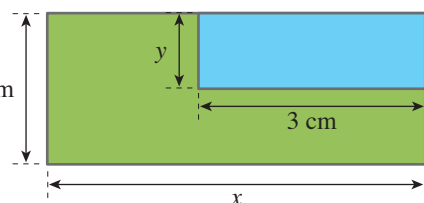
Acompanhe outros exemplos.

- a) Vamos calcular a área da região pintada de verde da figura abaixo, considerando $x = 5$ cm e $y = 1$ cm.

Para calcular a área pedida, basta encontrar o valor numérico da expressão $2x - 3y$ para $x = 5$ e $y = 1$.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= \\ &= 2 \cdot (5) - 3 \cdot (1) = \leftarrow \text{Substituímos } x \text{ por } 5 \text{ e } y \text{ por } 1. \\ &= 10 - 3 = 7 \leftarrow \text{Efetuamos as operações indicadas.} \end{aligned}$$

Então, dizemos que 7, que é o valor numérico da expressão algébrica $2x - 3y$ para $x = 5$ e $y = 1$, é a área da região da figura pintada de verde, em centímetro quadrado.



b) Vamos calcular o valor numérico da expressão $a^2 - b^2$ para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{2}{3}$.

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{9} = \frac{9 - 16}{36} = -\frac{7}{36}$$

Portanto, o valor numérico da expressão algébrica $a^2 - b^2$ para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{2}{3}$ é $-\frac{7}{36}$.

c) Vamos calcular o valor numérico da expressão $\frac{3x^2 - 5x}{x + 3}$ para $x = 4$.

$$\frac{3x^2 - 5x}{x + 3} = \frac{3 \cdot (4)^2 - 5 \cdot (4)}{4 + 3} = \frac{3 \cdot 16 - 20}{7} = \frac{48 - 20}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Portanto, o valor numérico da expressão algébrica $\frac{3x^2 - 5x}{x + 3}$ para $x = 4$ é 4.

Uma expressão que apresenta letra no denominador, não tem valor numérico real quando os valores atribuídos às variáveis anulam o denominador.

Observe um exemplo.

Considerando que 300 alunos são distribuídos em grupos e sabendo que há x alunos em cada grupo, o número de grupos formados é dado por $\frac{300}{x}$. Se cada grupo tiver dois alunos a menos, então o número de grupos será representado por $\frac{300}{x - 2}$.

Nessa situação, x representa um número natural não nulo no primeiro caso (não há grupo com zero aluno) e, no segundo, x representa um número natural maior que 2. Portanto, temos:

- ▶ para $x = 0$, a expressão $\frac{300}{x}$ não tem valor numérico;
- ▶ para $x = 2$, a expressão $\frac{300}{x - 2}$ não tem valor numérico.

Note que obtemos o valor da variável para o qual a expressão não tem valor numérico igualando o denominador a zero e resolvendo a equação encontrada.

Veja outros exemplos.

a) Para que valor de x a expressão $\frac{3x - 1}{2x - 5}$ não tem valor numérico?

Essa expressão não tem valor numérico quando o denominador é igual a zero, ou seja, quando $2x - 5 = 0$.

Resolvendo essa equação, obtemos $x = \frac{5}{2}$.

Logo, a expressão $\frac{3x - 1}{2x - 5}$ não tem valor numérico para $x = \frac{5}{2}$.



b) Que relação deve existir entre x e y para que a expressão $\frac{3x + 2y}{x - 2y}$ não tenha valor numérico?

A expressão não terá valor numérico quando o denominador for igual a zero; nesse caso, quando $x - 2y = 0$. Assim, $x = 2y$.

Portanto, a relação procurada é $x = 2y$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

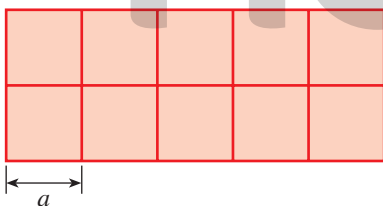
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

5 Aplique a fórmula de Young, descrita no início desse capítulo, para calcular a dose para uma criança de 6 anos de um remédio cuja dose indicada para adulto é:

- a) 150 miligramas; 50 miligramas
- b) 210 miligramas; 70 miligramas
- c) 300 miligramas. 100 miligramas

6 Com base nos resultados do exercício anterior, é possível concluir que a dose de um remédio para uma criança de 6 anos é a quarta parte da dose desse remédio indicada para adulto? Por quê? Não, pois é a terça parte.

7 Considere a figura a seguir. Ela é formada por quadrados idênticos.



Agora, faça o que se pede.

- a) Encontre a expressão que representa o perímetro dessa figura. $14a$
- b) Calcule o valor numérico da expressão do perímetro para $a = 3,6$. $50,4$
- c) Encontre a expressão que representa a área dessa figura. $10a^2$
- d) Determine o valor numérico da expressão da área para $a = 5$. 250

8 Calcule o valor numérico das expressões:

- a) $2a + 3b$, para $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{2}{3}$; 1
- b) $x^2 + 2x$, para $x = -5$; 15

c) $\frac{x + y}{x - y}$, para $x = 4$ e $y = 2$; 3

d) $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para $a = 2$, $b = -10$ e $c = 12$. 3

9 Se zero é o valor numérico da expressão $x^2 - y$, dê exemplos de valores inteiros que x e y podem assumir.

respostas possíveis: $x = y = 1$; $x = y = 0$; $x = -1$ e $y = 1$

10 Para que valores de a as expressões a seguir não têm valor numérico real?

a) $\frac{a - 4}{a + 5}$ $a = -5$ b) $\frac{a + 3b}{2a - 4}$ $a = 2$

11 Que relação deve existir entre a e b para que as expressões a seguir não tenham valor numérico real?

a) $\frac{a - 1}{a - b}$ $a = b$ b) $\frac{3x}{2a + 3b}$ $2a = -3b$

12 (PUC-SP) Resolver um criptograma numérico significa usar a estratégia “tentativa e erro” para determinar quais números satisfazem as condições de um dado problema. Considere o criptograma seguinte, em que cada letra representa apenas um único algarismo, não nulo.

$$(AR)^2 = BAR$$

Para os valores de A , R e B encontrados, é correto afirmar que o número BARRA está compreendido entre: alternativa d

- a) 45.000 e 50.000.
- b) 50.000 e 55.000.
- c) 55.000 e 60.000.
- d) 60.000 e 65.000.
- e) 65.000 e 70.000.

13 Em 1787, o cientista francês Jacques Charles observou que os gases se dilatam quando aquecidos e se contraem quando resfriados.

NELSON MATSUDA



Figura 1:
situação inicial



Figura 2: garrafa em
contato com gelo

A fórmula $V = \frac{5}{3} \cdot T + 455$ relaciona o volume V de certo gás (em centímetro cúbico) com sua temperatura T (em grau Celsius). Calcule o volume desse gás a 21 °C. **490 cm³**

14 José faz pequenos fretes urbanos com seu caminhão, cobrando uma taxa inicial de R\$ 50,00 e mais R\$ 6,00 por quilômetro rodado.

- Indicando por x o número de quilômetros rodados, qual é a expressão que representa o preço cobrado por José? **$50 + 6x$**
- Quanto ele cobra por um frete de 6 quilômetros? **R\$ 86,00**

GILLES LOUGASSI/SHUTTERSTOCK



15 Um relógio registra o consumo de energia elétrica de uma residência em quilowatt-hora (kWh). Nas lâmpadas e nos aparelhos elétricos, aparece indicada, entre outras coisas, a quantidade de energia elétrica consumida em cada unidade de tempo, chamada de potência e expressa em watt (W).

NELSON MATSUDA



$$1 \text{ kW} = 1.000 \text{ W}$$

Para calcular o consumo mensal de energia elétrica C (em kWh), pode-se aplicar a fórmula

em que C é o consumo de energia, p é a potência do aparelho, h é o tempo de uso por dia (em hora) e d é o número de dias de uso por mês:

$$C = \frac{p \cdot h \cdot d}{1.000}$$



EDUARDO SANTALIESTRA

Medidor de consumo de energia elétrica.

Aplicando essa fórmula, calcule o consumo de energia elétrica, relativo a 30 dias, de:

- uma lâmpada de 100 W que fica acesa 3 horas por dia; **9 kWh**
- um chuveiro de 4.000 W que é utilizado 1 hora por dia. **120 kWh**

16. Analise a conveniência de retomar esta atividade quando os alunos estudarem fatoração.

16 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Dada a expressão $\frac{3x^2 - 12}{(x + 2) \cdot (x - 2)}$:

- calculem o valor numérico para $x = 6$, $x = -4$, $x = \frac{2}{3}$ e $x = -\frac{3}{2}$; **3; 3; 3; 3**
- calculem os valores de x para os quais não existe o valor numérico da expressão; **$x = 2$ e $x = -2$**
- cada um escolhe um número para x , diferente da resposta do item **b**, para que o outro calcule o valor numérico da expressão e depois corrija o cálculo do outro;
- se forem escolhidos outros números para x , o valor numérico da expressão continua o mesmo? **sim**

16. c) O valor numérico deve ser 3 para ambos, sejam quais forem os números, diferentes de 2 e de -2, escolhidos.

17 Ainda reunido com o colega, retomem a situação dos patinetes e dos skates da página 63 e respondam à questão abaixo.

- É possível que o valor numérico da expressão algébrica que representa o número total de rodas seja um número ímpar? Por quê?
Não, pois x e y estão sendo multiplicados por números pares.

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e respondam às questões a seguir.



a) Com o auxílio de uma calculadora, calculem as expressões abaixo.

$$9 \cdot 1 + 2 \quad 11$$

$$9 \cdot 12 + 3 \quad 111$$

$$9 \cdot 123 + 4 \quad 1.111$$

$$9 \cdot 1.234 + 5 \quad 11.111$$

e) Embora os alunos tenham sido induzidos pelos itens anteriores a dar a resposta adequada ao item d, espera-se que eles percebam que existem infinitos pares de números x e y , tal que o valor numérico de $9x + y$ seja 11.111.111.

b) Agora, sem a calculadora, calculem a expressão a seguir, observando o padrão das expressões numéricas do item a: $9 \cdot 12.345 + 6$. 111.111

c) Calculem o valor numérico da expressão $9x + y$ para $x = 123.456$ e $y = 7$. 1.111.111

d) Escolham um número para x e outro para y para que se tenha $9x + y = 11.111.111$.

e) Os números escolhidos no item d são os únicos números possíveis? *Espera-se que os alunos escolham $x = 1.234.567$ e $y = 8$.*

Retome esta atividade quando os alunos estudarem equação do 1º grau com duas incógnitas e discuta com eles a importância do espírito crítico quanto aos procedimentos de indução.

3 Monômios

Considere as expressões algébricas: $-2a$, $\frac{x}{3}$, $3x^2$ e $-3y$

Observe que elas não apresentam operação de adição ou de subtração, assim como não têm letra em um radical nem no denominador. Nessas condições, as expressões algébricas são chamadas de **monômios**.

Em um monômio, distinguimos o **coeficiente** (parte numérica) e a **parte literal** (parte com letras).

Veja, no quadro abaixo, os coeficientes e as partes literais de alguns monômios.

Monômio	Coeficiente	Parte literal
$5x^3y^2$	5	x^3y^2
$-\frac{2}{7}ab^3m$	$-\frac{2}{7}$	ab^3m
$\sqrt{2}x$	$\sqrt{2}$	x
ab^5	1	ab^5

OBSERVAÇÕES

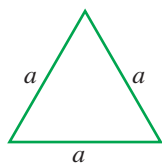
- Todo número real não nulo é um monômio sem parte literal.

Exemplos: 5; -10; $\frac{5}{6}$; 0,51; $\sqrt{3}$

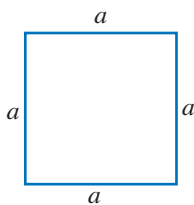
- O número real zero é chamado de **monômio nulo**.

Monômios semelhantes

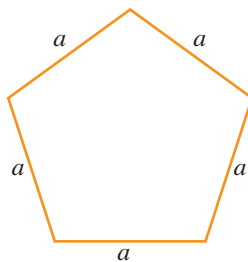
Considere os polígonos a seguir.



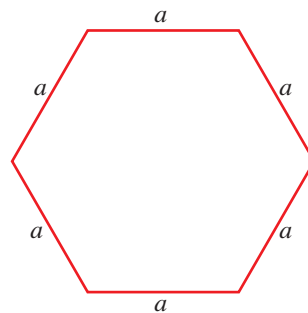
Triângulo



Quadrado



Pentágono



Hexágono

O perímetro desses polígonos pode ser indicado por monômios. Observe:

Polígono	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono
Perímetro	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$

Note que os monômios $3a$, $4a$, $5a$ e $6a$ têm a mesma parte literal (a).

Então, dizemos que eles são **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Termos semelhantes ou **monômios semelhantes** são aqueles que têm a mesma parte literal ou que não têm parte literal.

Veja outros exemplos.

- Os monômios $9a^2x$ e $-2a^2x$ têm a mesma parte literal (a^2x). Portanto, são termos semelhantes.
- Os monômios $-\frac{1}{4}y$, $0,5y$ e $-3y$ têm a mesma parte literal (y). Logo, são termos semelhantes.
- Os monômios $12a^2c$ e $12ac^2$ não têm a mesma parte literal ($a^2c \neq ac^2$). Portanto, não são termos semelhantes.
- 3 e $\sqrt{2}$ são dois números reais não nulos e, portanto, são monômios semelhantes, apesar de não terem parte literal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

18 Explique por que as expressões a seguir não são monômios.

a) Porque envolve a operação de adição.

a) $2x + 5$ b) $2\frac{a}{b}$ c) $4\sqrt{5x}$

b) Porque tem letra no denominador. c) Porque tem letra no radicando.

19 Dê o coeficiente de cada monômio abaixo.

a) $-2xy$ -2 c) x 1 e) $\frac{xy^2}{5}$ $\frac{1}{5}$

b) $\frac{3}{5}a$ $\frac{3}{5}$ d) $-y$ -1 f) $-\frac{a}{3}$ $-\frac{1}{3}$

20 João coleciona selos. Indicando por x a quantidade de selos de João, represente com um monômio a quantidade de selos de cada colecionador a seguir.

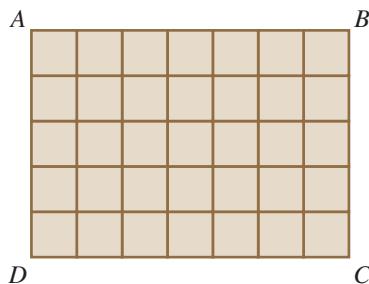
a) Vítor possui a metade da quantidade de selos de João. $\frac{x}{2}$

b) Ricardo tem o dobro da quantidade de selos de João. $2x$

c) Gabriel possui $\frac{2}{3}$ da quantidade de selos de João. $\frac{2}{3}x$

21 Um pintor cobra R\$ 15,00 por metro quadrado de parede pintada. Francisco quer calcular quanto vai gastar para pintar as paredes da casa dele. Para isso, decidiu usar um monômio e indicou a área das paredes por y (em metro quadrado). Que monômio Francisco usou para fazer esse registro? $15y$

22 Observe a figura.



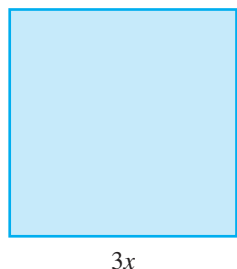
Indicando por x a medida do lado de cada quadradinho que forma essa figura, determine:

- a) o monômio que representa o perímetro do retângulo $ABCD$; $24x$
- b) o valor numérico desse perímetro para $x = 1,2$; $28,8$
- c) o monômio que representa a área desse retângulo; $35x^2$
- d) o valor numérico dessa área para $x = 4,5$. $708,75$

23 Entre as alternativas a seguir, quais apresentam monômios semelhantes? *alternativas a, b, c, f, h*

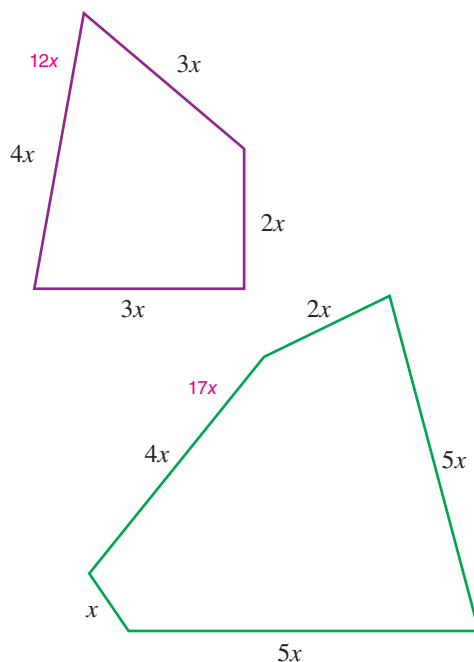
- a) $4x$ e $-7x$
- b) $5ab$, $3ab$ e $2ab$
- c) $\frac{a}{3}$ e $5a$
- d) $2a$ e $2b$
- e) $8a^2$ e $-5a$
- f) -6 , -2 e $10,4$
- g) $7x^2y$ e $9xy^2$
- h) $12xy$ e $-21xy$

24 Considere o quadrado abaixo e sua região interna.



- a) Escreva um monômio que represente o perímetro e outro que represente a área desse quadrado. *perímetro: $12x$; área: $9x^2$*
- b) Esses monômios são semelhantes? Justifique sua resposta.
Não, pois eles não têm a mesma parte literal.

25 Observe os polígonos abaixo.



Determine a expressão que representa o perímetro de cada polígono. Essas expressões são monômios? Em caso afirmativo, são semelhantes? *sim; sim*

26 Determine o monômio que representa o perímetro da figura 1, a área da figura 2 e a área da figura 3.

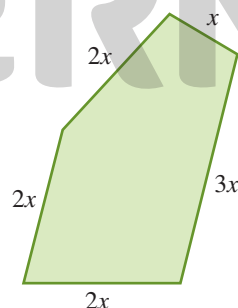


Figura 1 $10x$

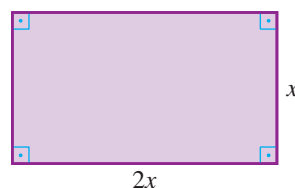


Figura 2 $2x^2$

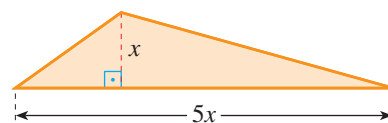


Figura 3 $\frac{5}{2}x^2$

Quais desses monômios são semelhantes?

$2x^2$ e $\frac{5}{2}x^2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

4 Operações com monômios

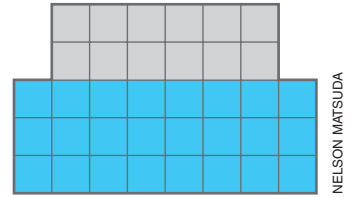
Ao trabalhar com números, você aprendeu a efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Agora, vamos realizar essas mesmas operações com expressões algébricas. Chamamos esse estudo de **cálculo algébrico**.

Adição algébrica de monômios

Considere a figura abaixo, em que a área de cada quadradinho é x^2 . A área da parte azul é $24x^2$ e a da cinza, $12x^2$.

A área da figura é obtida pela contagem de todos os quadradinhos ou pela soma das áreas das duas partes, isto é, pela adição dos monômios $24x^2$ e $12x^2$. Veja:

$$24x^2 + 12x^2 = 36x^2$$



NELSON MATSUDA

Assim, a área total da figura é $36x^2$.

Uma expressão em que aparecem apenas adições e subtrações de monômios é chamada de **adição algébrica de monômios**.

Veja alguns exemplos.

$$\text{a) } (-5ab) + (-2ab) - (-3ab) = -5ab - 2ab + 3ab = -4ab$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(-\frac{3}{4}x^3y\right) - \left(\frac{1}{3}x^3y\right) - \left(-\frac{3}{2}x^3y\right) &= -\frac{3}{4}x^3y - \frac{1}{3}x^3y + \frac{3}{2}x^3y = \\ &= \frac{-9x^3y - 4x^3y + 18x^3y}{12} = \frac{5x^3y}{12} \end{aligned}$$

Na prática, a **adição algébrica** de monômios semelhantes é obtida somando-se algebricamente os coeficientes e conservando-se a parte literal.

Esse processo de cálculo também é chamado de **redução dos monômios (ou termos) semelhantes**.

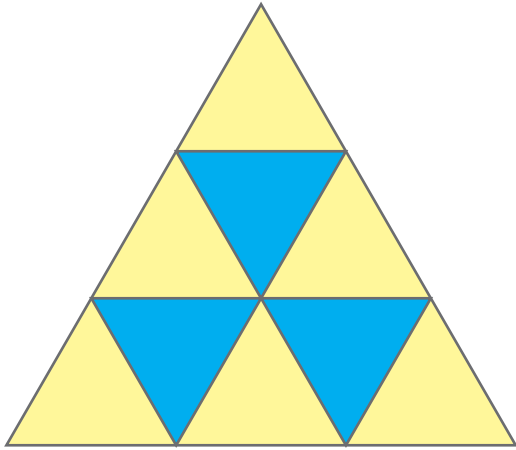
Veja alguns exemplos em que ocorre redução de monômios semelhantes.

$$\begin{aligned} \text{a) } -2x^2y + 3x^2y - 5x^2y &= -4x^2y \\ (-2 + 3 - 5 = -4) & \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{5}{2}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + \frac{1}{4}ab^2 = \frac{25}{12}ab^2$$

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{30 - 8 + 3}{12} = \frac{25}{12}\right)$$

- 27 O triângulo a seguir foi montado com 9 triângulos menores de mesmo tamanho.



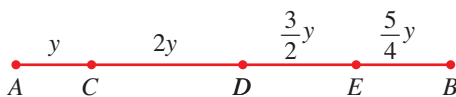
Sabendo que a área de cada triângulo menor é $0,43x^2$, faça o que se pede.

- a) Dê a soma das áreas dos triângulos amarelos. $2,58x^2$
 b) Dê a soma das áreas dos triângulos azuis. $1,29x^2$
 c) Dê a área total do triângulo maior. $3,87x^2$

- 28 Efetue:

- a) $(-10x) + (+6x)$ $-4x$
 b) $(0,8x^2y) + (-3,5x^2y)$ $-2,7x^2y$
 c) $(-\frac{2}{5}ab) + (-\frac{3}{10}ab)$ $-\frac{7}{10}ab$
 d) $(-9ay) - (-3ay)$ $-6ay$
 e) $(0,2a^3) - (-0,5a^3)$ $\frac{7}{9}a^3$

- 29 Determine o monômio que representa a medida do segmento \overline{AB} . $\frac{23}{4}y$



- 30 Uma empresa de *software* lançou um novo programa no mercado. No primeiro mês, ela vendeu determinada quantidade desse novo programa. No segundo mês, foi vendido o dobro do que se vendeu no primeiro mês. No terceiro mês, foi vendido o triplo do que se vendeu no segundo mês. Represente a quantidade de unidades vendidas nos três primeiros meses. $9x$

- 31 Represente a medida do segmento \overline{MP} , sabendo que a medida do segmento \overline{MN} é $6,5x$. $4,2x$



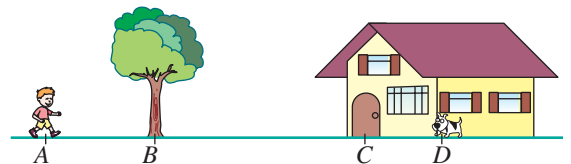
- 32 Reduza os monômios semelhantes.

- a) $-4xy + 6xy - 5xy$ $-3xy$
 b) $5a^3 + 7a^3 - 9a^3 + 3a^3$ $6a^3$
 c) $-3x - 5x + 2x - x + 4x$ $-3x$
 d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{6}x^2$ x^2
 e) $m^3n^2 + \frac{4}{5}m^3n^2 - \frac{5}{3}m^3n^2 - \frac{1}{9}m^3n^2$ $-\frac{44}{45}m^3n^2$

- 33 Durante um campeonato de futebol promovido em uma escola, o time do 8º ano ganhou x partidas, perdeu $(x - 2)$ partidas e empatou $\frac{x}{2}$ partidas.

- a) Determine a expressão algébrica que representa o número de partidas que esse time jogou. Essa expressão é um monômio? Por quê? $\frac{5x-4}{2}$; não, porque envolve uma subtração.
 b) Sabendo que para cada vitória o time ganha 3 pontos, para cada empate ganha 1 ponto e nas derrotas não ganha nem perde pontos, qual é o total de pontos obtidos por esse time? O total de pontos é representado por um monômio? $\frac{7x}{2}$; sim

- 34 Observe a ilustração abaixo.



Indicando a distância do menino até a árvore por y , represente por um monômio:

- a) a distância entre a árvore e a porta da casa, sabendo que essa distância é o dobro da distância do menino até a árvore; $2y$
 b) a distância entre a porta da casa e o cachorro, sabendo que essa distância é $\frac{2}{3}$ da distância do menino até a árvore; $\frac{2}{3}y$
 c) a distância do menino até o cachorro. $\frac{11}{3}y$

► Multiplicação e divisão de monômios

Vamos recordar as multiplicações de potências de bases iguais observando dois exemplos.

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

b) $a \cdot a^2 \cdot a^4 = a^{1+2+4} = a^7$

Agora, com base nesses exemplos, observe o cálculo dos produtos a seguir.

a) $(3a^2) \cdot (5ab) =$

$= (3 \cdot 5) \cdot (a^2 \cdot ab) =$ ← Aplicamos as propriedades comutativa e associativa da multiplicação.

$= 15 \cdot a^{2+1} \cdot b = 15a^3b$ ← Efetuamos as operações.

b) $(+4xy^2) \cdot (-9a^3x^2y) = 4 \cdot (-9) \cdot (x \cdot y^2 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot y) = -36a^3x^3y^3$

Na prática, o **produto** de dois monômios é obtido da seguinte forma:

- primeiro, multiplicam-se os coeficientes;
- em seguida, multiplicam-se as partes literais.

Veja outros exemplos.

a) $(5a^2b) \cdot (-3a) = -15a^3b$

b) $(-4xy^2) \cdot (-0,2yz) = +0,8xy^3z$

Vamos recordar as divisões de potências de bases iguais, observando estes dois exemplos.

a) $2^7 : 2^2 = 2^{7-2} = 2^5$

b) $a^4 : a = a^{4-1} = a^3$, com $a \neq 0$.

Agora, com base nesses exemplos, observe o cálculo dos quocientes a seguir, considerando o monômio divisor diferente de zero.

a) $(+12a^4b^3) : (-2ab^2) = -6a^3b$

$(+12) : (-2) = -6$

$a^4 : a = a^{4-1} = a^3$

$b^3 : b^2 = b^{3-2} = b^1 = b$

b) $(-3xy^4) : (+3xy) = -1y^3 = -y^3$

$(-3) : (+3) = -1$

$x : x = x^{1-1} = x^0 = 1$

$y^4 : y = y^{4-1} = y^3$

Na prática, o **quociente** de dois monômios é obtido da seguinte forma:

- primeiro, dividem-se os coeficientes;
- em seguida, dividem-se as partes literais.

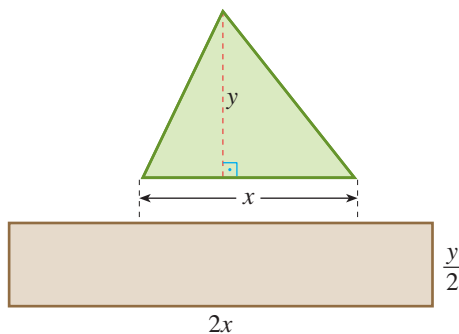
Veja outros exemplos.

a) $\left(-\frac{2}{3}x^4y^3\right) : \left(\frac{4}{5}xy^2\right) = \left(-\frac{2}{3} : \frac{4}{5}\right) \cdot (x^4 : x) \cdot (y^3 : y^2) = \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot x^3y = -\frac{5}{6}x^3y$

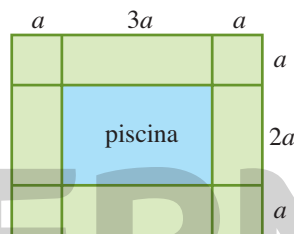
b) $(-2a^4x) : (-5a) = [(-2) : (-5)] \cdot (a^4 : a) \cdot x = \frac{2}{5}a^3x$

- 35** Calcule os produtos a seguir.
- $(4a^2x^3) \cdot (-5ax^2)$ $-20a^3x^5$
 - $(-6xy) \cdot (-3y)$ $18xy^2$
 - $(0,5x) \cdot (2,4x^2)$ $1,2x^3$
 - $\left(-\frac{7}{11}a\right) \cdot (+2ab) \cdot (-11a)$ $14a^3b$
 - $(-2ax) \cdot \left(\frac{3}{2}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)$ $\frac{3}{2}a^3x^3$
- 36** Calcule os quocientes a seguir, supondo que o monômio divisor seja diferente de zero.
- $(16x^5) : (-4x^2)$ $-4x^3$
 - $(36xy^4) : (-6xy)$ $-6y^3$
 - $(-35a) : (+7a)$ -5
 - $(+3ab^2) : \left(-\frac{10}{5}\right)$ $-\frac{3}{2}ab^2$
 - $\left(-\frac{4}{5}x^5y\right) : \left(+\frac{4}{3}x^2y\right)$ $-\frac{3}{5}x^3$
- 37** Multiplicando $(5ax^2 - 2ax^2 - 7ax^2)$ por $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right)$, obtenemos um monômio. Efetue a multiplicação e calcule o valor numérico desse monômio para $a = 2$ e $x = -2$. 48
- 38** O quociente de $\left(\frac{3}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^3y - \frac{1}{6}x^3y\right)$ por $\frac{3}{2}x$ é um monômio. Qual é seu valor numérico se $x = -3$ e $y = 6$? 45

- 39** Considere as figuras e faça o que se pede.



- Determine o monômio que representa a soma das áreas das duas figuras. $\frac{3}{2}xy$
 - Encontre o valor numérico desse monômio para $x = 0,5$ e $y = 1,2$. $0,9$
- 40** Marcelo separou uma parte retangular de um terreno para construir uma piscina e, em volta dela, um gramado.



- Determine a área destinada à piscina. $6a^2$
- Determine a área destinada ao gramado. $14a^2$
- Se $a = 3,2$ m, calcule a quantidade de metros quadrados de grama utilizada. $143,36 \text{ m}^2$

► Potenciação de monômios

Vamos recordar duas propriedades da potenciação:

• $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ • $(a^2 \cdot b)^3 = (a^2)^3 \cdot b^3 = a^6 \cdot b^3$

Agora, observe como se efetua o cálculo das potências a seguir.

a) $(-2a^3x)^2 = (-2)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot x^2 = 4a^6x^2$ b) $\left(-\frac{2}{3}m^2x\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (m^2)^3 \cdot x^3 = -\frac{8}{27}m^6x^3$

Na prática, a **potência** de um monômio é obtida da seguinte forma:

- eleva-se o coeficiente à potência indicada;
- em seguida, eleva-se a parte literal à potência indicada.

Veja outros exemplos.

a) $(-5a)^2 = 25a^2$

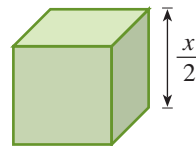
b) $\left(+\frac{3}{5}x^2y\right)^3 = \frac{27}{125}x^6y^3$

41 Calcule:

- a) $(+2x)^2 \cdot 4x^2$ d) $(-xy^2)^4 \cdot x^4y^8$
 b) $(-3a^2)^3 \cdot -27a^6$ e) $(-5x^4y)^1 \cdot -5x^4y$
 c) $(+2x^2y)^3 \cdot 8x^6y^3$ f) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

42 A medida do lado de um quadrado é dada por $\frac{5}{3}a$. Qual é a área desse quadrado? $\frac{25a^2}{9}$

43 Considere o cubo representado abaixo.



- a) Expresse o volume do cubo. $\frac{x^3}{8}$
 b) Qual é a área da superfície desse cubo? $\frac{3}{2}x^2$

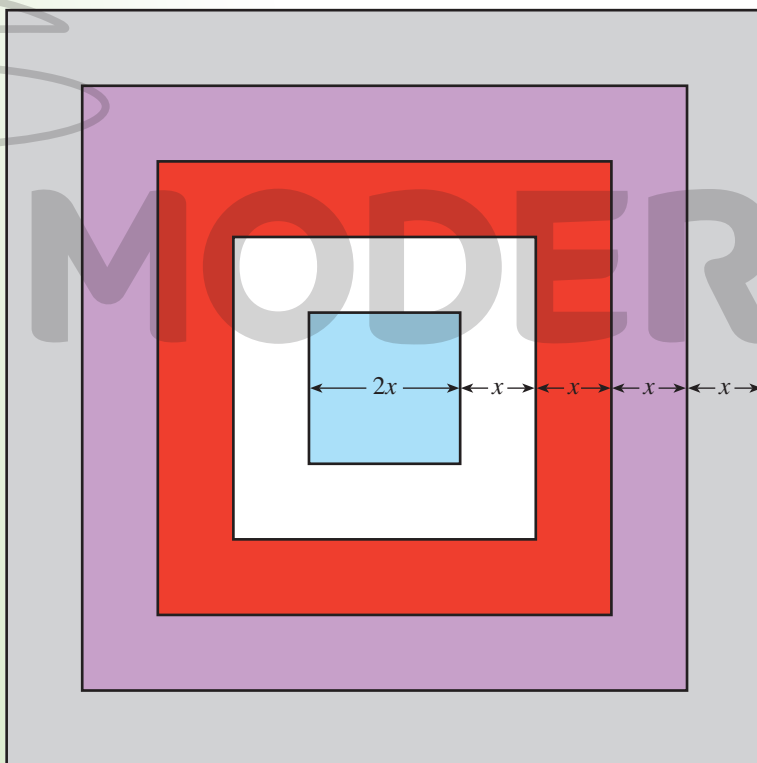
NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Sequências de molduras e de quadrados

Nesta composição de quadrados, o quadrado central foi contornado com uma moldura branca, formando um segundo quadrado. O novo quadrado foi contornado com uma moldura vermelha, chegando-se a um terceiro quadrado, e assim por diante, até se obter o quadrado com a moldura cinza.



- a) Forme, a partir da área do quadrado central, a sequência dos monômios que representam as áreas das molduras. moldura branca: $12x^2$; moldura vermelha: $20x^2$; moldura lilás: $28x^2$; moldura cinza: $36x^2$.
 b) Uma dessas molduras tem a mesma área de um dos quadrados construídos. Qual é o monômio que representa essa área? $36x^2$
 c) Qual é o valor numérico desse monômio para $x = 2,4 \text{ cm}$? $207,36 \text{ cm}^2$
 d) Considerando a sequência de resultados obtidos no item a, faça uma extrapolação e estime a área da próxima moldura a ser formada. $44x^2$

NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5 Polinômios

Considere estas figuras.

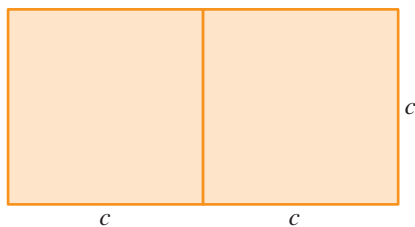


Figura 1

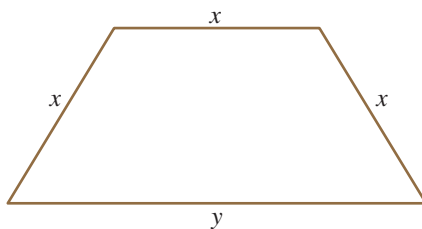


Figura 2

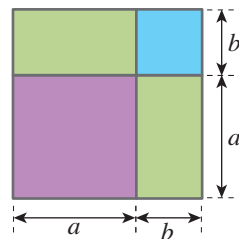


Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

A figura 1 é formada por dois quadrados, e cada quadrado tem lado de medida c e área igual a c^2 . A expressão que representa a área dessa figura é $2c^2$.

Na figura 2, temos um trapézio com um lado de medida y e três de medida x . A expressão que representa o perímetro dessa figura é $3x + y$.

A figura 3, por sua vez, é formada por:

- um quadrado roxo de lado a cuja área é a^2 ;
- dois retângulos verdes de área ab ;
- um quadrado azul de lado b cuja área é b^2 .

A expressão que representa a área dessa figura é $a^2 + 2ab + b^2$.

As expressões $2c^2$, $3x + y$ e $a^2 + 2ab + b^2$ são exemplos de **polinômios**.

Polinômio é toda expressão algébrica que representa um monômio ou uma soma algébrica de monômios.

OBSERVAÇÕES

- ▶ Os polinômios de um só termo são chamados **monômios**, os de dois termos, **binômios**, e os de três termos, **trinômios**. Os polinômios com mais de três termos não recebem denominação específica.
- ▶ O polinômio formado por monômios nulos é o **polinômio nulo**.
Exemplo: $0x^2 + 0mn + 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

44 Classifique como monômio, binômio ou trinômio as expressões algébricas a seguir.

a) $2x^2 - 3x$ binômio

c) x monômio

e) -5 monômio

g) $x^3 - y^3$ binômio

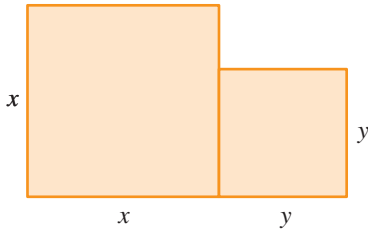
b) $5a^2 - 3a + 7$ trinômio

d) $7x - 5y$ binômio

f) $a^5 - 3$ binômio

h) $x^2 - 2xy + y^2$ trinômio

- 45** Determine o polinômio que corresponde à área da figura abaixo, formada por dois quadrados. Em seguida, calcule a área para $x = 4,5$ cm e $y = 2,5$ cm. $x^2 + y^2; 26,50 \text{ cm}^2$



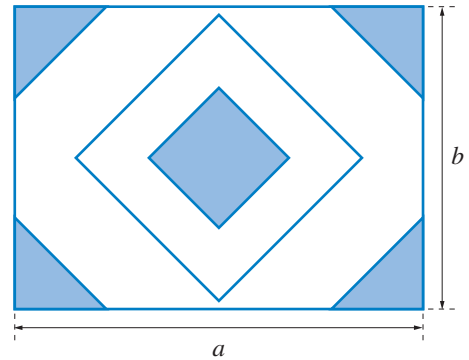
- 46** Cláudia é dona de uma papelaria. Ela compra um caderno por x reais e o revende por y reais.



- a) Qual é a expressão algébrica que representa o lucro de Cláudia por caderno vendido? E por z cadernos vendidos? $y - x; z(y - x)$
 b) Qual foi o lucro de Cláudia na venda de 24 cadernos, comprados por R\$ 3,20 e vendidos por R\$ 8,70? **R\$ 132,00**

- 47** Em um estacionamento estão x motos e y carros. Encontre o binômio que representa:
 a) o número de veículos; $x + y$
 b) o número de rodas; $2x + 4y$
 c) o valor arrecadado, sabendo que cada moto paga R\$ 12,00 pela diária e cada carro paga R\$ 18,00. $12x + 18y$

- 48** O piso da cozinha da casa de Ana é revestido por ladrilhos retangulares, como mostra a figura abaixo.

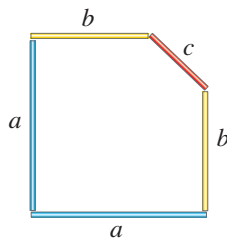


- a) Represente com um monômio a área de cada ladrilho. ab
 b) Represente com um monômio a área do piso da cozinha, sabendo que foram necessários 120 ladrilhos para forrá-lo. $120ab$
 c) Calcule a área, em metro quadrado, da cozinha de Ana, sabendo que cada ladrilho tem 15 cm por 20 cm. $3,6 \text{ m}^2$

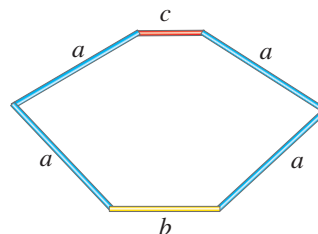
6 Operações com polinômios

Adição de polinômios

Com 6 canudinhos de medida a , 3 canudinhos de medida b e 2 canudinhos de medida c , representamos estes polígonos.



Polígono 1



Polígono 2

O perímetro do polígono 1 é representado pelo polinômio $2a + 2b + c$ e o do polígono 2 é representado pelo polinômio $4a + b + c$, ambos polinômios nas variáveis a , b e c .

Na construção dos dois polígonos, empregamos os 6 canudinhos de medida a , os 3 canudinhos de medida b e os 2 canudinhos de medida c , ou seja, construímos linhas cuja soma dos comprimentos é dada por:

$$6a + 3b + 2c$$

O polinômio $6a + 3b + 2c$ é a soma dos polinômios $2a + 2b + c$ e $4a + b + c$. Esse resultado poderia ter sido obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (2a + 2b + c) + (4a + b + c) &= \\ &= 2a + 2b + c + 4a + b + c = \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.} \\ &= 2a + 4a + 2b + b + c + c = \leftarrow \text{Agrupamos os termos semelhantes.} \\ &= 6a + 3b + 2c \leftarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.} \end{aligned}$$

Acompanhe outros exemplos.

a) Vamos calcular $(4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 3)$.

$$\begin{aligned} (4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 3) &= \\ &= 4x^2 - 7x + 2 + 3x^2 + 3 = \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.} \\ &= 4x^2 + 3x^2 - 7x + 2 + 3 = \leftarrow \text{Agrupamos os termos semelhantes.} \\ &= 7x^2 - 7x + 5 \leftarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.} \end{aligned}$$

b) Dados os polinômios $A = 0,2x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ e

$$B = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 0,4, \text{ vamos calcular } A + B.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{10}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{10}\right) &= \\ &= \frac{2}{10}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{10} = \\ &= \frac{2}{10}x^3 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} - \frac{4}{10} = \\ &= \frac{2x^3 + 6x^3}{10} + \frac{-10x^2 + 3x^2}{6} + 2x + \frac{-5 - 4}{10} = \\ &= \frac{8}{10}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x - \frac{9}{10} = \\ &= \frac{4}{5}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x - \frac{9}{10} \end{aligned}$$



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

49 Calcule:

a) $(2x + y + 3) + (-5x + y - 1) = -3x + 2y + 2$ c) $(3ab - 6a^2) + (a^2 - 4ab + 2b^2) + (5a^2 - 3b^2) = -ab - b^2$

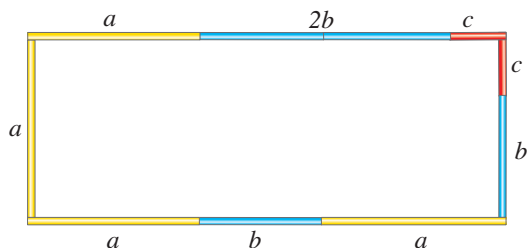
b) $\left(\frac{7a}{5} - 2ab + \frac{b^2}{3}\right) + \left(4ab - \frac{b^2}{3}\right) = \frac{7a}{5} + 2ab$ d) $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{1}{4}\right) = x^2 + \frac{2x}{5} - \frac{1}{2}$

50 Dados os polinômios $A = x^2 - 3x + 5$, $B = x^2 + 2x - 4$ e $C = x^2 + 5x - 1$, calcule:

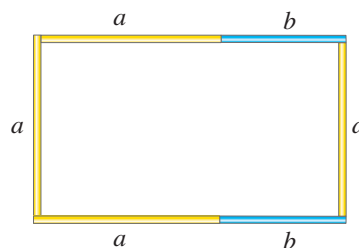
a) $A + B; 2x^2 - x + 1$ b) $A + B + C; 3x^2 + 4x$ c) $A + C; 2x^2 + 2x + 4$ d) $B + C; 2x^2 + 7x - 5$

Subtração de polinômios

Nas figuras abaixo, o polígono 1 foi representado com 4 canudinhos de medida a , 4 canudinhos de medida b e 2 canudinhos de medida c , e o polígono 2, com 4 canudinhos de medida a e 2 canudinhos de medida b .



Polígono 1



Polígono 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O polinômio que representa o perímetro do polígono 1 é $4a + 4b + 2c$, e o polinômio que representa o perímetro do polígono 2 é $4a + 2b$.

Na construção do polígono 1, empregamos 2 canudinhos de comprimento b e 2 canudinhos de comprimento c a mais que no polígono 2, ou seja, construímos linhas cuja diferença de comprimento é dada por:

$$2b + 2c$$

O polinômio $2b + 2c$ é a diferença entre os polinômios $4a + 4b + 2c$ e $4a + 2b$.

Esse resultado poderia ter sido obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (4a + 4b + 2c) - (4a + 2b) &= \\ &= 4a + 4b + 2c - 4a - 2b = \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.} \\ &= \cancel{4a} - \cancel{4a} + 4b - 2b + 2c = \leftarrow \text{Agrupamos e reduzimos os termos semelhantes.} \\ &= 2b + 2c \end{aligned}$$

Veja outros exemplos.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - (4y - 3x) + (5x - y) &= \\ &= 2x - 4y + 3x + 5x - y = \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.} \\ &= 10x - 5y \leftarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3a^2 - [2a - 1 - (2a^2 - 5a + 3)] - 6 &= \\ &= 3a^2 - [2a - 1 - 2a^2 + 5a - 3] - 6 = \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.} \\ &= 3a^2 - 2a + 1 + 2a^2 - 5a + 3 - 6 = \leftarrow \text{Eliminamos os colchetes.} \\ &= 5a^2 - 7a - 2 \leftarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.} \end{aligned}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

51. a) $5ab^2 - 2a + 4b$ b) $-2a^2 + 2c$ c) $\frac{13}{6}y^2 - \frac{11}{4}y - \frac{3}{2}$

d) $\frac{5x}{2} - \frac{5xy}{12} - \frac{7y}{6}$

51 Calcule:

- a) $(7ab^2 - 3a + 5b) + (-2ab^2 + a - b)$
 b) $(3a^2 - 5ab + 2c - 2bc) - (5a^2 - 5ab - 2bc)$
 c) $\left(\frac{3}{2}y^2 - 3y - 2\right) + \left(\frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)$
 d) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3xy}{4} + \frac{y}{3}\right) - \left(\frac{3y}{2} - \frac{xy}{3} - 2x\right)$

52 Dados os polinômios $A = 5x^2 - 3x + 4$, $B = 2x^2 + 4x - 3$ e $C = x^2 - 3x$, calcule:

- a) $A - B$; $3x^2 - 7x + 7$ c) $A + C - B$;
 b) $B - A$; $-3x^2 + 7x - 7$ d) $A - C + B$.
 $4x^2 - 10x + 7$
 $6x^2 + 4x + 1$

53 Qual polinômio devemos somar ao polinômio $2x + y + 3$ para obtermos o polinômio $-3x + 2y + 2$? $-5x + y - 1$

54 Qual polinômio devemos subtrair do polinômio $2x^3 - 3x^2 + x - 4$ para obtermos o polinômio $-3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$? $5x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

55 Reduza os termos semelhantes.

- a) $10x^2 - (5x + 6) - [2x - (3x^2 - 2)]$
 b) $5a - [3b + 7 - (4a - 5b) + (2 - a)]$
 c) $x^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) - \left(-\frac{1}{2} + x + \frac{1}{3}x^2\right)$

55. a) $13x^2 - 7x - 8$ b) $10a - 8b - 9$ c) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

56 Ângela tinha em um cofre 18 moedas de x centavos, 30 moedas de y centavos e 40 moedas de z centavos. Durante o mês, depositou 8 moedas de x centavos e 10 moedas de y centavos. No mês seguinte, retirou 12 moedas de y centavos e 8 moedas de z centavos.

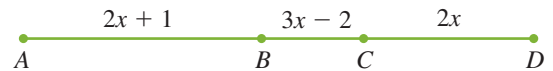


OSÉ LUIS JUHAS

Determine o polinômio que representa o total de centavos depositado no cofre:

- a) no início das operações; $18x + 30y + 40z$
 b) no final do mês anterior; $26x + 40y + 40z$
 c) no mês seguinte. $26x + 28y + 32z$

57 Considerando a figura abaixo, determine:

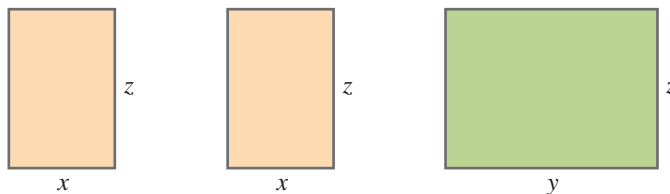


- a) a medida do segmento \overline{AC} ; $5x - 1$
 b) a medida do segmento \overline{BD} ; $5x - 2$
 c) a medida do segmento \overline{AD} . $7x - 1$

NELSON MATSUDA

Multipliação de polinômio por monômio

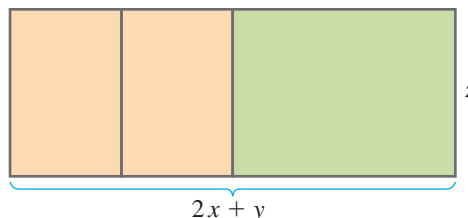
Considere as figuras abaixo, formadas por retângulos.



A soma das áreas dessas figuras é:

$$xz + xz + yz = 2xz + yz$$

Agrupando as três figuras, formamos um retângulo maior.



OSÉ LUIS JUHAS

A base desse retângulo mede $2x + y$ e a altura mede z . Portanto, a área desse retângulo é $(2x + y) \cdot z$.

No entanto, essa área é igual à soma das áreas dos três retângulos que formaram o retângulo maior. Logo:

$$(2x + y) \cdot z = 2xz + yz$$

Observe que a expressão $2xz + yz$ também resulta da aplicação da propriedade distributiva em $(2x + y) \cdot z$:

$$(2x + y) \cdot z = 2xz + yz$$

Veja outros exemplos.

a) Vamos calcular o produto $3x \cdot (5x - 4y)$.

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e efetuando as operações indicadas, temos:

$$3x \cdot (5x - 4y) = (3x) \cdot (5x) - (3x) \cdot (4y) = 15x^2 - 12xy$$

b) Vamos calcular:

$$\bullet -3a \cdot (2a - 4) = (-3a) \cdot (2a) - (-3a) \cdot (4) = -6a^2 + 12a$$

$$\bullet 2xy \cdot (3x^2 - 5xy + y^2) = 6x^3y - 10x^2y^2 + 2xy^3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

58 Calcule:

a) $7x \cdot (2x - 5)$ $14x^2 - 35x$

b) $(3a^2 - 2a - 1) \cdot 5a$ $15a^3 - 10a^2 - 5a$

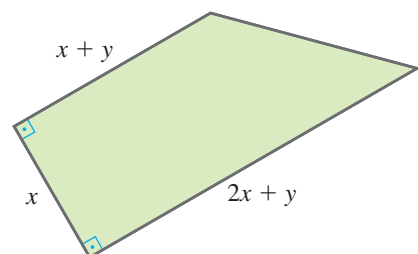
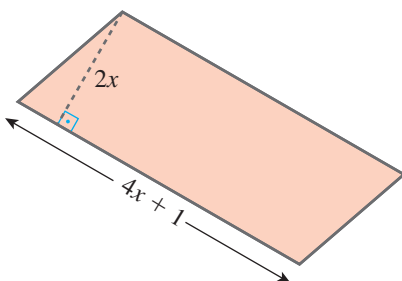
c) $-3x \cdot (4x^2 - 3x + 1)$ $-12x^3 + 9x^2 - 3x$

d) $\frac{2}{5} a \cdot \left(a - \frac{1}{4}\right)$ $\frac{2}{5} a^2 - \frac{1}{10} a$

e) $(0,3x^2 - 1,4x) \cdot (-0,2x^3)$ $-0,06x^5 + 0,28x^4$

f) $\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{7}y^3\right) \cdot (-3y)$ $-y^3 - \frac{12}{7}y^4$

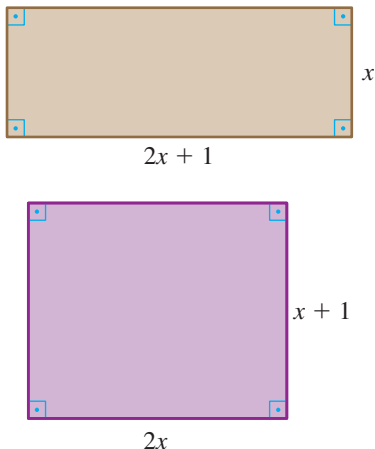
59 Considere as figuras abaixo.



Determine o binômio que:

a) representa a área do paralelogramo; $8x^2 + 2x$ b) representa a área do trapézio. $\frac{3}{2}x^2 + xy$

60 A soma das áreas das duas figuras abaixo pode ser expressa por um binômio. Qual é esse binômio? $4x^2 + 3x$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUUDA

61 Em uma sala retangular, foi colocado um tapete quadrado, como mostra a figura abaixo.



NELSON MATSUUDA

Faça o que se pede.

- a) Determine a expressão algébrica que representa a área da sala não coberta pelo tapete. $8a + ab - b^2$
- b) Se $a = 4$ m e $b = 2,1$ m, calcule a área da sala que ficou descoberta. $35,99 \text{ m}^2$

► Multiplicação de dois polinômios

Considere as figuras abaixo.

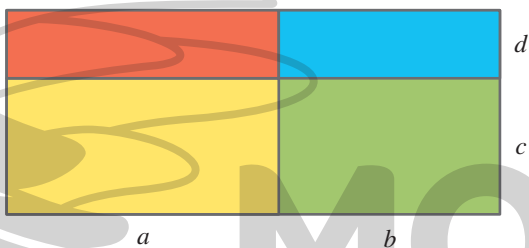


Figura 1

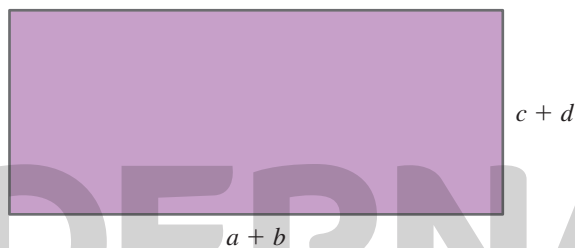


Figura 2

Podemos determinar a área da figura 1 calculando separadamente a área de cada retângulo de que ela é formada e somando os resultados obtidos: $ac + ad + bc + bd$

A área da figura 2 é dada por: $(a + b) \cdot (c + d)$

Como as duas figuras (1 e 2) são determinadas por dois retângulos de mesmas dimensões, elas têm áreas iguais. Logo:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Observe que a expressão $ac + ad + bc + bd$ resulta da aplicação da propriedade distributiva em $(a + b) \cdot (c + d)$:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Veja outros exemplos.

a) $(7x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 2) = 7x^3 - 14x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 7x^3 - 16x^2 + 5x - 2$

b) $(2x - 1) \cdot (3x + 2) \cdot (-x - 1)$

Vamos multiplicar os dois primeiros polinômios:

$$\begin{aligned} & [(2x - 1) \cdot (3x + 2)] \cdot (-x - 1) = \\ & = (6x^2 + 4x - 3x - 2) \cdot (-x - 1) = \\ & = (6x^2 + x - 2) \cdot (-x - 1) \end{aligned}$$

Agora, procedendo como no exemplo anterior, aplicamos a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} & (6x^2 + x - 2) \cdot (-x - 1) = \\ & = -6x^3 - 6x^2 - x^2 - x + 2x + 2 = \\ & = -6x^3 - 7x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

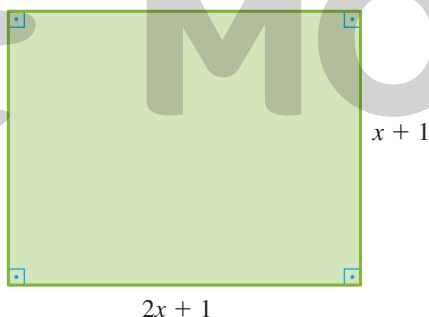
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

62 Calcule:

- a) $(5x - 1) \cdot (5x + 1)$ $25x^2 - 1$
 b) $(a + b) \cdot (a + b)$ $a^2 + 2ab + b^2$
 c) $(2x^2 - 3x - 6) \cdot (5x - 2)$ $10x^3 - 19x^2 - 24x + 12$
 d) $\left(2a + \frac{3}{5}b\right) \cdot \left(a - \frac{1}{2}b\right)$ $2a^2 - \frac{2}{5}ab - \frac{3}{10}b^2$

63 Observe o retângulo abaixo.



a) Determine o trinômio que representa a área do retângulo. $2x^2 + 3x + 1$

b) Calcule o valor numérico desse trinômio para $x = 0,4$. $2,52$

64 a) $x^3 + 5x^2 + 4x - 4$; $x^3 - 11x + 6$; $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$
 Dados $A = x^2 + 3x - 2$, $B = x + 2$ e $C = x - 3$, calcule:

- a) $A \cdot B$, $A \cdot C$ e $A \cdot B + A \cdot C$
 b) $B + C$ e $A \cdot (B + C)$ $2x - 1$; $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

65 Calcule os produtos a seguir.

- a) $3x \cdot (2x - 3) \cdot (x + 2)$ $6x^3 + 3x^2 - 18x$
 b) $-2x \cdot (x + 5) \cdot (2x - 5)$ $-4x^3 - 10x^2 + 50x$
 c) $(a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a - b)$ $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$
 d) $(a - b) \cdot (a + b) \cdot (3a - b)$ $3a^3 - 3ab^2 - a^2b + b^3$
 e) $\frac{x}{2} \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right)$ $x^3 + \frac{x^2}{12} - \frac{x}{12}$

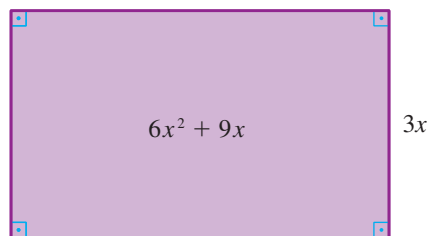
Divisão de polinômio por monômio

A área do retângulo ao lado é representada pelo polinômio $6x^2 + 9x$, e a medida da altura pelo monômio $3x$.

Vamos determinar o polinômio que representa a medida da base do retângulo.

Para isso, devemos dividir o polinômio $6x^2 + 9x$ pelo monômio $3x$, ou seja, encontrar o polinômio que, multiplicado por $3x$, resulta em $6x^2 + 9x$.

Esse polinômio é $2x + 3$, pois $3x \cdot (2x + 3) = 6x^2 + 9x$.



Observe que o polinômio $2x + 3$ pode ser obtido dividindo-se cada um dos termos de $6x^2 + 9x$ por $3x$:

$$(6x^2 + 9x) : (3x) = 2x + 3$$

Veja outros exemplos.

$$\text{a) } (18x^3 - 12x^2 + 3x) : (-3x) = -6x^2 + 4x - 1$$

$$\text{b) } (7x^3y^2 - 5x^2y^4) : (-3x^2y) = -\frac{7}{3}xy + \frac{5}{3}y^3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

66 Calcule os quocientes a seguir.

a) $(8x^5 + 6x^3) : (+2x^2) = 4x^3 + 3x$

b) $(12ab + 15a^2b + 9ab^2) : (3ab) = 4 + 5a + 3b$

c) $(20x - 10x^2) : (-5x) = -4 + 2x$

d) $(a^3 + a^2 + a) : (a) = a^2 + a + 1$

e) $(x^5 + x^2) : (-x^2) = -x^3 - 1$

f) $(7x^2 - 8x + 5) : (-1) = -7x^2 + 8x - 5$

67 Determine o polinômio que, multiplicado por $-7x$, resulta em $21x^3 - 28x^2 + 14x$.

68 Multiplicando-se o monômio $-4xy$ pelo polinômio A , encontra-se o polinômio $-8xy + 9x^2y - 6xy^2$. Determine o polinômio A .

69 Qual é o quociente de $\left(\frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{4}x\right)$ por

$\left(-\frac{1}{2}x\right)$? $-\frac{14}{3}x + \frac{1}{2}$

70 Calcule o valor da expressão:

$$[(25x^2 - 15x) : (-5x)] \cdot (5x + 3) = -25x^2 + 9$$

71 Caio gosta de elaborar desafios matemáticos. Leia o desafio que ele propôs ao amigo Tiago.

O produto da idade de dois irmãos é representado pela expressão algébrica $x^2 + 10x$. Sabendo que x representa a idade do irmão mais novo, descubra a expressão algébrica que representa a idade do irmão mais velho e determine a diferença de idade entre eles.

Supondo que Tiago esteja pensando corretamente, qual é a resposta que ele dará a Caio?

$x + 10; 10$



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Polinômios com uma só variável

Observe estes polinômios:

• $x^2 - 8x + 12$

Ele apresenta somente a variável x , cujo maior expoente é 2; dizemos que é um polinômio do 2º grau na variável x , ou que tem grau 2.

• $2y^4 - 3y^2 + 5y - 6$

Ele apresenta somente a variável y , cujo maior expoente é 4; dizemos que é um polinômio do 4º grau na variável y , ou que tem grau 4.

• $z^3 - 1$

Ele apresenta somente a variável z , cujo maior expoente é 3; dizemos que é um polinômio do 3º grau na variável z , ou que tem grau 3.

Polinômios desse tipo são chamados de **polinômios com uma variável**.

Em geral, os termos de um polinômio com uma variável são apresentados segundo as potências decrescentes dessa variável.

Veja alguns exemplos.

- a) $5x^2 - 4x + 2$
- b) $x^3 - 2x^2 + x - 1$
- c) $2x^4 - 3x^2 + 2$

OBSERVAÇÃO

- ▶ Se em um polinômio de grau n ordenado segundo as potências de x faltar uma ou mais potências de x com expoente menor do que n , então os coeficientes desses termos serão iguais a zero, e o polinômio será chamado de **polinômio incompleto**.

Veja alguns exemplos.

- a) $x^2 - 4$ é um polinômio incompleto e pode ser escrito como $x^2 + 0x - 4$.
 $x^2 + 0x - 4$ é a forma geral do polinômio $x^2 - 4$.
- b) $2x^4 - 3x^2 + 2$ é um polinômio incompleto e pode ser escrito como $2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$.
 $2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$ é a forma geral do polinômio $2x^4 - 3x^2 + 2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

72 Ordene os polinômios de acordo com as potências decrescentes de x .

- a) $2x + 3x^2 - 4$ $3x^2 + 2x - 4$
 - b) $-6 + x^4 - 5x^2 + 4x^3 - 2x$
 - c) $4x + 5x^3 - 1$ $5x^3 + 4x - 1$
 - d) $5x^2 - 3x + 2x^3 - 4$ $2x^3 + 5x^2 - 3x - 4$
 - e) $2 + 7x + 9x^2$ $9x^2 + 7x + 2$
- 72. b)** $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x - 6$

73 Escreva os polinômios a seguir na forma geral.

- a) $x^3 + 2x^2 - 5$ $x^3 + 2x^2 + 0x - 5$
- b) $x^3 + 1$ $x^3 + 0x^2 + 0x + 1$
- c) $y^4 - 8y^2 + 15$ $y^4 + 0y^3 - 8y^2 + 0y + 15$
- d) $z^4 - 16$ $z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 0z - 16$
- e) $m^4 - 2m^2$ $m^4 + 0m^3 - 2m^2 + 0m + 0$

Divisão de polinômio por polinômio

Vamos recordar, por meio de um exemplo, o algoritmo da divisão de dois números e perceber a semelhança que há entre ele e o procedimento para a divisão de dois polinômios.

$$\begin{array}{r}
 905 \overline{) 4} \\
 \underline{- 8} \\
 1
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 905 \overline{) 4} \\
 \underline{- 8} \\
 10 \\
 \underline{- 8} \\
 2
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 905 \overline{) 4} \\
 \underline{- 8} \\
 10 \\
 \underline{- 8} \\
 22 \\
 \underline{- 8} \\
 25 \\
 \underline{- 24} \\
 1
 \end{array}$$

Podemos confirmar o resultado da divisão verificando a igualdade:

$$\text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto} = \text{dividendo}$$

Nesse caso, temos: $226 \cdot 4 + 1 = 905$

A divisão de um polinômio por outro polinômio não nulo será feita apenas com os polinômios com uma variável.

Para facilitar essas divisões, devemos escrever os polinômios considerando a ordem decrescente das potências da variável, e o polinômio dividendo deve ser escrito na forma geral.

Vamos mostrar com exemplos como se calcula o quociente de um polinômio por outro polinômio. O processo que vamos utilizar visa construir, gradativamente, um polinômio quociente que, multiplicado pelo polinômio divisor e somado com o resto, resulte no polinômio dividendo.

a) Vamos calcular o quociente de $8x^2 - 10x + 5$ por $2x + 1$.

Começamos dividindo o primeiro termo do dividendo ($8x^2$) pelo primeiro termo do polinômio divisor ($2x$), obtendo o primeiro termo do quociente: $4x$

$$8x^2 - 10x + 5 \quad \begin{array}{l} | 2x + 1 \\ 4x \end{array}$$

Multiplicamos o quociente obtido ($4x$) pelo divisor $2x + 1$, obtendo o produto $8x^2 + 4x$. Subtraímos esse produto do dividendo assim como na divisão com números.

$$\begin{array}{r} 8x^2 - 10x + 5 \quad \begin{array}{l} | 2x + 1 \\ 4x \end{array} \\ -8x^2 - \quad 4x \\ \hline -14x + 5 \end{array}$$

Repetimos as etapas anteriores para calcular o quociente de $-14x + 5$ por $2x + 1$.

Dividimos $-14x$ por $2x$, obtendo o segundo termo do quociente, -7 .

Multiplicamos -7 por $2x + 1$, obtendo $-14x - 7$.

Subtraímos esse produto de $-14x + 5$ e obtemos o resto 12.

$$\begin{array}{r} 8x^2 - 10x + 5 \quad \begin{array}{l} | 2x + 1 \\ 4x - 7 \end{array} \\ -8x^2 - \quad 4x \\ \hline -14x + 5 \\ \quad 14x + 7 \\ \hline \quad \quad +12 \end{array}$$

Como o resto (12) tem grau menor que o grau do divisor ($2x + 1$), fica encerrada a divisão. Logo, obtemos o quociente ($4x - 7$) e o resto da divisão (12).

Vamos fazer a verificação:

$$(4x - 7) \cdot (2x + 1) + (+12) = 8x^2 - 10x - 7 + 12 = \underline{8x^2 - 10x + 5}$$

polinômio dividendo



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

b) Vamos calcular o quociente de $12x^4 - 17x^3 - 3x^2 - 11x - 3$ por $3x^2 - 2x - 3$.

$$\begin{array}{r}
 12x^4 - 17x^3 - 3x^2 - 11x - 3 \quad | \quad 3x^2 - 2x - 3 \\
 \underline{-12x^4 + 8x^3 + 12x^2} \quad 4x^2 - 3x + 1 \\
 -9x^3 + 9x^2 - 11x - 3 \\
 \underline{9x^3 - 6x^2 - 9x} \\
 3x^2 - 20x - 3 \\
 \underline{-3x^2 + 2x + 3} \quad \text{Quociente: } 4x^2 - 3x + 1 \\
 -18x \quad \text{Resto: } -18x
 \end{array}$$

c) Vamos calcular o quociente de $8x^3 - 1$ por $2x - 1$.

Como o polinômio dividendo é incompleto, vamos escrevê-lo na forma geral:

$$8x^3 + 0x^2 + 0x - 1$$

$$\begin{array}{r}
 8x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \quad | \quad 2x - 1 \\
 \underline{-8x^3 + 4x^2} \quad 4x^2 + 2x + 1 \\
 4x^2 + 0x - 1 \\
 \underline{-4x^2 + 2x} \\
 2x - 1 \\
 \underline{-2x + 1} \\
 0 \quad \text{Quociente: } 4x^2 + 2x + 1 \\
 \quad \text{Resto: } 0
 \end{array}$$

Quando o resto é zero, dizemos que a divisão é exata, ou, ainda, que $8x^3 - 1$ é divisível por $2x - 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

74 Determine o polinômio M que, multiplicado por $2x - 1$, resulta em $6x^2 - 7x + 2$. Verifique sua resposta. $3x - 2$

75 Calcule o quociente.

a) $(x^2 + 7x + 12) : (x + 3)$ $x + 4$

b) $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$ $2x - 5$

c) $(2x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 6x) : (x^2 - 4x + 2)$
 $2x^2 - 3x$

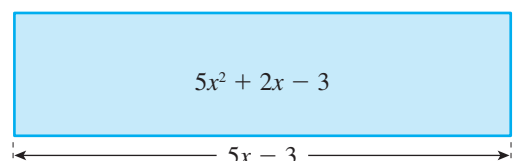
76 Determine o quociente e o resto da divisão.

a) $(2x^3 - 9x^2 + 3x - 6) : (x - 2)$ $2x^2 - 5x - 7; -20$

b) $(6a^3 - 7a^2 + 2a + 1) : (3a^2 - 5a + 3)$
 $2a + 1; a - 2$

77 Qual é o polinômio que, multiplicado por $a^2 + 2a - 5$, dá $3a^3 + 2a^2 - 23a + 20$? $3a - 4$

78 A área do retângulo abaixo é dada pela expressão $5x^2 + 2x - 3$. Calcule o polinômio que representa a medida da altura desse retângulo. $x + 1$



Pense mais um pouco...

Podemos efetuar a divisão de números inteiros escritos na forma polinomial. Por exemplo, para efetuar $2.753 : 21$, podemos fazer a seguinte representação:

$$2.753 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$$

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 \quad \Big| \quad 2 \cdot 10 + 1 \\
 \underline{-2 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^2} \\
 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 \\
 \underline{-6 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10} \\
 2 \cdot 10 + 3 \\
 \underline{-2 \cdot 10 - 1} \\
 2
 \end{array}$$

Quociente = $1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 131$

Resto = 2

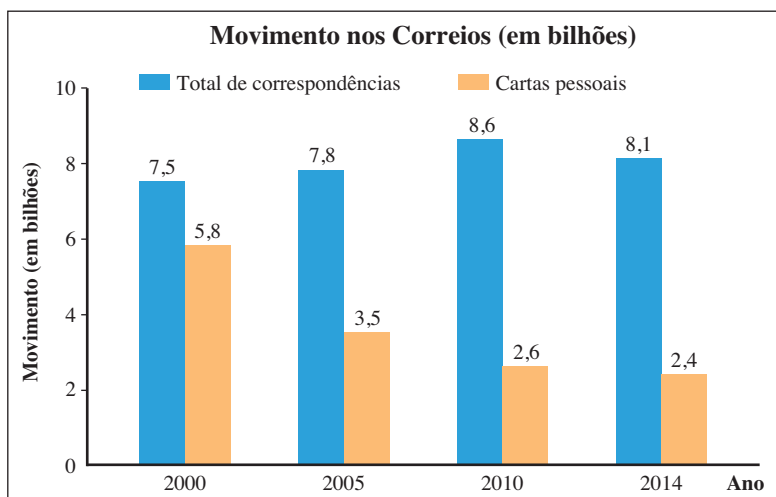
Agora, explique como foi feita a divisão. *resposta pessoal*

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO **i**

Interpolação e extrapolação gráfica

As pessoas têm produzido e veiculado cada vez mais informações. Mas isso gera um desafio que aumenta na mesma razão: saber selecionar as informações importantes e interpretá-las corretamente.

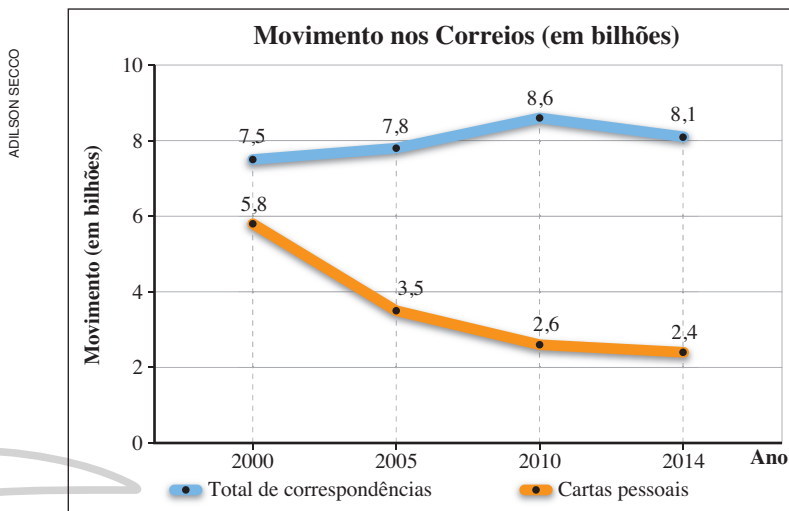
Observe a seguir o **gráfico de colunas duplas**, que informa a quantidade de correspondências distribuídas pelos Correios nos últimos anos, em bilhões de unidades. Além disso, é representada a parcela desse total que corresponde às cartas pessoais.



Dados obtidos em: <www.correios.com.br>. Acesso em: 13 mar. 2015.

Vamos construir, com os dados do gráfico de colunas, um gráfico que chamamos de **gráfico de linhas duplas**.

Para isso, podemos transferir as medidas das colunas do gráfico anterior e transformá-las em tracejados verticais (sem largura). Em seguida, marcamos em azul o ponto superior de cada coluna referente ao total de correspondências e unimos esses pontos com segmentos de reta. Depois, fazemos o mesmo em laranja, com as colunas referentes às cartas pessoais.



Dados obtidos em: <www.correios.com.br>. Acesso em: 13 mar. 2015.

Com esse gráfico, percebemos mais claramente como o volume de cartas pessoais diminuiu significativamente nos últimos anos.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

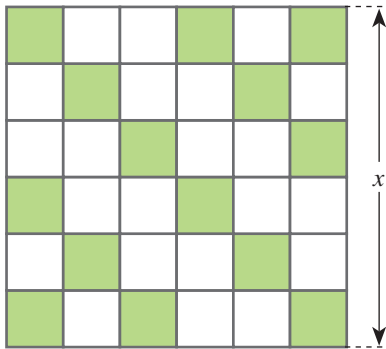
Com base nos dados estatísticos apresentados, faça o que se pede.

- Copie o gráfico de colunas em uma folha de papel quadriculado e, seguindo o procedimento descrito acima, construa o gráfico de linhas.
- Em qual ano o total de correspondências foi maior? E em qual foi menor? **maior: 2010; menor: 2000**
- Em qual ano o número de cartas pessoais foi maior? E em qual foi menor? **maior: 2000; menor: 2014**
- Em nenhum momento as linhas laranja e azul se encontram. O que significaria esse encontro? **Significaria que o número de cartas pessoais seria igual ao de correspondências, ou seja, todas as correspondências seriam cartas pessoais.**
- Tomando por base o total de correspondências de 2010 e 2014 no gráfico de linhas, faça uma estimativa do total de correspondências de 2012. **aproximadamente 8,3 bilhões de correspondências**
Quando obtemos um valor de um intervalo gráfico tomando por base os valores dos extremos desse intervalo, fazemos o que chamamos de **interpolação gráfica**. Considerando a linha que representa a população urbana, faça uma interpolação gráfica para obter uma estimativa da quantidade de cartas pessoais em 2012. **aproximadamente 2,5 bilhões de cartas pessoais**
- Tomando por base os valores do total de correspondências indicados no gráfico de linhas, imagine como seria o prolongamento desse gráfico e faça uma estimativa desse total em 2020. **aproximadamente 7,5 bilhões**

Quando obtemos um valor de um gráfico por meio de seu prolongamento, fazemos o que chamamos de **extrapolação gráfica**.

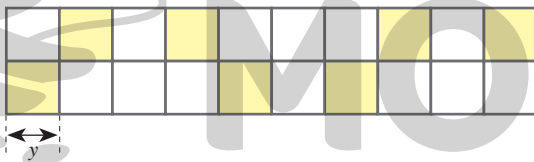
Considerando a linha que representa a quantidade de cartas pessoais, faça uma extrapolação gráfica para obter a quantidade de cartas pessoais em 2020. **aproximadamente 2,2 bilhões**

- 1 Observe o quadrado de lado x da figura abaixo.



Determine:

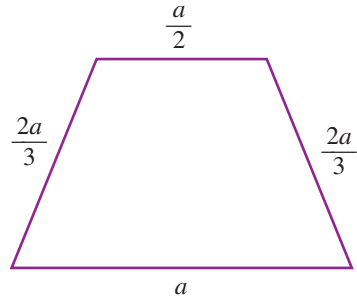
- a) o perímetro desse quadrado; $4x$
 b) a área desse quadrado; x^2
 c) a área da parte pintada de verde. $\frac{7}{18}x^2$
- 2 O retângulo abaixo é formado por quadrados de lado y .



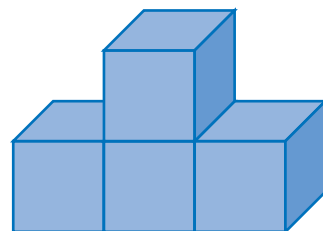
Faça o que se pede.

- a) Determine o perímetro desse retângulo. $24y$
 b) Determine a área desse retângulo. $20y^2$
 c) Qual é a área da parte pintada de amarelo? $7y^2$
- 3 Efetue as adições algébricas.
- a) $(-3x) + (-8x)$ $-11x$
 b) $(-12y) + (+6y)$ $-6y$
 c) $(+5ab) - (-7ab)$ $12ab$
 d) $(+2xy) + (+13xy)$ $15xy$
- 4 Reduza os monômios semelhantes.
- a) $-12a + 9a + 5a$ $2a$
 b) $15y - 10y - 6y$ $-y$
 c) $4a^2 - 10a^2 - 6a^2 - 4a^2$ $-16a^2$
 d) $-\frac{3}{4}ax + \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}ax$ $-\frac{11}{12}ax$

- 5 Determine o monômio que representa o perímetro do trapézio abaixo. $\frac{17}{6}a$



- 6 Calcule os produtos a seguir.
- a) $(+2x) \cdot (+3x^2)$ $6x^3$
 b) $(-3y) \cdot (4y^2)$ $-12y^3$
 c) $(-4x^2y) \cdot (-3xy^2)$ $12x^3y^3$
 d) $(-5ab) \cdot (+3a)$ $-15a^2b$
- 7 Calcule os quocientes a seguir, considerando as variáveis do divisor diferente de zero.
- a) $(-20a^5) : (+4a^2)$ $-5a^3$
 b) $(+3xy^3) : (4y)$ $\frac{3}{4}xy^2$
 c) $(-24a^3b^2) : (4ab)$ $-6a^2b$
 d) $(-3,2a^3b) : (0,5a)$ $-6,4a^2b$
- 8 Calcule as potências a seguir.
- a) $(-3x^2y^3)^2$ $9x^4y^6$ c) $(-\frac{2}{5}x)^2$ $\frac{4}{25}x^2$
 b) $(\frac{6}{3}a^2b^4)^3$ $8a^6b^{12}$ d) $(-0,4a)^3$ $-0,064a^3$
- 9 O sólido abaixo é formado por 4 cubos. Cada cubo tem como medida de aresta $3x$ unidades.



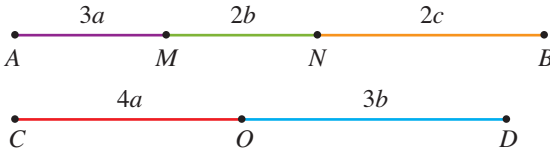
Determine:

- a) o volume de cada cubo; $27x^3$
 b) o volume da figura toda; $108x^3$
 c) a área da superfície desse sólido. $162x^2$

- 10** Na expressão $a + 2b - 4c$, as letras só podem assumir os números 0, 1 ou 2.
- Qual é o valor numérico da expressão para $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$? -5
 - Qual é o maior valor numérico possível? 6
 - Determine a , b e c , com $a \neq b \neq c$, de modo que o valor numérico da expressão seja 4.

$$\begin{aligned} a &= 2, b = 1 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

- 11** Considere os segmentos abaixo.



Determine o polinômio que representa:

- a medida do segmento \overline{AB} ; $3a + 2b + 2c$
- a medida do segmento \overline{CD} ; $4a + 3b$
- a soma das medidas desses dois segmentos. $7a + 5b + 2c$

- 12** Calcule:

- $(3a^2 - 5b) + (5a^2 + 5b)$ $8a^2$
- $(3x^2 - 5x + 2) - (x^2 + 6x - 4) + (5x - 7)$ $2x^2 - 6x - 1$
- $(a^2 - ab) + (b^2 - ab) - (a^2 + b^2)$ $-2ab$
- $\left(-\frac{1}{2}a - 2b\right) - \left(\frac{3}{5}b + 2a\right)$ $-\frac{5}{2}a - \frac{13}{5}b$

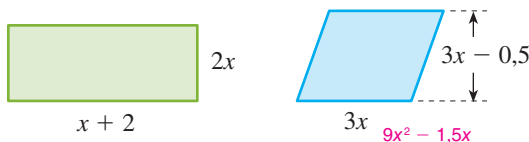
- 13** Elimine parênteses, colchetes e chaves e reduza os termos semelhantes.

- $3a - (b - a) + (5b - 2a)$ $2a + 4b$
- $x^2 - \{3x - [(x + 3) + (x^2 - 1)]\}$ $2x^2 - 2x + 2$
- $2y - [-3xy + (-2x + 5y) - (-4xy + x)]$ $3x - 3y - xy$

- 14** Do polinômio A subtraí o polinômio $4x - 3y + 4$, o que resultou em $-4x - 6y - 9$. Qual é o polinômio A ? $-9y - 5$

- 15** Determine a área de cada paralelogramo.

$$2x^2 + 4x$$



- 16** Calcule os produtos dos polinômios a seguir.

- $(x - 2) \cdot (x + 5)$ $x^2 + 3x - 10$
- $(2x - 4) \cdot (3x + 1)$ $6x^2 - 10x - 4$
- $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$ $x^3 - 1$
- $(a^3 - a^2 + a) \cdot (a + 1)$ $a^4 + a$

- 17** Calcule os produtos a seguir.

- $5x(x - 3)(x + 4)$ $5x^3 + 5x^2 - 60x$
- $3ab(2a + b)(a - b)$ $6a^3b - 3a^2b^2 - 3ab^3$
- $(a - 1)(a^2 - 1)(a + 1)$ $a^4 - 2a^2 + 1$
- $(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

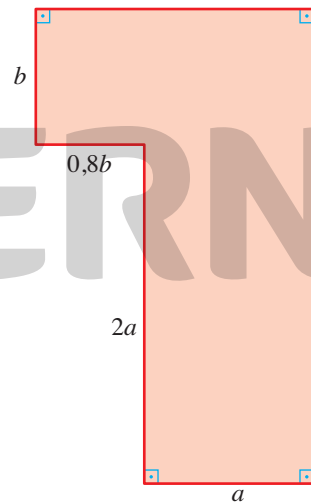
- 18** (Ulbra-RS) Sendo $A = x^2 + x$ e $B = x^2 - x$, o valor de $2AB$ é: alternativa d

- zero.
- $2x^4 - 4x^3 - 2x^2$.
- $x^4 - x^3 - x^2$.
- $2x^4 - 2x^2$.
- $x^4 - x^2$.

- 19** Simplifique as expressões abaixo.

- $3a(a - b) - 2a(a + b)$ $a^2 - 5ab$
- $2x(x - 3) + x(x - 5)$ $3x^2 - 11x$
- $(x - 3) \cdot (x - 5) + 3x(x + 4)$ $4x^2 + 4x + 15$
- $(a + b) \cdot (a - b) + (a - 2b) \cdot (a + 5b)$ $2a^2 + 3ab - 11b^2$

- 20** Observe a figura a seguir.



Determine a expressão algébrica que representa:

- o perímetro da figura; $3,6b + 6a$
- a área da figura. $2a^2 + 0,8b^2 + ab$

- 21** (Cesgranrio-RJ) Simplificando a expressão $a^3(a^2 + a^3) : a^5$, encontramos: alternativa a

- $1 + a$.
- $a + a^2$.
- $1 + 5a$.
- $1 - a$.
- a^3 .

22 Determine os quocientes a seguir.

a) $(12a^2 + 9a) : (+3a)$ $4a + 3$

b) $(15x^3 - 10x^2) : (-5x)$ $-3x^2 + 2x$

c) $(ax + bx) : x$ $a + b$

23 (UFMG) O quociente da divisão de

$4x^4 - 4x^3 + x - 1$ por $4x^3 + 1$ é: **alternativa b**

a) $x - 5$.

c) $x + 5$.

e) $4x + 8$.

b) $x - 1$.

d) $4x - 5$.

24 Determine o quociente e o resto.

a) $(x^2 + 11x + 18) : (x + 2)$ **quociente: $x + 9$; resto: 0**

b) $(8x^2 - 10x + 5) : (2x - 2)$ **quociente: $4x - 1$; resto: 3**

c) $(12x^3 - 17x^2 + 10x - 3) : (3x^2 - 2x + 1)$
quociente: $4x - 3$; resto: 0

25 Dividindo-se $4a^4 - 5a^2 + a - 2$ por $2a^2 - a + 1$ encontra-se um resto R . Calcule o valor numérico de R para $a = \frac{1}{3}$. $R = 0$

26 (UCSal-BA) Sejam os polinômios

$p = x^3 - 2x^2 + x$, $q = 2x - 1$ e $r = x + 1$.

Efetuando-se $p + q \cdot r$, obtém-se: **alternativa a**

a) $x^3 + 2x - 1$.

d) $x^3 + 3x$.

b) $x^3 + x - 1$.

e) $x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1$.

c) $x^3 + 2x + 1$.

27 Qual é o polinômio que, dividido por $5a^2 - 2a - 3$, tem por quociente exato $3a - 4$?
 $15a^3 - 26a^2 - a + 12$

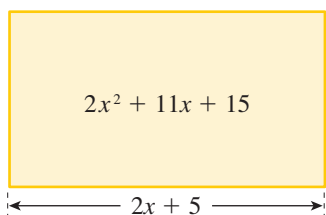
28 Determine o polinômio que dividido por $5x^2 - 3x + 1$ tem por quociente $x^2 + 2x - 3$ e resto $-5x + 2$. **$5x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 6x - 1$**

29 Determine o polinômio A que multiplicado por $2x - 1$ tem por produto $8x^3 - 14x^2 + 11x - 3$.
 $A = 4x^2 - 5x + 3$

30 (UEMG) O resto da divisão de $3x^4 - 2x^3 + 4x - 10$ por $x - 2$ é: **alternativa b**

a) 10. b) 30. c) 20. d) 0.

31 A área do retângulo abaixo é expressa pelo polinômio $2x^2 + 11x + 15$. Que polinômio representa a medida da altura desse retângulo?
 $x + 3$



32 Dados:

$A = 6x^2 - 5x - 6$

$B = 2x^2 + 5x - 12$

$C = 2x - 3$

$D = x + 4$

calcule:

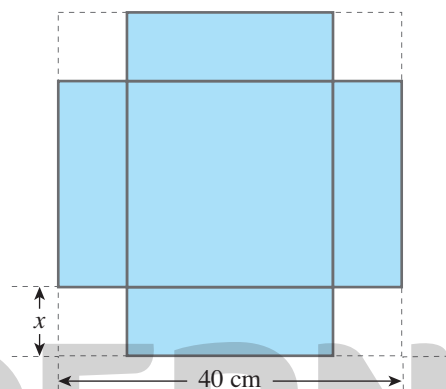
a) $B \cdot C$; **$4x^3 + 4x^2 - 39x + 36$**

b) $D^2 = D \cdot D$; **$x^2 + 8x + 16$**

c) $B : C$; **$x + 4$**

d) $(A + B) \cdot C$. **$16x^3 - 24x^2 - 36x + 54$**

33 Carolina comprou uma folha de cartolina quadrada de 40 cm de lado para construir uma caixa sem tampa. Para isso, ela cortou, de cada canto da folha, um quadrado de mesmo tamanho. Observe:



Faça o que se pede.

a) Represente por meio de uma expressão algébrica a área do fundo da caixa. **$(40 - 2x)^2$**

b) Qual é o volume dessa caixa? **$(40 - 2x)^2 \cdot x$**

c) Se Carolina cortar quadrados de 6 cm de lado, qual será a área aproveitada da folha?
 1.456 cm^2

34 Sendo $A = x^3 - x^2 - 5x - 3$ e $B = x^3 - 2x^2 - 3x$, calcule o quociente de $(A + B)$ por $(A - B)$. **$2x + 1$**

35 Divida $-10x^2 + 11x + 90$ por $-2x - 5$. Você encontrará um quociente Q_1 .

Divida $28x^3 - 47x^2 + 19x - 5$ por $7x^2 - 3x + 1$. O quociente encontrado será Q_2 . Calcule x para que se tenha $Q_1 = Q_2$. **13**

36 Qual é o resultado da divisão de $5x^3 + 5x^2 - 60x$ por $5x(x - 3)$? **$x + 4$**

37 (Fesp-SP) Qual é o resto da divisão do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x^2 - 1$? **0**

Troca de e-mails

Leia com atenção a troca de e-mails que ocorreu em 2011 entre Rita e Fábio.

De: Rita Quara [mailto: ri.taquara@exemplo.com.br]

Enviada em: sábado, 31 de dezembro de 2011 12:01

Para: Fábio Lógico

Assunto: VEJA QUE ESTRANHO

Fábio, você reparou que neste ano de 2011 tivemos 4 datas bem interessantes?

1/1/11, 1/11/11, 11/1/11, 11/11/11

Tente entender isto... separe os dois últimos números do ano em que você nasceu e some com o número da idade que você fez este ano... O TOTAL SERÁ 111... (para os nascidos no século XX).

POR EXEMPLO: nasci em 1992 (os dois últimos dígitos formam: 92);

92 mais a idade de meu aniversário em 2011: $92 + 19 = 111$

Agora, tente você, não dá para entender; algum matemático explica isso???

De: Fábio Lógico [mailto: fa.biologico@exemplo.com.br]

Enviada em: sábado, 31 de dezembro de 2011 12:30

Para: Rita Quara

Assunto: Re: VEJA QUE ESTRANHO

Olá, Rita.

Matemática e brincadeira às vezes andam juntas! Mas não há nada de estranho nisso, veja:

- Vamos representar por **xy** o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento (para os nascidos no século XX, ou seja, que nasceram no período de 1900 a 1999).
- No ano 2000, a idade de quem nasceu em 19xy era **(100 - xy)**, e a idade dessa pessoa hoje é **(100 - xy) + 11**, porque de 2000 a 2011 passaram 11 anos.
- Somamos o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento (século XX) com a idade hoje, isto é: **xy + (100 - xy) + 11**.
- Como **xy** somado com **-xy** resulta em zero, a expressão acima é igual a **100 + 11**, isto é, **111**, qualquer que seja o valor de **xy**.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Brincando com números, Fábio percebeu algumas curiosidades. Tente descobri-las.

a) Calcule:

11×12 e 11×21 132 e 231 • 11×13 e 11×31 143 e 341 • 11×14 e 11×41 154 e 451 • 11×24 e 11×42

b) O que acontece com os resultados do item a?

Cada resultado das multiplicações do item a tem os mesmos algarismos, mas em ordem diferente.

c) Agora, calcule:

11×35 e 11×53 385 e 583 • 11×36 e 11×63 396 e 693 • 11×37 e 11×73

d) A resposta dada ao item b pode ser generalizada? não

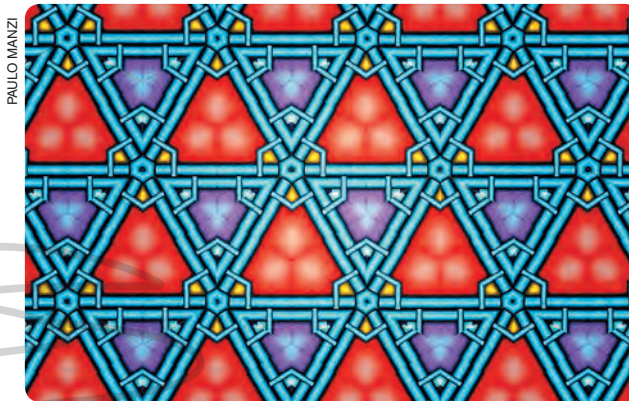
407 e 803



Estudo dos polígonos

1 Polígonos

Já aprendemos que uma linha poligonal fechada simples é chamada de **polígono**.



PAULO MANZI

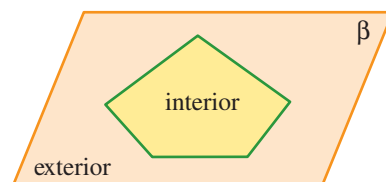
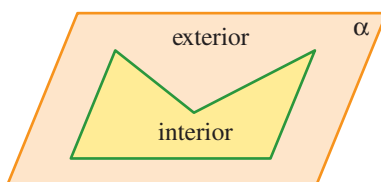
A imagem gerada por um caleidoscópio reproduz e multiplica superfícies poligonais.



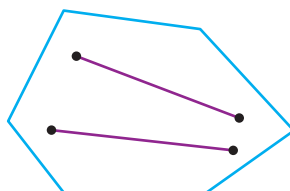
ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Agora, vamos recordar o que já sabemos sobre polígonos.

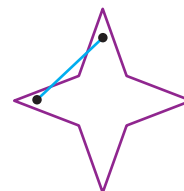
- Os polígonos dividem o plano em duas regiões sem pontos comuns: a **interior** e a **exterior**.



- Polígonos são denominados **convexos** quando o segmento que une quaisquer dois pontos de seu interior estiver contido nele. Caso contrário, são chamados de polígonos **não convexos**.



polígono convexo



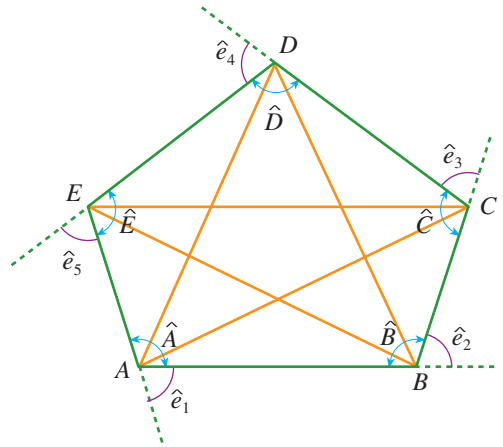
polígono não convexo

Neste e nos próximos capítulos, vamos trabalhar apenas com polígonos convexos, que chamaremos simplesmente de polígonos.

Elementos de um polígono

Observe os elementos de um polígono. Alguns deles você já conhece.

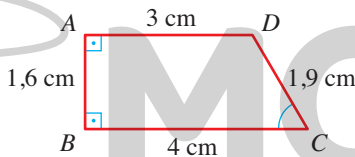
- **Lados:** são os segmentos que formam o polígono. No polígono $ABCDE$ ao lado, os lados são \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} .
- **Vértices:** são os pontos de encontro de dois lados consecutivos de um polígono. No polígono ao lado, os vértices são os pontos A , B , C , D e E .
- **Ângulos internos:** são os ângulos formados por dois lados consecutivos do polígono. No polígono ao lado, os ângulos internos são \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e \hat{E} .
- **Ângulos externos:** são os ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado consecutivo a ele. No polígono acima, os ângulos externos são \hat{e}_1 , \hat{e}_2 , \hat{e}_3 , \hat{e}_4 e \hat{e}_5 .
- **Diagonais:** são os segmentos que unem dois vértices não consecutivos do polígono. As diagonais do polígono $ABCDE$ são os segmentos \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} e \overline{CE} .



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Calcule o perímetro do trapézio $ABCD$. **10,5 cm**



- 2 Se os ângulos de um pentágono forem congruentes, e a soma das medidas deles for 540° , quanto medirá cada um desses ângulos? **108°**
- 3 Desenhe um heptágono convexo e trace todas as diagonais. Essas diagonais determinam vários polígonos. Pinte a região interior de um desses polígonos que tenha: **resposta pessoal**
- a) 3 lados; d) 6 lados;
b) 4 lados; e) 7 lados.
c) 5 lados;
- 4 Considere três polígonos: um heptágono com lados medindo 2,5 cm, um octógono com lados medindo 2 cm e um eneágono com lados medindo 1,8 cm. Descubra, mentalmente, qual deles tem o maior perímetro. **o heptágono**

- 5 Reúna-se em dupla, e façam o que se pede.

- a) Em uma folha de papel sulfite, cada um deverá desenhar quatro triângulos quais-

quer. Em seguida, trocarão as folhas para que meçam os ângulos internos e calculem, para cada triângulo, a soma dessas medidas. Mesmo sem ver os triângulos que seu colega desenhou, você pode prever a soma das medidas dos ângulos internos que ele obteve? Qual é essa soma?

Espera-se que os alunos respondam que sim; 180° .

- b) Agora, desenhem outro triângulo, recortem-no e denominem as medidas dos ângulos internos por a , b e c . Depois, recortem o triângulo em três partes, de modo que cada parte fique com um dos vértices. Em seguida, juntem as partes, fazendo os três vértices coincidirem e os lados de um dos ângulos encostarem nos lados dos outros ângulos. Observem o esquema abaixo.



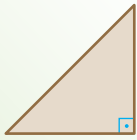
Vocês acham que a soma dos três ângulos assim obtida resulta em um ângulo raso? Façam uma estimativa para o valor de $a + b + c$.

Espera-se que os alunos obtenham somas iguais ou próximas de 180° e concluam que os demais colegas também devem ter obtido esse valor.

Pense mais um pouco...

 Reúna-se com um colega e resolvam este desafio.

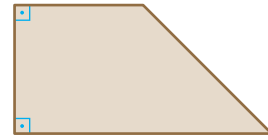
Copiem em uma folha de papel sulfite as figuras a seguir, nas quantidades indicadas, e recortem-nas.



(três figuras)

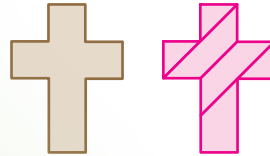


(duas figuras)



(uma figura)

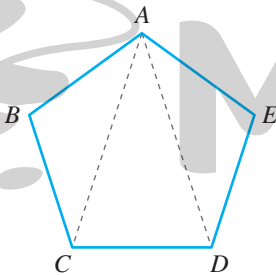
Com as seis peças, construam uma cruz neste formato:



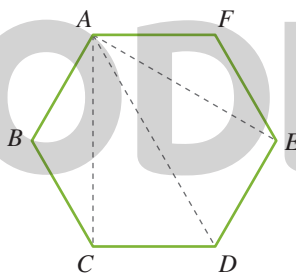
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2 Número de diagonais de um polígono

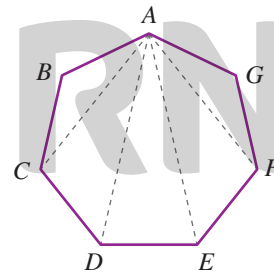
Veja os polígonos a seguir e o número de diagonais traçadas por um de seus vértices.



número de lados: 5
número de diagonais: 2



número de lados: 6
número de diagonais: 3



número de lados: 7
número de diagonais: 4

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Note que o número de diagonais traçadas por um de seus vértices (o vértice A) é igual ao número de lados menos 3.

Assim, em um polígono de n lados, podemos traçar, por um dos vértices, $(n - 3)$ diagonais. Como o polígono tem n vértices, podemos traçar $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Esse produto, porém, representa o dobro do número de diagonais, pois cada diagonal foi contada duas vezes (por exemplo, a diagonal \overline{AC} e a diagonal \overline{CA}).

Então, para calcular o número total de diagonais d de um polígono de n lados, podemos empregar a fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

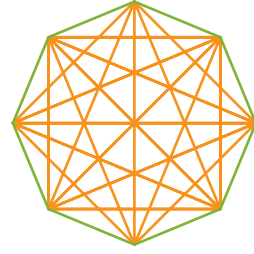
Veja alguns exemplos.

- a) Vamos calcular o número de diagonais de um octógono.

$$n = 8$$

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{8 \cdot (8 - 3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Portanto, o octógono tem 20 diagonais.



- b) Qual é o polígono cujo número de diagonais é igual ao número de lados?

$$d = n$$

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

$$2n = n^2 - 3n$$

$$2n + 3n = n^2$$

$$5n = n^2$$

$$n^2 = 5n$$

Como n representa o número de lados de um polígono, com $n \neq 0$, podemos dividir os dois membros por n .

$$\frac{n^2}{n} = \frac{5n}{n}, \text{ ou seja, } n = 5$$

Logo, o polígono é o pentágono.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 6 Calcule mentalmente:

- a) Quantas diagonais podemos traçar a partir de um dos vértices de um hexágono? **3 diagonais**
- b) Quantas diagonais tem um triângulo? **nenhuma**

- 7 Desenhe um quadrado e trace suas diagonais. **construção de figura**

- a) Quantas diagonais ele tem? **2 diagonais**
- b) Com uma régua, compare a medida das diagonais. O que é possível perceber? **As diagonais possuem a mesma medida.**

- 8 Por um dos vértices de um polígono foi possível traçar até 4 diagonais. Que nome se dá a esse polígono? **heptágono**

- 9 Determine o número de diagonais de um polígono com:

- a) 20 lados; **170 diagonais**
- b) 16 lados; **104 diagonais**
- c) 24 lados. **252 diagonais**

- 10 Quantos lados tem o polígono cujo número de diagonais é:

- a) seis vezes o número de lados? **15 lados**
- b) o quádruplo do número de lados? **11 lados**

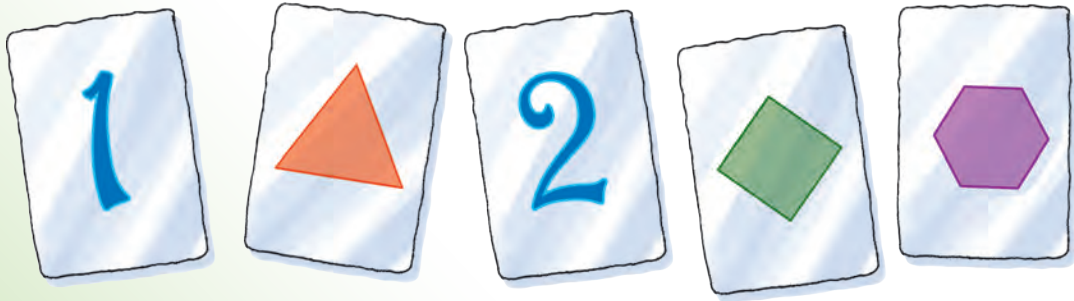
- 11 Traçando todas as diagonais possíveis a partir de um vértice, quantos triângulos serão formados em:

- a) um quadrilátero? **2 triângulos**
- b) um pentágono? **3 triângulos**
- c) um hexágono? **4 triângulos**
- d) um heptágono? **5 triângulos**
- e) um decágono? **8 triângulos**
- f) um polígono de n lados? **$(n - 2)$ triângulos**

Pense mais um pouco...

 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Cada um dos cinco cartões abaixo tem um número em uma face e uma figura na outra.



ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUIZ JUHAS

Alguém afirmou: “Atrás de um número par tem sempre um triângulo”.

Que procedimento devemos adotar para verificar se a afirmação é verdadeira, virando o menor número de cartões? *Devemos virar o 3º, o 4º e o 5º cartão, da esquerda para a direita.*

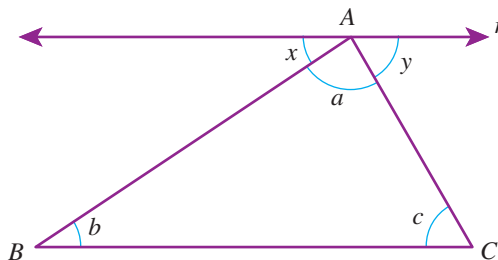
Conversem com outra dupla e comparem suas respostas.

Elaborem outras afirmações sobre esses cartões para outra dupla fazer a verificação.

3 Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono

► Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Considere um triângulo ABC qualquer e uma reta r paralela à reta \overleftrightarrow{BC} , que passa por A . Indicamos por x e y as medidas dos ângulos formados pela reta r com os lados \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Veja.



NELSON MATSUUDA

Como ângulos alternos internos formados por paralelas são congruentes, temos $x = b$ e $y = c$.

A soma das medidas dos três ângulos de vértice A forma um ângulo raso com lados em r ; logo, $x + a + y = 180^\circ$.

Substituindo x por b e y por c , obtemos: $b + a + c = 180^\circ$

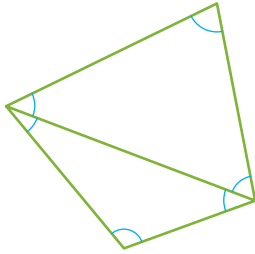
Portanto:

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° .

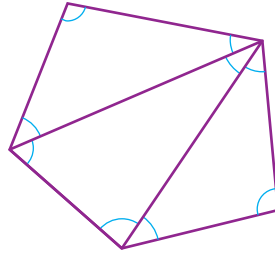
► Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados

Veja os polígonos abaixo. Após traçar todas as diagonais por um vértice, obtivemos alguns triângulos que auxiliam no cálculo das somas S_i das medidas dos ângulos internos.

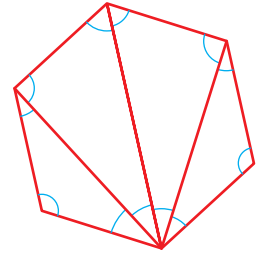
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



4 lados: 2 triângulos
 $S_i = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$



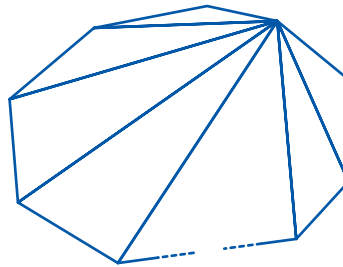
5 lados: 3 triângulos
 $S_i = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$



6 lados: 4 triângulos
 $S_i = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$

Agora, vamos considerar um polígono de n lados. Traçando todas as diagonais a partir de um dos vértices desse polígono, obtemos $(n - 2)$ triângulos.

NELSON MATSUDA



Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , a soma S_i das medidas dos ângulos internos de $(n - 2)$ triângulos é:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Então:

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a: $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Veja alguns exemplos.

a) Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono.

$$n = 6$$

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Substituindo n por 6, temos:

$$S_i = (6 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 4 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 720^\circ$$

Logo, a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é 720° .

b) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 1.080° . Qual é esse polígono?

$$\left. \begin{array}{l} S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ \\ S_i = 1.080^\circ \end{array} \right\} (n - 2) \cdot 180^\circ = 1.080^\circ$$

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 1.080^\circ$$

$$180^\circ \cdot n = 1.080^\circ + 360^\circ$$

$$180^\circ \cdot n = 1.440^\circ$$

$$n = 8$$

Portanto, o polígono é um octógono.

c) Calcule as medidas x e y indicadas na figura ao lado, sabendo que $y - x = 20^\circ$.

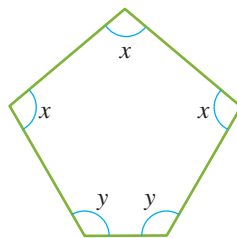
Na figura: $n = 5$ e $S_i = 3x + 2y$

Como $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$, temos:

$$3x + 2y = (5 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$3x + 2y = 540^\circ$$

Ao resolvermos o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 540^\circ \\ y - x = 20^\circ \end{cases}$, encontraremos $x = 100^\circ$ e $y = 120^\circ$.



NELSON MATSUDA

4 Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

A experiência abaixo nos permitirá perceber um resultado importante. Observe.

Desenhamos o polígono $ABCDE$ e seus ângulos externos $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4$ e \hat{e}_5 em uma folha de papel (foto 1). Com uma tesoura, recortamos a figura para destacar cada um dos ângulos externos, como sugere a foto 2.



Foto 1

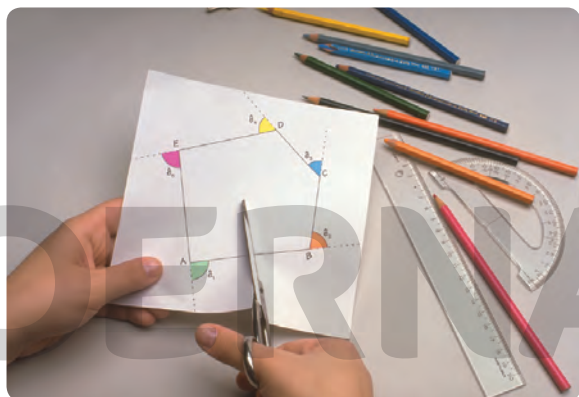


Foto 2

Reunimos os cinco ângulos externos em torno de um dos vértices, de modo que se tornem adjacentes dois a dois (foto 3). Cada dois desses ângulos têm um lado comum, como mostra a foto 4; desse modo, podemos estimar que a soma das medidas desses ângulos é igual a 360° .

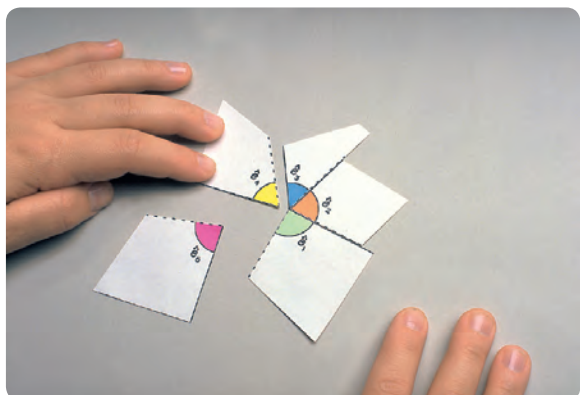


Foto 3

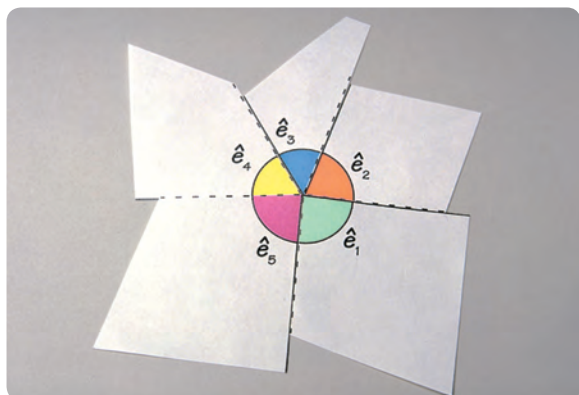
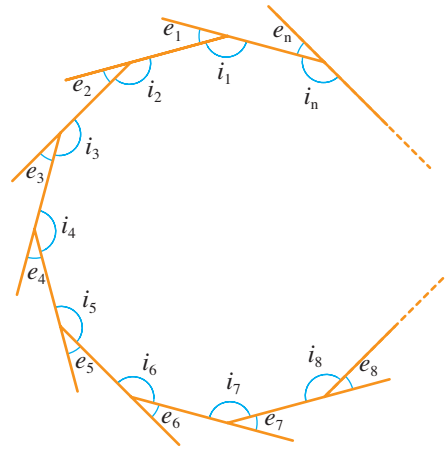


Foto 4

► Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados

Para comprovar nossa estimativa, observe ao lado o polígono de n lados. Nele, vemos que em cada vértice a soma das medidas do ângulo interno (S_i) com a do ângulo externo (S_e) é igual a 180° .



NELSON MATSUDA

Como o polígono de n lados tem n vértices, então a soma das medidas de todos os ângulos externos com a de todos os ângulos internos é igual a $n \cdot 180^\circ$. Veja.

$$\underbrace{(e_1 + i_1)}_{180^\circ} + \underbrace{(e_2 + i_2)}_{180^\circ} + \underbrace{(e_3 + i_3)}_{180^\circ} + \underbrace{(e_4 + i_4)}_{180^\circ} + \dots + \underbrace{(e_n + i_n)}_{180^\circ} = n \cdot 180^\circ$$

$$(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + \dots + e_n) + (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_n) = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e + S_i = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e + (n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e + n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

Portanto:

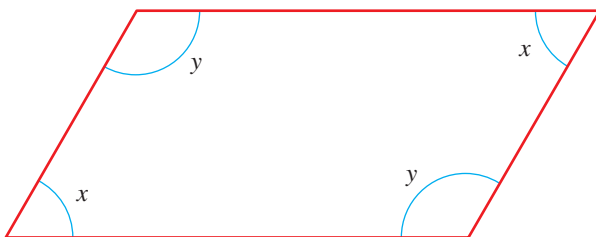
A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer é 360° .

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

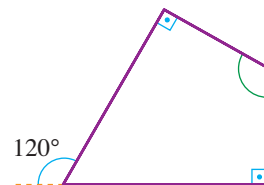
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 12** Determine y sabendo que, no quadrilátero abaixo, $y = 2x$. 120°



- 13** Descubra mentalmente a diferença entre a soma das medidas dos ângulos internos de um decágono e a de um octógono. 360°

- 14** Determine a medida do ângulo destacado em verde. 120°



- 15** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 1.260° .

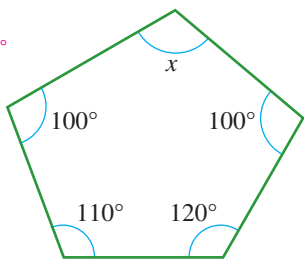
- a) Qual é o nome desse polígono? **eneágono**
 b) Quantas diagonais ele possui? **27 diagonais**

NELSON MATSUDA

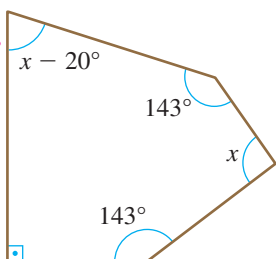
NELSON MATSUDA

16 Calcule x nas figuras a seguir.

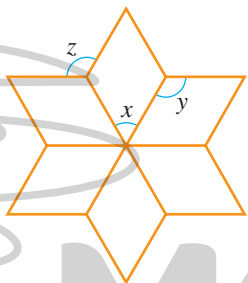
a) 110°



b) 92°



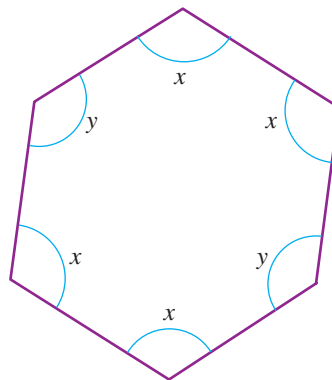
17 A figura abaixo é formada por seis paralelogramos congruentes.



Sabendo que a medida y é o dobro da medida x , então qual é a medida z ? 120°

18 Calcule os valores de x e de y na figura, sabendo que $x = y - 15^\circ$.

$x = 115^\circ$
 $y = 130^\circ$



19 Reúna-se com um colega e façam o que se pede. Considerem a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados como $S_i(n)$ e a soma das medidas dos ângulos externos como $S_e(n)$ e respondam.

- $S_i(14)$ é o dobro de $S_i(7)$? não
- $S_e(14)$ é o dobro de $S_e(7)$? não
- $[S_i(14) + S_e(14)]$ é o dobro de $[S_i(7) + S_e(7)]$? sim
- Existe algum valor para n de modo que $S_i(2n)$ seja o dobro de $S_i(n)$? não
- Existe algum valor para n de modo que $S_e(2n)$ seja o dobro de $S_e(n)$? não
- Existe algum valor para n de modo que $[S_e(2n) + S_i(2n)]$ seja o dobro de $[S_e(n) + S_i(n)]$?
Existem infinitos valores: qualquer número natural maior que 2.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

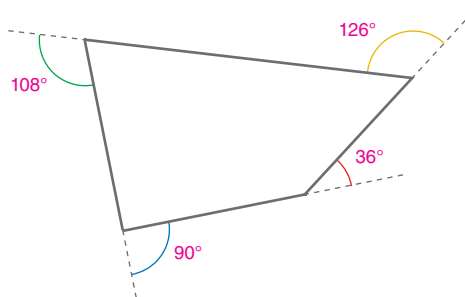
Pense mais um pouco...

Foi realizada uma pesquisa com 800 alunos da escola Futuro dos Jovens para avaliar se eles tinham ou não medo da dengue.

Lucas e Fabiano, alunos do 8º ano, que adoram brincar com a Matemática, propuseram aos colegas um desafio:

Com o resultado dessa pesquisa, representado pela figura e pela tabela ao lado, construir um gráfico de setores que mostre a porcentagem de opiniões obtidas nessa pesquisa.

Resolva o desafio proposto por Lucas e Fabiano. *construção do gráfico*

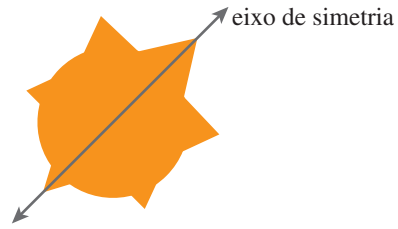


Pesquisa sobre a dengue	
Cor de destaque do ângulo externo	Opinião
Amarelo	Muito medo
Verde	Medo
Azul	Pouco medo
Vermelho	Nenhum medo

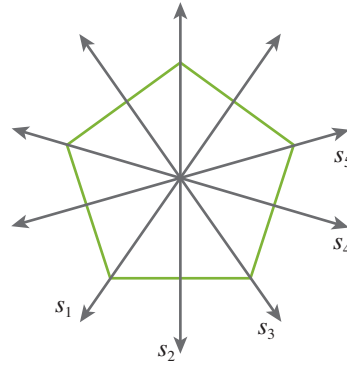
Dados obtidos pela escola Futuro dos Jovens.

5 Polígonos regulares

Já vimos que uma figura apresenta simetria em relação a um eixo quando ela pode ser dividida, por uma linha reta, em duas partes com mesma forma e tamanho, como se fossem espelhadas. A essa linha reta chamamos de **eixo de simetria**. Algumas figuras podem apresentar mais de um eixo de simetria.



Vimos também que um polígono é regular se possuir tantos eixos de simetria quantos forem os seus lados.

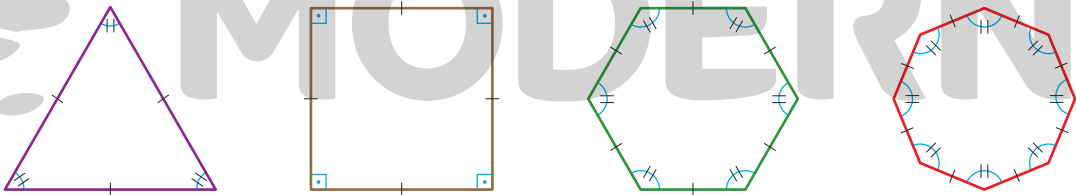


O pentágono regular tem 5 eixos de simetria.

Entretanto, é possível caracterizar um polígono regular de outro modo.

Um **polígono é regular** quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos internos são congruentes entre si.

Estas figuras são polígonos regulares.

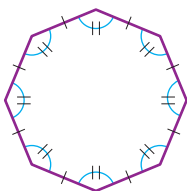


Representando por a_i a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados e por a_e a medida do ângulo externo, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

Observe os exemplos a seguir.

a) Vamos calcular a medida do ângulo interno e a medida do ângulo externo do octógono regular.



$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (8 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 6 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 1.080^\circ$$

$$\bullet a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{1.080^\circ}{8} = 135^\circ$$

$$\bullet a_e = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Logo, o ângulo interno mede 135° , e o ângulo externo, 45° .

b) Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo interno mede 150° ?



$$a_i + a_e = 180^\circ$$

$$150^\circ + a_e = 180^\circ$$

$$a_e = 180^\circ - 150^\circ$$

$$a_e = 30^\circ$$

Como $a_e = \frac{360^\circ}{n}$ e $a_e = 30^\circ$, temos:

$$30^\circ = \frac{360^\circ}{n}$$

$$30^\circ \cdot n = 360^\circ$$

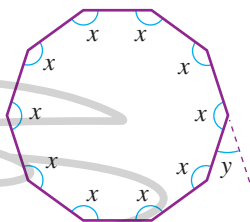
$$n = 12$$

Portanto, esse polígono tem 12 lados.

Note que o problema poderia ter sido resolvido fazendo $\frac{S_i}{n} = 150^\circ$. Veja:

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 150^\circ, \text{ ou seja, } n = 12$$

c) Vamos calcular as medidas x e y na figura abaixo.



O polígono tem 10 lados. Logo:

$$S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (10-2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 8 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 1.440^\circ$$

Sabendo que todos os 10 ângulos internos têm a mesma medida x , temos:

$$10x = 1.440^\circ$$

$$x = \frac{1.440^\circ}{10}$$

$$x = 144^\circ$$

Como $x + y = 180^\circ$, temos $y = 36^\circ$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 20** Sabendo que um polígono é regular e tem 15 lados, responda às questões a seguir.
- Qual é o nome desse polígono? **pentadecágono**
 - Qual é a soma das medidas de seus ângulos internos? **2.340°**
 - Qual é a soma das medidas de seus ângulos externos? **360°**
 - Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **156°**
 - Quanto mede cada um de seus ângulos externos? **24°**
- 21** O icoságono é um polígono de 20 lados. Qual é a medida do ângulo interno de um icoságono regular? **162°**
- 22** Determine a diferença entre a medida de um ângulo interno e a de um ângulo externo de um octógono regular. **90°**
- 23** Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3.960° , responda às questões a seguir.
- Quantos lados tem esse polígono? **24 lados**
 - Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **165°**
 - Quanto mede cada um de seus ângulos externos? **15°**
 - Qual é a soma das medidas dos seus ângulos externos? **360°**

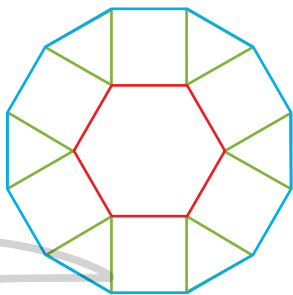
26. a) 6 quadrados, 6 triângulos equiláteros, 1 hexágono e 1 dodecágono, totalizando 14 polígonos.
 c) O polígono formado é um dodecágono regular, pois todos os seus lados têm a mesma medida e todos os seus ângulos internos também têm a mesma medida.

Lembre-se:
 Não escreva no livro!

- 24 Sabendo que um ângulo externo de um polígono regular mede 12° , responda.
 a) Quantos lados tem esse polígono? **30 lados**
 b) Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **168°**

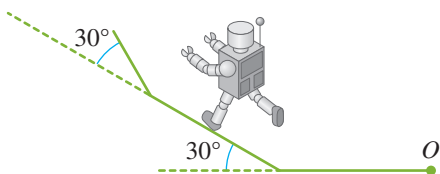
- 25 Reúna-se com um colega e respondam: se o número de lados de um polígono é par, pode-se dizer que o número de diagonais desse polígono também é par? **Não; por exemplo, o hexágono tem 6 lados e 9 diagonais.**

- 26 Um dos modelos de tapete produzidos por uma tapeçaria é composto somente por polígonos regulares, como mostra a figura a seguir.

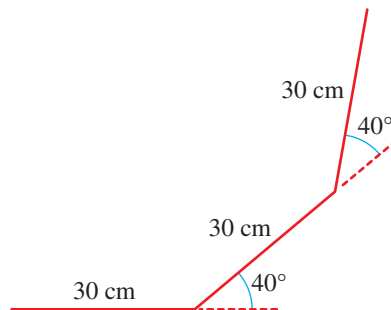


- a) Quais polígonos regulares foram bordados nesse tapete? Quantos polígonos são?
 b) Calcule a medida de cada ângulo interno do polígono que ficou no centro. **120°**
 c) Qual é o polígono formado pela parte azul do tapete? Esse polígono é regular? Por quê?

- 27 Um robô é programado para partir do ponto O , dar 5 passos, girar 30° para a direita e repetir esse processo até atingir o ponto O novamente e parar. Quantos passos ele dá para percorrer esse caminho? **60 passos**



- 28 Marina confeccionou uma toalha de mesa no formato de um polígono regular. Na borda da toalha, ela pregou uma faixa vermelha. Observe a seguir o esquema que ela utilizou para fazer essa toalha.



- a) Quantos metros de faixa vermelha Marina utilizou para fazer esse trabalho? **2,7 m**
 b) Depois de colocada, a faixa vermelha formou um polígono. Determine a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. **1.260°**

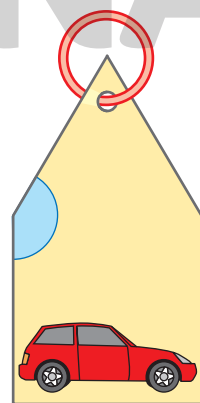
- 29 Um retângulo pode ser regular? Justifique sua resposta. **sim; o quadrado é um retângulo regular.**

- 30 (UPM-SP) O polígono regular convexo cujo ângulo interno é $\frac{7}{2}$ do seu ângulo externo é o: **alternativa d**

- a) icoságono. d) eneágono.
 b) dodecágono. e) octógono.
 c) decágono.

- 31 Para confeccionar os crachás dos expositores de uma feira de automóveis, foi utilizada a composição de dois polígonos regulares. Veja o modelo ao lado.

- O ângulo destacado em azul no crachá mede: **alternativa d**
- a) 120° .
 b) 135° .
 c) 165° .
 d) 150° .



FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...



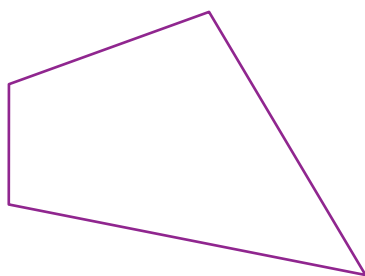
Reúna-se com alguns colegas e respondam às questões.

- Em um polígono regular qualquer, um ângulo externo e o ângulo interno de mesmo vértice são ângulos complementares ou suplementares? **suplementares**
- Quantos divisores naturais tem o número 360? Quais?
- Quantos polígonos regulares existem de modo que a medida (em grau) do ângulo externo seja um número natural? Quais são essas medidas?

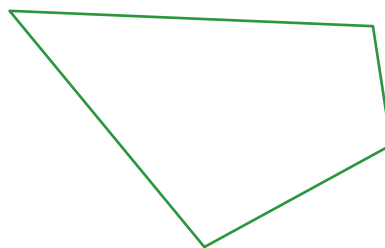
2. 24 divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 e 360
 3. 22 polígonos regulares; todos os divisores obtidos na resposta da questão 2, exceto 180° e 360° .

6 Congruência de polígonos

Considere estes dois polígonos.



Polígono A



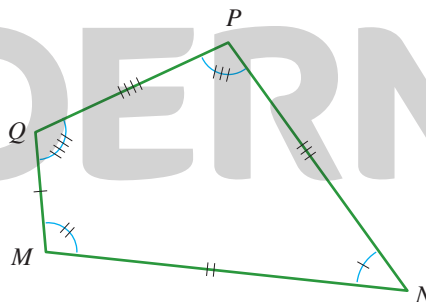
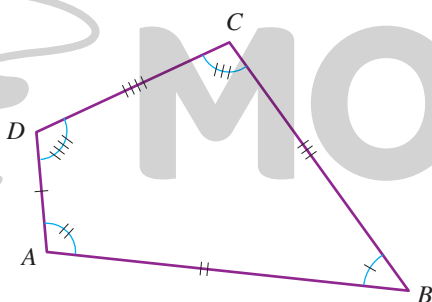
Polígono B

Usando uma folha de papel translúcido, reproduzimos o polígono A. Deslocando e girando esse polígono de maneira conveniente, podemos colocá-lo sobre o polígono B. A esse procedimento chamamos de **superposição** (ou sobreposição).

Assim, por superposição, será possível verificar se todos os pontos desses dois polígonos coincidem. Caso isso aconteça, diremos que os polígonos A e B são **congruentes** e indicaremos por $A \cong B$.

Elementos correspondentes em polígonos congruentes

Considere os polígonos congruentes a seguir.



Em polígonos congruentes, os elementos que coincidem por superposição são chamados de **correspondentes**. Assim, por exemplo:

- o ângulo \hat{A} é correspondente ao ângulo \hat{M} ;
- o ângulo \hat{B} é correspondente ao ângulo \hat{N} ;
- o lado \overline{AB} é correspondente ao lado \overline{MN} ;
- o lado \overline{BC} é correspondente ao lado \overline{NP} .

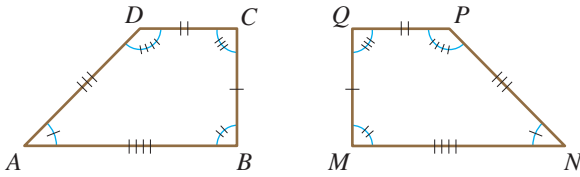
Dois polígonos são congruentes quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes forem congruentes.

OBSERVAÇÕES

Indicamos os lados correspondentes em polígonos congruentes, cortando esses lados com um mesmo número de tracinhas. Para indicar ângulos correspondentes, usamos um pequeno arco cortado por um mesmo número de tracinhas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

32 Observe os polígonos congruentes abaixo.

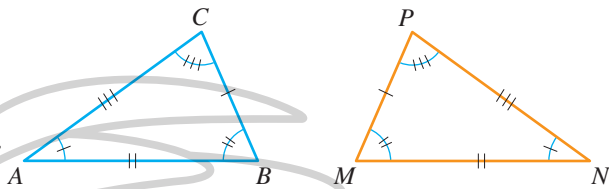


Escreva o elemento do polígono $MNPQ$ correspondente ao:

- a) vértice A ; N
- b) vértice C ; Q
- c) lado AD ; NP
- d) lado \overline{BC} ; \overline{MQ}
- e) ângulo \hat{D} ; \hat{P}
- f) lado \overline{CD} ; \overline{QP}

33 Os triângulos abaixo são congruentes.

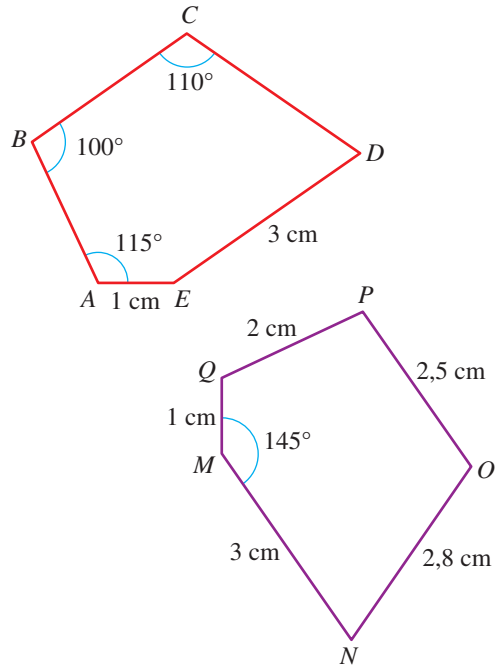
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



Escreva o elemento do triângulo MNP correspondente ao:

- a) vértice A ; N
- b) vértice B ; M
- c) lado \overline{AC} ; \overline{NP}
- d) lado \overline{BC} ; \overline{MP}

34 Os pentágonos abaixo são congruentes.



Determine:

- a) a medida do lado \overline{AB} ; 2 cm
- b) o perímetro do pentágono $ABCDE$; $11,3 \text{ cm}$
- c) a medida do ângulo $\hat{O}PQ$; 100°

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Transformações geométricas e figuras congruentes

Algumas transformações geométricas são responsáveis por movimentar figuras mantendo todas as suas medidas. São elas: **reflexão**, **translação** e **rotação**.

Como não há alteração de tamanho nem de forma, mas apenas de posição, ao final do movimento as figuras obtidas são **congruentes** à figura inicial.

Reflexão

Quando nos colocamos em frente a um espelho plano, vemos nossa imagem refletida nele. Todos os objetos que estão em frente a um espelho plano são congruentes à imagem deles (objeto e imagem têm mesma forma e mesmo tamanho).

Já estudamos como podemos fazer **reflexões** de figuras **em relação a uma reta** (que funciona como se fosse um espelho) e, assim, obtermos figuras simétricas. Essa reta é chamada de **eixo de reflexão**.

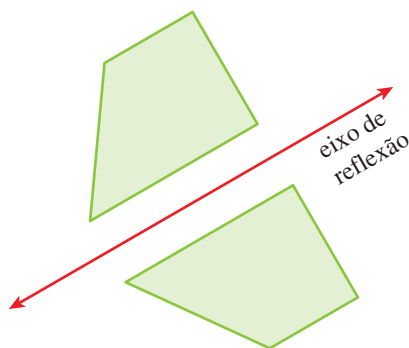
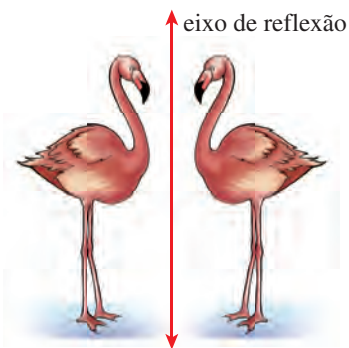
Nesta foto, o rio Pinheiros em São Paulo (SP) funciona como um espelho plano: reflete os objetos, mantendo a forma e o tamanho deles. (Foto de 2012.)



FELIPE REIS/SAMBAPHOTO

A reflexão mantém todas as medidas: distâncias, ângulos, forma e tamanho. Assim, a figura inicial e sua imagem refletida em relação a uma reta são congruentes.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

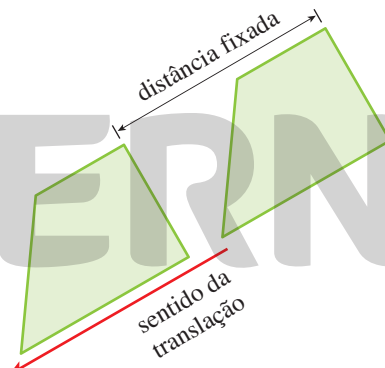
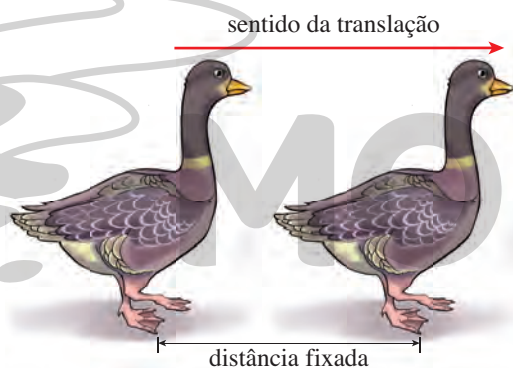


NELSON MATSUDA

Observe que, quando refletimos uma figura em relação a uma reta (ou no espelho, ou na superfície de um rio), a figura obtida (imagem) tem mesma forma e mesmo tamanho; porém, fica virada ao contrário (imagem revertida) em relação à figura inicial.

Translação

Quando movemos uma figura a uma dada distância, sempre na mesma direção e no mesmo sentido, estamos realizando uma **translação**. Nesse caso, a figura obtida (imagem) também é congruente à figura inicial.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

NELSON MATSUDA

É como se a figura inicial deslizasse, formando uma sequência de figuras congruentes a ela.

ADILSON B. LIPORAGE/OPÇÃO BRASIL



Teatro Municipal no Rio de Janeiro (RJ).
(Foto de 2012.)

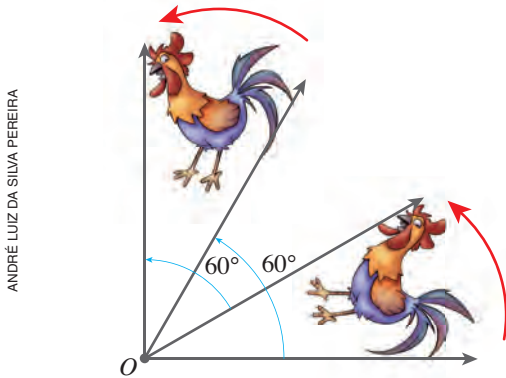


Podemos imaginar a coluna e a janela da esquerda deslocando-se para a direita (e vice-versa).

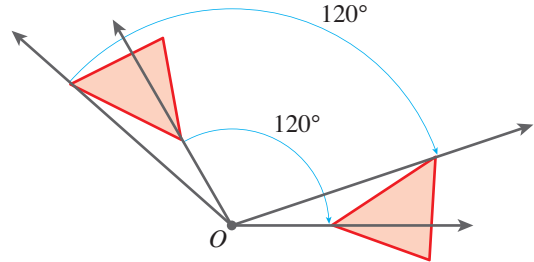
Rotação

Quando o movimento aplicado à figura é um giro de determinado número de graus em torno de um ponto, estamos realizando uma **rotação**. Esse ponto é chamado de **centro da rotação**.

Uma rotação fica determinada quando conhecemos o centro, o sentido e o ângulo de giro.



Rotação de centro O e ângulo de giro de 60° no sentido anti-horário



Rotação de centro O e ângulo de giro de 120° no sentido horário

A rotação também preserva a forma e o tamanho das figuras; desse modo, a imagem obtida pelas rotações é uma figura congruente à figura inicial.

Veja mais um exemplo.



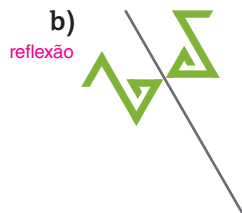
Vitrail da Catedral de Estrasburgo, França. (Foto de 2008.)

Podemos imaginar uma parte desse vitral (na forma de uma região angular) girando em torno do ponto central.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

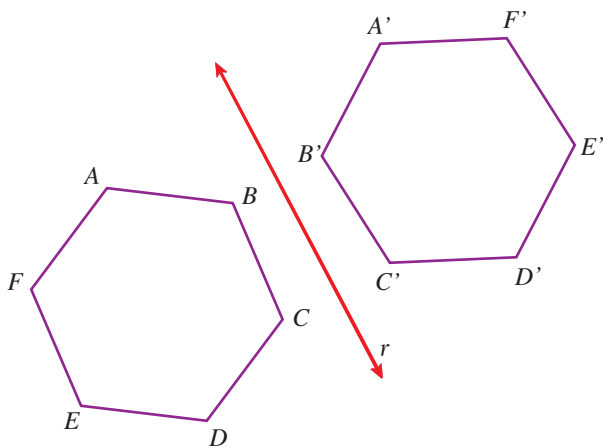
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

35 Identifique em cada caso a transformação geométrica aplicada: reflexão em relação a uma reta, translação ou rotação.



- 36** Os hexágonos a seguir são simétricos em relação ao eixo r .

NELSON MATSUDA



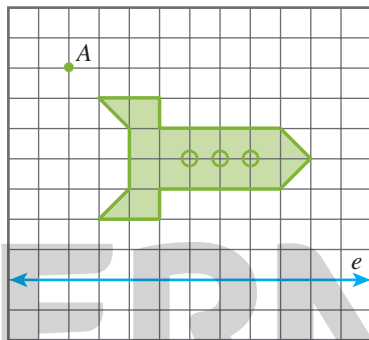
Agora, responda às questões.

- Se o lado \overline{DC} mede 2 unidades, quanto mede $\overline{D'C'}$? *2 unidades*
- Se a distância de F ao eixo r é igual a 4 unidades, qual é a medida de $\overline{FF'}$? *8 unidades*
- Se $\overline{EE'}$ mede 9 unidades, qual é a distância de E ao eixo r ? *E de E' ao eixo r ? 4,5 unidades; 4,5 unidades*
- Qual é a relação entre as medidas dos ângulos \widehat{ADF} e $\widehat{A'D'F'}$? *As medidas são iguais.*
- Se o hexágono $ABCDEF$ é um polígono regular, então o hexágono $A'B'C'D'E'F'$ também é? *sim*
- O perímetro dos dois hexágonos é o mesmo? *sim*
- A área da região interna dos dois hexágonos pode não ser a mesma? *não*

- 37** Responda às questões a seguir.
resposta possível: A mão esquerda está segurando a orelha direita.
- Imagine que você esteja diante de um espelho e que segure sua orelha esquerda com a mão direita. Como você descreveria a imagem refletida no espelho?
 - Imagine um movimento que você possa fazer diante do espelho. Como você descreveria a imagem formada com esse movimento? *resposta pessoal*

- 38** Copie a figura abaixo em três papéis quadriculados. Em uma das cópias, faça a reflexão do foguete em relação ao eixo e . Em outra, faça a translação do foguete, aplicando uma distância igual a 8 lados do quadrado da malha e movendo-o para a direita. Na terceira cópia, faça a rotação do foguete, girando-o em torno do ponto A , 135° no sentido anti-horário.

construção de figura



NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...



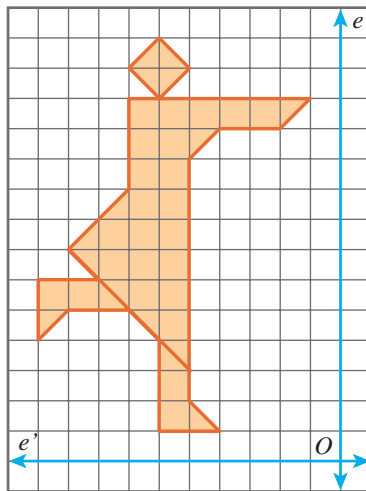
Reúna-se com dois colegas e façam o que se pede.

Copiem a figura ao lado em três papéis quadriculados.

Um dos colegas faz reflexões sucessivas em torno dos eixos e e e' . O outro faz, em outra cópia, a rotação de 180° em torno do ponto O no sentido horário. O terceiro faz na terceira cópia a rotação de 180° em torno do ponto O no sentido anti-horário. Em seguida, comparem os resultados e escrevam em seus cadernos as conclusões dessa comparação.

Espera-se que os alunos concluam que:

- duas reflexões sucessivas em relação a dois eixos perpendiculares equivalem a uma rotação de 180° em um dos sentidos em torno do ponto de intersecção dessas retas (centro de rotação).
- uma rotação de 180° em sentido horário em torno de um ponto equivale a uma rotação de 180° em sentido anti-horário em torno do mesmo ponto.



NELSON MATSUDA

1 (UFRGS-RS) O número de diagonais de um polígono é o dobro de seu número n de lados. O valor de n é: **alternativa c**

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9

2 Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 2.880° , responda.

- a) Quantos lados tem esse polígono? **18 lados**
- b) Se ele for regular, quanto mede cada um de seus ângulos externos? **20°**
- c) Quantas são as suas diagonais? **135 diagonais**

3 A medida de um ângulo externo de um polígono regular é 24° . Determine:

- a) o número de lados desse polígono; **15 lados**
- b) a medida de cada um de seus ângulos internos. **156°**

4 Sabendo que um triângulo é regular, responda em seu caderno.

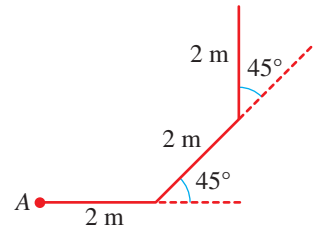
- a) Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **60°**
- b) Quanto mede cada um de seus ângulos externos? **120°**
- c) Se cada um dos lados desse triângulo mede 12,6 cm, quantos centímetros tem seu perímetro? **37,8 cm**

5 A diferença entre a medida de um ângulo interno de um hexágono regular e a medida de um ângulo interno de um quadrado é igual à medida do ângulo externo de qual polígono regular? **dodecágono**

6 O número de diagonais de um polígono regular é o triplo do número de seus lados. Determine:

- a) o número de lados desse polígono; **9 lados**
- b) o número de suas diagonais; **27 diagonais**
- c) a soma das medidas dos ângulos internos; **1.260°**
- d) a medida de seu ângulo externo. **40°**

7 (PUCCamp-SP) A figura descreve o movimento de um robô:



Partindo de A , ele sistematicamente avança 2 m e gira 45° para a esquerda.

Quando esse robô retornar ao ponto A , a trajetória percorrida terá sido: **alternativa c**

- a) uma circunferência.
- b) um hexágono regular.
- c) um octógono regular.
- d) um decágono regular.
- e) um polígono não regular.

8 Existe um polígono regular em que a medida do ângulo interno é igual à medida do ângulo externo. Que polígono é esse? **quadrado**

9 A menor diagonal de um polígono regular forma, com um dos lados, um ângulo de 30° . Dê a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. **720°**

10 Quantas diagonais tem o polígono regular cujo ângulo interno mede 135° ? **20 diagonais**

11 O polígono regular P_1 tem o dobro do número de lados do polígono regular P_2 . Somando 36° à medida do ângulo interno de P_2 , obtém-se a medida do ângulo interno de P_1 . Quantos lados tem P_2 ? **5 lados**

12 A diferença entre o número de lados de dois polígonos é 2. Determine a diferença entre as somas das medidas dos ângulos internos desses dois polígonos. **360°**

13 O número de diagonais de um polígono regular é igual ao sêxtuplo do número de lados. Qual é a medida de seu ângulo externo? **24°**

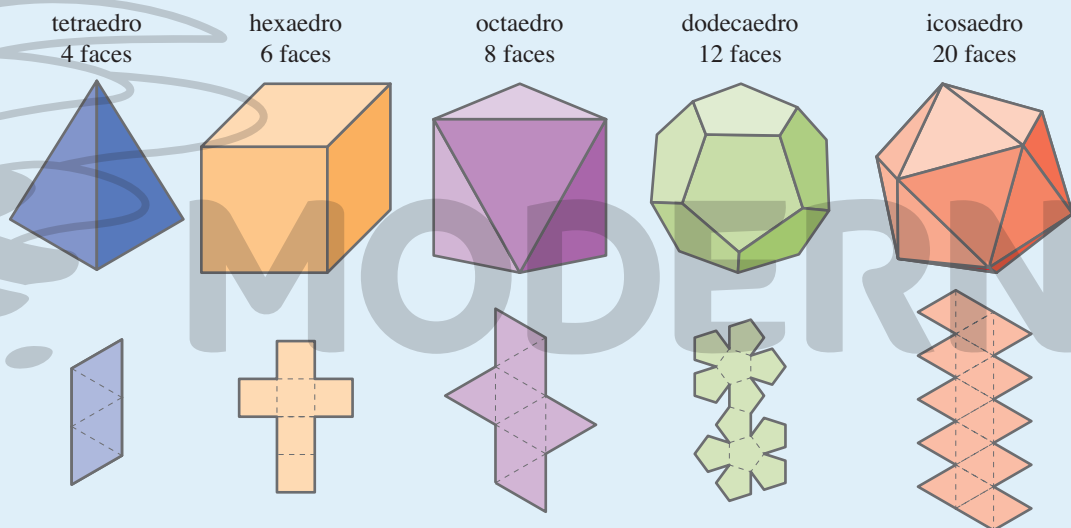
O RPG e os poliedros de Platão

Provavelmente, ao brincar com alguns jogos, você já teve contato com um dado de seis faces, aquele sólido que lembra um hexaedro (cubo). Alguns jogos usam esse dado, por exemplo, para mostrar quantas casas o peão do jogador deve avançar no tabuleiro.

O *role-playing game* (RPG), que pode ser traduzido como “jogo de interpretação de papéis”, é um jogo em que um dos participantes narra uma história, e os outros enriquecem e completam essa história, criando personagens a serem interpretados por eles mesmos.

ORPG pode usar dados com seis faces ou outros tipos de dado, como os da foto acima. Entre outras funções, os dados são usados para atribuir pontos de ataque, de defesa ou de vida. Esses dados, que lembram os cinco poliedros de Platão, têm polígonos regulares como faces.

Veja os poliedros de Platão e uma possível planificação deles.



Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Suponha que, para se defender de um ataque inimigo em uma aventura de RPG, um jogador precise de 18 pontos ou mais. Ele jogará o dado de 20 faces, numerado de 1 a 20. Quantas faces favorecem esse jogador? Quantas não o favorecem? **3 faces; 17 faces**
- Sabendo que os poliedros acima possuem faces que são polígonos, calcule o número de diagonais de cada um desses polígonos. **Espera-se que os alunos percebam que os polígonos das faces que são triângulos não têm diagonais. Uma face do cubo tem 2 diagonais e uma face do dodecaedro tem 5 diagonais.**
- Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono que forma a face do tetraedro? E a do que forma a face do cubo? E a do dodecaedro? Esses polígonos são convexos? Justifique sua resposta. **A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°, a do quadrado é 360° e a do pentágono é 540°. Esses polígonos são convexos, pois não possuem ângulos internos maiores que 180°.**

Produtos notáveis e fatoração

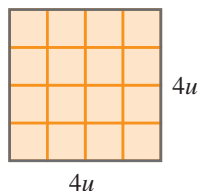
1 Os produtos notáveis

Vimos como calcular o produto de polinômios aplicando a propriedade distributiva da multiplicação. Agora, vamos estudar alguns produtos de binômios que aparecem com bastante frequência no cálculo algébrico, os chamados **produtos notáveis**.

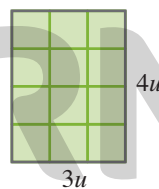
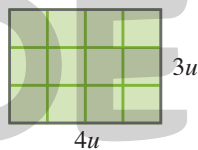
► Quadrado da soma de dois termos

Usando como unidade de medida o comprimento do segmento u , vamos construir:

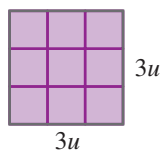
- um quadrado cujo lado mede $4u$;



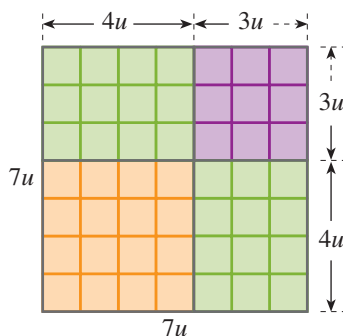
- dois retângulos cujos lados medem $4u$ e $3u$;



- um quadrado com lado medindo $3u$.



Juntando essas figuras montamos o quadrado ao lado.



Podemos calcular a área desse quadrado maior de duas maneiras. Veja:

- 1ª) Elevando a medida do seu lado ao quadrado:

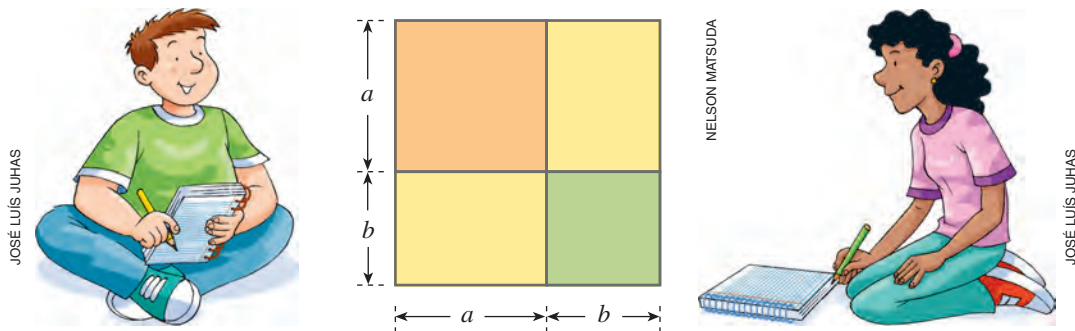
$$(4u + 3u)^2 = (7u)^2 = 49u^2$$

2ª) Somando as áreas das figuras construídas:

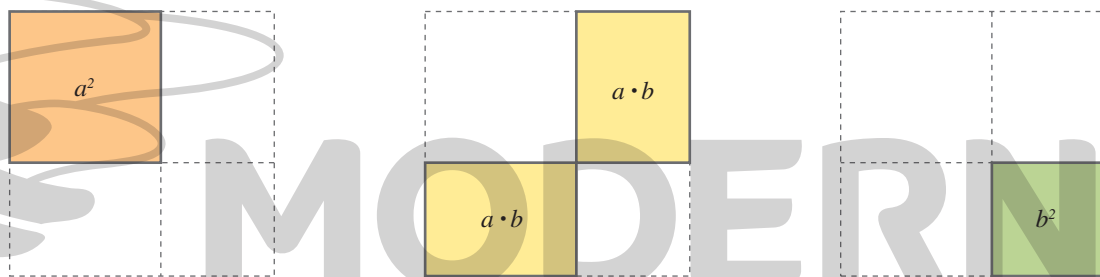
$$(4u)^2 + 2 \cdot (4u \cdot 3u) + (3u)^2 = 16u^2 + 24u^2 + 9u^2 = 49u^2$$

Assim, a área do quadrado é $49u^2$.

Agora, considere um quadrado de lado $a + b$, como mostra a figura abaixo.



Como a área de um quadrado de lado ℓ é ℓ^2 , então a área desse quadrado é $(a + b)^2$. Vamos separar as quatro partes em que o quadrado está dividido e indicar a expressão que representa a área de cada uma delas.



Somando as áreas em destaque, temos:

$$a^2 + 2 \cdot ab + b^2$$

Logo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esse resultado poderia ter sido obtido da seguinte maneira:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Portanto:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

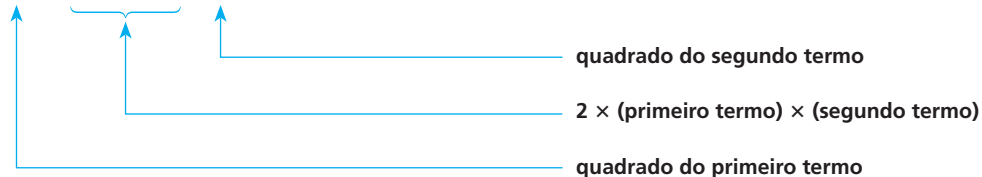
primeiro termo quadrado do segundo termo
 2 × (primeiro termo) × (segundo termo)
 quadrado do primeiro termo

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

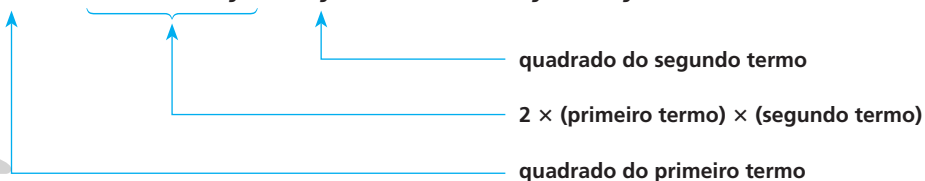
Veja a aplicação desse produto notável nos exemplos a seguir.

a) Efetue:

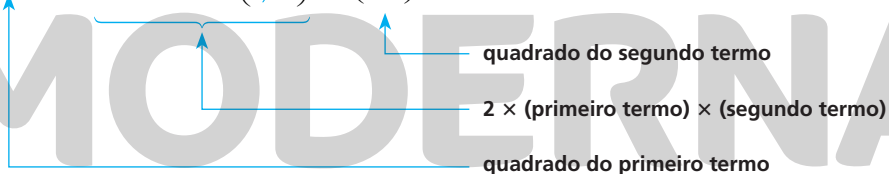
$$\bullet (x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$



$$\bullet (3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$$



$$\bullet \left(2x^3 + \frac{y}{2}\right)^2 = (2x^3)^2 + 2 \cdot (2x^3) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4x^6 + 2x^3y + \frac{y^2}{4}$$



b) Calcule:

$$\begin{aligned} \bullet (-3a + 5)^2 &= \\ &= (-3a)^2 + 2 \cdot (-3a) \cdot 5 + 5^2 = \\ &= 9a^2 - 30a + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (-5x - 2y)^2 &= \\ &= [(-5x) + (-2y)]^2 = \\ &= (-5x)^2 + 2 \cdot (-5x) \cdot (-2y) + (-2y)^2 = \\ &= 25x^2 + 20xy + 4y^2 \end{aligned}$$

c) Simplifique a expressão $4x^2(x + 2) - x(2x + 3)^2$.

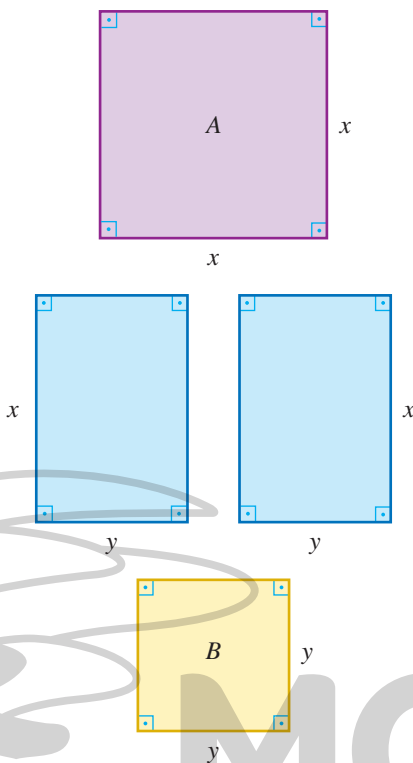
Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$\begin{aligned} &4x^2 \cdot (x + 2) - x \cdot (2x + 3)^2 = \\ &= 4x^3 + 8x^2 - x \cdot (4x^2 + 12x + 9) = \\ &= 4x^3 + 8x^2 - 4x^3 - 12x^2 - 9x = \\ &= -4x^2 - 9x \end{aligned}$$



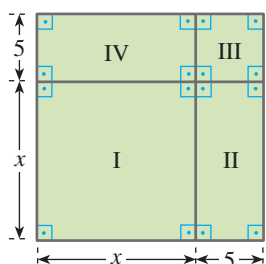
JOSÉ LUÍS JUHAS

- 1** Reproduza, em uma folha de papel sulfite, as figuras a seguir. Depois, recorte-as e monte um quadrado com elas. *construção de figura*



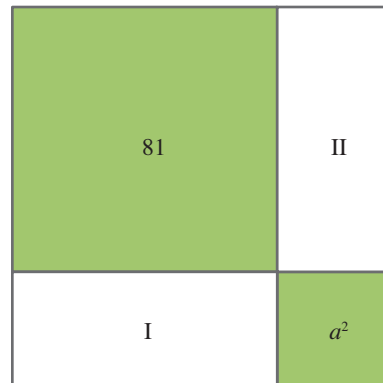
Agora, escreva:

- a área do quadrado A; x^2
 - a área de cada retângulo; xy
 - a área do quadrado B; y^2
 - a medida de cada lado da figura construída; $x + y$
 - a área da figura construída. $x^2 + 2xy + y^2$
- 2** Considerando a figura abaixo, faça o que se pede.



- I: x^2 , II: $5x$, III: 25 e IV: $5x$
- Determine as áreas I, II, III e IV.
 - Determine a área da figura toda. $x^2 + 10x + 25$
 - Calcule $(x + 5)^2$ e compare com a área da figura. $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

- 3** A figura abaixo representa um quadrado. As partes pintadas de verde também são quadradas, cujas áreas são as indicadas.



Faça o que se pede.

- Determine as áreas I e II. I: $9a$; II: $9a$
 - Determine a área da figura toda. $a^2 + 18a + 81$
 - Determine a medida do lado do quadrado maior. $a + 9$
 - Calcule $(a + 9)^2$ e compare com a área da figura. $(a + 9)^2 = a^2 + 18a + 81$
- 4** Corrija as sentenças falsas.

- $(x + 8)^2 = x^2 + 64$ $x^2 + 16x + 64$
- $(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x + 3y)^2 = x^2 + 3xy + (3y)^2 = x^2 + 3xy + 9y^2$ $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

- 5** Calcule o quadrado da soma nos itens a seguir.

- $(3x + y)^2$ $9x^2 + 6xy + y^2$
- $(3a + 2)^2$ $9a^2 + 12a + 4$
- $(4a + y^3)^2$ $16a^2 + 8ay^3 + y^6$
- $\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y\right)^2$ $\frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{5}xy + \frac{4}{25}y^2$

- 6** Simplifique as expressões abaixo.

- $a(5a - 1) + (a + 2)^2$ $6a^2 + 3a + 4$
- $(2x + 3)^2 - x(x - 4)$ $3x^2 + 16x + 9$
- $(y - 3)(y + 2) - (y + 1)^2$ $-3y - 7$
- $(9y + 1)^2 - (y + 9)^2$ $80y^2 - 80$
- $(2a + 3b)^2 - 4a(a + 3b)$ $9b^2$
- $(1 + 5a)^2 + 25(1 - a^2)$ $26 + 10a$

7 Os lados de um jardim quadrado foram aumentados em 3 metros.



JOSÉ LUIS JUHAS

Considerando x a medida do lado do jardim antes do aumento, dê o polinômio que representa:

- a) a nova área desse jardim; temos: $(x^2 + 6x + 9) m^2$
- b) o aumento verificado na área do jardim. $(6x + 9) m^2$

8 Desenvolva:

a) $x^2 - 12x + 36$
 $(-x + 6)^2$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$
 $\left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$

9 Elabore três expressões que representem o quadrado de uma soma. Troque-as com um colega para que cada um desenvolva as expressões do outro. Em seguida, desfaçam a troca e corrijam as expressões. *resposta pessoal*

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...



Podemos aplicar o quadrado da soma para fazer cálculos mais rápidos, até mesmo mentalmente.

Veja:

$$45^2 = (40 + 5)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2 = 1.600 + 400 + 25 = 2.025$$

$$81^2 = (80 + 1)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1^2 = 6.400 + 160 + 1 = 6.561$$

Agora, ao aplicar o quadrado da soma, calcule mentalmente as potências e, em seguida, registre o resultado.

a) 12^2
144

b) 24^2
576

c) 35^2
1.225

d) 52^2
2.704

PARA SABER MAIS +

A Matemática na História

O conceito de **produtos notáveis** apareceu na Grécia nos estudos de álgebra geométrica, ferramenta bastante empregada pelos gregos para lidar com situações que envolviam números irracionais.

A álgebra geométrica grega chegou até nós principalmente por meio do livro II da obra *Os elementos*, de Euclides (c. 325-265 a.C.). Entretanto, é muito provável que a álgebra dos primeiros gregos – desde os pitagóricos (século VI a.C. ao século III a.C.) até Euclides, Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (262-190 a.C.) – já era geométrica, o que estabeleceu uma tradição na representação de situações essencialmente

algébricas, bem como daquelas que envolviam números irracionais.

Vários fatores podem ser associados a essa tradição, por exemplo, a dificuldade de lidar, na época, com números irracionais e números racionais, a inexistência de uma notação algébrica satisfatória (que surgiu somente no século XVI d.C.) e o grande avanço da Geometria (que naturalmente empregaria a álgebra geométrica sempre que possível na representação de situações matemáticas). Portanto, era natural para os matemáticos gregos desse período adotar um estilo geométrico para o qual tinham habilidade.

No livro II de *Os elementos*, são encontradas algumas identidades algébricas, como:

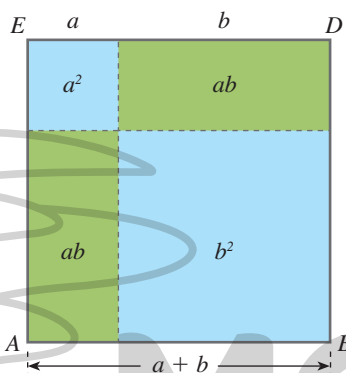
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

Entretanto, essas identidades não eram apresentadas dessa forma, pois, na época, não havia essas notações. Os gregos, desde os pitagóricos até Euclides, pensavam nessas situações geometricamente.

Por exemplo, o produto ab era visto como um retângulo de base a e altura b . Assim, a identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era representada como o diagrama da figura abaixo.



E enunciada da seguinte maneira:

“Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm”.

Euclides registrou esse resultado pitagórico na proposição 4 do livro II de *Os elementos* e a prova é dada diretamente pela interpretação geométrica da situação.

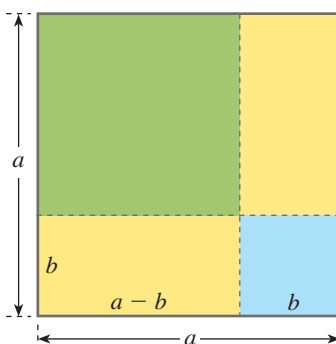
Na figura, “o quadrado sobre a linha toda” é o quadrado $ABDE$, “aos quadrados sobre as duas partes” são os quadrados de áreas a^2 e b^2 (em azul) e “duas vezes o retângulo que as partes contêm” são os dois retângulos de área ab (em verde).



Essa proposição (4) é representativa da forma como os problemas que envolvem álgebra eram concebidos e apresentados. Seguramente, as tentativas de expressão de todas as situações algébricas surgidas naquela época, segundo a álgebra geométrica, podiam levar a construções muito complicadas. Em virtude disso, a álgebra geométrica necessita mais do que um texto escrito para que seja bem entendida, por isso o uso de figuras.

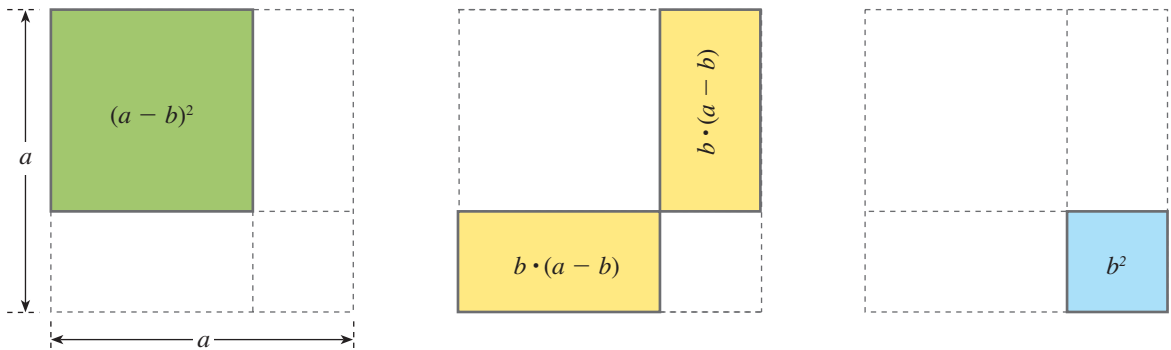
Quadrado da diferença de dois termos

Considere esta figura:



Analisando a figura, sabemos que o lado do quadrado verde mede $a - b$. Assim, chegamos ao polinômio que representa a área desse quadrado, ou seja, $(a - b)^2$.

Vamos separar as quatro partes em que o quadrado maior está dividido e indicar a expressão que representa a área de cada uma delas.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Observe que a área do quadrado verde é igual à área do quadrado de lado a , menos as duas áreas dos retângulos amarelos e menos a área do quadrado azul, cujo lado mede b , ou seja:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= a^2 - 2 \cdot b \cdot (a - b) - b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Também podemos calcular o quadrado de $a - b$ aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Portanto:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

primeiro termo segundo termo quadrado do segundo termo
 $2 \times (\text{primeiro termo}) \times (\text{segundo termo})$
quadrado do primeiro termo

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Veja alguns exemplos.

a) Desenvolva:

- $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
- $(3a - b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot (3a) \cdot b + b^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$
- $\left(\frac{2x}{3} - \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{4x^2}{9} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{4}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Simplifique a expressão $(x - 2) \cdot (x - 5)^2 - x \cdot (x - 6)^2$.

$$\begin{aligned} & (x - 2) \cdot (x - 5)^2 - x \cdot (x - 6)^2 = \\ & = (x - 2) \cdot (x^2 - 10x + 25) - x \cdot (x^2 - 12x + 36) = \\ & = \cancel{x^3} - 10\cancel{x^2} + 25x - 2\cancel{x^2} + 20x - 50 - \cancel{x^3} + 12\cancel{x^2} - 36x = 9x - 50 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

10 Desenvolva os quadrados da diferença.

a) $(3a - 5)^2$ $9a^2 - 30a + 25$ d) $(3a^2 - 1)^2$ $9a^4 - 6a^2 + 1$

b) $(5 - 4a)^2$ $25 - 40a + 16a^2$ e) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $(3x - 2y)^2$ $9x^2 - 12xy + 4y^2$ $x^2 - x + \frac{1}{4}$

11 Simplifique as expressões a seguir.

a) $(2x + 1)^2 + (x - 5)^2$ $5x^2 - 6x + 26$

b) $(x - 1)^2 - (x + 1)^2$ $-4x$

c) $x(x - 3)^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

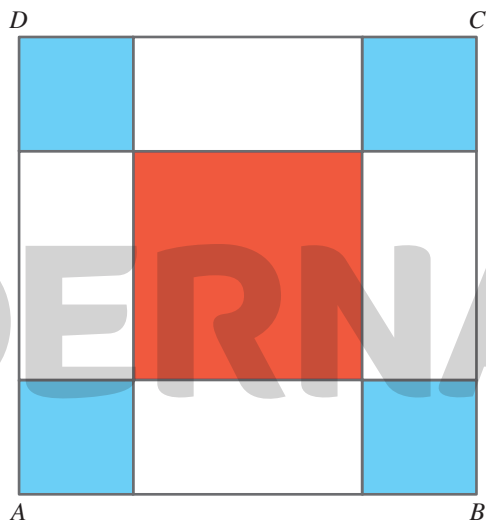
d) $(x - 3)^2 - (x + 2)^2 + (x + 3)(x - 1)$ $x^2 - 8x + 2$

12 Sendo $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$, calcule o valor de:

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ 7 b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ 3

13 Elabore três expressões que representem o quadrado de uma diferença. Troque-as com um colega para que cada um desenvolva as expressões do outro. Em seguida, desfaçam a troca e façam as correções. *resposta pessoal*

14 Na figura a seguir, as medidas são dadas em uma mesma unidade. O lado do quadrado $ABCD$ mede 10 e o lado de cada quadrado azul, $2x$. Para que valor de x a soma das áreas dos quadrados azuis é igual à área do quadrado vermelho? *$x = 1,25$*
Nesse caso, quanto vale a soma das áreas dos quatro retângulos brancos? *50*



15 Determine o perímetro de um quadrado cuja área é $4x^2 - 4x + 1$. *$8x - 4$*

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Podemos aplicar o quadrado da diferença para realizar cálculos com mais rapidez, até mesmo mentalmente. Veja:

$$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1.600 - 80 + 1 = 1.521$$

$$48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2.500 - 200 + 4 = 2.304$$

Agora, aplicando o quadrado da diferença, calcule mentalmente as potências e, em seguida, registre o resultado.

a) 29^2 *841*

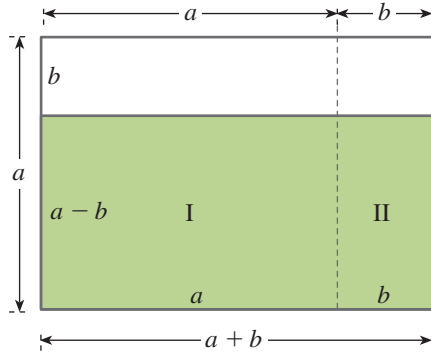
b) 38^2 *1.444*

c) 99^2 *9.801*

d) 57^2 *3.249*

► Produto da soma pela diferença de dois termos

Observe a figura abaixo.



NELSON MATSUUDA

JOSÉ LUÍS JUHAS

Por meio dela, podemos conhecer o polinômio que representa a área do retângulo verde.

A base desse retângulo mede $a + b$ e a altura, $a - b$.

Portanto, a área do retângulo verde é igual a $(a + b) \cdot (a - b)$.

A área do retângulo I é dada por $a \cdot (a - b)$ e a área do retângulo II, por $b \cdot (a - b)$.

Observe, na figura, que essa área é dada pela soma das áreas de I e de II, ou seja:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Também podemos calcular o produto $(a + b) \cdot (a - b)$ aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Portanto:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{primeiro} \\ \text{termo} \end{array} & + & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{segundo} \\ \text{termo} \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{primeiro} \\ \text{termo} \end{array} & - & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{segundo} \\ \text{termo} \end{array} & = & \begin{array}{c} \uparrow \\ a^2 \end{array} & - & \begin{array}{c} \uparrow \\ b^2 \\ \text{quadrado do segundo termo} \\ \text{quadrado do primeiro termo} \end{array} \end{array}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Veja alguns exemplos.

a) $(5m + 2n) \cdot (5m - 2n) = (5m)^2 - (2n)^2 = 25m^2 - 4n^2$

\uparrow \uparrow
quadrado do segundo termo
quadrado do primeiro termo

b) $\left(5a + \frac{2}{3}b\right) \cdot \left(5a - \frac{2}{3}b\right) = (5a)^2 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2 = 25a^2 - \frac{4}{9}b^2$

\uparrow \uparrow
quadrado do segundo termo
quadrado do primeiro termo

16 Copie as sentenças a seguir, corrigindo as que forem falsas.

a) $(5x - 2) \cdot (5x + 2) = (5x)^2 - 2^2 = 25x^2 - 4$

b) $(4a^2 + 7b) \cdot (4a^2 - 7b) = (4a^2)^2 - (7b)^2 = 16a^2 - 49b$ **$16a^4 - 49b^2$**

c) $(0,3x + 0,4y) \cdot (0,3x - 0,4y) = (0,3x)^2 - (0,4y)^2 = 0,9x^2 - 1,6y^2$
 $0,09x^2 - 0,16y^2$

17 Calcule:

a) $(x + 11) \cdot (x - 11)$ **$x^2 - 121$**

b) $(5 - a^3) \cdot (5 + a^3)$ **$25 - a^6$**

c) $(a^2 - 5) \cdot (a^2 + 5)$ **$a^4 - 25$**

d) $\left(\frac{3}{4}x + y\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x - y\right)$ **$\frac{9}{16}x^2 - y^2$**

18 Simplifique as expressões.

a) $(3x + 2) \cdot (3x - 2) + (x + 2)^2$ **$10x^2 + 4x$**

b) $(5x - 6)^2 - (5x + 4) \cdot (5x - 4)$ **$-60x + 52$**

c) $32m^2 + 16m - 2 \cdot (4m + 1)^2$ **-2**

19 Existem certas “adivinhações” em Matemática que podem ser comprovadas por meio de processos algébricos. Vejamos uma delas.

Pense em um número natural não nulo qualquer. x



Multiplique o sucessor pelo antecessor do número pensado. **$(x + 1) \cdot (x - 1)$**

$(x + 1) \cdot (x - 1)$

$\sqrt{x^2 - 1 + 1} = \sqrt{x^2}$

Adicione 1 ao resultado e extraia a raiz quadrada.

O último resultado é o número que você pensou!

Como x é um número natural, temos $\sqrt{x^2} = x$.

Justifique, algebricamente, essa “adivinhação”.

20 Reúna-se com um colega e resolvam os problemas a seguir.



Para isso:

- leiam atentamente o enunciado e identifiquem o que é dado e o que é pedido;
- transformem em linguagem matemática (sentenças numéricas ou algébricas, esquemas, construções geométricas etc.) as informações dadas;
- com base nas relações estabelecidas no item anterior, formulem e executem um plano de resolução;
- façam, finalmente, a verificação das respostas obtidas.

a) Sabendo que $25^2 = 625$, calculem $(25 + 1) \cdot (25 - 1)$. **624**

b) Sabendo que $20^2 = 400$, calculem o produto $21 \cdot 19$. **399**

c) A soma de dois números é 28 e a diferença, 10. Calculem a diferença entre os quadrados desses números. Em seguida, determinem os dois números e verifiquem a solução. **280; 19 e 9**

d) Se dois números têm por soma 30 e por diferença 20, então qual é a diferença entre os quadrados desses números? **600**

e) Deem o valor de $26 \cdot 28$, sabendo que $27^2 = 729$. **728**

f) Sabendo que $(m + h) = 4$ e que $m^2 - h^2 = 80$, calculem $m - h$. **20**

g) Cortando uma folha com formato de um quadrado em quatro retângulos iguais, pode-se montar a figura 2. Determinem a área da parte hachurada. **$9x^2$**

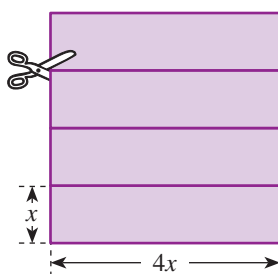


Figura 1

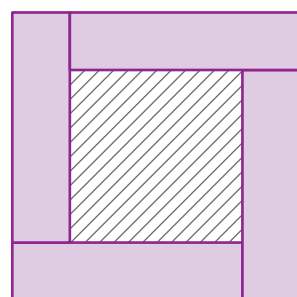
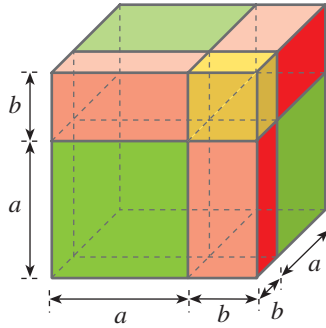


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

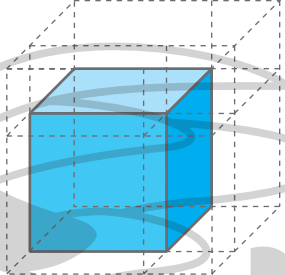
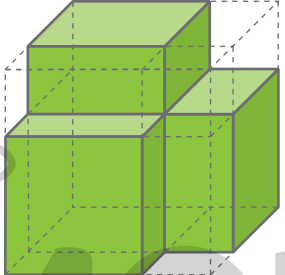
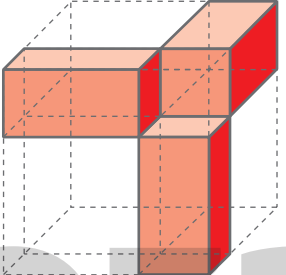
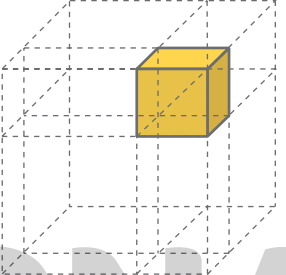
► Cubo da soma e da diferença de dois termos

Considere um cubo cuja aresta mede $a + b$, como mostra a figura abaixo.



O volume desse cubo é dado por $(a + b)^3$.

Vamos separar as partes em que o cubo está dividido:

 <p>Um cubo de aresta a. O volume do cubo é igual a a^3.</p>	 <p>Três paralelepípedos que têm arestas a, a e b. Cada paralelepípedo tem volume a^2b. O volume dos três paralelepípedos é igual a $3a^2b$.</p>	 <p>Três paralelepípedos que têm arestas a, b e b. Cada paralelepípedo tem volume ab^2. O volume dos três paralelepípedos é igual a $3ab^2$.</p>	 <p>Um cubo de aresta b. O volume do cubo é igual a b^3.</p>
--	---	--	--

Somando todos esses volumes, obtemos $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Como o volume do todo é igual à soma dos volumes das partes, temos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esse mesmo resultado também pode ser obtido aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Portanto:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

primeiro termo segundo termo cubo do segundo termo
 $3 \times (\text{primeiro termo}) \times (\text{quadrado do segundo termo})$
 $3 \times (\text{quadrado do primeiro termo}) \times (\text{segundo termo})$
 cubo do primeiro termo

Veja também o cubo da diferença de dois termos.

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Portanto:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

primeiro termo segundo termo cubo do segundo termo
 $3 \times (\text{primeiro termo}) \times (\text{quadrado do segundo termo})$
 $3 \times (\text{quadrado do primeiro termo}) \times (\text{segundo termo})$
 cubo do primeiro termo

Observe alguns exemplos.

a) $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$
 $= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3 =$
 $= 8x^3 + 3 \cdot (4x^2) \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3 =$
 $= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

c) $(5x - 2)^3 = (5x)^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (5x) \cdot 2^2 - 2^3 =$
 $= 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$



JOSÉ LUIS JUHAS

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

21 Desenvolva:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
 $(x + 1)^3$

c) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$
 $(1 - x)^3$

b) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$
 $(2a + 3)^3$

d) $27a^3 - 54a^2 + 36a - 8$
 $(3a - 2)^3$

22 Calcule a diferença entre o cubo de $(4a - b)$ e o cubo de $(4a + b)$. $-96a^2b - 2b^3$

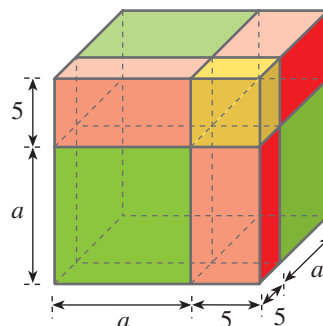
23 Simplifique as expressões abaixo.

a) $(2a + 1)^3 - 6a(2a + 1)$ $8a^3 + 1$

b) $(a - b)^3 - 3ab(b - a)$ $a^3 - b^3$

c) $(x - 2y)^3 + 6xy \cdot (x - 2y)$ $x^3 - 8y^3$

24 Determine o polinômio que representa o volume do cubo abaixo. $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$



NELSON MATSUDA

2 Fatoração de polinômios

Sabemos que um número natural pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores. Esse procedimento é chamado de **fatoração**. Existem várias maneiras de fatorar um número natural. Observe alguns exemplos de fatoração do número 72.

$$72 = 8 \cdot 9$$

$$72 = 6 \cdot 12$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 18$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Assim como os números naturais, alguns polinômios também podem ser fatorados.

Fatorar um polinômio, quando possível, significa escrevê-lo como produto de polinômios mais simples. Veja um exemplo.

Considere a figura abaixo.



A área dessa figura pode ser determinada pela soma das áreas I e II:

$$\text{área da figura} = \text{área I} + \text{área II} = ac + bc$$

Também podemos encontrar a área da figura calculando a área do retângulo de base $(a + b)$ e altura c , ou seja:

$$\text{área da figura} = (a + b) \cdot c$$

$$\text{Logo: } ac + bc = (a + b) \cdot c$$

A expressão $(a + b) \cdot c$ é a forma fatorada do polinômio $ac + bc$.

PARA SABER MAIS



Fatorando expressões numéricas

Assim como os números, as expressões numéricas também podem ser fatoradas.

Já sabemos que, pela propriedade distributiva da multiplicação, é possível desenvolver uma expressão numérica escrita na forma fatorada. Veja:

$$\bullet \underbrace{3 \cdot (5 + 12)}_{\text{forma fatorada}} = \underbrace{3 \cdot 5 + 3 \cdot 12}_{\text{forma desenvolvida}}$$

$$\bullet \underbrace{3,2 \cdot (8 - 0,5)}_{\text{forma fatorada}} = \underbrace{3,2 \cdot 8 - 3,2 \cdot 0,5}_{\text{forma desenvolvida}}$$

Agora, vamos fazer o inverso, ou seja, escrever na forma fatorada expressões desenvolvidas pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

$$\bullet 5 \cdot 3 + 5 \cdot 11$$

Trata-se de uma adição, em que cada parcela é um produto de dois fatores em que o número **5** é um **fator comum**.

$$\underbrace{5 \cdot 3 + 5 \cdot 11}_{\text{forma desenvolvida}} = \underbrace{5 \cdot (3 + 11)}_{\text{forma fatorada}}$$

$$\bullet 2,4 \cdot 7 - 2,4 \cdot 2$$

Cada parcela tem em comum o fator **2,4**.

$$\underbrace{2,4 \cdot 7 - 2,4 \cdot 2}_{\text{forma desenvolvida}} = \underbrace{2,4 \cdot (7 - 2)}_{\text{forma fatorada}}$$

Esse procedimento nos ajuda a calcular de maneira mais fácil – ou até mesmo mentalmente – o valor de algumas expressões numéricas.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO



1 Calcule mentalmente: $0,21 \cdot 7 + 0,21 \cdot 3$ **2,1**

resposta possível:
 $0,21 \cdot 7 + 0,21 \cdot 3 = 0,21 \cdot (7 + 3) = 0,21 \cdot 10 = 2,1$

2 Explique como você pensou para fazer o cálculo na atividade 1.

3 Calcule o valor das expressões abaixo.

a) $15 \cdot 18 + 15 \cdot 2$ **300**

b) $5,4 \cdot 13 - 5,4 \cdot 3$ **54**

c) $12 \cdot \frac{7}{13} + 12 \cdot \frac{6}{13}$ **12**

d) $4,5 \cdot 8 + 4,5 \cdot 7 - 4,5 \cdot 5$ **45**

e) $3,8 \cdot 4,2 + 3,8 \cdot 4,6 + 3,8 \cdot 1,2$ **38**

f) $10 \cdot \frac{17}{11} - 10 \cdot \frac{6}{11}$ **10**

► Fatoração colocando em evidência um fator comum

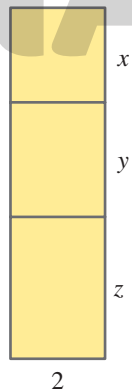
Considere a figura ao lado, formada por três retângulos de mesma base (2). A área dessa figura pode ser dada pela soma das áreas dos três retângulos:

$$A = 2x + 2y + 2z$$

Podemos também determinar essa área considerando o retângulo maior, cuja altura é $(x + y + z)$ e a base, comum aos três retângulos, é 2. Veja:

$$A = 2 \cdot (x + y + z)$$

↑
base comum aos três retângulos



Logo: $2x + 2y + 2z = 2 \cdot (x + y + z)$

Nesse caso, dizemos que $2(x + y + z)$ é a **forma fatorada** do polinômio $2x + 2y + 2z$ e também que colocamos **em evidência o fator comum** a todos os termos (2).

Observe alguns exemplos.

a) Fatore o polinômio $25ab^2 - 15a^3b$.

$$25ab^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b$$

$$15a^3b = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$$

O fator comum é $5ab$.

Portanto:

$$25ab^2 - 15a^3b = 5ab(5b - 3a^2)$$

\swarrow \swarrow
 $25ab^2 : 5ab$ $15a^3b : 5ab$

- b) Calcule o valor numérico do polinômio $x^2y - xy^2$, sabendo que $xy = 21$ e $x - y = 4$.
Inicialmente, vamos fatorar o polinômio:

$$x^2y - xy^2 = xy \cdot (x - y)$$

Agora, substituímos xy por 21 e $(x - y)$ por 4 na expressão fatorada:

$$xy \cdot (x - y) = 21 \cdot 4 = 84$$

- c) Resolva a equação $2x^2 - 35x = 0$, em que x é um número real.

O fator comum aos termos do polinômio $2x^2 - 35x$ é x .

Portanto:

$$2x^2 - 35x = 0$$

$$\text{ou } x(2x - 35) = 0$$

Como o produto é nulo, então um dos dois fatores é obrigatoriamente nulo, ou seja:

$$x = 0 \text{ ou } 2x - 35 = 0$$

$$2x = 35$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{35}{2}$$

$$x = 17,5$$

Logo, as soluções da equação são 0 ou 17,5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 25 Considere o binômio $15ax^2 - 10a^2x$ e responda:

a) Quais são os fatores comuns a esses dois termos? $5ax$

b) Qual é a forma fatorada desse binômio?

$$5ax(3x - 2a)$$

- 26 Fatore os binômios colocando os fatores comuns em evidência.

a) $ab + ac$ $a(b + c)$

d) $5x + 20$ $5(x + 4)$

b) $x^2 + 3x$ $x(x + 3)$

e) $14a^2b + 21ab^3$

c) $a^2 + a$ $a(a + 1)$

f) $15x^3 - 10x^2$ $5x^2(3x - 2)$

- 27 Reúna-se com um colega e resolvam os problemas a seguir.

Para isso:

- leiam atentamente o enunciado e identifiquem o que é dado e o que é pedido;
- transformem em linguagem matemática (sentenças numéricas ou algébricas, esquemas, construções geométricas etc.) as informações dadas;
- com base nas relações estabelecidas no item anterior, formulem e executem um plano de resolução;

- façam, finalmente, a verificação das respostas obtidas.

a) Qual é o número cujo dobro de seu quadrado é igual ao seu triplo? 0 ou $\frac{3}{2}$

b) Existe um número diferente de zero cujo triplo de seu quadrado é igual ao seu dobro. Que número é esse? $\frac{2}{3}$

c) Observem as figuras abaixo.

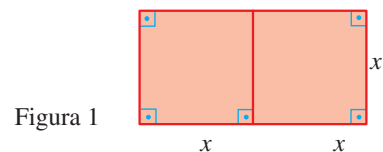


Figura 1

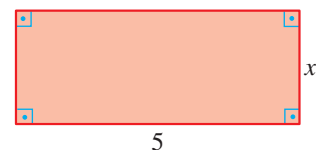


Figura 2

Na figura 1, temos dois quadrados cujos lados medem x e, na figura 2, um retângulo cujos lados medem x e 5. Qual deve ser o valor de x para que satisfaça a relação: área da figura 1 é igual à área da figura 2? $2,5$

28 Fatore os polinômios a seguir.

- a) $a^3 + a^2 + a$ $a(a^2 + a + 1)$
 b) $6x^2 - 9x + 12$ $3(2x^2 - 3x + 4)$
 c) $3x + 6x^2 + 9x^3$ $3x(1 + 2x + 3x^2)$
 d) $10x^3 - 15x^2 + 20x$ $5x(2x^2 - 3x + 4)$
 e) $\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{6}$ $\frac{a}{2}\left(1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3}\right)$
 f) $\frac{m}{12} - \frac{5m^2}{6} + \frac{2m^3}{9}$ $\frac{m}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{5m}{2} + \frac{2m^2}{3}\right)$

29 Fatore a expressão

$x(y - 2) - 7(y - 2) + a(y - 2)$ colocando o fator $(y - 2)$ em evidência. $(y - 2)(x - 7 + a)$

30 Sabendo que $2xy = 12$ e $3x - y = 3$, quanto vale $6x^2y - 2xy^2$? **36**

31 Resolva as equações abaixo.

- a) $x^2 + 7x = 0$ d) $2x^2 - 9x = 0$ $x = 0$ ou $x = \frac{9}{2}$
 b) $m^2 - 5m = 0$ e) $x^2 = x$ $x = 0$ ou $x = 1$
 c) $3y^2 - 18y = 0$ f) $4x^2 = -3x$
 a) $x = 0$ ou $x = -\frac{3}{4}$
 b) $m = 0$ ou $m = 5$
 c) $y = 0$ ou $y = 6$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

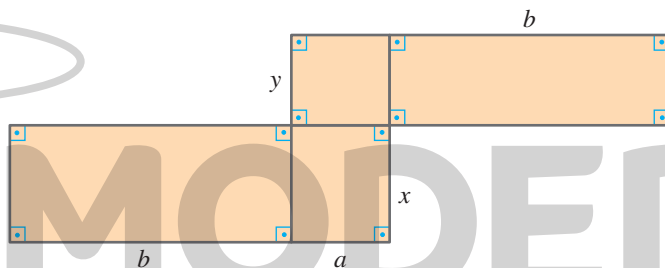
Pense mais um pouco...

Sejam m e n dois números naturais quaisquer. Então, $2m$ e $2n$ são dois números pares.

Lembrando que o consecutivo de um número par é um número ímpar, prove que a soma de dois números ímpares quaisquer sempre é um número par. $(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$

Fatoração por agrupamento

Considere a figura a seguir.



A expressão que representa a área dessa figura é o polinômio:

$$ax + ay + bx + by$$

Observe que não há fatores comuns a todos os termos desse polinômio, mas é possível agrupá-los de modo que cada grupo tenha um fator comum. Nesse caso, o polinômio é fatorado por agrupamento. Veja.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ ax + ay + bx + by = \\ = (ax + ay) + (bx + by) = \leftarrow \text{Agrupamos convenientemente os termos.} \\ = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) = \leftarrow \text{Colocamos em evidência o fator comum de cada grupo.} \\ = (x + y) \cdot (a + b) \leftarrow \text{Colocamos o fator comum } (x + y) \text{ em evidência.} \end{array} \end{aligned}$$

Veja outros exemplos.

a) $xy + 2x + 4y + 8 =$
 $= (xy + 2x) + (4y + 8) = \leftarrow$ Agrupamos convenientemente os termos.
 $= x(y + 2) + 4(y + 2) = \leftarrow$ Colocamos em evidência o fator comum de cada grupo.
 $= (y + 2)(x + 4) \leftarrow$ Colocamos o fator comum $(y + 2)$ em evidência.

O produto $(y + 2) \cdot (x + 4)$ é a forma fatorada do polinômio $xy + 2x + 4y + 8$.

Poderíamos também ter agrupado os termos do polinômio da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 xy + 2x + 4y + 8 &= \\
 &= (xy + 4y) + (2x + 8) = \\
 &= y(x + 4) + 2(x + 4) = \\
 &= (x + 4)(y + 2)
 \end{aligned}$$



JOSÉ LUIS JUHAS

b) $ax - bx + 2a - 2b =$
 $= (ax - bx) + (2a - 2b) =$
 $= x(a - b) + 2(a - b) =$
 $= (a - b) \cdot (x + 2)$

O produto $(a - b) \cdot (x + 2)$ é a forma fatorada do polinômio $ax - bx + 2a - 2b$.

c) $xy + 2x - 3y - 6 =$
 $= (xy + 2x) - (3y + 6) =$
 $= x(y + 2) - 3(y + 2) =$
 $= (y + 2) \cdot (x - 3)$

O produto $(y + 2) \cdot (x - 3)$ é a forma fatorada do polinômio $xy + 2x - 3y - 6$.

d) Sabendo que $3a - b = 10$ e $a + c = 3$, calcule o valor da expressão $3a^2 + 3ac - ab - bc$. Fatorando a expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
 3a^2 + 3ac - ab - bc &= \\
 &= 3a(a + c) - b(a + c) = \\
 &= \underbrace{(a + c)}_3 \cdot \underbrace{(3a - b)}_{10} = \leftarrow \text{Substituímos } (a + c) \text{ por } 3 \text{ e } (3a - b) \text{ por } 10. \\
 &= 3 \cdot 10 = 30
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

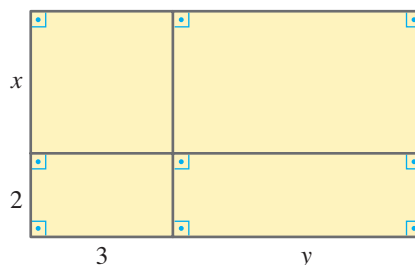
32 Fatore cada polinômio abaixo.

- a)** $5x - xy + 15 - 3y$ $(5 - y)(x + 3)$
b) $2ax + 3a + 4bx + 6b$ $(2x + 3)(a + 2b)$
c) $ax - 2a + x - 2$ $(x - 2)(a + 1)$
d) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ $(x + 3)(x^2 + 2)$
e) $10x^2 - 15xy - 4x + 6y$ $(2x - 3y)(5x - 2)$
f) $a^3 - a^2 + a - 1$ $(a - 1)(a^2 + 1)$
g) $x^3 + x^2 + x + 1$ $(x + 1)(x^2 + 1)$

33 Considerando a expressão $mx - my + nx - ny$, faça o que se pede.

- a)** Sabendo que $m + n = 10$ e $x - y = 2$, determine o valor da expressão dada. **20**
b) Faça uma figura cuja área possa ser representada pela expressão dada. construção de figura
c) Escreva a área da figura indicando o produto da medida da base pela medida da altura. $(m + n)(x - y)$

34 Considere a figura abaixo.



Agora, faça o que se pede.

- a)** Determine a área da figura somando as áreas das quatro partes. $3x + 6 + xy + 2y$
b) Determine a área da figura indicando o produto da medida da base pela medida da altura.
c) Fatore a expressão obtida no item **a**.
d) Calcule o produto encontrado no item **b**.
e) Escreva a igualdade entre os resultados encontrados nos itens **a** e **b**. $34. \text{ b) } (3 + y)(x + 2)$
34. c) $(x + 2)(3 + y)$ $3x + 6 + xy + 2y = (x + 2)(3 + y)$
34. d) $3x + xy + 6 + 2y$

NELSON MATSUDA

► Fatoração da diferença de dois quadrados

A área da figura 1 é dada por $a^2 - b^2$.

Observe o que acontece quando recortamos e deslocamos a parte I, conforme mostram as figuras 2 e 3.

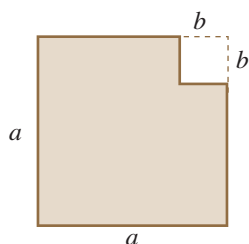


Figura 1

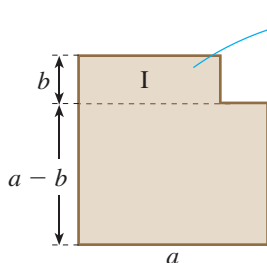


Figura 2

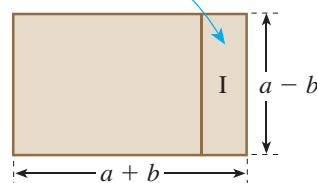


Figura 3

Obtemos um retângulo cujos lados medem $(a + b)$ e $(a - b)$. Sua área é dada por $(a + b) \cdot (a - b)$. Como a área da figura 1 é igual à área da figura 3, temos:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

diferença de dois quadrados forma fatorada de $a^2 - b^2$

Veja alguns exemplos.

a) Fatore:

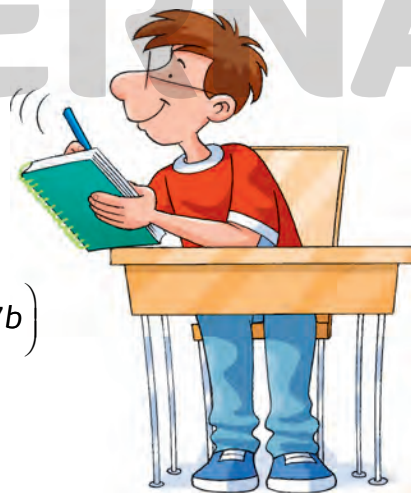
$$\bullet x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

$$\bullet \frac{4}{9}a^2 - 49b^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - (7b)^2 = \left(\frac{2}{3}a + 7b\right)\left(\frac{2}{3}a - 7b\right)$$

$$\bullet (a + b)^2 - c^2 = [(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c] = (a + b + c)(a + b - c)$$

$$\bullet 36 - (x - 2)^2 = 6^2 - (x - 2)^2 = [6 + (x - 2)] \cdot [6 - (x - 2)] = (6 + x - 2)(6 - x + 2) = (4 + x)(8 - x)$$

$$\bullet (y + 2)^2 - (y - 2)^2 = [(y + 2) + (y - 2)] \cdot [(y + 2) - (y - 2)] = (y + 2 + y - 2) \cdot (y + 2 - y + 2) = 2y \cdot 4 = 8y$$



JOSÉ LUIS JUIHAS

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUUDA

b) Fatore completamente a expressão $5a^2 - 20$.

Colocando o fator comum (5) em evidência, temos:

$$5a^2 - 20 = 5(a^2 - 4) = 5(a + 2)(a - 2)$$

 diferença de dois quadrados

c) Resolva a equação $x^2 - 4 = 0$, sendo x um número real.

Ao fatorar o binômio $x^2 - 4$, temos:

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

O produto é nulo; logo, um dos fatores é nulo.

$$x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -2 \quad \quad \quad x = 2$$

Portanto, as soluções da equação são $x = -2$ ou $x = 2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35. e) $\left(\frac{1}{10}a + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{10}a - \frac{1}{7}\right)$
 Fatore as diferenças de dois quadrados a seguir.

a) $x^2 - 4(x + 2)(x - 2)$ d) $25x^2 - 4(5x + 2)(5x - 2)$

b) $a^2 - 36(a + 6)(a - 6)$ e) $\frac{1}{100}a^2 - \frac{1}{49}$

c) $y^2 - 1(y + 1)(y - 1)$ f) $x^2y^2 - \frac{1}{9}\left(xy + \frac{1}{3}\right)\left(xy - \frac{1}{3}\right)$

36. Fatore as expressões abaixo.

a) $15xy + 9x \quad 3x(5y + 3)$

b) $15xy + 9x + 10y + 6 \quad (3x + 2)(5y + 3)$

c) $100x^2 - 1 \quad (10x + 1)(10x - 1)$

d) $36a^2b - 48ab^2 \quad 12ab(3a - 4b)$

e) $(x - 1)^2 - 1 \quad x(x - 2)$

f) $(x + 5)^2 - 9 \quad (x + 8)(x + 2)$

g) $25 - (x + y)^2 \quad (5 + x + y)(5 - x - y)$

h) $9a^2 - (a - 5)^2 \quad (4a - 5)(2a + 5)$

37. Fatore completamente as expressões.

a) $a^3 - a \quad a(a + 1)(a - 1)$ c) $a^2b - b^3 \quad b(a + b)(a - b)$

b) $12x^3 - 3xy^2 \quad 3x(2x + y)(2x - y)$ d) $a^3 - 9a \quad a(a + 3)(a - 3)$

38. Considerando x um número real, resolva cada equação abaixo.

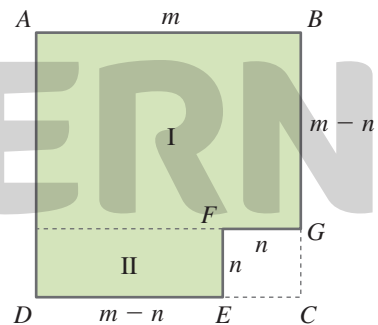
a) $x^2 - 25 = 0 \quad x = \frac{5}{5} \text{ ou } x = -\frac{5}{5}$ d) $25x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 64 = 0 \quad x = 8 \text{ ou } x = -8$ e) $9x^2 - 1 = 0$

c) $81x^2 - 49 = 0 \quad x = \frac{7}{9} \text{ ou } x = -\frac{7}{9}$ f) $x^2 - \frac{9}{16} = 0 \quad x = -\frac{3}{4} \text{ ou } x = \frac{3}{4}$

38. e) $x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{3}$

39. Na figura abaixo, o lado do quadrado $ABCD$ mede m e o lado do quadrado $CEFG$ mede n .



a) Escreva a área da parte pintada como diferença de dois quadrados. $m^2 - n^2$

b) Determine a expressão que fornece a área da figura I. $m(m - n)$

c) Determine a expressão que fornece a área da figura II. $n(m - n)$

d) Determine a expressão da soma das áreas I e II. $m(m - n) + n(m - n)$ **39. e)** $(m - n)(m + n)$

e) Fatore o polinômio encontrado no item d.

f) Escreva a igualdade entre os resultados encontrados nos itens a e e.

40. Conversando, Mário e Vítor perceberam que suas idades hoje correspondem a dois números ímpares consecutivos.

Mário e Vítor verificaram ainda que a diferença entre os quadrados de suas idades é 40. Quais são as idades dos dois amigos?

Um tem 9 anos e o outro, 11.

Pense mais um pouco...

Faça o que se pede.

- a) Fatore a expressão numérica $76^2 - 75^2$. $(76 + 75) \cdot (76 - 75)$
- b) Dê o resultado da expressão do item a. 151
- c) Compare o resultado do item b com a soma $(76 + 75)$. São iguais.
- d) Fatore a expressão $138^2 - 137^2$, calcule seu valor numérico e compare-o com a soma $(138 + 137)$. $(138 + 137) \cdot (138 - 137) = 275$; são iguais.
- e) Calcule mentalmente o valor numérico da expressão $221^2 - 220^2$ e, em seguida, escreva como procedeu esse cálculo. 441; espera-se que os alunos percebam que a diferença dos quadrados de dois números consecutivos é a soma desses números.

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

A área da figura ao lado pode ser obtida somando as áreas de suas partes: $a^2 + 2ab + b^2$

Como trata-se de um quadrado, sua área também pode ser calculada elevando a medida do lado ao quadrado: $(a + b)^2$

Portanto:

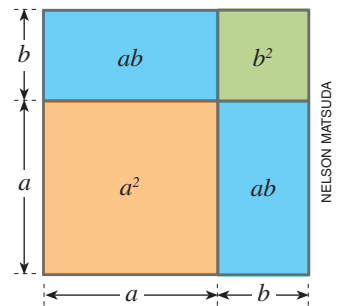
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

trinômio quadrado perfeito
forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$

Ou ainda:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

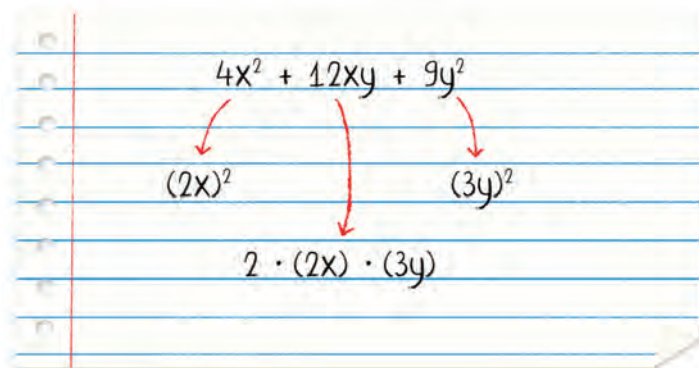
trinômio quadrado perfeito
forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$



Um trinômio é quadrado perfeito se:

- dois dos seus termos são quadrados perfeitos;
- o termo não quadrado perfeito é igual ao dobro do produto das raízes quadradas dos quadrados perfeitos.

Observe como verificamos que o trinômio $4x^2 + 12xy + 9y^2$ é quadrado perfeito.



Logo, fatorando $4x^2 + 12xy + 9y^2$, temos: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

Veja outros exemplos.

a) Verifique se os trinômios a seguir são quadrados perfeitos.

• $x^2 + 6x + 9$

\downarrow \downarrow
 x^2 3^2

O dobro do produto dessas raízes, $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$, é o termo não quadrado perfeito do trinômio. Logo, $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito e pode ser escrito como $(x + 3)^2$.

• $x^2 + 8x + 9$

\downarrow \downarrow
 x^2 3^2

O dobro do produto das raízes é:

$2 \cdot x \cdot 3 = 6x \neq 8x$

Logo, $x^2 + 8x + 9$ não é um trinômio quadrado perfeito. Ele não pode ser escrito como o quadrado de um binômio.

b) Fatore:

• $16a^2 - 24ab + 9b^2$

\downarrow \downarrow
 $(4a)^2$ $(3b)^2$

$2 \cdot 4a \cdot 3b = 24ab$

$16a^2 - 24ab + 9b^2 = (4a - 3b)^2$

• $a^3 + 2a^2b + ab^2$

Colocando a em evidência, temos:

$a^3 + 2a^2b + ab^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)^2$

c) Sabendo que $a^2 + b^2 = 234$ e $ab = 45$, calcule o valor de $(a + b)^2$.

Como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, temos:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$
 $= a^2 + b^2 + 2ab = 234 + 2 \cdot (45) =$ ← Substituímos $a^2 + b^2$ por 234 e ab por 45.
 $= 234 + 90 = 324$

d) Resolva a equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, sabendo que x é um número real.

O primeiro membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito. Ao fatorarmos esse trinômio, temos $(2x - 1)^2 = 0$.

Uma potência só é nula quando a base também é nula. Assim, temos:

$2x - 1 = 0$ ou, ainda, $x = \frac{1}{2}$

Logo, a solução da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$ é o número $\frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

41. São quadrados perfeitos: **a, c, e, f**;

b) respostas possíveis: $y^2 + 20y + 100$; **d)** $16a^2 + 24ab + 9b^2$

41 Escreva os trinômios que são quadrados perfeitos e modifique os demais para que passem a ser.

a) $x^2 + 4x + 4$ d) $16a^2 + 36ab + 9b^2$

b) $y^2 + 5y + 100$ e) $m^2 + n^2 + 2mn$

c) $a^2 + 10a + 25$ f) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

42 Fatore os trinômios quadrados perfeitos a seguir.

a) $x^2 + 6x + 9$ $(x + 3)^2$

b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ $(2x + 3y)^2$

c) $x^4 - 4x^2 + 4$ $(x^2 - 2)^2$

d) $x^2y^2 - 10xy + 25$ $(xy - 5)^2$

e) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{21}x + \frac{1}{49}$ $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}\right)^2$

f) $0,25a^2 - 0,30a + 0,09$ $(0,5a - 0,3)^2$

43 Escreva o binômio que elevado ao quadrado dá o trinômio $81 + 90a + 25a^2$. **$9 + 5a$**

44 A área de um quadrado é representada pelo trinômio $y^2 + 14ya + 49a^2$. Determine a medida do lado desse quadrado. **$y + 7a$**

45 Fatore completamente:

a) $2x^3 + 4x^2 + 2x$ $2x(x + 1)^2$


b) $5a^2 - 20a + 20$ $5(a - 2)^2$

c) $3x^3 + 18x^2 + 27x$ $3x(x + 3)^2$

d) $7x^2y^2 - 14xy + 7$ $7(xy - 1)^2$

e) $9a^3 - 25a$ $a(3a + 5)(3a - 5)$

f) $16x^4 - 8x^2 + 1$ $(2x + 1)^2(2x - 1)^2$

46  Elabore duas expressões que sejam quadrado de uma soma e duas que sejam quadrado de uma diferença. Desenvolva-as como trinômios do quadrado perfeito. Em seguida, troque com um colega os trinômios desenvolvidos para que cada um fatore e obtenha os quadrados da soma e da diferença daquilo que o outro elaborou. Depois, desfaçam a troca e verifiquem se as fatorações estão corretas.

resposta pessoal

47 Calcule os valores pedidos nas expressões.

a) Sabendo que $(a + b)^2 = 64$ e $ab = 12$, calcule o valor de $a^2 + b^2$. **40**

b) Se $(a + b)^2 = 81$ e $a^2 + b^2 = 53$, calcule o valor de ab . **14**

c) Sendo $a^2 + b^2 = 13$ e $ab = 12$, calcule o valor de $(a + b)^2$. **37**

48 Obtenha os números reais que são soluções das equações abaixo.

a) $x^2 + 18x + 81 = 0$ **-9**

b) $y^2 - 2y + 1 = 0$ **1**

c) $4a^2 - 12a + 9 = 0$ **$\frac{3}{2}$**

49 A diferença entre o quadrado e o quádruplo de um número inteiro é -4 . Que número é esse? **2**

50 Resolva a equação

$64x^3 - 48x^2 + 9x = 0$, considerando x um número real. **$x = \frac{3}{8}$ ou $x = 0$**

51 A professora do 8º ano propôs uma atividade, o Jogo dos polinômios escondidos, que tem a seguinte estrutura:

Número de participantes: 2 jogadores

Regras:

- Cada jogador, a partir de dois polinômios, deve encontrar o produto e formar um novo polinômio, sem que o outro jogador veja.
- Os dois polinômios iniciais devem ser do 1º grau com uma única variável.
- Cada jogador mostra para seu oponente apenas o polinômio que formou.
- Vence aquele que descobrir primeiro dois polinômios cujo produto resulta no polinômio apresentado.

Pensando na estrutura do jogo, responda:

a) Roberto apresentou para Juvenal o polinômio $3x^2 + 9x - 30$ que ele formou com o produto dos polinômios $(3x - 6)$ e $(x + 5)$. É possível obter outro par de polinômios cujo produto dê o polinômio formado por Roberto? Justifique sua resposta.

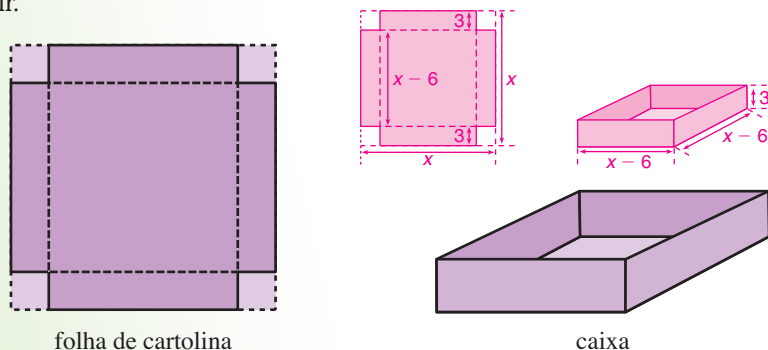
b) Juvenal apresentou para Roberto o polinômio $x^2 - 2x + 1$. Determine um par de polinômios que Roberto pode encontrar.

c) O polinômio formado por Juvenal segue as regras do jogo? Justifique.

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega, leiam o texto e façam o que se pede.

De uma folha de cartolina quadrada de x cm de lado foram recortados quatro quadrados iguais, um em cada canto. Dobrando essa cartolina e colando os lados, obtém-se uma caixa aberta, conforme mostram as figuras a seguir.



A capacidade da caixa montada com a folha de cartolina é dada pela expressão $3x^2 - 36x + 108$.

Fatorem completamente essa expressão, reproduzam as figuras e identifiquem todas as medidas, observando a expressão fatorada que vocês encontraram. $3(x - 6)^2$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Fatoração da diferença e da soma de dois cubos

Observe o produto $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$:

$$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Então: $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

forma fatorada de $a^3 - b^3$

Agora, observe o produto $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$:

$$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

Então: $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

forma fatorada de $a^3 + b^3$

Veja alguns exemplos.

a) $a^3 - 8 = (a - 2) \cdot (a^2 + 2a + 4)$

b) $8x^3 + 27 = (2x + 3) \cdot (4x^2 - 6x + 9)$

EXERCÍCIO PROPOSTO

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

52 Fatore os binômios.

a) $a^3 - 1$
 $(a - 1)(a^2 + a + 1)$

b) $8a^3 + 1$
 $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$

c) $x^3 - 27$
 $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

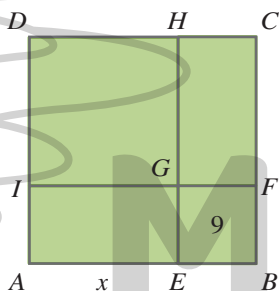
d) $x^3 + 64$
 $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

e) $1 - x^3$
 $(1 - x)(1 + x + x^2)$

f) $27a^3 + 8y^3$
 $(3a + 2y)(9a^2 - 6ay + 4y^2)$

- 1** Desenvolva:
- a) $(3a - 2b)^2$ $9a^2 - 12ab + 4b^2$ c) $(3x^2 + y^3)^2$ $9x^4 + 6x^2y^3 + y^6$
 b) $(5a + 7) \cdot (5a - 7)$ $25a^2 - 49$ d) $(-5 - 2y)^2$ $25 + 20y + 4y^2$
- 2** Determine o binômio obtido a partir dos produtos de:
- a) $(5a + 9b)(5a - 9b)$; $25a^2 - 81b^2$
 b) $\left(\frac{3}{2}x^2 - y^3\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + y^3\right) \cdot \frac{9}{4}x^4 - y^6$
- 3** (Ulbra-RS) Sendo $A = x - 3$, $B = x^2 + 3$ e $C = 9x$, o valor de $A^2 - B + C$ é: **alternativa c**
- a) $3(x + 4)$. d) $x + 2$.
 b) $x + 4$. e) 3 .
 c) $3(x + 2)$.

- 4** Na figura, $ABCD$ e $EBFG$ são quadrados. A área do quadrado menor é igual a 9.



Qual é o trinômio que representa a área do quadrado $ABCD$? $x^2 + 6x + 9$

- 5** (Unifor-CE) A expressão $(x - 1)^2 + (x - 1)^3$ é equivalente a: **alternativa b**
- a) $(x - 1)^5$. d) $x^3 + x^2 - 2x$.
 b) $x^3 - 2x^2 + x$. e) $x^3 + 2x^2 + 1$.
 c) $x^3 + x^2 - 2$.
- 6** Que binômio devemos somar à expressão $x^2 + 5x + 70$ para obter o quadrado de $(x + 10)$? $15x + 30$
- 7** Elevando um binômio da forma $ax + b$ ao quadrado obtém-se $9x^2 + 24x + 16$. Calcule o valor de $a + b$, com a e b positivos. **7**
- 8** Simplifique as expressões abaixo.
- a) $(a - 2)^2 - 2(a + 2)$ $a^2 - 6a$
 b) $(y + 5)^2 - y(y + 10)$ 25
 c) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2$ $2x^2 + 18$
 d) $(a - b)^2 - (a + b) \cdot (a - b)$ $2b^2 - 2ab$

- 9** Resolva as questões a seguir.
- a) Que expressão devemos subtrair de $a^2 + b^2$ para obter o quadrado de $(a - b)$? $2ab$
 b) Que expressão devemos somar a $a^2 + 2ab$ para obter o quadrado de $(a + b)$? b^2
 c) Se $a^2 + b^2 = 34$ e $ab = 15$, qual é o valor de $(a + b)^2$? 64
 d) Se $a^2 + b^2 = 100$ e $(a + b)^2 = 196$, qual é o valor de ab ? 48

- 10** Fatore cada expressão abaixo.

- a) $9x^2y + 15xy^2$ $3xy(3x + 5y)$
 b) $xy - 3x + y - 3$ $(y - 3)(x + 1)$
 c) $a^2 - 4b^2$ $(a + 2b)(a - 2b)$
 d) $a^2 - 10a + 25$ $(a - 5)^2$
 e) $2x^2 - 3x + 4xy - 6y$ $(2x - 3)(x + 2y)$
 f) $12x^2 - 21x$ $3x(4x - 7)$

- 11** (FGV-SP) Seja N o resultado da operação $375^2 - 374^2$. A soma dos algarismos de N é: **alternativa c**

- a) 18. b) 19. c) 20. d) 21. e) 22.

- 12** Fatore completamente as expressões abaixo.

- a) $3x^2 - 75$ $3(x + 5)(x - 5)$
 b) $a^3 - ab^2$ $a(a + b)(a - b)$
 c) $x^4 - 16$ $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
 d) $a^2 - x^2 + a + x$ $(a + x)(a - x + 1)$
 e) $x^2 - y^2 + 2x + 2y$ $(x + y)(x - y + 2)$
 f) $2x^2 - 12x + 18$ $2(x - 3)^2$

- 13** (Unifor-CE) Fatorando-se a expressão

$a^5b - a^3b^3 + a^4b^2 - a^2b^4$, obtém-se: **alternativa e**

- a) $ab^2 \cdot (a + b)^2 \cdot (a - b)$.
 b) $ab^2 \cdot (a - b)^2 \cdot (a + b)$.
 c) $a^2b \cdot (a^2 - b^2) \cdot (a + 1)$.
 d) $a^2b \cdot (a - b)^2 \cdot (a + b)$.
 e) $a^2b \cdot (a + b)^2 \cdot (a - b)$.

- 14** Sabendo que $a + b = 18$ e $a - b = 2$, calcule o valor de:

- a) $(a + b)^2$. **324** b) $(a - b)^2$. **4** c) $a^2 - b^2$. **36**

- 15** Sabendo que $x + y = 14$ e $x^2 + y^2 = 116$, calcule o valor de:

- a) $(x + y)^2$. **196** b) xy . **40** c) $(x - y)^2$. **36**

- 16** Sabendo que $mp = 48$ e $m + 2p = 20$, calcule o valor de:
- a) $m^2p + 2mp^2$. 960
 - b) $(m + 2p)^2$. 400
 - c) $(m - 2p)^2$. 16

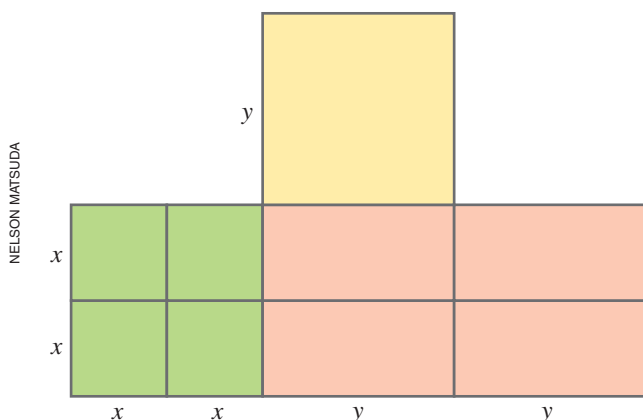
- 17** Determine os valores reais que são soluções das equações abaixo.

- a) $x^2 + 12x = 0$ $x = 0$ ou $x = -12$
- b) $6x^2 - 5x = 0$ $x = 0$ ou $x = \frac{5}{6}$
- c) $4x^2 - 60x + 225 = 0$ $x = \frac{15}{2}$
- d) $y^2 - \frac{25}{36} = 0$ $y = -\frac{5}{6}$ ou $y = \frac{5}{6}$
- e) $4a^2 + 12a + 9 = 0$ $a = -\frac{3}{2}$
- f) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ $x = -\frac{1}{3}$

- 18** (Univali-SC) Um professor de Matemática tem 4 filhos. Em uma de suas aulas, ele propôs a seus alunos que descobrissem o valor da expressão $ac + ad + bc + bd$; sendo que a , b , c e d são as idades de seus filhos na ordem crescente. Como informação complementar, o professor disse que a soma das idades dos dois mais velhos é 59 anos e a soma das idades dos dois mais novos é 34 anos. Neste caso, o valor numérico da expressão proposta pelo professor é igual a: **alternativa c**

- a) 93.
- b) 1.870.
- c) 2.006.
- d) 118.
- e) 4.063.

- 19** Com as regiões poligonais que formam a figura abaixo é possível montar um quadrado.



19. b) construção de figura

- a) Ainda sem construí-lo, dê a medida do lado desse quadrado. $2x + y$
- b) Reproduza a figura em uma cartolina, recorte as regiões poligonais e monte o quadrado.
- c) Qual é o perímetro desse quadrado? $8x + 4y$
- d) Qual é a área desse quadrado? $4x^2 + 4xy + y^2$

- 20** A expressão $(2x + y)^2$ é igual a: **alternativa b**
- a) $2x^2 + 4xy + y^2$.
 - b) $4x^2 + 4xy + y^2$.
 - c) $4x^2 + y^2$.
 - d) $2x^2 + y^2$.

- 21** A soma dos coeficientes do desenvolvimento da expressão $(3a - 2b)^2$ é: **alternativa c**
- a) 5.
 - b) 22.
 - c) 1.
 - d) 2.

- 22** A expressão $2(x^2 + 3y)(x^2 - 3y)$ é igual a:
- a) $x^4 - 9y^2$.
 - b) $2x^4 - 18y^2$.
 - c) $2x^4 - 9y^2$. **alternativa b**
 - d) $4x^4 - 9y^2$.

- 23** O valor da expressão $(2x + 9y)^2 - 36xy$, para $x = -1$ e $y = 1$, é: **alternativa c**
- a) 13.
 - b) -5.
 - c) 85.
 - d) 65.

- 24** (OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$? **alternativa d**
- a) 64
 - b) 109
 - c) 120
 - d) 124
 - e) 154

- 25** A expressão $(a + b)^2 - 2ab$ é igual a: **alternativa d**
- a) $a^2 - b^2$.
 - b) $a^2 - 4ab + b^2$.
 - c) $a^2 + 4ab + b^2$.
 - d) $a^2 + b^2$.

- 26** A expressão $(x + 1) \cdot (x - 1) + 1$ é igual a: **alternativa a**
- a) x^2 .
 - b) $x^2 - 1$.
 - c) $x^2 + 3$.
 - d) $2x$.

- 27** A expressão $(x + 3) \cdot (x - 3) - x^2$ é igual a: **alternativa b**
- a) $2x - 9 - x^2$.
 - b) -9.
 - c) $-6x - 9$.
 - d) $6x - 9$.

- 28** Fatorando a expressão $y^4 - 4y^2 + 4$, obtemos: **alternativa a**
- a) $(y^2 - 2)^2$.
 - b) $(y + 2)^2$.
 - c) $(y^2 + 2)^2$.
 - d) n.d.a.

- 29** Fatorando a expressão $ab + 2b - 3a - 6$, obtemos: **alternativa b**
- a) $(a - 2) \cdot (b + 3)$.
 - b) $(a + 2) \cdot (b - 3)$.
 - c) $(a - 2) \cdot (b - 3)$.
 - d) n.d.a.

- 30** Se $a^2 + b^2 = 144 - 2ab$, podemos afirmar que: **alternativa d**
- a) $a + b = 12$.
 - b) $a + b = -12$.
 - c) $(a - b)^2 = 144$.
 - d) $(a + b)^2 = 144$.

A Álgebra explica a Aritmética

Em um almanaque de curiosidades, Inês leu um “truque” para calcular o quadrado de um número natural n terminado em 5.

Multiplica-se o número à esquerda do 5 pelo seu sucessor e por 100. Acrescenta-se 25 ao resultado.



OSÉ LUÍS JUIHAS

Veja alguns exemplos.

- 35^2 é calculado da seguinte maneira:
 $3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 = 1.200$; $1.200 + 25 = 1.225$, então $35^2 = 1.225$
- 165^2 é calculado da seguinte maneira:
 $16 \cdot (16 + 1) \cdot 100 = 27.200$; $27.200 + 25 = 27.225$, então $165^2 = 27.225$

Inês achou interessante e quis entender o porquê disso, pois sabe que em Matemática não há truques. Depois de pesquisar, chegou às igualdades:

- $35^2 = 3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 + 25$
 $35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25$
 $35^2 = 30 \cdot 40 + 5^2$
 $35^2 - 5^2 = (35 - 5) \cdot (35 + 5)$
- $165^2 = 16 \cdot (16 + 1) \cdot 100 + 25$
 $165^2 = 16 \cdot 17 \cdot 100 + 25$
 $165^2 = 160 \cdot 170 + 5^2$
 $165^2 - 5^2 = (165 - 5) \cdot (165 + 5)$

Inês, então, percebeu que esse procedimento pode ser explicado pelo produto da soma pela diferença e que, pelo menos para números de dois algarismos, favorece o cálculo mental.

Ao generalizar o que fez com alguns números e usando D para representar um algarismo, Inês fez o caminho inverso ao das expressões acima e anotou no caderno. Veja ao lado.

$$(D5)^2 - 5^2 = (D5 - 5) \cdot (D5 + 5)$$

$$(D5)^2 = (D \cdot 10) \cdot [(D + 1) \cdot 10] + 5^2$$

$$(D5)^2 = D \cdot (D + 1) \cdot 100 + 5^2$$

$$(D5)^2 = D \cdot (D + 1) \cdot 100 + 25$$

LIGIA DUQUE

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1 Calculem mentalmente as potências e, em seguida, expliquem como fizeram.



a) 15^2

$$1 \cdot 2 \cdot 100 + 25 = 225$$

b) 45^2

$$4 \cdot 5 \cdot 100 + 25 = 2.025$$

c) 75^2

$$7 \cdot 8 \cdot 100 + 25 = 5.625$$

d) 95^2

$$9 \cdot 10 \cdot 100 + 25 = 9.025$$

2

Usem uma calculadora para verificar os cálculos abaixo.



a) $115^2 = 11 \cdot 12 \cdot 100 + 25 = 13.225$

c) $215^2 = 21 \cdot 22 \cdot 100 + 25 = 46.225$

b) $145^2 = 14 \cdot 15 \cdot 100 + 25 = 21.025$

d) $3.785^2 = 378 \cdot 379 \cdot 100 + 25 = 14.326.225$

Estudo dos triângulos

1 Triângulos

Já estudamos que uma importante característica do triângulo é sua **rigidez**. Ela pode ser observada ao se construir um triângulo com três canudinhos e linha. Não é possível deformá-lo, a não ser cortando os canudos ou a linha.

Essa característica dos triângulos é usada, principalmente, nas estruturas metálicas de pontes, de torres ou no madeiramento dos telhados das casas, entre outros usos. Observe as imagens abaixo.



ALAN CARVALHO

ROGÉRIO REIS/PULSAR IMAGENS
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Utilização da forma triangular na construção de ponte. Ponte de pedestres em Xerém, Duque de Caxias, RJ. (Foto de 2012.)



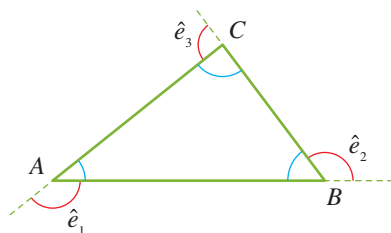
GABRIEL SANTOS/TYBA

Utilização de forma triangular para manter as porteiças rígidas. Entrada da fazenda na Serra da Bocaina, SP. (Foto de 2013.)

Principais elementos de um triângulo

Você já aprendeu que os triângulos são polígonos de três lados. Vamos lembrar quais são seus principais elementos.

Indicamos um triângulo ABC , como o da figura abaixo, por $\triangle ABC$.



Nesse triângulo, destacamos seus principais elementos:

- os **vértices** A , B e C ;
- os **lados** \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} ;
- os **ângulos internos** $B\hat{A}C$ ou \hat{A} , $A\hat{B}C$ ou \hat{B} , e $A\hat{C}B$ ou \hat{C} ;
- os **ângulos externos** \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 .

Observe que cada lado é oposto ao ângulo interno determinado pelos outros dois lados:

- \overline{BC} é oposto ao ângulo \hat{A} ;
- \overline{AC} é oposto ao ângulo \hat{B} ;
- \overline{AB} é oposto ao ângulo \hat{C} .

Note, também, que cada ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente:

- $m(\hat{A}) + m(\hat{e}_1) = 180^\circ$
- $m(\hat{B}) + m(\hat{e}_2) = 180^\circ$
- $m(\hat{C}) + m(\hat{e}_3) = 180^\circ$

2 Classificação de triângulos

Podemos classificar um triângulo de duas maneiras: pelas medidas dos lados ou pelas medidas dos ângulos internos.

Classificação quanto às medidas dos lados

Quanto às medidas dos lados, os triângulos se classificam em isósceles, equilátero ou escaleno.

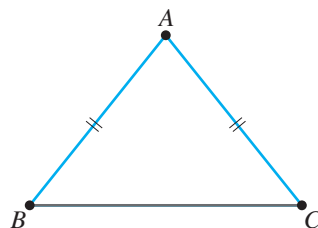
a) Triângulos isósceles são triângulos que possuem dois lados congruentes.

Em um triângulo isósceles:

- o ângulo formado pelos lados congruentes é chamado de **ângulo do vértice**;
- o lado oposto a esse ângulo é chamado de **base**;
- os ângulos adjacentes à base são chamados de **ângulos da base**.

O $\triangle ABC$ ao lado é isósceles, pois $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

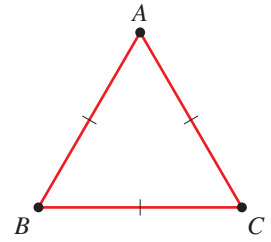
Nesse triângulo, o ângulo do vértice é \hat{A} , a base é o lado \overline{BC} e os ângulos da base são \hat{B} e \hat{C} .



b) **Triângulos equiláteros** são triângulos que possuem os três lados congruentes.

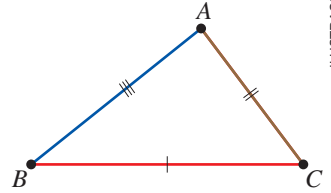
Todo triângulo equilátero também é um triângulo isósceles.

O $\triangle ABC$ ao lado é equilátero, pois $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$.



c) **Triângulos escalenos** são triângulos que possuem lados não congruentes.

O $\triangle ABC$ ao lado é escaleno, pois possui lados não congruentes.



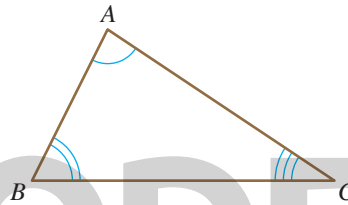
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Classificação quanto às medidas dos ângulos

Quanto às medidas dos ângulos, os triângulos se classificam em acutângulo, obtusângulo ou retângulo.

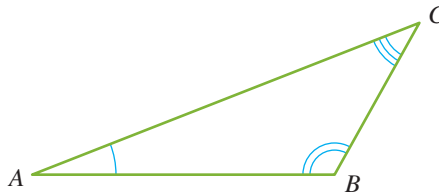
a) **Triângulos acutângulos** são triângulos que possuem os três ângulos internos agudos.

O $\triangle ABC$ abaixo é acutângulo, pois $m(\hat{A}) < 90^\circ$, $m(\hat{B}) < 90^\circ$ e $m(\hat{C}) < 90^\circ$.



b) **Triângulos obtusângulos** são triângulos que possuem um ângulo interno obtuso.

O $\triangle ABC$ abaixo é obtusângulo, pois $m(\hat{B}) > 90^\circ$.

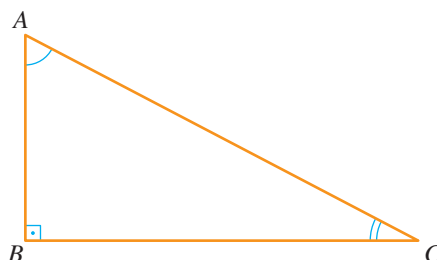


c) **Triângulos retângulos** são triângulos que possuem um ângulo interno reto.

Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, e os outros dois lados são chamados de **catetos**.

O triângulo ABC abaixo é retângulo, pois $m(\hat{B}) = 90^\circ$.

Nesse triângulo, os catetos são \overline{AB} e \overline{BC} , e a hipotenusa é \overline{AC} .



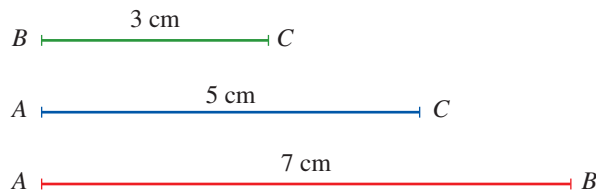
NELSON MATSUDA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

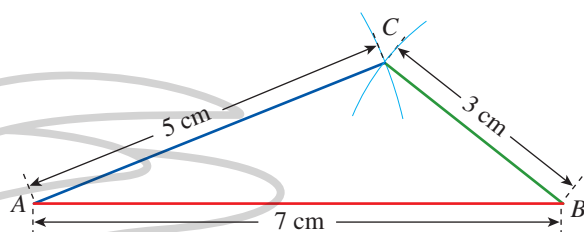
3 Construção de triângulos

Vamos recordar a construção de um triângulo, com régua e compasso, quando são conhecidas as medidas de seus lados, por exemplo, 3 cm, 5 cm e 7 cm.



Acompanhe.

- Com o auxílio da régua, traçamos o segmento \overline{AB} de medida 7 cm.
- Com a ponta-seca em A e abertura igual a AC (5 cm), depois com a ponta-seca em B e abertura igual a BC (3 cm), traçamos arcos que se cruzam em C .
- Com o auxílio da régua, traçamos os lados \overline{AC} e \overline{BC} .



Construção de um triângulo.

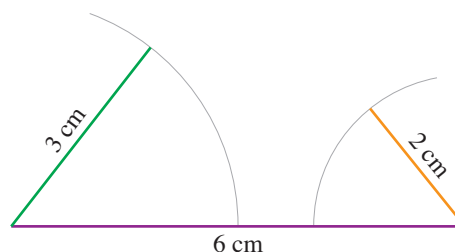
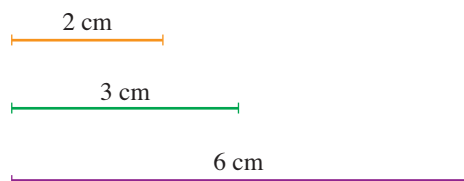
► Condição de existência de um triângulo

Nem sempre é possível construir um triângulo, mesmo sendo conhecidas três medidas de segmentos.

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Vamos tentar construir um triângulo com lados medindo 6 cm, 3 cm e 2 cm.



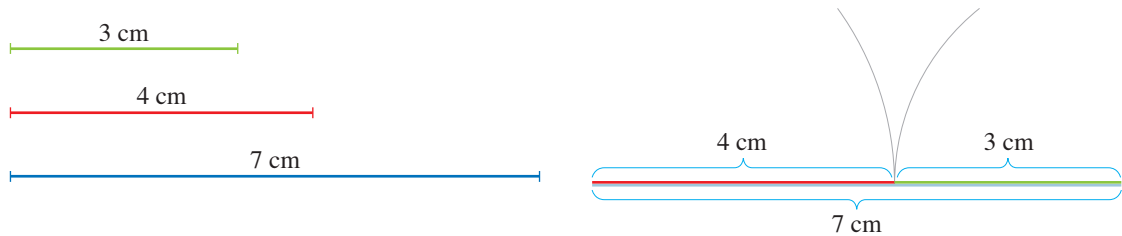
Perceba que não foi possível construir o triângulo com lados medindo 6 cm, 3 cm e 2 cm, pois os arcos traçados não se cruzam.

Repare, também, que o maior segmento (de 6 cm) tem medida maior que a soma das medidas dos outros dois segmentos ($3\text{ cm} + 2\text{ cm} = 5\text{ cm}$).

Isso significa que não existe um triângulo cujos lados medem 6 cm, 3 cm e 2 cm.

Situação 2

Vamos tentar construir um triângulo com lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm.

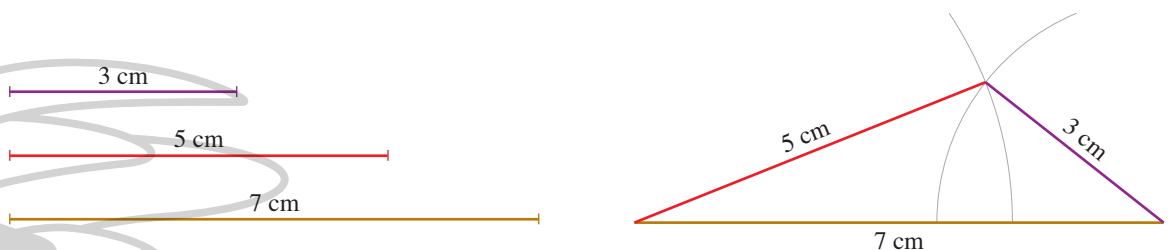


Note que não foi possível construir o triângulo com lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm. Veja que o maior segmento (de 7 cm) tem medida igual à soma das medidas dos outros dois segmentos ($3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$).

Isso significa que não existe um triângulo cujos lados medem 7 cm, 4 cm e 3 cm.

Situação 3

Vamos construir um triângulo com lados medindo 7 cm, 5 cm e 3 cm.



Como já vimos, é possível construir um triângulo com lados medindo 7 cm, 5 cm e 3 cm. Repare que o maior lado desse triângulo (de 7 cm) tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados ($5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$). Isso também ocorre com os outros dois lados desse triângulo: a medida de cada um deles é menor que a soma das medidas dos outros dois:

$$5 \text{ cm} < 3 \text{ cm} + 7 \text{ cm}$$

$$3 \text{ cm} < 5 \text{ cm} + 7 \text{ cm}$$

Essa é a condição de existência de qualquer triângulo.

Em todo triângulo, a medida de qualquer lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Veja outros exemplos.

a) Vamos verificar se existe o triângulo cujos lados medem 12 cm, 9 cm e 8 cm.

Basta verificar se a medida do lado maior é menor que a soma das medidas dos outros dois lados. Assim:

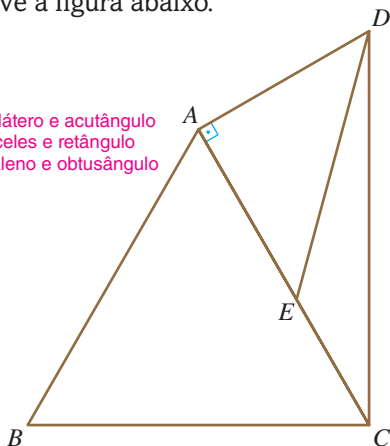
$$12 \text{ cm} < 9 \text{ cm} + 8 \text{ cm}; \text{ logo, o triângulo } \mathbf{existe}.$$

b) Vamos verificar se existe o triângulo cujos lados medem 15 cm, 10 cm e 4 cm.

$$15 \text{ cm} > 10 \text{ cm} + 4 \text{ cm}; \text{ logo, o triângulo } \mathbf{n\tilde{a}o \text{ existe}}.$$

1 Observe a figura abaixo.

1. c) $\triangle ABC$: equilátero e acutângulo
 $\triangle ADE$: isósceles e retângulo
 $\triangle CDE$: escaleno e obtusângulo



NELSON MATSUUDA

4 triângulos

- a) Quantos triângulos existem na figura?
 b) Nomeie cada um deles. $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle EDC$ e $\triangle ADC$
 c) Utilizando uma régua e um transferidor, classifique os triângulos ABC , ADE e CDE quanto às medidas dos lados e quanto às medidas dos ângulos.

2 Com régua e compasso, construa os seguintes triângulos: **construção de figuras**

- a) isósceles; medida da base: 5 cm; lados congruentes: 4 cm;
 b) equilátero; medida dos lados: 3 cm;
 c) escaleno; medida dos lados: 6 cm, 4 cm e 3,5 cm.

Isso ocorreu porque as somas das medidas dos segmentos menores são iguais ou menores que a medida do segmento maior, ou: **8. Nos itens c, d e e. c) $8\text{ cm} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm}$; d) $8\text{ cm} > 3\text{ cm} + 4\text{ cm}$; e) $7\text{ cm} = 3\text{ cm} + 4\text{ cm}$**

3 Desenhe um triângulo ABC , em que $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 3\text{ cm}$ e $BC = 4\text{ cm}$. Utilizando um transferidor, meça o ângulo $A\hat{C}B$. Como se classifica esse triângulo quanto às medidas dos lados e dos ângulos? **90° ; triângulo retângulo escaleno**

4 Construa um triângulo retângulo e isósceles. Quanto mede cada um de seus ângulos agudos? **45°**

5 É possível a construção de um triângulo retângulo equilátero? Justifique sua resposta.

Não, porque cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60° .

6 É possível a construção de um triângulo que tenha dois ângulos retos? E a de um triângulo que tenha dois ângulos obtusos? Justifique sua resposta. **não; não; Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180° .**

7 Verifique se é possível construir, com régua e compasso, triângulos cujas medidas dos lados são:

- a) $a = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$; **sim**
 b) $a = 8\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$; **sim**
 c) $a = 8\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$; **não**
 d) $a = 8\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$; **não**
 e) $a = 7\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$; **não**
 f) $a = 6\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$. **sim**

8 Em quais itens do exercício 7 não foi possível construir o triângulo? Por que isso ocorreu?

8. Nos itens c, d e e.

c) $8\text{ cm} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm}$; d) $8\text{ cm} > 3\text{ cm} + 4\text{ cm}$; e) $7\text{ cm} = 3\text{ cm} + 4\text{ cm}$

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

1. Construa uma figura conforme as indicações abaixo.

- Marque um ponto A .
- Desenhe o segmento \overline{AB} com 3 cm.
- Indo de A para B , faça um giro de 120° em B para a esquerda. Trace \overline{BC} também com 3 cm.
- Indo de B para C , faça outro giro de 120° em C para a esquerda e trace \overline{AC} .

- a) Qual é a medida de \overline{AC} ? **3 cm**
 b) Qual é a medida do ângulo $C\hat{A}B$? **60°**
 c) Que figura foi desenhada? **um triângulo equilátero**

2. Renato quer construir um triângulo da seguinte forma:

- um dos lados deve medir 30 cm;
- outro lado deve medir 20 cm;
- o terceiro lado deve ter como medida, em centímetro, um múltiplo de 15.

- a) Dessa forma, quantos triângulos diferentes Renato poderá construir? **3 triângulos**
 b) Quais serão as medidas dos lados dos triângulos?
30 cm, 20 cm, 15 cm; 30 cm, 20 cm, 30 cm; 30 cm, 20 cm, 45 cm



JOSÉ LUIS JUHAS

4 Outros elementos de um triângulo

Além dos lados, vértices, ângulos internos e ângulos externos, os triângulos apresentam outros elementos, entre os quais as **medianas**, as **bissetrizes** e as **alturas**, que serão estudadas a seguir.

Mediana

Considerando um triângulo ABC qualquer, podemos determinar o ponto médio M do lado \overline{BC} .

O segmento \overline{AM} é chamado de **mediana** relativa ao lado \overline{BC} .

Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.

Todo triângulo possui três medianas que se encontram em um ponto chamado de **baricentro**.

No triângulo ABC ao lado, temos:

- \overline{AM} é a mediana relativa ao lado \overline{BC} ;
- \overline{BN} é a mediana relativa ao lado \overline{AC} ;
- \overline{CP} é a mediana relativa ao lado \overline{AB} .

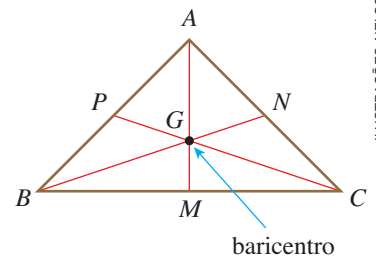
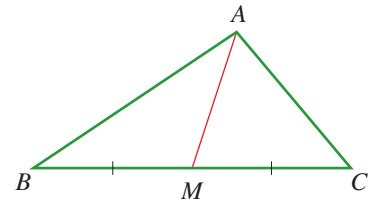
As três medianas se encontram no ponto G , que é o baricentro do $\triangle ABC$.

Propriedade do baricentro

Podemos construir um triângulo em uma cartolina e determinar seu baricentro.

Recortando esse triângulo, passamos um barbante pelo baricentro.

Segurando o triângulo suspenso, como mostra a foto, ele se manterá na posição horizontal. Isso ocorre porque o baricentro é o **ponto de equilíbrio**, ou **centro de gravidade**, do triângulo.

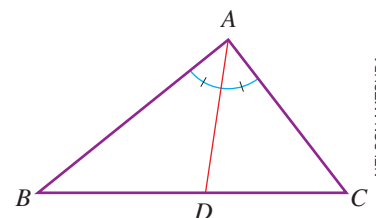


Bissetriz

Considerando um triângulo ABC qualquer, podemos traçar a bissetriz do ângulo interno \hat{A} .

O segmento \overline{AD} é a **bissetriz** do triângulo relativa ao ângulo \hat{A} .

Bissetriz de um triângulo é o segmento de reta que divide ao meio um dos ângulos internos do triângulo cujos extremos são o vértice desse ângulo e o ponto de intersecção com o lado oposto a ele.

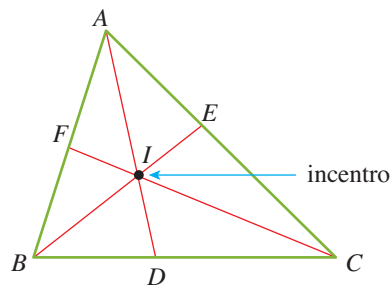


Todo triângulo tem três bissetrizes que se encontram em um ponto chamado de **incentro**.

No triângulo ABC ao lado, temos:

- \overline{AD} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{A} ;
- \overline{BE} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{B} ;
- \overline{CF} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{C} .

As três bissetrizes se encontram no ponto I , que é o incentro do $\triangle ABC$.

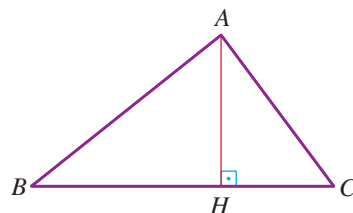


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Altura

Considerando um triângulo ABC qualquer, podemos traçar pelo ponto A um segmento perpendicular ao lado \overline{BC} .

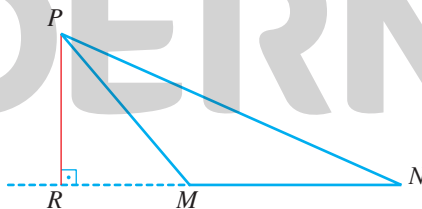
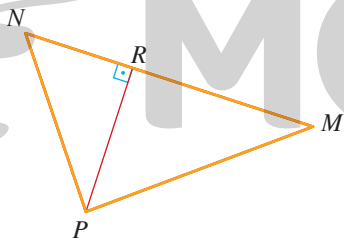
O segmento \overline{AH} é a **altura** relativa ao lado \overline{BC} .



Altura de um triângulo é o segmento que une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto (ou ao seu prolongamento).

No triângulo acima, o ponto H é chamado de “pé da altura” relativa ao lado \overline{BC} .

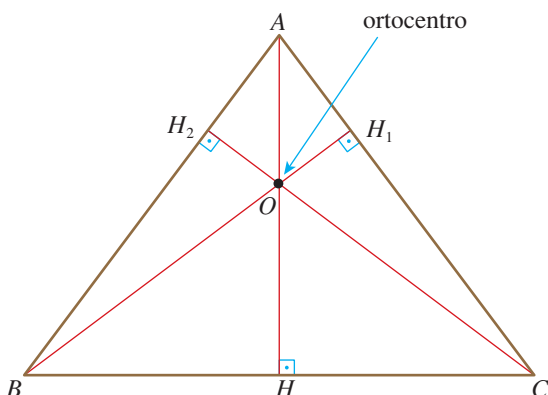
Veja a altura relativa ao lado \overline{MN} em cada um dos triângulos abaixo.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Todo triângulo tem três alturas. O ponto de encontro das retas que contêm as alturas é chamado de **ortocentro**.

Considere o triângulo acutângulo ABC abaixo.



NELSON MATSUDA

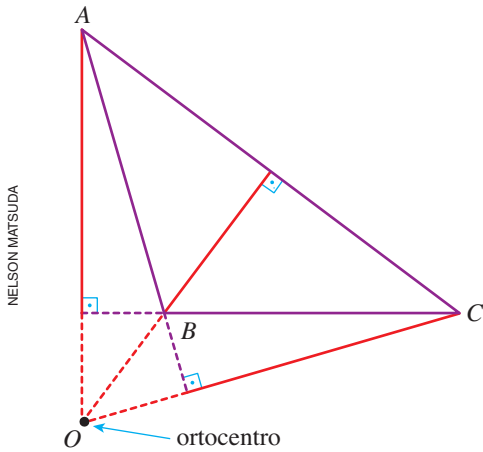
Nesse triângulo, temos:

- \overline{AH} é a altura relativa ao lado \overline{BC} ;
- $\overline{BH_1}$ é a altura relativa ao lado \overline{AC} ;
- $\overline{CH_2}$ é a altura relativa ao lado \overline{AB} .

As três alturas se encontram no ponto O , que é o ortocentro do $\triangle ABC$.

Observe que o ortocentro localiza-se no interior do triângulo. Isso acontece em todos os triângulos acutângulos.

Agora, considere o triângulo obtusângulo ABC abaixo.

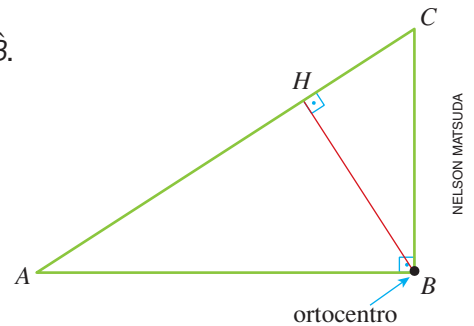


Nesse triângulo, o ortocentro encontra-se na região externa do triângulo.

Isso acontece em todos os triângulos obtusângulos.

Finalmente, considere o triângulo retângulo ABC , reto em \hat{B} . Nesse triângulo, temos:

- a altura relativa ao lado \overline{AB} coincide com o cateto \overline{BC} ;
- a altura relativa ao lado \overline{BC} coincide com o cateto \overline{AB} ;
- a altura relativa ao lado \overline{AC} é o segmento \overline{BH} .

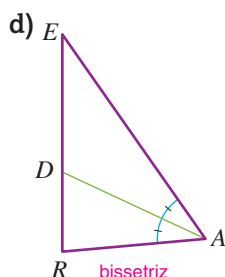
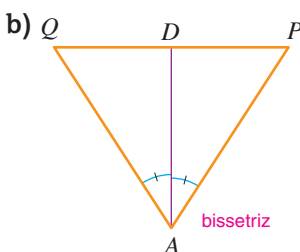
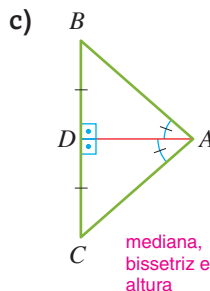
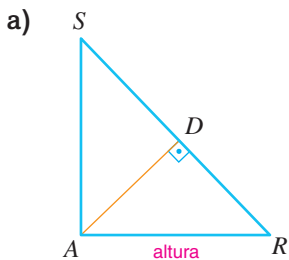


Observe que o ortocentro do triângulo coincide com o vértice B , que é o vértice oposto à hipotenusa. Isso acontece em todos os triângulos retângulos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Em cada um dos triângulos abaixo, o segmento \overline{AD} é mediana, bissetriz ou altura?



10 Desenhe os triângulos pedidos em cada caso e responda às questões.

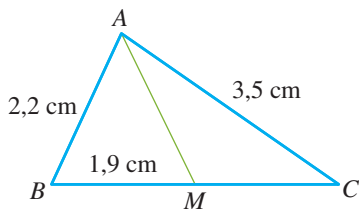
- Triângulo MNO qualquer. Trace, com régua e compasso, as medianas relativas aos lados \overline{MO} e \overline{NO} . Como se chama o ponto em que elas se encontram? **baricentro**
- Triângulo PQR qualquer. Trace, usando transferidor e régua, as bissetrizes dos ângulos \hat{P} e \hat{R} . Como se chama o ponto em que elas se encontram? **incentro**
- Triângulo TUV qualquer. Trace, com régua e esquadro, as alturas relativas aos lados \overline{TU} e \overline{TV} . Como se chama o ponto em que elas se encontram? **ortocentro**

11 Desenhe um triângulo ABC qualquer e trace a bissetriz relativa ao ângulo \hat{B} e a mediana relativa ao lado \overline{BC} . **construção de figura**

Explique os procedimentos que você usou para traçar a bissetriz e a mediana desse triângulo.

resposta pessoal

- 12** No triângulo ABC a seguir, \overline{AM} é a mediana. Determine o perímetro desse triângulo. 9,5 cm



- 14** Construa um triângulo ABC que seja escaleno e acutângulo. Com esquadro e régua, trace as três alturas do triângulo. Qual delas é a maior? a altura relativa ao lado menor

- 15** Construa um triângulo ABC isósceles.
- Trace a mediana relativa à base \overline{BC} . *construção de figura*
 - Trace a bissetriz do ângulo do vértice A . *construção de figura*
 - A bissetriz do ângulo do vértice A coincidiu com a mediana? *sim*
 - Trace a altura relativa à base. O que aconteceu com a altura e a mediana? *Elas coincidiram.*
 - Se traçarmos a altura e a mediana relativas a outro lado do triângulo, essa característica se mantém? Por que você acha que isso ocorre? *não; resposta pessoal*

- 13** Desenhe um triângulo retângulo RST . Chame de R o vértice onde se encontra o maior ângulo. Com uma régua e um esquadro, trace a altura relativa ao lado \overline{ST} e determine a altura do triângulo relativa ao lado \overline{RS} . *construção de figura*
Explique como você determinou essas alturas. *resposta pessoal*

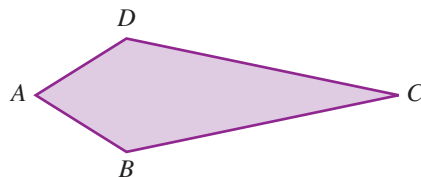
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

A planta de um terreno está representada pela figura ao lado. Quando dobrada em \overline{AC} , os pontos B e D coincidem. O terreno deve ser dividido em quatro partes de mesma área.

Lembrando que a área do triângulo é a metade do produto das medidas da base e da altura, como isso pode ser feito?

Justifique sua resposta. *Traçando a diagonal \overline{AC} e, em seguida, achando a mediana de cada triângulo obtido, relativa a essa diagonal, pois as quatro partes obtidas serão regiões triangulares de bases congruentes e alturas congruentes.*



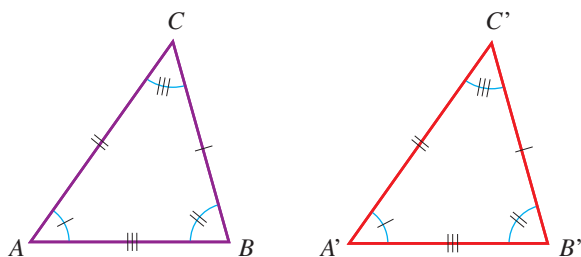
5 Congruência de triângulos

Como qualquer polígono pode ser dividido ou decomposto em triângulos, o estudo da congruência de triângulos pode nos auxiliar em problemas mais complicados que envolvam a congruência de polígonos.

Agora, vamos estudar, em particular, os triângulos congruentes.

Dois triângulos são **congruentes** quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes forem congruentes.

Considere as figuras abaixo.



Nessas figuras, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, ou seja:

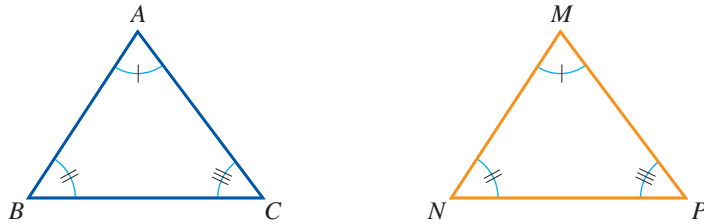
$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{A'B'} & \hat{A} &\cong \hat{A}' \\ \overline{BC} &\cong \overline{B'C'} & \text{e } \hat{B} &\cong \hat{B}' \\ \overline{AC} &\cong \overline{A'C'} & \hat{C} &\cong \hat{C}' \end{aligned}$$

Observe que, se dois triângulos são congruentes, então:

- os lados correspondentes opostos a ângulos congruentes são congruentes;
- os ângulos correspondentes opostos a lados congruentes são congruentes.

Veja os exemplos.

a) Sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, vamos indicar os lados congruentes.



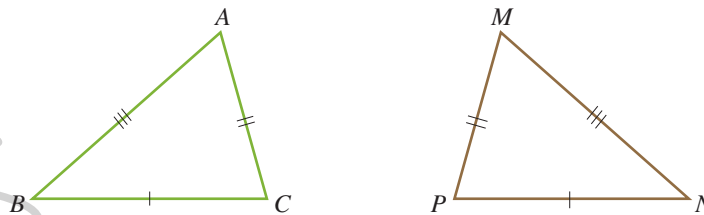
Nesses triângulos, temos:

$$\overline{AB} \cong \overline{MN} \text{ (lados opostos a \hat{C} \cong \hat{P})}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{NP} \text{ (lados opostos a \hat{A} \cong \hat{M})}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{MP} \text{ (lados opostos a \hat{B} \cong \hat{N})}$$

b) Sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, vamos indicar os ângulos congruentes.



Nesses triângulos, temos:

$$\hat{A} \cong \hat{M} \text{ (\hat{a}ngulos opostos a lados congruentes: } \overline{BC} \cong \overline{PN})}$$

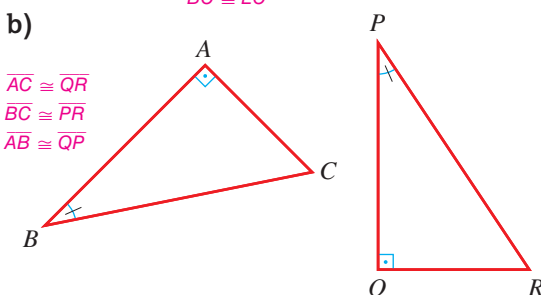
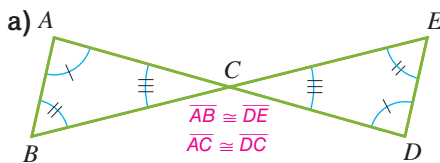
$$\hat{B} \cong \hat{N} \text{ (\hat{a}ngulos opostos a lados congruentes: } \overline{AC} \cong \overline{MP})}$$

$$\hat{C} \cong \hat{P} \text{ (\hat{a}ngulos opostos a lados congruentes: } \overline{AB} \cong \overline{MN})}$$

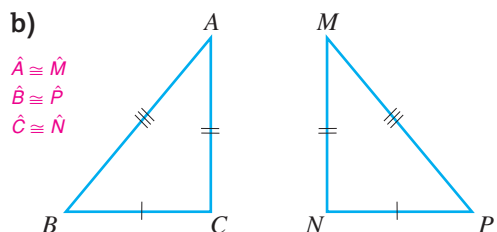
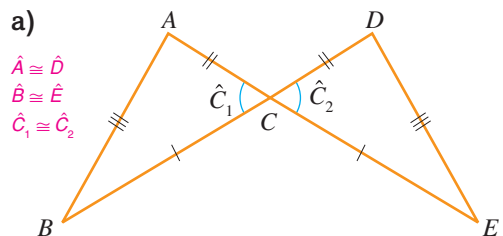
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Em cada item, os pares de triângulos são congruentes. Indique a congruência entre os lados desses triângulos.

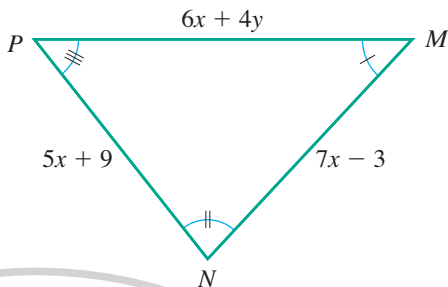
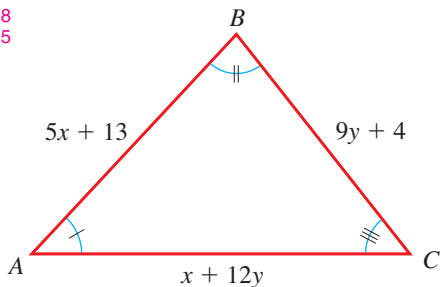


17 Em cada item, os pares de triângulos são congruentes. Indique a congruência entre os ângulos desses triângulos.



18 Sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, calcule x e y .

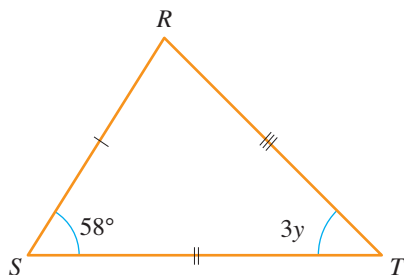
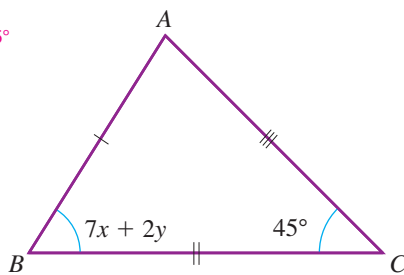
$x = 8$
 $y = 5$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

19 Calcule x e y , em grau, sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle RST$.

$x = 4^\circ$
 $y = 15^\circ$



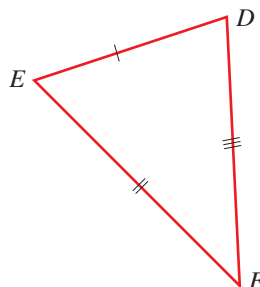
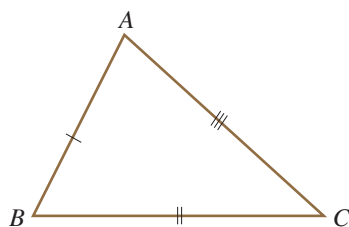
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Casos de congruência de triângulos

Vimos que dois triângulos são congruentes quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são, respectivamente, congruentes. No entanto, em algumas situações, é possível reconhecer a congruência de dois triângulos quando são conhecidos apenas três de seus elementos. Isso é feito por meio dos casos de congruência, que vamos estudar a seguir.

Caso lado-lado-lado (LLL)

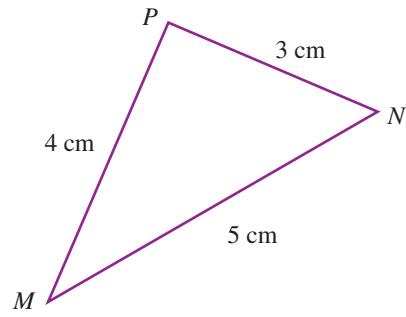
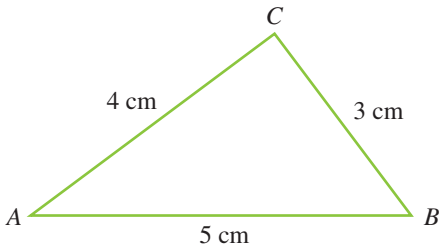
Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados respectivamente congruentes.



$$\text{Se } \left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array} \right\}, \text{ então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Como exemplo, considere os triângulos abaixo.

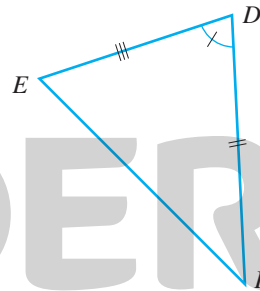
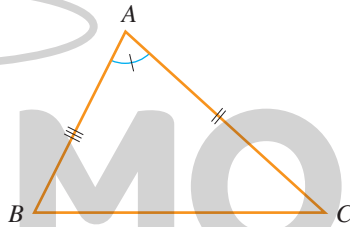


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Note que esses triângulos têm os três lados correspondentes com medidas iguais, ou seja, são congruentes ($\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NP}$ e $\overline{AC} \cong \overline{MP}$). Isso garante, pelo caso LLL, que os triângulos ABC e MNP sejam congruentes.

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

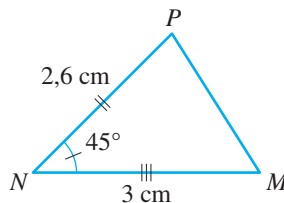
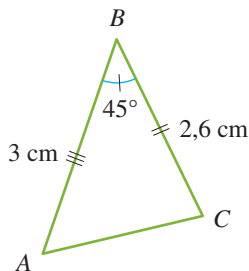
Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.



MODERNA

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \text{Se } \hat{A} \cong \hat{D} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array} \right\}, \text{então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como exemplo, considere os triângulos abaixo.



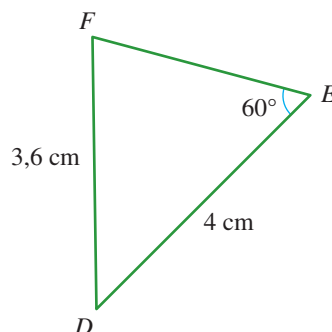
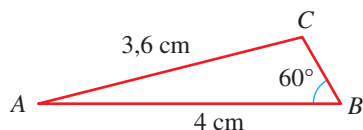
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Esses triângulos têm dois lados correspondentes congruentes ($\overline{AB} \cong \overline{MN}$ e $\overline{BC} \cong \overline{NP}$), e os ângulos compreendidos por esses lados também são congruentes ($\hat{B} \cong \hat{N}$). Isso garante, pelo caso LAL, que os triângulos ABC e MNP sejam congruentes.

OBSERVAÇÃO

- No caso LAL, assim como nos casos que vamos estudar a seguir, a ordem dos elementos deve ser respeitada para que a congruência entre os triângulos seja verificada.

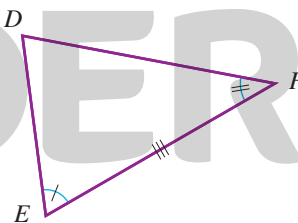
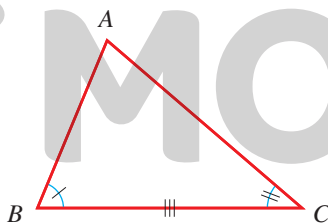
Para exemplificar, considere os triângulos abaixo.



Observe que os triângulos ABC e DEF têm dois lados congruentes e um ângulo congruente, mas não são triângulos congruentes.

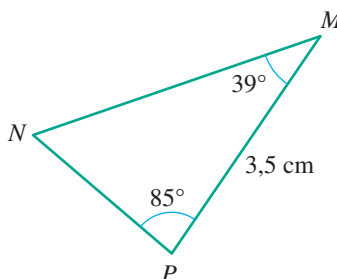
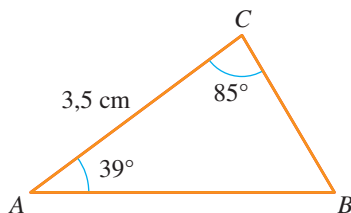
Caso ângulo-lado-ângulo (ALA)

Dois triângulos são congruentes quando têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \text{Se } \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{array} \right\}, \text{então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

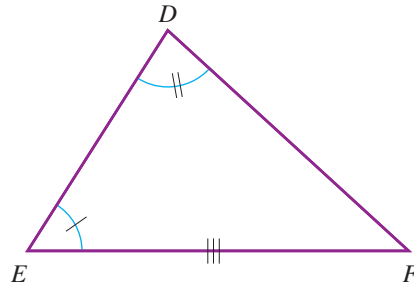
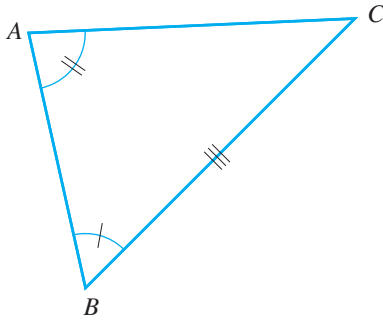
Como exemplo, considere os triângulos abaixo.



Esses triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes ($\hat{A} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{P}$), e os lados adjacentes a esses ângulos também são congruentes ($\overline{AC} \cong \overline{MP}$). Isso garante, pelo caso ALA, que os triângulos ABC e MNP sejam congruentes.

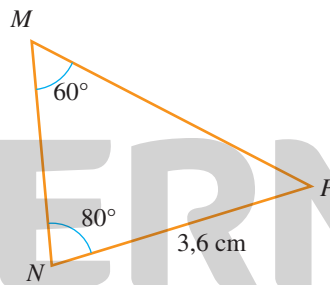
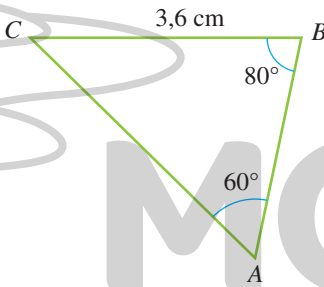
Caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o)

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, o ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \text{Se } \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{A} \cong \hat{D} \end{array} \right\} \text{então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como exemplo, considere os triângulos abaixo.



Esses triângulos têm, respectivamente, de congruentes: um lado ($\overline{BC} \cong \overline{NP}$), um ângulo adjacente a esse lado ($\hat{B} \cong \hat{N}$) e o ângulo oposto ao lado congruente ($\hat{A} \cong \hat{M}$). Desse modo, pelo caso LAA_o, garantimos que os triângulos ABC e MNP sejam congruentes.

OBSERVAÇÃO

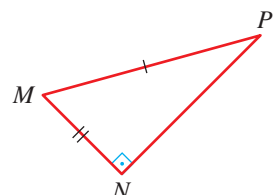
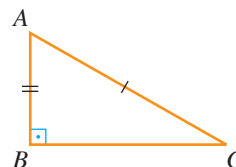
- ▶ Além dos quatro casos de congruência de triângulos já estudados, vamos conhecer um caso válido somente para os triângulos retângulos.

Caso cateto-hipotenusa (CH)

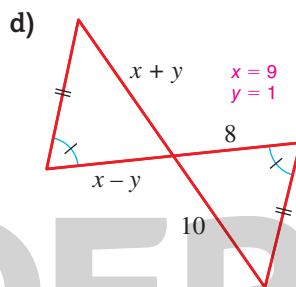
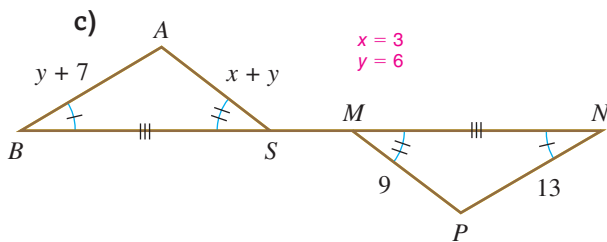
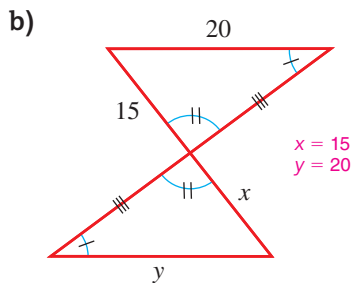
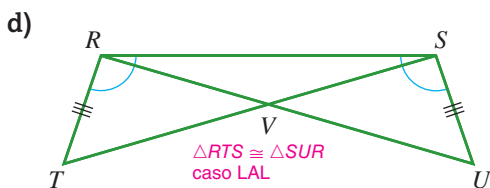
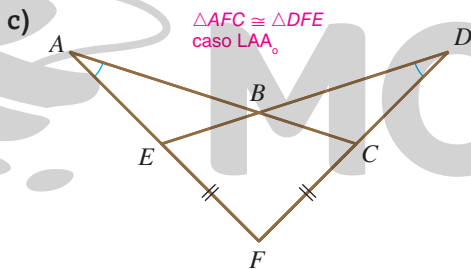
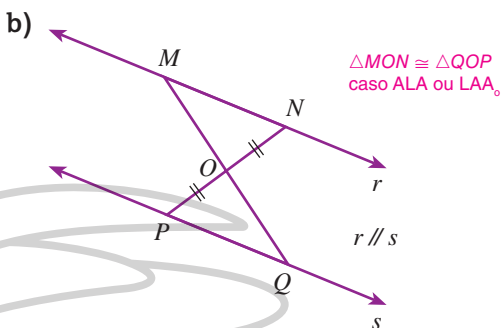
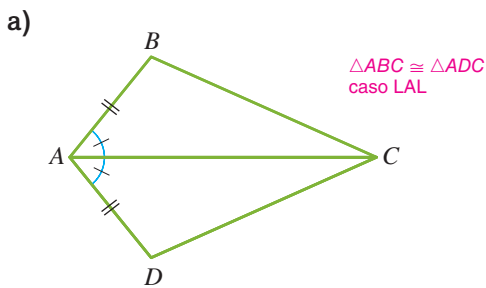
Dois triângulos retângulos são congruentes quando têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes.

Considere os triângulos retângulos ABC e MNP, com $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ e $\overline{AB} \cong \overline{MN}$.

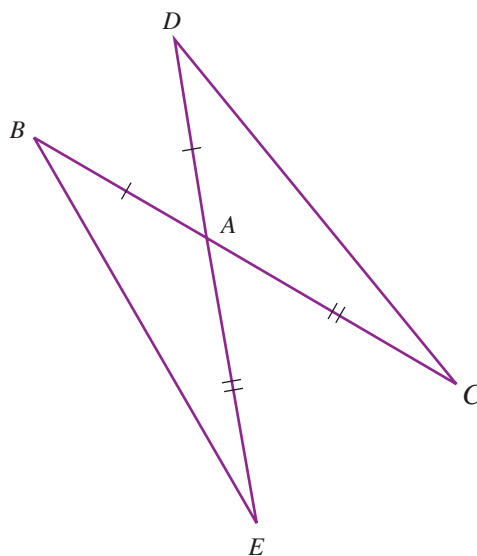
Então, pelo caso CH, os triângulos ABC e MNP são congruentes.



20 Verifique em cada item quais são os pares de triângulos congruentes e identifique o caso pelo qual são congruentes.



22 Observe a figura abaixo.

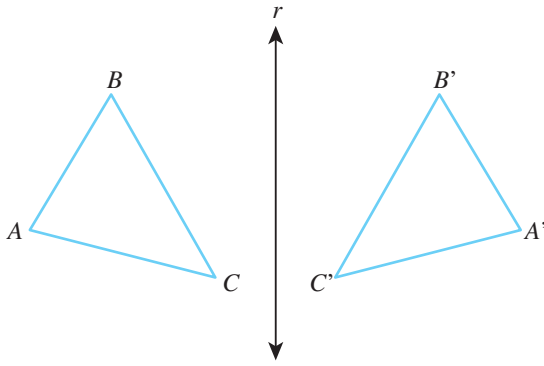


Sabendo que as marcas iguais indicam lados de mesma medida, explique por que podemos afirmar que $\overline{EB} \cong \overline{DC}$.

$\overline{EB} \cong \overline{DC}$, porque os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ABE$ são congruentes pelo caso LAL.

23 Considere o triângulo ABC , simétrico ao triângulo $A'B'C'$ em relação à reta r .

NELSON MATSUDA



Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes? Justifique sua resposta.

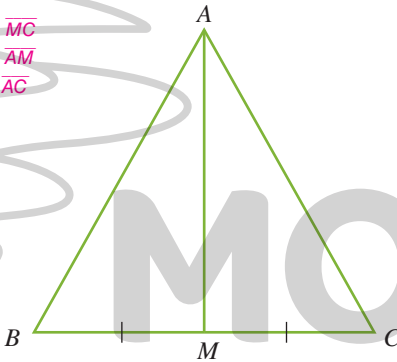
sim; Pela simetria, ângulos e lados são respectivamente congruentes.

24 Considere um triângulo ABC equilátero.

a) Ao traçar a mediana \overline{AM} , obtemos dois triângulos: $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

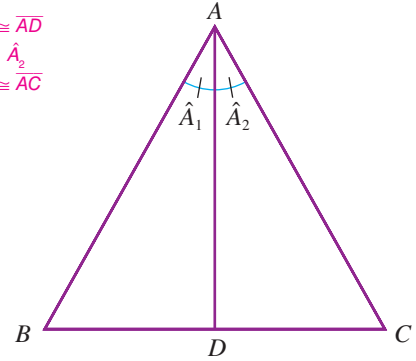
NELSON MATSUDA

sim
 $\overline{BM} \cong \overline{MC}$
 $\overline{AM} \cong \overline{AM}$
 $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
LLL



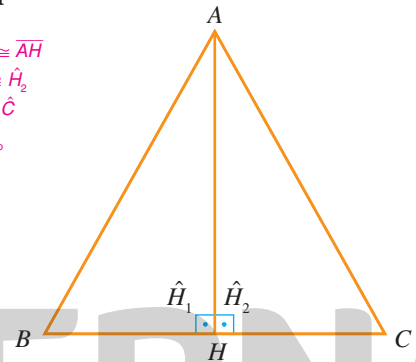
b) Ao traçar a bissetriz \overline{AD} , obtemos dois triângulos: $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

sim
 $\overline{AD} \cong \overline{AD}$
 $\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2$
 $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
LAL



c) E, ao traçar a altura \overline{AH} , também obtemos dois triângulos: $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

sim
 $\overline{AH} \cong \overline{AH}$
 $\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2$
 $\hat{B} \cong \hat{C}$
LAA.



d) Todos os triângulos obtidos nos itens anteriores são congruentes? Justifique sua resposta.

sim; resposta pessoal

PARA SABER MAIS +

A Matemática na História

A Geometria teve início em tempos remotos e desenvolveu-se lentamente até atingir a amplitude atual. Nesse trajeto, passou por diferentes papéis.

De modo geral, a Geometria inicial tratava somente de problemas geométricos concretos, apresentados isoladamente, e entre os quais não era observada nenhuma ligação.

Com o tempo, começaram-se a detectar propriedades e relações gerais com base em certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, que passaram a ser casos particulares. Tais descobertas favoreceram a ordenação de problemas geométricos práticos em grupos de mesmo tipo, cada qual solucionável segundo um mesmo procedimento geral.

NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Não se sabe quantos séculos foram necessários para que a Geometria adquirisse *status* de ciência; entretanto, historiadores acreditam que o início desse processo ocorreu ao longo do vale do rio Nilo, no Egito antigo, bem como nas bacias de outros grandes rios como do rio Tigre e do rio Eufrates, na Mesopotâmia.

Quanto ao vale do rio Nilo, vale lembrar a importância da agrimensura como possível origem para a palavra *geometria*, que significa “medida da terra”. Além disso, as bacias dos rios mencionados foram berços de formas avançadas de sociedade, conhecidas por sua habilidade em engenharia na

drenagem de pântanos, irrigação, obras de defesa contra inundações e construção de grandes edifícios e estruturas, projetos que requeriam muita geometria prática.

A Geometria da Mesopotâmia e a do Egito eram, portanto, basicamente experimentais, derivadas de regras usadas pelos técnicos dessas civilizações, o que lhes permitia calcular áreas e muitos resultados bem antes dos gregos, porém não de forma dedutiva.

As modificações político-econômicas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. resultaram na diminuição do poder do Egito e da Babilônia. Tal mudança propiciou o florescimento de novas culturas.



Os gregos transformaram a *Geometria empírica*, ou *científica*, dos antigos egípcios e babilônios no que se poderia chamar de *Geometria demonstrativa*. Segundo ela, todas as verdades geométricas deveriam ser demonstradas por raciocínios dedutivos, com base em princípios chamados de *axiomas* ou *postulados*, e não por processos experimentais.

A Geometria demonstrativa começou provavelmente com o trabalho do matemático grego Tales de Mileto (624-547 a.C.), considerado um dos sete sábios da Anti-

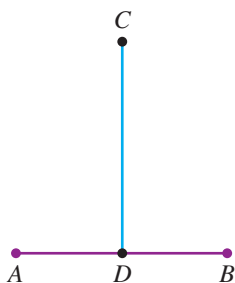
guidade. Primeira pessoa conhecida a utilizar métodos dedutivos em Geometria, Tales viveu no Egito, de onde levou a Geometria para a Grécia, começando a aplicar a essa ciência, pela primeira vez, procedimentos dedutivos da Filosofia grega.

No campo da Matemática, o primeiro pensamento dedutivo ocorreu na área da Geometria, e a forma de pensamento dedutivo estabeleceu um modelo e determinou uma tradição que perduram até nossos tempos no procedimento de validação das verdades matemáticas.

6 Demonstrações geométricas

Muitas das propriedades geométricas já estudadas foram consideradas verdadeiras com base em medições experimentais ou na simples observação. Porém, nem sempre chegamos a conclusões corretas efetuando medições, uma vez que a medida está sujeita a erros decorrentes de, por exemplo, um desenho impreciso ou um instrumento defeituoso. A simples observação também pode levar a conclusões erradas, pois muitas vezes as aparências enganam.

Um observador descuidado, ao examinar a figura abaixo, poderá concluir que $CD > AB$, quando, na verdade, $AB = CD$. (Verifique!)



Isso nos faz pensar que nem sempre a medição ou a simples observação são suficientes para confirmar se uma propriedade geométrica é verdadeira ou falsa. Por mais evidente que pareça, ela só pode ser considerada verdadeira depois de provada.

► Noções primitivas e postulados

Já estudamos que, em Geometria, pontos, retas e planos são noções aceitas sem definição, e, por isso, chamadas de **noções primitivas**.

Além das noções primitivas, na Geometria estabelecemos algumas verdades iniciais aceitas sem demonstração: os **postulados**.

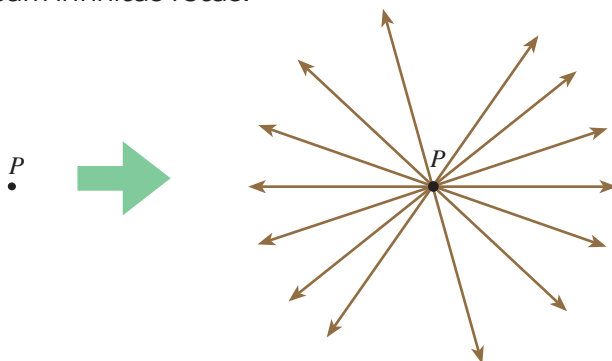
A seguir, vamos estudar alguns postulados que foram estabelecidos como propriedades fundamentais das noções primitivas.

Postulados

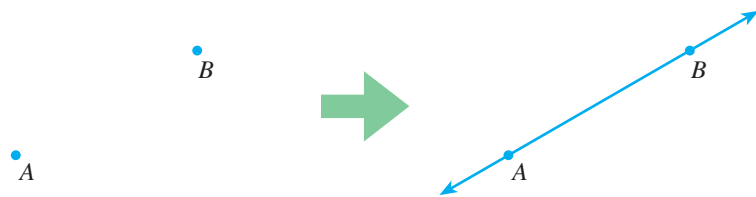
- Uma reta tem infinitos pontos.



- Por um ponto passam infinitas retas.



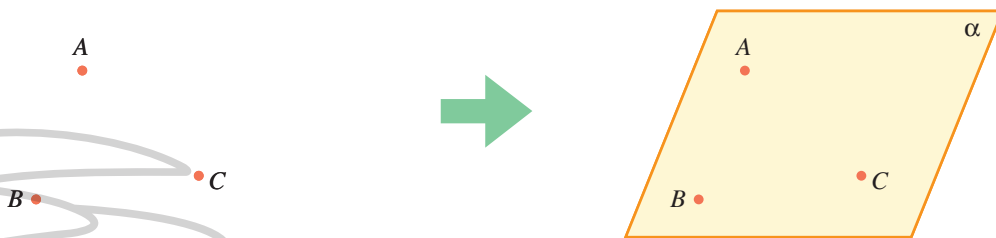
- Dois pontos distintos determinam uma única reta.



- Entre dois pontos distintos de uma reta, existe outro ponto dessa reta.



- Três pontos não colineares determinam um, e somente um, plano.



- Por um ponto P , situado fora de uma reta r , passa uma única reta paralela à reta dada.



Teoremas

Os **teoremas** são propriedades que podem ser demonstradas com base nos postulados ou em propriedades anteriormente demonstradas.

Um teorema é composto de duas partes:

- a parte que se supõe conhecida, chamada de **hipótese**;
- a parte que se deseja provar, chamada de **tese**.

Veja alguns exemplos.

- a)** Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.

Hipótese: duas retas paralelas são cortadas por uma transversal.

Tese: os ângulos correspondentes são congruentes.

- b)** Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

Hipótese: um triângulo é isósceles.

Tese: os ângulos da base são congruentes.

25. a) Hipótese: um número é múltiplo de 3 e de 5; tese: esse número é múltiplo de 15.
 b) Hipótese: uma altura de um triângulo é bissetriz; tese: esse triângulo é isósceles.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- c) Hipótese: duas retas cortadas por uma reta transversal são paralelas; tese: essas retas determinam ângulos alternos internos de mesma medida.

25 Identifique a hipótese e a tese em cada caso.

- Se um número é múltiplo de 3 e de 5, então esse número é múltiplo de 15.
- Se uma altura de um triângulo é bissetriz, então esse triângulo é isósceles.
- Se duas retas cortadas por uma reta transversal são paralelas, então elas determinam ângulos alternos internos de mesma medida.

26 Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas e dê um exemplo que justifique o fato de as sentenças serem falsas.

- Se um triângulo é isósceles, então ele tem dois lados congruentes e um de medida diferente. **falsa; resposta pessoal**
- Se um triângulo é retângulo, então ele não pode ser equilátero. **verdadeira**
- Se um triângulo é equilátero, então as bissetrizes de dois ângulos internos determinam apenas ângulos agudos. **falsa; resposta pessoal**

► Congruência de triângulos nas demonstrações geométricas

Acabamos de ver que é possível provar que alguns fatos matemáticos são verdadeiros, baseando-se em outros já comprovados e em uma sequência de conclusões lógicas, sem usar instrumento de medida. É o que chamamos de fazer uma “prova” ou “demonstração” matemática.

Os casos de congruência de triângulos podem ser utilizados para demonstrar a validade de algumas propriedades geométricas. Nos exemplos a seguir, vamos considerar que os casos de congruência de triângulos são verdades já demonstradas.

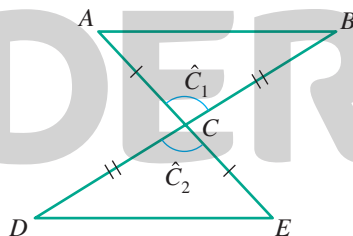
a) Na figura ao lado, temos:

- $\overline{AC} \cong \overline{CE}$
 - $\overline{BC} \cong \overline{CD}$
- } (hipótese)

Queremos provar que:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

Optamos por não apresentar as demonstrações dos casos de congruência de triângulos por considerá-las didaticamente inadequadas para este momento.



Para verificar se os segmentos \overline{AB} e \overline{DE} são congruentes, poderíamos medi-los com o auxílio de uma régua ou usar um compasso com a medida do segmento \overline{AB} para verificar se esta coincide com a medida do segmento \overline{DE} . Em qualquer desses casos, sempre haveria a possibilidade de erro de medição ou mesmo um defeito do aparelho.

Então, vamos provar que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Demonstração

Considerando os triângulos ABC e EDC , temos:

- $\overline{AC} \cong \overline{CE}$ (por hipótese)
- $\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)
- $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ (por hipótese)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ABC e EDC são congruentes. Portanto, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

b) Vamos provar o seguinte teorema:

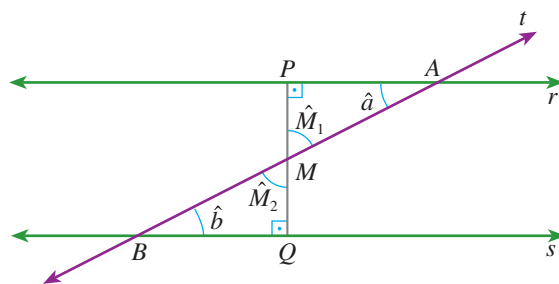
Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos alternos internos congruentes.

Hipótese $\left\{ \begin{array}{l} r // s \\ t \text{ é transversal} \\ \hat{a} \text{ e } \hat{b} \text{ são ângulos alternos internos} \end{array} \right.$

Tese $\left\{ \hat{a} \cong \hat{b} \right.$

Demonstração

Construção auxiliar: pelo ponto M , ponto médio de \overline{AB} , traçamos o segmento \overline{PQ} , perpendicular às retas r e s .



Comparando os triângulos AMP e BMQ , temos:

1. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (M é ponto médio)
2. $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)
3. $\hat{P} \cong \hat{Q}$ (ângulos retos)

Logo, pelo caso LAA_o, os triângulos AMP e BMQ são congruentes. Portanto, $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

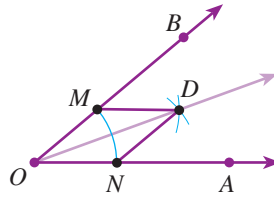
c) Vamos usar a congruência de triângulos para justificar a validade da seguinte construção geométrica: **construção da bissetriz de um ângulo.**

Construção

<p>Com a ponta-seca do compasso em O, traçamos um arco determinando os pontos M e N.</p>	<p>Com a ponta-seca do compasso em M e em seguida em N, traçamos, com a mesma abertura do compasso, os arcos que se cortam em D.</p>	<p>Traçamos a semirreta \overrightarrow{OD}, que é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.</p>

Justificativa

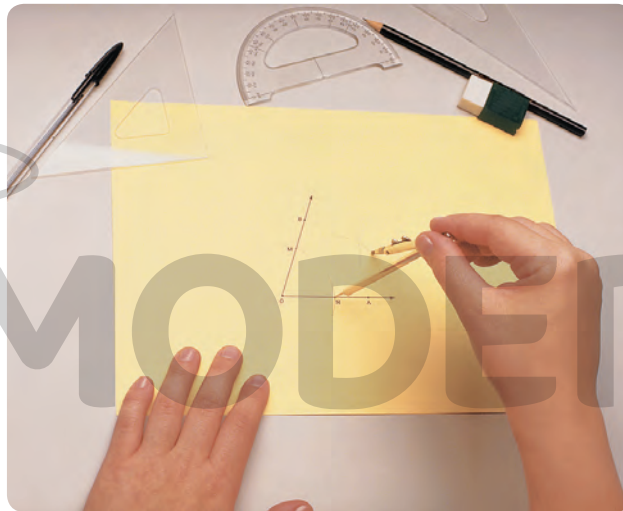
Veja por que essa construção é válida.



Considerando os triângulos OMD e OND , temos:

1. $\overline{OM} \cong \overline{ON}$ (mesma abertura do compasso)
2. $\overline{MD} \cong \overline{ND}$ (mesma abertura do compasso)
3. $\overline{OD} \cong \overline{OD}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LLL, os triângulos OMD e OND são congruentes. Portanto, $\widehat{M\hat{O}D} \cong \widehat{N\hat{O}D}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes. Assim, \overrightarrow{OD} é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.



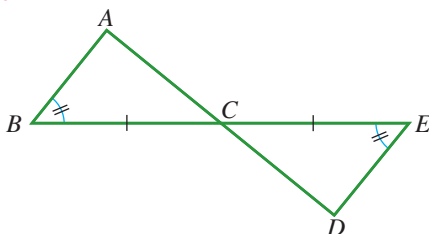
Traçado de bissetriz com o uso de compasso.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

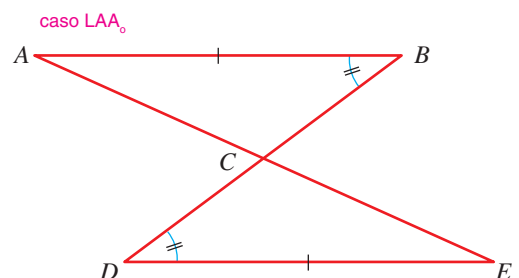
27 Em cada caso, faça o que se pede.

- a) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. *demonstrações*
caso ALA



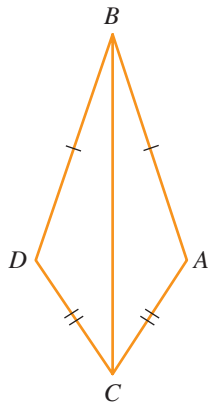
Considere: $\overline{BC} \cong \overline{CE}$; $\hat{B} \cong \hat{E}$

- b) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{CE}$.



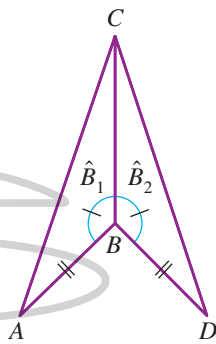
Considere: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\hat{A} \cong \hat{D}$

c) Prove que $\hat{A} \cong \hat{D}$. **caso LLL**



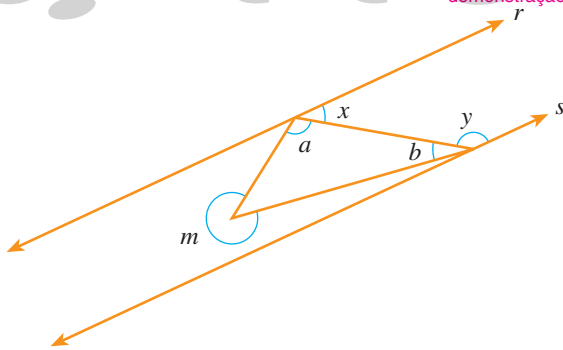
Considere: $\overline{BA} \cong \overline{BD}$; $\overline{AC} \cong \overline{DC}$

d) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{DC}$. **caso LAL**



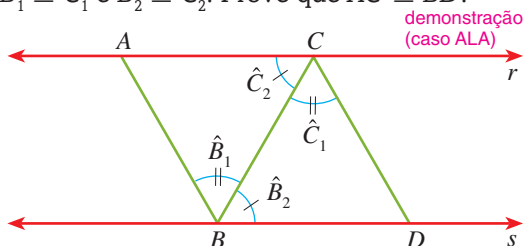
Considere: $\overline{AB} \cong \overline{DB}$; $\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$

28 Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas, e a , b , x e y são medidas dos ângulos indicados.



Prove que $m = (x + y) - (a + b)$.

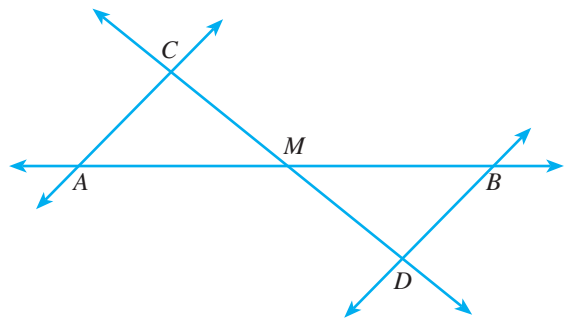
29 Na figura abaixo, temos $r \parallel s$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\hat{B}_1 \cong \hat{C}_1$ e $\hat{B}_2 \cong \hat{C}_2$. Prove que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



30 Faça o que se pede.

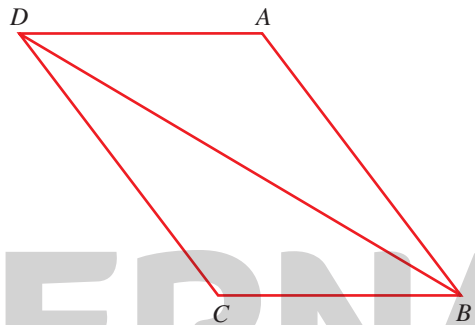
a) Dados $\begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MB} \\ \overline{AC} \parallel \overline{BD} \end{cases}$

Prove que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. **demonstração (caso LAA_o)**

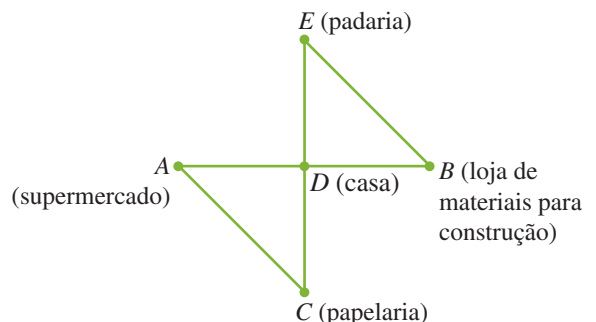


b) Dados $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AB} \cong \overline{CD} \end{cases}$

Prove que $\hat{A} \cong \hat{C}$. **demonstração (caso LAL)**



31 Francisco e Rafael são irmãos e gostam de caminhar todas as tardes. Francisco sai de casa e dá 10 voltas por um caminho que passa pela padaria e pela loja de materiais para construção. Rafael, por sua vez, prefere sair de casa e dar 10 voltas pelo caminho que passa pelo supermercado e pela papelaria. Sabendo que a casa deles fica à mesma distância do supermercado e da loja de materiais para construção, como também é equidistante da padaria e da papelaria, observe o esquema com os caminhos e descubra se Francisco e Rafael percorrem a mesma distância. **sim**



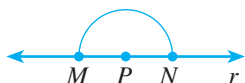
32 Considere a seguinte construção de uma perpendicular a uma reta r que passa por um ponto P dessa reta.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

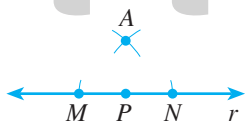
1ª) Traçamos a reta r e o ponto P sobre ela.



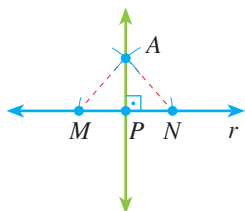
2ª) Com a ponta-seca do compasso em P e uma abertura qualquer, traçamos um arco que corta r nos pontos M e N .



3ª) Com a ponta-seca do compasso em M e em N e abertura maior que PM , traçamos dois arcos, com a mesma abertura do compasso, que se cortam em A .



4ª) A reta \overleftrightarrow{AP} é perpendicular à reta r . O ponto P chama-se “pé da perpendicular” de \overleftrightarrow{AP} sobre r .

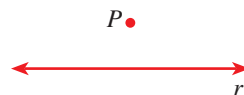


- Justifique por que essa construção é válida.
demonstração (caso LAL)

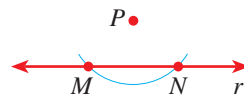
33 Considere a seguinte construção de uma perpendicular a uma reta r que passa por um ponto P que não está na reta.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

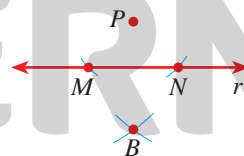
1ª) Traçamos a reta r e o ponto P fora dela.



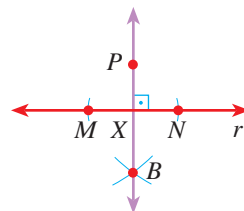
2ª) Com a ponta-seca do compasso em P , traçamos um arco que corta r nos pontos M e N .



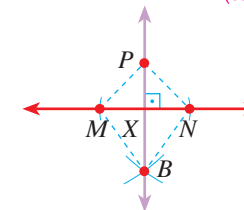
3ª) Com a ponta-seca do compasso em M e em N , traçamos dois arcos de mesmo raio que se cortam em B .



4ª) A reta \overleftrightarrow{PB} é perpendicular à reta r e corta r no ponto X .



- Justifique por que essa construção é válida, observando a figura abaixo. demonstração (caso CH)



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

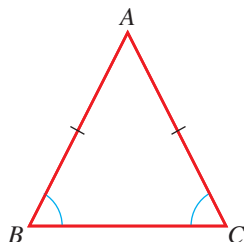
NELSON MATSUDA

7 Propriedades do triângulo isósceles

1ª propriedade

Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Considere o triângulo isósceles ABC abaixo.



Hipótese $\{ \overline{AB} \cong \overline{AC} \}$

Tese $\{ \hat{B} \cong \hat{C} \}$

Demonstração

Construção auxiliar: vamos traçar a bissetriz \overline{AD} .

Comparando os triângulos ADB e ADC , temos:

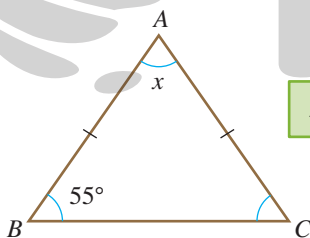
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (por hipótese)

2. $\hat{m} \cong \hat{n}$ (\overline{AD} é bissetriz)

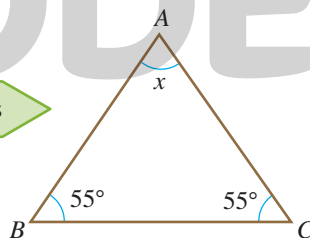
3. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ADB e ADC são congruentes. Portanto, $\hat{B} \cong \hat{C}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

Como exemplo de aplicação, vamos calcular o valor de x no triângulo ABC abaixo, sabendo que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



ABC é triângulo isósceles



$$x + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$x + 110^\circ = 180^\circ$$

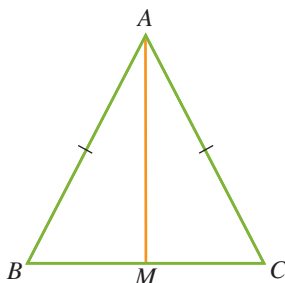
$$x = 180^\circ - 110^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

2ª propriedade

Em todo triângulo isósceles, a mediana, a altura e a bissetriz relativas à base coincidem.

Considere o triângulo isósceles ABC , em que \overline{AM} é mediana.



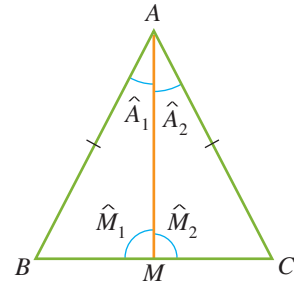
Hipótese $\{ \overline{AB} \cong \overline{AC} \}$
 $\{ \overline{BM} \cong \overline{MC} \}$

Tese $\{ \overline{AM}$ é bissetriz
 $\{ \overline{AM}$ é altura

Demonstração

Comparando os triângulos AMB e AMC , temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (por hipótese)
- $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (\overline{AM} é mediana relativa ao lado \overline{BC})
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum)



Logo, pelo caso LLL, os triângulos AMB e AMC são congruentes. Portanto:

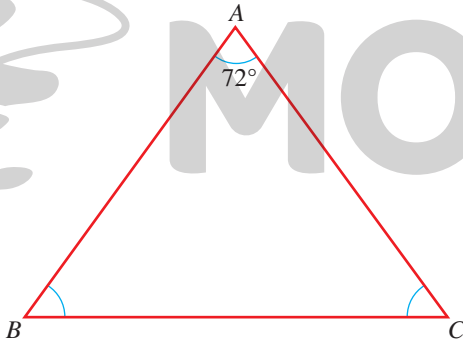
- $\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2$, o que prova que \overline{AM} é a bissetriz relativa ao ângulo \hat{A} .
- $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$ e, por serem adjacentes e suplementares, cada um deles é um ângulo reto, o que prova que \overline{AM} é a altura relativa ao lado \overline{BC} .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

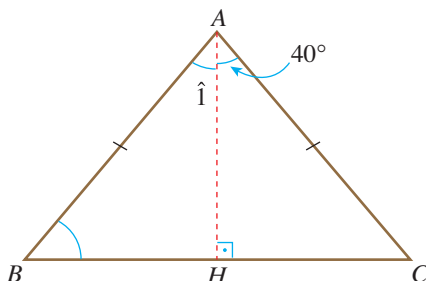
- 34** O triângulo ABC é isósceles de base \overline{BC} . Calcule:

- a medida do ângulo \hat{B} ; 54°
- a medida do ângulo \hat{C} . 54°



- 35** Do $\triangle ABC$, pede-se:

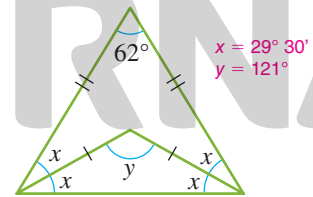
- $m(\overline{BC})$, sabendo que $m(\overline{BH}) = 2$; 4
- $m(\hat{1})$; 40°
- $m(\hat{B})$. 50°



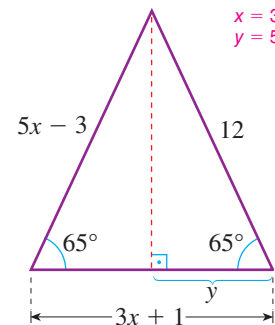
- 36** Em um triângulo isósceles ABC , \overline{AH} é a altura relativa à base \overline{BC} . Sendo $m(\overline{BH}) = 3,5$ cm, calcule $m(\overline{HC})$. $m(\overline{HC}) = 3,5$ cm

- 37** Calcule x e y nas figuras abaixo.

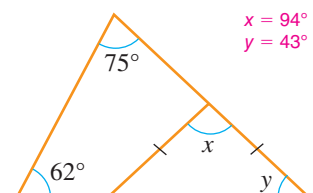
a)



b)



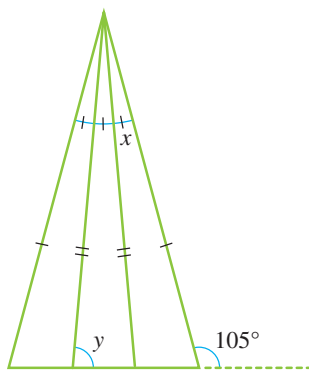
c)



38 Calcule as medidas x e y , em grau, nas figuras a seguir.

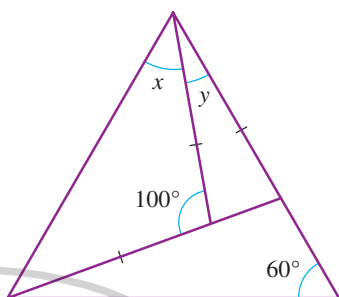
a)

$x = 10^\circ$
 $y = 85^\circ$



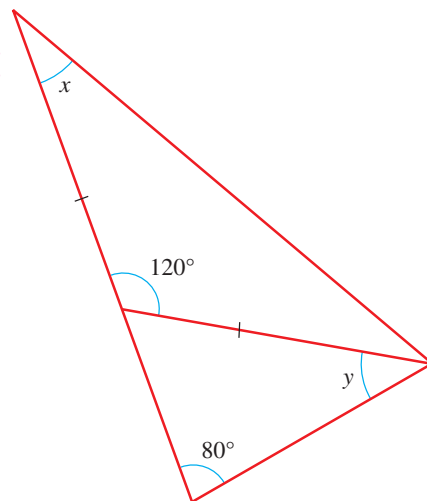
b)

$x = 40^\circ$
 $y = 20^\circ$



c)

$x = 30^\circ$
 $y = 40^\circ$



39 Calcule as medidas dos ângulos de um triângulo isósceles no qual cada ângulo da base mede o quádruplo da medida do ângulo do vértice.

$20^\circ, 80^\circ$ e 80°

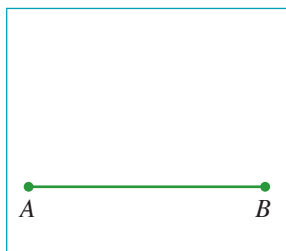
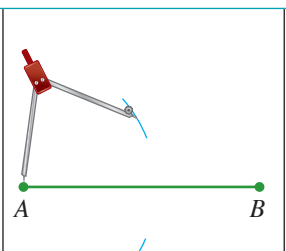
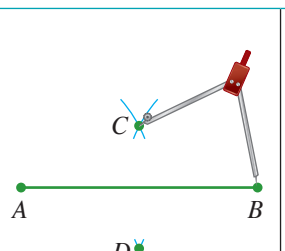
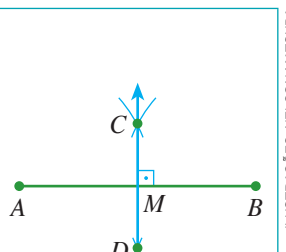
40 Calcule a medida de cada ângulo obtuso determinado por duas bissetrizes de um triângulo equilátero. 120°

PARA SABER MAIS +

Construção de mediatriz

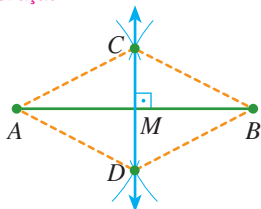
Chamamos de **mediatriz** de um segmento a reta traçada perpendicularmente pelo ponto médio desse segmento.

Acompanhe o traçado, com régua e compasso, da mediatriz do segmento \overline{AB} .

 <p>Vamos considerar o segmento \overline{AB}.</p>	 <p>Com a ponta-seca do compasso em A e abertura do compasso maior que a metade da medida do segmento \overline{AB}, traçamos dois arcos: um abaixo e outro acima de \overline{AB}.</p>	 <p>Com a ponta-seca do compasso em B e mesma abertura do compasso, traçamos dois arcos que cortam os primeiros em C e em D.</p>	 <p>A reta \overline{CD} cruza \overline{AB} no ponto M. M é o ponto médio de \overline{AB}. \overline{CD} é a mediatriz de \overline{AB}.</p>
--	--	---	---

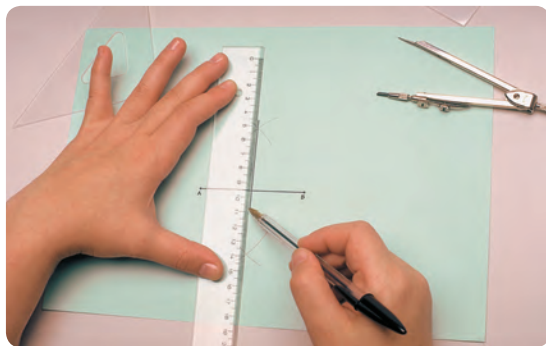
- a) Observando a figura abaixo, justifique por que essa construção é válida.

demonstração



- b) Desenhe um triângulo qualquer e trace as mediatrizes de seus lados.

construção de figura



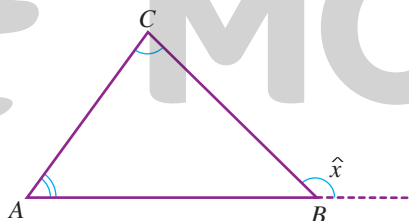
Traçado de mediatriz com o uso de compasso.

8 Propriedades de um triângulo qualquer

1ª propriedade

A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Considere o triângulo ABC abaixo.



Hipótese $\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} \text{ é um ângulo externo não} \\ \text{adjacente aos ângulos } \hat{A} \text{ e } \hat{C} \end{array} \right.$
Tese $\{ m(\hat{x}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C}) \}$

Demonstração

No triângulo ABC, temos:

- $m(\hat{x}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$ (\hat{x} e \hat{B} são adjacentes e suplementares)
- $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ (\hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são ângulos internos de um triângulo)

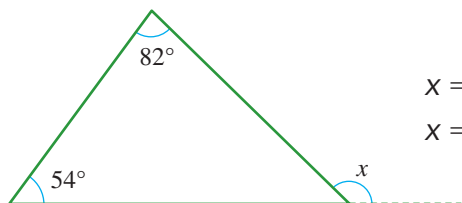
Logo:

$$m(\hat{x}) + m(\hat{B}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})$$

$$m(\hat{x}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$$

Como exemplo de aplicação, vamos calcular x nos triângulos a seguir.

a)

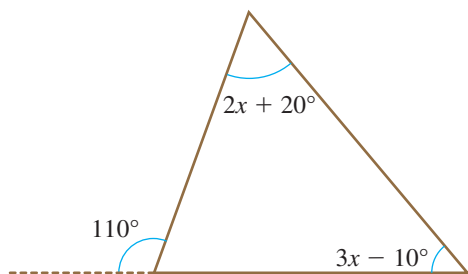


$$x = 54^\circ + 82^\circ$$

$$x = 136^\circ$$



b)



$$2x + 20^\circ + 3x - 10^\circ = 110^\circ$$

$$2x + 3x = 110^\circ - 20^\circ + 10^\circ$$

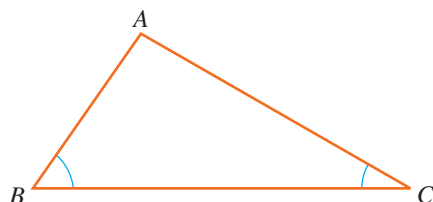
$$5x = 100^\circ$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{100^\circ}{5}$$

$$x = 20^\circ$$

2ª propriedade

Se dois lados de um triângulo são desiguais, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo.



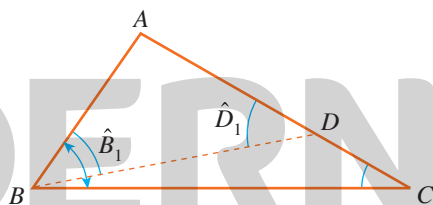
Hipótese $\{\overline{AC} > \overline{AB}\}$

Tese $\{\hat{B} > \hat{C}\}$

Demonstração

Construção auxiliar: marcamos sobre \overline{AC} um ponto D tal que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.

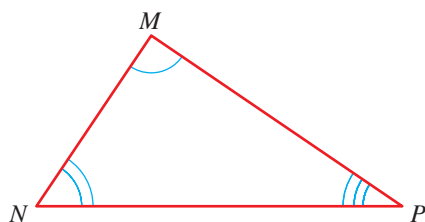
1. $\triangle ABD$ é isósceles (por construção)
2. $\hat{B}_1 \cong \hat{D}_1$ (propriedade do triângulo isósceles)
3. $\hat{D}_1 > \hat{C}$ (pela propriedade do ângulo externo)
4. $\hat{B}_1 > \hat{C}$ (substituindo \hat{D}_1 por \hat{B}_1)
5. $\hat{B} > \hat{B}_1$ (pela construção auxiliar)
6. $\hat{B} > \hat{C}$ ($\hat{B} > \hat{B}_1 > \hat{C}$)



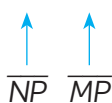
Vamos admitir, sem demonstração, que a recíproca dessa propriedade seja verdadeira. Isto é, se dois ângulos de um triângulo são desiguais, então ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

Veja alguns exemplos.

a) No triângulo MNP , temos $\hat{M} > \hat{N}$. Que relação existe entre \overline{NP} e \overline{MP} ?

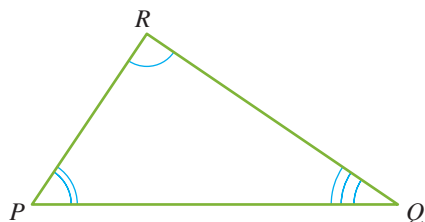


Como $\hat{M} > \hat{N}$, então $\overline{NP} > \overline{MP}$.



ângulos opostos aos lados

b) No triângulo PQR , temos $\overline{PQ} > \overline{QR}$. Que relação existe entre \hat{R} e \hat{P} ?

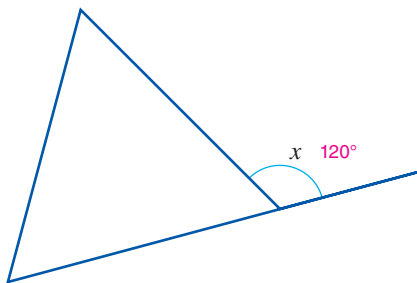


Como $\overline{PQ} > \overline{QR}$, então $\hat{R} > \hat{P}$.



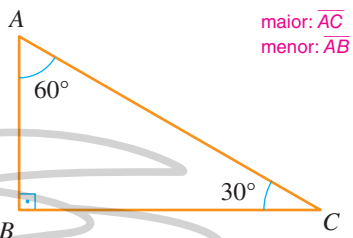
lados opostos aos ângulos

41 Calcule x no triângulo equilátero abaixo.



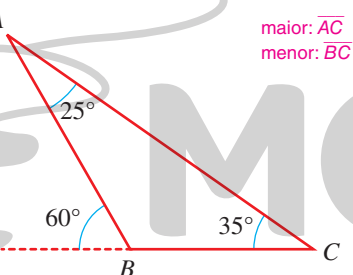
42 Observe os triângulos e encontre, em cada um, o maior lado e o menor lado.

a)



maior: \overline{AC}
menor: \overline{AB}

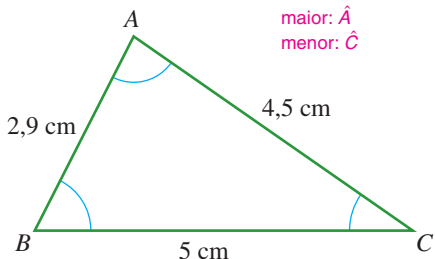
b)



maior: \overline{AC}
menor: \overline{BC}

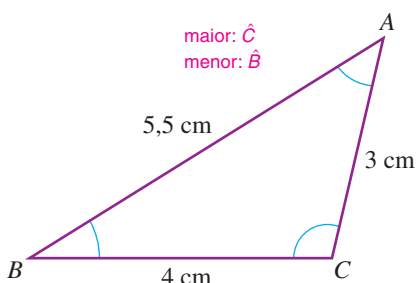
43 Observe os triângulos e encontre, em cada um, o maior ângulo e o menor ângulo.

a)



maior: \hat{A}
menor: \hat{C}

b)

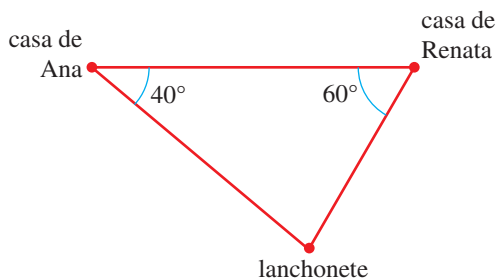


maior: \hat{C}
menor: \hat{B}

44 Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 5,5 cm e 4 cm. O terceiro lado mede aproximadamente 3 cm. Um de seus ângulos mede 100° . Quanto mede o lado oposto a ele?

5,5 cm

45 Ana e Renata moram perto de uma lanchonete, conforme mostra o esquema abaixo.

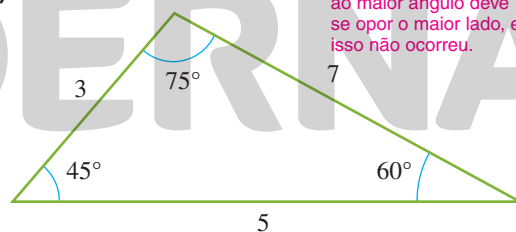


Qual delas mora mais distante da lanchonete? Justifique.

Ana, pois ao maior ângulo se opõe o maior lado do triângulo.

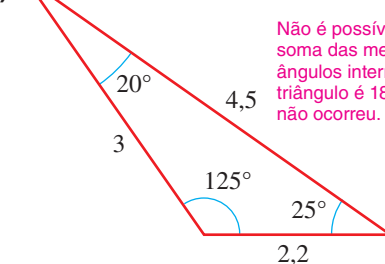
46 Em cada caso, as medidas estão indicadas em uma mesma unidade. Verifique quais casos são possíveis. Quando for impossível, justifique.

a)



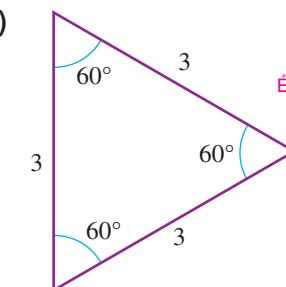
Não é possível, pois ao maior ângulo deve se opor o maior lado, e isso não ocorreu.

b)



Não é possível, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , e isso não ocorreu.

c)



É possível.

NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

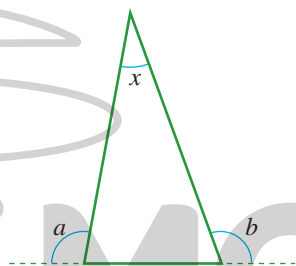
1. respostas possíveis:
 a) falsa, pois o ponto de encontro das medianas de um triângulo chama-se baricentro.
 d) falsa, pois o lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se hipotenusa.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

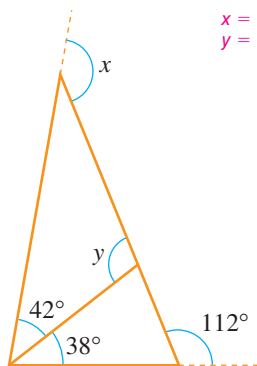
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Corrija as sentenças falsas.
- O ponto de encontro das medianas de um triângulo chama-se ortocentro.
 - Todo triângulo equilátero é isósceles.
 - Em um triângulo equilátero, a altura e a mediana relativas ao mesmo lado têm a mesma medida. verdadeira
 - O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se cateto.
 - Se um triângulo é equilátero, então cada um de seus ângulos internos mede 60° . verdadeira
 - Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. verdadeira
- 2 (PUC-SP) Na figura, $a = 100^\circ$ e $b = 110^\circ$. Quanto mede o ângulo indicado por x ? alternativa a

- 30°
- 50°
- 80°
- 100°
- 220°



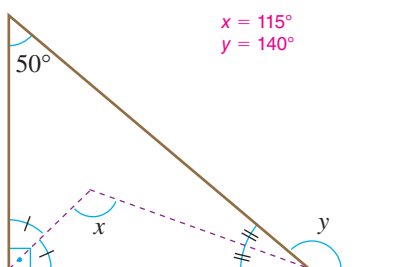
- 3 Calcule x e y nos triângulos.
- a)



$$x = 148^\circ$$

$$y = 106^\circ$$

- b)

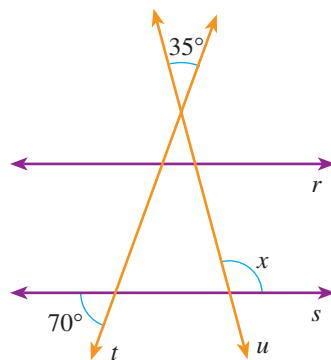


$$x = 115^\circ$$

$$y = 140^\circ$$

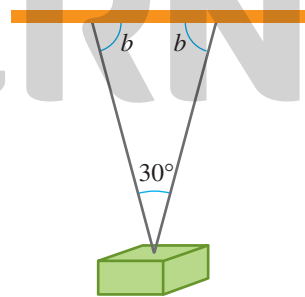
- 4 Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa forma com um dos catetos um ângulo de 35° . Calcule as medidas dos ângulos agudos desse triângulo. 35° e 55°
- 5 (FCC-SP) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. A medida x do ângulo assinalado é: alternativa e

- 135°
- 120°
- 115°
- 110°
- 105°

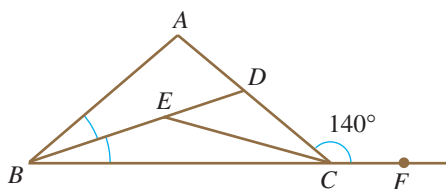


- 6 (Univali-SC) O peso da figura está suspenso por duas cordas de mesma medida e presas no teto. Se o ângulo entre as cordas é de 30° , então o ângulo b , formado pela corda e o teto, mede: alternativa d

- 105°
- 100°
- 90°
- 75°
- 60°



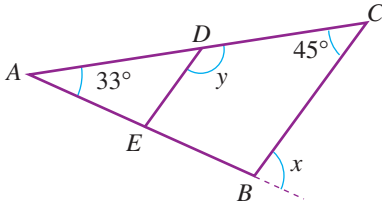
- 7 (UFMG) Nesta figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, \overline{BD} é bissetriz de \widehat{ABC} , \overline{CE} bissetriz de \widehat{BCD} e a medida do ângulo \widehat{ACF} é 140° .



- A medida do ângulo \widehat{DEC} , em graus, é: alternativa c
- 20.
 - 30.
 - 40.
 - 50.
 - 60.

- 8 (Faap-SP) No triângulo ABC da figura abaixo, tem-se: $AD = DC$, $AE = EB$, $m(\hat{A}) = 33^\circ$ e $m(\hat{C}) = 45^\circ$. Calcule x e y . $x = 78^\circ$ e $y = 135^\circ$

NELSON MATSUDA

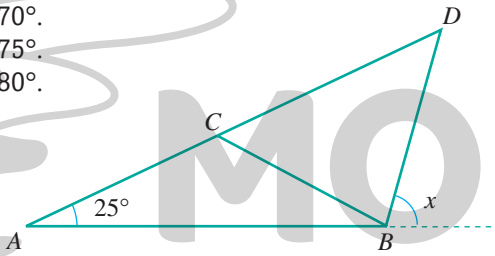


- 9 (Uneb-BA) Num triângulo retângulo, a altura e a bissetriz relativas à hipotenusa formam um ângulo de 25° . Os ângulos agudos desse triângulo medem: **alternativa e**
- a) 35° e 55° . c) 30° e 60° . e) 20° e 70° .
b) 40° e 50° . d) 15° e 75° .

- 10 (UFMG) Na figura, $AC = CB = BD$ e $m(\hat{A}) = 25^\circ$. O valor de x é: **alternativa d**

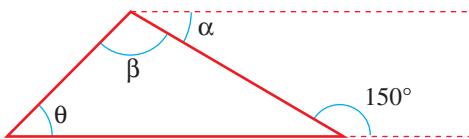
- a) 50° .
b) 60° .
c) 70° .
d) 75° .
e) 80° .

NELSON MATSUDA



- 11 Em um triângulo retângulo, a medida de um dos ângulos agudos é 50° . Calcule a medida do ângulo obtuso formado pela sua bissetriz com a bissetriz do ângulo reto. **110°**
- 12 (Ufac) Considere a figura abaixo.

NELSON MATSUDA



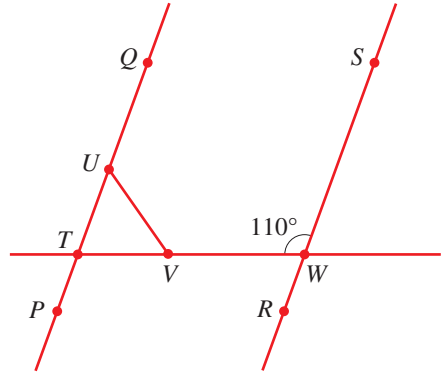
Sabendo-se que $\alpha + \beta = 135^\circ$, temos que α , β e θ medem, respectivamente: **alternativa c**

- a) 30° , 45° e 105° .
b) 30° , 115° e 35° .
c) 30° , 105° e 45° .
d) 45° , 105° e 30° .
e) $\alpha = \beta = 45^\circ$ e $\theta = 90^\circ$.

- 13 (Fuvest-SP) Um avião levanta voo para ir da cidade A à cidade B , situada a 500 km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção de voo de um ângulo de 90° . Se a rota não tivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500 km previstos? **500 km**

- 14 (Obmep) Na figura dada, a reta \overleftrightarrow{PQ} é paralela à reta \overleftrightarrow{RS} e $TU = TV$.

NELSON MATSUDA

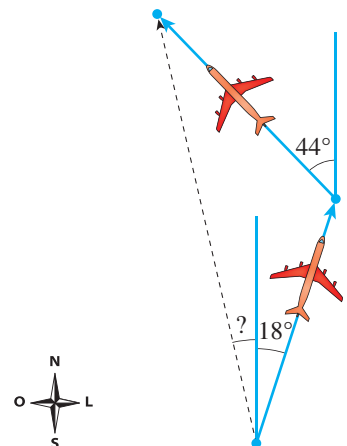


Se o ângulo $T\hat{W}S$ mede 110° , o ângulo $Q\hat{U}V$ mede: **alternativa c**

- a) 135° . d) 115° .
b) 130° . e) 110° .
c) 125° .

- 15 (Obmep) A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte, e o segundo, um ângulo de 44° , também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte? **alternativa b**

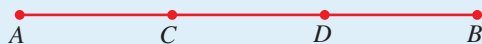
- a) 12°
b) 13°
c) 14°
d) 15°
e) 16°



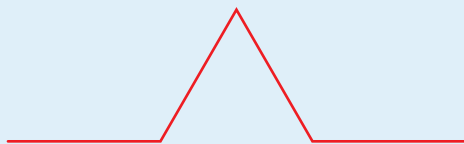
NELSON MATSUDA

Fractais

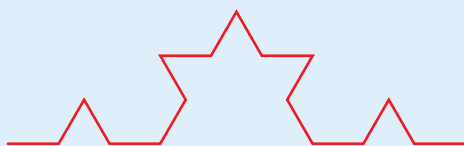
Considere o segmento \overline{AB} , dividido em três partes iguais.



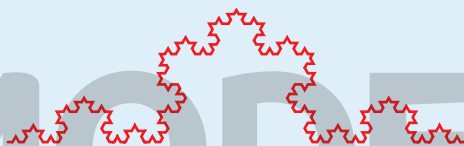
Construímos sobre \overline{CD} um triângulo equilátero e, em seguida, apagamos o segmento \overline{CD} .



Em cada um desses quatro segmentos, repetimos o mesmo procedimento.



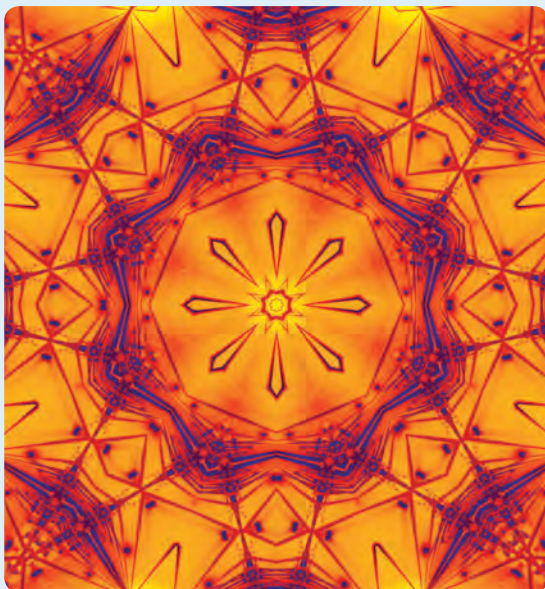
E, assim prosseguindo, obtemos a figura.



Essa figura, formada por repetições de padrões, é um exemplo de **fractal**. Ela conserva todas as propriedades da figura inicial.

Veja, abaixo, alguns fractais construídos com a ajuda do computador.

IGOR STEVANOVIC/SHUTTERSTOCK



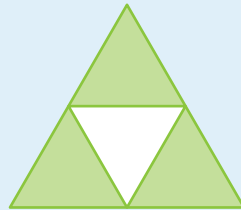
SKIZER/SHUTTERSTOCK



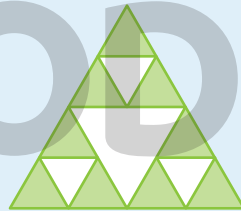
Uma das formas mais elementares da geometria fractal é o triângulo de Sierpinski. Para sua construção, partimos de um triângulo equilátero.



Unindo os pontos médios desse triângulo, obtemos quatro triângulos menores e desconsideramos aquele que não tem vértice coincidindo com um dos vértices do triângulo original.

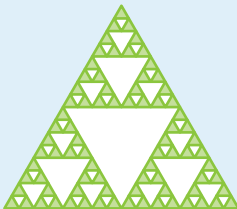


Repetindo esse procedimento, obtemos:



Descubra qual é a quarta figura do triângulo de Sierpinski. **alternativa c**

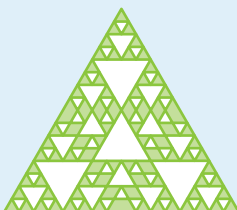
a)



c)



b)



d)



Estudo dos quadriláteros

1 Quadriláteros

Podemos perceber os quadriláteros nas coisas mais simples que fazemos, como, por exemplo, empinar pipa e jogar xadrez.



WARREN GOLDSWAN/SHUTTERSTOCK



HOFFMANN PHOTOGRAPHY/EASYPX

Neste capítulo, vamos estudar detalhadamente os quadriláteros.

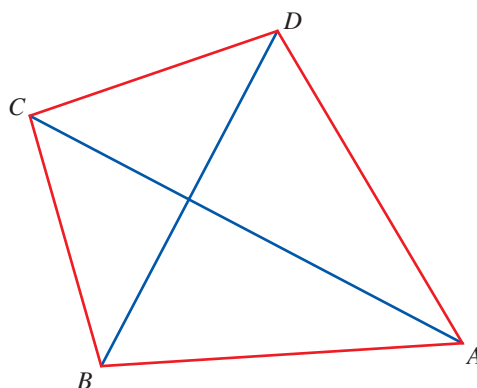
Elementos dos quadriláteros

Quadriláteros são polígonos de quatro lados.

Considere o quadrilátero ao lado.

Nele destacamos:

- os **vértices** A , B , C e D ;
- os **lados** \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} ;
- as **diagonais** \overline{AC} e \overline{BD} .



NELSON MATSUDA

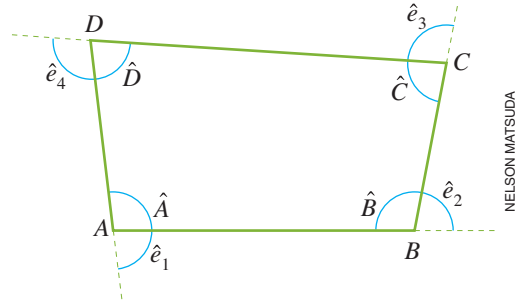
Dois lados não consecutivos de um quadrilátero denominam-se **lados opostos**. Na figura, os lados **opostos** são \overline{AB} e \overline{CD} , \overline{BC} e \overline{AD} .

► Ângulos de um quadrilátero

Considere o quadrilátero ao lado.

Nele destacamos:

- os **ângulos internos** \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} ;
- os **ângulos consecutivos** \hat{A} e \hat{B} , \hat{B} e \hat{C} , \hat{C} e \hat{D} , \hat{D} e \hat{A} ;
- os **ângulos opostos** \hat{A} e \hat{C} , \hat{B} e \hat{D} ;
- os **ângulos externos** \hat{e}_1 , \hat{e}_2 , \hat{e}_3 e \hat{e}_4 .



NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Desenhe um quadrilátero qualquer em uma folha de papel. Marque os ângulos internos desse quadrilátero cada um com uma cor diferente. Recorte o quadrilátero separando os quatro ângulos internos.

Reúna os ângulos internos em torno de um dos vértices do quadrilátero, justapondo seus lados de modo que se obtenha um único ângulo, que será a soma dos quatro ângulos internos.

Quanto vale essa soma? 360°



JOSÉ LUIZ JUHAS

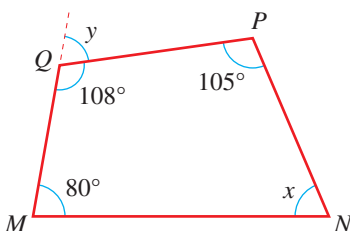
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , demonstre que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° . *demonstração*

- Considere o quadrilátero $MNPQ$.



Calcule:

- a medida do ângulo \hat{N} ; $m(\hat{N}) = 67^\circ$
- o valor de y . $y = 72^\circ$

- Infinitos quadrados.

- Com quatro ângulos de 90° e quatro lados de 6 cm, há um único quadrado.

- Com o auxílio de régua e transferidor, desenhe um quadrilátero que tenha:

- dois ângulos internos opostos congruentes de 90° ; *infinitos*
- dois ângulos internos opostos congruentes, de 90° , e quatro lados congruentes;
- dois ângulos internos opostos congruentes, de 90° , e quatro lados congruentes de 6 cm.

Em cada item, quantos quadriláteros diferentes com essas características é possível construir?

- Três dos ângulos internos de um quadrilátero medem, respectivamente, 104° , 97° e 53° . Calcule a medida do quarto ângulo desse quadrilátero. 106°

NELSON MATSUDA

5 Em um quadrilátero, os ângulos internos medem, respectivamente, x , $x + 40^\circ$, $x + 80^\circ$ e $3x$. Calcule o valor de x . $x = 40^\circ$

6 Em um quadrilátero $ABCD$, $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$, $m(\hat{B}) = 3 \cdot m(\hat{C})$ e $m(\hat{D}) = 2 \cdot m(\hat{C})$. Calcule a medida dos ângulos \hat{C} e \hat{A} .
 $m(\hat{C}) = 40^\circ$ e $m(\hat{A}) = 120^\circ$

7 Em um quadrilátero $ABCD$, temos:

- $m(\hat{A}) = 108^\circ$;
- $m(\hat{B}) = 76^\circ$;
- $m(\hat{C}) = 92^\circ$.

Calcule a medida do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos \hat{C} e \hat{D} . 92°

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Caio brincava com um carrinho de controle remoto na sala de sua casa.

Foram estes os movimentos do carrinho: saiu de um canto da sala (ponto A) e foi em frente até o ponto B . Girou 130° à esquerda e andou em frente até o ponto C . O carrinho girou novamente 50° à esquerda e foi em frente até o ponto D . Girou 140° à esquerda e andou até voltar ao local de onde saiu.

- Desenhe o percurso descrito pelo carrinho de Caio.
- Considerando que o percurso descrito tenha formado o quadrilátero $ABCD$, determine a medida do ângulo interno \hat{A} . $m(\hat{A}) = 140^\circ$



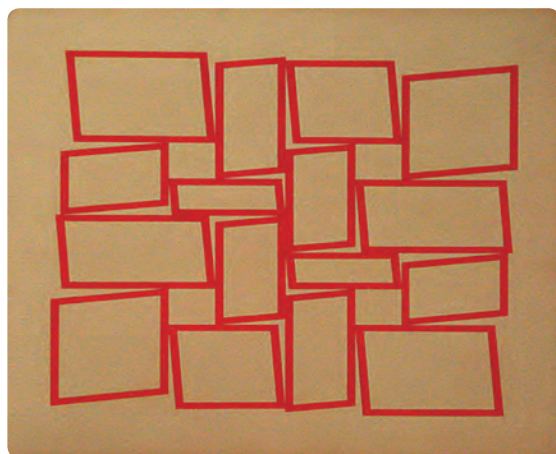
ALAN CARVALHO

2 Paralelogramos

Para compor a obra reproduzida abaixo, o artista brasileiro Hélio Oiticica (1937-1980) usou diferentes figuras que dão a ideia de paralelogramos. Observe-as.



ALAN CARVALHO



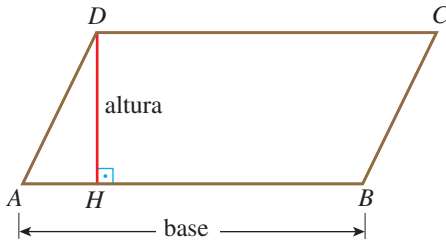
CÉSAR OITICICA FILHO/CORTESIA PROJETO OITICICA - COLEÇÃO TATE MODERN, LONDRES

Hélio Oiticica. *Metaesquema 295*, 1958, guache sobre cartão, $52,5 \times 63,9$ cm.

Paralelogramos são quadriláteros que têm os lados opostos paralelos.


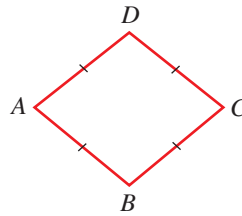
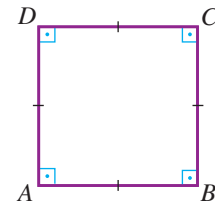
Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Logo, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

NELSON MATSUUDA



O lado \overline{AB} é uma **base** do paralelogramo, e o segmento \overline{DH} é uma **altura** do paralelogramo relativa a essa base.

Entre os paralelogramos, destacam-se os seguintes casos particulares.

<p>Retângulos: paralelogramos que têm os quatro ângulos congruentes (retos).</p> 	<p>Losangos: paralelogramos que têm os quatro lados congruentes.</p> 	<p>Quadrados: paralelogramos que têm os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes (retos).</p> 
---	---	---

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUUDA

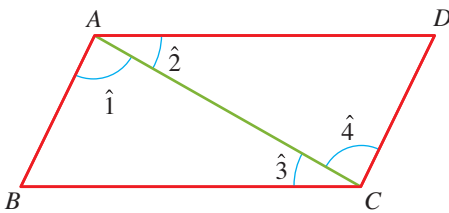
Assim, todo quadrado é um retângulo e também é um losango.

Propriedades dos paralelogramos

1ª propriedade

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

NELSON MATSUUDA



Hipótese { $ABCD$ é um paralelogramo
Tese { $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

Demonstração

Traçando a diagonal \overline{AC} , decomparamos o paralelogramo $ABCD$ nos triângulos ABC e CDA . Analisando os elementos desses triângulos, temos:

- $\hat{1} \cong \hat{4}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos \overline{AB} e \overline{CD} com a diagonal \overline{AC})
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum)
- $\hat{3} \cong \hat{2}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{BC} com a diagonal \overline{AC})

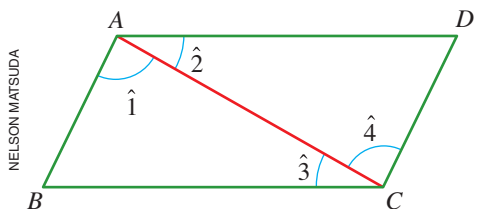
Pelo caso ALA, os triângulos ABC e CDA são congruentes. Portanto:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ e } \overline{BC} \cong \overline{AD}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2ª propriedade

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.



Hipótese { $ABCD$ é um paralelogramo
Tese { $\hat{B} \cong \hat{D}$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$

Demonstração

Traçando a diagonal \overline{AC} , decompomos o paralelogramo $ABCD$ nos triângulos ABC e CDA .

Por raciocínio análogo à demonstração da 1ª propriedade, analisando os elementos dos triângulos obtidos, ABC e CDA , concluímos, pelo caso ALA, que os triângulos ABC e CDA são congruentes.

Portanto, $\hat{B} \cong \hat{D}$.

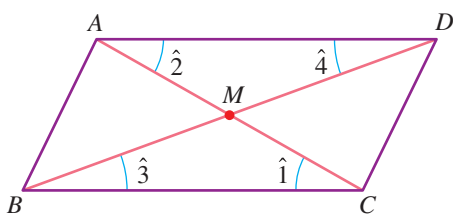
Se traçarmos a diagonal \overline{BD} , demonstraremos que $\hat{A} \cong \hat{C}$.



JOSE LUIS JUHAS

3ª propriedade

As diagonais de um paralelogramo se cruzam nos respectivos pontos médios.



Hipótese { $ABCD$ é um paralelogramo
Tese { $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ e $\overline{BM} \cong \overline{MD}$

Demonstração

Comparando os elementos dos triângulos BMC e DMA , temos:

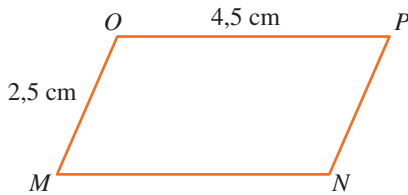
1. $\hat{1} \cong \hat{2}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{BC} com a diagonal \overline{AC})
2. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (lados opostos de um paralelogramo demonstrado na 1ª propriedade)
3. $\hat{3} \cong \hat{4}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{BC} com a diagonal \overline{BD})

Logo, pelo caso ALA, os triângulos BMC e DMA são congruentes. Portanto:

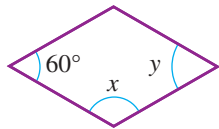
$$\overline{AM} \cong \overline{MC} \text{ e } \overline{BM} \cong \overline{MD}$$

8 Observe os paralelogramos e, considerando as propriedades estudadas, determine:

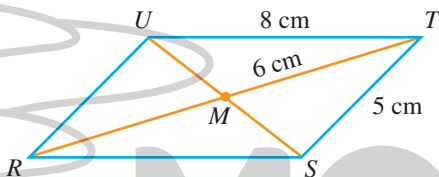
a) MN e NP 4,5 cm e 2,5 cm



b) x e y $x = 120^\circ$ e $y = 60^\circ$



c) RS , RU , MR e RT 8 cm, 5 cm, 6 cm, 12 cm



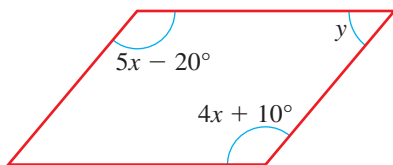
9 Um dos ângulos agudos de um paralelogramo mede 74° . Calcule a medida de um dos ângulos obtusos desse paralelogramo. 106°

10 Em um losango, um dos ângulos mede 125° . Determine a medida de um dos ângulos agudos desse losango. 55°

11 Nos paralelogramos a seguir, calcule x e y .

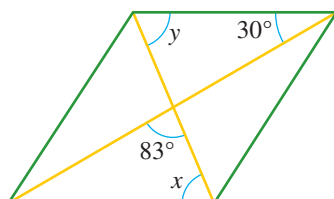
a)

$x = 30^\circ$
 $y = 50^\circ$



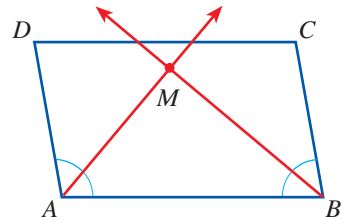
b)

$x = 67^\circ$
 $y = 67^\circ$



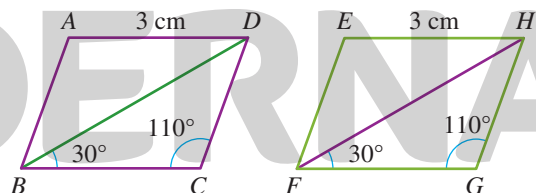
12 Em um paralelogramo, um dos ângulos externos mede 108° . Calcule as medidas dos ângulos internos desse paralelogramo. $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$

13 No paralelogramo abaixo, $m(\hat{B}) = 80^\circ$, \overrightarrow{BM} é bissetriz do ângulo \hat{B} e \overrightarrow{AM} é bissetriz do ângulo \hat{A} . Calcule a medida do ângulo \hat{AMB} . 90°



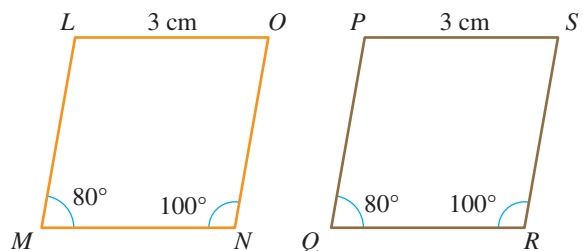
14 Construa um paralelogramo cujas diagonais meçam 4,2 cm e 5,6 cm e formem entre si um ângulo de 110° . construção de figura

15 Considere os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ abaixo.



Esses paralelogramos são congruentes? Justifique sua resposta. Sim, pois $\triangle BCD \cong \triangle FGH$ pelo caso ALA. E consequentemente $DC \cong HG$.

16 Agora, considere os paralelogramos $LMNO$ e $PQRS$ abaixo.



E quanto a esses paralelogramos, podemos afirmar que são congruentes? Justifique sua resposta. Não, pois não temos as medidas de ON e SR .

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

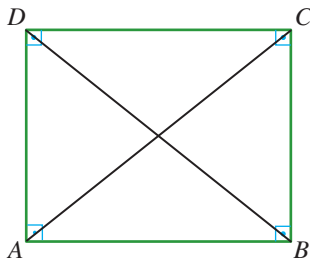
NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Propriedade dos retângulos

As diagonais de um retângulo são congruentes.



Hipótese { $ABCD$ é um retângulo

Tese { $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

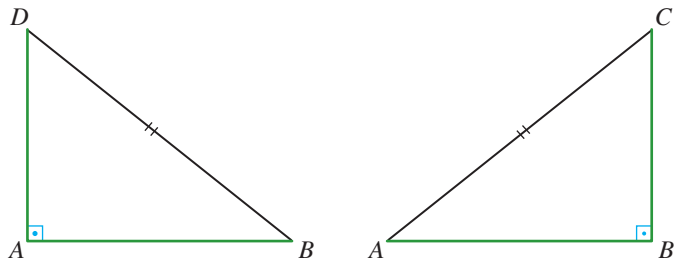
Demonstração

Traçando as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} no retângulo $ABCD$, obtemos os triângulos ABD e BAC .

Comparando os elementos desses triângulos, temos:

1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (lados opostos de um paralelogramo)
2. $\hat{A} \cong \hat{B}$ (ângulos retos)
3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (lado comum)

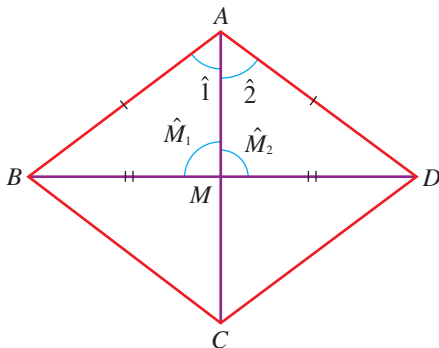
Logo, pelo caso LAL, os triângulos ABD e BAC são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Propriedade dos losangos

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.



Hipótese { $ABCD$ é um losango

Tese { $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
 $\hat{1} \cong \hat{2}$

Demonstração

Analisando os elementos dos triângulos AMB e AMD , obtidos ao traçarmos as diagonais no losango $ABCD$, temos:

1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (lados de um losango)
2. $\overline{BM} \cong \overline{MD}$ (M é ponto médio de \overline{BD})
3. $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Logo, pelo caso LLL, os triângulos AMB e AMD são congruentes. Portanto:

- a) $\hat{1} \cong \hat{2}$, o que prova que \overrightarrow{AC} é bissetriz do ângulo \hat{A} ;
 b) $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$, que, por serem suplementares, são retos, o que prova que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Por raciocínio análogo, prova-se que \overrightarrow{BD} é bissetriz dos ângulos \hat{B} e \hat{D} .

Propriedades dos quadrados

O quadrado é ao mesmo tempo um retângulo e um losango. Portanto, possui as propriedades desses dois paralelogramos.

As diagonais de um quadrado são congruentes, perpendiculares entre si no ponto médio e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

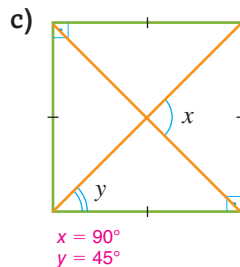
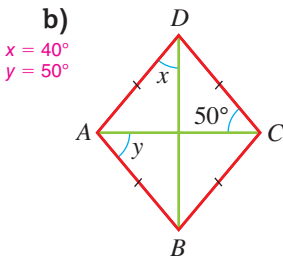
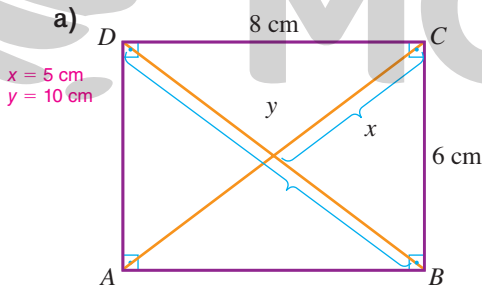
OBSERVAÇÃO

- Um paralelogramo que não é retângulo tem diagonais não congruentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Nos quadriláteros abaixo, determine x e y .



18 As diagonais de um retângulo cortam-se formando um ângulo de 100° .

Determine o menor ângulo que uma dessas diagonais forma com um dos lados. 40°

19 Corrija as sentenças falsas.

- a) Em alguns retângulos, as diagonais são congruentes.
 b) As diagonais de um losango são perpendiculares entre si. verdadeira
 c) As diagonais de um retângulo são perpendiculares entre si.
 d) As diagonais de um quadrado não formam, entre si, ângulo de 90° .

20 A diagonal de um losango forma, com um dos lados, um ângulo de 35° .

Calcule os ângulos desse losango. $70^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 110^\circ$

21 Usando régua e compasso, construa um quadrado cujas diagonais meçam 5,6 cm. Com a régua, determine a medida do lado, em milímetro.

Calcule a área desse quadrado, em milímetro quadrado. 1.600 mm^2 (considerando o lado de medida = 4 cm)

22 Cada diagonal de um retângulo mede 5 cm. Elas cortam-se formando um ângulo de 60° . Usando régua e compasso, construa esse retângulo, meça seus lados e determine sua área aproximada, em milímetro quadrado.

$\approx 1.075 \text{ mm}^2$

19. respostas possíveis: a) Em todos os retângulos, as diagonais são congruentes.

c) As diagonais de alguns retângulos são perpendiculares entre si.

d) As diagonais de um quadrado sempre formam, entre si, ângulo de 90° .

23 Com o auxílio de régua e de compasso, construa um losango cujas diagonais meçam 5,4 cm e 3,2 cm. Determine a área desse losango. 23. 8,64 cm²

24. a) respostas possíveis: trapézio, retângulo ou quadrado (de acordo com a figura construída pelo aluno)

24 Desenhe os quadriláteros descritos a seguir e depois responda às perguntas.

a) Um quadrilátero em que pelo menos um dos ângulos seja reto e pelo menos um dos lados seja paralelo ao lado oposto. Como você classifica esse quadrilátero?

b) Um quadrilátero cujos ângulos opostos sejam congruentes, pelo menos um deles sendo reto. Como você classifica esse quadrilátero?
respostas possíveis: retângulo ou quadrado

c) Um quadrilátero em que pelo menos um dos ângulos não seja reto, sendo os lados opostos paralelos e congruentes. Como você classifica esse quadrilátero?
resposta possível: paralelogramo não retângulo

d) Um quadrilátero em que somente dois lados sejam paralelos e somente um dos ângulos seja reto. Não é possível construir esse quadrilátero.

25 Com base nas respostas do exercício anterior, faça o que se pede.

a) Você conseguiu desenhar um quadrilátero em todos os itens? Em caso negativo, em que item não conseguiu? item d

b) Compare suas respostas com as de seus colegas. Houve divergências? Em quais itens? Como você explicaria? resposta pessoal

26 Faça um desenho com quadriláteros e redija instruções de modo que um colega possa construir o mesmo desenho. Troque seu texto com o de um colega e tentem fazer o desenho

descrito pelo outro. Depois, comparem os desenhos.

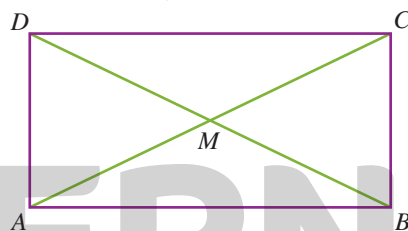
Se houver divergências, analisem o caso e tentem descobrir o que poderia ter ocorrido.



JOSÉ LUIZ JUHAS

27 Demonstre que, no retângulo $ABCD$, M é ponto médio de \overline{AC} .

$\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (ALA); logo: $\overline{AM} \cong \overline{MC}$



NELSON MATSUDA

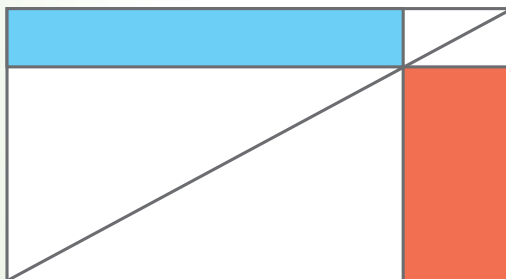
28 Considere um retângulo $ABCD$. Seja P um ponto de \overline{AB} . Trace por P uma reta paralela a \overline{AD} . Chame de Q o ponto em que essa reta corta \overline{CD} . Demonstre, que $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$.

$\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; logo $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

A figura abaixo é um retângulo.



NELSON MATSUDA

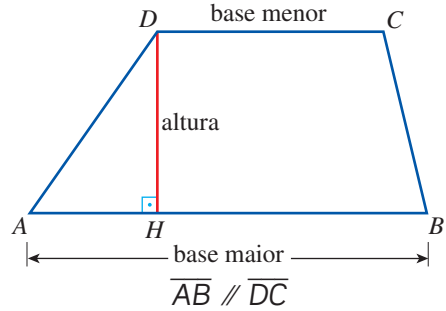
demonstração

Demonstre que a área colorida de azul é igual à área colorida de vermelho.

3 Trapézios

Trapézios são quadriláteros que têm apenas dois de seus lados paralelos.

Os lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio. Todo segmento que tem extremidades em uma base e na reta suporte da outra, perpendicular a elas, chama-se **altura** do trapézio.



No trapézio $ABCD$ acima, verificamos que os ângulos \hat{A} e \hat{D} , assim como os ângulos \hat{B} e \hat{C} , são colaterais internos formados pelas bases \overline{AB} e \overline{DC} com os lados não paralelos. Logo:

- $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$
- $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$

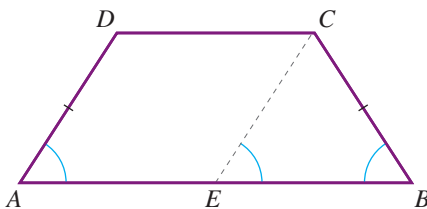
Os trapézios podem ser classificados em três tipos.

<p>Trapézios isósceles: aqueles em que os lados opostos não paralelos são congruentes.</p>	<p>Trapézios retângulos: aqueles que têm dois ângulos internos retos.</p>	<p>Trapézios escalenos: aqueles em que os lados opostos não paralelos não são congruentes.</p>
---	--	---

Propriedades dos trapézios isósceles

1ª propriedade

Em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.



Hipótese $\left\{ \begin{array}{l} ABCD \text{ é um trapézio} \\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \end{array} \right.$
 Tese $\{ \hat{A} \cong \hat{B} \}$

Demonstração

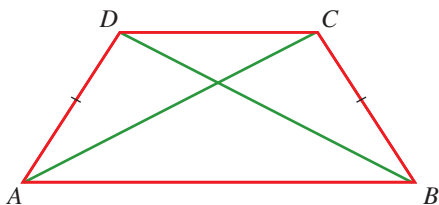
Traçando pelo ponto C um segmento paralelo a \overline{AD} , determinamos o ponto E em \overline{AB} . Assim, temos:

1. $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ (são lados opostos de um paralelogramo)
2. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (pela hipótese)
3. $\overline{CE} \cong \overline{BC}$ ($\overline{CE} \cong \overline{AD} \cong \overline{BC}$). Logo, ECB é um triângulo isósceles e, portanto, $\hat{B} \cong \hat{E}$. Como $\hat{E} \cong \hat{A}$ (ângulos correspondentes), temos $\hat{A} \cong \hat{B}$ ($\hat{B} \cong \hat{E} \cong \hat{A}$).

Como $m(\hat{D}) = 180^\circ - m(\hat{A})$, $m(\hat{C}) = 180^\circ - m(\hat{B})$ e $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$, temos: $m(\hat{D}) = m(\hat{C})$.
Logo, $\hat{D} \cong \hat{C}$.

2ª propriedade

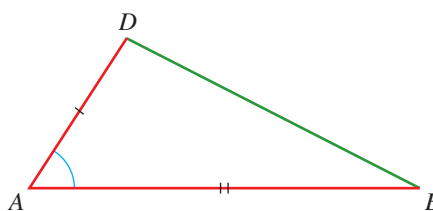
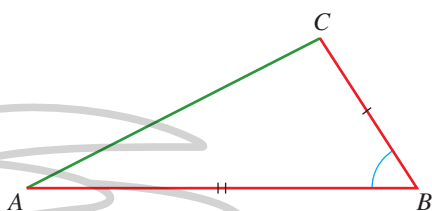
Em um trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.



Hipótese $\begin{cases} ABCD \text{ é um trapézio} \\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \end{cases}$
Tese $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Demonstração

Vamos destacar do trapézio $ABCD$ os triângulos ABC e BAD :



Assim, temos:

- $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (pela hipótese)
- $\hat{B} \cong \hat{A}$ (ângulos adjacentes à base \overline{AB} do trapézio isósceles)
- $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ABC e BAD são congruentes. Portanto:

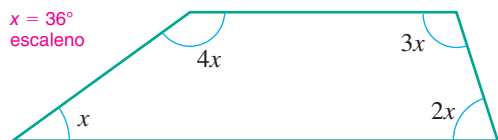
$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

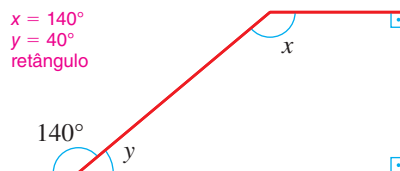
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

29 Calcule os valores de x e y nos trapézios abaixo e classifique-os em escaleno, isósceles ou retângulo.

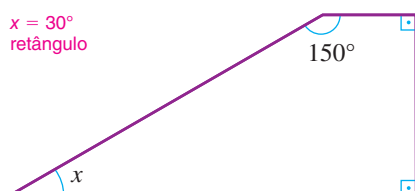
a)



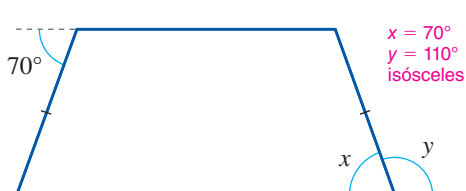
c)



b)

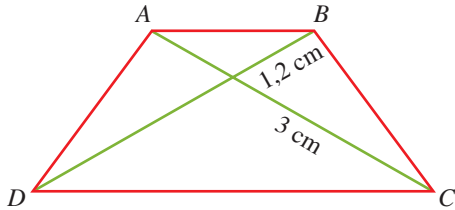


d)



- 30** Em um trapézio retângulo, a medida do ângulo obtuso é igual ao triplo da medida do ângulo agudo. Determine:
- a medida do ângulo obtuso; 135°
 - a medida do ângulo agudo. 45°

- 31** No trapézio abaixo, temos $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



trapézio isósceles

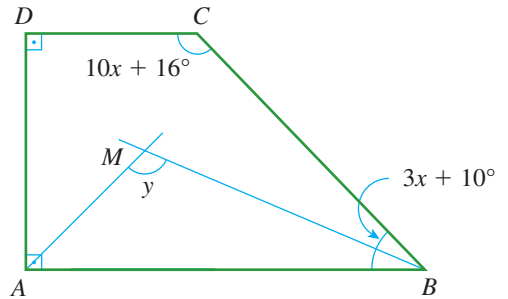
- Como podemos classificar esse trapézio?
 - Calcule a medida de cada diagonal. $4,2 \text{ cm}$
- 32** As diagonais de um trapézio isósceles medem 6 cm. O ponto de encontro dessas diagonais está situado a 2 cm dos vértices da base menor, e elas formam entre si um ângulo de 60° . Faça um desenho desse trapézio.

construção de figura

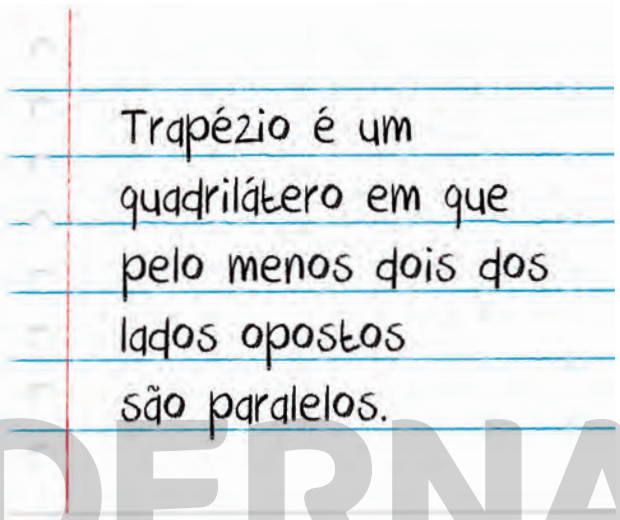
- 33** Considere a seguinte descrição de um trapézio isósceles: a base maior mede 4 cm, cada um dos lados não paralelos mede 2 cm e forma com a base maior um ângulo de 50° . Construa esse trapézio. construção de figura

- 34** O maior ângulo interno de um trapézio retângulo tem o dobro da medida de seu menor ângulo interno. Calcule as medidas dos ângulos internos desse trapézio. $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$

- 35** Calcule o valor de x e y no trapézio $ABCD$ abaixo, sabendo que \overline{AM} e \overline{BM} são bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} , respectivamente. $x = 9^\circ$ e $y = 98^\circ$



- 36** Fabiana definiu trapézio da seguinte maneira:



A definição de Fabiana está de acordo com a definição apresentada neste capítulo?

Justifique sua resposta.

Espera-se que o aluno perceba que, ao dizer que **pelo menos** dois dos lados opostos são paralelos, Fabiana incluiu, além dos trapézios, os paralelogramos nessa definição.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Identifique as sentenças falsas, corrigindo-as.

- Se um quadrilátero tem as diagonais congruentes, então ele é um retângulo.
- Se um paralelogramo tem as diagonais perpendiculares entre si, então ele é um losango. verdadeira
- Se um paralelogramo tem as diagonais congruentes, então ele é um losango.
- Se um losango tem as diagonais congruentes, então ele é um quadrado. verdadeira
- Se um trapézio tem as diagonais congruentes, então ele é um trapézio isósceles. verdadeira
- Se, em um trapézio, são congruentes os ângulos internos adjacentes à mesma base, então esse trapézio é isósceles. verdadeira
- Se um trapézio tem dois ângulos retos, então os lados não paralelos são congruentes.

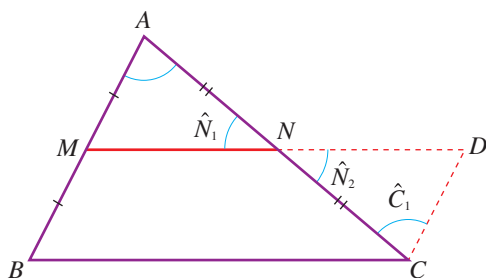
respostas possíveis:

- Falsa. Se um paralelogramo tem as diagonais congruentes, então ele é um retângulo.
- Falsa. Se um paralelogramo tem as diagonais congruentes, então ele é um retângulo.

4 Propriedades da base média do triângulo e do trapézio

Base média do triângulo

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo, chamado de **base média**, é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.



$$\text{Hipótese} \begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MB} \\ \overline{AN} \cong \overline{NC} \end{cases}$$

$$\text{Tese} \begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ MN = \frac{BC}{2} \end{cases}$$

Demonstração

Construção auxiliar: traçamos pelo vértice C uma reta paralela a \overline{AB} , que cruza \overline{MN} no ponto D.

Assim, temos:

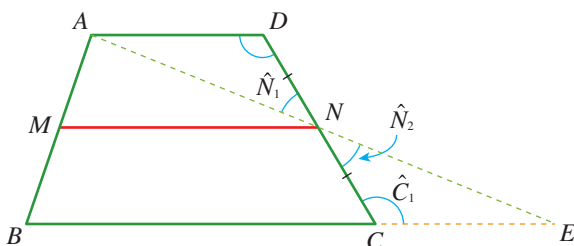
1. $\hat{A} \cong \hat{C}_1$ (ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal)
2. $\overline{AN} \cong \overline{NC}$ (pela hipótese)
3. $\hat{N}_1 \cong \hat{N}_2$ (ângulos o.p.v.)
4. $\triangle AMN \cong \triangle CDN$ (pelo caso ALA)
5. $\overline{MN} \cong \overline{ND}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes)
6. $\overline{CD} \cong \overline{AM}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes)
7. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (pela hipótese)
8. $\overline{CD} \cong \overline{MB}$ ($\overline{CD} \cong \overline{AM} \cong \overline{MB}$)
9. $BCDM$ é paralelogramo.

Logo, $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$ ou $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{MD} \cong \overline{BC}$ ou, ainda, $MN + ND = BC$.

Como $\overline{ND} \cong \overline{MN}$, temos $2 \cdot MN = BC$; portanto, $MN = \frac{BC}{2}$.

Base média do trapézio

O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, chamado de **base média**, é paralelo às bases, e sua medida é igual à metade da soma das medidas das bases.



$$\text{Hipótese} \begin{cases} ABCD \text{ é um trapézio} \\ \overline{AM} \cong \overline{BM} \\ \overline{CN} \cong \overline{DN} \end{cases}$$

$$\text{Tese} \begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ MN = \frac{BC + AD}{2} \end{cases}$$

Demonstração

Construção auxiliar: \overrightarrow{AN} e \overrightarrow{BC} , que se cruzam no ponto E .

Assim, temos:

1. $\hat{D} \cong \hat{C}_1$ (ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal)
2. $\overline{CN} \cong \overline{DN}$ (pela hipótese)
3. $\hat{N}_1 \cong \hat{N}_2$ (ângulos o.p.v.)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos ADN e ECN são congruentes.

Portanto, $\overline{AN} \cong \overline{NE}$ e $\overline{AD} \cong \overline{CE}$.

Sabemos que $MN = \frac{BE}{2}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (propriedade da base média do triângulo).

Pela construção da figura, temos: $BE = BC + CE$

Sendo $\overline{CE} \cong \overline{AD}$, podemos escrever: $BE = BC + AD$

Substituindo BE por $BC + AD$ em $MN = \frac{BE}{2}$, obtemos:

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

PARA SABER MAIS



O trapézio no telhado

Na edificação de casas, desde a fundação até o telhado, importantes conceitos matemáticos se expressam de maneira relativamente simples em procedimentos rotineiros de construtores, empreiteiros e pedreiros, como o levantamento de paredes, a instalação do sistema hidráulico e a montagem e cobertura do telhado.

Na construção do madeirame que suporta os telhados, são necessários cálculos matemáticos que permitem determinar com exatidão as medidas de todos os elementos que o compõem.

Nos telhados em forma de trapézio, por exemplo, os cálculos empregados para determinar as medidas das ripas (que são paralelas às bases do trapézio) baseiam-se na propriedade da **base média do trapézio**: se, pelo ponto médio de cada um dos lados não paralelos de um trapézio, traçarmos um segmento de reta, este será paralelo às bases, e a medida dele será a média aritmética das medidas dessas bases.

Por exemplo, em um trapézio cujas bases medem 6 m e 10 m, a medida da base média é dada por $\frac{6+10}{2}$ m, ou seja, 8 m.

Assim, se um telhado em forma de trapézio tiver somente 3 ripas paralelas, a maior com 10 m e a menor com 6 m, a ripa que for colocada entre elas, nos pontos médios dos lados não paralelos, deverá ter 8 m de comprimento.



Casa em Rancho Queimado (SC). (Foto de 2012.)

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

Um telhado trapezoidal tem 5 ripas paralelas. A menor delas (a superior) tem 2 m de comprimento, e a maior (a inferior) tem 12 m. Calcule o comprimento das outras 3 ripas.

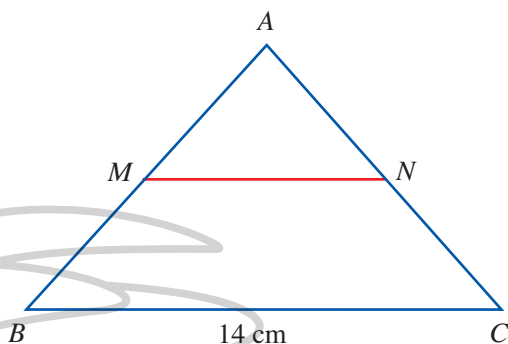
7 m; 4,5 m; 9,5 m

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

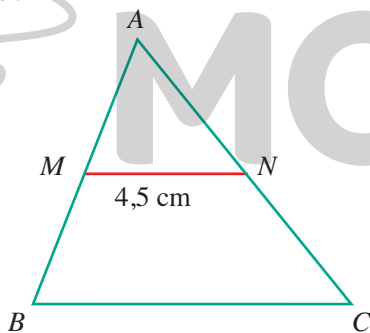
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Nas figuras, M e N são pontos médios de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Determine:

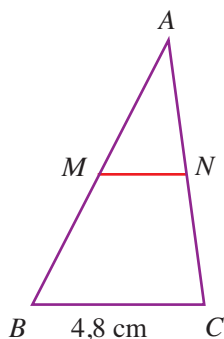
a) MN 7 cm



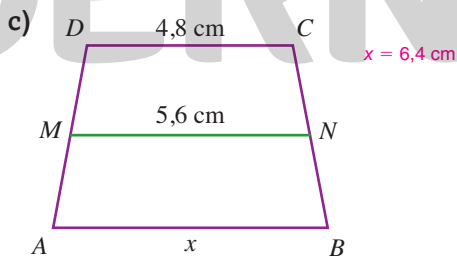
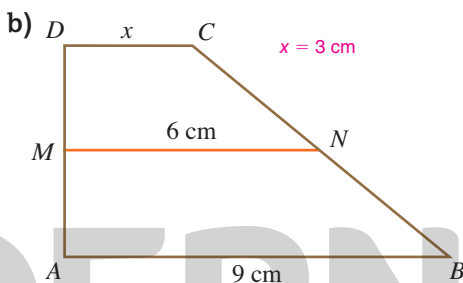
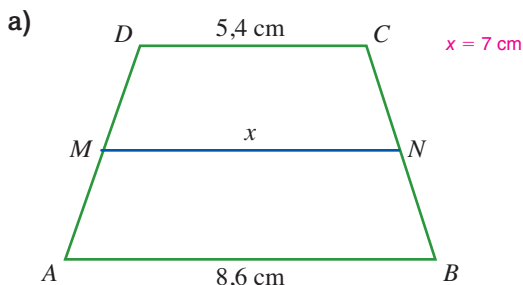
b) BC 9 cm



c) MN 2,4 cm

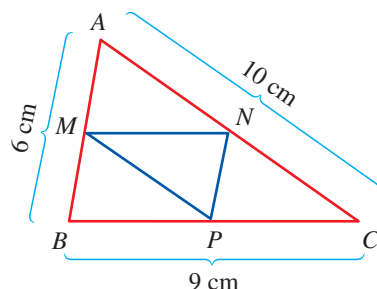


38 Nos trapézios a seguir, M e N são, respectivamente, os pontos médios de \overline{AD} e \overline{BC} . Calcule a medida x .

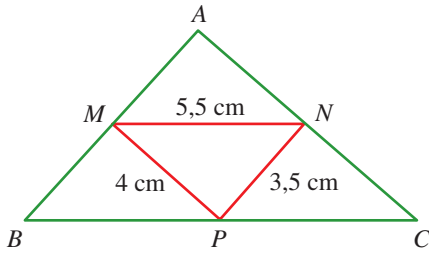


39 Nas figuras, M , N e P são, respectivamente, os pontos médios de \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} . Determine:

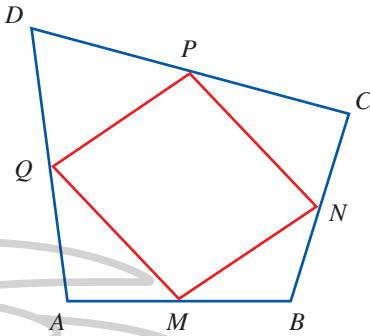
a) o perímetro do $\triangle MNP$; 12,5 cm



b) o perímetro do $\triangle ABC$. 26 cm

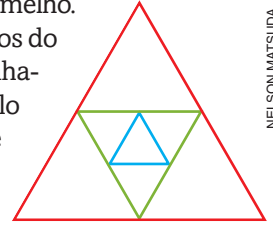


40 Na figura abaixo, M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios de \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} .



- Prove que $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.
 - Prove que $\overline{QM} \parallel \overline{PN}$.
 - Como podemos classificar o quadrilátero $MNPQ$? *paralelogramo*
 - Se $AC = 12$ cm, quanto mede o segmento \overline{MN} ? *6 cm*
 - Se $BD = 16$ cm, quanto mede \overline{QM} ? *8 cm*
 - Se $PN = 20$ cm, quanto mede \overline{BD} ? *40 cm*
40. a) $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{QP} \parallel \overline{AC}$ ou $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$
 b) $\overline{QM} \parallel \overline{BD}$ e $\overline{PN} \parallel \overline{BD}$ ou $\overline{QM} \parallel \overline{PN}$

41 O lado do triângulo equilátero vermelho mede 6 cm. Desenhemos um segundo triângulo equilátero (verde) unindo os pontos médios do triângulo vermelho. Unindo os pontos médios do triângulo verde, desenhemos um terceiro triângulo equilátero (azul). Qual é o perímetro do triângulo azul? *4,5 cm*



42 Considere um trapézio cujas bases meçam 10 cm e 5 cm.

- Quanto mede o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos? *7,5 cm*
- Prolongando os lados não paralelos, obtêm-se dois triângulos equiláteros. Qual é o perímetro desse trapézio? *25 cm*

43 Um trapézio tem 32 cm de altura, e sua base média mede 45 cm. Determine a área desse trapézio. *1.440 cm²*

44 Em um trapézio isósceles, os lados não paralelos medem 12 cm, e a base média, 20 cm.

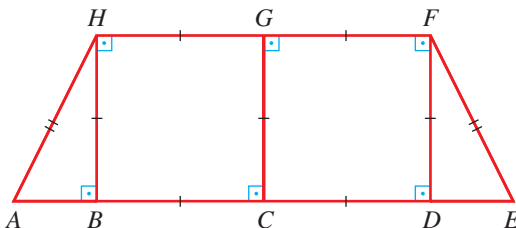
- Calcule o perímetro desse trapézio. *64 cm*
- Se a base menor mede 8 cm, quanto mede a base maior desse trapézio? *32 cm*

45 Em um trapézio, a base média forma com um dos lados não paralelos um ângulo de 45° e com o outro lado um ângulo de 60° . Calcule as medidas dos ângulos desse trapézio. *$45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ$*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

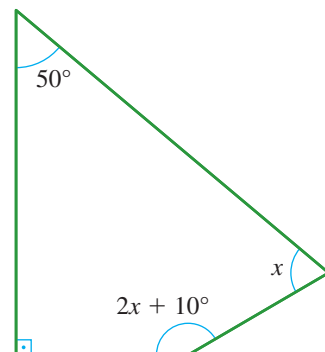
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Reconheça os quadriláteros da figura:



- $BDFH$ retângulo
- $AEFH$ trapézio isósceles
- $ACGH$ trapézio retângulo
- $BCGH$ quadrado

2 Calcule o valor de x . $x = 70^\circ$

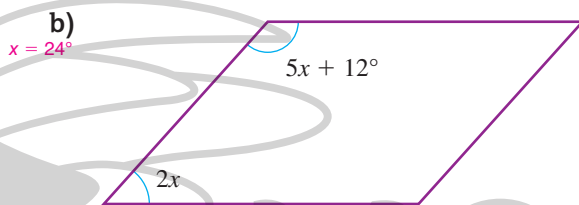
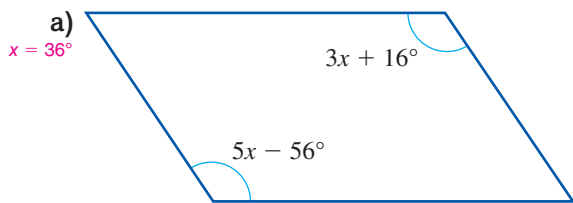


4. Losango, porque as diagonais são perpendiculares entre si e se cruzam nos respectivos pontos médios.

3 Desenhe dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , que se interceptem nos seus respectivos pontos médios. Que tipo de quadrilátero você obtém traçando os segmentos \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{BD} e \overline{DA} ? Justifique sua resposta. *ABCD é um paralelogramo, porque suas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.*

4 Desenhe dois segmentos não congruentes, \overline{AB} e \overline{CD} , perpendiculares entre si, que se cruzem nos respectivos pontos médios. Que tipo de paralelogramo você obtém traçando os segmentos \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{BD} e \overline{DA} ? Justifique sua resposta.

5 Calcule o valor de x em cada paralelogramo abaixo.



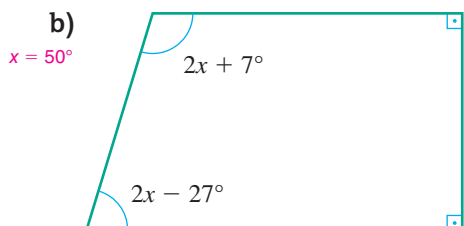
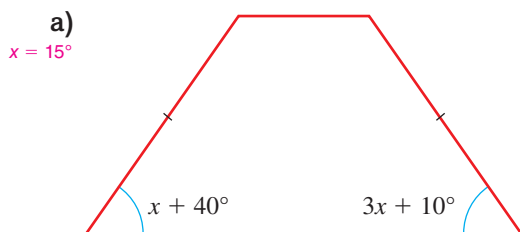
6 A altura de um paralelogramo forma, com um dos lados, um ângulo de 35° . Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

$55^\circ, 55^\circ, 125^\circ, 125^\circ$

7 Uma das diagonais de um losango forma, com um dos lados, um ângulo de 28° . Calcule as medidas dos ângulos desse losango.

$56^\circ, 56^\circ, 124^\circ, 124^\circ$

8 Calcule o valor de x em cada trapézio abaixo.



9 Um dos ângulos externos de um trapézio retângulo mede 118° . Calcule a medida do ângulo obtuso desse trapézio. 118°

10 O perímetro de um trapézio isósceles é 66 cm. A base média mede 20 cm. Faça o cálculo e responda: quanto mede cada um dos lados não paralelos? 13 cm

11 A base média de um trapézio isósceles mede 30 cm. Cada um dos lados congruentes mede 10 cm. Calcule o perímetro desse trapézio. 80 cm

12 Construa um triângulo retângulo ABC , reto em B . Marque o ponto M médio, de \overline{AC} , e o ponto D , simétrico de B em relação a M . Prove que $ABCD$ é um paralelogramo.

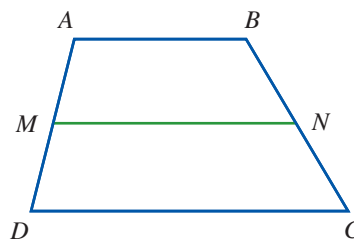
demonstração

13 (Esal-MG) No trapézio isósceles vale sempre afirmar, exceto: *alternativa d*



- a) as bases \overline{AB} e \overline{CD} são paralelas.
- b) os ângulos internos A e B são congruentes (iguais).
- c) os lados \overline{AD} e \overline{BC} são congruentes (iguais).
- d) a altura é a semissoma das bases.
- e) a distância entre as bases fornece a altura.

14 No trapézio $ABCD$, \overline{MN} é a base média e mede 15 cm.



Se $DC = 2 \cdot AB$, qual é a medida de \overline{DC} e \overline{AB} ?

20 cm e 10 cm

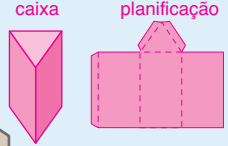
Quadriláteros na caixa

Gabriela guarda sua coleção de livros na estante da sala, mas uma das prateleiras quebrou. Seu pai, que só poderá consertar a estante no final de semana, pediu-lhe que guardasse os livros em uma caixa. Gabriela desenhou a planificação de uma caixa em uma folha de papelão. Depois, recortou e montou-a. Veja a planificação ao lado.

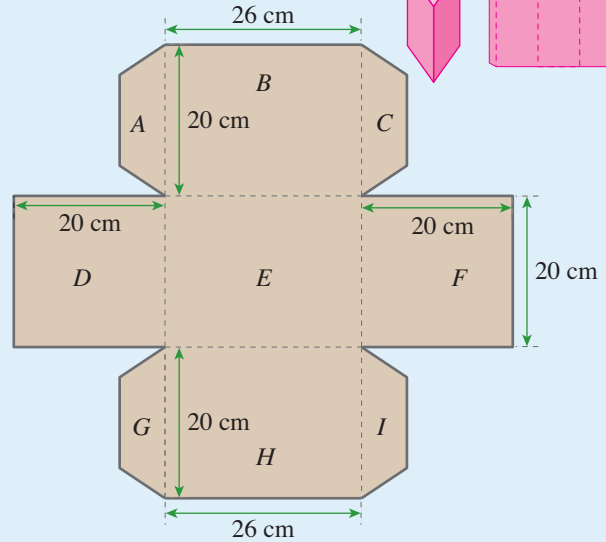


OSÉ LUIS JUHAS

4. resposta possível: Sim, basta imaginar um prisma de base triangular sem uma das bases. Uma possibilidade de desenho:



NELSON MATSUDA

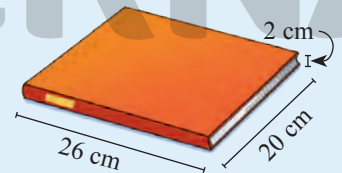


NELSON MATSUDA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

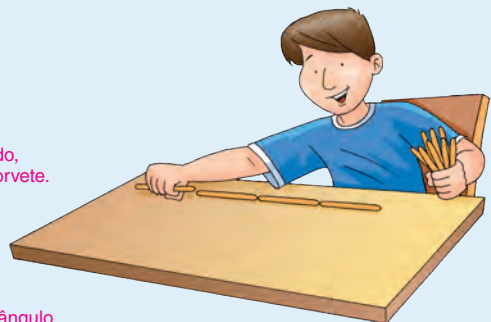
- Quantos tipos de quadrilátero podemos identificar nessa planificação? Classifique os quadriláteros que você identificou. *três tipos: quadrado (D e F), retângulo (B, E e H) e trapézio (A, C, G e I)*
- Os livros de Gabriela têm as medidas da figura ao lado. Determine quantos deles cabem nessa caixa se ela os guardar de modo que:
 - nenhuma parte deles fique fora da caixa; *10 livros*
 - uma das faces de área menor fique em contato com a base da caixa. *13 livros*
- Calcule o volume que ocupariam os livros que, no caso do item **b** da questão anterior, ficariam fora da caixa. *3.120 cm³*
- É possível ter uma caixa cuja planificação não seja composta apenas de quadriláteros? Explique por quê. Em caso afirmativo, desenhe uma dessas caixas.



OSÉ LUIS JUHAS

Palitos de sorvete

- Construa um retângulo usando apenas 12 palitos de sorvete, iguais, de tal modo que ele tenha a maior área possível. *O retângulo de maior área é o quadrado, cujo lado é formado por 3 palitos de sorvete.*
- Podemos construir um triângulo equilátero com esses 12 palitos? *Sim, o triângulo terá cada lado composto de 4 palitos de sorvete.*
- Qual dessas figuras construídas com os 12 palitos tem maior área: o retângulo ou o triângulo? *o retângulo*



OSÉ LUIS JUHAS

Frações algébricas e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

1 Frações algébricas

Observe a situação a seguir.

Considere um carro que percorre 640 km em x horas. Em média, esse carro desenvolve a velocidade de $\frac{640}{x}$ km/h.

Vamos admitir que esse carro percorra os mesmos 640 km em $(x - 2)$ horas. Nesse caso, a velocidade média, em quilômetro por hora, seria representada pelo quociente $\frac{640}{x - 2}$.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Expressões como a da situação acima, que indicam o quociente entre dois polinômios, são chamadas de **frações algébricas**.

Ao polinômio dividendo chamaremos de numerador e ao polinômio divisor, de denominador.

Fração algébrica é o quociente de dois polinômios indicado na forma de fração cujo denominador seja uma expressão algébrica.

O denominador de uma fração numérica é sempre diferente de zero. No caso das frações algébricas, a(s) variável(is) do polinômio que representa o denominador não pode(m) assumir valores que o anulem. Veja os exemplos.

a) Na fração algébrica $\frac{640}{x - 2}$, devemos ter $x - 2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$.

b) Na fração algébrica $\frac{b + 2a}{2b + 3a}$, devemos ter $2b + 3a \neq 0$, ou seja, $b \neq -\frac{3a}{2}$ ou $a \neq -\frac{2b}{3}$.

- 1** Observe o diálogo entre Luísa e Rogério e complete-o com o que você sabe sobre frações algébricas.



ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

- 3** Uma moto percorreu x quilômetros com y litros de gasolina. Uma segunda moto percorreu o dobro dessa distância com $(y + 5)$ litros de gasolina. Escreva o consumo médio de gasolina:

- a) da primeira moto; $\frac{x}{y}$
 b) da segunda moto. $\frac{2x}{y+5}$



- 4** Para que valor de y a expressão $\frac{12+y}{y-6}$ não representa uma fração algébrica? $y = 6$

- 5** Quais são os valores reais que podem ser atribuídos à letra x na fração algébrica $\frac{x+5}{2x-3}$ qualquer número real diferente de $\frac{3}{2}$?

- 6** Que relação deve existir entre b e a para que a fração algébrica $\frac{2a+b}{b-2a}$ represente um número real? $b \neq 2a$

- 7** Ontem, eu tinha em minha conta poupança certa quantia em reais. Hoje, meu avô depositou, nessa conta, o quádruplo do que eu tinha ontem mais R\$ 200,00. Represente por uma fração algébrica a razão entre o saldo que minha conta poupança tinha ontem e o saldo depois do depósito feito por meu avô.

$$\frac{x}{5x+200}$$

2 Simplificando frações algébricas

Simplificar uma fração algébrica é obter uma fração mais simples equivalente à fração dada. Daqui em diante, caso não haja outra orientação, vamos considerar que as variáveis do denominador representam apenas valores que não o anulam.

Para simplificar uma fração algébrica, adotamos o mesmo procedimento que empregamos para as frações numéricas, isto é, dividimos os dois termos da fração por um divisor comum não nulo e diferente de 1. Quando necessário, fatoramos os termos da fração.

Veja os exemplos.

$$a) \frac{6ab^2x^3}{9a^3b^2x^2} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot b \cdot x \cdot x \cdot x}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot x \cdot x} = \frac{2x}{3a^2}$$

$$b) \frac{5x}{5x} = 1$$

$$c) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$$

$$d) \frac{4x^2 - y^3}{y^3 - 4x^2} = \frac{4x^2 - y^3}{-(y^3 - 4x^2)} = \frac{(4x^2 - y^3)}{-(4x^2 - y^3)} = -1$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

amarelo: d; vermelho: c;
azul: a; verde: b

- 8 Dê um exemplo de fração algébrica em que o numerador e o denominador sejam iguais. Qual é o valor dessa fração? *resposta pessoal, 1*

Faça o mesmo para uma fração algébrica na qual o numerador e o denominador sejam opostos. *resposta pessoal, -1*

- 9 Reduza cada fração algébrica a um polinômio.

$$a) \frac{a^2 - a}{a} \quad a - 1$$

$$c) \frac{3x^2 + 6x + 3}{x + 1} \quad 3x + 3$$

$$b) \frac{x^2 - 16}{x + 4} \quad x - 4$$

$$d) \frac{5a^2 - 20}{a - 2} \quad 5a + 10$$

- 10 A fração algébrica $\frac{10a + 5b}{2a + b}$ pode ser reduzida a um número inteiro. Que número é esse? *5*

- 11 O quociente do monômio $15a^5b$ pelo monômio $4a^2b^3$ não é um monômio.

- a) Determine na forma reduzida a fração que representa esse quociente. $\frac{15a^3}{4b^2}$
 b) Dê o valor numérico dessa fração para $a = -2$ e $b = 2$. $-\frac{15}{2}$
 c) Para que valor de b essa fração não representa um número real? $b = 0$

- 12 Observe os cartões coloridos.

$$\frac{1}{x + 2}$$

$$\frac{y}{x + 2y}$$

$$\frac{x - 5}{2}$$

$$\frac{x - y}{3}$$

Cada cartão corresponde à simplificação de uma das frações a seguir. Efetue os cálculos e indique a cor do cartão que corresponde a cada uma delas.

$$a) \frac{10xy}{10x^2 + 20xy}$$

$$b) \frac{x^2 - 2xy + y^2}{3x - 3y}$$

$$c) \frac{x - 2}{x^2 - 4}$$

$$d) \frac{x^2 - 10x + 25}{2x - 10}$$

- 13 Dividindo o numerador pelo denominador da fração algébrica abaixo, encontra-se um binômio.

$$\frac{6x^2 + 11x - 10}{2x + 5}$$

- a) Determine esse binômio. $3x - 2$
 b) Calcule mentalmente o valor numérico desse binômio para $x = 0$. -2
 c) Determine o valor numérico desse binômio para $x = \frac{2}{3}$. *zero*
 d) Que valores reais x pode assumir nessa fração algébrica?
qualquer número real diferente de $-\frac{5}{2}$

- 14 Reúna-se com um colega e observem como Marta e Cláudio fizeram a simplificação da

$$\text{fração algébrica } \frac{x^2 + x}{x}$$

Marta
$\frac{x^2 + x}{x} = x + 1$

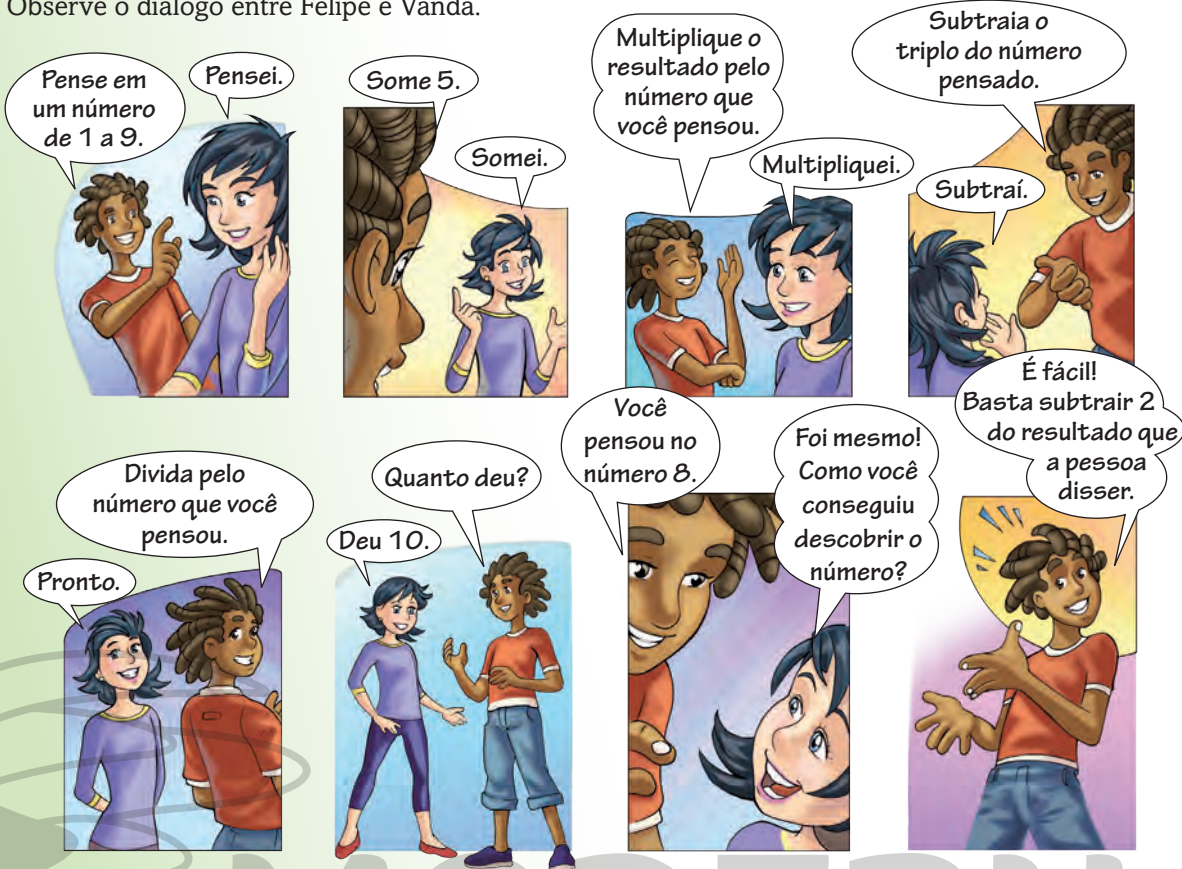
Cláudio
$\frac{x^2 + \cancel{x}}{\cancel{x}} = x^2$

- a) Quem acertou? Como vocês chegaram a essa conclusão? *Marta. Resposta possível: fizemos a simplificação para conferir.*
 b) Comentem a maneira como cada um deles fez a simplificação e identifiquem qual foi o erro.

Marta colocou x em evidência, já que ele é fator comum em $x^2 + x$. Assim pôde efetuar a simplificação com o x do denominador. Cláudio errou ao simplificar a parcela x do numerador com o x do denominador.

Pense mais um pouco...

Observe o diálogo entre Felipe e Vanda.



ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Justifique por que Felipe disse que basta subtrair 2.

$$\frac{(x + 5)x - 3x}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x(x + 2)}{x} = x + 2, \text{ com } x \neq 0$$

3 Problemas e equações

Considere o problema abaixo.

O Projeto Esporte na Escola distribuiria 160 bolas entre algumas escolas de certo município. No dia da partilha, houve duas novas inscrições no projeto, e por isso cada escola recebeu $\frac{4}{5}$ do número de bolas que teria recebido se não tivesse havido novas inscrições.

Quantas escolas estavam inscritas inicialmente no projeto?

Vamos indicar por x o número de escolas inscritas inicialmente.

- número de bolas que cada escola recebeu: $\frac{160}{x + 2}$
- número de bolas que cada escola teria recebido: $\frac{160}{x}$



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Portanto:

$$\frac{160}{x+2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{160}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{160}{x+2} = \frac{640}{5x}$$

Para resolver essa equação, em primeiro lugar, devemos observar que x **não** pode assumir os valores -2 e 0 , pois anularia os denominadores.

Multiplicando os termos da equação por $(x+2)(5x)$, temos:

$$\frac{160 \cdot \cancel{(x+2)}(5x)}{\cancel{x+2}} = \frac{640 \cdot \cancel{(x+2)}(5x)}{5x}$$

$$160 \cdot (5x) = 640 \cdot (x+2)$$

$$5x = 4x + 8$$

$$x = 8$$

O número 8 não anula nenhum dos denominadores.

Portanto, foram inscritas inicialmente 8 escolas.

Veja outro exemplo:

Vamos resolver a equação $\frac{2}{x+3} = \frac{5}{x}$, para x real, sendo $x \neq -3$ e $x \neq 0$.

Multiplicando os termos da equação por $x(x+3)$, múltiplo de todos os denominadores, temos:

$$\frac{2}{x+3} \cdot x \cancel{(x+3)} = \frac{5}{x} \cdot \cancel{x} \cancel{(x+3)}$$

$$2x = 5x + 15$$

$$2x - 5x = 15$$

$$-3x = 15$$

$x = -5$. O número -5 não anula nenhum dos denominadores.

Portanto, a solução ou a raiz da equação é -5 .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Determine mentalmente o valor que x não pode assumir nas seguintes equações:

a) $\frac{5}{x} = \frac{10}{2}$ $x \neq 0$

c) $\frac{3}{x} = 3$ $x \neq 0$

b) $\frac{2}{x-2} = 1$ $x \neq 2$

d) $\frac{5x}{x+1} = 4$ $x \neq -1$

16 Resolva as equações a seguir.

a) $\frac{12}{x} = \frac{4}{x-2}$, sendo $x \neq 0$ e $x \neq 2$ $x = 3$

b) $\frac{-4}{x} = \frac{4}{x-2}$, sendo $x \neq 0$ e $x \neq 2$ $x = 1$

- 17** Numa distribuição de 720 kg de alimentos, duas famílias não compareceram, o que permitiu a cada uma das outras famílias receber 40 kg de alimentos.
- a) Quantas famílias deveriam receber os alimentos? **20 famílias**
 - b) Quantas famílias compareceram? **18 famílias**
 - c) Se todas as famílias tivessem comparecido, quantos quilogramas de alimentos cada uma teria recebido? **36 kg**
- 18** Lúcia pensou em um número, somou 4 e dividiu o resultado pela diferença entre o número pensado e 2. Em seguida, subtraiu 6 do número

ro pensado e o dividiu pela diferença entre esse número e 9. Ao obter a resposta, Lúcia percebeu que os dois quocientes eram iguais.

- a) Em que número Lúcia pensou? **16**
 - b) Qual foi o quociente obtido? **$\frac{10}{7}$**
- 19** Uma chácara de 5.040 m² e uma outra de 2.880 m² foram divididas em lotes de mesma área. A chácara maior teve o dobro de lotes da chácara menor, menos 2 lotes.
- a) Em quantos lotes foi dividida a chácara menor? **8 lotes**
 - b) E a chácara maior? **14 lotes**
 - c) Quantos metros quadrados tem cada lote? **360 m²**

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...



Reúna-se com um colega, leiam o texto abaixo e depois façam o que se pede.

José e Luís são irmãos. Luís tem um filho a mais que José.

Observem o diálogo entre eles.



Descubram quantos filhos tem José e quantos metros quadrados couberam a cada filho.

3 filhos; 240 m²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Construção de gráfico de barras

Você sabe a qual geração pertence? Já ouviu falar em gerações X, Y e Z?

Há estudos que nomeiam as gerações de acordo com a época de seu nascimento:

- de 1960 até 1979 → Geração X
- de 1980 até 1990 → Geração Y
- de 1991 até 2010 → Geração Z

A época em que uma pessoa nasce influencia diretamente seus hábitos e gostos, sobretudo devido aos recursos disponíveis em cada época.

Buscando encontrar semelhanças e diferenças entre as gerações, foram entrevistadas 300 pessoas, sendo 100 de cada geração. Cada uma respondeu a cinco perguntas e chegou-se aos seguintes números:

	Número de respostas positivas (por geração)		
	X	Y	Z
Pratica atividade física?	33	41	54
Lê jornal impresso?	51	34	8
É fumante?	18	10	3
Tem perfil em rede social?	32	86	97
Troca mensagens via celular?	9	21	58

Dados obtidos em: <www.infoescola.com/sociedade>. Acesso em: 24 mar. 2015.

Esses mesmos dados podem ser representados por meio de um gráfico de barras, desde que se tomem os seguintes cuidados:

- Escolher uma escala adequada, ou seja, um tamanho que caiba no papel e, ao mesmo tempo, não tão pequena que dificulte a leitura dos dados.
- Selecionar uma legenda que possibilite a leitura e a interpretação desses dados.
- Escrever nos locais corretos o título do gráfico e o que cada eixo representa.

Por exemplo, pode-se começar um gráfico assim:

- Para cada pergunta feita, devem ser associadas 3 barras, cada uma representando uma geração. Para diferenciá-las, usamos cores diferentes e as respectivas legendas – geração X em roxo, geração Y em laranja e geração Z em verde.
- O maior valor a ser representado é o 97 e o menor é o 3, então precisamos pensar em uma escala que inclua e deixe visível esses valores, assim como os que completam esse intervalo. Se, por exemplo, a barra que representa o maior valor medir 12 cm, então podemos calcular o comprimento das outras barras por meio de regra de três. Veja como:

Pergunta	Número de respostas positivas	Comprimento da barra
Tem perfil...?	97	12 cm
Pratica atividade...?	33	a

Cálculo:

$$\frac{97}{33} = \frac{12}{a}$$

$$97a = 396$$

$$a = \frac{396}{97} \approx 4,1$$

Pergunta	Número de respostas positivas	Comprimento da barra
Tem perfil...?	97	12 cm
Pratica atividade...?	41	b

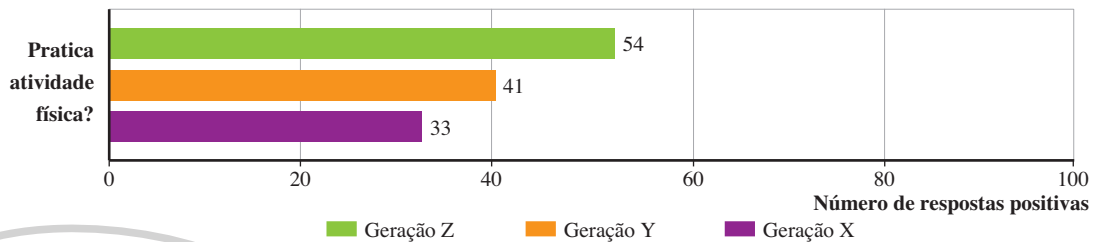
Cálculo:

$$\frac{97}{41} = \frac{12}{b}$$

$$97b = 492$$

$$b = \frac{492}{97} \approx 5,1$$

Assim, um possível esboço do gráfico seria:



ADILSON SECCO

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Considerando o gráfico iniciado e as informações apresentadas anteriormente, responda:

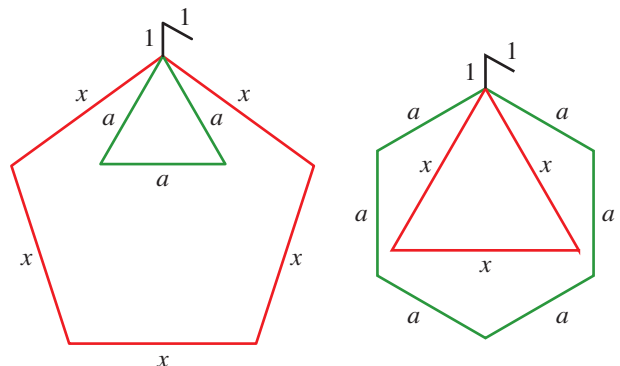
- 1 Em que faixa etária encontram-se hoje pessoas da geração X? E da geração Y? E da geração Z?
As respostas dependem do ano corrente.
- 2 O que falta no gráfico iniciado para ele ficar completo?
- 3 Para caber em uma folha A4 qual deve ser o comprimento máximo da maior barra a ser representada? E o menor barra?
Além do título, faltam as barras correspondentes às demais perguntas feitas na pesquisa. É preciso estar atento aos maiores e menores valores a serem representados: 97 e 3, respectivamente. Dessa forma, deve-se buscar uma escala apropriada para que o "97" caiba na folha e o "3" fique visível.
- 4 Escolha uma escala e faça o gráfico de barras que representa a situação. *construção de gráfico*
- 5 Compare o gráfico construído por você e os de seus colegas. Há diferenças entre eles? Como você justificaria essa diferença? *resposta pessoal*

4 Equações literais

Jenifer é artesã e desenhou os dois modelos de brinco reproduzidos ao lado.

As partes vermelhas sempre têm medida x , e as verdes medida a , que variam de acordo com o gosto de suas clientes.

Ela presenteou sua professora de Matemática, Norma, com brincos desses modelos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

A professora mediu os brincos e percebeu que Jenifer gasta a mesma quantidade de arame colorido nos dois tipos de brinco. Então, ela chegou à seguinte equação:

$$5x + 3a + 2 = 3x + 6a + 2$$

Ela também percebeu que essa equação tem duas letras: a letra x e a letra a .

Norma considerou a letra x uma incógnita e a letra a um número. Depois, resolveu a equação aplicando as mesmas regras da resolução de uma equação do 1º grau.



JOSÉ LUIS JUMAS

$$5x + 3a + \cancel{2} = 3x + 6a + \cancel{2} \quad \leftarrow \text{Subtraí 2 dos dois membros da equação.}$$

$$5x - 3x = 6a - 3a \quad \leftarrow \text{Isolou a incógnita no 1º membro.}$$

$$2x = 3a \quad \leftarrow \text{Reduziu os termos semelhantes.}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{3a}{2} \quad \leftarrow \text{Dividiu os dois membros da equação pelo coeficiente da incógnita.}$$

$$x = \frac{3a}{2}$$

Assim, Norma obteve a raiz $\frac{3a}{2}$ da equação na incógnita x .

Equações como a encontrada pela professora Norma são chamadas de **equações literais**.

Equação literal é toda equação que apresenta, além da incógnita, uma ou mais letras denominadas **parâmetros**.

As equações literais são resolvidas do mesmo modo que as equações do 1º grau, já estudadas.

Veja outro exemplo.

Vamos resolver a equação $my - 3m^2 = y$ (com $m \neq 1$), na incógnita y .

$$my - 3m^2 = y$$

$$my - y = 3m^2 \quad \leftarrow \text{Isolamos a incógnita no 1º membro.}$$

$$y(m - 1) = 3m^2 \quad \leftarrow \text{Colocamos } y \text{ em evidência.}$$

$$\frac{y(m - 1)}{m - 1} = \frac{3m^2}{m - 1} \quad (\text{com } m \neq 1) \quad \leftarrow \text{Dividimos os dois membros por } (m - 1).$$

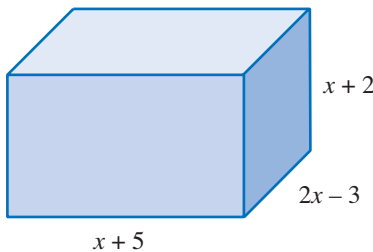
$$y = \frac{3m^2}{m - 1}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{3m^2}{m - 1}, \text{ com } m \neq 1.$$

20 Um número x é somado ao número b . Multiplicando essa soma por 5, obtém-se o dobro de b . Qual é o valor de x ? $x = -\frac{3}{5}b$

21 A soma das medidas de todas as arestas deste bloco retangular é $16a$. Qual é a relação entre x e a ? $x = a - 1$

NELSON MATSUDA



22 Resolva as equações a seguir, considerando x a incógnita.

- a) $4ax - 2b = 2ax + 2b$ (com $a \neq 0$) $x = \frac{2b}{a}$
- b) $3(m - 2) = m(x - 3)$ (com $m \neq 0$) $x = \frac{6m - 6}{m}$
- c) $\frac{a(x - 2)}{3} = \frac{a + 5}{2}$ (com $a \neq 0$) $x = \frac{7a + 15}{2a}$

23 O produto de um número real y pelo número a ($a \neq 0$) menos $\frac{5}{4}$ é igual a $\frac{3}{2}$ do número a . Que relação existe entre esse número e o número a ?

$$y = \frac{5 + 6a}{4a}, \text{ com } a \neq 0$$

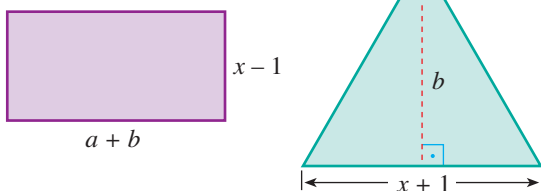
24 Determine o valor de x nas equações literais.

- a) $a + bx = 5a - 3x$ (com $b \neq -3$) $x = \frac{4a}{b + 3}$
- b) $ax - 1 = 4 + bx$ (com $a \neq b$) $x = \frac{5}{a - b}$

25 As figuras abaixo têm áreas iguais. Determine o valor de x .

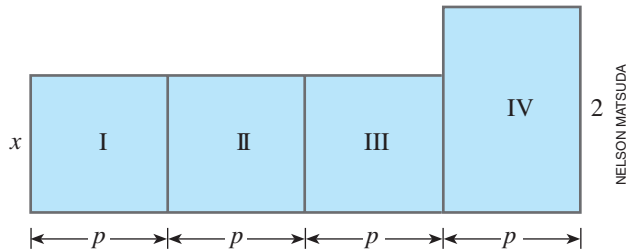
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

$$x = \frac{2a + 3b}{2a + b}, \text{ com } a \neq -\frac{b}{2}$$



26 A razão entre a idade que Renata terá daqui a 5 anos e a idade que ela tinha há 5 anos é igual a $\frac{4}{3}$. Qual é a atual idade de Renata? 35 anos

27 Observe a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

- a) Que equação representa a soma das áreas I, II, III e IV, sabendo que ela é igual a 10? $3px + 2p = 10$
- b) Determine o valor de x . $x = \frac{10 - 2p}{3p}$, com $p \neq 0$
- c) Se $p = 2$, qual é o valor de x ? $x = 1$

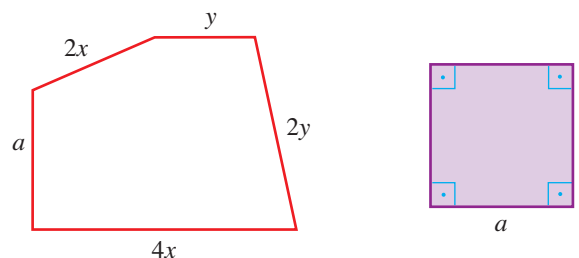
28 Os 570 alunos de determinada escola estão distribuídos em x salas. Em outra escola os 684 alunos foram organizados em $x + 3$ salas. O número de alunos em cada sala é o mesmo.

- a) Quantas salas existem na segunda escola? 18 salas
- b) Quantos alunos ficam em cada sala? 38 alunos

29 Uma moto percorre 360 km em x horas e 260 km em $(x - 2,5)$ horas. Sabendo que nos dois percursos a velocidade média foi a mesma, determine:

- a) o valor de x ; $x = 9$
- b) a velocidade média dessa moto. 40 km/h

30 Os perímetros das duas figuras a seguir são iguais.



- a) Expresse o valor de a por meio de x e y . $a = 2x + y$
- b) Se $x = 1$ e $y = 1,5$, calcule a área do quadrado. $12,25$
- c) E se $x = 2$ e $y = 3$, qual é a área do quadrado? 49

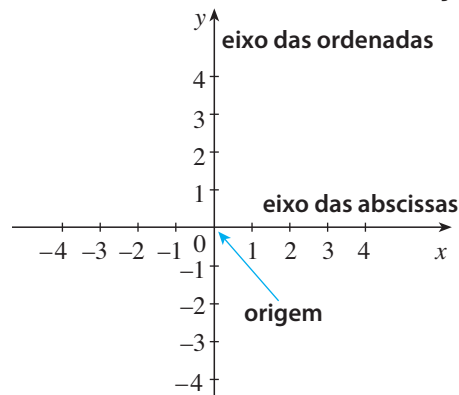
5 Plano cartesiano

Já estudamos o conceito de par ordenado com números racionais e a sua representação geométrica em um plano. E vimos que as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas são pares ordenados representados graficamente por pontos de um plano.

Um **sistema cartesiano de coordenadas** é constituído por duas retas concorrentes, x e y , perpendiculares entre si, chamadas de **eixos**.

Plano cartesiano é um plano que contém esse sistema.

- A reta horizontal é chamada de **eixo das abscissas** ou eixo dos x .
- A reta vertical é chamada de **eixo das ordenadas** ou eixo dos y .
- O ponto de cruzamento das duas retas é chamado de **origem**.
- Em intervalos iguais, cada eixo é numerado a partir da origem.



NELSON MATSUDA

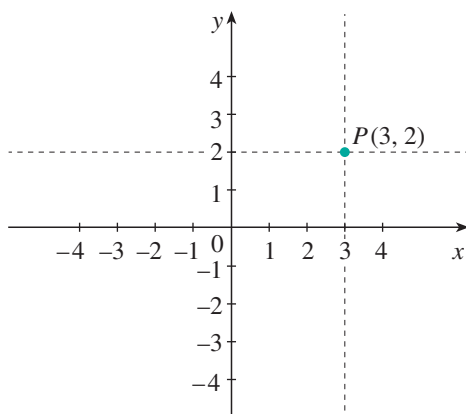
Todo par ordenado (x, y) de números reais, em que x é o primeiro elemento do par e y o segundo, pode ser representado em um plano cartesiano e corresponde a um ponto P desse plano.

Também dizemos que todo ponto P do plano cartesiano corresponde a um par ordenado de números reais. Os números x e y recebem o nome de **coordenadas do ponto P** . Em particular, o número real x é a **abscissa** do ponto P e y , a **ordenada** do ponto P . Para simplificar a linguagem, vamos dizer que o ponto P é o par ordenado (x, y) . O ponto origem é o par $(0, 0)$.

Como exemplo, vamos localizar no plano cartesiano o ponto $P(3, 2)$.

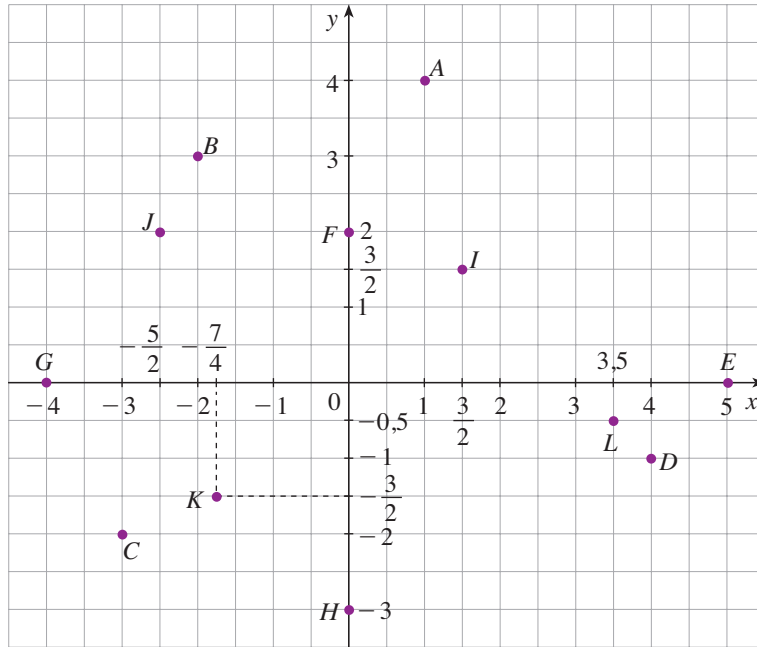
abscissa \rightarrow \uparrow \uparrow ordenada

- Pelo ponto do eixo dos x com abscissa 3, tracejamos uma linha paralela ao eixo dos y .
- Pelo ponto do eixo dos y com ordenada 2, tracejamos uma linha paralela ao eixo dos x .
- O ponto de cruzamento das linhas tracejadas determina o ponto $P(3, 2)$.



NELSON MATSUDA

Observe abaixo a representação de outros pontos no plano cartesiano.



NELSON MATSUUDA

Os pontos destacados são:

$A(1, 4)$

$E(5, 0)$

$I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$K\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

$B(-2, 3)$

$F(0, 2)$

$J\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$

$L(3,5; -0,5)$

$C(-3, -2)$

$G(-4, 0)$

$D(4, -1)$

$H(0, -3)$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 31** Escreva, em seu caderno, as coordenadas dos pontos localizados no plano cartesiano ao lado.

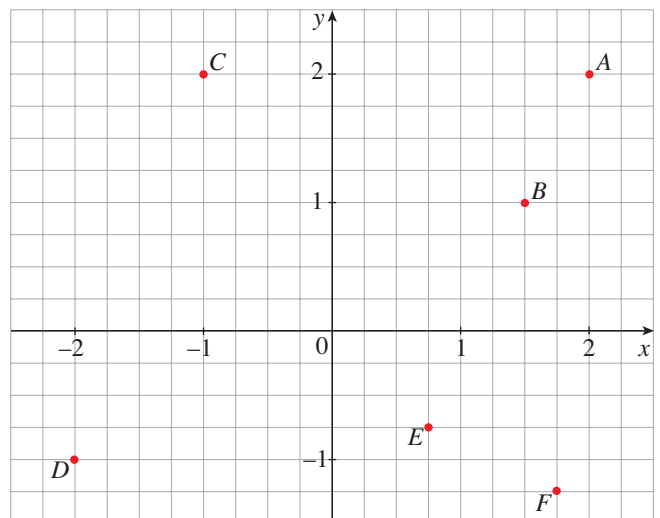
$A(2, 2); B\left(\frac{3}{2}, 1\right);$

$C(-1, 2); D(-2, -1);$

$E\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right); F\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$



JOSÉ LUIS JUHAS



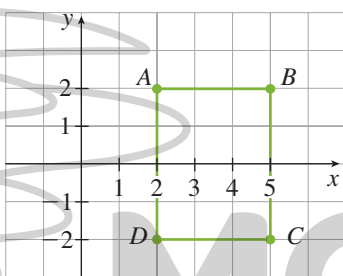
NELSON MATSUUDA

32 Construa um plano cartesiano em uma folha de papel quadriculado e localize os pontos indicados. *construção de figura*

- | | |
|-------------|--|
| $A(-1, 3)$ | $F(-2, 0)$ |
| $B(2, 4)$ | $G(0,5; 0,5)$ |
| $C(4, -2)$ | $H\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ |
| $D(-4, -3)$ | $I\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ |
| $E(2, 0)$ | |

33 Construa em uma folha de papel quadriculado um plano cartesiano e localize os pontos $A(5, -2)$; $B(5, 2)$; $C(2, 5)$; $D(-2, 5)$; $E(-5, 2)$; $F(-5, -2)$; $G(-2, -5)$ e $H(2, -5)$. Traçando os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} , \overline{FG} , \overline{GH} e \overline{HA} , qual é o polígono formado? *octógono*

34 Observe a figura no plano cartesiano e escreva as coordenadas dos vértices A' , B' , C' e D' , de sua simétrica em relação ao eixo dos y .
 $A'(-2, 2)$; $B'(-5, 2)$; $C'(-5, -2)$; $D'(-2, -2)$



35 Construa um plano cartesiano em uma folha de papel quadriculado e desenhe o triângulo de vértices nos pontos $A(-2, 2)$, $B(-1, 5)$ e $C(2, 2)$. Qual é a área desse triângulo? *6*

36 Em uma folha de papel quadriculado, construa um plano cartesiano e assinale os pontos $A(-2, -1)$ e $C(3, 4)$. Eles são os extremos da diagonal \overline{AC} de um quadrado.

- Quais são os pontos extremos da outra diagonal desse quadrado? *$(-2, 4)$ e $(3, -1)$*
- Dê as coordenadas do ponto comum a essas duas diagonais. *$(0,5; 1,5)$*
- Considerando u a unidade de medida do lado de cada quadradinho da malha quadriculada, determine o perímetro desse quadrado. *$20u$*

37 Reúna-se com um colega, providenciem papéis quadriculados e façam o que se pede.

- Escolham oito números para x e assinalem em um plano cartesiano os pontos (x, y) , em que $y = 0,5x - 1$. Esses pontos pertencem à mesma reta? *resposta pessoal; sim*

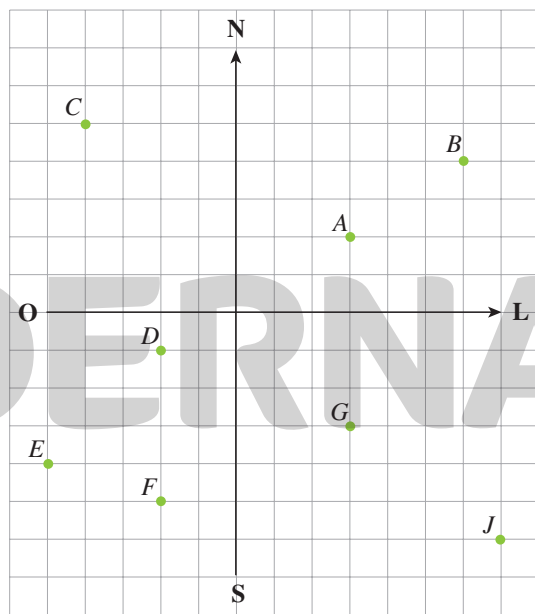
b) Assinalem, em um plano cartesiano, os pontos $M(-2, -2)$ e $N(2, 2)$. Tracem a reta que passa por esses pontos. Pelo traçado é possível verificar outros pontos que pertencem à reta. Assinalem seis deles e escrevam suas coordenadas.

Qual é a relação entre as coordenadas x e y dos pontos dessa reta? *resposta pessoal; $x = y$*

c) Tracem a reta que passa pelos pontos $A(-4, 4)$ e $B(4, -4)$. Assinalem outros seis pontos dessa reta e escrevam suas coordenadas. Qual é a relação entre as coordenadas x e y dos pontos da reta \overline{AB} ?

resposta pessoal; $x = -y$

38 O plano cartesiano abaixo representa a tela de radar da torre de controle de um aeroporto. Os pontos representados correspondem às posições dos aviões.



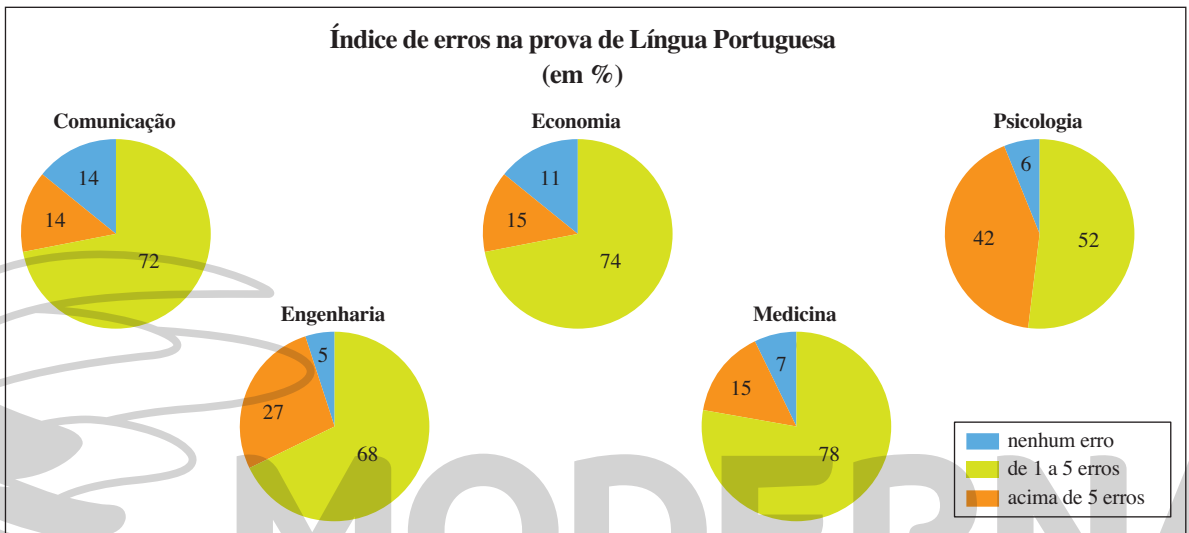
Suponha que a torre esteja situada na origem e que cada divisão dos eixos corresponda a 10 quilômetros. O norte está representado no sentido positivo do eixo dos y e o leste, no sentido positivo do eixo dos x .

- Quais são as coordenadas dos aviões B , C , E e G ? *$B(60, 40)$, $C(-40, 50)$, $E(-50, -40)$ e $G(30, -30)$*
- Qual é a distância entre os aviões A e G ? E entre os aviões F e D ? *50 km ; 40 km*
- O piloto do avião J se comunica com a torre, indicando sua posição, 70 km leste e 60 km sul, pedindo permissão para pousar no aeroporto. A informação do piloto está correta? *sim*

Composição de um gráfico de colunas compostas a partir de outros gráficos

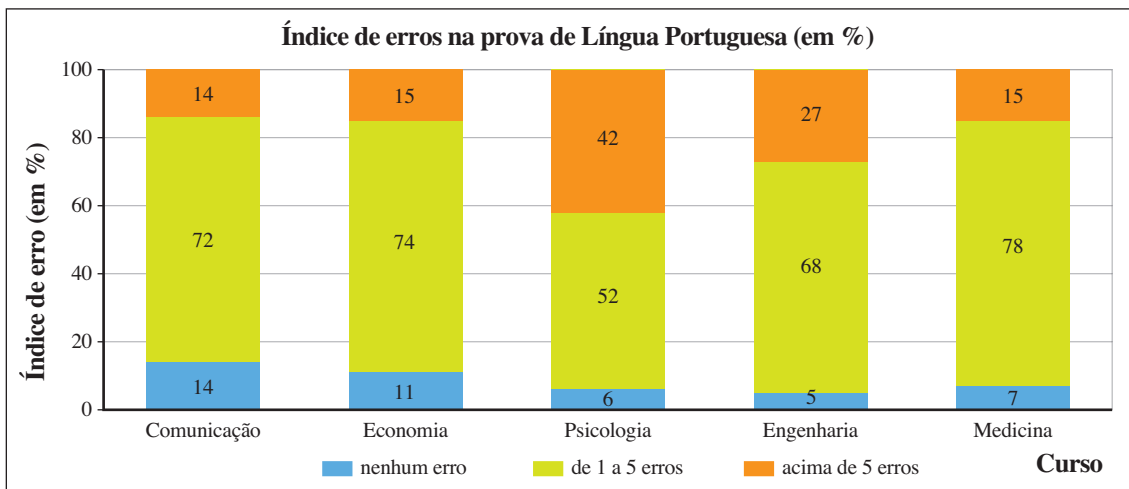
Alunos dos cursos de Comunicação, Economia, Psicologia, Engenharia e Medicina, fizeram uma prova de Língua Portuguesa para descobrir quais eram as principais dificuldades nessa área.

Após a correção da prova, foi feito um levantamento do índice de erros cometidos, que foram representados nos gráficos a seguir.



Esses dados também podem ser organizados em um único gráfico de colunas compostas. Para isso, haverá uma coluna para cada curso no eixo horizontal; e no eixo vertical, serão indicados os intervalos de erros em porcentagem e, por isso, em uma escala de 0 a 100.

Observe atentamente o gráfico e compare-o aos anteriores.



ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ADILSON SECCO

- 1** Com base nos dados da página anterior, responda:
- Os alunos de que curso tiveram maior quantidade de provas sem erros? E quais tiveram menor quantidade? **1. a)** curso de Comunicação; curso de Engenharia
 - Que gráfico você usou para responder ao item anterior? Justifique sua resposta. **1. b)** É possível usar tanto os gráficos de setores como o gráfico de colunas, porém o gráfico de colunas é mais sintético e possibilita uma comparação visual mais rápida.
- 2** Considerando que em todos os cursos o mesmo número de alunos foi submetido a essa prova, faça um novo gráfico de setores que mostre de modo geral (não por curso) os índices de acerto dessa prova. **construção de gráfico**

Destaque para os alunos que a informação “em todos os cursos o mesmo número de alunos foi submetido à prova” é muito importante para elaborar o gráfico geral. Sem ela, não seria possível chegar a essas porcentagens. Além disso, como estamos fazendo um gráfico que engloba os índices de acertos de todos os cursos, fica mais adequado utilizar um gráfico de setores.

6 Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Acompanhe o diálogo entre dois amigos.



Se Maria estiver certa, quantos quilogramas tem o peixe de Pedro?

Indicando por x a massa, em quilograma, do peixe de Pedro, e por y a do peixe de Maria, podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} y = x + 3 & \leftarrow \text{O peixe de Maria tem 3 kg a mais que o de Pedro.} \\ y = 1,5x & \leftarrow \text{Para cada 1 kg do peixe de Pedro, o peixe de Maria tem 1,5 kg.} \end{cases}$$

Já vimos que equações como essas, com incógnitas que representam, em ambos os casos, as mesmas coisas, formam um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas tem solução quando há um par ordenado de números reais que é solução de ambas as equações.

No sistema $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 1,5x \end{cases}$, a solução é o par ordenado (6, 9), pois: $9 = 6 + 3$ e $9 = 1,5 \cdot 6$

A seguir, vamos recordar dois métodos de resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas: o método da substituição e o método da adição.

► Método da substituição

A resolução de um sistema por esse método consiste em:

- isolar, no 1º membro de uma das equações, uma das incógnitas;
- **substituir**, na outra equação, a incógnita isolada pela expressão do 2º membro, obtendo uma terceira equação com a outra incógnita apenas;
- resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para a sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita.

Veja um exemplo.

A soma dos dois algarismos de um número é 8. Trocando a ordem desses algarismos, obtemos um número que tem 18 unidades a mais que o primeiro. Vamos determinar esse número.

Indicando por x o algarismo das dezenas e por y o algarismo das unidades, esse número pode ser expresso por $10x + y$.

Trocando a ordem dos algarismos, obtemos um número que pode ser expresso por $10y + x$.

Como a soma dos dois algarismos é 8, temos: $x + y = 8$

Assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 10y + x = 10x + y + 18 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ -9x + 9y = 18 \end{cases}$$

Isolando a incógnita x na equação $x + y = 8$, temos: $x = 8 - y$

Substituindo x por $8 - y$ na equação $-9x + 9y = 18$, encontramos o valor de y .

$$-9x + 9y = 18$$

$$-9(8 - y) + 9y = 18$$

$$-72 + 9y + 9y = 18$$

$$9y + 9y = 18 + 72$$

$$18y = 90$$

$$\frac{18y}{18} = \frac{90}{18}$$

$$y = 5$$



Substituindo y por 5 em $x = 8 - y$, encontramos o valor de x .

$$x = 8 - y$$

$$x = 8 - 5$$

$$x = 3$$

Substituindo x por 3 e y por 5 em $10x + y$, obtemos:

$$10x + y = 10 \cdot 3 + 5 = 30 + 5 = 35$$

Logo, o número procurado é 35.

► Método da adição

A resolução de um sistema por esse método consiste em:

- multiplicar todos os termos das equações por um número conveniente, de modo que os novos coeficientes de uma das incógnitas sejam números opostos;
- **adicionar** os primeiros membros e os segundos membros das novas equações, obtendo uma terceira equação com uma só incógnita;
- resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para a sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita.

Considere o exemplo a seguir.

A soma das idades de Carlos e Márcia é 48 anos. Vamos determinar a idade de cada um sabendo que, daqui a 8 anos, a idade de Carlos será o triplo da idade de Márcia.

Indicando por x a idade de Carlos e por y a idade de Márcia, temos: $x + y = 48$

Daqui a 8 anos, a idade de cada um será: $x + 8$ e $y + 8$. Como nessa época a idade de Carlos será o triplo da idade de Márcia, temos:

$$x + 8 = 3 \cdot (y + 8) \text{ ou } x + 8 = 3y + 24$$

Assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ x + 8 = 3y + 24 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = 48 \\ x - 3y = 16 \end{cases}$$

Multiplicando a equação $x + y = 48$ por 3, temos:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 144 \\ x - 3y = 16 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações, obtemos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 3y = 144 \\ x - 3y = 16 \end{cases} \quad \downarrow \text{Somando os primeiros e os segundos membros.} \\ \hline 4x + 0y = 160 \\ \frac{4x}{4} = \frac{160}{4} \\ x = 40 \end{array}$$

Substituindo x por 40 na equação $x + y = 48$, temos:

$$x + y = 48$$

$$40 + y = 48$$

$$y = 48 - 40$$

$$y = 8$$

Logo, Carlos tem 40 anos e Márcia, 8 anos.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 39** Usando o método da substituição, resolva os sistemas a seguir e verifique a solução encontrada.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = y - 5 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

(10, 5) (-3, 2)

- 40** Resolva mentalmente.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 5 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 9 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

(9, 4) (7, 2)

- 41** Um pai tem 20 anos a mais do que o filho. Determine a idade de cada um, sabendo que daqui a 5 anos o pai terá o dobro da idade do filho. **pai: 35 anos; filho: 15 anos**

- 42** Um número tem dois algarismos. O algarismo das unidades tem 5 unidades a mais que o algarismo das dezenas. O número considerado é o triplo da soma de seus algarismos. Determine esse número. **27**

- 43** Usando o método da adição, resolva os sistemas abaixo e verifique a solução encontrada.

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 5x - 2y = 29 \end{cases}$$

(2, -1) (5, -2)

- 44** Resolva os sistemas pelo método que você julgar mais conveniente e verifique as soluções encontradas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x - 2) + 3y = -7 \\ 3x - 2(y - 4) = -3 \end{cases} \quad (-3, 1)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2,4x - 0,6y = 2,4 \\ 3,6x + y = 7,4 \end{cases} \quad (1,5; 2)$$

- 45** Calcule a área de um retângulo cujo perímetro mede 22 cm e a diferença entre a medida da base e a metade da medida da altura é de 5 cm.

28 cm²

- 46** Luís pagou uma dívida de R\$ 89,00 com notas de R\$ 5,00 e de R\$ 2,00. Ao todo, Luís usou 22 notas. Quantas notas eram de R\$ 5,00 e quantas eram as de R\$ 2,00?

15 notas de R\$ 5,00 e 7 notas de R\$ 2,00

- 47** Comprei 2 bermudas e 3 camisas por R\$133,00. A razão entre os preços de uma bermuda e de uma camiseta é $\frac{5}{3}$. Quanto pagaria se tivesse comprado 1 bermuda e 2 camisas?

R\$ 77,00

- 48** (FCM-MG) O par ordenado (x, y) é a solução do

$$\text{sistema: } \begin{cases} -1 = -\frac{3y}{2} + x \\ 6y = 3(x - 4) \end{cases}$$

Então, $x + y$ é igual a: **alternativa c**

- a) +6. b) +12. c) -26. d) -16. e) -4.

- 49** Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Cada um pensa em um par ordenado de números reais e escreve duas equações do 1º grau, com duas incógnitas que tenham o par imaginado como solução de cada uma das equações. Troquem entre si os sistemas formados pelas duas equações escritas para que o outro resolva o sistema por um dos métodos revistos. Desfaçam a troca para que cada um faça a verificação da resposta, resolvendo o sistema pelo outro método.

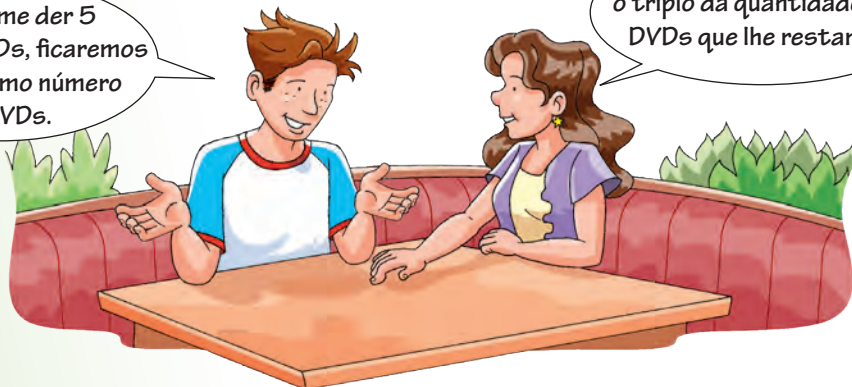


Oriente os alunos para que os coeficientes das equações não sejam múltiplos da outra.

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega, observem o diálogo entre Ricardo e Cristina e respondam à pergunta.

Se você me der 5 dos seus DVDs, ficaremos com o mesmo número de DVDs.



Se você me der 5 dos seus DVDs, ficarei com o triplo da quantidade dos DVDs que lhe restarem.

Quantos DVDs tem cada um? **Ricardo tem 15 DVDs e Cristina, 25.**

OSÉ LUIS JUHAS

PARA SABER MAIS**Método da comparação**

Há muitos anos, quase todos os livros didáticos de Matemática traziam um método de resolução de sistemas do 1º grau com duas incógnitas chamado **método da comparação**. Como o próprio nome sugere, ele consistia em **comparar** (no caso, igualar) os valores de uma mesma incógnita obtidos pelo isolamento dela em ambas as equações, chegando a uma terceira equação com uma só incógnita.

A resolução do sistema que construímos na questão dos peixes de Pedro e de Maria, no início deste tópico, é bem simples por esse método.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 1,5x \end{cases}$$

$$x + 3 = 1,5x \quad \leftarrow \text{Comparamos os valores de } y \text{ pela igualdade.}$$

$$x - 1,5x = -3$$

$$-0,5x = -3$$

$$x = -3 : (-0,5)$$

$$x = 6$$

Substituindo x por 6 em uma das equações do sistema, obtemos:

$$y = 6 + 3 \quad \text{ou} \quad y = 9$$

Logo, o par (6, 9) é solução do sistema, ou seja, o peixe de Pedro tem 6 kg e o de Maria, 9 kg.

Seja:

$r \rightarrow$ a quantidade de DVDs de Ricardo

$c \rightarrow$ a quantidade de DVDs de Cristina

Assim:

$$r + 5 = c - 5$$

$$c + 5 = 3(r - 5)$$

$$\begin{cases} c = r + 10 \\ c = 3r - 15 - 5 \end{cases}$$

$$c = 3r - 20$$

$$r + 10 = 3r - 15 - 5$$

$$r + 10 = 3r - 20$$

$$r - 3r = -20 - 10$$

$$-2r = -30$$

$$r = 15$$

Substituindo o valor obtido para r em uma das equações do sistema, obtemos:

$$c = 15 + 10$$

$$c = 25$$

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Resolva o sistema da questão de Ricardo e Cristina, da seção **Pense mais um pouco...**, pelo método da comparação.

7 Solução gráfica de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Dada uma equação do 1º grau com duas incógnitas, existem infinitos pares de números reais que são soluções dessa equação.

Como exemplo, vamos considerar a equação $x + y = 3$. Como as equações $x + y = 3$ e $y = 3 - x$ são equações equivalentes, os pares ordenados que satisfazem a equação considerada são da forma:

$$(x, \underbrace{3 - x}_y)$$

Para determinar alguns desses pares, atribuímos a x qualquer valor real e encontramos o valor correspondente de y .

Veja abaixo alguns desses pares.

x	-1	0	0,5	1	2	2,5	3	4
$y = 3 - x$	4	3	2,5	2	1	0,5	0	-1
Par obtido	(-1, 4)	(0, 3)	(0,5; 2,5)	(1, 2)	(2, 1)	(2,5; 0,5)	(3, 0)	(4, -1)

Os pares ordenados $(-1, 4)$, $(0, 3)$, $(0,5; 2,5)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2,5; 0,5)$, $(3, 0)$ e $(4, -1)$ são algumas soluções da equação $x + y = 3$.

Vamos representar, no plano cartesiano abaixo, esses pares ordenados.



NELSON MATSUDA



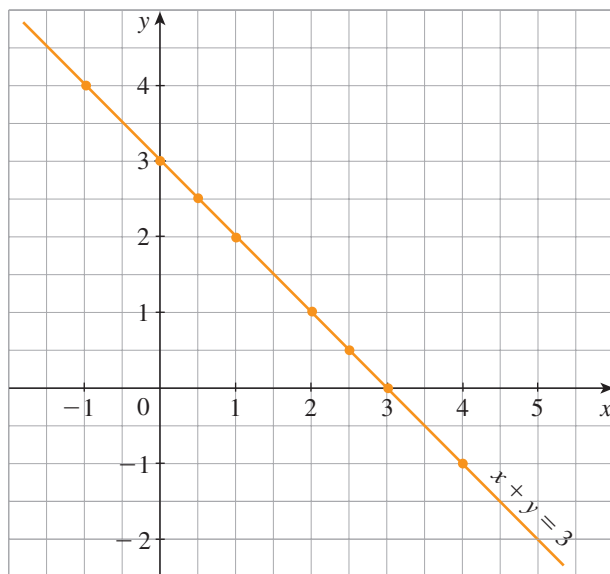
JOSE LUIS JUHAS

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Observe o alinhamento dos pontos que representam os pares ordenados que são soluções da equação $x + y = 3$.

- A reta que contém esses pontos é a solução gráfica da equação $x + y = 3$.
- Qualquer ponto que pertença a essa reta será solução da equação $x + y = 3$.
- Nenhum ponto fora dessa reta é solução da equação $x + y = 3$.

JOSE LUIS JUHAS



NELSON MATSUDA

Sabemos que por dois pontos passa uma única reta; então, para construir o gráfico de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é suficiente:

- determinar dois pontos que sejam solução da equação;
- localizar esses pontos no plano cartesiano;
- traçar a reta determinada por esses pontos.

Observe o exemplo a seguir.

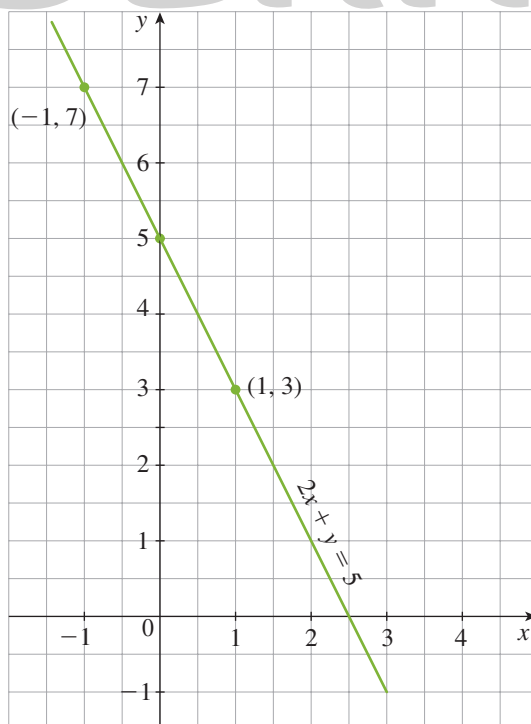
Vamos construir o gráfico da equação $2x + y = 5$.

Para isso, determinamos dois pares ordenados que sejam solução da equação.

- Para $x = 1$, temos:
 $2 \cdot 1 + y = 5$
 $y = 3$
 Logo, obtemos o par $(1, 3)$.
- Para $x = -1$, temos:
 $2 \cdot (-1) + y = 5$
 $y = 7$
 Logo, obtemos o par $(-1, 7)$.

Portanto, os pares $(1, 3)$ e $(-1, 7)$ são soluções da equação $2x + y = 5$. Assim, a reta que contém esses dois pontos é a solução gráfica dessa equação.

Qualquer ponto dessa reta é uma solução da equação $2x + y = 5$.



NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora, vamos considerar o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ formado

pelas equações $x + y = 3$ e $2x + y = 5$.

Construindo em um mesmo plano cartesiano as retas que são as soluções gráficas das duas equações, verificamos que elas se encontram no ponto $(2, 1)$, que é a solução do sistema.

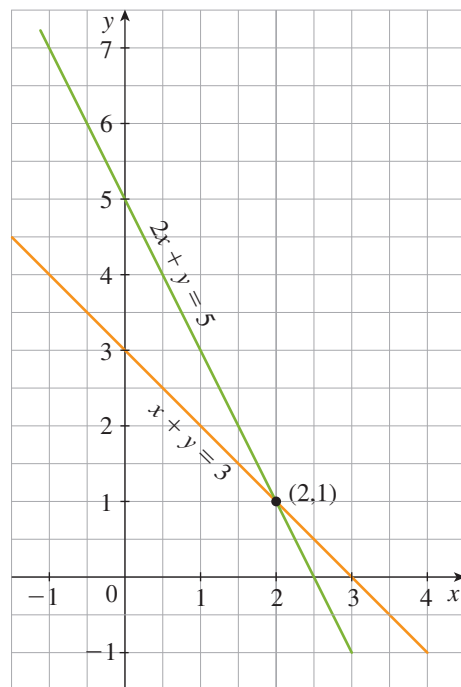
$$x + y = 3$$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$$2x + y = 5$$

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
2,5	0	(2,5; 0)

Dessa forma, podemos resolver graficamente um sistema representando as retas de cada equação em um mesmo plano cartesiano, e o ponto de cruzamento determinado é a solução do sistema.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

50 Usando papel quadriculado, construa o gráfico de cada equação abaixo. *construção de gráficos*

a) $3x + y = 8$

c) $2x - 3y = 4$

b) $x - y = -3$

d) $2x + y = -2$

51 Dos pontos $A(2, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(-\frac{1}{3}, 4)$,

$D(-1, -\frac{11}{2})$, $E(0, 4)$ e $F(0, -4)$, quais pertencem à reta cuja equação é $3x - 2y = 8$? *pontos A, D e F*

Localize esses pontos em um plano cartesiano e trace essa reta. *construção de figura*

52 Usando uma folha de papel quadriculado, resolva graficamente os sistemas a seguir.

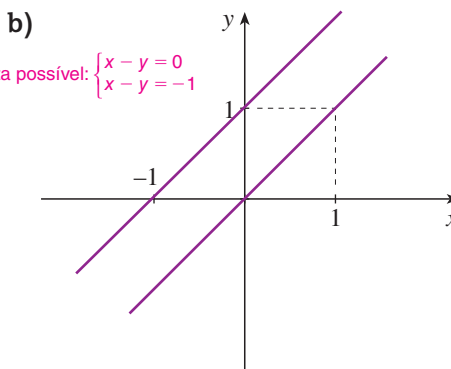
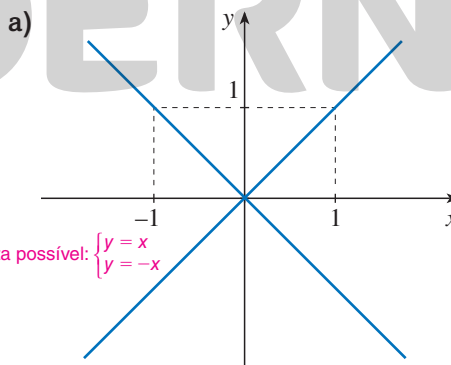
a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$ *(3, 4)*

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ *(3, -1)*

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ *(-3, 2)*

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$ *(-1, 1)*

53 Crie um sistema de equações correspondente a cada representação gráfica.



8 Classificação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Pela resolução gráfica fica mais simples entender a classificação dada a um sistema: determinado, impossível ou indeterminado. No entanto, nem sempre é possível chegar à solução, exata, quando existe, do sistema por esse método.

► Sistema determinado

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **determinado** quando apresenta **uma única solução**.

Veja um exemplo.

Vamos resolver o sistema:
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Resolução algébrica

Pelo método da adição, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \downarrow \text{Somando.} \\ \hline 2x + 0 = 10 \\ \hline \frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \\ \hline x = 5 \end{array}$$

Substituindo x por 5 na equação $x + y = 7$, temos:

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 5 + y &= 7 \\ y &= 7 - 5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Logo, o par $(5, 2)$ é a solução desse sistema.

Resolução gráfica

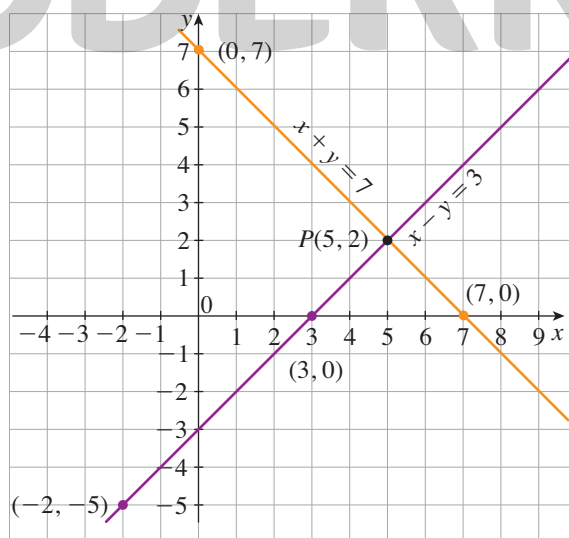
Vamos colocar em um mesmo plano cartesiano o gráfico de cada equação.

$$x + y = 7$$

x	y	(x, y)
7	0	(7, 0)
0	7	(0, 7)

$$x - y = 3$$

x	y	(x, y)
3	0	(3, 0)
-2	-5	(-2, -5)



NELSON MATSUDA

Observe que:

- as retas são concorrentes no ponto P ;
- as coordenadas do ponto P determinam o par ordenado $(5, 2)$, que é a única solução do sistema.

Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **determinado**, então ele é representado no plano cartesiano por duas **retas concorrentes**.

► Sistema impossível

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **impossível** quando **não existe par ordenado que seja solução** das duas equações simultaneamente.

Veja um exemplo.

$$\text{Vamos resolver o sistema: } \begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

Resolução algébrica

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição. Isolando x em $x + 3y = -1$, temos:

$$x = -1 - 3y$$

Substituindo x por $-1 - 3y$ em $2x + 6y = 10$, temos:

$$2(-1 - 3y) + 6y = 10$$

$$-2 - 6y + 6y = 10$$

$$-6y + 6y = 10 + 2$$

$$0y = 12$$

Não existe valor de y de modo que $0y = 12$. Portanto, não existe um par (x, y) que verifica as duas equações. Dizemos, então, que o sistema é impossível.

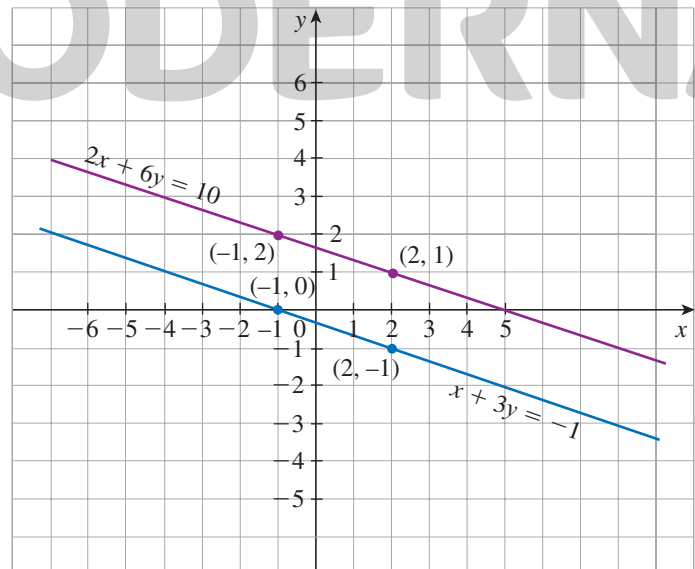
Resolução gráfica

$$2x + 6y = 10$$

x	y	(x, y)
-1	2	(-1, 2)
2	1	(2, 1)

$$x + 3y = -1$$

x	y	(x, y)
-1	0	(-1, 0)
2	-1	(2, -1)



Observe que:

- as retas são paralelas;
- não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **impossível**, então ele é representado no plano cartesiano por duas **retas paralelas**.

► Sistema indeterminado

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **indeterminado** quando tem **infinitas soluções**.

Veja um exemplo.

$$\text{Vamos resolver o sistema: } \begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Resolução algébrica

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição. Isolando x em $x + 3y = 4$, temos:

$$x = 4 - 3y$$

Substituindo x por $4 - 3y$ em $2x + 6y = 8$, temos:

$$2(4 - 3y) + 6y = 8$$

$$8 - 6y + 6y = 8$$

$$-6y + 6y = 8 - 8$$

$$0y = 0$$

Como qualquer número multiplicado por zero é igual a zero, existem infinitos valores de y de modo que $0y = 0$. O sistema apresenta infinitas soluções.

Veja alguns dos infinitos pares (x, y) que verificam as duas equações do sistema dado.

a) $(1, 1)$

Na primeira equação, temos:

$$2x + 6y = 8$$

$$2 \cdot (1) + 6 \cdot (1) = 8$$

$$2 + 6 = 8$$

$$8 = 8 \text{ (verdadeiro)}$$

Na segunda equação, temos:

$$x + 3y = 4$$

$$1 + 3 \cdot (1) = 4$$

$$1 + 3 = 4$$

$$4 = 4 \text{ (verdadeiro)}$$

b) $(-2, 2)$

Na primeira equação, temos:

$$2x + 6y = 8$$

$$2 \cdot (-2) + 6 \cdot (2) = 8$$

$$-4 + 12 = 8$$

$$8 = 8 \text{ (verdadeiro)}$$

Na segunda equação, temos:

$$x + 3y = 4$$

$$(-2) + 3 \cdot (2) = 4$$

$$-2 + 6 = 4$$

$$4 = 4 \text{ (verdadeiro)}$$

c) $(-5, 3)$

Na primeira equação, temos:

$$2x + 6y = 8$$

$$2 \cdot (-5) + 6 \cdot (3) = 8$$

$$-10 + 18 = 8$$

$$8 = 8 \text{ (verdadeiro)}$$

Na segunda equação, temos:

$$x + 3y = 4$$

$$(-5) + 3 \cdot (3) = 4$$

$$-5 + 9 = 4$$

$$4 = 4 \text{ (verdadeiro)}$$

Os pares $(1, 1)$, $(-2, 2)$ e $(-5, 3)$ são algumas das infinitas soluções do sistema.

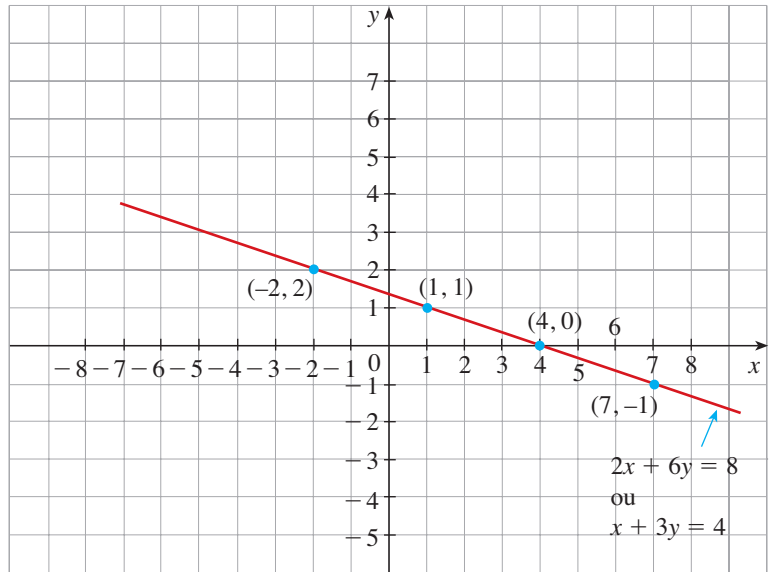
Resolução gráfica

$$2x + 6y = 8$$

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
4	0	(4, 0)

$$x + 3y = 4$$

x	y	(x, y)
-2	2	(-2, 2)
7	-1	(7, -1)



Observe que:

- as retas são coincidentes;
- existem infinitos pontos que são soluções do sistema.

Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **indeterminado**, ele é representado no plano cartesiano por duas **retas coincidentes**.

Resumindo:

- Sistema determinado: retas concorrentes
- Sistema impossível: retas paralelas
- Sistema indeterminado: retas coincidentes

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

54 Resolva graficamente os sistemas abaixo, usando uma folha de papel quadriculado. Em seguida, classifique-os em determinado, indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

(4, 3); sistema determinado

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

sistema indeterminado

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

sistema impossível

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

sistema impossível

c) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

(-2, 4); sistema determinado

f) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$

sistema indeterminado

55 Acompanhe o diálogo entre João e Pedro.

Pedro, se você me der $\frac{1}{5}$ das suas figurinhas, eu ficarei com o dobro do que lhe restará.

É se você me der 60 das suas figurinhas, João, ficaremos com quantidades iguais!



Quantas figurinhas tem cada um?

Pedro tem 300 figurinhas, e João, 420.

1 Usando uma folha de papel quadriculado, resolva graficamente os sistemas e classifique-os como determinado, indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 17 \end{cases}$ (7, 5); sistema determinado

b) $\begin{cases} 2x + y = -9 \\ x + 6y = 1 \end{cases}$ (-5, 1); sistema determinado

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$ sistema impossível

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$ sistema indeterminado

2 Veja o que diz Luís.

Nós, rapazes, somos 4 vezes o número de moças, mais 3. Se eu fosse embora, o número de rapazes seria o quántuplo do número de moças.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

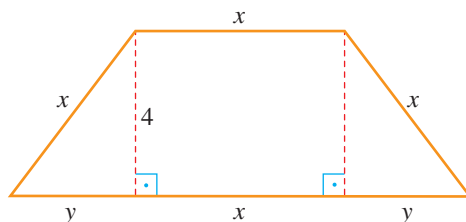
Descubra quantos jovens estavam reunidos.

13 jovens

3 Cristina retirou R\$ 700,00 de um banco, em 10 notas, sendo algumas de R\$ 100,00 e outras de R\$ 50,00. Quantas notas de R\$ 50,00 e de R\$ 100,00 Cristina recebeu?

6 notas de R\$ 50,00 e 4 notas de R\$ 100,00

4 O trapézio abaixo tem 39 cm de perímetro. Sabe-se que y é igual a 60% de x .



NELSON MATSUDA

Determine:

a) as medidas x e y ; $x = 7,5$ cm e $y = 4,5$ cm

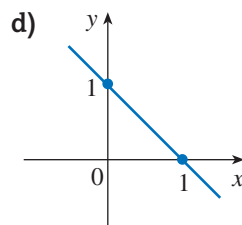
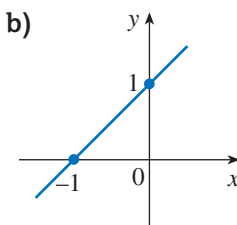
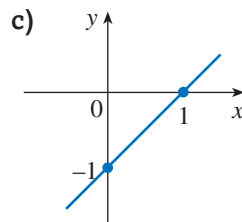
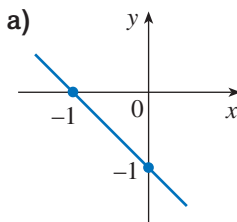
b) a área do trapézio. 48 cm²

5 Sabendo que o par (x, y) é a solução do sistema abaixo, determine $x : y$. $x : y = 2$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{4}{3} \\ \frac{2x - y}{3} - \frac{x + 3y}{5} = 0 \end{cases}$$

6 Que gráfico representa a equação $x - y = 1$?

alternativa c



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Onde está o erro?

Rogério encontrou em um jornal antigo uma brincadeira matemática e ficou curioso para saber a resposta, mas o jornal estava rasgado justamente na parte da solução. Observe o recorte do jornal.

Encontre o erro

Incrível! Será que 2 é igual a 1?

Para mostrar que 2 é igual a 1, vamos considerar os números a e b e atribuir-lhes o valor 1, isto é:

$$a = 1 \text{ e } b = 1$$

Afirmamos que vale a seguinte igualdade:

$$a^2 - b^2 = a^2 - a \cdot b$$

Podemos verificar a validade substituindo a e b por 1:

$$1^2 - 1^2 = 1^2 - 1 \cdot 1$$

$$0 = 0$$

Portanto, a igualdade $a^2 - b^2 = a^2 - a \cdot b$ é verdadeira.

Fatorando ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{(a - b)}$, obtemos:

$$(a + b) \cdot \cancel{(a - b)} \cdot \frac{1}{\cancel{(a - b)}} = a \cdot \cancel{(a - b)} \cdot \frac{1}{\cancel{(a - b)}}$$

$$a + b = a$$

Substituindo os valores de a e b por 1, temos:

$$1 + 1 = 1$$

$$2 = 1. \text{ Isso é possível?}$$

Resposta:

1. Espera-se que os alunos percebam que o erro está na multiplicação de ambos os membros por $\frac{1}{(a - b)}$, pois, como $a = 1$ e $b = 1$, temos $a - b = 0$, e não é possível dividir por zero.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Encontre o erro cometido no cálculo desenvolvido nesse jornal.
- 2 Fernanda descobriu o erro cometido no jornal e fez uma brincadeira parecida seguindo o mesmo raciocínio. Veja ao lado as operações de Fernanda e descubra onde está o erro.

	$0 = 0$
	$3 - 3 = 4 - 4$
	$3 \cdot \cancel{(4 - 3)} = 4 \cdot \cancel{(4 - 3)}$
	$3 = 4$

1 Circunferência e círculo

Mandala (“círculo” em sânscrito, língua clássica da Índia) é um diagrama sagrado tradicionalmente usado em religiões, como o hinduísmo e o budismo, para meditação. Simbolizando o ser humano ou o universo puro e perfeito, a mandala tem uma estrutura visual que representa a concretização dos sentimentos de paz, bem-estar e integridade.

Esse tipo de diagrama também está presente nas sociedades islâmicas e era encontrado na Europa medieval e em culturas tribais, em diversos tipos de manifestações artísticas, como pinturas, esculturas e danças.

Nos desenhos das mandalas, geralmente o quadrado, que representa a Terra, é envolto por círculos e circunferências, que representam o tempo, o movimento, a eternidade e o universo.

Além de pintadas, as mandalas podem ser estruturadas em materiais diversos, como ramos de plantas (palha ou cipó, por exemplo), arames, barbantes e fios coloridos, sementes e pequenas pedras. Monges budistas costumam construí-las em areia muito fina e colorida, com uma impressionante riqueza de detalhes e de simbologias.

Dados obtidos em:
Barbara C. Matilsky. *Buddhist art and ritual from Nepal and Tibet*. Chapel Hill: Ackland Art Museum, 2001.



Mandala de vidro, produzida pela artista plástica Marina Leal. (Coleção particular. Foto de 2012.)

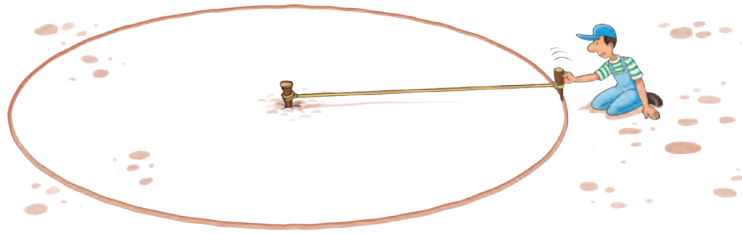
► Circunferência

Observe a situação a seguir.

Para traçar o canteiro de uma praça, o jardineiro Luís usou uma corda presa a duas hastes de madeira, uma em cada ponta.

Com uma das hastes presa ao chão e mantendo a corda esticada, ele riscou a terra com a outra, dando uma volta completa.

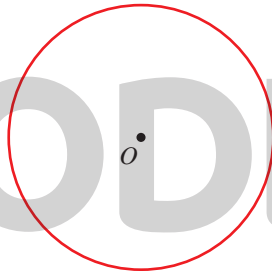
JOSÉ LUÍS JUHAS



O traçado obtido pelo jardineiro dá ideia de uma circunferência.

Circunferência é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano.

Considere a circunferência abaixo.

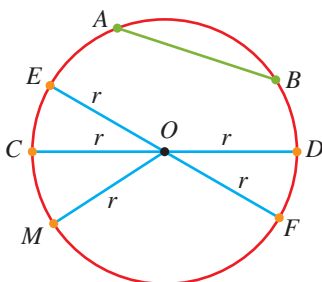


Todos os pontos de uma circunferência são equidistantes de um ponto fixo, chamado de **centro da circunferência**. Nessa circunferência, o centro é o ponto O .

Em uma circunferência, destacamos alguns elementos:

- **Raio**: segmento cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência.
- **Corda**: segmento cujos extremos são dois pontos quaisquer de uma circunferência.
- **Diâmetro**: corda que passa pelo centro de uma circunferência.

NELSON MATSUDA



Na figura ao lado:

- \overline{AB} é uma corda;
- \overline{CD} e \overline{EF} são alguns dos diâmetros;
- \overline{OM} , \overline{OC} e \overline{OF} são alguns dos raios.

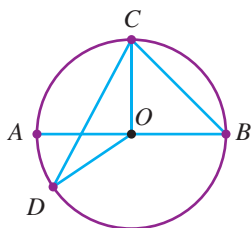
OBSERVAÇÃO

- A palavra **raio** será usada tanto para designar um segmento como para indicar a medida desse segmento. Assim, por exemplo, quando dizemos que uma circunferência tem raio 3,8 cm, queremos dizer que os infinitos segmentos que são raios dessa circunferência medem 3,8 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

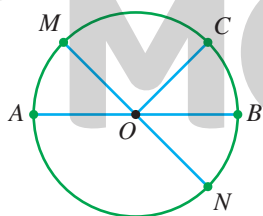
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Observe a circunferência abaixo e dê nome aos segmentos.



- a) \overline{OB} raio c) \overline{BC} corda e) \overline{CD} corda
 b) \overline{OC} raio d) \overline{AB} diâmetro f) \overline{OD} raio

- 2 Considere a figura a seguir.



Agora, responda às questões.

- a) Se $OM = 3$ cm, quanto mede \overline{AB} ? 6 cm
 b) Se $MN = 8$ cm, quanto mede \overline{OC} ? 4 cm
 c) Se $OC = x$, quanto mede \overline{OB} ? x
 d) Se $OA = y$, quanto mede \overline{AB} ? $2y$
- 3 Com o auxílio de um compasso, trace três circunferências: uma com raio 2 cm, outra com raio 2,5 cm, e para a terceira você escolhe a medida. Em seguida, em cada uma delas, trace um diâmetro \overline{AB} , uma corda \overline{CD} , que não passe pelo centro O , e um raio \overline{OE} . Considerando as possibilidades de suas escolhas para os pontos A, B, C, D e E , responda:
- a) CD pode ser maior que AB ? não
 b) AB é sempre maior que CD ? sim

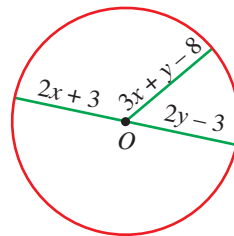
- c) CD pode ser maior que OE ? sim
 d) CD pode ser menor que OE ? sim
 e) AB é sempre o dobro de OE ? sim

- 4 Uma das maiores crateras conhecidas do nosso Sistema Solar está em Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol. O diâmetro dessa cratera mede aproximadamente 1.300 km. Determine, em metro, a medida aproximada do raio dessa cratera. 650.000 m



Superfície de Mercúrio. O Sol está a, aproximadamente, 58.000.000 km de distância de Mercúrio, menos de $\frac{1}{3}$ da distância da Terra ao Sol.

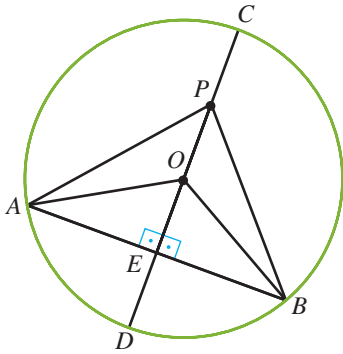
- 5 Na figura a seguir, as expressões algébricas representam a medida dos raios da circunferência.



5. a) resposta possível:
 $\begin{cases} 2x + 3 = 3x + y - 8 \\ 2x + 3 = 2y - 3 \end{cases}$

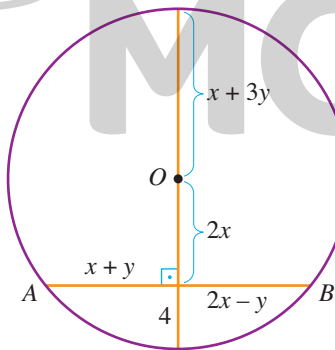
- a) Escreva, com essas expressões, um sistema de duas equações com duas incógnitas.
 b) Resolva o sistema do item a e calcule as medidas do raio e do diâmetro.
 medida do raio: 11;
 medida do diâmetro: 22

- 6** Reúna-se com um colega e façam o que se pede.
Na figura a seguir, a corda \overline{AB} é perpendicular ao diâmetro \overline{CD} .

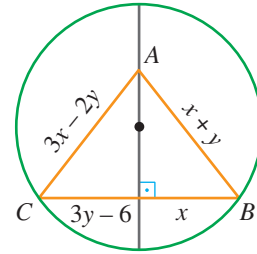


- a) Qual é o caso de congruência de triângulos que assegura que $\triangle OAE \cong \triangle OBE$? **caso CH**
- b) Considerando os triângulos PAE e PBE , demonstrem que $\overline{AP} \cong \overline{BP}$. **demonstração**
- c) Considerem a figura abaixo, em que as expressões representam as medidas dos segmentos. Escrevam e resolvam um sistema de duas equações com duas incógnitas, calculando as medidas do raio, do diâmetro e da corda \overline{AB} .

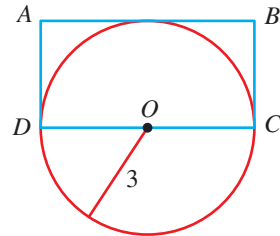
medida do raio: 20;
medida do diâmetro: 40;
 $AB = 24$



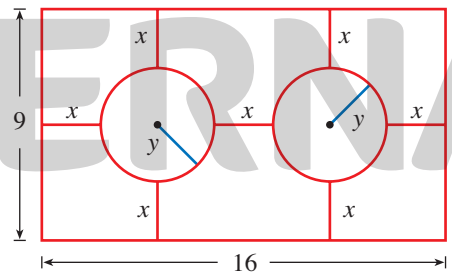
- d) Considerando a figura abaixo, escrevam e resolvam um sistema de duas equações com duas incógnitas. Depois, calculem o perímetro do triângulo ABC . **32**



- e) Calculem o perímetro do retângulo $ABCD$ abaixo. **18**



- 7** Ainda com um colega, façam o que se pede.
Na figura a seguir, temos duas circunferências de mesmo raio, e as medidas estão em uma mesma unidade.



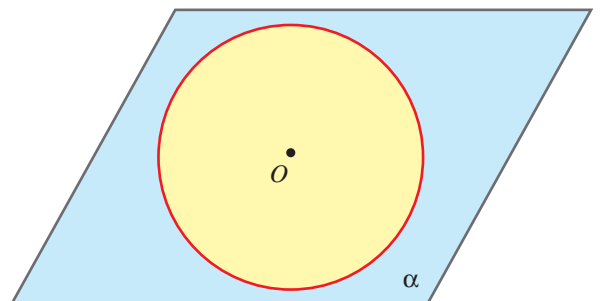
- Escrevam e resolvam um sistema de duas equações com duas incógnitas para determinar a medida do raio das circunferências. **2,5**

► Círculo

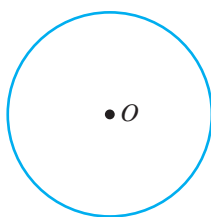
Uma circunferência de centro O , contida em um plano α , determina duas regiões: região interna e região externa.

Na figura ao lado:

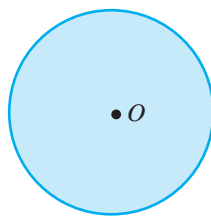
- a circunferência está desenhada em vermelho;
- a região interna à circunferência está pintada de amarelo e o centro pertence à região interna;
- a região externa está pintada de azul.



A região do plano formada por uma circunferência e pela região interna a ela é chamada de **círculo**.



circunferência

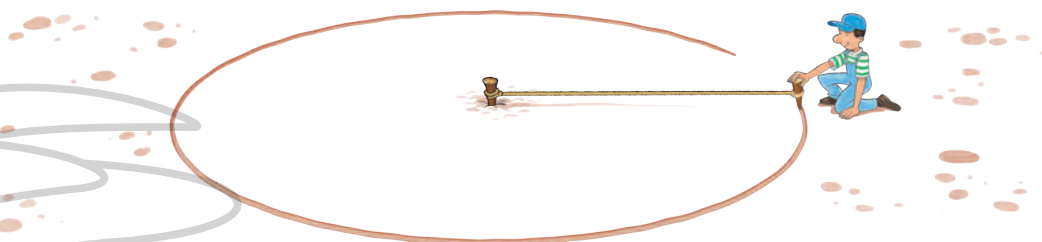


círculo

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

► Comprimento da circunferência

Você se lembra do jardineiro Luís, que traçou o contorno de um canteiro em uma praça com duas hastes de madeira e uma corda?



JOSE LUIS JUHAS

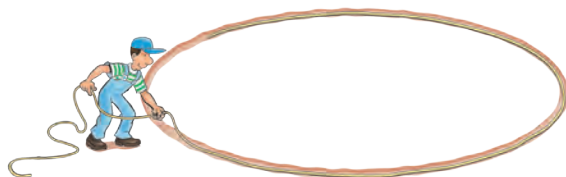
Vimos que o traçado obtido por Luís dá ideia de uma circunferência.

Após o traçado, Luís fez, com uma enxada, um sulco sobre a circunferência.

Desejando saber quantos metros de tela seriam necessários para cercar esse canteiro, ele esticou uma corda, acompanhando o sulco, e cortou-a ao final do contorno.



JOSE LUIS JUHAS



Depois, com uma trena, mediu a corda e verificou que o comprimento da circunferência era de 18,84 m. Desse modo, concluiu que seriam necessários aproximadamente 19 m de tela.



JOSE LUIS JUHAS

Considerando que a distância entre as duas hastes era de 3 m, podemos dizer que ele traçou uma circunferência de 3 m de raio, ou seja, de 6 m de diâmetro.

Observe outro exemplo.

Para encontrar o comprimento da circunferência de um pneu de bicicleta e a medida de seu diâmetro, podemos utilizar um barbante e uma fita métrica.



DELFIN MARTINS/PULSAR IMAGENS

Suponha que fosse possível contornar a circunferência abaixo com um barbante. Esticando o barbante, ele teria a mesma medida do segmento \overline{AB} .



NELSON MATSUDA

A medida do segmento \overline{AB} é o comprimento dessa circunferência.

A razão entre o comprimento da circunferência e a medida de seu diâmetro é um número que, na forma decimal, apresenta infinitas casas decimais não periódicas.

O avanço da tecnologia na área da informática tem validado, na prática, o que a teoria mostra: já é possível expressar esse número com milhões de casas decimais, e essa representação não apresenta nenhum período, pois trata-se de um número irracional.

Esse número irracional, que representa a razão entre o comprimento C de uma circunferência e a medida D de seu diâmetro, é representado pela letra grega π (lemos: pi).

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi \text{ ou } \frac{C}{D} = \pi$$

Veja a representação decimal desse número com suas primeiras oito casas decimais:

3,14159265

Como a medida D do diâmetro de uma circunferência é o dobro da medida r de seu raio, podemos escrever:

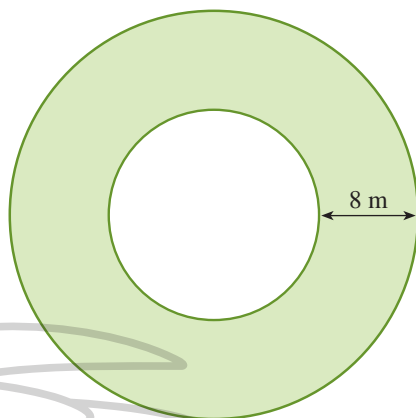
$$\frac{C}{2r} = \pi \text{ ou } C = 2\pi r$$

Veja que, no exemplo da página anterior, é possível chegar a um valor aproximado para π , pois o comprimento da circunferência do canteiro, dividido pela medida de seu diâmetro, é: $18,84 : 6 = 3,14$

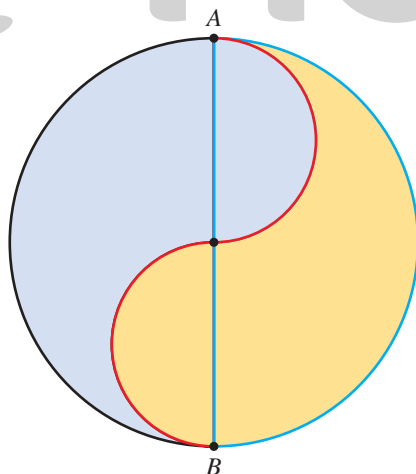
Que tal fazer uma experiência? Determine o comprimento da circunferência do pneu de uma bicicleta e a medida do diâmetro dessa circunferência. Calcule a razão entre o comprimento da circunferência do pneu e a medida de seu diâmetro. A que número você chegou?

Espera-se que os alunos encontrem valores próximos a 3,14.

- 8 Uma roda de bicicleta tem 40 cm de raio. Calcule o comprimento da circunferência dessa roda, considerando $\pi = 3,14$. **251,20 cm**
- 9 Uma pista circular tem 8 m de largura. O comprimento de sua margem interna é 1.570 m. Determine o comprimento de sua margem externa, considerando $\pi = 3,14$. **1.620,24 m**



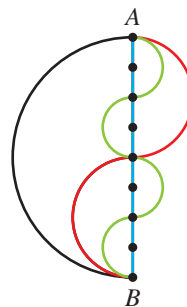
- 10 Marina e Paula estão na posição *A* de uma praça circular de 50 m de raio. Elas caminham em direção à posição *B*. Marina caminha segundo o traçado preto, e Paula, segundo o traçado vermelho.



Considerando $\pi = 3,14$, faça o que se pede.

- a) Sem fazer nenhum cálculo, determine quem andou a maior distância e justifique sua resposta. **resposta pessoal**
- b) Calcule quantos metros cada uma andou e verifique se você acertou o item anterior. **As duas andaram 157 m.**

- c) Agora, veja o trajeto feito por Andréa, conforme o traçado verde.

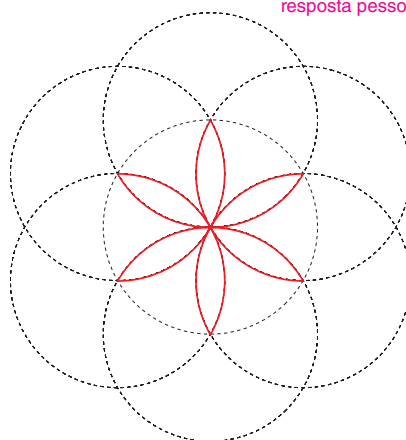


Sem fazer nenhum cálculo, é possível dizer que a distância percorrida por Andréa é maior ou menor do que as distâncias percorridas por Marina e Paula? **resposta pessoal**

- d) Calcule quantos metros Andréa andou e verifique se você acertou o item anterior. **157 m**
- e) Imagine que você caminhasse de *A* para *B*, fazendo um caminho sinuoso como o de Paula e o de Andréa; porém, percorrendo oito semicírculos, cada uma delas com diâmetro de mesmo tamanho que o raio das semicírculos percorridas por Andréa. Quantos metros você andaria? **Espera-se que o aluno conclua que caminharia 157 m.**

- 11 Reúna-se com um colega para fazer algumas estimativas.

- a) Desenhem o contorno de uma moeda de 1 real. Estimem o comprimento da circunferência desenhada, em centímetro, e tracem um segmento com esse comprimento. **≈ 8 cm**
- b) Estimem o comprimento do traçado vermelho da figura abaixo, em centímetro. Expliquem como fizeram essa estimativa. **resposta pessoal; ≈ 16 cm**



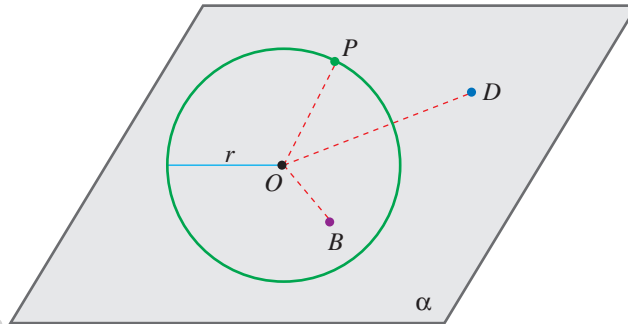
2 Posições relativas

Posições relativas de um ponto em relação a uma circunferência

Se uma circunferência está contida em um plano α , então um ponto qualquer de α pode ser interno, externo ou pertencente à circunferência.

- Se a distância de um ponto ao centro de uma circunferência é maior do que a medida do raio dessa circunferência, dizemos que esse ponto é **externo** a ela.

Na figura abaixo, $OD > r$; logo, o ponto D é externo à circunferência.



- Se a distância de um ponto ao centro de uma circunferência é menor do que a medida do raio dessa circunferência, dizemos que esse ponto é **interno** a ela.

Na figura acima, $OB < r$; logo, o ponto B é interno à circunferência.

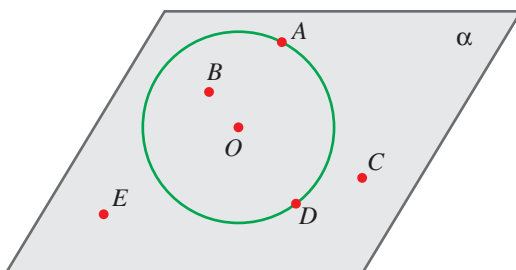
- Se a distância de um ponto ao centro de uma circunferência é igual à medida do raio dessa circunferência, dizemos que esse ponto **pertence** a ela.

Na figura acima, $OP = r$; logo, o ponto P pertence à circunferência.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 12 Observe a figura abaixo.



Agora, escreva os pontos:

- a) internos à circunferência; B e O

- b) externos à circunferência; C e E
c) pertencentes à circunferência. A e D

- 13 Estabeleça uma relação de igualdade ou de desigualdade entre as medidas dos segmentos \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} , com o raio de medida r da circunferência do exercício anterior.

$$OA = r, OB < r, OC > r$$

- 14 Com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência de centro O . Marque sobre ela dois pontos distintos, M e N , não colineares com o ponto O . Como você classifica, quanto aos lados, o triângulo MON ? **triângulo isósceles**

15. a) Cristina está na região interna à circunferência e Rosana, na externa.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

15 No chão do pátio da escola onde Cristina estuda, há o desenho de uma circunferência que tem 6 m de diâmetro. Certo dia, Cristina estava a 2 m do centro dessa circunferência, e sua amiga Rosana, a 7 m.

- Qual é a posição de Cristina e de Rosana em relação à circunferência?
- Determine a distância entre elas, sabendo que Cristina, Rosana e o centro dessa circunferência estão sobre uma mesma reta.

5 m ou 9 m

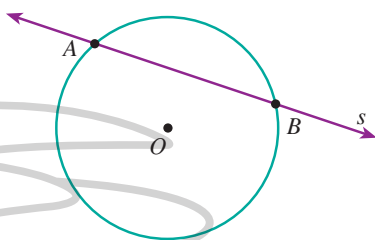
16 Com um compasso, trace uma circunferência de centro O e marque sobre ela dois pontos distintos, A e B , não colineares com o ponto O . Construa o triângulo AOB e trace a bissetriz OD do ângulo $A\hat{O}B$, em que D seja ponto de \overline{AB} .

- Como são as medidas dos ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{A}B$? *iguais*
- Como são as medidas dos segmentos \overline{AD} e \overline{BD} ? *iguais*
- Quanto aos ângulos, como se classifica o triângulo ODB ? *triângulo retângulo*

Posições relativas de uma reta em relação a uma circunferência

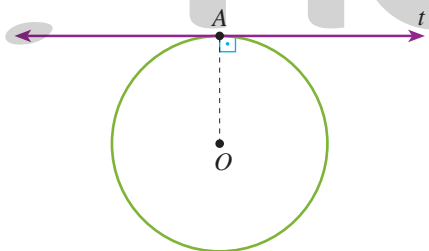
Em relação a uma circunferência, uma reta pode ser secante, tangente ou exterior.

- Secante:** quando tem dois pontos em comum com a circunferência.



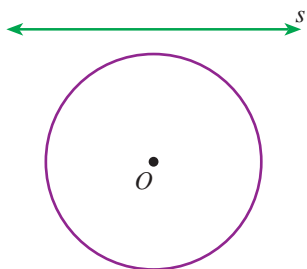
Na figura ao lado, a reta s é secante à circunferência.

- Tangente:** quando tem apenas um ponto em comum com a circunferência.



Na figura ao lado, a reta t é tangente à circunferência e A é o ponto de tangência.

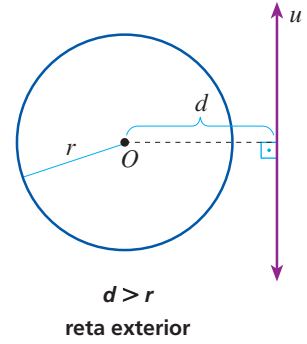
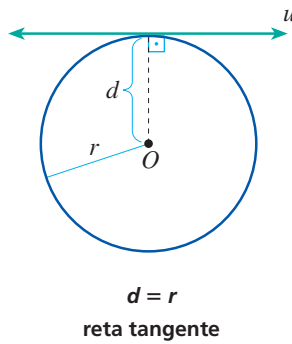
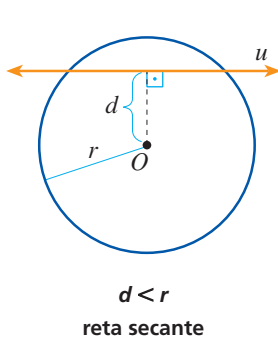
- Exterior (ou externa):** quando não tem nenhum ponto em comum com a circunferência.



Na figura ao lado, a reta s é exterior à circunferência.

Representando por d a distância do centro à reta e por r a medida do raio, temos:

NELSON MATSUDA



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

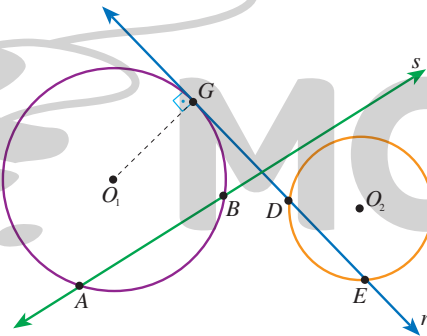
OBSERVAÇÃO

- ▶ Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado pelo ponto de tangência.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Observe a figura abaixo.

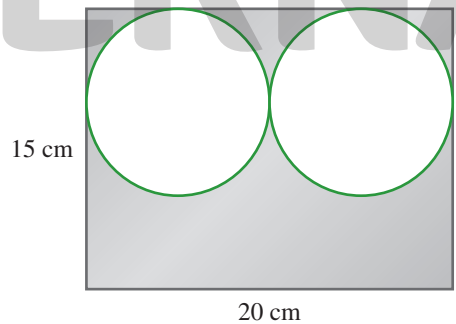


Agora, classifique:

- a) a reta r em relação à circunferência de centro O_1 ; **tangente**
 - b) a reta r em relação à circunferência de centro O_2 ; **secante**
 - c) a reta s em relação à circunferência de centro O_1 ; **secante**
 - d) a reta s em relação à circunferência de centro O_2 ; **exterior**
- 18** Com o auxílio de régua e compasso, trace a circunferência de raio r e a reta s cuja distância até o centro da circunferência é d nos casos seguintes. Depois, classifique a reta s em relação à circunferência.
- a) $r = 1,5$ cm; $d = 1$ cm **secante**
 - b) $r = 1,5$ cm; $d = 1,5$ cm **tangente**
 - c) $r = 1,5$ cm; $d = 2$ cm **exterior**

19 Reúna-se com um colega e depois respondam às questões.

Uma metalúrgica produziu uma placa retangular de alumínio de dimensões 20 cm \times 15 cm. Os operários recortaram dois círculos dessa placa, como mostra a figura abaixo.



- a) Com a sobra da placa, os operários recortaram outros quatro círculos idênticos e com raios de maior medida possível. Qual é a medida do raio desses círculos? **2,5 cm**
- b) Considerando os círculos do item a, determine quantas placas serão necessárias para obter 120 desses círculos. **10 placas**
- c) Se quiséssemos obter, com essas placas, novos círculos de raios cujas medidas fossem metade dos círculos do item a, quantas placas seriam necessárias para obter 48 desses círculos? **1 placa**

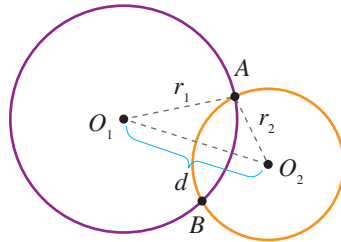
NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Posições relativas de duas circunferências

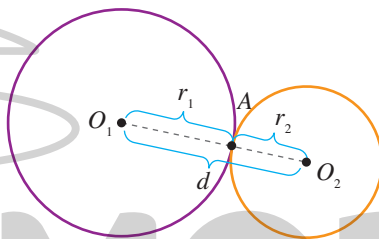
Vamos considerar a circunferência de centro O_1 e raio de medida r_1 e a circunferência de centro O_2 e raio de medida r_2 , com $r_1 > r_2$. Além disso, vamos indicar por d a distância entre os centros O_1 e O_2 . De acordo com a posição relativa que apresentam, as circunferências podem ser secantes, tangentes exteriores, tangentes interiores, externas ou internas.

- **Secantes:** quando têm dois pontos comuns, e a distância entre seus centros é menor que a soma das medidas de seus raios e maior que a diferença entre elas.



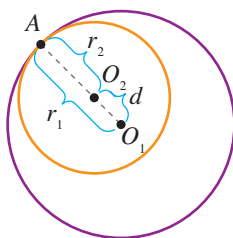
$$d < r_1 + r_2 \text{ e } d > r_1 - r_2$$

- **Tangentes exteriores:** quando têm um só ponto em comum, e a distância entre seus centros é igual à soma das medidas de seus raios.



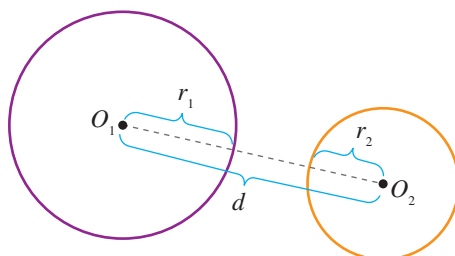
$$d = r_1 + r_2$$

- **Tangentes interiores:** quando têm um só ponto em comum, e a distância entre seus centros é igual à diferença entre as medidas de seus raios.



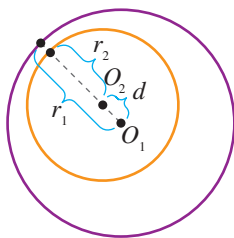
$$d = r_1 - r_2$$

- **Externas:** quando não têm ponto em comum, e a distância entre seus centros é maior que a soma das medidas de seus raios.



$$d > r_1 + r_2$$

- **Internas:** quando não têm ponto em comum, e a distância entre seus centros é menor que a diferença entre as medidas de seus raios.



$$d < r_1 - r_2$$

Veja um exemplo.

Considere duas circunferências, uma de raio com medida $r_1 = 5$ cm e outra de raio com medida $r_2 = 3$ cm. Indicando por d a distância entre os centros dessas circunferências, vamos determinar a posição relativa das circunferências nos seguintes casos:

- | | | |
|----------------|---------------|---------------|
| a) $d = 10$ cm | c) $d = 2$ cm | e) $d = 4$ cm |
| b) $d = 8$ cm | d) $d = 1$ cm | |

Calculamos a soma e a diferença entre as medidas dos raios.

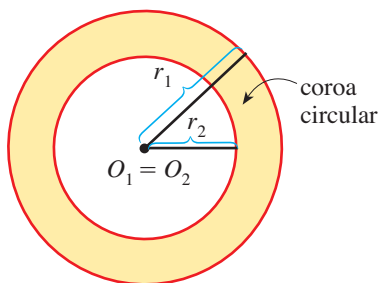
$$r_1 + r_2 = 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$r_1 - r_2 = 5 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

- a) $10 > 8$ ($d > r_1 + r_2$) → As circunferências são externas.
- b) $8 = 8$ ($d = r_1 + r_2$) → As circunferências são tangentes exteriores.
- c) $2 = 2$ ($d = r_1 - r_2$) → As circunferências são tangentes interiores.
- d) $1 < 2$ ($d < r_1 - r_2$) → As circunferências são internas.
- e) $4 > 2$ e $4 < 8$ ($d > r_1 - r_2$ e $d < r_1 + r_2$) → As circunferências são secantes.

► Circunferências concêntricas

Um caso particular de circunferências internas é aquele em que ambas têm o mesmo centro. Elas são chamadas de **circunferências concêntricas**, e a parte do plano compreendida entre elas recebe o nome de **coroa circular**.

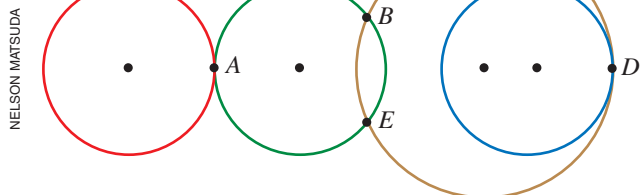


Os alto-falantes, como os representados na foto ao lado, dão ideia de circunferências concêntricas.



20 Dê a posição relativa das circunferências:

- a) vermelha e verde; *tangentes exteriores*
- b) vermelha e marrom; *externas*
- c) verde e marrom; *secantes*
- d) marrom e azul. *tangentes interiores*



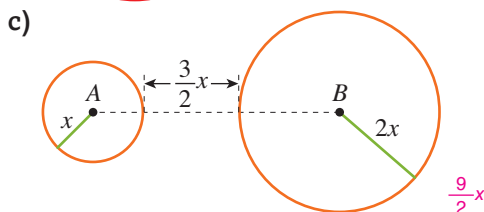
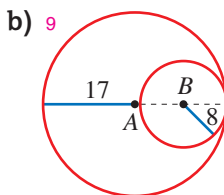
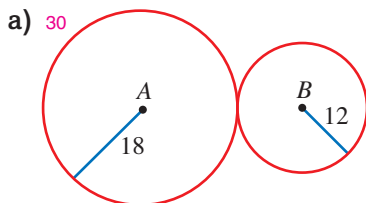
21 Na figura abaixo, estão desenhados os aros olímpicos que representam a união dos cinco continentes.



Dê a posição relativa das circunferências das coroas circulares representadas pelas cores:

- a) azul e amarela; *secantes*
- b) verde e vermelha; *secantes*
- c) preta e vermelha. *externas*

22 Determine a distância entre os centros das seguintes circunferências:



23 Indicando as medidas dos raios de duas circunferências por r_1 e r_2 e a distância entre os centros por d , identifique a posição delas quando:

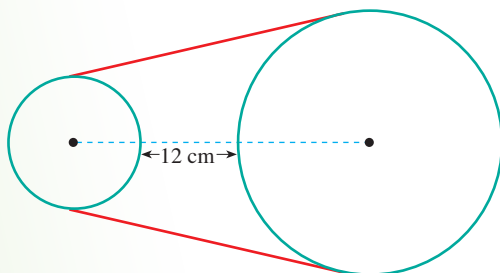
- a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 9$ cm; *tangentes exteriores*
- b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 10$ cm; *externas*
- c) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 2$ cm; *tangentes interiores*
- d) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 8$ cm; *secantes*
- e) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 1$ cm; *internas*
- f) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 0$. *concêntricas*

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

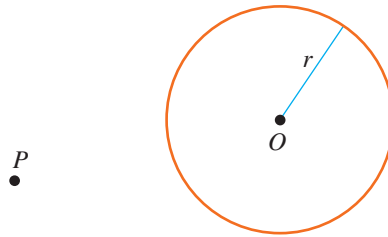
A figura abaixo representa duas polias. Sabendo que a distância entre seus centros é 36 cm e que a medida do raio de uma é o dobro da medida do raio da outra, determine a medida do raio de cada uma.

8 cm e 16 cm



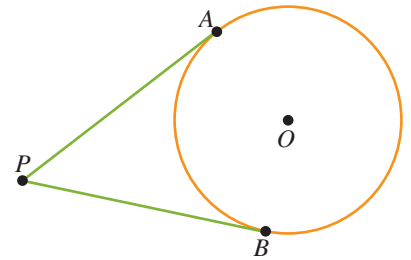
3 Propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência

Vamos considerar a circunferência de centro O e raio de medida r e um ponto P externo a ela.



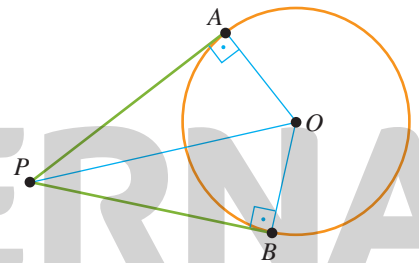
Vamos traçar por P os segmentos tangentes \overline{PA} e \overline{PB} .

Lembrando que, se a reta \overline{PA} é tangente à circunferência em A , então ela é perpendicular ao raio \overline{OA} . Do mesmo modo, a reta \overline{PB} é perpendicular ao raio \overline{OB} .



Com a régua, unimos os pontos A, B e P ao centro O , obtendo os triângulos retângulos PAO e PBO . Como esses triângulos são congruentes pelo caso CH (cateto-hipotenusa), temos:

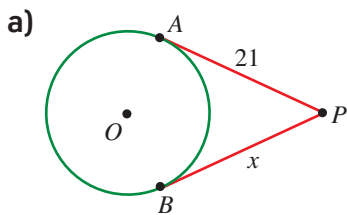
$$\overline{PA} \cong \overline{PB}$$



Os segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são congruentes.

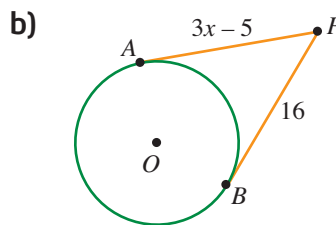
Veja os exemplos a seguir.

Vamos calcular o valor de x em cada uma das figuras abaixo.



Como $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, temos:

$$x = 21$$

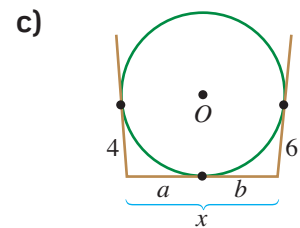


Como $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, temos:

$$3x - 5 = 16$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$



Como $a = 4$ e $b = 6$, temos:

$$x = 4 + 6$$

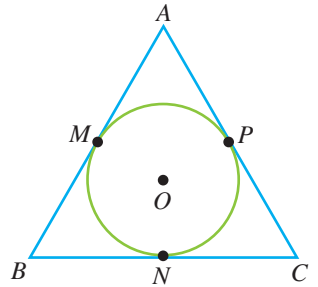
$$x = 10$$

4 Triângulo e quadrilátero circunscritos a uma circunferência

Triângulo circunscrito

Um triângulo é **circunscrito** a uma circunferência quando seus lados são tangentes a ela. Nesse caso, dizemos que a circunferência é **inscrita** no triângulo.

Na figura ao lado, o triângulo ABC é circunscrito à circunferência. Os pontos M , N e P são chamados de **pontos de tangência**.



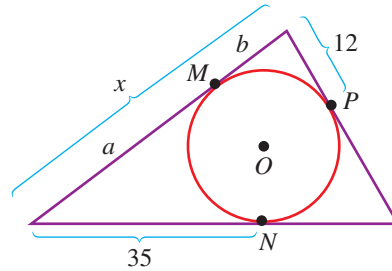
Veja um exemplo.

Vamos calcular o valor de x na figura ao lado.

Como $a = 35$ e $b = 12$, temos:

$$x = 35 + 12$$

$$x = 47$$

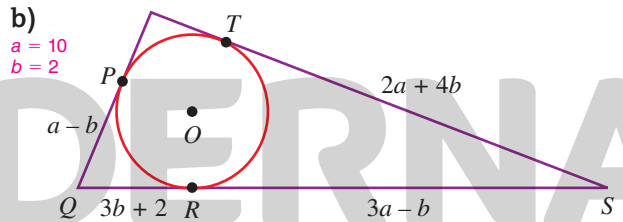
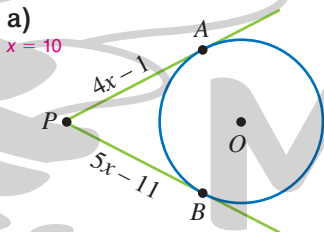


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

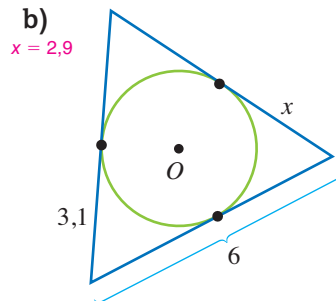
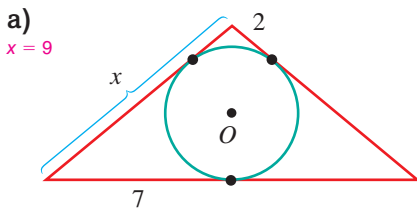
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

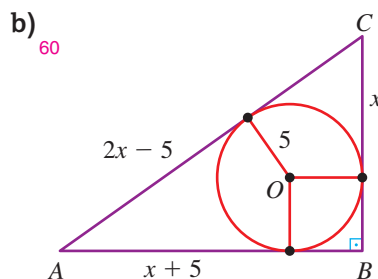
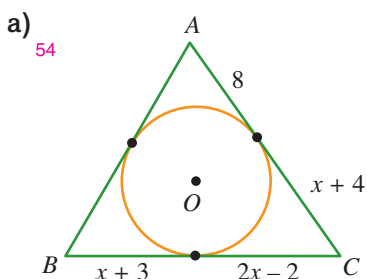
24 Calcule os valores de x , a e b .



25 Determine o valor de x em cada caso.



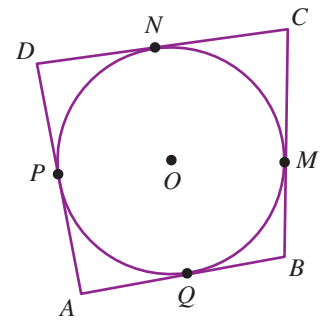
26 Calcule o perímetro de cada triângulo.



► Quadrilátero circunscrito

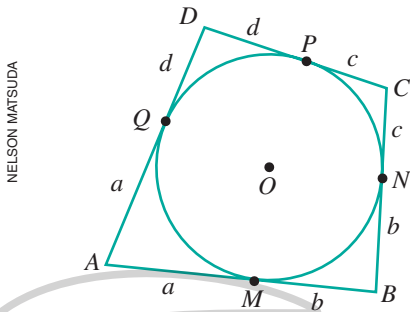
Um quadrilátero é **circunscrito** a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes a ela. Nesse caso, dizemos que a circunferência é **inscrita** no quadrilátero.

Na figura ao lado, o quadrilátero $ABCD$ é circunscrito à circunferência.



NELSON MATSUDA

Considere a figura abaixo, que representa o quadrilátero $ABCD$ circunscrito à circunferência. Vamos calcular a soma das medidas dos lados opostos.



NELSON MATSUDA

$$\begin{cases} AB + CD = a + b + c + d \\ BC + AD = b + c + a + d \end{cases}$$

Logo: $AB + CD = BC + AD$

Em todo quadrilátero circunscrito a uma circunferência, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.

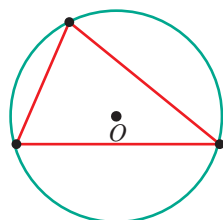
A propriedade recíproca, que não será demonstrada, também vale.

Se as somas das medidas dos lados opostos de um quadrilátero são iguais, então ele é circunscrito a uma circunferência.

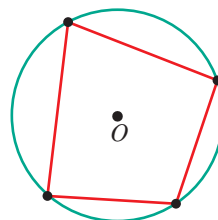
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

OBSERVAÇÃO

- Assim como triângulos e quadriláteros podem ser circunscritos a uma circunferência, triângulos e quadriláteros também podem ser inscritos em uma circunferência. Nesses casos, os vértices do triângulo (ou do quadrilátero) são pontos da circunferência. Observe os exemplos abaixo.



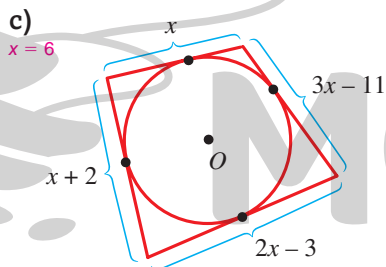
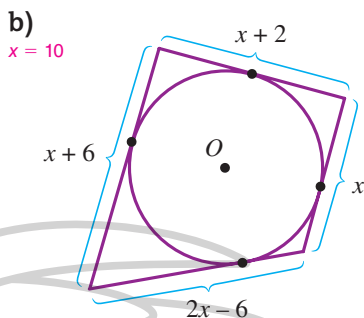
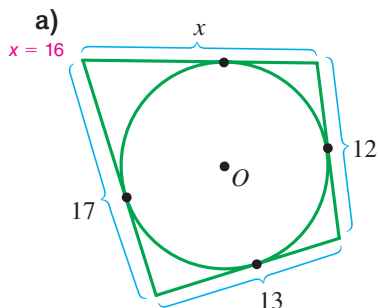
triângulo inscrito



quadrilátero inscrito

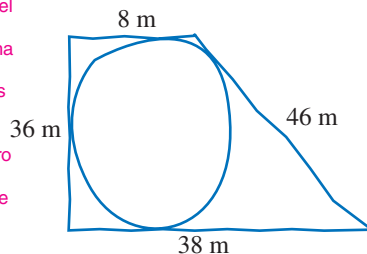
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

27 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.



28 José fez um esquema à mão livre de como gostaria que fosse construída uma piscina circular no terreno dele. Observe.

Não. Só é possível circunscrever um quadrilátero a uma circunferência quando as somas das medidas dos lados opostos desse quadrilátero forem iguais, e isso não acontece nessa situação.



É possível construir a piscina de acordo com o esquema que José fez? Justifique sua resposta.

29 As medidas dos lados de um quadrilátero $ABCD$ são $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 6$ cm e $AD = 5$ cm. Esse quadrilátero pode ser circunscrito a uma circunferência? Por quê?

não; porque $AB + CD \neq BC + AD$

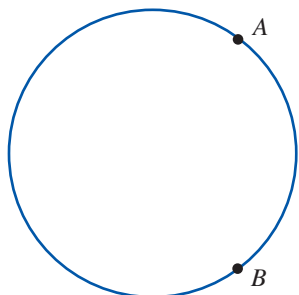
30 Um trapézio isósceles é circunscrito a uma circunferência, e suas bases medem 11 cm e 7 cm. Quanto mede cada um dos outros dois lados? 9 cm

31 Um quadrilátero $ABCD$ é circunscrito a uma circunferência. As medidas de seus lados são $AD = 12$ cm, $DC = 9$ cm, $BC = x + 7$ e $AB = 2x + 1$, com x em centímetro. Calcule o perímetro desse quadrilátero. 56 cm

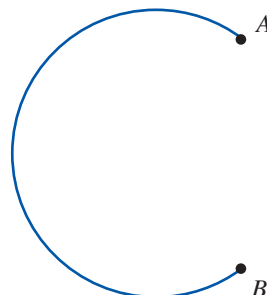
5 Arcos de circunferência e ângulo central

Arco de circunferência

Dois pontos distintos de uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de **arco**.

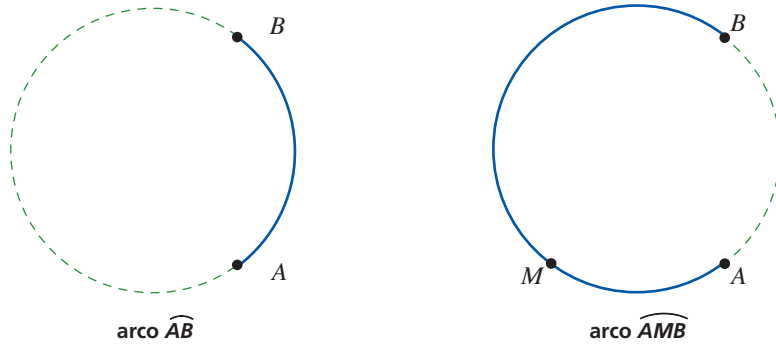


arco menor

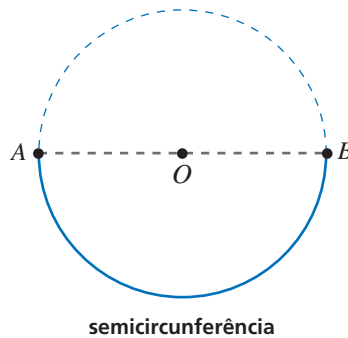


arco maior

Como existem dois arcos de extremos A e B , para diferenciar um do outro, o menor será indicado por \widehat{AB} e, para indicar o maior, usaremos um terceiro ponto auxiliar. Veja as figuras.



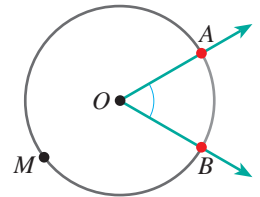
Quando os extremos A e B coincidirem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos será chamado de **semicircunferência**.



► Ângulo central

Ângulo central é todo ângulo que tem seu vértice no centro de uma circunferência.

Na figura ao lado, \widehat{AOB} é um ângulo central, e \widehat{AB} , o arco correspondente a esse ângulo.



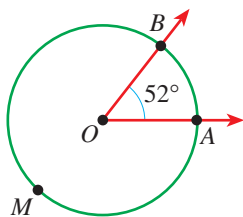
Dividindo uma circunferência em 360 partes de mesmo tamanho, determinamos 360 ângulos centrais, cada um deles com a **medida** de 1 grau (1°). A cada um desses ângulos centrais corresponde um arco cuja medida angular é 1 grau (1°). Assim, podemos afirmar que **1° corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência**, ou seja, a circunferência tem 360° .

A medida angular de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

O sistema de medida de arcos é sexagesimal; portanto, são necessários 60 minutos ($60'$) para obter 1° e 60 segundos ($60''$) para obter $1'$.

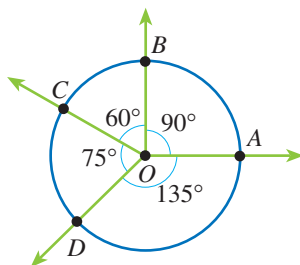
Veja alguns exemplos.

a)



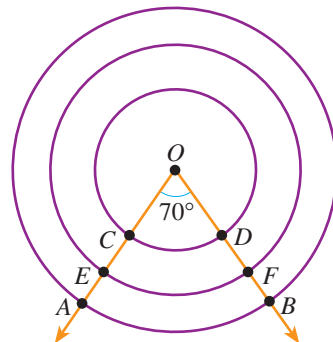
$$\begin{aligned} m(\widehat{AB}) &= 52^\circ \\ m(\widehat{AMB}) &= 360^\circ - 52^\circ \\ m(\widehat{AMB}) &= 308^\circ \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} m(\widehat{AB}) &= 90^\circ \\ m(\widehat{BC}) &= 60^\circ \\ m(\widehat{CD}) &= 75^\circ \\ m(\widehat{AD}) &= 135^\circ \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} m(\widehat{AB}) &= 70^\circ \\ m(\widehat{CD}) &= 70^\circ \\ m(\widehat{EF}) &= 70^\circ \end{aligned}$$

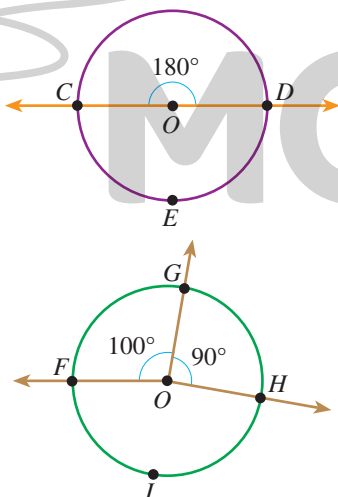
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Observe, na figura do item **c**, que o fato de dois ou mais arcos terem a mesma medida angular não significa que seus comprimentos sejam iguais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Observe as figuras abaixo.



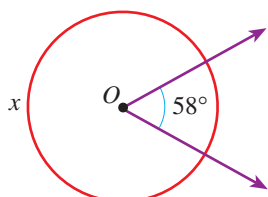
Agora, determine:

- a) $m(\widehat{CD})$ 180° c) $m(\widehat{HGF})$ 190°
 b) $m(\widehat{CED})$ 180° d) $m(\widehat{FIH})$ 170°

33 Determine x e y nas figuras a seguir.

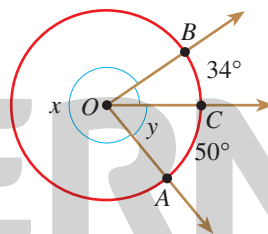
a)

$$x = 302^\circ$$

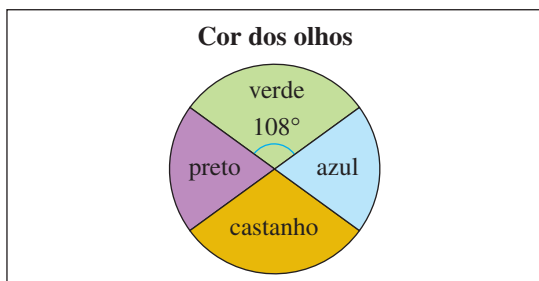


b)

$$\begin{aligned} x &= 276^\circ; \\ y &= 50^\circ \end{aligned}$$



34 Foi realizada uma pesquisa sobre a cor dos olhos de 1.200 associados do Clube da Boa Viagem. Os resultados foram registrados no gráfico de setores abaixo.



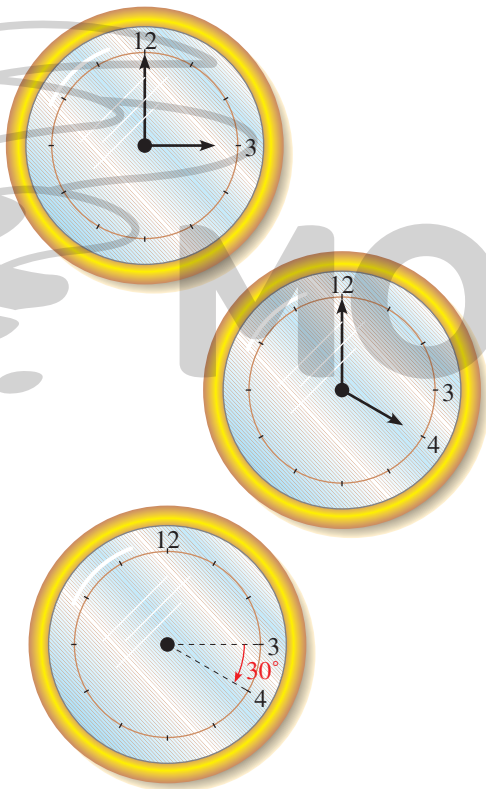
Dados obtidos pelo Clube da Boa Viagem.

Agora, responda.

- a) Qual é a medida do ângulo central de cada setor? **castanho: 108°; azul: 72°; verde: 108°; preto: 72°**
 b) Qual é a porcentagem de pessoas correspondente a cada setor? **castanho: 30%; azul: 20%; verde: 30%; preto: 20%**
 c) Quais são as cores de olhos que predominam nesse grupo de pessoas? **castanho e verde**

Medida de arcos de uma circunferência

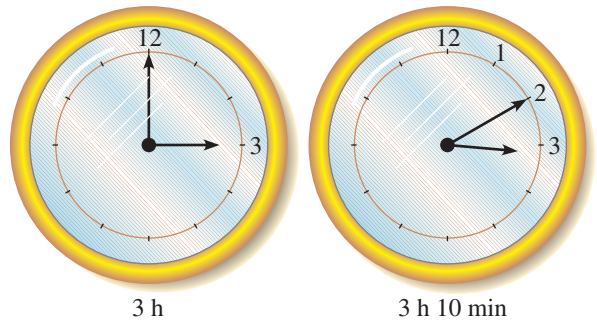
Nos relógios com ponteiros, a circunferência está dividida em 12 partes iguais (horas), e cada uma dessas 12 partes está dividida em 5 partes iguais (minutos). Portanto, nesses relógios aparecem, no mínimo, dois ponteiros: o que indica as horas e o que indica os minutos. Enquanto o ponteiro dos minutos dá uma volta completa na circunferência, isto é, descreve um arco correspondente a um ângulo central de 360° , o ponteiro das horas descreve um arco correspondente a um ângulo central de $\frac{360^\circ}{12}$, ou seja, a um arco de 30° .



Vamos descobrir a medida do arco que o ponteiro das horas descreve em 1 minuto.

Se em 1 hora o ponteiro das horas descreve um arco de 30° , em 1 minuto descreve um arco de $\frac{30^\circ}{60}$ ou seja, um arco de $0,5^\circ$, que corresponde a $30'$.

Agora, vamos calcular o menor arco formado pelos ponteiros (horas e minutos) do relógio quando são 3 h 10 min.



Quando o relógio marca 3 h, os ponteiros determinam um arco de 90° . Em cada minuto, o ponteiro das horas se desloca $0,5^\circ$. Assim, em 10 minutos ele se desloca $10 \cdot 0,5^\circ$, ou seja, 5° .

A cada minuto, o ponteiro dos minutos se desloca 6° . Assim, em 10 minutos ele se desloca $10 \cdot 6^\circ$, ou seja, 60° .

No deslocamento do ponteiro das horas, o arco aumenta 5° e, no deslocamento do ponteiro dos minutos, diminui 60° . Assim, o arco procurado é dado por $90^\circ + 5^\circ - 60^\circ$, ou seja, é um arco de 35° .

Logo, o menor arco às 3 h 10 min mede 35° . Já aprendemos que o número irracional π é obtido pela razão:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}}$$

Assim, o comprimento de uma circunferência (C) é obtido pelo produto da medida de seu diâmetro (d) pelo número π , ou seja, $C = d \cdot \pi$. Como a medida do diâmetro de uma circunferência é igual ao dobro da medida de seu raio, temos:

$$C = 2\pi r$$

É por isso que, em um relógio, quando o ponteiro dos minutos gira 360° , sua extremidade faz um percurso de $2\pi r$, ou seja, percorre todo o comprimento da circunferência.

Nos relógios das fotos a seguir, os ponteiros têm diferentes medidas. Vamos considerar a circunferência determinada pela extremidade do ponteiro dos minutos.



WILLIAM CASEY/SHUTTERSTOCK

① comprimento do ponteiro: 14 cm



SERG SHALIMOFF/SHUTTERSTOCK

② 12,5 cm



LUCIACASAS/SHUTTERSTOCK

③ 20 cm



INXT/SHUTTERSTOCK

④ 14 cm



HATCHAPONG PALURTHAIWONG/SHUTTERSTOCK

⑤ 11,5 cm



VETASSTER/SHUTTERSTOCK

⑥ 17,25 cm



RATTANA PAPHOTO/SHUTTERSTOCK

⑦ 15,5 cm



ROBERTO CERRUTI/SHUTTERSTOCK

⑧ 12,5 cm



PANBAZIL/SHUTTERSTOCK

⑨ 22,5 cm

Quando o ponteiro dos minutos descreve um ângulo α , sua extremidade percorre um arco cujo comprimento é diretamente proporcional a α .

Assim, por exemplo, em um relógio, quando o ponteiro dos minutos gira 60° , sua extremidade percorre $\frac{1}{6}$ da circunferência, isto é, um arco de comprimento $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{6}$ ou, ainda, $\frac{\pi r}{3}$.

Observe que o relógio 1 tem ponteiro de 14 cm. Quando o ponteiro dos minutos gira 60° , sua extremidade percorre um arco de $\frac{\pi \cdot 14}{3}$ cm, ou seja, aproximadamente 14,65 cm.

Já a extremidade do ponteiro dos minutos do relógio 2, quando gira 60° , percorre um arco de $\frac{\pi \cdot 12,5}{3}$ cm, ou seja, aproximadamente 13,08 cm.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- 1 Descubra a medida do arco que o ponteiro dos minutos descreve em 1 minuto. 6°
- 2 Às 4 h os ponteiros de um relógio determinam um menor arco de 120° . A que horas eles determinarão novamente um arco de 120° quando o ponteiro dos minutos estiver no 12?
às 8 horas
- 3 Lembrando que um giro de 30° corresponde a $\frac{1}{12}$ da circunferência, determine qual é a fração da circunferência correspondente a cada giro.

a) $20^\circ \frac{1}{18}$	b) $45^\circ \frac{1}{8}$	c) $90^\circ \frac{1}{4}$
d) $180^\circ \frac{1}{2}$	e) $135^\circ \frac{3}{8}$	f) $270^\circ \frac{3}{4}$
- 4 Observe novamente os relógios da página anterior e, usando $\pi = 3,14$, calcule, em centímetro, a medida dos arcos correspondentes a um giro de:

a) 30° do ponteiro dos minutos do relógio 3; $\approx 10,47$ cm
b) 45° do ponteiro dos minutos do relógio 4; $\approx 10,99$ cm
c) 90° do ponteiro dos minutos do relógio 5; $\approx 18,06$ cm
d) 270° do ponteiro dos minutos do relógio 7; $\approx 73,00$ cm
e) 180° do ponteiro dos minutos do relógio 8. $\approx 39,25$ cm

6 Ângulo inscrito

Ângulo inscrito é todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são semirretas secantes a ela.

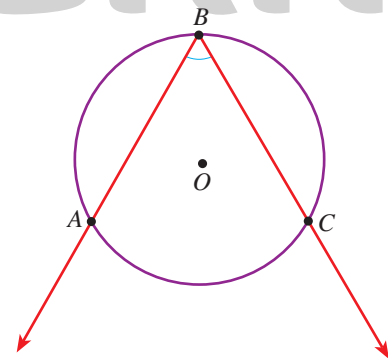
Na figura ao lado, $\hat{A}BC$ é um ângulo inscrito na circunferência.

Vamos demonstrar o seguinte teorema:

A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida angular (em grau) do arco compreendido por seus lados.

Hipótese $\{ \hat{A}BC$ é ângulo inscrito

Tese $\left\{ \begin{array}{l} m(\hat{A}BC) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} \end{array} \right.$



Demonstração

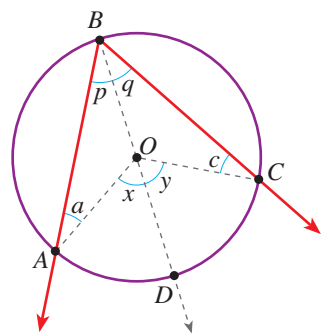
Construção auxiliar: traçamos \overline{BD} passando pelo centro O ; traçamos também \overline{OA} e \overline{OC} . Assim, temos:

- ① $x = a + p$ e $y = c + q$ (ângulos externos de um triângulo)
- ② $a = p$ e $c = q$ ($\triangle ABO$ e $\triangle CBO$ são triângulos isósceles)
- ③ $x = 2p$ e $y = 2q$ (substituindo a por p e c por q em ①)
- ④ $x + y = 2p + 2q$ (somando membro a membro)
- ⑤ $x + y = 2(p + q)$, ou seja, $p + q = \frac{x + y}{2}$

⑥ $x = m(\widehat{AD})$ e $y = m(\widehat{DC})$ (medida do ângulo central)

Como $p + q = m(\widehat{ABC})$ (por construção) e $x + y = m(\widehat{ADC})$,

$$\text{então } m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{ADC})}{2}$$



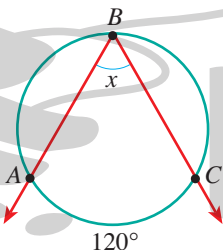
NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

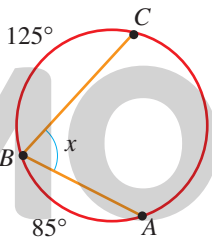
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35 Determine, em grau, o valor de x nas figuras.

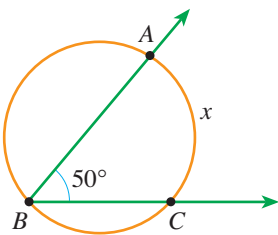
a) $x = 60^\circ$



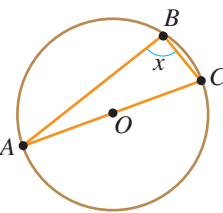
d) $x = 75^\circ$



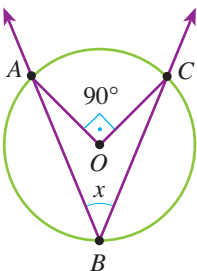
b) $x = 100^\circ$



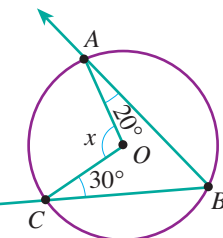
e) $x = 90^\circ$



c) $x = 45^\circ$

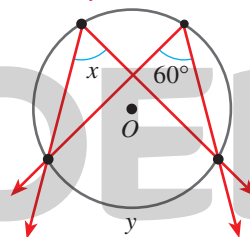


f) $x = 100^\circ$

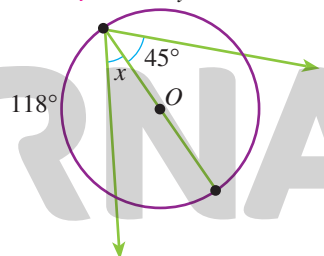


36 Observe as figuras e determine o valor de x e de y .

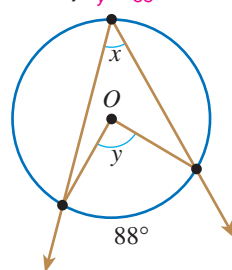
a) $x = 60^\circ$;
 $y = 120^\circ$



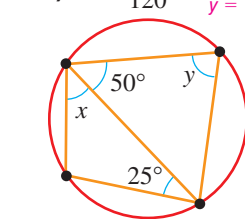
d) $x = 31^\circ$;
 $y = 90^\circ$



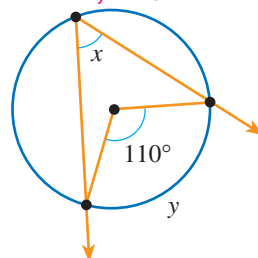
b) $x = 44^\circ$;
 $y = 88^\circ$



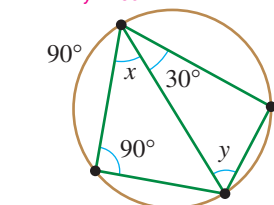
e) $x = 45^\circ$;
 $y = 70^\circ$



c) $x = 55^\circ$;
 $y = 110^\circ$



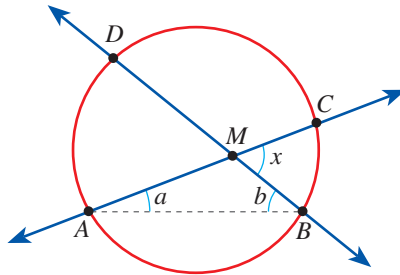
f) $x = 45^\circ$;
 $y = 60^\circ$



7 Medidas de ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência

Já estudamos o ângulo central cujo vértice coincide com o centro da circunferência. Agora, vamos estudar o caso em que o vértice pertence ao interior da circunferência.

Considere a figura abaixo, em que M é um ponto interno à circunferência e x é a medida do ângulo $B\hat{M}C$.



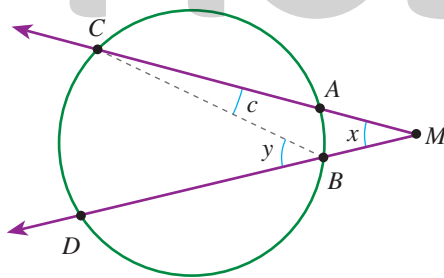
Vamos provar que: $x = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD})}{2}$

Traçando o segmento \overline{AB} , obtemos o triângulo AMB . Como x é a medida de um ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de medidas a e b , temos: $x = a + b$

Como $a = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$ e $b = \frac{m(\widehat{AD})}{2}$, pois \hat{a} e \hat{b} são ângulos inscritos, obtemos:

$$x = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD})}{2}$$

Agora, observe esta outra figura, em que M é um ponto externo à circunferência e x é a medida do ângulo $A\hat{M}B$.



Vamos provar que: $x = \frac{m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})}{2}$

Traçando o segmento \overline{BC} , obtemos o triângulo BMC . Como y é a medida de um ângulo externo não adjacente aos ângulos de medidas c e x , temos: $y = c + x$ ou $x = y - c$

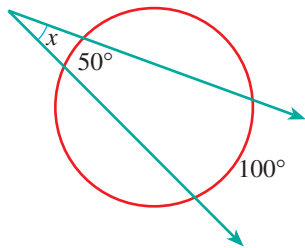
Como $y = \frac{m(\widehat{CD})}{2}$ e $c = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$, pois \hat{y} e \hat{c} são ângulos inscritos, obtemos:

$$x = \frac{m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})}{2}$$

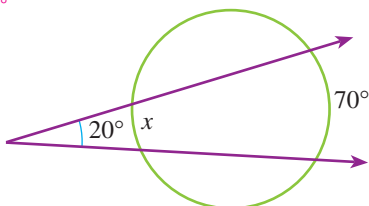


37 Calcule o valor de x nas figuras abaixo.

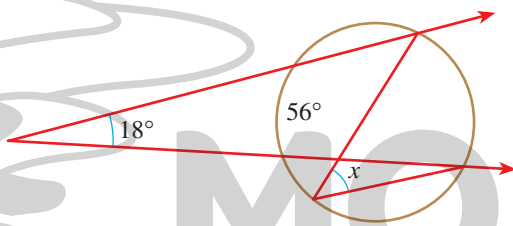
a) $x = 25^\circ$



b) $x = 30^\circ$

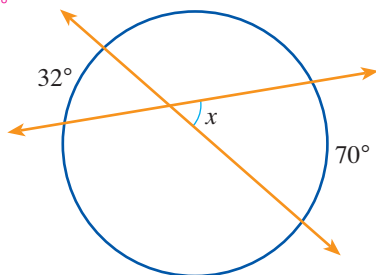


c) $x = 46^\circ$

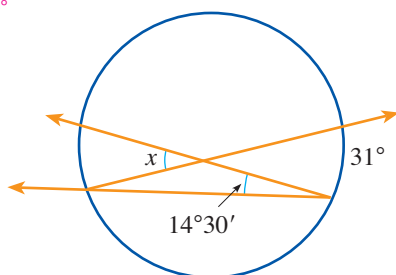


38 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

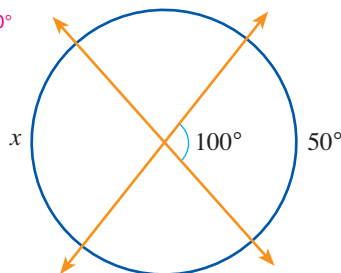
a) $x = 51^\circ$



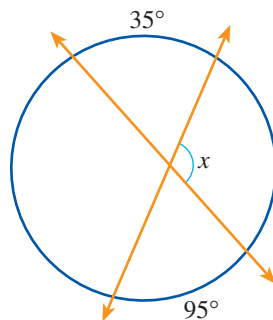
b) $x = 30^\circ$



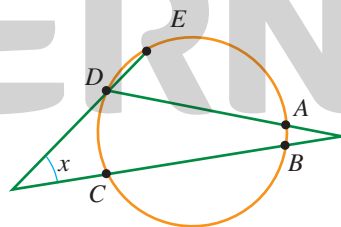
c) $x = 150^\circ$



d) $x = 115^\circ$

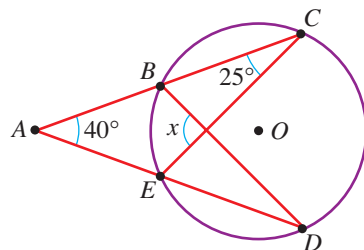


39 (Cesgranrio-RJ) Se, na figura, $m(\widehat{AB}) = 20^\circ$, $m(\widehat{BC}) = 124^\circ$, $m(\widehat{CD}) = 36^\circ$ e $m(\widehat{DE}) = 90^\circ$, então o ângulo x mede: **alternativa c**



- a) 34° . c) 37° . e) 40° .
b) $35^\circ 30'$. d) $38^\circ 30'$.

40 (Univali-SC) Considere a figura abaixo.



- A medida x do ângulo assinalado é: **alternativa a**
a) 90° . c) 80° . e) 70° .
b) 85° . d) 75° .

1. a) resposta possível: Falsa. Um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem a ela.

1 Reescreva as sentenças falsas, tornando-as verdadeiras.

a) Um polígono é circunscrito a uma circunferência se seus vértices pertencem à circunferência.

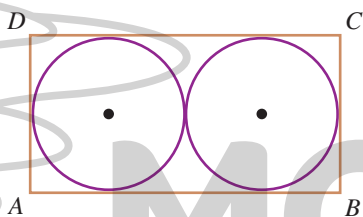
b) O centro de uma circunferência inscrita em um polígono é equidistante de seus lados.

c) As medidas dos segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são iguais. verdadeira

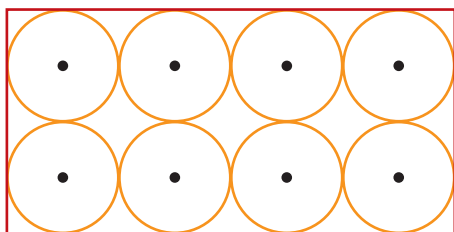
d) A medida do ângulo inscrito em uma circunferência é igual à medida do arco compreendido pelos seus lados.

resposta possível: Falsa. A medida do ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco compreendido pelos seus lados.

2 Considere que cada circunferência tem 1 cm de raio. Calcule o perímetro do retângulo ABCD, sabendo que seus lados são tangentes às circunferências e que elas são tangentes exteriores entre si. 12 cm



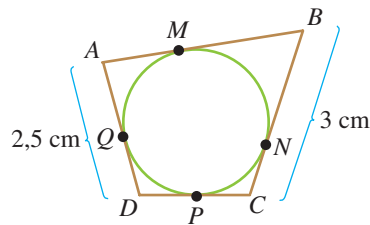
3 Sabendo que o retângulo tem 12 cm de perímetro, calcule a medida do raio de cada circunferência. 0,5 cm



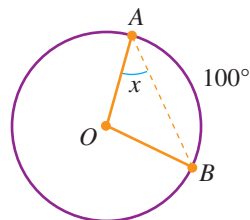
4 Dê a posição relativa das circunferências C_1 , de centro O_1 e raio de medida r_1 , e C_2 , de centro O_2 e raio de medida r_2 , nos seguintes casos:

- a) $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 4$ cm e $O_1O_2 = 6$ cm;
- b) $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 2$ cm e $O_1O_2 = 10$ cm;
- c) $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 6$ cm e $O_1O_2 = 7$ cm;
- d) $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 4$ cm e $O_1O_2 = 20$ cm;
- e) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 4$ cm e $O_1O_2 = 1$ cm.

5 Calcule o perímetro do quadrilátero circunscrito à circunferência. 11 cm

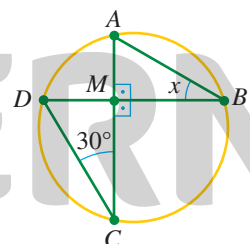


6 Na figura, o valor de x é: alternativa d



- a) 50°.
- b) 80°.
- c) 100°.
- d) 40°.

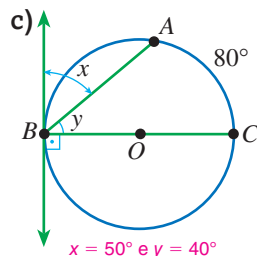
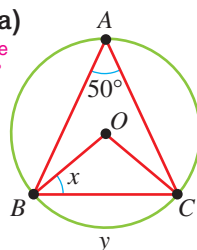
7 Na figura, o valor de x é: alternativa a



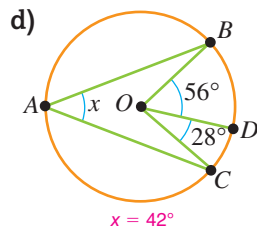
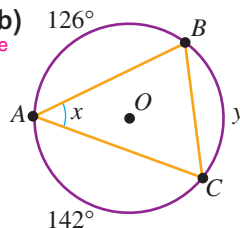
- a) 30°.
- b) 60°.
- c) 120°.
- d) 15°.

8 Calcule o valor de x e de y nas figuras a seguir.

a) $x = 40^\circ$ e $y = 100^\circ$



b) $x = 46^\circ$ e $y = 92^\circ$



Matemática na Arqueologia

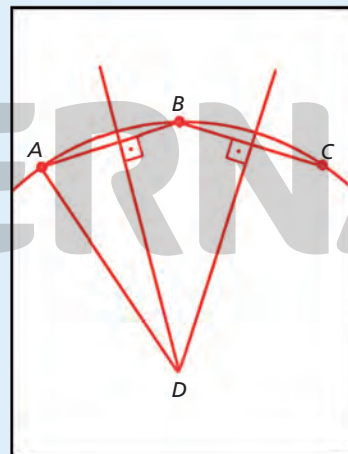
Em uma escavação de um sítio arqueológico, Daniel encontrou alguns objetos antigos, entre os quais pedaços da roda de uma carroça. Para recuperar informações a respeito desse achado arqueológico, como a medida do raio da roda, Daniel procedeu da seguinte maneira:

- riscou um arco no chão, contornando o pedaço da roda com cuidado para não danificá-lo;
- marcou os pontos A , B e C no desenho do arco e traçou os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} ;
- desenhou as mediatrizes dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , obtendo, no cruzamento delas, o ponto D , no qual estaria o centro da roda;
- depois mediu a distância AD com uma fita métrica e obteve a medida do raio da roda.



MIMIRUS/HUTTERSTOCK

Escavação arqueológica em Nessebar, Bulgária. (Foto de 2014.)



ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA

Como o desenho foi feito na terra e com instrumentos precários, Daniel obteve apenas um valor aproximado, fato que deve ser considerado pelo arqueólogo.

1. resposta possível: Não, pois o centro da circunferência é obtido pela intersecção de duas mediatrizes e, nesse caso, com os pontos A e B , ele poderia construir somente uma mediatriz.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Se Daniel tivesse marcado apenas os pontos A e B no desenho do arco, ele conseguiria encontrar a medida do raio da roda? Justifique sua resposta.
- Explique por que o procedimento de Daniel funcionou, ou seja, que propriedades matemáticas aplicadas ao desenho justificam a conclusão de que o ponto D é o centro da circunferência.
- Imagine a roda inteira, sem o centro, como se fosse um anel gigante. Como você encontraria a medida do raio? Compare sua resposta com a de um colega.

2. resposta possível: Sejam M_1 e M_2 os pontos médios de \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente. Os triângulos retângulos BM_1D e BM_2D são congruentes (caso CH), o que implica que os triângulos BCD e BAD também sejam congruentes (caso LAL). Portanto, AD , BD e CD são iguais.

Como A , B e C são pontos quaisquer do arco e estão à mesma distância do ponto D , o ponto D é o centro da circunferência.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

Exercícios complementares

Página 34

- 65°
- a) $x = 20^\circ$
b) $x = 40^\circ$
- \overline{OE} é bissetriz de \widehat{BOD} porque divide o ângulo \widehat{BOD} em dois ângulos congruentes.
50°; 40°; 40°
- $x = 20^\circ$ e $y = 95^\circ$
- alternativa a
- $x = 50^\circ$; $y = 75^\circ$
- alternativa d
- 79°

Pense mais um pouco...

Página 16

- construção de figura
- a) não; não
b) Não, pois $AD - BC = AB + CD$
 $8 - 2,5 = AB + 6$
 $AB = 5,5 - 6$
Logo, para CD valer 6 cm, AB deveria ser negativa.
c) $2,5 < AC < 8$

Página 21

As três bissetrizes cortam-se em um único ponto.

Página 33

126°

Trabalhando a informação

Páginas 24 e 25

- construção de gráfico
- exemplos de resposta:
 - No inverno, a maior parte dos turistas viaja em família e a menor parte é para participar de eventos.
 - Nas duas épocas pesquisadas, há uma porcentagem parecida de turistas com mais de 50 anos.

CAPÍTULO 2

Exercícios complementares

Página 59

- a) Falsa, -1 não é natural.
b) Falsa, $\frac{1}{2}$ não é número inteiro.
- 10
- a) $2,\overline{7}$
b) $\frac{46}{81}$
- $(2,2)^2 = 4,84$
- 80
- 70
- 315
- 60,8 m
- alternativa b
- alternativa b
- a) 13 m
b) racional
- a) $\sqrt{40}$ cm
b) irracional
c) 6,3 cm
- $\sqrt{26}$
- construção de figura
- 156,2 m; 220 m
- 14,6 m

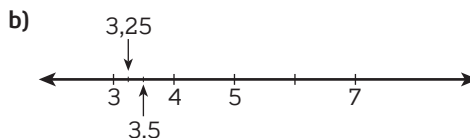
Pense mais um pouco...

Página 36

- 6 maneiras
- 16 maneiras
- 5.040 possibilidades ($10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.400$)

Página 39

- a) • $a = 5$; • $b = 4$; • $c = 3,5$; • $d = 3,25$.



- c) sim
d) sim
- Entre dois números racionais quaisquer existem infinitos números racionais.

Página 43

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{13}{8}$$

■ Para saber mais

Páginas 52, 53 e 54

- 36 e 64
• 100
• $100 = 36 + 64$
- $r^2 = s^2 + t^2$
- $x = \sqrt{10}$; $y = \sqrt{20}$

■ Trabalhando a informação

Páginas 56 e 57

- 2010; 1990
- Sim, 1998
- construção de gráfico

■ Diversificando

Página 60

Jogo do enfileirando

- A menina, pois colocou os cinco números na ordem certa, como pedia a carta de açaõ.
- respostas pessoais

CAPÍTULO 3

■ Exercícios complementares

Páginas 89, 90 e 91

- a) $4x$ b) x^2 c) $\frac{7}{18}x^2$
- a) $24y$ b) $20y^2$ c) $7y^2$
- a) $-11x$ b) $-6y$ c) $12ab$ d) $15xy$
- a) $2a$ b) $-y$ c) $-16a^2$ d) $-\frac{11}{12}ax$

- $\frac{17}{6}a$
- a) $6x^3$ b) $-12y^3$ c) $12x^3y^3$ d) $-15a^2b$
- a) $-5a^3$ b) $\frac{3}{4}xy^2$ c) $-6a^2b$ d) $-6,4a^2b$
- a) $9x^4y^6$ b) $8a^6b^{12}$ c) $\frac{4}{25}x^2$ d) $-0,064a^3$
- a) $27x^3$ b) $108x^3$ c) $162x^2$
- a) -5 c) $a = 2, b = 1$ e $c = 0$
b) 6
- a) $3a + 2b + 2c$ c) $7a + 5b + 2c$
b) $4a + 3b$
- a) $8a^2$ c) $-2ab$
b) $2x^2 - 6x - 1$ d) $-\frac{5}{2}a - \frac{13}{5}b$
- a) $2a + 4b$ c) $3x - 3y - xy$
b) $2x^2 - 2x + 2$
- $-9y - 5$
- $2x^2 + 4x; 9x^2 - 1,5x$
- a) $x^2 + 3x - 10$ c) $x^3 - 1$
b) $6x^2 - 10x - 4$ d) $a^4 + a$
- a) $5x^3 + 5x^2 - 60x$ c) $a^4 - 2a^2 + 1$
b) $6a^3b - 3a^2b^2 - 3ab^3$ d) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
- alternativa d
- a) $a^2 - 5ab$ c) $4x^2 + 4x + 15$
b) $3x^2 - 11x$ d) $2a^2 + 3ab - 11b^2$
- a) $3,6b + 6a$ b) $2a^2 + 0,8b^2 + ab$
- alternativa a
- a) $4a + 3$ c) $a + b$
b) $-3x^2 + 2x$
- alternativa b
- a) quociente: $x + 9$; resto: 0
b) quociente: $4x - 1$; resto: 3
c) quociente: $4x - 3$; resto: 0
- $R = 0$
- alternativa a
- $15a^3 - 26a^2 - a + 12$
- $5x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 6x - 1$
- $A = 4x^2 - 5x + 3$
- alternativa b
- $x + 3$
- a) $4x^3 + 4x^2 - 39x + 36$
b) $x^2 + 8x + 16$

- c) $x + 4$
 d) $16x^3 - 24x^2 - 36x + 54$
33. a) $(40 - 2x)^2$ c) 1.456 cm^2
 b) $(40 - 2x)^2 \cdot x$
34. $2x + 1$
35. 13
36. $x + 4$
37. 0

■ **Pense mais um pouco...**

Página 67

- a) 11; 111; 1.111; 11.111
 b) 111.111
 c) 1.111.111
 d) $x = 1.234.567$ e $y = 8$
 e) Não, pois existem infinitos pares de números x e y , tal que o valor numérico de $9x + y$ seja 11.111.111.

Página 74

- a) moldura branca: $12x^2$; moldura vermelha: $20x^2$; moldura lilás: $28x^2$; moldura cinza: $36x^2$
 b) $36x^2$
 c) $207,36 \text{ cm}^2$
 d) $44x^2$

Página 87

resposta pessoal

■ **Trabalhando a informação**

Páginas 87 e 88

- a) construção de gráfico
 b) maior: 2010; menor: 2000
 c) maior: 2000; menor: 2014
 d) Significaria que o número de cartas pessoais seria igual ao de correspondências, ou seja, todas as correspondências seriam cartas pessoais.
 e) aproximadamente 8,3 bilhões de correspondências; aproximadamente 2,5 bilhões de cartas pessoais
 f) aproximadamente 7,5 bilhões de correspondências; aproximadamente 2,2 bilhões de cartas pessoais

■ **Diversificando**

Página 92

Troca de e-mails

- a) • 132 e 231
 • 143 e 341

- 154 e 451
 - 264 e 462
- b) Cada resultado das multiplicações do item **a** tem os mesmos algarismos, mas em ordem diferente.
- c) • 385 e 583
 • 396 e 693
 • 407 e 803
- d) não

CAPÍTULO 4

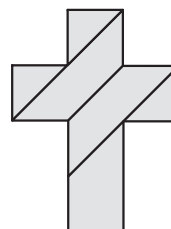
■ **Exercícios complementares**

Página 110

1. alternativa c
2. a) 18 lados c) 135 diagonais
 b) 20°
3. a) 15 lados b) 156°
4. a) 60° c) 37,8 cm
 b) 120°
5. dodecágono
6. a) 9 lados
 b) 27 diagonais
 c) 1.260°
 d) 40°
7. alternativa c
8. quadrado
9. 720°
10. 20 diagonais
11. 5 lados
12. 360°
13. 24°

■ **Pense mais um pouco...**

Página 95



NELSON MATSUJDA

Página 97

Devemos virar o 3º, o 4º e o 5º cartão, da esquerda para a direita.

Página 101

construção de gráfico; amarelo: 126°, verde: 108°, azul: 90°, vermelho: 36°

Página 104

1. suplementares
2. 24 divisores. Os divisores são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 e 360.
3. 22 polígonos regulares; todos os divisores obtidos na resposta da questão 2, exceto 180° e 360°.

Página 109

É possível concluir que:

- duas reflexões sucessivas em relação a dois eixos perpendiculares equivalem a uma rotação de 180° em um dos sentidos em torno do ponto de intersecção dessas retas (centro de rotação).
- uma rotação de 180° em sentido horário em torno de um ponto equivale a uma rotação de 180° em sentido anti-horário em torno do mesmo ponto.

■ Diversificando

Página 111

O RPG e os poliedros de Platão

1. 3 faces; 17 faces
2. Os polígonos das faces que são triângulos não têm diagonais. Uma face do cubo tem duas diagonais e uma face do dodecaedro tem cinco diagonais.
3. A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°, a do quadrado é 360° e a do pentágono é 540°. Esses polígonos são convexos, pois não possuem ângulos internos maiores que 180°.

CAPÍTULO 5

■ Exercícios complementares

Páginas 135 e 136

1. a) $9a^2 - 12ab + 4b^2$ b) $25a^2 - 49$

c) $9x^4 + 6x^2y^3 + y^6$ d) $25 + 20y - 4y^2$

2. a) $25a^2 - 81b^2$

b) $\frac{9}{4}x^4 - y^6$

3. alternativa c

4. $x^2 + 6x + 9$

5. alternativa b

6. $15x + 30$

7. 7

8. a) $a^2 - 6a$

c) $2x^2 + 18$

b) 25

d) $2b^2 - 2ab$

9. a) $2ab$

c) 64

b) b^2

d) 48

10. a) $3xy(3x + 5y)$

d) $(a - 5)^2$

b) $(y - 3)(x + 1)$

e) $(2x - 3)(x + 2y)$

c) $(a + 2b)(a - 2b)$

f) $3x(4x - 7)$

11. alternativa c

12. a) $3(x + 5)(x - 5)$

d) $(a + x)(a - x + 1)$

b) $a(a + b)(a - b)$

e) $(x + y)(x - y + 2)$

c) $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $2(x - 3)^2$

13. alternativa e

14. a) 324

b) 4

c) 36

15. a) 196

b) 40

c) 36

16. a) 960

b) 400

c) 16

17. a) $x = 0$ ou $x = -12$

d) $y = -\frac{5}{6}$ ou $y = \frac{5}{6}$

b) $x = 0$ ou $x = \frac{5}{6}$

e) $a = -\frac{3}{2}$

c) $x = \frac{15}{2}$

f) $x = -\frac{1}{3}$

18. alternativa c

19. a) $2x + y$

c) $8x + 4y$

b) construção de figura

d) $4x^2 + 4xy + y^2$

20. alternativa b

21. alternativa c

22. alternativa b

23. alternativa c

24. alternativa d

25. alternativa d

26. alternativa a

27. alternativa b

28. alternativa a

29. alternativa b

30. alternativa d

■ Pense mais um pouco...

Página 116

a) 144

c) 1.225

b) 576

d) 2.704

Página 119

- a) 841
- b) 1.444
- c) 9.801
- d) 3.249

Página 127

$$(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$$

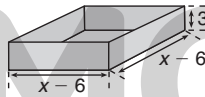
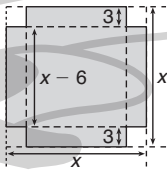
Página 131

- a) $(76 + 75) \cdot (76 - 75)$
- b) 151
- c) São iguais.
- d) $(138 + 137) \cdot (138 - 137) = 275$; são iguais.
- e) 441, pois a diferença dos quadrados de dois números consecutivos é a soma desses números.

Página 134

$$3(x - 6)^2$$

NELSON MATSUDA



■ Para saber mais

Páginas 124 e 125

- 1. 2,1
- 2. resposta possível: $0,21 \cdot 7 + 0,21 \cdot 3 = 0,21 \cdot (7 + 3) = 0,21 \cdot 10 = 2,1$
- 3. a) 300
- b) 54
- c) 12
- d) 45
- e) 38
- f) 10

■ Diversificando

Página 137

A Álgebra explica a Aritmética

- 1. a) $1 \cdot 2 \cdot 100 + 25 = 225$
- b) $4 \cdot 5 \cdot 100 + 25 = 2.025$
- c) $7 \cdot 8 \cdot 100 + 25 = 5.625$
- d) $9 \cdot 10 \cdot 100 + 25 = 9.025$

CAPÍTULO 6

■ Exercícios complementares

Páginas 169 e 170

- 1. a) falsa; resposta possível: Pois o ponto de encontro das medianas de um triângulo chama-se baricentro.
- b) verdadeira
- c) verdadeira
- d) falsa; resposta possível: Pois o lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se hipotenusa.
- e) verdadeira
- f) verdadeira
- 2. alternativa a
- 3. a) $x = 148^\circ$; $y = 106^\circ$
- b) $x = 115^\circ$; $y = 140^\circ$
- 4. 35° e 55°
- 5. alternativa e
- 6. alternativa d
- 7. alternativa c
- 8. $x = 78^\circ$ e $y = 135^\circ$
- 9. alternativa e
- 10. alternativa d
- 11. 110°
- 12. alternativa c
- 13. 500 km
- 14. alternativa c
- 15. alternativa b

■ Pense mais um pouco...

Página 143

- 1. a) 3 cm
- b) 60°
- c) um triângulo equilátero
- 2. a) 3 triângulos
- b) 30 cm, 20 cm, 15 cm; 30 cm, 20 cm, 30 cm; 30 cm, 20 cm, 45 cm

Página 147

Traçando a diagonal \overline{AC} e, em seguida, achando a mediana de cada triângulo obtido, relativa a essa diagonal, pois as quatro partes obtidas serão regiões triangulares de bases congruentes e alturas congruentes.

■ Para saber mais

Páginas 165 e 166

- a) demonstraco b) construco de figura

■ Diversificando

Páginas 171 e 172

Fractais

alternativa c

CAPÍTULO 7

■ Exercícios complementares

Páginas 188 e 189

1. a) retângulo
b) trapézio isósceles
c) trapézio retângulo
d) quadrado
2. $x = 70^\circ$
3. ABCD é um paralelogramo, porque suas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.
4. Losango, porque as diagonais são perpendiculares entre si e se cruzam nos respectivos pontos médios.
5. a) $x = 36^\circ$ b) $x = 24^\circ$
6. $55^\circ, 55^\circ, 125^\circ, 125^\circ$
7. $56^\circ, 56^\circ, 124^\circ, 124^\circ$
8. a) $x = 15^\circ$ b) $x = 50^\circ$
9. 118°
10. 13 cm
11. 80 cm
12. demonstraco
13. alternativa d
14. 20 cm e 10 cm

■ Pense mais um pouco...

Página 174

360°

Página 175

- a) construco de figura
b) $m(\hat{A}) = 140^\circ$

Página 181

demonstraco

Página 184

- a) falsa; resposta possível: Se um paralelogramo tem as diagonais congruentes, ento ele é um retângulo.
b) verdadeira
c) falsa; resposta possível: Se um paralelogramo tem as diagonais congruentes, ento ele é um retângulo.
d) verdadeira
e) verdadeira
f) verdadeira
g) falsa; resposta possível: Se um trapézio tem dois ângulos retos, ento os lados não paralelos não são congruentes.

■ Para saber mais

Páginas 186 e 187

7 m; 4,5 m; 9,5 m

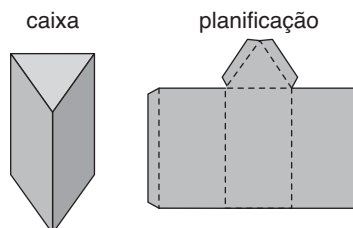
■ Diversificando

Página 190

Quadriláteros na caixa

1. três tipos: quadrado (D e F), retângulo (B, E e H) e trapézio (A, C, G e I)
2. a) 10 livros
b) 13 livros
3. 3.120 cm^3
4. resposta possível: Sim, basta imaginar um prisma de base triangular sem uma das bases.

Uma possibilidade de desenho:



NELSON MATSUDA

Palitos de sorvete

1. O retângulo de maior área é o quadrado, cujo lado é formado por 3 palitos de sorvete.
2. Sim, o triângulo terá cada lado composto de 4 palitos de sorvete.
3. o retângulo

CAPÍTULO 8

■ **Exercícios complementares**

Página 217

- (7, 5); sistema determinado
 - (-5, 1); sistema determinado
 - sistema impossível
 - sistema indeterminado
- 13 jovens
- 6 notas de R\$ 50,00 e 4 notas de R\$ 100,00
- $x = 7,5$ cm e $y = 4,5$ cm
 - 48 cm²
- $x : y = 2$
- alternativa c

■ **Pense mais um pouco...**

Página 194

$$\frac{(x+5)x - 3x}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x + 2, \text{ com } x \neq 0$$

Página 196

3 filhos; 240 m²

Página 209

Ricardo tem 15 DVDs, e Cristina, 25.

■ **Para saber mais**

Página 209

Seja:

$r \rightarrow$ a quantidade de DVDs de Ricardo
 $c \rightarrow$ a quantidade de DVDs de Cristina

Assim:

$$\begin{aligned} r + 5 &= c - 5 \\ c + 5 &= 3(r - 5) \\ \begin{cases} c = r + 10 \\ c = 3r - 15 - 5 \end{cases} \\ r + 10 &= 3r - 15 - 5 \\ r + 10 &= 3r - 20 \\ r - 3r &= -20 - 10 \\ -2r &= -30 \\ r &= 15 \end{aligned}$$

Substituindo o valor obtido para r em uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} c &= 15 + 10 \\ c &= 25 \end{aligned}$$

■ **Trabalhando a informação**

Páginas 197 e 198

- As respostas dependem do ano corrente.
- Além do título, faltam as barras correspondentes às demais perguntas feitas na pesquisa.
- É preciso estar atento aos maiores e menores valores a serem representados: 97 e 3, respectivamente. Dessa forma, deve-se buscar uma escala apropriada para que o “97” caiba na folha e o “3” fique visível.
- construção de gráfico
- resposta pessoal

Páginas 204 e 205

- curso de Comunicação; curso de Engenharia
 - É possível usar tanto os gráficos de setores como o gráfico de colunas, porém o gráfico de colunas é mais sintético e possibilita uma comparação visual mais rápida.
- construção de gráfico

■ **Diversificando**

Página 218

Onde está o erro?

- O erro está na multiplicação de ambos os membros por $\frac{1}{(a-b)}$, pois, como $a = 1$ e $b = 1$, temos $a - b = 0$, e não é possível dividir por zero.
- O erro cometido foi semelhante ao do jornal, pois, após colocar em evidência os números 3 e 4, ela cortou os membros comuns entre parênteses. Ao fazer esse corte, Fernanda dividiu por zero, o que não é possível.

CAPÍTULO 9

■ **Exercícios complementares**

Página 244

- falsa; resposta possível: Um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem a ela.
 - verdadeira

- c) verdadeira
 d) falsa; resposta possível: A medida do ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco compreendido pelos seus lados.

2. 12 cm

3. 0,5 cm

4. a) tangentes interiores d) externas
 b) tangentes exteriores e) internas
 c) secantes

5. 11 cm

6. alternativa d

7. alternativa a

8. a) $x = 40^\circ$ e $y = 100^\circ$ c) $x = 50^\circ$ e $y = 40^\circ$
 b) $x = 46^\circ$ e $y = 92^\circ$ d) $x = 42^\circ$

■ **Pense mais um pouco...**

Página 231

8 cm e 16 cm

■ **Para saber mais**

Páginas 238, 239 e 240

1. 6°

2. às 8 horas

3. a) $\frac{1}{18}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{3}{4}$

4. a) $\approx 10,47$ cm

b) $\approx 10,99$ cm

c) $\approx 18,06$ cm

d) $\approx 73,00$ cm

e) $\approx 39,25$ cm

■ **Diversificando**

Página 245

Matemática na Arqueologia

- resposta possível: Não, pois o centro da circunferência é obtido pela intersecção de duas mediatrizes e, nesse caso, com os pontos A e B, ele poderia construir somente uma mediatriz.
- resposta possível: Sejam M_1 e M_2 os pontos médios de \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente. Os triângulos retângulos BM_1D e BM_2D são congruentes (caso CH), o que implica que os triângulos BCD e BAD também sejam congruentes (caso LAL). Portanto AD , BD e CD são iguais. Como A, B e C são pontos quaisquer do arco e estão à mesma distância do ponto D, o ponto D é o centro da circunferência.
- resposta possível: Repetir o procedimento de Daniel. Contornar a roda com um barbante para obter o comprimento da circunferência e dividi-lo por 6,28 (aproximação de 2π), pois o comprimento da circunferência é igual a $2\pi r$, em que r é o raio.

SIGLAS

Cesgranrio-RJ – Fundação Cesgranrio

Esal-MG – Escola Superior de Agronomia de Lavras

Faap-SP – Fundação Armando Álvares Penteado

FAM-SP – Faculdade de Americana

FCC-SP – Fundação Carlos Chagas de São Paulo

FCM-MG – Fundação CefetMinas

Fesp-SP – Fundação Escola de Sociologia e Política de São Paulo

FGV-SP – Fundação Getúlio Vargas

Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular

Mackenzie-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

Obmep – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Puccamp-SP – Pontifícia Universidade Católica de Campinas

PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

UCSal-BA – Universidade Católica do Salvador

UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais

Ufac – Fundação Universidade Federal do Acre

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFRGS-RS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Ulbra-RS – Universidade Luterana do Brasil

Uneb-BA – Universidade do Estado da Bahia

Unifor-CE – Universidade de Fortaleza

Unirio-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Uniube-MG – Universidade de Uberaba

Univali-SC – Universidade do Vale do Itajaí

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ALUNO

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1998. (Coleção Contando a História da Matemática)

_____. *Equação: o idioma da Álgebra*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

_____. *História de potências e raízes*. São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Álgebra*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Frações e números decimais*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Geometria*. São Paulo: Atual, 2004. (Coleção Pra que serve Matemática?)

_____. *Números negativos*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

RAMOS, Luzia Faraco. *Uma proporção ecológica*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

ROSA, Ernesto. *Geometria na Amazônia*. São Paulo: Ática, 2004. (Coleção A Descoberta da Matemática)

TRAMBAIOLLI Neto, Egidio. *O aprendiz*. São Paulo: FTD, 1997. (Coleção O Contador de Histórias da Matemática)

BIBLIOGRAFIA

- AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo: CAEM-USP, 1995.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- CASTRUCCI, Benedito. *Fundamentos da geometria*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.
- COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1998.
- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.
- DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.
- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
- FRANCISCO, Walter de. *Estatística básica*. Piracicaba: Unimep, 1995.
- GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. Nova York: Dover Publications, Inc., 1972.
- IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2004.
- _____. *Censo demográfico 2000: resultados preliminares*. Rio de Janeiro: IBGE, 2000.
- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomo 1.
- KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1994.
- LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.
- MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. *O ensino de Matemática no primeiro grau*. São Paulo: Atual, 1986.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO/SECRETARIA DO ENSINO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares nacionais — Matemática* (terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.
- PÈNE, N.; DEPRESLE, P. *Décimale*. Paris: Éditions Belin, 1996. Math 6.
- ROSA NETO, Ernesto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1996.
- SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo: CAEM-USP, 1996.
- SOUZA, E. R. et al. *A Matemática das sete peças do tangram*. São Paulo: CAEM-USP, 1997.
- STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.
- TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.
- WALDEGG, G.; VILLASEÑOR, R.; GARCÍA, V. *Matemáticas en contexto: aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Ciudad de México: Grupo editorial Iberoamérica, 1999. Tercer curso.



MODERNA

**SUPLEMENTO COM
ORIENTAÇÕES PARA
O PROFESSOR**



MODERNA **80**^o
ano

Sumário

Parte geral - Orientações para o professor

• Apresentação	260
• A coleção	260
Objetivos gerais da obra	261
Estrutura da obra	261
• A importância de aprender Matemática	262
Matemática acadêmica X Matemática escolar	263
• A Matemática como disciplina do currículo escolar do Ensino Fundamental	263
A Matemática no currículo	264
• O papel do livro didático	265
• Temas transversais	266
• Propostas didáticas	266
A resolução de problemas	266
O uso da calculadora nas aulas de Matemática	267
O trabalho em grupo	268
Outras possibilidades de trabalho	268
• A avaliação e as práticas avaliativas	268
Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática	270
• Formação continuada e desenvolvimento profissional docente	272
• Algumas associações e centros de Educação Matemática	272

• Sugestões de leituras para o professor	274
Álgebra	274
Avaliação	274
Educação Matemática	274
Espaço e forma	274
História da Matemática	275
Jogos	275
Matemática e temas transversais	275
Números e operações	275
Tecnologia	275
Tratamento da Informação	276
Resolução de problemas	276
Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática	276
• Bibliografia consultada	276

Parte específica - Orientações gerais para o desenvolvimento dos capítulos

Capítulo 1	Retas e ângulos	278
Capítulo 2	Números reais	281
Capítulo 3	Cálculo algébrico	285
Capítulo 4	Estudos polígonos	289
Capítulo 5	Produtos notáveis e fatoração	293
Capítulo 6	Estudo dos triângulos	299
Capítulo 7	Estudo dos quadriláteros	305
Capítulo 8	Frações algébricas e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas	308
Capítulo 9	Estudo da circunferência e do círculo	309

Apresentação

Professor(a),

Como material de apoio à prática pedagógica, este Suplemento traz, de forma concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do aluno como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que ele o(a) auxilie no melhor aproveitamento e na compreensão das diretrizes pedagógicas que nortearam a atualização dos quatro volumes desta coleção.

Este Suplemento também discute variadas propostas de avaliação da aprendizagem sob a luz dos atuais *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN). Além disso, oferece indicações de leituras complementares e *sites* de centros de formação continuada, na tentativa de contribuir para a ampliação de seu conhecimento e sua experiência e para sua constante atualização.

As características da coleção, assim como as escolhas didáticas da obra, as opções de abordagem e os objetivos educacionais a alcançar são, também aqui, expostos e discutidos.

A coleção

Esta coleção tem como principal objetivo servir de apoio ao(a) professor(a) no desenrolar da prática didática e oferecer ao aluno um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos.

Através do desenvolvimento dos conteúdos curriculares próprios do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, a obra procura possibilitar ao aluno a aquisição do conhecimento matemático e subsidiar o trabalho docente. Nesse sentido, dispensa especial importância à apreensão de conceitos de forma precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para as noções de maior importância, cuidando da linguagem para que não sejam geradas dificuldades nas aprendizagens posteriores.

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o aluno a dar conta da totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de “esgotar” o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas dos conteúdos, não apenas com o objetivo de revisão, mas de complementação e aprofundamento dos conhecimentos desses conteúdos, de forma que o aluno possa ter diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos.

Em relação à abordagem, a apresentação de cada conteúdo é clara e objetiva, buscando situações contextualizadas e problematizadoras que possibilitem ao aluno estabelecer relações da Matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano, com sua realidade social e entre os diversos campos conceituais da própria Matemática.

Essa contextualização abarcou situações comuns, vivenciadas pelos jovens em seu cotidiano, assim como informações mais elaboradas, que costumam aparecer nos grandes veículos de comunicação. A obra tem por objetivo, assim, contribuir para a formação global do educando, de modo que, enquanto assimila e organiza os conteúdos próprios da Matemática, coloque em prática, sempre que possível, suas capacidades reflexiva e crítica, inter-relacionando tanto os tópicos matemáticos entre si quanto estes com os de diferentes áreas do saber. O intento é colaborar de forma proficiente para a solidificação do conhecimento matemático e para o desenvolvimento da plena cidadania e da participação positiva na sociedade.

Na sequência, os conceitos teóricos são desenvolvidos e entremeados por blocos de exercícios e, algumas vezes, com atividades de outra natureza em algumas seções. A distribuição dos exercícios em diferentes seções procura facilitar e flexibilizar o planejamento do trabalho docente, bem como possibilitar ao aluno desenvolver habilidades diversas.

As atividades também foram pensadas segundo o mesmo viés da exposição teórica, intercalando-se às mais convencionais, de aplicação direta do aprendizado, algumas propostas que contemplam temas transversais pertinentes, abrangendo informações de outras áreas, como Biologia, Ecologia, Economia, História, Geografia, Política, Artes, Ciências e Tecnologia.

As seções de cada capítulo se inter-relacionam conforme o desenvolvimento do conteúdo abordado e são adequadas à profundidade do tema visto em cada ano escolar.

A obra procura trazer um número suficiente de exercícios, possibilitando a sistematização dos procedimentos e a reflexão sobre os conceitos em construção. Os exercícios procuram abordar diferentes aspectos do conceito em discussão por meio de variados formatos, apresentando, quando possível, questões abertas, que dão oportunidade a respostas pessoais, questões que apresentam mais de uma solução ou aquelas cuja solução não existe. Da mesma forma, há exercícios que colocam o aluno em ação, possibilitando o desenvolvimento de argumentações, a abordagem de problemas de naturezas diversas e as discussões entre colegas e em grupos de trabalho. O professor tem, então, uma gama de questões a seu dispor para discutir os conceitos matemáticos em estudo.

É importante reafirmar que, ao longo de toda a coleção, houve preocupação explícita com a precisão e a concisão da linguagem. A abordagem dos conteúdos procurou ser clara, objetiva e simples, a fim de contribuir adequadamente para o desenvolvimento da Matemática escolar no nível do Ensino Fundamental. Além do correto uso da língua materna e da linguagem propriamente matemática, procuramos auxílio da linguagem gráfica, com ilustrações, esquemas e diagramas que auxiliem a aprendizagem pelas mudanças dos registros de representação.

■ Objetivos gerais da obra

- Apresentar a Matemática, em seus diversos usos, como uma das linguagens humanas, explorando suas estruturas e seus raciocínios.
- Introduzir informações que auxiliem a apreensão de conteúdos matemáticos, com vistas à sua inserção em um corpo maior de conhecimentos e à sua aplicação em estudos posteriores.
- Possibilitar ao aluno o domínio de conteúdos matemáticos, os quais lhe deem condições de utilização dessa ciência no cotidiano e na realidade social.
- Propiciar, com o auxílio do conhecimento matemático, o desenvolvimento das múltiplas habilidades cognitivas do aluno, preparando-o como pessoa capaz de exercer conscientemente a cidadania e de progredir profissionalmente.
- Desenvolver hábitos de leitura, de estudo e de organização.

■ Estrutura da obra

A coleção é composta por quatro volumes, que cobrem do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental. Os conteúdos estão distribuídos em capítulos. Cada capítulo enfatiza conteúdos referentes a um dos seguintes eixos da Matemática:

- números e operações;
- grandezas e medidas;
- espaço e forma;
- tratamento da informação.

No entanto, sempre que possível, em um mesmo capítulo aparecem conteúdos relacionados a mais de um eixo.

Na maioria das unidades, encontram-se também as seguintes seções:

• **Pense mais um pouco...**

Atividades e desafios de aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos na unidade. Essas atividades solicitam do aluno um pensamento mais elaborado, com a criação de estratégias pessoais de resolução.

- **Para saber mais**

Conteúdos e atividades que, fundamentados em contextos diversos, integram a Matemática a outras áreas do saber. A seção geralmente é finalizada por **Agora é com você!**, proposta de exercícios relacionados com o tema exposto.

- **Trabalhando a informação**

Os conteúdos de Estatística e de tratamento da informação, como arredondamentos, tabelas, gráficos e probabilidades, são trabalhados nessa seção.

- **Diversificando**

Esta seção apresenta atividades que diversificam o conteúdo trabalhado no capítulo, relacionando a outros contextos, como jogos, aplicações e desafios.

As atividades presentes na coleção — distribuídas entre **Exercícios propostos**, **Exercícios complementares** e **Diversificando** — foram pensadas com o intuito de:

- estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas;
- propor temáticas atuais relevantes à faixa etária a que a obra se destina.

Essa estrutura de obra pretende ser organizadora do trabalho docente sem, contudo, tornar-se uma “camisa de força” para alunos e professores. Por isso, os capítulos contemplam aspectos fundamentais a serem trabalhados com os alunos, mas oferecem maleabilidade e flexibilidade em sua abordagem, na tentativa de facilitar o trabalho do(a) professor(a) em fazer as necessárias adaptações a cada turma.

A importância de aprender Matemática

Ao construir sua história, o homem tem modificado e ampliado constantemente suas necessidades, individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura. O corpo de conhecimentos desenvolvido nesse longo trajeto ocupa lugar central no cenário humano. No que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, muitos continuam atravessando os séculos, enquanto outros já caíram em desuso, e há outros que ainda estão sendo incorporados ao rol de conteúdos necessários ao desenvolvimento de nossas ações cotidianas — afinal, fomos absorvendo práticas cada vez mais novas, que solicitam a ampliação e o aprofundamento de conhecimentos matemáticos.

Até algumas décadas atrás, “saber bem” Matemática implicava basicamente dominar e aplicar as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na atualidade, contudo, as pesquisas educacionais e as diretrizes pedagógicas oficiais apontam para a necessidade de que, em todos os anos da Educação Básica, a escola trabalhe conteúdos dos eixos números e operações, grandezas e medidas, espaço e forma, e tratamento da informação, tendo como referência os temas transversais.

Na perspectiva mundial da permanente busca de melhor qualidade de vida, a Matemática, sobretudo em seus aspectos essenciais, contribui de modo significativo para a formação do cidadão crítico e autoconfiante, com compreensão clara dos fenômenos sociais e de sua atuação na sociedade.

Para entender a real importância da Matemática, basta pensar em nosso cotidiano. É fácil fazer uma longa lista de ações nas quais precisamos mobilizar os conhecimentos desse campo: calcular uma despesa para efetuar seu pagamento; examinar diferentes alternativas de crédito; estimar valores aproximados; calcular medidas e quantidades com alguma rapidez; compreender um anúncio ou uma notícia apresentados por meio de tabelas e gráficos; analisar criticamente a validade de um argumento lógico; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico ou estatístico; decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema; orientarmo-nos no espaço (para deslocamentos ou indicações de trajetórias), entre tantas outras situações.

Podemos afirmar que a maior parte das sociedades de hoje depende cada vez mais do conjunto de conhecimento produzido pela humanidade, incluindo de maneira notável as contribuições da ciência matemática. Ao mesmo tempo, esse arcabouço cultural revigora-se incessantemente, com grande diversificação e sofisticação. Os apelos de um mundo que se transforma em incrível velocidade, em uma crescente variedade de domínios, constituem uma das razões mais significativas para o maior desafio dos educadores: preparar os jovens para uma atuação ética e responsável, balizada por uma formação múltipla e consistente.

■ Matemática acadêmica × Matemática escolar

No âmbito específico da Matemática, há muito mais conhecimento já estabelecido do que o que chega à sala de aula. A seleção desses conhecimentos-conteúdos e a forma de apresentá-los aos estudantes exigem bom senso e uma série de estudos e adaptações.

Em sua formação inicial, na universidade, o futuro professor de Matemática tem contato simultâneo com a **Matemática acadêmica** e a **Matemática escolar**. No entanto, em seu exercício profissional, o destaque será para a Matemática escolar; daí a relevância de procurarmos entender a distinção entre ambas.

De acordo com Moreira e David (2003), a Matemática acadêmica, ou científica, é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais. Nesse caso, as demonstrações, definições e provas de um fato e o rigor na linguagem utilizada ocupam papel relevante, visto que é por meio deles que determinado conhecimento é aceito como verdadeiro pela comunidade científica.

No caso da Matemática escolar, há dois aspectos fundamentais que modificam significativamente o papel do rigor nas demonstrações. O primeiro refere-se ao fato de a “validade” dos resultados matemáticos, que serão apresentados aos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, não ser colocada em dúvida; ao contrário, já está garantida pela própria Matemática acadêmica. O segundo aspecto diz respeito à aprendizagem; neste caso, o mais importante é o desenvolvimento de uma prática pedagógica que assegure a compreensão dos conteúdos matemáticos essenciais, assim como a construção de justificativas que permitam ao jovem estudante utilizá-los de maneira coerente e conveniente, tanto na vida escolar quanto na cotidiana.

O pensador Jules Henri Poincaré também discute a diferença entre o rigor necessário e conveniente à Matemática científica e o rigor adequado a um processo educativo. Para ele, uma boa definição é aquela que pode ser entendida pelo estudante. Além disso, deve-se considerar, no contexto escolar, a necessidade e a oportunidade de apresentar uma definição formal para os conteúdos matemáticos em estudo.

Segundo os PCN (1998),

[...] Tornar o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. [...]

(BRASIL, 1998, p. 36)

Nessa perspectiva, facilitar a aprendizagem com definições mais descritivas e metodologias adequadas ao nível de escolarização do aluno e proceder à avaliação desse processo são elementos fundamentais da práxis da Matemática escolar.

A Matemática como disciplina do currículo escolar do Ensino Fundamental

Nos currículos da Educação Básica, a Matemática está presente como objeto de estudo desde o início da escolarização. Em nossa cultura, está enraizada a ideia de que é necessário ensiná-la para todas as crianças. Mas, enfim, qual Matemática? E para quê?

Ao professor de Matemática é fundamental refletir sobre o que é ensinado aos alunos da disciplina no nível elementar, isto é, no Ensino Fundamental. Entender por que consideramos importante desenvolver na escola determinados saberes matemáticos em detrimento de outros e por que escolhemos dedicar um tempo maior a alguns conteúdos e menor a outros pode auxiliar o planejamento didático e orientar a prática pedagógica.

Partimos da proposição de que uma característica da Matemática é ser uma linguagem humana e, como forma linguística, tem o poder de decodificar, traduzir e expressar o pensamento humano.

A palavra **matemática** vem do grego *mathematike* e, em sua origem, estava ligada ao ato de aprender, pois significava “tudo o que se aprende”, enquanto **matemático**, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém “disposto a aprender”. O verbo **aprender** era originalmente, em grego, *manthanein*, mas hoje o radical *math*, antes presente nas palavras ligadas à aprendizagem, parece ter perdido essa conotação, do que talvez resulte a ideia geral de que a Matemática é uma disciplina que lida apenas com números, grandezas e medidas e que se aprende na escola de forma compulsória.

Na realidade, a Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja,

[...] a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar. É por isso que a Matemática, assim como a alfabetização, é algo que deveria ser tornado disponível para todos [...].

(NUNES; BRYANT, 1997, p. 105)

Ou seja, a Matemática é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio na sociedade.

Um ponto crucial a considerar é que as formas de pensar características da Matemática podem expandir-se para outros raciocínios, impulsionando a capacidade global de aprendizado. Ao lidar com a Matemática, fundamentamos o pensamento em um conjunto de axiomas, na geração e validação de hipóteses, no desenvolvimento de algoritmos e procedimentos de resolução de problemas — ferramentas aplicáveis a um conjunto de situações similares —, estabelecendo conexões e fazendo estimativas. Analisando situações particulares e inserindo-as na estrutura global, é possível construir estruturas de pensamento também úteis em situações não matemáticas da vida em sociedade.

Hoje sabemos da importância de o indivíduo aprender continuamente, durante toda a vida, para assimilar as incessantes inovações do mundo moderno e, desse modo, realimentar seu repertório cultural. Em um ambiente mundial cada vez mais competitivo e desenvolvido do ponto de vista tecnológico, é preciso tornar acessíveis a todas as pessoas as vantagens desses avanços. E é responsabilidade também da escola levar o aluno a perceber criticamente a realidade, cuja interpretação depende da compreensão de sua estrutura lógica, do entendimento da simbologia adotada no contexto, da análise das informações veiculadas por dados numéricos, imagens, taxas, indexadores econômicos etc. Um indivíduo com poucos conhecimentos matemáticos pode estar privado de exercer seus direitos como cidadão, por não ter condições de opinar em situação de igualdade com os demais membros da sociedade, nem de definir seus atos políticos e sociais com base em uma avaliação acurada da situação.

No ensino da Matemática, assumem grande importância aspectos como o estímulo a relacionar os conceitos matemáticos com suas representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); a motivação para identificar no mundo real o uso de tais representações; o desafio à interpretação, por meio da Matemática, da diversidade das informações advindas desse mundo.

■ A Matemática no currículo

A importância de ensinar Matemática no Ensino Fundamental, conforme indicam os PCN, decorre também da contribuição que a disciplina representa na formação do cidadão. Por isso, um currículo de Matemática

[...] deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente [...].

(BRASIL, 1998, p. 30)

Diversos pesquisadores e profissionais ligados à Educação Matemática têm procurado sintetizar o papel social do ensino dessa disciplina. Na literatura, segundo Ponte (2002), cabem ao ensino da Matemática quatro diferentes papéis:

- instrumento da cultura científica e tecnológica, fundamental para profissionais como cientistas, engenheiros e técnicos, que utilizam a Matemática em suas atividades;
- filtro social para a continuação dos estudos e seleção para as universidades;
- instrumento político, como símbolo de desenvolvimento e arma de diversas forças sociais, que utilizam as estatísticas do ensino da Matemática para seus propósitos;
- promotora do desenvolvimento dos modos de pensar a serem aplicados na vida cotidiana e no exercício da cidadania.

É evidente que cada um desses papéis serve a diferentes interesses e finalidades. Contudo, considerando os indivíduos seres sociais, é o último desses papéis o mais importante e o que mais nos interessa. Como explica Ponte:

Incluem-se aqui os aspectos mais diretamente utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isto sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância.

(Ibidem)

A função de promotora dos modos de pensar, porém, não se concretiza na prática somente por estar explicitada no currículo e nos programas.

O sistema de avaliação, os manuais escolares e a cultura profissional dos professores podem influenciar de tal modo as práticas de ensino que as finalidades visadas pelo currículo em ação, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é solenemente proclamado nos textos oficiais.

(Ibidem)

Ponte, ao discorrer sobre esses papéis, analisa em particular a função de filtro de alunos – “a verdade é que este papel de instrumento fundamental de seleção tem pervertido a relação dos jovens com a Matemática” (ibidem) –, que passam a enxergá-la como obstáculo a ser transposto para a conquista de objetivos, em vez de entendê-la como aliada nesse processo. Ponte enfatiza a importância de identificar os fatores que originam o insucesso dos alunos em Matemática. Para o pesquisador, tais fatores estão relacionados com:

- a crise da escola como instituição, que se reflete na aprendizagem em geral e na Matemática em particular;
- aspectos de natureza curricular — tradição pobre de desenvolvimento curricular de Matemática; insuficiente concretização prática e caráter difuso das finalidades do aprendizado;
- o próprio fato de a Matemática constituir-se em instrumento de seleção, o que, de imediato, desencanta e amedronta o aluno;
- questões ligadas à formação dos professores.

O papel do livro didático

Entendemos que, em geral, os recursos presentes nas salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do aluno. Neste caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando grande parte desse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de atividades e exercícios. Assim, o livro didático passaria a ser um contribuinte no processo de ensino-aprendizagem, como mais um interlocutor para o diálogo entre educador e educando.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, não pode se tornar uma “camisa de força”; seu uso deve ser intercalado com outros recursos de modo que enriqueça o trabalho do professor.

Concordamos com Romanatto (2004) quando diz que, partindo do princípio de que o verdadeiro aprendizado apoia-se na compreensão, e não na memória, e de que somente uma real interação com os alunos pode estimular o raciocínio e o desenvolvimento de ideias próprias em busca de soluções, cabe ao professor aguçar seu espírito crítico perante o livro didático.

Por todas essas razões, é importante que o professor de Matemática, ao adotar um livro didático, verifique se ele está de acordo com seus objetivos e se mantenha atento em não deixar que esse livro comprometa sua autonomia didática.

Temas transversais

As atuais e inúmeras discussões na área educacional têm nos alertado sobre mudanças na forma de conceber a Educação Básica no mundo. No que diz respeito à Educação Matemática, podemos dizer que ela atravessa um grato momento de revitalização:

Novos métodos, propostas de novos conteúdos e uma ampla discussão dos seus objetivos fazem da Educação Matemática uma das áreas mais férteis nas reflexões sobre o futuro da sociedade.

(D'AMBRÓSIO, 2000)

Uma proposta inovadora para o trabalho de conhecimentos diversificados foi sintetizada nos PCN, que orientam a incorporação de **temas transversais** às propostas curriculares das escolas de Educação Básica.

A orientação de introduzir e interligar no âmbito escolar temas como Trabalho e consumo, Orientação sexual, Pluralidade social, Ética, Meio ambiente e Saúde traz efetivas possibilidades de expansão dos currículos, para além dos conteúdos das disciplinas tradicionais.

Claro que a seleção dos temas transversais não se restringe aos temas propostos oficialmente e que não é possível trabalhar com todas as sugestões em um único ano. Eles podem ser escolhidos de acordo com as necessidades dos estudantes e da comunidade em que estão inseridos.

O importante é ter em vista que, por meio dos temas transversais, é possível incluir as questões sociais nos currículos escolares. Dessa perspectiva, os conteúdos trabalhados em cada disciplina ganham novo papel; o aprendizado da Matemática, entre outras abordagens, concorre para a formação da cidadania e, conseqüentemente, para um entendimento mais amplo da realidade social.

Por compreender a importância do trabalho com temas transversais, esta coleção procura, na medida do possível, incorporar e discutir alguns conteúdos matemáticos em contextos diversificados.

Propostas didáticas

Os tópicos a seguir destinam-se a oferecer suporte à discussão sobre as atuais tendências de ensino, que priorizam a globalidade da formação educacional, no sentido de capacitar os jovens para a positiva atuação na sociedade.

■ A resolução de problemas

O trabalho com a resolução de problemas é um dos destaques do ensino matemático contemporâneo. Para atender aos pressupostos de uma educação globalmente formadora, o “problema matemático” deve, sempre que possível, ser apresentado em um contexto desafiador, que faça sentido ao aluno, possibilitando a mobilização dos conteúdos estudados na busca de soluções e, sobretudo, abrindo espaço para a criação de estratégias pessoais e para a produção de novos conhecimentos.

De acordo com os PCN, resolver um problema pressupõe que o aluno:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros alunos;
- valide seus procedimentos.

Nesta coleção, procuramos entremear aos exercícios convencionais, de pura fixação do conteúdo, aqueles que associam os contextos matemáticos aos de outras áreas do conhecimento. A constante recorrência a imagens, gráficos e tabelas, muitos deles publicados em mídias atuais, tem por objetivo estimular os alunos a estabelecer conexões razoáveis com o mundo em que vivem.

Dentro da mesma proposta, algumas unidades também apresentam jogos desafiadores, já que a atividade lúdica na sala de aula tem sido apontada como parte da estratégia de ensino, pois, além do prazer inerente ao jogo, promove um efetivo desenvolvimento cognitivo ao propiciar, entre outros benefícios:

- a introdução e (re)significação de conceitos;
- a descoberta de estratégias de resolução de problemas;
- o estímulo à tomada de decisões;
- a interação social;
- o conhecimento da própria forma de pensar.

É importante lembrar que, para as atividades lúdicas alcançarem os efeitos esperados, são necessários alguns cuidados, como: a análise do conteúdo do jogo; a escolha do momento adequado — momento real e momento do aprendizado; a organização da sala de aula; e as necessárias intervenções pedagógicas.

■ O uso da calculadora nas aulas de Matemática

Esta coleção sugere o uso da calculadora como auxiliar na resolução de problemas. Das tecnologias disponíveis na escola, a calculadora é sem dúvida uma das mais simples e de menor custo.

É importante salientar que, como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem, a calculadora é somente mais um recurso auxiliar, e não um substituto do exercício do raciocínio ou da capacidade analítica. O que propomos é o uso da calculadora de maneira consciente, de modo que contribua para a reflexão dos conteúdos matemáticos.

De acordo com os PCN, alguns estudos recentes evidenciaram que a calculadora pode ser utilizada como instrumento motivador na realização de atividades exploratórias e investigativas e, assim, contribuir para a melhoria do ensino.

Podemos tomar como orientação para o uso da calculadora em atividades matemáticas os seguintes aspectos:

- É um instrumento que possibilita o desenvolvimento de conteúdos pela análise de regularidades e padrões e pela formulação de hipóteses.
- É um facilitador da verificação e análise de resultados e procedimentos.
- Sua manipulação e utilização são, em si, conteúdos a serem aprendidos.

Sugerimos que, inicialmente, o(a) professor(a) verifique o conhecimento que os alunos têm sobre o funcionamento da calculadora. O ideal é que a escola disponha de calculadoras simples, que ofereçam as funções básicas. Caso não seja possível disponibilizar uma calculadora para cada aluno, pode-se trabalhar em duplas ou a critério do(a) professor(a).

As atividades sugeridas pela coleção pressupõem um uso simples da calculadora, o que, no entanto, poderá ser ampliado de acordo com as necessidades e interesses de cada turma.

■ O trabalho em grupo

O trabalho em grupo, quando orientado e praticado adequadamente, além de contribuir para o desenvolvimento da habilidade de interação e participação social, auxilia no cultivo de habilidades que dependem do confronto e da partilha de ideias, já que oferece a oportunidade de provar resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos de resolução e validar ou não o pensamento na busca de soluções.

Além de reforçar a aprendizagem conceitual, o trabalho em grupo contribui para o aprimoramento do desenvolvimento de procedimentos e atitudes, tanto em relação ao pensar matemático quanto em relação à dinâmica grupal.

Pesquisas acerca dos processos de aprendizagem indicam que, mesmo com o exercício em grupo, acaba prevalecendo o aprendizado individual, que apenas se enriquece com as múltiplas contribuições geradas pelo trabalho grupal, pela interação entre diferentes modos de pensar.

Repetimos que, de qualquer modo, o sucesso do trabalho em grupo depende notavelmente do planejamento e da supervisão pedagógica, respeitados os diferentes tipos de aprendizes. No intuito de colaborar com a atuação do professor em sala de aula, esta coleção preocupou-se em indicar, pontualmente, as atividades que mais possibilitam a exploração em grupo.

■ Outras possibilidades de trabalho

Como já exposto, entendemos o livro didático como apoio do trabalho pedagógico. Nessa perspectiva, o conhecimento, a experiência e a autonomia profissional fazem do docente um coautor do material publicado. Assim, a despeito das propostas explícitas da coleção, o(a) professor(a) sempre poderá ampliar, complementar e inovar no desenvolvimento e nas discussões dos temas e atividades sugeridos, aproveitando as novas questões que emergem em sala de aula no desenrolar do estudo.

É sempre bom lembrar que o estímulo à imaginação e ao interesse dos alunos conta com uma gama interessante de recursos didáticos, como o trabalho com jogos ou com materiais manipulativos, vídeos e ferramentas da informática; a pesquisa em livros paradidáticos, dicionários, periódicos (jornais, boletins, revistas de informação geral e especializada) e internet; ou as propostas para a realização de feiras, gincanas e exposições.

A avaliação e as práticas avaliativas

O cenário de ampla discussão dos modelos e das práticas pedagógicas que se estabeleceu nos últimos anos de nossa história trouxe à tona um ponto vital para o estabelecimento de novas formas de pensar a educação: as concepções e os métodos de **avaliação da aprendizagem**.

Quanto à importância da avaliação, tomamos emprestadas as palavras de Regina Pavanello e Clélia Nogueira:

Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao aluno, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.

[...] Acreditamos que poucos educadores e educandos têm consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural aos seres humanos, de que os homens se avaliam constantemente, nas mais diversas situações, diante da necessidade de tomar decisões, desde as mais simples até as mais complexas.

(PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 30, 36)

As divergências, contudo, têm início quando se pretende **redefinir** a avaliação escolar e os **modos e graus de exigência** deste processo. Podemos dizer que, por longo tempo, na maior parte da história da educação matemática, o que vigorou foi a chamada **avaliação informativa**:

Na prática pedagógica da Matemática, a avaliação tem, tradicionalmente, centrado-se nos conhecimentos específicos e na contagem de erros. É uma avaliação somativa, que não só seleciona os estudantes, mas os compara entre si e os destina a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Porém, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do “certo ou errado”.

(Ibidem, p. 36-7)

Alguns autores, porém, concordam que mesmo na avaliação tradicional há algum espaço para uma busca mais consciente do processo formativo do aluno. As mesmas pesquisadoras, por exemplo, fazem a seguinte consideração:

Mesmo numa avaliação tradicional, na qual é solicitada ao aluno apenas a resolução de exercícios, é possível avançar para além da resposta final, considerando:

- *o modo como o aluno interpretou sua resolução para dar a resposta;*
- *as escolhas feitas por ele para desincumbir-se de sua tarefa;*
- *os conhecimentos matemáticos que utilizou;*
- *se utilizou ou não a Matemática apresentada nas aulas; e*
- *sua capacidade de comunicar-se matematicamente, oralmente ou por escrito.*

(BURIASCO, 2002, apud PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 7)

Uma concepção de avaliação que tem se configurado nos últimos anos é a que se refere à **avaliação formativa**. Alguns autores esclarecem que ela consiste num conjunto de métodos e recursos cujos objetivos são recolher informações sobre a aprendizagem e lidar melhor com os problemas experimentados pelos estudantes, ou seja, fazer as devidas ponderações sobre cada caso e partir para as alterações que se fizerem necessárias.

Principalmente a partir da década de 1980, muitos estudiosos têm feito importantes contribuições ao entendimento que devemos ter sobre avaliação como processo, ação contínua. Entre esses pesquisadores, destacamos o trabalho de Luckesi (2001). Segundo o autor, a avaliação deve ser tomada como instrumento para a compreensão do estágio em que se encontra o estudante, tendo em vista a tomada de decisões, suficientes e satisfatórias, para avançar no processo de aprendizagem.

Os PCN, divulgados desde fins dos anos 1990, colaboraram para a ampliação do olhar sobre as funções da avaliação. Destacam, por exemplo, a **dimensão social** e a **dimensão pedagógica** da avaliação.

No primeiro caso, a avaliação tem a função de, para os estudantes, informar acerca do desenvolvimento das potencialidades que serão exigidas no contexto social, garantindo sua participação no mercado de trabalho e na esfera sociocultural. Para os professores, a avaliação deve auxiliar na identificação dos objetivos alcançados, com a intenção de reconhecer as capacidades matemáticas dos educandos.

No segundo caso, a avaliação tem a função de informar os estudantes sobre o andamento da aprendizagem propriamente dita, isto é, dos conhecimentos adquiridos, do desenvolvimento de raciocínios, dos valores e hábitos incorporados e do domínio de estratégias essenciais.

Os **instrumentos de avaliação** (provas, trabalhos e registros de atitudes, entre outros) devem ser capazes de fornecer informações ao professor sobre as condições de cada estudante com relação à resolução de problemas, ao uso adequado da linguagem matemática, ao desenvolvimento de raciocínios e análises e à integração desses aspectos em seu conhecimento matemático. Devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não se evidenciam em avaliações escritas.

Para Charles Hadji (2001, p. 21), a avaliação formativa implica, por parte do professor, flexibilidade e vontade de adaptação e de ajuste. O autor ressalta que a avaliação que não é seguida da **modificação das práticas pedagógicas** tem pouca capacidade de ser formativa. Posição semelhante é defendida pelas educadoras Pavanello e Nogueira:

É preciso reconhecer [...] que o professor deve selecionar, dentre as informações captadas, apenas o que é realmente importante [...]. Para isso, existem indicadores que, segundo Vergani (1993, p.155), podem nortear a observação pelo professor, entre os quais poderiam ser citados:

- o interesse com que o aluno se entrega às atividades matemáticas;
- a confiança que tem em suas possibilidades;
- sua perseverança, apesar das dificuldades encontradas;
- se formula hipóteses, sugere ideias, explora novas pistas de pesquisa;
- se avalia criteriosamente a adequação do processo que adotou ou a solução que encontrou;
- se reflete sobre a maneira de planificar uma atividade e de organizar seu trabalho;
- se pede ajuda em caso de dúvida ou de falta de conhecimentos; e
- se comunica suas dificuldades e descobertas aos colegas, de maneira adequada.

No entanto, para que essas atitudes possam ser cultivadas pelo aluno, a prática pedagógica não pode mais se centrar na exposição e reprodução de conteúdos que só privilegiam a memorização e não o desenvolvimento do pensamento.

(PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 38-9)

Afinal o que deve ser avaliado: conteúdos, habilidades, competências...?

Tudo deve ser avaliado. O fundamental, porém, é saber **como olhar, o que olhar e como analisar** as coletas. Para isso, o professor pode recorrer a diversos instrumentos de coleta de informações, selecionando aqueles que permitam compor o melhor panorama da aprendizagem matemática de seus alunos.

■ Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática

Como sugestão ao professor, vamos apresentar aqui, resumidamente, um leque de modalidades de avaliação.

- **Autoavaliação:** em primeiro lugar, o professor deve auxiliar os alunos a compreenderem os objetivos da autoavaliação, fornecendo-lhes para isso um roteiro de orientação. Os alunos devem ser motivados a detectar suas dificuldades e a questionar as razões delas.
- **Prova em grupo seguida de prova individual:** nessa modalidade, as questões são resolvidas em grupo e, a seguir, cada aluno resolve questões do mesmo tipo individualmente. O intuito é colaborar para a metacognição, para que o aluno tenha consciência do próprio conhecimento, de suas potencialidades e dificuldades.
- **Testes-relâmpago:** os testes-relâmpago normalmente propõem poucas questões, uma ou duas apenas. Têm por objetivo não permitir que os alunos mantenham-se sem estudo durante longos períodos, de modo que se acumule uma grande quantidade de conteúdos. Este recurso, além de manter os alunos atentos aos assuntos contemplados em aula, ajuda-os na familiarização com os processos avaliativos.
- **Testes e/ou provas cumulativas:** este instrumento de avaliação traz à tona conteúdos trabalhados em momentos anteriores. Tal prática contribui para que os alunos percebam as conexões entre os conteúdos e a importância de usar os conhecimentos matemáticos de forma contínua.

- **Testes em duas fases:** este tipo de teste, ou prova, é realizado em duas etapas:
 - 1ª) a prova é realizada em sala de aula, sem a interferência do professor;
 - 2ª) os alunos refazem a prova dispondo dos comentários feitos pelo professor.O sucesso desse instrumento depende de fatores como:
 - a escolha das questões deve ser norteada pelos objetivos do teste;
 - o conteúdo dos comentários formulados pelo professor entre as duas fases;
 - a consciência, por parte dos alunos, de que a segunda fase não consiste em mera correção do que está errado, mas em uma oportunidade de aprendizagem.As questões devem ser de dois tipos:
 - as que requerem interpretação ou justificação, e problemas de resolução relativamente breve;
 - as abertas, e problemas que exijam alguma investigação e respostas mais elaboradas.
- **Resolução de problemas:** chamamos de “problema matemático” aquele que envolve um raciocínio matemático na busca por solução. Pode ser resolvido individualmente ou em grupo. A atividade de resolução de problemas deve envolver, entre outros fatores:
 - a compreensão da situação-problema por meio de diferentes técnicas (leitura, interpretação, dramatização etc.);
 - a promoção da criação de estratégias pessoais (não haver solução pronta);
 - a identificação do problema e a seleção e mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários a sua resolução;
 - a avaliação do processo, para verificar se, de fato, os objetivos estão sendo atingidos;
 - a interpretação e verificação dos resultados, para que se avaliem sua razoabilidade e validade.
- **Mapa conceitual:** durante a fase formal de avaliação, o professor pode solicitar aos alunos que construam o mapa conceitual sobre um tema já discutido e explorado em aula. Esse tipo de instrumento propicia a verificação da aprendizagem mais aberta e pode ser usado como autoavaliação.
- **Trabalho em grupo:** para que o grupo trabalhe de fato como grupo, são fundamentais a orientação e o auxílio do professor no sentido de estimular os alunos a desempenharem novas funções em sala de aula, em colaboração com os colegas. Um incentivo para isso é o grupo receber uma única folha de papel com as atividades propostas, para que todos resolvam em conjunto. A questão a ser respondida deve ser desafiadora, despertando a curiosidade e a vontade de resolvê-la.
- **Diálogos criativos:** a proposta é que os alunos produzam diálogos matemáticos em que estejam inseridos conceitos e propriedades de determinado conteúdo.
- **Histórias em quadrinhos:** nesta modalidade, os alunos criam histórias em quadrinhos para explorar os assuntos estudados em sala de aula. Esse é um recurso que, além de intensificar o interesse pela Matemática, permite ao professor a avaliação do conhecimento assimilado pelos alunos em contextos diversificados.
- **Seminários e exposições:** são atividades que oferecem oportunidade para os alunos organizarem seu conhecimento matemático e suas ideias sobre os assuntos explorados em aula, além de promover a desinibição e autonomia dos alunos.
- **Portfólios:** é uma coletânea dos melhores trabalhos que podem ser escolhidos pelos próprios estudantes. O professor deve orientá-los e sugerir que selecionem, durante um período, as atividades de Matemática que preferirem e que justifiquem as suas escolhas.

Pretendemos aqui apenas apresentar sugestões que auxiliem a prática avaliativa. Sem dúvida, outros instrumentos de avaliação podem ser contemplados em conformidade com o contexto escolar.

É importante reforçar que um processo fecundo de avaliação deverá considerar, além dos instrumentos apropriados, o estabelecimento de critérios de correção alicerçado em objetivos claros e justos. Chamamos a atenção para o tratamento que devemos dar ao “**erro**” nas

atividades de Matemática. Ele deve ser analisado criticamente, de modo que forneça indícios de sua natureza e da correção do percurso pedagógico, para o (re)planejamento e a execução das atividades em sala de aula.

Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no aluno um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para seu futuro pessoal.

(PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37)

Por fim, a observação atenta e a percepção aguçada do professor também são relevantes no processo de avaliação, no sentido de detectar as aprendizagens, que muitas vezes não são reveladas pelos instrumentos avaliativos escolhidos.

Formação continuada e desenvolvimento profissional docente

Assim como os estudantes precisam desenvolver habilidades e competências diversificadas, em sintonia com a época em que vivem, nós, professores, mais que outros profissionais, temos a máxima urgência e necessidade de cuidar da continuidade de nossa formação e do consequente desenvolvimento profissional.

O que aprendemos na universidade e a experiência que adquirimos com a prática pedagógica não são suficientes para nos manter longe de atividades de formação. Pesquisas e estudos no campo da Educação Matemática e áreas afins têm nos auxiliado a encontrar as respostas para as muitas dúvidas e angústias inerentes à profissão: “O que ensinar?”, “Por que ensinar?”, “Como ensinar?”...

O desenvolvimento profissional do(a) professor(a) deve ser entendido como um processo contínuo, que se dá ao longo de toda a vida profissional, não ocorre ao acaso, tampouco é espontâneo, mas é resultado do processo de busca que parte das necessidades e dos interesses que surgem no percurso.

Na realidade, a formação profissional docente tem início na experiência como aluno e na formação acadêmica específica, do período de iniciação à docência, até edificar-se com a experiência profissional e os processos de formação continuada.

Lembramos que as ações de formação continuada podem ser desenvolvidas por múltiplas modalidades, como leituras atualizadas, cursos, palestras, oficinas, seminários e grupos de estudos.

Algumas associações e centros de Educação Matemática

- APM – Associação de Professores de Matemática (Portugal)
Disponível em: <<http://www.apm.pt>>. Acesso em: 15 abr. 2015.
- Caem – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (USP)
Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/caem/>>. Acesso em: 15 abr. 2015.
- CCE – Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Disponível em: <<http://www.uel.br/cce/portal/>>. Acesso em: 15 abr. 2015.
- CECEMCA – Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp)
Disponível em: <<http://www2.fc.unesp.br/cecemca/index.htm>>. Acesso em: 15 abr. 2015.
- Cecimig – Centro de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Disponível em: <<http://www.uel.br/cce/portal/>>. Acesso em: 15 abr. 2015.

- Cempem – Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Disponível em: <<http://www.cempem.fae.unicamp.br/>>. Acesso em: 15 abr. 2015.
- CREEM – Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino da Universidade Estadual de Blumenau (Furb)
Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/>>. Acesso em: 15 abr. 2015.
- Edumatec – Programa de pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Disponível em: <<http://www.ufpe.br/ppgedumatec>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Disponível em: <<http://www.gepem.ufrj.br>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- Gegeticem – Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Disponível em: <<http://www.gegeticem.ufrj.br/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- GPEEM - Grupo de Pesquisa e Estudo em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/faced/educacaomatematica>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- LEG – Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense (UFF)
Disponível em: <<http://www.uff.br/leg/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- LEM – Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/lem/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- LEM – Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo (USP)
Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/lem/>>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- Lemat – Laboratório de Educação Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFGO)
Disponível em: <<http://lemat.mat.ufg.br/>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- Lemat – Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Disponível em: <<http://lemat.sites.ufsc.br/>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- Lepac – Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica da Universidade Federal da Paraíba (UFPB)
Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/lepac/frame.htm>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- PPGECEM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
Disponível em: <<http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- PPGECEM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Disponível em: <<http://www.posgraduacao.ufrn.br/ppgecm>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- Projeto Fundação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Disponível em: <<http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/>>. Acesso em: 24 abr. 2015.
- SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática
Disponível em: <<http://www.sbhmat.org/>>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
Disponível em: <<http://www.sbm.org.br>>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- SBMAC – Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
Disponível em: <<http://www.sbmacc.org.br/>>. Acesso em: 27 abr. 2015.

Sugestões de leituras para o professor

■ Álgebra

- *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. Eliane Reame de Sousa e Maria Ignes Diniz. São Paulo: IME-USP, 1994.
- *Aplicações da matemática escolar*. D. Bushaw; M. Bell; H. O. Pollack. São Paulo: Atual, 1997.
- *Aprenda Álgebra brincando*. I. Perelmann. Curitiba: Hemus, 2001.
- *Erros e dificuldades no ensino da Álgebra: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula*. Renata Anastacia Pinto. 1997. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.
- *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. R. Lins; C. Rômulo; J. Gimenez. Campinas: Papirus, 1997.
- Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro. Ângela Miorin; Antonio Miguel; Dário Fiorentini. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp, n. 1, 1993.
- *Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental*. Nathalia Tornisiello Scarlassari. 2007. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.

■ Avaliação

- *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Helena Noronha Cury. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos*. Vânia Maria Pereira dos Santos (Coord.). Rio de Janeiro: UFRJ; Projeto Fundação, 1997.
- *Avaliação da aprendizagem escolar*. Cipriano Carlos Luckesi. São Paulo: Cortez, 2001.
- *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens*. Philippe Perrenoud. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- *Avaliação desmistificada*. Charles Hadji. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. Jussara Hoffmann. Porto Alegre: Mediação, 2000.
- *Currículo e avaliação: uma perspectiva integrada*. Maria Palmira Castro Alves. Porto: Porto, 2004.
- *O erro como estratégia didática: estudo dos erros no ensino da matemática elementar*. Neuza Bertoni Olinto. Campinas: Papirus, 2000.
- *Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão*. Regina Buriasco. *Educação em Revista*. Belo Horizonte: UFMG, n. 36, 2002.

■ Educação Matemática

- *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Cecília Parra; Irma Saiz (Org.). Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- *Educação Matemática, leitura e escrita: Armadilhas, utopias e realidade*. Celi Espasadin Lopes; Adair Mendes Nacarato (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2009.
- *Ensinar e aprender Matemática*. Luiz Carlos Pais. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- *Ensino de Matemática na escola de nove anos: Dúvidas, dívidas e desafios*. Vinício de Macedo Santos. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Adair Mendes Nacarato; Celi Espasandin Lopes (Org.). Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Ubiratan D'Ambrosio. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- *Fundamentos da Didática da Matemática*. Saddo Ag Almouloud. Curitiba: UFPR, 2007.
- *Letramento no Brasil: habilidades matemáticas*. Maria da Conceição (Org.) F. R. Fonseca. São Paulo: Global, 2004.
- *Matemática, estupefação e poesia*. Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- *Múltiplos olhares: Matemática e produção de conhecimento*. Jackeline Rodrigues Mendes; Regina Célia Grandó (Org.). São Paulo: Musa, 2007.
- *Para aprender Matemática*. Sérgio Lorenzato. Campinas: Autores Associados, 2006.

■ Espaço e forma

- *Aprendendo e ensinando Geometria*. Mary M. Lindquist; Albert P. Shulte (Org.). São Paulo: Atual, 1994.
- *Ensino de Geometria no virar do milênio: investigações em Geometria na sala de aula*. Eduardo Veloso; Helena Fonseca; João Pedro da Ponte; Paulo Abrantes (Org.). Lisboa: DEFCUL, 1999.
- *Espaço e forma*. Célia Maria C. Pires; Edda Curi; Tânia Maria M. Campos. São Paulo: Proem, 2000.
- *Experiências com Geometria na escola básica: narrativas de professores em (trans)formação*. Adair Mendes Nacarato; Adriana A. M. Gomes; Regina Célia Grandó. São Carlos: Pedro & Editores, 2008.
- *Geometria na era da imagem e do movimento*. Maria Laura Lopes; Lilian Nasser (Org.). Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.
- *O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências*. Regina Maria Pavanello. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp, n. 1, p. 7-17, mar. 1993.

- Por que não ensinar Geometria? Sérgio Lorenzato. *Educação Matemática em Revista*. Florianópolis: SBEM, n. 4, 1º sem. 1995.

■ História da Matemática

- *Introdução à história da Educação Matemática*. Antonio Miguel; Maria Ângela Miorim. São Paulo: Atual, 1998.
- *Introdução à história da Matemática*. Howard Eves. Campinas: Unicamp, 1997.
- *História concisa das matemáticas*. Dirk J. Struik. Lisboa: Gradiva, 1998.
- *História da Matemática*. Carl B. Boyer. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Tatiana Roque. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- *História universal dos algoritmos*. Georges Ifrah. São Paulo: Nova Fronteira, 1997.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra*. John K. Baumgart. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*. Howard Eves. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Números e numerais*. Bernard H. Gundlach. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Trigonometria*. Howard Eves. São Paulo: Atual, 1992.

■ Jogos

- *Aprender com jogos e situações-problema*. Lino de Macedo; Ana Lúcia S. Petty; Norimar C. Passos. Porto Alegre: Artmed, 2000.
- *Jogos de matemática de 6º ao 9º ano*. Kátia Stocco Smole; Estela Milani Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- *O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas*. Rosely Palermo Brenelli. Campinas: Papirus, 1996.
- *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. Regina Célia Grando. São Paulo: Paulus, 2004.
- *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*. Lino de Macedo; Ana Lúcia S. Petty; Norimar C. Passos. Porto Alegre: Artmed, 2005.

■ Matemática e temas transversais

- *A Matemática e os temas transversais*. Alexandrina Monteiro; Geraldo Pompeu Junior. São Paulo: Moderna, 2001.

- *Matemática escolar e Matemática da vida cotidiana*. José Roberto B. Giardinetto. Campinas: Autores Associados, 1999.

- *Matemática em projetos: uma possibilidade*. Celi Aparecida Espasandin Lopes (Org.). Campinas: Unicamp, 2003.

■ Números e operações

- *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa*. Analúcia Schliemann; David Carraher (Org.). Campinas: Papirus, 1998.
- *Bolema* (Boletim de Educação Matemática). Rio Claro: Unesp, v. 21, n. 31, 2008.
- *Conteúdo e metodologia da Matemática: números e operações*. Marília Centurión. São Paulo: Scipione, 1994.
- *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Rômulo Campos Lins; Joaquim Gimenez. Campinas: Papirus, 1997.
- *Repensando adição e subtração*. Sandra Magina; Tânia M. M. Campos; Terezinha Nunes; Verônica Gitirana. São Paulo: Proem, 2001.
- *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*. Maria José Ferreira da Silva. 1997. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

■ Tecnologia

- A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. Katia Maria de Medeiros. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo: SBEM, n. 14, 2003.
- *Ensinando com tecnologia: criando salas de aula centradas nos alunos*. Judith H. Sandholtz; Cathy Ringstaff; David C. Dwyer. Porto Alegre: Artmed, 1997.
- *Informática e Educação Matemática*. Marcelo de Carvalho Borba; Miriam G. Penteado. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- *Informática educativa: dos planos e discursos à sala de aula*. Ramon de Oliveira. Campinas: Papirus, 1997.
- *Prática pedagógica: ambientes informatizados de aprendizagem, produção e avaliação de software educativo*. Celina Couto Oliveira; José Wilson Costa; Mércia Moreira. Campinas: Papirus, 2001.
- *Projetos de trabalho em informática: desenvolvendo competências*. Sônia Petitto. Campinas: Papirus, 2003.
- *Uso didático da calculadora no ensino fundamental: possibilidades e desafios*. Juliana de Alcântara S. Rubio. 2003. Dissertação (Mestrado) – Unesp, Marília.

■ Tratamento da Informação

- *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.* Celi Aparecida Espasandin Lopes. 1998. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.
- *Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas.* Anna Regina Lanner; Celi Aparecida Espasandin Lopes (Org.). Campinas: Unicamp, 2003.
- *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio.* Irene Maurício Cazorla; Eurivalda dos Santos Santana. Ilhéus: Via Litterarum, 2006.
- *Tratamento da Informação: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais.* Maria Laura M. Leite Lopes (Org.). Rio de Janeiro: UFRJ, 2005.

■ Resolução de problemas

- *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* George Polya. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- *A resolução de problemas na Matemática escolar.* Stephen Krulik; Robert E. Reys (Org.). São Paulo: Atual, 1997.
- *Didática da resolução de problemas de Matemática.* Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 1991.
- *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática.* Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2001.

■ Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática

- **BOLEMA** (Boletim de Educação Matemática)
Publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociência e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (IGCE-Unesp), *campus* de Rio Claro.
Disponível em: <<http://www2.rc.unesp.br/bolema/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- **Boletins do GEPEM**
Publicado pelo Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Disponível em: <<http://www.gepem.ufrrj.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.
- *Educação Matemática em Revista*
Publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Disponível em: <<http://www.sbem.com.br>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

• *História & Educação Matemática*

Publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática

Disponível em: <<http://www.sbhmat.com.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

• *Jornal do professor de Matemática*

Publicado pelo Departamento de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/lem/jpm.html>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

• *Revemat – Revista eletrônica de Educação Matemática*

Publicada pelo Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática

Disponível em: <<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

• *Revista Educação e Matemática e Revista Quadrante*

Publicada pela Associação de Professores de Matemática de Portugal

Disponível em: <<http://www.apm.pt>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

• *Revista do professor de Matemática*

Publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática

Disponível em: <<http://www.sbm.org.br>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

• *Revista Zetetiké*

Publicada pelo Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Disponível em: <<http://www.cempem.fae.unicamp.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2015.

Bibliografia consultada

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Maria de Lurdes; OLIVEIRA, J. *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 1999.

ARAKI, Tetsuo. *As práticas avaliativas em sala de aula de Matemática: possibilidades e limites*. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco, Itatiba.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional no 9.394*. Brasília, 20 dez. 1996.

_____. Ministério da Educação e Cultura. *PNLD 2008 – Guia de Livros Didáticos*. Brasília: MEC, 2007.

_____. Ministério da Educação e do Desporto; Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Volume 3: Matemática, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília: MEC; SEF, 1998.

BURIASCO, Regina. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. *Educação em Revista (UFMG)*, Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002.

CAPORALE, Silvia M. M. *Formação continuada de professores que ensinam Matemática: possibilidades de desenvolvimento profissional a partir de um curso de especialização*. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco, Itatiba.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 2000.

FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes; PINTO, R. Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. *Quadrante*, v. 8, n. 1/2, p. 33-60, 1999.

FIORENTINI, Dario et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, n. 36, p. 137-160, 2002.

HADJI, Charles. *Avaliação desmistificada*. Trad. Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2001.

HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. 18. ed. Porto Alegre: Mediação, 2000.

LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem*. São Paulo: Cortez, 2001.

MEDEIROS, Katia Maria de. A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. *Educação Matemática em Revista*, n. 14, p. 19-28, 2003.

MONTEIRO, Alexandrina; POMPEU, Geraldo Jr. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, v. 11, n. 19, p. 57-80, 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

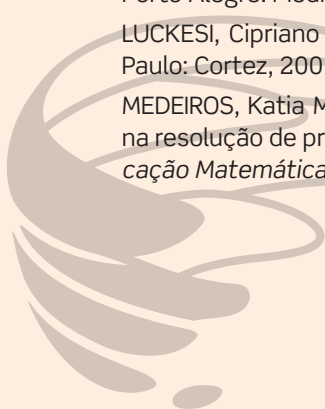
PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da. O ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? Conferência plenária apresentada no seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas". Lisboa: CNE, 2002.

ROMANATTO, Manoel Carlos. O Livro Didático: alcances e limites. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. *Anais*.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: Métodos alternativos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 1997. v. 1. 224 p.



MODERNA

Parte específica - Orientações gerais para o desenvolvimento dos capítulos

CAPÍTULO

1

Retas e ângulos



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Identificar a posição relativa de duas retas em um plano ou no espaço.
- Ampliar os conceitos de Geometria plana e fixá-los por meio de sua aplicação em construções geométricas com régua, compasso e esquadro.
- Conceituar segmentos consecutivos, colineares, congruentes; ponto médio; bissetriz de um ângulo; ângulos complementares, suplementares, opostos pelo vértice e formados por duas retas paralelas e uma transversal.
- Classificar os ângulos quanto às suas medidas e quanto à soma de suas medidas.
- Construir, com auxílio de régua e compasso, retas paralelas, segmentos congruentes, ponto médio e bissetriz de um ângulo.
- Identificar e classificar ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal e aplicar as relações entre as medidas desses ângulos.
- Construir, ler e interpretar gráficos de setores.

Orientações gerais do capítulo

A abertura do capítulo traz uma das muitas obras do artista holandês Theo van Doesburg que, aplicando a Geometria, constrói o belo.

Acessando o site do Itaú Cultural (disponível em: <<http://novo.itaucultural.org.br/>>), o professor encontrará textos esclarecedores a respeito do abstracionismo geométrico, além de links com exemplos de obras da arte concreta de artistas nacionais, como Waldemar Cordeiro, Geraldo Barros, Lygia Clark, Lygia Pape, Hélio Oiticica, Amílcar de Castro, entre outros, com as quais poderá motivar os alunos para o estudo da Geometria.

Nesse capítulo, as construções geométricas de retas paralelas, da obtenção do ponto médio de um segmento e da bissetriz de um ângulo propiciam ao aluno a retomada e a consolidação de conceitos de Geometria plana, como partes da reta e ângulo. O professor deve avaliar a conveniência de explorar a abordagem concreta dos conceitos teóricos e abstratos que essas construções permitem e, por meio do diálogo com os alunos, antecipar, de modo intuitivo, as propriedades do losango que serão estudadas no capítulo 7.

O estudo dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal fecha o capítulo com a aplicação do que foi visto no início, sobre as posições relativas de retas, e no meio, sobre ângulos complementares e suplementares, conferindo, dessa forma, unidade ao capítulo.

Para os trabalhos referentes a ângulos, sugerimos o livro:

ROSA NETO, Ernesto. *Geometria na Amazônia*. São Paulo: Ática, 2004. (Coleção A Descoberta da Matemática)

Nas páginas 11 e 12 são definidas as posições entre duas retas, seja no plano ou no espaço. A observação dessas retas é feita em uma figura espacial (o cubo). Assim, o plano é estudado a partir do espaço.

No exercício 2 discute-se a relação entre pontos, retas e planos. Para facilitar a compreensão, os alunos precisam visualizar, na sala de aula, modelos reais que ilustrem a situação ideal descrita em cada item. Por exemplo, para o item a escolham duas lâmpadas ou dois buracos (pontos) em uma parede (plano). O aluno imaginará, então, que por esses dois pontos passa uma única reta que está contida no plano; portanto, o item a é verdadeiro.

No item b, precisamos mostrar ao aluno que as retas reversas não possuem ponto comum, assim como as paralelas. A diferença é que as paralelas são coplanares e as reversas não são. Logo, precisamos de duas informações para saber se as retas são paralelas.

No item **c**, temos as duas informações necessárias para saber se duas retas são paralelas ou não. Para facilitar a visualização, no **exercício 3**, compare a sala de aula com o bloco retangular.

No **exercício 5**, convém montar um painel com os diferentes desenhos dos alunos em relação ao posicionamento dos pontos e depois discutir as respostas. Explorar as possibilidades de posicionamento desses pontos, desde a situação em que todos estão alinhados (quando se tem uma única reta paralela a m) até os cinco pontos, tomados três a três não colineares (quando se tem cinco retas distintas paralelas a m).

O **exercício 8** é uma atividade muito rica e pode ser feita em dupla. Essa atividade envolve construção geométrica de perpendiculares, medida de segmento e construção de triângulo, em particular do famoso triângulo retângulo de medidas 3, 4 e 5. O professor deve avaliar se convém pedir aos alunos que comparem o quadrado da medida da hipotenusa com a soma dos quadrados das medidas dos catetos, antecipando, assim, uma verificação particular do teorema de Pitágoras. No capítulo seguinte, nas **páginas 52, 53 e 54**, há um “Para saber mais” que trabalha essa relação com a decomposição de polígonos.

No **exercício 11**, há uma articulação do conceito de congruência com a transformação de unidades de medida.

No **exercício 14**, se $BC = 0,5$ cm e B é ponto médio de \overline{AC} , então $AB = 0,5$ cm. Continuando, $AC = 1,0$ cm e sendo C ponto médio de \overline{AD} , então $CD = AC = 1,0$ cm. Como D é ponto médio de \overline{BE} , é possível descobrir o tamanho de \overline{BD} escrevendo:

$$BD = BC + CD$$

$$BD = 0,5 + 1,0$$

$$BD = 1,5 \text{ cm}$$

Portanto, $DE = 1,5$ cm.

Como E é ponto médio de \overline{DF} , então \overline{DE} é congruente a \overline{EF} ; logo, $EF = 1,5$ cm.

Agora, basta efetuar a seguinte adição:

$$AF = AC + CD + DE + EF \text{ (mostrar que existem outras possibilidades para essa adição)}$$

$$AF = 1,0 + 1,0 + 1,5 + 1,5$$

$$AF = 5 \text{ cm}$$

A resolução do **exercício 15** propicia a inter-relação da Geometria com a Álgebra. Representando por x a medida CD , o equacionamento é imediato. Pode-se propor aos alunos que experimentem outras atribuições para x , como fazer $x = AB$ ou $x = ZD$ para verificarem que, com a nova representação, as medidas dos segmentos são as mesmas.

É possível explorar mais essa atividade e, por meio de questionamento, induzir os alunos à conclusão de que a distância entre os dois pontos médios X e Y é a semissoma das medidas dos dois segmentos \overline{AB} e \overline{BC} .

Observe que a distância de X a Z não é a semissoma das medidas dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , pois estes não são consecutivos.

Quanto ao “Pense mais um pouco...” da **página 16**, os alunos, separados em grupos, são levados a considerar mais de uma possibilidade na construção da figura do item 1. No item 2, sem que a atividade seja capciosa, o grupo é desafiado a analisar e a justificar, nos itens **a** e **c**, a indeterminação da medida pedida pela possibilidade da ocorrência de infinitos valores, em um intervalo real ($2,5 < AC < 8$), que tornam plausível a situação proposta, enquanto no item **b** os alunos devem concluir pela inexistência de valores que contemplem a condição dada pela medida de CD . Basta calcular $BC + CD = 8,5$ cm e comparar o resultado com a informação do enunciado ($AD = 8$ cm) para chegar a um conceito não definido, ou seja, a uma distância negativa: $AB = -0,5$ cm

Na sequência dos exercícios das **páginas 20 e 21**, há interação da Álgebra com a Geometria, em que se aplica equação do 1º grau para resolver questões de Geometria. Essa interação não tem um fim em si mesma, mas dá ao aluno instrumentos e um caminho pelo qual são possíveis, particularmente quando se chega ao **exercício 26**, a descoberta e a elaboração de fatos sobre as bissetrizes de ângulos adjacentes e suplementares que formam ângulo reto, ou seja, que estas estão contidas em retas perpendiculares. Essa questão é retomada e aprofundada no **exercício 28**, que pode ser abordada tanto do ponto de vista algébrico como do ponto de vista geométrico ou, ainda, por meio de dobradura.

Após a definição de ângulos opostos pelo vértice, é possível observar que, no **exercício 32**, a sequência de itens induz o aluno a concluir que esses ângulos são congruentes. Essa atividade contribui, portanto, para que o aluno vivencie a experiência de dar pequenos, mas importantes, passos no sentido de construir alguns fatos matemáticos.

A seção “Trabalhando a informação” das **páginas 24 e 25** constitui uma oportunidade de construir com os alunos um gráfico de setores e, assim, trabalhar essa seção de maneira que entendam melhor fatos importantes que afetam seu cotidiano.

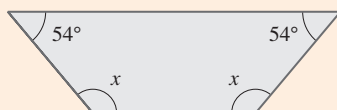
A sequência de itens do **exercício 35** permite ao aluno concluir o que aprendeu sobre a congruência de ângulos alternos externos.

A resolução do **exercício 36** leva o aluno a aplicar a reversibilidade sobre a afirmação de que “ângulos alternos internos formados por paralelas cortadas por transversal são congruentes”, estudada nesse tópico, e a concluir que a congruência de ângulos alternos internos determinam que dois de seus lados estejam contidos em retas paralelas.

No **exercício 40**, temos a contraposição entre a frase de Mário (que as retas são paralelas) e a frase de Vilma (que as retas não são paralelas). Como podemos perceber, os ângulos alternos internos não são congruentes, portanto, a resposta é que as retas não podem ser paralelas. Aqui, é necessário discutir que as informações precisam ser dadas, ou seja, quando precisamos admitir que duas retas são paralelas para resolvermos um exercício, isso precisa estar escrito no enunciado.

Na resolução do **exercício 42**, item **b**, espera-se que os alunos percebam que $x + y = 30^\circ + 25^\circ$. Caso isso não ocorra, discuta esse fato com eles quando forem resolver o **exercício 43**, item **a**, com o qual se articula.

Os alunos podem chegar à resposta do “Pense mais um pouco...” da **página 33** por diferentes caminhos. Por um deles, é possível perceber que os ângulos conhecidos e os desconhecidos do trapézio são colaterais internos. Assim, indicando por x a medida de cada um dos ângulos desconhecidos, sabe-se que $x + 54^\circ = 180^\circ$. Logo, $x = 126^\circ$.



Outra maneira é fazer a soma dos ângulos internos do trapézio igual a 360° (os alunos terão oportunidade de aprender mais sobre isso no capítulo 7). Assim, $2x + 2 \cdot 54^\circ = 360^\circ$. Logo, $x = 126^\circ$.

Sugestões de atividades

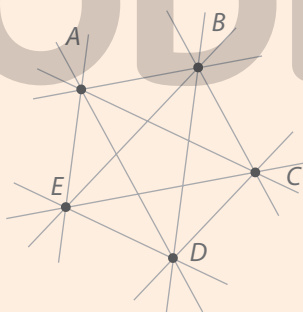
Pesquisando retas

Considere cinco pontos distintos em um plano.

- Qual é o maior número de retas que podem ser traçadas passando por dois desses cinco pontos? Represente essa situação com um desenho no caderno.
- Qual é o menor número de retas que podem ser traçadas passando por esses pontos? Represente essa situação com um desenho no caderno.
- Que mudança se deve fazer na posição dos pontos do item **a** para obter menos retas que as obtidas nesse item, porém mais retas que as obtidas no item **b**? Represente essa situação com um desenho no caderno.
- Você consegue mudar a posição dos pontos novamente e ter outra quantidade de retas?

Respostas:

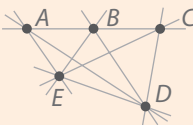
- Com cinco pontos, três a três não colineares, obtém-se dez retas que passam por dois desses pontos.



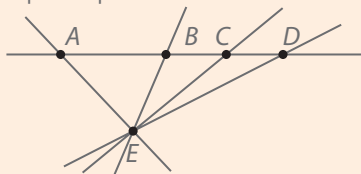
- Se os cinco pontos estiverem alinhados, obtém-se uma única reta.



- A partir do desenho do item **a**, basta alinhar um dos pontos com dois dos outros. Assim, obtemos oito retas.



- Outra possibilidade ocorre quando há quatro pontos colineares. Nesse caso, obtemos cinco retas.



Descobrimos uma propriedade da bissetriz

A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes dos lados desse ângulo. Essa propriedade pode ser verificada pelo aluno por meio de construção com régua e compasso.

Peça aos alunos que desenvolvam os seguintes passos:

- traçar em uma folha de papel sulfite um ângulo qualquer de vértice O ;
- traçar a bissetriz desse ângulo e marcar nela um ponto P qualquer;
- traçar pelo ponto P duas retas perpendiculares aos lados desse ângulo;
- com o compasso, verificar que as distâncias de P ao pé de cada perpendicular são iguais;
- repetir os dois últimos passos, substituindo P por um outro ponto P' .

É importante perguntar aos alunos:

- 1) O fato: “ P e P' são equidistantes dos lados desse ângulo” pode ser extensivo a todos os pontos dessa bissetriz?
- 2) O fato: “Todos os pontos dessa bissetriz são equidistantes dos lados desse ângulo” pode ser extensivo a todos os ângulos?
- 3) As bissetrizes de dois ângulos rasos opostos pelo vértice formam a mediatriz de um segmento da reta suporte dos lados desses ângulos, cujo ponto médio é o vértice do ângulo?

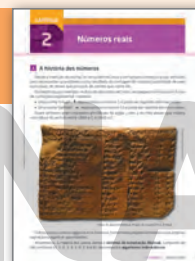
Respostas:

- 1) Espera-se que os alunos percebam que, sendo P e P' pontos quaisquer da bissetriz, esse fato é extensivo a todos os pontos dela.
- 2) Espera-se que os alunos percebam que, sendo o ângulo traçado inicialmente um ângulo qualquer, esse fato é extensivo a todos os ângulos.
- 3) Espera-se que os alunos percebam que a bissetriz de um ângulo raso divide esse ângulo em dois ângulos retos; logo, o par de bissetrizes é perpendicular à reta suporte dos lados dos ângulos rasos.

CAPÍTULO

2

Números reais



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Identificar, representar e comparar números naturais, números inteiros, números racionais e números reais.
- Reconhecer a ampliação dos conjuntos numéricos.
- Calcular e representar na reta numérica a raiz quadrada de um número racional não negativo.
- Construir e interpretar um gráfico de linha.

Orientações gerais do capítulo

Dando continuidade ao estudo dos números, esse capítulo retoma a ideia de número e a evolução dessa ideia e sua aplicação para atender às necessidades do ser humano no que se refere à sua organização social, à compreensão dos fenômenos da natureza e à própria sobrevivência da espécie.

Os alunos deverão, diante de uma dada situação-problema, saber identificar que números poderão empregar para resolvê-la. Para isso, deve-se recorrer a situações cotidianas em que os números estejam presentes.

Para enriquecer o trabalho com números reais, sugerimos o seguinte livro:

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1998. (Coleção Contando a história da Matemática)

Os exercícios da **página 36** abordam as limitações matemáticas das subtrações e da divisão com números naturais e, assim, antecipam o próximo tópico em que essas limitações são superadas com a ampliação dos conjuntos numéricos. Seria interessante conversar com os alunos sobre alguns exemplos cotidianos nos quais os números naturais não podem ser aplicados.

No “Pense mais um pouco...” da **página 36**, o aluno encontra questionamentos que requerem o uso de noções intuitivas sobre análise combinatória. Convém avaliar se há necessidade de abordá-los de maneira concreta, usando objetos físicos, confeccionados pelos alunos, para representar os objetos fictícios que contextualizam os enunciados. É importante pedir aos alunos que façam representações esquemáticas das resoluções. Depois, caso nenhuma dessas representações se aproxime da árvore de possibilidades, o professor deve apresentá-la como outra opção de resolução para a primeira questão e pedir aos alunos que a utilizem para as outras.

O “Pense mais um pouco...” da **página 39** objetiva retomar o conceito de média aritmética (que será visto novamente no capítulo de Estatística no 9º ano) para tratar, de maneira informal e propedêutica, de um conceito fundamental da teoria dos conjuntos: o conjunto dos números racionais é um conjunto denso.

Os **exercícios 7 e 8** se articulam para levar o aluno a elaborar, com suas palavras, um regra prática para escrever frações decimais na forma decimal.

Nos **exercícios 11 e 12**, usa-se a calculadora para explorar a dízima periódica. O texto teórico anterior explica as duas representações dos números racionais: a decimal (em particular a dízima periódica) e a fracionária.

O “Pense mais um pouco...” da **página 43**, aparentemente despretensioso, tem um aspecto interessante e lúdico que pode ser explorado pelo professor: o número de ouro (1,618033...) e a sequência de Fibonacci. A sequência de expressões dada converge para o número de ouro. O professor pode também apresentar aos alunos a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...) e mostrar que o valor de cada expressão é uma fração cujos numerador e denominador são números consecutivos dessa sequência: $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8} \dots$. Um ótimo livro sobre o assunto para consulta do professor é *Razão áurea*, de Mário Livio. Rio de Janeiro/São Paulo: Record, 2007.

O **exercício 21**, ao propor aos alunos que imaginem uma figura e apliquem a reversibilidade da potenciação, antecipa o conceito a ser visto a seguir: o cálculo da raiz quadrada.

O experimento da estimativa, além do uso da calculadora, é que objetiva o **exercício 33**.

Nas **páginas 52, 53 e 54**, a seção “Para saber mais” trabalha de maneira informal e lúdica o teorema de Pitágoras. O exemplo leva ao cálculo do número irracional $\sqrt{2}$, cuja representação na reta numérica será trabalhada no próximo tópico e cuja importância histórica será comentada no próximo “Para saber mais” das **páginas 57 e 58**.

Veja uma variação do **Jogo do enfileirando**, da seção “Diversificando”, da **página 60**. No material, mudam-se as cartas de ação, que passam a ser: “quadrado da soma”, “soma dos quadrados”, “multiplicação dos números” e “adição dos números”. Nas regras, altera-se a quantidade de cartões numerados que cada jogador deve pegar: em vez de quatro, inicialmente cada jogador pega apenas dois cartões numerados. Como um dos objetivos dessa variação do jogo, destaca-se levar o aluno a perceber a diferença entre quadrado de uma soma $[(a + b)^2]$ e soma de dois quadrados $(a^2 + b^2)$.

Sugestão de atividade

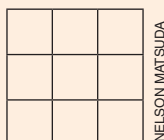
Jogo do bingo das raízes

Número de participantes: 4 jogadores

Material:

- 50 fichas de mesmo tamanho, numeradas de 1 a 50
- 1 lápis

- 4 cartelas do tipo:



- Cada jogador deve montar sua cartela, sem que o outro veja, com nove números diferentes escolhidos dentre estes:

1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16
3,32	3,46	3,61	3,74	3,87	4	4,12	4,24	4,36	4,47
4,58	4,69	4,8	4,9	5	5,1	5,2	5,29	5,39	5,48
5,57	5,66	5,74	5,83	5,92	6	6,08	6,16	6,24	6,32
6,4	6,48	6,56	6,63	6,71	6,78	6,86	6,92	7	7,07

Regras:

- Colocar as fichas sobre a mesa com as faces numeradas viradas para baixo.
- Os participantes combinam a ordem dos jogadores.
- Cada jogador, na sua vez, pega uma ficha e a coloca sobre a mesa para que todos vejam o número sorteado.
- Em seguida, cada jogador calcula a raiz quadrada com aproximação de até duas casas decimais e procura esse valor na sua cartela para riscar.
- Se o jogador não tiver na cartela dele o valor obtido ou se ele errar o cálculo, não marca nada e aguarda a próxima rodada.
- As rodadas continuam até que algum jogador risque todos os números da sua cartela. Esse jogador será o vencedor.

Pensando na estrutura do jogo, respondam:

Entre as fichas numeradas, existe algum número que não pode ser utilizado no jogo?

Resposta: Não, pois todos os números das fichas são racionais positivos e, portanto, têm raiz quadrada.

Sugestão de leitura para o professor

Fibonacci Áureos

Examine novamente a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ..., e desta vez vamos observar as razões dos números sucessivos (calculados aqui até a sexta casa decimal):

$$\frac{1}{1} = 1,000000$$

$$\frac{2}{1} = 2,000000$$

$$\frac{3}{2} = 1,500000$$

$$\frac{5}{3} = 1,666666$$

$$\frac{8}{5} = 1,600000$$

$$\frac{13}{8} = 1,625000$$

$$\frac{21}{13} = 1,615385$$

$$\frac{34}{21} = 1,619048$$

$$\frac{55}{34} = 1,617647$$

$$\frac{89}{55} = 1,618182$$

$$\frac{144}{89} = 1,617978$$

$$\frac{233}{144} = 1,618056$$

$$\frac{377}{233} = 1,618026$$

$$\frac{610}{377} = 1,618037$$

$$\frac{987}{610} = 1,618033$$

Você reconhece esta última razão? À medida que avançamos na sequência de Fibonacci, a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci oscila em torno da Razão Áurea (sendo alternadamente maior e menor), mas se aproxima cada vez mais dela. Se denotamos o n -ésimo número de Fibonacci como F_n e o seguinte como F_{n+1} ,

então descobriremos que a razão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ se aproxima da Razão Áurea Φ quando n aumenta. Esta propriedade foi

descoberta em 1611 (embora possivelmente um anônimo italiano o tenha feito antes) pelo famoso astrônomo alemão Johannes Kepler; entretanto mais de cem anos se passaram antes que a relação entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea fosse provada (e, mesmo assim, não totalmente) pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Kepler, aliás, aparentemente topou com a sequência de Fibonacci por conta própria e não lendo o *Liber abaci*.

Mas por que os termos de uma sequência derivada do acasalamento de coelhos se aproximariam de uma razão definida por meio da divisão de uma linha? Para entender essa conexão, temos de voltar às espantosas frações contínuas que encontramos no capítulo 4. Lembre-se de que vimos que a Razão Áurea pode se escrita como:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Em princípio, poderíamos calcular o valor de Φ por uma série de aproximações sucessivas, na qual interromperíamos as frações contínuas mais e mais adiante. Suponha que tentássemos fazer exatamente isso. Iríamos encontrar a série de valores (lembrete: 1 sobre $\frac{a}{b}$ é igual a $\frac{b}{a}$):

$$1 = 1,00000$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2,00000$$

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,50000$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} = 1,66666$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1,60000$$

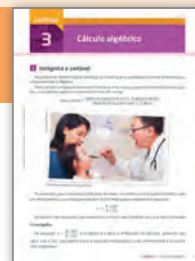
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{8} = 1,62500$$

Em outras palavras, as aproximações sucessivas que encontramos para a Razão Áurea são exatamente iguais às razões dos números de Fibonacci. Não é de espantar então que, à medida que vamos para termos cada vez maiores na sequência, a razão tende para a Razão Áurea. Esta propriedade é descrita de maneira admirável no livro *On Growth and Form* (Sobre crescimento e forma), do famoso naturalista sir D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948). Ele escreve sobre os números de Fibonacci: "Sobre esses números famosos e fascinantes, um amigo matemático me escreve: 'Todo o romance das frações contínuas, relações de recorrência linear, ... recaí sobre eles, e eles são uma fonte de curiosidade inesgotável. Como é interessante vê-los se esforçando para atingir o inatingível, a Razão Áurea, por exemplo; e esta é apenas uma entre centenas de relações desse tipo.'. A convergência para a Razão Áurea, aliás, explica o truque mágico que descrevi no capítulo 4. Se você define uma série de números pela propriedade de que cada termo (começando com o terceiro) é igual à soma dos dois anteriores, então, independentemente dos dois números com os quais você tenha começado, desde que você avance suficientemente na sequência, a razão de dois termos sucessivos sempre se aproxima da Razão Áurea.

Os números de Fibonacci, como a "aspiração" de suas razões – a Razão Áurea –, têm algumas propriedades realmente assombrosas. A lista de relações matemáticas que envolveu os números de Fibonacci é literalmente sem fim. Aqui apresentamos apenas um punhado delas.

Fonte: LIVIO, Mario. *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente*. Trad. Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2007.

Cálculo algébrico



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Distinguir incógnita de variável.
- Expressar situações-problema através da linguagem algébrica e resolvê-las.
- Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
- Identificar termos semelhantes.
- Operar com polinômios.
- Aplicar os conceitos de interpolação e de extrapolação gráfica.

Orientações gerais do capítulo

Nesse capítulo, ampliamos o trabalho iniciado no 7º ano com Álgebra, relacionando, sempre que possível, elementos da Geometria com situações do cotidiano. A abertura do capítulo, por exemplo, introduz os conceitos de incógnita e de variável com a fórmula de Young, usada por pediatras para calcular a dosagem de remédios a ser administrada a uma criança, e uma situação do cálculo do valor a ser pago em um pesque e pague.

Assim, a Álgebra aparece como um instrumento poderoso e necessário a ser entendido, dominado e exercitado pelo aluno para que possa ser aplicado na resolução de diversos problemas do dia a dia.

Para enriquecer o trabalho com números reais, sugerimos o seguinte livro:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Álgebra*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

Os exercícios propostos da **página 63** desenvolvem o uso da linguagem matemática. No **exercício 2**, queremos que o aluno inicialmente exercite a relação entre a Matemática e a língua materna e perceba, por exemplo, a diferença existente entre os itens **e** e **f**. No item **e**, temos a diferença entre os quadrados ($c^2 - d^2$) e, no item **f**, o quadrado da diferença ($(c - d)^2$).

No **exercício 4**, temos um exemplo de como ramos da Matemática se relacionam: no caso Álgebra e Números. O número 574 decomposto em ordens é escrito assim: $5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$, e um número de quatro algarismos, representado por $abcd$, decomposto é: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$. É um bom momento para promover uma discussão com os alunos a respeito da condição de que a não pode ser o algarismo zero.

Na **página 65**, retoma-se, no **exercício 5**, a contextualização da abertura do capítulo sobre a fórmula de Young. Dando continuidade a essa problemática, no **exercício 6**, o aluno é levado a analisar e a sintetizar a fórmula para uma criança de 6 anos, concluindo que a dose de um remédio, para essa idade, é sempre igual à terça parte da dose para adulto.

No **exercício 11**, para que as expressões não possuam valor numérico real, os denominadores devem ser nulos. Assim:

a) $a - b = 0$ ou $a = b$

b) $2a + 3b = 0$ ou $2a = -3b$

O **exercício 12** propõe no enunciado uma forma interessante de abordagem de um problema que é a estratégia de tentativa e erro, caminho trilhado por muitos construtores do conhecimento matemático. Para desvendar o criptograma numérico precisamos descobrir os valores de A, R e B que satisfaçam:

$$(AR)^2 = BAR$$

$$AR \cdot AR = BAR$$

Devemos ter $R^2 = XR$ (sendo X um algarismo). Como R é não nulo, para garantir que os algarismos das unidades sejam iguais, então R pode ser 1, 5 ou 6, pois $1^2 = 1$; $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$.

Testando alguns números para R e lembrando que $A \neq R$, $B \neq A$ e $B \neq R$, temos:

Para $R = 1 \rightarrow 21^2 = 441$ (não serve, pois os algarismos devem ser diferentes)

$\rightarrow 31^2 = 961$ (não serve, pois os algarismos das dezenas devem ser iguais)

$\rightarrow 41^2 = 1.681$ (não serve, pois 1.681 tem quatro algarismos)

Para $R = 5 \rightarrow 15^2 = 225$ (não serve, pois os algarismos devem ser diferentes)

$\rightarrow 25^2 = 625$ (serve, pois os algarismos das dezenas são iguais entre si e diferentes do das unidades, que são iguais entre si, e todos são diferentes do da centena)

$\rightarrow 35^2 = 1.225$ (não serve, pois 1.225 tem quatro algarismos)

Para $R = 6 \rightarrow 16^2 = 256$ (não serve, pois os algarismos das dezenas devem ser iguais)

$\rightarrow 26^2 = 676$ (não serve, pois os algarismos das dezenas devem ser iguais)

$\rightarrow 36^2 = 1.296$ (não serve, pois 1.296 tem quatro algarismos)

Logo, $B = 6$, $A = 2$ e $R = 5$. Portanto, $BARRA = 62.552$, está compreendido entre 60.000 e 65.000.

Outras situações contextualizadas são encontradas nos exercícios da **página 66**. No **exercício 13**, o professor pode explorar o cálculo do volume do gás em questão para outros valores de temperatura. Pode, por exemplo, pedir aos alunos que montem uma tabela em que registrem o valor do volume V para T igual a 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21... e perguntar: “Quando os valores de T aumentam 3 unidades, que variações experimentam os valores de V ? Aumentam ou diminuem? De quanto?”. Assim, de maneira intuitiva, trabalha-se a ideia de função.

Aproveitando o **exercício 15**, o professor pode pedir aos alunos que pesquisem sobre a potência dos aparelhos elétricos (lâmpadas, rádio, televisão, ferro de passar roupa, computador, entre outros) que existem em sua casa e que façam uma tabela com o nome do aparelho, a potência indicada nele, a quantidade mensal de horas que, em média, ele é usado. Com esses dados, os alunos calculam o consumo mensal desses aparelhos e comparam esse total com o consumo indicado na conta de luz de sua casa. É interessante usar esse estudo para discutir o uso racional e necessário da energia elétrica, identificando os procedimentos não adequados ou de desperdícios.

A resolução do **exercício 16** traz uma boa oportunidade para provocar no aluno curiosidade quanto ao fato de o valor numérico da expressão ser constante para todos os valores possíveis dados a x . É interessante que o professor, até como uma forma de motivar a continuidade do estudo de Álgebra, diga aos alunos que o esclarecimento a essa curiosidade será feito quando virem os produtos notáveis no capítulo 5.

O **exercício 17** retoma a situação de patinetes e skates na loja de brinquedos. Pede-se para analisar se o valor numérico da expressão algébrica $(2x + 4y)$ pode ser um número ímpar. O aluno deve concluir que isso não é possível, pois x e y estão sendo multiplicados por números pares.

O aspecto lúdico das atividades matemáticas geralmente desperta a atenção e o interesse nos alunos. O “Pense mais um pouco...” da **página 67** trabalha uma curiosidade numérica com o uso da calculadora. Os alunos, em grupo, devem identificar o padrão das expressões numéricas propostas e relacioná-la com a expressão algébrica $9x + y$. No item **d**, espera-se que, induzidos pela sequência dos resultados dos itens anteriores, os alunos deem a resposta $x = 1.234.567$ e $y = 8$, raciocinando aritmeticamente. No entanto, o professor deve estar atento para o fato de que eles podem dar outro par de valores (existem infinitos) para x e y que contemplem a equação $9x + y = 11.111.111$. O item **e** denota, justamente, a intenção de chamar a atenção para isso, ou seja, despertar o senso crítico do aluno para evitar que ele caia nos enganos ou nas armadilhas que os padrões podem nos levar.

Nos exercícios da **página 69**, a Álgebra, além da Geometria, é trabalhada com medidas.

O conceito de extrapolação é retomado no “Pense mais um pouco...” da **página 74**, em que o aluno trabalha com uma sequência de valores de áreas representadas por monômios.

Após o estudo dos monômios, começamos o trabalho com os polinômios. Para exemplificar, vamos resolver alguns exercícios.

No **exercício 53**, o polinômio que devemos somar com $(2x + y + 3)$ para obtermos $-3x + 2y + 2$ é do tipo $ax + by + c$, onde a , b e c são números reais.

Deve-se escrever a soma pedida para encontrar os valores de a , b e c :

$$(ax + by + c) + (2x + y + 3) = -3x + 2y + 2$$

$$ax + by + c + 2x + y + 3 = -3x + 2y + 2 \quad \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.}$$

$$ax + 2x + by + 1y + c + 3 = -3x + 2y + 2 \quad \leftarrow \text{Agrupamos os termos semelhantes.}$$

$$(a + 2)x + (b + 1)y + c + 3 = -3x + 2y + 2 \quad \leftarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

Em seguida igualamos os coeficientes dos termos semelhantes:

$$a + 2 = -3 \Rightarrow a = -3 - 2 \Rightarrow a = -5$$

$$b + 1 = 2 \Rightarrow b = 2 - 1 \Rightarrow b = 1$$

$$c + 3 = 2 \Rightarrow c = 2 - 3 \Rightarrow c = -1$$

O polinômio $ax + by + c$ que devemos encontrar é: $-5x + y - 1$

No **exercício 54**, temos que encontrar um polinômio que devemos subtrair de $(2x^3 - 3x^2 + x - 4)$ para obtermos o polinômio $(-3x^3 - 5x^2 + 4x + 1)$. Observando os termos desses polinômios, vamos encontrar um polinômio com os seguintes termos: $ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que a, b, c e d são coeficientes numéricos.

$$(2x^3 - 3x^2 + x - 4) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -3x^3 - 5x^2 + 4x + 1 \leftarrow \text{Eliminamos os parênteses.}$$

$$2x^3 - 3x^2 + x - 4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = -3x^3 - 5x^2 + 4x + 1 \leftarrow \text{Agrupamos os termos semelhantes.}$$

$$2x^3 - ax^3 - 3x^2 - bx^2 + x - cx - 4 - d = -3x^3 - 5x^2 + 4x + 1 \leftarrow \text{Reduzimos os termos semelhantes.}$$

$$(2 - a)x^3 + (-3 - b)x^2 + (1 - c)x - 4 - d = -3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$$

Em seguida igualamos os coeficientes dos termos semelhantes:

$$2 - a = -3 \Rightarrow -a = -3 - 2 \Rightarrow a = 5$$

$$-3 - b = -5 \Rightarrow -b = -5 + 3 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$1 - c = 4 \Rightarrow -c = 4 - 1 \Rightarrow -c = 3 \Rightarrow c = -3$$

$$-4 - d = 1 \Rightarrow -d = 1 + 4 \Rightarrow -d = 5 \Rightarrow d = -5$$

Assim, o polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ encontrado é $5x^3 + 2x^2 + (-3)x + (-5)$, o que implica ser: $5x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

No **exercício 71**, o produto da idade de dois irmãos é $x^2 + 10x$, em que a idade do irmão mais novo é x . Para descobrirmos a idade do irmão mais velho, basta dividir o produto $x^2 + 10x$ por x ; assim, o resultado será a expressão que representa a idade desse irmão.

$$(x^2 + 10x) : x = (x^2 : x) + (10x : x) = x + 10$$

Logo, a idade do irmão mais velho é: $x + 10$

A diferença da idade dos dois é 10.

No “Pense mais um pouco...” da **página 87**, retoma-se a escrita de um número natural na forma polinomial. Aqui, espera-se que os alunos tenham acumulado conhecimento para, dado um exemplo do algoritmo da divisão euclidiana, com o qual está familiarizado, explicá-lo com suas próprias palavras. Novamente, tem-se a oportunidade de discutir e identificar uma analogia entre a Álgebra e a Aritmética.

No “Trabalhando a informação” das **páginas 87 e 88**, trabalham-se a interpolação e a extrapolação, que são processos de obtenção dos valores de uma função mediante o conhecimento de seu comportamento em um dado intervalo numérico. É um instrumento muito importante no tratamento da informação e na análise de gráficos que, em jornais e revistas, ilustram e fundamentam matérias e textos sobre assuntos diversos. Pode-se pedir aos alunos que tragam matérias de jornais com gráficos para a análise dos mesmos com o uso desses processos.

Sugestão de atividade

Jogo da memória de monômios semelhantes

Objetivo

Reconhecer monômios semelhantes.

Material

20 cartas com monômios

Regras

- Todas as cartas, viradas para baixo, devem ser espalhadas em uma mesa.
- Cada aluno, na sua vez, vira duas cartas.
- Se as cartas tiverem monômios semelhantes, o aluno pega o par para ele; caso contrário, vira as cartas e deixa-as no mesmo lugar da mesa.
- O jogo continua até que acabem todas as cartas. Ganha o jogo quem tiver o maior número de pares.
- As cartas podem ser:

$2x^2$	$7ab^2$	$3a^2b$	$-8x^3$	xy
$-4x^2$	$-14ab^2$	$-78a^2b$	$46x^3$	$9xy$
$-2,3x^3a$	a^2b^6	$(2x)^5$	b^2	x^3y^2
$3,2ax^3$	$12(ab^3)^2$	$-x^5$	$-b^2$	y^2x

Sugestão de leitura para o professor

Mágica com números?

Neste artigo propomos uma interessante “brincadeira” cuja aplicação em sala de aula instiga a curiosidade do aluno e, possivelmente, propicia a abordagem de alguns temas da teoria dos números, propriedades da sequência de Fibonacci, e algumas questões de convergência.

A brincadeira propriamente dita

Dê ao aluno uma folha com dez linhas em branco, numeradas de 1 a 10, e peça a eles para escolher dois números inteiros, digamos entre 1 e 20, e anotá-los nas duas primeiras linhas. Feitas as escolhas, solicite ao aluno que ele escreva, em cada linha, a partir da terceira, a soma das duas linhas anteriores até chegar na décima linha. Veja o exemplo da tabela ao lado. Terminada a construção da lista, pergunte:

— Qual a soma dos dez números?

Antes que ele termine de fazer a conta e sem conhecer os dois números iniciais que ele escolheu, é possível você dizer qual é a soma desde que ele forneça o sétimo elemento da lista. Se você for hábil na multiplicação por 11, terá a capacidade de fornecer rapidamente o resultado: 11 vezes o elemento da sétima linha. No exemplo da tabela, a soma é 1.727, que é o produto de 11 por 157.

Se isso não for suficiente para despertar a curiosidade do aluno, você pode ainda “adivinhar” o resultado da divisão da linha 10 pela linha 9, com duas casas decimais, e agora sem o conhecimento de qualquer número da lista. Esse quociente, com duas casas decimais, será igual a 1,61 quaisquer que sejam os dois números inteiros escolhidos no início da brincadeira. Pode-se entregar aos alunos, no início das atividades, um envelope fechado contendo o valor 1,61 anotado.

Por que o truque funciona?

Sejam x e y os números escolhidos para as linhas 1 e 2, respectivamente. Os dez números da lista são os da tabela ao lado e sua soma total é $55x + 88y = 11(5x + 8y)$, ou seja, 11 vezes o elemento da sétima linha.

Para explicar a divisão da linha 10 pela linha 9, vamos usar a seguinte propriedade **P**:

Se a, b, c e d são números positivos tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\frac{a+c}{b+d}$ está entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Prova de **P**

De $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ obtemos $ad < bc$, implicando $ab + ad < ab + bc$, que, após

fatoração, nos fornece $a(b+d) < b(a+c)$. Finalmente, dividindo ambos os

membros por $b(b+d)$, chegamos à desigualdade $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. De modo análogo prova-se que $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Voltemos à brincadeira. Temos: $\frac{21}{13} = 1,615384$ e $\frac{34}{21} = 1,619047$, logo, $\frac{21}{13} < \frac{34}{21}$ ou $\frac{21x}{13x} < \frac{34y}{21y}$. Por **P**, o resultado da divisão $\frac{21x+34y}{13x+21y}$ da linha 10 pela 9 estará entre os números $\frac{21}{13}$ e $\frac{34}{21}$, o que confirma que o quociente independe dos valores iniciais x e y , e o seu valor com duas casas decimais é 1,61.

A sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci, abordada em vários exemplares da **RPM** [Revista do Professor de Matemática], é definida recursivamente por:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 1$$

1.	9
2.	14
3.	23
4.	37
5.	60
6.	97
7.	157
8.	254
9.	411
10.	665

1.	x
2.	y
3.	$x + y$
4.	$x + 2y$
5.	$2x + 3y$
6.	$3x + 5y$
7.	$5x + 8y$
8.	$8x + 13y$
9.	$13x + 21y$
10.	$21x + 34y$

Ou seja, seus dois primeiros termos são iguais a 1, e cada termo da sequência a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores. Observe que na atividade sugerida também se obtém um termo da sequência somando-se os dois anteriores, com a diferença que os dois números iniciais não são necessariamente iguais a 1. Logo, é natural que as propriedades da sequência de Fibonacci possam ser reinterpretadas na sequência construída pelo aluno. Escrevendo os primeiros termos da sequência de Fibonacci, encontramos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Observe na tabela da página anterior que esses são os coeficientes de y nas linhas de 2 a 10. A partir da terceira linha vemos também que os coeficientes de x fornecem os termos da sequência de Fibonacci.

Assim, se quisermos instigar de fato o aluno, podemos pedir pra ele avançar na lista. Ele obterá, por exemplo, nas linhas 24 e 25 os números $17.711x + 28.657y$ e $28.657x + 46.368y$, respectivamente. Assim, o quociente desses dois números estará compreendido entre $\frac{28.657}{17.711} \approx 1,6180339$ e $\frac{46.368}{28.657} \approx 1,6180339$. Como ocorre coincidência em sete casas decimais, isso permitirá ao professor “adivinhar” o quociente com um grau de precisão melhor, sem o conhecimento prévio dos números iniciais x e y , ou de qualquer outra informação.

Uma pergunta natural que surge é a seguinte: Se avançarmos na sequência, calculando cada vez mais termos, para qual número os quocientes de termos sucessivos se aproximam? O próximo resultado responderá a essa questão.

Proposição: A razão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci aproxima-se do número $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, cujo valor aproximado com nove casas decimais é 1,618033989.

Uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada, por exemplo, na **RPM 6**, p. 9.

O número de ouro

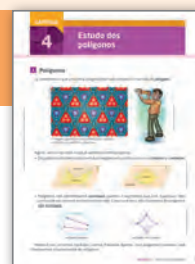
O número irracional $\frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$ é chamado *número de ouro* ou *razão áurea*, e aparece em várias situações, muitas das vezes como sinônimo de beleza, harmonia e perfeição. A razão áurea pode ser vista, por exemplo, em obras de Leonardo da Vinci. Frequentemente aparece nas pinturas renascentistas. Na Geometria, dentre as várias maneiras de dividir um segmento \overline{AB} em duas partes, a divisão áurea é a que parece estar mais de acordo com o conceito de belo do ser humano. A *divisão áurea* consiste em tomar um ponto C entre A e B com \overline{CB} sendo o segmento maior, tal que $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}$. Um cálculo fácil mostra que a razão $\frac{AB}{CB}$ é exatamente o número de ouro (ver **RPM 6**).

Fonte: BONFIM, Lúcia Resende P. Mágica com números?. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 66.

CAPÍTULO

4

Estudo dos polígonos



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Definir polígonos e polígonos, regulares e identificar os elementos de um polígono.
- Calcular o número de diagonais de um polígono qualquer.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos e a dos ângulos externos de um polígono.
- Definir, identificar e aplicar congruência de polígonos.
- Reconhecer e aplicar transformações geométricas: reflexão, translação e rotação.

Orientações gerais do capítulo

Esse capítulo dedica-se ao estudo dos polígonos e, em especial, dos polígonos regulares.

Os cálculos do número de diagonais, da soma das medidas dos ângulos internos e da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono têm abordagem direta e simples, sempre apoiada em ilustrações e fotos, que facilitam o entendimento dos textos, a generalização e a sistematização dos resultados.

O estudo dos polígonos progride com a definição de polígono regular e com o cálculo das medidas do ângulo interno e do ângulo externo.

O conceito de congruência, visto com triângulos, é retomado e ampliado para polígonos quaisquer e, em seguida, subsidia o estudo das transformações geométricas que geram figuras congruentes, ou seja, a reflexão, a translação e a rotação.

Para retomada de alguns conceitos já estudados pelos alunos, sugerimos os seguintes livros:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Ângulos*. São Paulo: Atual, 1995. (Coleção Pra que serve a Matemática?)

MACHADO, Nílson José. *Polígonos, centopeias e outros bichos*. São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

O **exercício 1** articula esse capítulo com o capítulo 1, uma vez que o cálculo da medida (60°) do ângulo interno de vértice C do trapézio $ABCD$ tem por base o fato de que ângulos colaterais internos são suplementares. A partir desse resultado, o aluno calcula a soma dos ângulos internos (360°) do quadrilátero. Mais à frente poderá verificar esse cálculo aplicando a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. Se achar conveniente, o professor pode sugerir um exercício análogo, porém aplicado a um trapézio qualquer.

O **exercício 5** propõe duas experiências, em grupo, com o objetivo de induzir o aluno a concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° : a primeira experiência solicita o uso do transferidor para medir; a segunda sugere a manipulação de papel com a forma de triângulo e pede aos alunos que vinculem o ângulo raso (sugerido) à estimativa da soma das medidas dos três ângulos recortados.

A princípio, um quebra-cabeça constitui um desafio e uma atividade lúdica. É o que encontramos no “Pense mais um pouco...” da **página 95**. Antes de montar a cruz, orientar os alunos a explorar as medidas angulares e lineares das peças (triângulo, trapézios isósceles e trapézio retângulo). Depois de montada a cruz, estude com eles os ângulos formados na reunião das figuras. Esse material também pode ser explorado pedindo a eles que componham retângulos com duas, com três e com quatro peças. E ainda há outras possibilidades tais como formar triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono etc.

Para a resolução dos exercícios da **página 96**, os alunos podem raciocinar construindo figuras como se fossem enunciados gráficos.

Para o **exercício 10**, no entanto, a abordagem algébrica é um caminho mais adequado. Veja a resolução:

a) $d = 6n$

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 6n$$

$$n \cdot (n - 3) = 12n$$

$$n^2 - 15n = 0$$

$$n \cdot (n - 15) = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 15$$

Portanto, o polígono tem 15 lados.

b) $d = 4n$

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 4n$$

$$n \cdot (n - 3) = 8n$$

$$n^2 - 11n = 0$$

$$n \cdot (n - 11) = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 11$$

Portanto, o polígono tem 11 lados.

No **exercício 11**, o aluno deve traçar as diagonais a partir de um de seus vértices em cada figura, construindo, assim, o chamado “enunciado gráfico”, e depois verificar a quantidade de triângulos formada. A relação vai se tornando perceptível enquanto o aluno vai respondendo aos itens **a**, **b**, **c** e **d**. Espera-se que o acúmulo das informações desses itens o leve a generalizar e a resolver o item **e**: a quantidade de triângulos formados nessa condição é o número de lados menos 2. O aluno tem, assim, a oportunidade de antecipar uma ideia que será trabalhada no próximo tópico teórico.

No “Pense mais um pouco...” da **página 97**, para verificar se a afirmação “Atrás de um número par tem sempre um triângulo” é verdadeira, devemos considerar:

- Nada podemos dizer a respeito de que figura está atrás de um cartão com número ímpar; logo, pode haver qualquer figura ou nem haver figura. Portanto, não precisamos virar o primeiro cartão da esquerda.
- O segundo cartão pode ter, no verso, um número par ou um número ímpar que a frase será verdadeira; portanto, não precisamos virá-lo.
- No verso do terceiro cartão, deve haver um triângulo; devemos virar o cartão para conferir.
- No verso do terceiro e do quarto cartão, não pode haver um número par; devemos virá-los para conferir. Portanto devemos virar o terceiro, o quarto e o quinto cartão.

No **exercício 19**, sem apresentar a estrutura formal de um teorema, propõe-se uma “tese”: “a soma dada por $[S_e(2n) + S_i(2n)]$ é igual ao dobro da soma dada por $[S_e(n) + S_i(n)]$ ”, em que $S_e(n)$ representa a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados e $S_i(n)$ representa a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. Para o grupo de alunos, fica estabelecido um caminho procedimental por meio de uma sequência de itens (inicialmente com casos particulares e depois generalizando) que os induzem a concluir essa “tese”.

A seguir, apresentamos a resolução dos últimos três itens que são generalizações dos anteriores.

d) Devemos verificar se existe algum valor de n que satisfaça a condição: $S_i(2n) = 2 \cdot S_i(n)$.

$$(2n - 2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$2n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = 2 \cdot n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 2 \cdot 180^\circ$$

$$-360^\circ = -720^\circ$$

Chegamos a uma sentença falsa; portanto, não existe valor de n que satisfaça a condição acima.

e) Como a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono é igual a 360° , não existe valor de n que satisfaça a condição $S_e(2n) = 2 \cdot S_e(n)$.

f) Para terminar, devemos verificar se existe algum valor de n que satisfaça a condição:

$$[S_e(2n) + S_i(2n)] = 2 \cdot [S_e(n) + S_i(n)]$$

$$1^\circ \text{ membro: } [(2n - 2) \cdot 180^\circ + 360^\circ] = [2n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ + 360^\circ] = 2n \cdot 180^\circ = n \cdot 360^\circ$$

$$2^\circ \text{ membro: } 2 \cdot [S_i(n) + S_e(n)] = 2 \cdot [(n - 2) \cdot 180^\circ + 360^\circ] = 2 \cdot [n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ + 360^\circ] = 2 \cdot n \cdot 180^\circ = n \cdot 360^\circ$$

Portanto, temos: $[S_i(2n) + S_e(2n)]$ é o dobro de $[S_i(n) + S_e(n)]$.

O **exercício 26** traz uma composição interessante de três polígonos regulares – o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular – que cobre o plano em torno de um vértice. Esses são os únicos polígonos que, em separado, também cobrem o plano em torno de um vértice. Seria interessante pedir aos alunos que construam uma composição de triângulos equiláteros justapostos e verifiquem que não haverá sobras ou remontagem deles. Analogamente, devem fazer uma composição com quadrados e também com hexágonos regulares.

No **exercício 27**, um robô é programado para dar 5 passos e girar 30° para a direita e repetir esse processo até atingir o ponto O . É interessante promover uma discussão com os alunos e perguntar qual é o fato que garante que o robô deve atingir novamente o ponto O . Os alunos devem perceber que 30° é um divisor de 360° ; logo, haverá um número inteiro de giros de 30° para dar uma volta completa, ou seja, para o robô girar 360° .

Para a resolução pode-se pedir aos alunos que esbocem um polígono regular com um ângulo externo medindo 30° . Eles descobrirão que o polígono tem 12 lados e, nesse caso, basta multiplicar 12 por 5 passos e eles terão o total de 60 passos.

Outra resolução é a algébrica:

$$a_e = 360^\circ : n$$

$$30^\circ = 360^\circ : n$$

$$n = 360^\circ : 30^\circ$$

$$n = 12$$

O polígono tem 12 lados; como em cada lado o robô dá 5 passos, ao todo o robô dará 60 passos.

Assim como no exercício 27, no **exercício 28** também é interessante promover uma discussão com os alunos e perguntar qual é o fato que garante que a faixa vermelha dará a volta na toalha e formará um polígono. E, novamente, eles devem perceber que 40° é um divisor de 360° ; logo, haverá um número inteiro de giros de 40° para dar uma volta completa, ou seja, para a fita completar um giro de 360° . Esse bloco de atividades é coroado com o “Pense mais um pouco...” da **página 104**, em que os alunos, em grupo, analisam de maneira mais ampla todos os possíveis polígonos regulares cuja medida do ângulo seja um divisor de 360° , ou seja, todas as possibilidades de medidas de giros constantes que constroem um percurso com formato de polígono regular.

Com o “Pense mais um pouco...” da **página 109**, os alunos, em grupo, são levados a estabelecer equivalências entre reflexão e rotação. Peça que pesquisem outras possíveis equivalências entre as transformações geométricas.

Destacamos agora a resolução de alguns exercícios complementares:

exercício complementar 9

A menor diagonal de um polígono regular forma um triângulo isósceles com os dois lados consecutivos que têm vértices comuns a seus extremos. Esse triângulo tem dois ângulos de 30° , o que implica que o outro ângulo interno mede 120° ($180^\circ - 30^\circ - 30^\circ$), ou seja, o ângulo externo do polígono procurado mede 60° ($180^\circ - 120^\circ$).

Como $a_e = 360^\circ : n$, temos:

$$60^\circ = 360^\circ : n$$

$$n = 360^\circ : 60^\circ$$

$$n = 6$$

Portanto, a medida dos ângulos internos desse polígono é $6 \cdot 120^\circ$, ou seja, 720° .

exercício complementar 11

Convém lembrar aos alunos que eles devem organizar todos os dados do enunciado, traduzindo-os para a linguagem matemática.

Temos dois polígonos regulares P_1 e P_2 . O número de lados de P_1 é o dobro de P_2 , logo:

$$n_1 = 2 \cdot n_2 \text{ (I)}$$

A outra informação é que somando 36° à medida do ângulo interno de P_2 , obtém-se a medida do ângulo interno de P_1 , logo:

$$a_2 + 36^\circ = a_1, \text{ sendo } a_1 \text{ a medida do ângulo interno de } P_1 \text{ e } a_2 \text{ a medida do ângulo interno de } P_2 \text{ (II).}$$

De (II) temos:

$$\frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + 36^\circ = \frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1}, \text{ substituindo } n_1 \text{ por } (2 \cdot n_2, \text{ ou seja, } 2n_2):$$

$$\frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + 36^\circ = \frac{(2n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{2n_2}$$

$$\frac{2(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{2n_2} + \frac{36^\circ \cdot 2n_2}{2n_2} = \frac{(2n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{2n_2}$$

$$2n_2 \cdot 180^\circ - 4 \cdot 180^\circ + 72^\circ n_2 = 2n_2 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ$$

$$72^\circ n_2 = 2 \cdot 180^\circ \Rightarrow n_2 = 5$$

Dessa forma, o polígono P_2 tem 5 lados.

Sugestão de leitura para o professor

VOCÊ ACHA QUE O
OCTÓGONO
CONSTRUÍDO ABAIXO É
REGULAR? SIM? POIS É...
É POR ISSO QUE É PERVERSO!

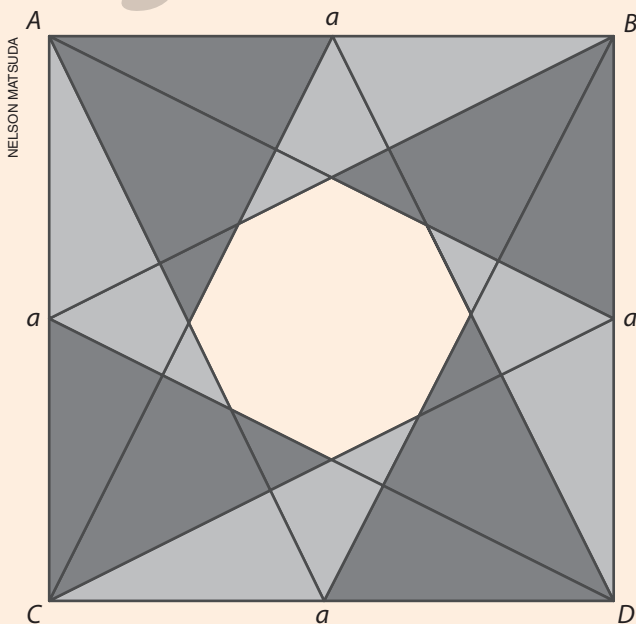
Octógono perverso

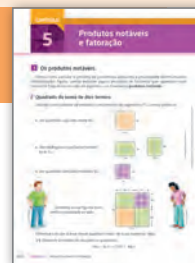
Octógono: perverso ou genial?

Comentários enviados por leitores

1. Um leitor não achou o octógono tão perverso assim e notou nele peculiaridades curiosas:
 - há simetria em relação às diagonais que contêm o centro do quadrado;
 - os 8 lados são iguais e também são iguais os ângulos opostos;
 - os triângulos retângulos cujas hipotenusas ligam um vértice do quadrado ao ponto médio de um lado e não têm lados em comum com o quadrado são semelhantes ao triângulo de lados 3, 4 e 5.
2. Outro leitor e colaborador da revista preferiu chamar o tal octógono de genial e não de perverso, pois é possível calcular várias medidas de ângulos e segmentos que se formam, mostrando que o octógono não é regular de dois modos: verificando que seus ângulos internos não são todos congruentes entre si ou constatando que há duas diagonais que passam pelo centro do quadrado e que não são congruentes, uma delas é a metade do lado do quadrado de partida e a outra é a terça parte da diagonal desse quadrado. Sugere, então, um outro problema ao leitor: obter por meio de dobras um octógono regular a partir de uma folha quadrada de papel.

Elaborado com dados obtidos em:
ARCONCHER, Cláudio. Octógono perverso. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 36, 1997.





Produtos notáveis e fatoração

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Identificar e aplicar os produtos notáveis.
- Escrever polinômios na forma fatorada, aplicando a propriedade distributiva e os produtos notáveis.

Orientações gerais do capítulo

Ao longo desse capítulo, o aluno verá a aplicação, em expressões algébricas, de conceitos já estudados, tais como operações e suas propriedades.

Inicialmente, são considerados alguns produtos de binômios, chamados produtos notáveis, cuja frequência no cálculo algébrico justifica um estudo sistematizado sobre o desenvolvimento dessas expressões na forma de polinômios. Esse estudo é feito com a ajuda de figuras geométricas, imprescindíveis à compreensão dos resultados.

Em uma segunda etapa, o capítulo trata de como uma expressão algébrica pode ser escrita na forma de fator. Para isso, além da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, é importante que o aluno perceba a aplicação dos produtos notáveis estudados no início do capítulo.

Convém observar para os alunos que este é um momento em que eles estão adquirindo habilidade em instrumentos que serão muito úteis, por exemplo, na simplificação de frações algébricas, na resolução de equações etc.

Para desenvolver mais o estudo com a Álgebra, sugerimos o livro:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Álgebra*. São Paulo: Atual, 2007. (Coleção Pra que serve Matemática?)

Coerente com desenvolvimento teórico, os exercícios das **páginas 115 e 116** mantêm o vínculo da Álgebra com a Geometria e vice-versa. A resolução do **exercício 7** leva à generalização do cálculo da área de um jardim quadrado cuja ampliação é pedida, tendo como parâmetro a medida anterior do lado desse quadrado. Esse tipo de procedimento pode ser útil na elaboração de projetos. Esse vínculo pode ser percebido em outras questões propostas ao longo do capítulo e pode ser reforçado por outras que o professor venha a elaborar.

Observe a resolução do **exercício 14**, em que o lado de cada quadrado azul mede $2x$; logo, a área de cada um é igual a $4x^2$ e a área dos quatro juntos é $16x^2$. A medida do lado do quadrado vermelho é $(10 - 4x)$; logo, sua área é dada por:

$$(10 - 4x)^2 = (10 - 4x) \cdot (10 - 4x) = 100 - 2 \cdot 10 \cdot 4x + 16x^2 = 100 - 80x + 16x^2$$

Para obter o valor de x de modo que a soma das áreas dos quadrados azuis seja igual à área do quadrado vermelho, basta impor a seguinte igualdade:

$$16x^2 = 100 - 80x + 16x^2$$

$$80x = 100$$

$$x = 1,25$$

Portanto, o valor de x é igual a 1,25.

Nesse caso, a área de um retângulo branco é:

$$2x \cdot (10 - 4x) = 20x - 8x^2 = 20 \cdot 1,25 - 8 \cdot (1,25)^2 = 25 - 8 \cdot 1,5625 = 25 - 12,5 = 12,5$$

Assim, a área dos quatro retângulos é: $4 \cdot 12,5 = 50$

Nesse capítulo, o cálculo mental é contemplado, por meio de uma associação entre Aritmética e Álgebra, com a aplicação do quadrado da soma, do quadrado da diferença e do produto da soma pela diferença a cálculos numéricos, conforme se vê no "Pense mais um pouco..." da **página 116**, no "Pense mais um pouco..." da **página 119** e no **exercício 20**, que deve ser feito em grupo.

No “Pense mais um pouco...” da **página 116** queremos que os alunos percebam uma aplicação da regra do quadrado da soma de dois termos para calcular potências de uma maneira mais rápida e até mentalmente. Queremos que o aluno mentalize os seguintes cálculos:

- a) $12^2 = (10 + 2)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2 = 100 + 40 + 4 = 144$
- b) $24^2 = (20 + 4)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 4 + 4^2 = 400 + 160 + 16 = 576$
- c) $35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1.225$
- d) $52^2 = (50 + 2)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2.500 + 200 + 4 = 2.704$

No “Pense mais um pouco...” da **página 119**, queremos que os alunos percebam uma aplicação da regra do quadrado da diferença de dois termos para calcular potências de uma maneira mais rápida e até mentalmente. Queremos que o aluno mentalize os seguintes cálculos:

- a) $29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$
- b) $38^2 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1.600 - 160 + 4 = 1.444$
- c) $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10.000 - 200 + 1 = 9.801$
- d) $57^2 = (60 - 3)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 3 + 3^2 = 3.600 - 360 + 9 = 3.249$

No “Para saber mais” das **páginas 124 e 125**, tem-se mais uma aplicação de cálculo mental, agora com a fatoração. Ao se apropriar de técnicas de cálculo mental, o aluno agiliza seus procedimentos e adquire autoconfiança. Isso deve ser incentivado.

A inter-relação entre os diversos campos da Matemática dá coesão ao estudo dessa disciplina, e esse aspecto deve ser realçado e sua busca incentivada nos alunos. O “Diversificando” da **página 137**, *A Álgebra explica a Aritmética*, é mais um exemplo do que pode ser trabalhado nesse sentido. Aqui, além do aspecto lúdico e curioso vê-se mais um caso de cálculo mental. Em um segundo momento, é pedido ao aluno que verifique a validade desse procedimento no cálculo de algumas potências, fazendo uso de uma calculadora. Outros exemplos são o “Pense mais um pouco...” da **página 127** (em que se pede a demonstração do fato aritmético: a soma de dois números ímpares é um número par) e o “Pense mais um pouco...” da **página 131** (em que o aluno é induzido, após a resolução de alguns itens, a perceber e a escrever outro fato aritmético: a diferença dos quadrados de dois números naturais consecutivos é igual à soma desses números).

A elaboração de questões pelo aluno é uma importante estratégia no sentido de levá-lo a criar, a desenvolver o senso crítico, a aprender a pesquisar e a ensinar. Há exercícios, como os **exercícios 9, 13 e 46**, que fazem essa proposta. É importante que o professor reforce essa estratégia.

O **exercício 31** aproveita a fatoração aprendida e retoma a resolução de equações. Nesse momento, não é importante que os alunos saibam que a equação é de 2º grau; o objetivo é que eles usem a fatoração para encontrar o valor de x procurado.

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $x^2 + 7x = 0$ | Convém observar para o aluno as etapas de resolução: |
| $x \cdot (x + 7) = 0$ ← | Colocando o fator comum x em evidência. |
| $x = 0$ ou $x + 7 = 0$ ← | Como o produto é zero, então um dos fatores é zero. |
| $x = 0$ ou $x = -7$ ← | Esses são os valores de x que satisfazem a equação. |

Para os demais itens, o procedimento é o mesmo.

- b) $m^2 - 5m = 0$
 $m \cdot (m - 5) = 0$
 $m = 0$ ou $m - 5 = 0$
 $m = 0$ ou $m = 5$

- c) $3y^2 - 18y = 0$
 $3y \cdot (y - 6) = 0$
 $3y = 0$ ou $y - 6 = 0$
 $y = 0$ ou $y = 6$

- d) $2x^2 - 9x = 0$
 $x \cdot (2x - 9) = 0$
 $x = 0$ ou $2x - 9 = 0$
 $x = 0$ ou $x = \frac{9}{2}$

- e) $x^2 = x$
 $x^2 - x = 0$
 $x \cdot (x - 1) = 0$
 $x = 0$ ou $x - 1 = 0$
 $x = 0$ ou $x = 1$

- f) $4x^2 = -3x$
 $4x^2 + 3x = 0$
 $x \cdot (4x + 3) = 0$
 $x = 0$ ou $4x + 3 = 0$
 $x = 0$ ou $4x = -3$
 $x = 0$ ou $x = -\frac{3}{4}$

No **exercício 40**, dois amigos, cujas idades correspondem a dois números ímpares consecutivos, sabem que a diferença entre os quadrados das idades é igual a 40. Para determinar essas idades, observamos que, se $2x$ representa um número par, podemos afirmar que o sucessor e o antecessor de $2x$ são dois números ímpares, então as idades desses amigos podem ser representadas por $2x - 1$ e $2x + 1$, e vale a igualdade:

$$(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 40$$

$$[(2x + 1) + (2x - 1)] \cdot [(2x + 1) - (2x - 1)] = 40 \quad \leftarrow \text{Usando a fatoração da diferença de dois quadrados.}$$

$$[2x + 1 + 2x - 1] \cdot [2x + 1 - 2x + 1] = 40$$

$$[4x] \cdot [2] = 40$$

$$x = 5$$

Então, temos:

$$2x + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$2x - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Portanto, as idades são 9 anos e 11 anos.

No **exercício 45**, a fatoração dos polinômios deve ser feita em duas etapas. Convém lembrar aos alunos que nem sempre a primeira fatoração deve ser a de colocar o fator comum em evidência, como pode ser observado a seguir.

a) $2x^3 + 4x^2 + 2x = 2x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 2x \cdot (x + 1)^2$

b) $5a^2 - 20a^2 + 20 = 5 \cdot (a^2 - 4a + 4) = 5 \cdot (a - 2)^2$

c) $3x^3 + 18x^2 + 27x = 3x \cdot (x^2 + 6x + 9) = 3x \cdot (x + 3)^2$

d) $7x^2y^2 - 14xy + 7 = 7 \cdot (x^2y^2 - 2xy + 1) = 7 \cdot (xy - 1)^2$

e) $9a^3 - 25a^2 = a \cdot (9a^2 - 25) = a \cdot [(3a)^2 - (5)^2] = a \cdot [(3a + 5) \cdot (3a - 5)] = a(3a + 5) \cdot (3a - 5)$

f) $16x^4 - 8x^2 + 1 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 1 + 1^2 = (4x^2 - 1)^2 = [(2x)^2 - 1^2]^2 = [(2x + 1) \cdot (2x - 1)]^2 = (2x + 1)^2 \cdot (2x - 1)^2$

No **exercício 48**, para obter os números reais que são soluções dessas equações, precisamos escrever cada polinômio na forma fatorada. Vamos ver:

a) $x^2 + 18x + 81 = 0$

$$(x + 9)^2 = 0$$

$$(x + 9) \cdot (x + 9) = 0$$

$$x + 9 = 0 \text{ ou } x + 9 = 0$$

$$x = -9 \text{ ou } x = -9$$

Portanto, x é igual a -9 .

Para os demais itens, o procedimento é o mesmo.

b) $y^2 - 2y + 1 = 0$

$$(y - 1)^2 = 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Convém observar ao aluno as etapas de resolução:

Como o produto é zero, então um dos fatores é nulo.

Temos o mesmo binômio.

Logo, a solução é a mesma.

c) $4a^2 - 12a + 9 = 0$

$$(2a - 3)^2 = 0$$

$$2a - 3 = 0$$

$$a = \frac{3}{2}$$

Sugestão de leitura para o professor

Visualizando as equações

Euclides de Alexandria

Com a morte de Alexandre, o Grande, no ano 324 a.C., o império mundial que ele havia construído foi dividido entre os seus generais.

O Egito ficou sob o domínio de Ptolomeu.

Na cidade de Alexandria, Ptolomeu criou um centro de ensino e pesquisa chamado Museu, que significa refúgio das musas. Mais de 500 mil manuscritos foram guardados na biblioteca do Museu.

Muitos dos grandes cientistas da época trabalharam nesse Museu. Entre eles estava Euclides de Alexandria.

O Museu funcionava como uma espécie de universidade moderna. Entre os professores, alguns se dedicavam à pesquisa, outros eram bons administradores, e uma parte se destacava pela capacidade de ensinar.

Euclides fazia parte deste último grupo. Foi, provavelmente, por esta razão que o livro *Os Elementos* – escrito por Euclides por volta de 300 a.C. e depois copiado e recopiado centenas de vezes – teve uma repercussão tão grande nos meios científicos. Durante mais de 20 séculos os homens estudaram a Geometria, segundo Euclides.

Todo estudante de Geometria tem uma dívida de gratidão para com Euclides. Mas os estudantes de Álgebra também devem saber algo sobre ele.

Para um estudante de hoje, a Álgebra começa quando as quantidades desconhecidas passam a ser representadas por letras.

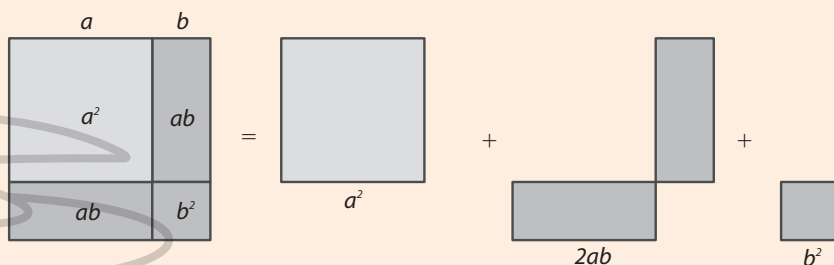
Na sua “Álgebra” Euclides representava as quantidades desconhecidas por segmentos de retas, quadrados, retângulos, triângulos, etc.

A Álgebra Geométrica

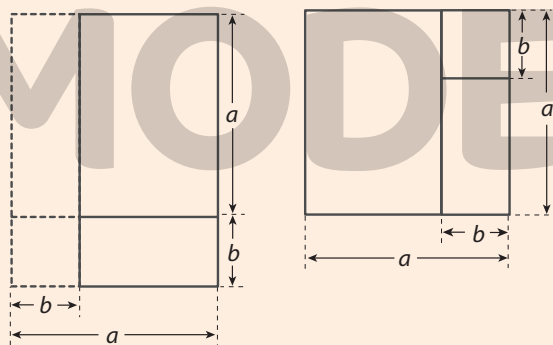
Veja: nós entendemos o produto notável $(a + b)^2$ como “o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo”, isto é:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Euclides e seus colegas de Alexandria também manejavam com muita facilidade este produto notável, mas interpretando-o através desta construção geométrica:



Você consegue reconhecer nesta construção geométrica:



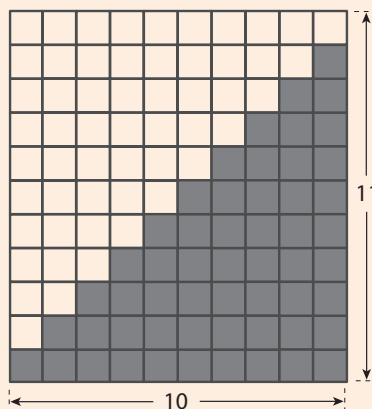
o produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$?

Ou através da figura ao lado você consegue entender por que

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

e assim conseguir demonstrar que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} ?$$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUUDA

NELSON MATSUUDA

Euclides realiza muitas construções semelhantes a estas em *Os Elementos*, utilizando-se somente de uma régua e de um compasso. Além disso, a régua não tem qualquer tipo de marcação, nela não está assinalado nenhum milímetro, nenhuma medida.

Euclides e os antigos matemáticos preocupavam-se apenas com as relações que podiam obter geometricamente. Para eles, os cálculos e as medidas eram para serem efetuados unicamente por escravos.

Um problema simples como este formulado pelos matemáticos egípcios, há cerca de 4.000 anos:

*Um número, o seu dobro,
a sua terça parte,
todos ao juntar-se fazem 10.
Diga-me, qual é o número?*

aprendemos a expressar através de uma equação:

$$x + 2x + \frac{x}{3} = 10$$

No tempo de Euclides a Álgebra simbólica estava ainda muito distante de ser inventada; por isso os matemáticos da antiguidade usavam construções geométricas para estudar equações.

Veja como podemos *visualizar* a resolução desta equação por meio de um método descrito por Euclides no livro 2 de *Os Elementos*, e que passou para a história com o nome de *Álgebra Geométrica*:

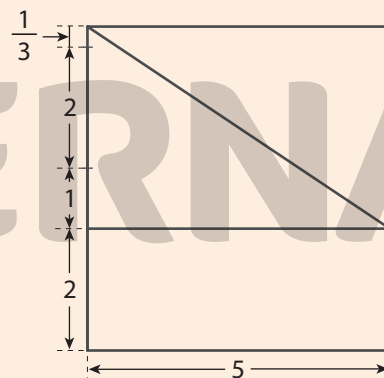
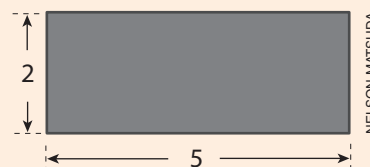
- Em primeiro lugar construímos um retângulo de área 10.

Em vez do retângulo ao lado, poderíamos ter desenhado qualquer outro, cujos lados tivessem estas medidas: 10 e 1; 4 e 2,5; 1,25 e 8 etc. Procuramos traduzir o problema através de área de figuras planas. Esta primeira construção corresponde à seguinte passagem na equação:

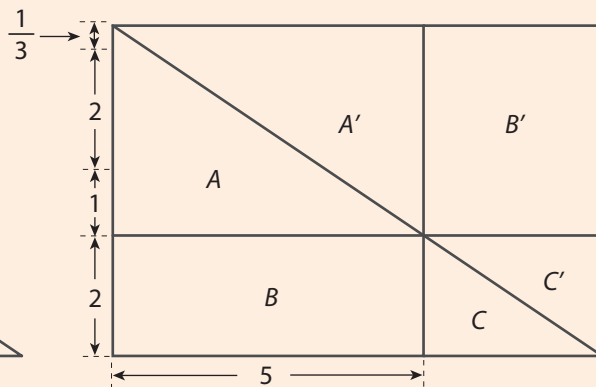
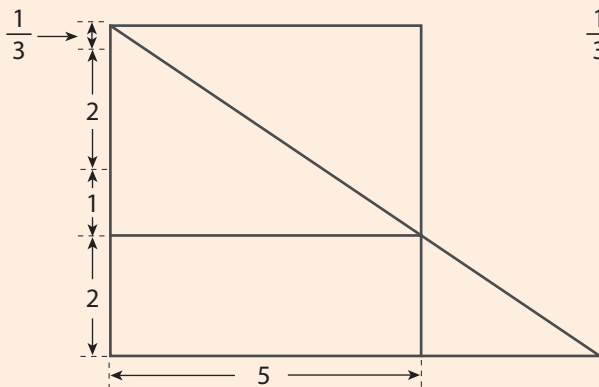
$$x + 2x + \frac{x}{3} = 10 \Rightarrow x + 2x + \frac{x}{3} = 5 \cdot 2$$

- “Anexamos” a este retângulo, era assim que se escrevia antigamente, um novo retângulo de lados 5 e $1 + 2 + \frac{1}{3}$.

$$x \cdot \left(1 + 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot 2$$



- Com os passos seguintes vamos construir um outro retângulo de área igual à área do retângulo de lados 5 e 2. Por isso, prolongamos a diagonal do retângulo até ela cortar o prolongamento do lado 5 e formamos um outro retângulo:



Observe:

$$\text{área de } A + \text{área de } B + \text{área de } C = \text{área de } A' + \text{área de } B' + \text{área de } C'$$

Como área de $A = \text{área de } A'$ e área de $C = \text{área de } C'$,
temos que área de $B = \text{área de } B'$.

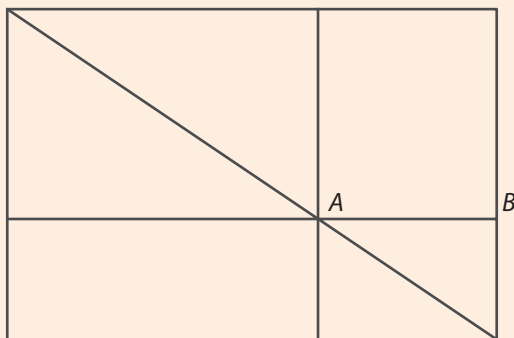
Portanto:

$$x \cdot \left(1 + 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot 2$$

Para os matemáticos de hoje, a resposta do problema é o número real

$$x = \frac{5 \cdot 2}{1 + 2 + \frac{1}{3}} = \dots = 3$$

A “Álgebra” de Euclides significa a construção desta figura:



NELSON MATSUDA

e a solução da “equação” é o segmento AB .

Dois motivos impediram que a Álgebra Geométrica tivesse um papel muito mais destacado no estudo das equações na Matemática:

- um motivo político: a sociedade grega desta época era escravocrata e o desenvolvimento da ciência refletia a estrutura social. Assim, os antigos matemáticos gregos consideravam os cálculos com números e medidas um assunto de escravos, indigno de cidadãos livres;
- o outro motivo era puramente matemático: os antigos matemáticos gregos ficaram surpresos e desorientados ao descobrirem que havia alguns problemas impossíveis de serem resolvidos por meio da Álgebra Geométrica de Euclides. Mas não foram somente eles.

Por mais de 2.000 anos, matemáticos de outros povos também tentaram resolver esses problemas, usando somente uma régua não graduada e um compasso.

E a história de um destes problemas, chamados de *problemas insolúveis da antiguidade*, é que vamos discutir.

A quadratura do círculo

Quando uma pessoa está fazendo um cálculo errado, absurdo, é comum dizer que ela quer “quadrar o círculo”.

Esta expressão significa, simplesmente, que dado um círculo devemos construir um quadrado que tenha exatamente a mesma área do círculo, usando somente uma régua não graduada e um compasso.

É muito fácil construir um quadrado de área aproximadamente igual à de um círculo dado.

Veja: a área de um círculo de raio r é igual a πr^2 . Construir um quadrado de área igual à de um círculo de raio 1 equivale a construir um segmento ℓ dado por

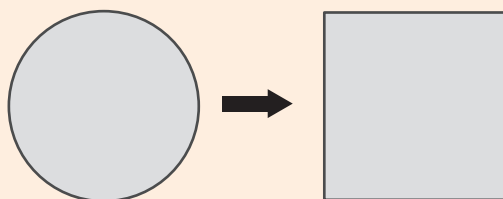
$$\ell \cdot \ell = \pi 1^2, \text{ ou seja, } \ell = \sqrt{\pi}$$

Sabemos que $\pi \approx 3,14$ e, portanto, $\ell \approx 1,772$. Podemos, agora, construir um quadrado de lado 1,772 – a sua área será *aproximadamente* igual à área do círculo de raio 1.

Durante cerca de 20 séculos, os mais brilhantes matemáticos de todo o mundo não conseguiram construir, usando somente régua e compasso, um quadrado que tivesse exatamente a mesma área que um círculo dado.

É este o significado da Álgebra Geométrica de Euclides: efetuar construções com régua e compasso seguindo os passos da demonstração de um teorema.

Os numerosos esforços para quadrar o círculo duraram desde o século 3 a.C. até o século 19.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Em 1882, um matemático alemão, chamado Lindemann, mostrou a impossibilidade de se resolver o problema através da Álgebra Geométrica: é impossível construir um segmento $\sqrt{\pi}$ usando-se apenas uma régua e um compasso. A demonstração requer uma Matemática bastante sofisticada.

A Álgebra Geométrica dos antigos matemáticos gregos e a regra da falsa posição do Egito Antigo representaram, de um certo modo, o esforço dos matemáticos da antiguidade para encontrar uma linguagem apropriada para as equações.

Mas os dois métodos apresentavam falhas:

- a Álgebra Geométrica não tinha resposta para vários problemas;
- a regra da falsa posição parecia uma “receita”, sem nenhuma justificativa ou explicação.

Por volta do ano 400 d.C., uma ideia simples e audaciosa de um matemático de Alexandria, chamado Diofante, iria começar a mudar todo o aspecto da Matemática: começavam a surgir os primeiros símbolos matemáticos, inicialmente na forma de abreviação de palavras.

Mas, esta já é uma outra história.

Fonte: GUELLI, Oscar. Visualizando as equações. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 16.

CAPÍTULO

6

Estudo dos triângulos



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Classificar triângulos e identificar seus elementos.
- Construir triângulos com régua e compasso.
- Reconhecer e aplicar as propriedades das cevianas (mediana, bissetriz e altura) de um triângulo e dos centros geométricos determinados por elas.
- Identificar triângulos congruentes e aplicar o conceito e os casos de congruência de triângulos.
- Identificar e aplicar a estrutura de um teorema.
- Demonstrar teoremas geométricos.

Orientações gerais do capítulo

Neste livro retomamos o estudo dos triângulos com uma revisão sucinta sobre os elementos que o constituem, sobre a classificação quanto aos lados e aos ângulos e sobre a construção com régua e compasso.

Em seguida, veremos outros elementos do triângulo igualmente importantes conhecidos como cevianas. Cevianas são segmentos que têm uma das extremidades em um dos vértices do triângulo e a outra em um ponto da reta suporte do lado oposto. A interseção de cada tipo de ceviana aqui estudada – mediana, bissetriz e altura – constitui um ponto que é um centro geométrico do triângulo: baricentro, incentro e ortocentro, respectivamente.

O estudo da congruência de triângulos dá continuidade ao que foi visto para os polígonos e subsidia as últimas partes do capítulo que são as demonstrações de propriedades dos triângulos.

A essa altura, o aluno já reúne condições intelectuais para compreender e reproduzir a abordagem dos conceitos e ideias da Matemática de maneira mais sistematizada e axiomática do que vinha fazendo até aqui.

Através dos exercícios da **página 143**, que pedem construções geométricas, o aluno sedimenta seu conhecimento a respeito dos elementos de um triângulo, da classificação quanto às medidas desses elementos (lados e ângulos) e das condições necessárias à existência desse tipo de polígono. Assim, o aluno é levado, por exemplo, a refletir sobre a existência de um triângulo retângulo e equilátero (**exercício 5**) ou sobre a existência de um triângulo com dois ângulos internos obtusos ou com dois ângulos retos (**exercício 6**). A sequência de itens do **exercício 7** traz medidas de três segmentos que favorecem a análise comparativa do aluno para a conclusão sobre a existência ou não de triângulos cujos lados possuam essas medidas.

No “Pense mais um pouco...” da **página 143**, há a oportunidade, na parte 1, de se retomar a ideia de giro, estudada na primeira abordagem do conceito de ângulo feita no **livro 6**. Na parte 2, além da condição de existência dos triângulos procurados, o aluno deverá aplicar o conceito de múltiplo de um número.

Quando da resolução do **exercício 13**, é interessante o professor comentar que, no caso do triângulo retângulo, a altura relativa a um cateto coincide com o outro cateto e, portanto, o ortocentro é o vértice do ângulo reto.

Também no **exercício 15**, a particularidade do triângulo em questão leva o aluno a descobrir na resolução outra propriedade do triângulo isósceles: A mediana, a altura e a bissetriz, todas relativas à base, são coincidentes.

No “Pense mais um pouco...” da **página 147**, o aluno se depara com uma figura que apresenta simetria, podendo assim, decompor o quadrilátero em dois triângulos congruentes que têm, portanto, a mesma área, igual à metade da área de $ABCD$. Logo, para obter, de cada uma dessas partes, duas outras figuras equivalentes entre si, com área igual à quarta parte da área de $ABCD$, basta considerar os segmentos \overline{DM} e \overline{BM} , em que M é o ponto médio da base \overline{AC} , e para formar os quatro triângulos procurados de mesma área: AMD , AMB , CMD e CMB .

No **exercício 23**, o aluno tem a oportunidade de verificar a congruência das figuras que se relacionam por meio de reflexão em relação a uma reta. No **exercício 24**, é interessante que o professor observe com os alunos que o item **d** sintetiza os itens anteriores e que, portanto, deve-se superar a questão colocada sobre a congruência dos triângulos e concluir que, no triângulo equilátero, a mediana, a altura e a bissetriz são congruentes.

Nos exercícios das **páginas 160 e 161**, o aluno tem a oportunidade de praticar a identificação das partes (hipótese e tese) que compõem um assertiva, de organizar essas partes e de traçar um caminho para sair daquilo que é dado e chegar, por meio da congruência das figuras e da Lógica, ao que é pedido para demonstrar. Analogamente, nos exercícios da **página 162**, o aluno deve justificar as construções apresentadas. Seria interessante propor aos alunos que cada um elaborasse uma justificativa e a trocasse com um colega que fizesse a demonstração dela; e depois, destrocassem para a devida avaliação da mesma.

Nos exercícios das **páginas 164, 165, 168, 169 e 170**, o aluno, após desenvolver reflexões sobre proposições teóricas às quais acompanhou ou executou as respectivas demonstrações, tem a oportunidade de fixar e de aplicar esse conhecimento. Analogamente, no “Para saber mais” das **páginas 165 e 166**, o aluno justifica a construção da mediatriz de um segmento e depois realiza a construção com régua e compasso para fixar esse conhecimento.

Apresentamos a seguir a resolução de alguns exercícios das **páginas 160 e 161**.

exercício 27

a) Considerando os triângulos ABC e DEC , temos:

1. $\hat{B} \cong \hat{E}$ (dado)
2. $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ (dado)
3. $\hat{ACB} \cong \hat{DCE}$ (ângulos opostos pelo vértice)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos ABC e DEC são congruentes.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

b) Considerando os triângulos ABC e EDC , temos:

1. $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ (dado)
2. $\hat{B} \cong \hat{D}$ (dado)
3. $\hat{ACB} \cong \hat{ECD}$ (ângulos opostos pelo vértice)

Logo, pelo caso LAA, os triângulos ABC e EDC são congruentes.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{EC}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

c) Considerando os triângulos ABC e DBC , temos:

1. $\overline{AB} \cong \overline{DB}$ (dado)
2. $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ (dado)
3. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LLL, os triângulos ABC e DBC são congruentes.

Portanto, $\hat{A} \cong \hat{D}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

d) Considerando os triângulos ABC e DBC , temos:

1. $\overline{AB} \cong \overline{DB}$ (dado)
2. $\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$ (dado)
3. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ABC e DBC são congruentes.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{DC}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

exercício 29

Considerando os triângulos ABC e DCB , temos:

1. $\hat{ACB} \cong \hat{CBD}$ (ângulos alternos internos)
2. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (lado comum)
3. $\hat{ABC} \cong \hat{BCD}$ (ângulos alternos internos)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos ABC e DCB são congruentes.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

exercício 30

a) Considerando os triângulos AMC e BMD , temos:

1. $\hat{A} \cong \hat{B}$ (ângulos alternos internos)
2. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (dado)
3. $\hat{AMC} \cong \hat{BMD}$ (ângulos opostos pelo vértice)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos AMC e BMD são congruentes.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

b) Considerando os triângulos ABD e CDB , temos:

1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (dado)
2. $\hat{ABD} \cong \hat{CDB}$ (ângulos alternos internos)
3. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ABD e CDB são congruentes.

Portanto, $\hat{A} \cong \hat{C}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

Sugestão de atividade

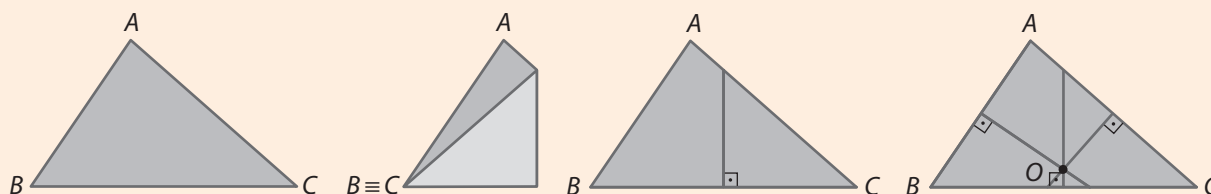
Pontos notáveis do triângulo

Construir, em folha de papel sulfite, oito triângulos ABC com medidas iguais a 12 cm, 10 cm e 8 cm, quatro dos quais deverão ser recortados. Em seguida, faça o que se pede usando em cada item dois desses triângulos: um, recortado, para fazer dobradura; outro, não recortado, para trabalhar com régua e compasso.

a) Sabendo que o circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo, obter o circuncentro do triângulo ABC .

- Usando dobradura

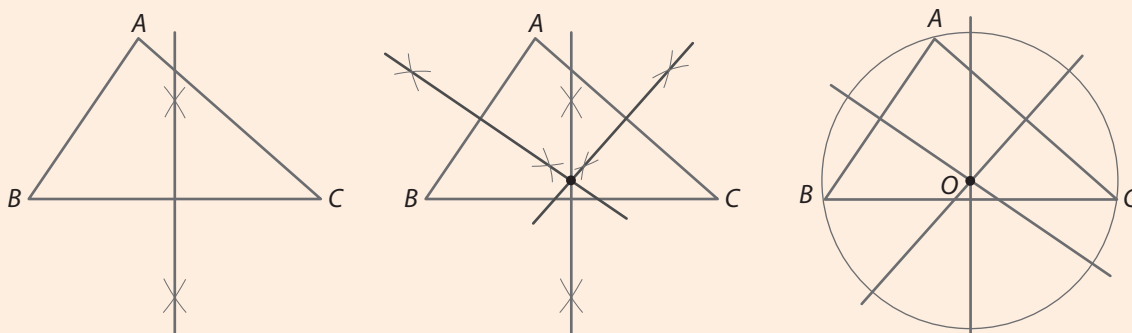
Para obter a mediatriz de um lado, dobre o papel de modo que um vértice recaia sobre o outro vértice desse lado. Vinque a dobra e repita esse procedimento para os outros lados. Verifique que as três dobras se encontram em um mesmo ponto que é o circuncentro O do triângulo ABC .



- Usando régua e compasso

Com a ponta-seca do compasso em cada uma das extremidades de um lado do triângulo e abertura maior que a metade desse lado, trace dois arcos e a reta que passa pelo cruzamento deles, que é a mediatriz procurada. Repita esse procedimento para os outros lados e verifique que as três retas se encontram em um mesmo ponto, que é o circuncentro do triângulo ABC . Depois, com centro no circuncentro e abertura do compasso até um dos vértices, trace uma circunferência.

Verifique que ela passa pelos três vértices. Essa é a circunferência circunscrita ao triângulo.

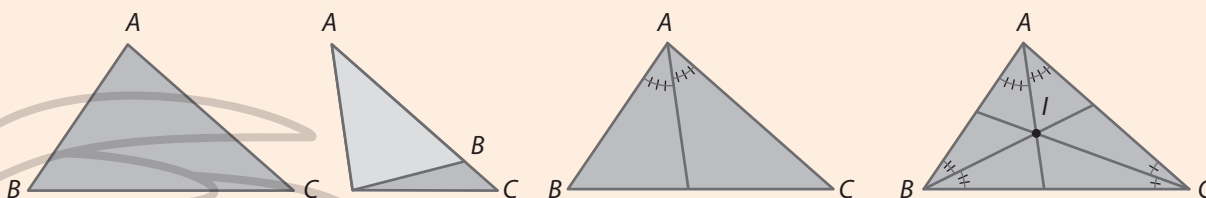


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

b) Sabendo que o incentro é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos de um triângulo, obter o incentro do triângulo ABC.

- Usando dobradura

Para obter a bissetriz de um ângulo, dobre o papel de modo que um lado recaia sobre o outro lado do ângulo. Vinque a dobra e repita esse procedimento para os outros ângulos. Verifique que as três dobras se encontram em um mesmo ponto, que é o incentro I do triângulo ABC.

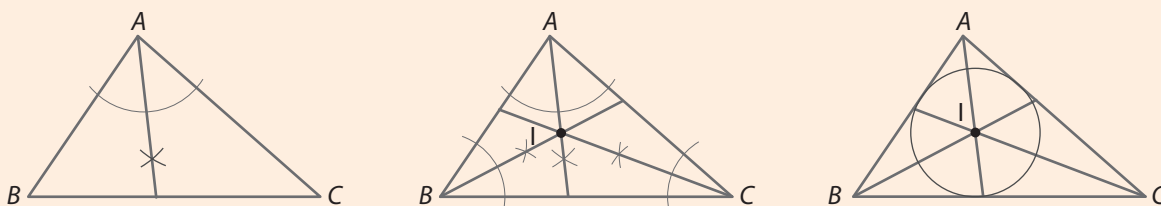


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

- Usando régua e compasso

Trace três arcos de mesma abertura, um com centro em um vértice, obtendo dois pontos nos lados do ângulo desse vértice, e outros dois arcos com centros nos dois pontos obtidos. Trace a semirreta de origem no vértice e que passa pelo cruzamento dos últimos dois arcos.

Repita esse procedimento para os outros ângulos e verifique que as três semirretas se encontram em um mesmo ponto, que é o incentro do triângulo ABC. Depois, com centro no incentro e abertura do compasso até um dos lados, trace uma circunferência. Verifique que ela tangencia os três lados do triângulo. Essa é a circunferência inscrita no triângulo.

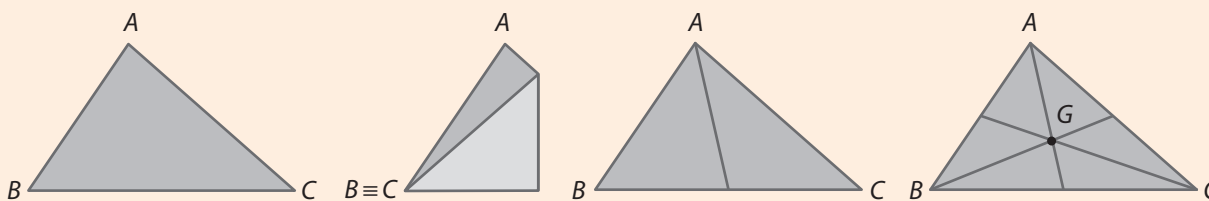


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

c) Sabendo que o baricentro é o ponto de intersecção das medianas de um triângulo, obter o baricentro G do triângulo ABC.

- Usando dobradura

Para obter uma mediana, inicialmente dobre o papel de modo que um vértice recaia sobre o outro vértice, obtendo o ponto médio do lado que une esses vértices. Em seguida, dobre o papel de modo que a dobra passe pelo ponto médio e pelo vértice que não pertence a esse lado. Vinque a dobra e repita esse procedimento para os outros lados. Verifique que as três dobras se encontram em um mesmo ponto, que é o baricentro do triângulo ABC.

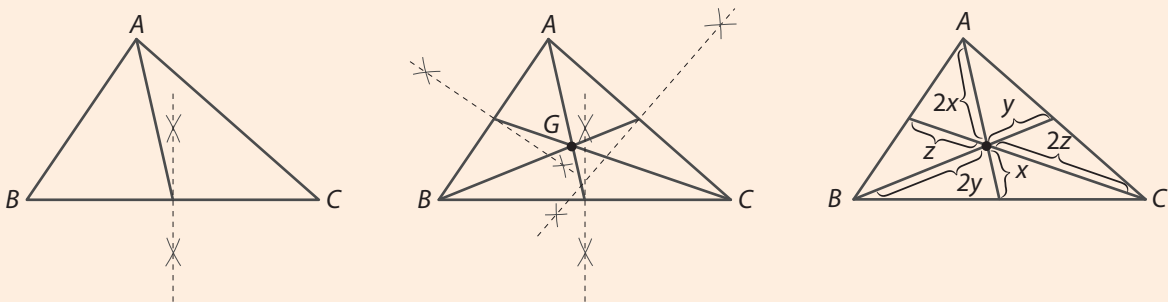


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Cole esse triângulo de papel sulfite em um papel-cartão e recorte-o. Depois, fixe uma ponta de um barbante no baricentro e suspenda-o para verificar que o baricentro é o ponto de equilíbrio desse triângulo ABC .

- Usando régua e compasso

Trace as três mediatrizes dos lados do triângulo ABC , como foi feito no item **a**, e obtenha os pontos médios desses lados. Em seguida, trace as três medianas. Verifique que as três medianas se encontram em um mesmo ponto, que é o baricentro do triângulo ABC . Verifique com o compasso que, em cada mediana, a distância do vértice ao baricentro é igual ao dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice.

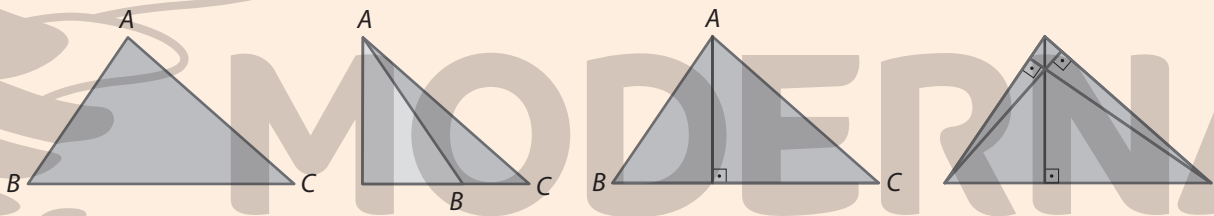


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

- d)** Sabendo que o ortocentro é o ponto de intersecção das retas suporte das alturas dos lados de um triângulo, obter o ortocentro H do triângulo ABC .

- Usando dobradura

Para obter a reta suporte da altura de um lado, dobre o papel de modo que o lado recaia sobre si mesmo e a dobra passe pelo vértice que não pertence a esse lado. Vinque a dobra e repita esse procedimento para os outros lados. Verifique que as três dobras se encontram em um mesmo ponto, que é o ortocentro do triângulo ABC .



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

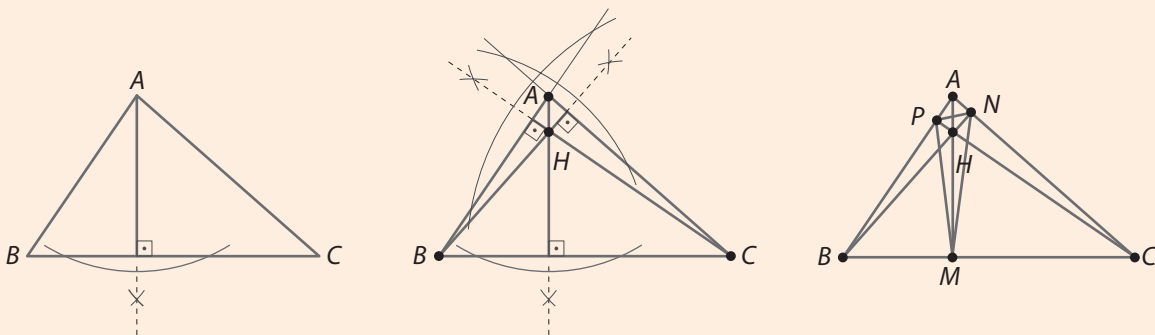
- Usando régua e compasso

Para obter a reta suporte da altura de um lado, trace um arco com centro em um vértice que corte o lado que não contém esse vértice em dois pontos. Com centros nesses pontos, trace dois arcos de mesma abertura e a reta que passa pelo cruzamento deles.

Repita esse procedimento para os outros vértices e verifique que as três retas se encontram em um mesmo ponto, que é o ortocentro do triângulo ABC .

Depois, trace o triângulo MNP cujos vértices são os pés das perpendiculares do triângulo ABC .

O triângulo MNP é chamado triângulo órtico do triângulo ABC . Verifique com um transferidor que as três alturas do triângulo ABC são as bissetrizes do triângulo MNP .



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Sugestão de leitura para o professor

A demonstração feita por Heron

Quando pequeno, li sobre Heron de Alexandria em uma enciclopédia biográfica que havia em casa. Fiquei sabendo que ele viveu no século II d.C. na cidade de Alexandria, obviamente, que foi engenheiro e matemático. Não me lembro que outras coisas mais havia sobre Heron, mas ficou gravada em minha memória a fórmula que lá estava para calcular a área de um triângulo:

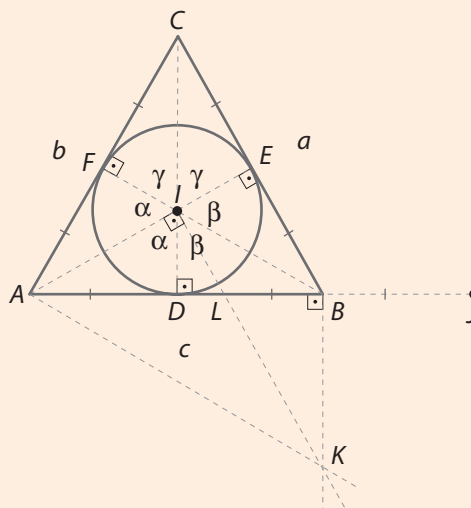
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo p a metade do perímetro do triângulo.

O que me encantou nessa fórmula? Não sei. Talvez por ter uma raiz quadrada, que naqueles dias escolares lhe dava um ar de Matemática superior; ou pelo fato de só usar os lados do triângulo, e não a altura, como na *formulinha* usada na escola.

Anos mais tarde, após ter encontrado várias vezes a fórmula e até depois de ter visto sua demonstração como mero corolário de um cálculo de medianas, continuava intrigado: como Heron a havia demonstrado?

Após ler a resenha publicada em *Livros da RPM 31*, comprei o livro *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves, e qual não foi minha surpresa ao encontrar na página 205 a menção de que a **demonstração feita por Heron** (que está em seu livro *A métrica*) estava esquematizada no exercício 6.11 d. Com algumas pequenas modificações, aqui vai ela:



NELSON MATSUDA

1. Área $\triangle ABC = \text{área } \triangle ABI + \text{área } \triangle IBC + \text{área } \triangle AIC = \frac{r}{2}(AB + BC + CA) = rp$
2. Como $\triangle ADI \cong \triangle AIF$, $\triangle DBI \cong \triangle IBE$ e $\triangle FIC \cong \triangle IEC$, temos $AD = AF$, $DB = BE$ e $CE = CF$.
3. Seja J o ponto da semirreta AB , tal que $BJ = CE$.

$$AJ = \frac{AD + AF}{2} + \frac{BD + BE}{2} + \frac{CE + CF}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} = p$$

Então, $p - c = AJ - AB = BJ$, $p - b = AJ - AC = DB$ e $p - a = AJ - BC = AD$.

4. i) Seja K o ponto construído como indicado na figura. O quadrilátero $AKBI$ é inscrito numa circunferência de diâmetro AK ; logo, $\angle AIB + \angle AKB = 180^\circ$ e, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, temos $\angle AIB + \angle CIE = 180^\circ$, de onde $\angle AKB = \angle CIE = \gamma$.

Então, temos $\triangle CBI \cong \triangle AKB$, o que implica $\frac{AB}{BK} + \frac{CE}{r} = \frac{BJ}{r}$.

- ii) No triângulo retângulo $\triangle ALI$ temos $r^2 = DL \cdot AD$ e de $\triangle DLI \cong \triangle BLK$ (verifique) temos $\frac{BK}{LB} = \frac{r}{DL}$.

- iii) De i) e ii) temos $\frac{AB}{BJ} = \frac{LB}{DL}$, o que implica $\frac{AB + BJ}{BJ} = \frac{LB + DL}{DL}$ ou $\frac{AJ}{BJ} \cdot \frac{AJ}{AJ} = \frac{DB}{DL} \cdot \frac{AD}{AD}$, que com $r^2 = DL \cdot AD$ leva a $AJ^2 \cdot r^2 = BJ \cdot AJ \cdot BD \cdot AD$.

Usando-se as igualdades apresentadas em **3**, obtemos

$$p^2 r^2 = (p - c)p(p - b)(p - a),$$

que, pela igualdade exibida em **1**, demonstra a fórmula.

Fonte: DALCIN, Mário. A demonstração feita por Heron. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 36.

Estudo dos quadriláteros



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Classificar quadriláteros e identificar seus elementos.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos paralelogramos, dos retângulos, dos losangos, dos quadrados e dos trapézios.
- Aplicar a propriedade da base média do triângulo e da base média do trapézio.

Orientações gerais do capítulo

Neste livro retomamos o estudo dos quadriláteros com uma revisão sucinta sobre os elementos que o constituem. Avançamos o estudo sobre a classificação dos quadriláteros, tendo como critérios o fato de os lados serem ou não paralelos, serem ou não perpendiculares, serem ou não congruentes. Aprofundamos o estudo sobre as propriedades decorrentes das características pelas quais os quadriláteros se classificam.

Uma boa maneira de iniciar o estudo de um conceito é a de se valer de uma atividade em que o aluno manipule modelos concretos desse conceito. O “Pense mais um pouco...” da **página 174** contempla esse tipo de abordagem. Nele, pede-se para recortar um quadrilátero desenhado em papel e com os ângulos previamente indicados. Analogamente ao que já foi feito para a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, o aluno recorta e justapõe as partes em torno de um vértice e conclui que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

O **exercício 1** propicia ao aluno uma nova abordagem da mesma questão do “Pense mais um pouco...”, porém agora por um caminho mais abstrato.

Veja a resolução abaixo.

Hipótese: $\{ABCD$ é um quadrilátero.

Tese: $\{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360^\circ$

Demonstração

Tomemos o quadrilátero $ABCD$ e tracemos sua diagonal \overline{AC} .

No triângulo ABC , temos: $m(\hat{BAC}) + m(\hat{ABC}) + m(\hat{ACB}) = 180^\circ$

No triângulo ACD , temos: $m(\hat{DAC}) + m(\hat{ACD}) + m(\hat{CDA}) = 180^\circ$

Logo,

$$[m(\hat{BAC}) + m(\hat{ABC}) + m(\hat{ACB})] + [m(\hat{DAC}) + m(\hat{ACD}) + m(\hat{CDA})] = 180^\circ + 180^\circ$$

$$[m(\hat{BAC}) + m(\hat{DAC})] + [m(\hat{ACB}) + m(\hat{ACD})] + m(\hat{ABC}) + m(\hat{CDA}) = 360^\circ$$

$$m(\hat{BAD}) + m(\hat{ABC}) + m(\hat{BCD}) + m(\hat{CDA}) = 360^\circ$$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

No **exercício 3**, a construção de quadriláteros com determinadas características que o particularizam cada vez mais, a cada item, exigem reflexão e pesquisa. Avalie se seria mais conveniente encaminhar os alunos a uma resolução com base em figuras recortadas em papel. Ao término da resolução é possível enriquecer a atividade com uma discussão sobre o porquê de os quadriláteros obtidos nos itens **b** e **c** serem quadrados.

Propositalmente, os **exercícios 2 e 4** são análogos, porém cada um tem uma linguagem diferente da do outro: no primeiro, os dados são fornecidos por uma ilustração e, no segundo, por um texto.

A sequência de exercícios cresce em nível de dificuldade até chegar ao **exercício 7** em que convém salientar a associação da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero com a medida de ângulos formados por bissetrizes dos ângulos internos.



O “Pense mais um pouco...” da **página 175** retoma a ideia de giro em ângulos. É interessante propor aos alunos que elaborem roteiros em que o percurso é feito sempre por uma composição de segmentos consecutivos e em apenas um sentido (horário ou anti-horário) e, ainda, que o ponto de chegada coincida com o ponto de partida, como o da figura ao lado.

Depois, pedir a eles que meçam os ângulos em que o roteiro indica giro e calculem a soma dessas medidas para constatarem que essa soma é constante e igual a 360° . Conduza-os a que notem que não fizeram outra coisa senão calcular a soma dos ângulos externos de um polígono convexo.

O **exercício 13** apresenta uma questão em que o resultado independe da medida dada (80°) para o ângulo \hat{B} . Esse exercício pode, se achar conveniente, ser mais explorado. Basta pedir aos alunos que repitam a resolução dele, inicialmente, atribuindo a medida 70° ao ângulo \hat{B} , depois a medida 60° e depois uma medida qualquer a ser escolhida pelo aluno. Se considerar conveniente, apresentar ou pedir a demonstração da seguinte proposição.

As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo formam, com o lado comum a esses ângulos, um triângulo retângulo, sendo esse lado a hipotenusa.

Observe a resolução a seguir.

$$\text{Hipótese: } \begin{cases} ABCD \text{ é um paralelogramo} \\ \overrightarrow{AM} \text{ é a bissetriz do ângulo interno} \\ \overrightarrow{BM} \text{ é a bissetriz do ângulo interno} \end{cases}$$

Tese: {O triângulo AMB é um triângulo retângulo com hipotenusa \overline{AB} .

Demonstração

Tomemos o paralelogramo $ABCD$ e tracemos as bissetrizes dos ângulos \hat{BAD} e \hat{ABC} .

Vamos representar $m(\hat{BAD})$ por x .

$$\text{Então, } m(\hat{ABC}) = (180^\circ - x), m(\hat{BAM}) = \frac{x}{2} \text{ e}$$

$$m(\hat{ABM}) = \frac{180^\circ - x}{2}$$

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos:

$$m(\hat{BAM}) + m(\hat{ABM}) + m(\hat{AMB}) = 180^\circ$$

$$\frac{x}{2} + \frac{180^\circ - x}{2} + m(\hat{AMB}) = 180^\circ$$

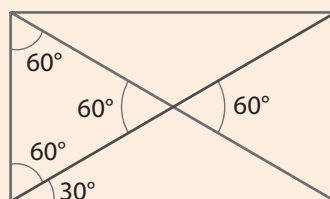
$$\frac{x + 180^\circ - x}{2} + m(\hat{AMB}) = 180^\circ$$

$$90^\circ + m(\hat{AMB}) = 180^\circ$$

$$m(\hat{AMB}) = 90^\circ$$

Portanto, o triângulo AMB é retângulo em M , ou seja, \overline{AB} é a hipotenusa.

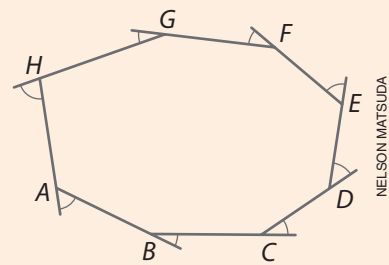
Para a resolução do **exercício 22**, orientar os alunos a fazer um “enunciado gráfico”, isto é, uma figura construída à mão livre que contenha as informações do enunciado dado em texto. Assim, o aluno percebe, por exemplo, que as diagonais do retângulo formam, com os lados menores, triângulos equiláteros; logo, o lado menor mede 2,5 cm, metade da medida da diagonal. Esse procedimento facilita e encaminha de maneira adequada a construção do retângulo com régua e compasso.



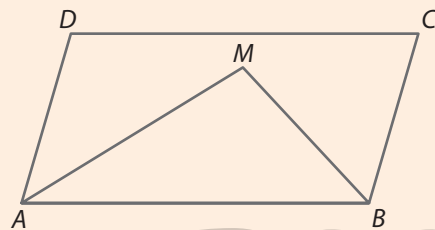
Medindo com a régua, encontra-se 43 mm para a base do retângulo e 25 mm para a altura.

$$\text{Assim: } A_{\text{retângulo}} \approx (43 \times 25) \text{ mm}^2 = 1.075 \text{ mm}^2$$

Portanto, a área do retângulo é aproximadamente 1.075 mm^2 .



NELSON MATSUDA



NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

Os **exercícios 24 e 25** exigem reflexão e aplicação das propriedades do trapézio, do paralelogramo, do retângulo, do losango e do quadrado nas tentativas de construção das figuras pedidas por meio das instruções do enunciado.

O **exercício 26** constitui uma situação inversa à dos **exercícios 24 e 25**: é o aluno quem estabelece as condições. Essas são boas questões para diagnosticar possíveis dificuldades na aprendizagem dos conceitos estudados.

Acompanhe a resolução do **exercício complementar 10**:

Vamos indicar por B a medida da base maior, por b a medida da base menor e por x a medida dos lados não paralelos. Como o perímetro do trapézio é igual a 66 cm, temos a seguinte expressão, em que P indica o perímetro do trapézio:

$$P = 2x + B + b$$

$$66 = 2x + B + b$$

$$66 - 2x = B + b$$

$$\frac{66 - 2x}{2} = \frac{B + b}{2} \quad (\text{base média mede } 20 \text{ cm})$$

$$\frac{66 - 2x}{2} = 20$$

$$\frac{66 - 2x}{2} \cdot 2 = 20 \cdot 2$$

$$66 - 2x = 40$$

$$-2x = -26$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-26}{-2}$$

$$x = 13$$

Portanto, cada lado não paralelo desse trapézio mede 13 cm.

Sugestão de atividade

A seguir apresentamos mais uma atividade com trapézios.

Eliana bordou um centro de mesa conforme indicado na figura abaixo, com o maior número possível de trapézios. Os prolongamentos dos lados não paralelos do trapézio cruzam-se no centro da circunferência.

Quantas figuras, em forma de trapézio, ela bordou?

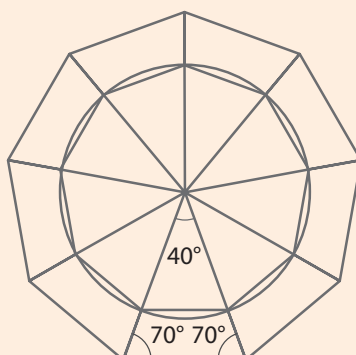
MODERNA



Resolução

Prolongando os lados do trapézio, determinamos um triângulo, cujo vértice superior coincide com o centro da circunferência, formando um ângulo de 40° .

Como $360^\circ : 40^\circ = 9$, é possível construir nove trapézios congruentes. Veja a figura:



Os alunos podem colorir a figura e montar um mural com as figuras da classe.

Frações algébricas e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Identificar e simplificar frações algébricas.
- Reconhecer e resolver equações fracionárias.
- Construir e interpretar gráfico de barras.
- Reconhecer e resolver equações literais.
- Representar e identificar pontos, retas e segmentos de reta em um plano cartesiano.
- Compor um gráfico de colunas compostas a partir de outros gráficos.
- Construir gráfico de barras e interpretar a composição com gráficos de linhas.
- Reconhecer, classificar, aplicar e resolver sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Estabelecer relações entre um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e a posição relativa das retas do plano cartesiano que as representam.

Orientações gerais do capítulo

Nesse capítulo, avançamos os estudos no campo da Álgebra trabalhando o conceito de frações algébricas e, com elas, a resolução de equações fracionárias, ou seja, equações com frações algébricas. Como complemento ao estudo das equações, vemos também as equações literais. Em seguida, retomamos e ampliamos o estudo dos sistemas de equações iniciado no ano anterior, dando destaque à representação gráfica e, com ela, fazemos a classificação e analisamos a existência e o número de soluções.

Para complementar o trabalho com esse conteúdo, sugerimos os seguintes livros:

GUELLI, Oscar. *Equação: o idioma da Álgebra*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

ROSA NETO, Ernesto. *Em busca das coordenadas*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

TRAMBAIOLLI NETO, Egidio. *O aprendiz*. São Paulo: FTD, 1996. (Coleção O Contador de Histórias da Matemática)

Os exercícios da **página 192** tratam da identificação e das condições de existência das frações algébricas; em particular, o **exercício 1** abre a sequência com a linguagem coloquial das histórias em quadrinhos, técnica aplicada

com maior frequência nesse capítulo para diversificar a linguagem e por se tratar de conteúdo mais árido e de contextualização significativa mais difícil de ser encontrada.

A evolução de dificuldade crescente é verificada na sequência dos exercícios da **página 193**, assim como nas demais sequências, e pede simplificações que exigem a aplicação das técnicas de fatoração e terminam com a discussão em grupo de um tipo de erro muito comum: o cancelamento do denominador com apenas uma das parcelas do numerador. O lúdico e o desafio têm presença nos “Pense mais um pouco...” das **páginas 194, 196 e 209** com outras histórias em quadrinhos e também no “Diversificando” da **página 218**.

Para a construção de um gráfico de barras, como o citado na **página 197 e 198**, é necessário estabelecer que escala será usada. Orientar os alunos que antes de tudo devem analisar os dados a serem representados, em particular o maior e o menor valor, e assim escolher uma unidade mais adequada ao espaço que se dispõe para a construção do gráfico. Definida a unidade, basta aplicar a regra de três para calcular o comprimento das barras.

Os **exercícios 21, 25 e 27** da **página 200** fazem interação da Álgebra com a Geometria, tal como a abordagem inicial contextualizada na abertura do item das equações literais. É um bom momento para se recordar, se necessário, conceitos da Geometria.

No estudo do plano cartesiano, é importante que os alunos explorem, reconheçam e localizem pontos e retas. Proponha a eles que brinquem, por exemplo, de batalha naval.

Ampliando a compreensão da leitura de gráficos, o “Trabalhando a informação” das **páginas 204 e 205** apresenta a construção de um gráfico de colunas compostas com dados obtidos a partir de outros gráficos. Pedir aos alunos que pesquisem e tragam exemplos de gráficos utilizados em mídias, para que eles analisem e componham os mesmos dados em gráficos de colunas compostas.

Na **página 208**, há exercícios em que o aluno fixa técnicas de resolução de sistemas com duas equações do 1º grau e outros nos quais aplica esse conceito na resolução de situações-problema do cotidiano. Destaca-se o **exercício 49**, no qual os alunos, em duplas, elaboram sistemas partindo da solução, trocam com o colega, resolvem e depois avaliam e corrigem a resolução do outro.

Aproveitamos o “Para saber mais” da **página 209** para apresentar o método da comparação como um complemento aos demais métodos de resolução de sistemas. É interessante enfatizar a ideia da propriedade transitiva da igualdade, sem citá-la explicitamente, em que esse método se baseia.

Os dois últimos itens do capítulo trazem um primeiro contato com a Geometria analítica, parte importante da Matemática que subsidiará o estudo das funções no ano seguinte e que será aprofundada no Ensino Médio. Os exercícios das **páginas 212 e 216** devem ser bem explorados para que o aluno adquira uma visão ampla não só da resolução de problemas como das possibilidades de existência de suas soluções.

Acompanhe a resolução do **exercício 55**.

$$\begin{array}{l} \text{quantidade de figurinhas de Pedro} \longrightarrow x \\ \text{quantidade de figurinhas de João} \longrightarrow y \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y + \frac{x}{5} = 2\left(\frac{4x}{5}\right) \\ y - 60 = x + 60 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5y - 7x = 0 \\ y - x = 120 \end{array} \right.$$

Multiplicando a equação $y - x = 120$ por -7 , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5y - 7x = 0 \\ -7y + 7x = -840 \end{array} \right.$$

$$-2y = -840$$

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-840}{-2}$$

$$y = 420$$

Substituindo y por 420 em $y - x = 120$, obtemos: $420 - x = 120 \Rightarrow 420 - 120 = x \Rightarrow x = 300$

Portanto, Pedro tem 300 figurinhas e João, 420.

CAPÍTULO

9

Estudo da circunferência e do círculo



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Identificar circunferência e círculo e seus elementos.
- Calcular o comprimento da circunferência e de arcos de circunferência.
- Reconhecer as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências e aplicá-las em atividades.
- Aplicar a propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos triângulos e dos quadriláteros circunscritos em uma circunferência.
- Calcular a medida angular de arcos de circunferência, a medida de ângulos centrais, de ângulos inscritos na circunferência e de ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência.

Orientações gerais do capítulo

Nesse capítulo, identificamos os elementos da circunferência e do círculo. Em seguida, calculamos o comprimento da circunferência de forma prática e empírica. O estudo das posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências, e apesar de bem ilustrado, pode ser reforçado com a manipulação de material concreto confeccionado ou trazido pelos alunos, como círculos de papelão, argolas de pulseiras, canudos finos de plástico, pequenos botões ou sementes.

Além de exercícios que pedem a identificação dos elementos da circunferência, na **página 221**, o aluno encontra o **exercício 3**, que solicita a construção de circunferências e a comparação entre as medidas de seus elementos. Pedir aos alunos, após responderem às questões, que comparem, em grupo, a escolha e as respostas dos colegas.

A resolução do **exercício 6** é uma boa oportunidade para o aluno, em grupo, voltar a praticar a demonstração de uma proposição geométrica e, em seguida, aplicá-la em um sistema de duas equações com duas incógnitas, fazendo um elo com o capítulo anterior.

Nos exercícios da **página 225**, há a aplicação do cálculo do comprimento de circunferências e arcos de circunferências, além de estimativas que podem ser comprovadas teoricamente após discussão em grupos pequenos e com a turma.

Os **exercícios 14 e 16** pedem construções geométricas nas quais o aluno deve identificar propriedades de triângulos e classificá-los, fazendo um elo com o capítulo sobre triângulos.

O **exercício 21** pode incentivar a pesquisa sobre o significado dos aros do símbolo das Olimpíadas.

Com os exercícios da **página 235**, o aluno pode não só fixar e aplicar a propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência, como também aplicar propriedades de triângulos isósceles e de triângulos retângulos.

É importante destacar nesse capítulo a distinção entre a medida angular e a medida linear de um arco. No “Para saber mais” das **páginas 238, 239 e 240**, essa questão pode ser trabalhada com bastante atenção.

Nos exercícios das **páginas 241, 243 e 244**, o aluno encontra situações diferenciadas dadas pelas figuras para aplicar o teorema, que afirma a relação entre as medidas de um ângulo inscrito e o ângulo central correspondente, e aplicar também as relações entre as proposições sobre ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência e cujos lados são secantes a ela.

Sugestão de leitura para o professor

O que vale mais: uma imagem ou uma palavra?

Quando a linguagem algébrica ainda estava longe de ser criada, o ser humano inventava muito a fim de “ilustrar” as proposições matemáticas, como já pudemos observar, recorrendo, muitas vezes, ao que hoje chamaríamos imagens e que na época eram verdadeiras e próprias fórmulas.

Uma das propriedades, por exemplo, que os estudantes de hoje aprendem na escola é a “propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição” que, em geral, é expressa algebricamente como segue:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Como, por convenção, estabelece-se que \cdot é mais coesivo do que $+$, à direita de $=$ não há necessidade de parênteses.

Um exemplo numérico:

$$3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$$

O leitor pode verificar que:

$$3 \cdot (2 + 4) \text{ é } 3 \cdot 6, \text{ isto é, } 18;$$

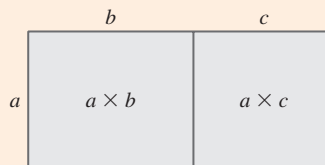
e que:

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \text{ é } 6 + 12, \text{ isto é, também } 18.$$

Pois bem, uma escrita aparentemente banal como aquela $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, requer uma notável capacidade de abstração simbólica de caráter algébrico, à qual os gregos não haviam ainda pensado e que só seria alcançada no Renascimento.

Isto significa que na obra de Euclides não se encontra a Álgebra? Claro que se encontra, mas não com o simbolismo hoje difundido desde o Ensino Fundamental. Já o vimos.

A mesma fórmula, em Euclides, aparece como segue:



Agora, do ponto de vista comunicativo, qual é mais eficaz: a escrita algébrica ou aquela figural geométrica?

Esse problema em Matemática é discutido há séculos e em Didática da Matemática tem uma relevância muito notável. Explico com um exemplo, recorrendo a um exercício que é típico na escola básica (para crianças de 11 a 14 anos).

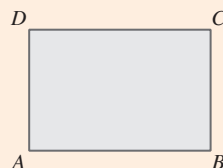
Um retângulo tem altura igual a $\frac{2}{3}$ da base; sabendo que seu perímetro é de 20 cm, qual sua área?

A expectativa do professor é a seguinte: como a altura é $\frac{2}{3}$ da base, se divido a altura em duas partes iguais e a base em três partes iguais, obtenho um segmento comum que posso considerar como unitário, um terço da base e um meio da altura; portanto, este segmento unitário aparece 10 vezes no contorno do retângulo; ele mede, pois, $20 : 10 = 2$ cm. Logo, a base mede 6 cm e a altura 4 e, portanto, a área é de 24 cm².

Agora, porém, parece que apenas um número mínimo dos estudantes aos quais o problema foi proposto consiga resolvê-lo, que é para se considerar um *pons asinorum*.¹

Diante do insucesso, o professor sugere fazer uma figura para ajudar na resolução, mostrando com isso uma convicção um pouco ingênua de que a figura ajudará o estudante menos capaz.

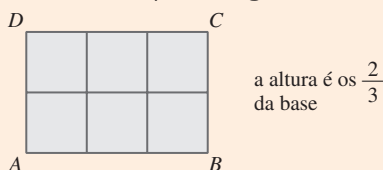
A figura esperada é um retângulo como o seguinte:



no qual a altura é mesmo os $\frac{2}{3}$ da base; depois o profes-

¹ O termo latino significa “ponte dos tolos” ou dos “asnos”, aludindo ao fato de os fracos não poderem ir além desse ponto nos seus estudos de Matemática. (N. T.)

sor deseja uma divisão da base e da altura em 3 e 2 partes iguais respectivamente, para chegar à solução esperada.



O fato é, todas as pesquisas em Didática da Matemática estão de acordo sobre os seguintes itens:

- saber fazer a figura de maneira oportuna significa de fato já ter entendido como funciona a resolução do problema, logo não ajuda quem sabe resolver o problema (que fará a figura depois de ter resolvido o problema, apenas para satisfazer as expectativas do professor) e não ajuda quem não sabe resolver o problema, porque este desenhará um retângulo qualquer, sem se preocupar do $\frac{2}{3}$ que não sabe interpretar do ponto de vista gráfico;
- mais ainda, passar do registro semiótico “língua escrita” ao registro semiótico “escrita algébrica” já é complexo por si, mas passar ao registro semiótico “desenho geométrico” é, para muitos, intransponível. Tal registro não é automático, não é intuitivo, não faz parte da bagagem cromossômica; possui características sintáticas e semânticas próprias que escapam a muitos e que, assim mesmo, precisa-se aprender, uma vez que não é uma capacidade espontânea.
- Uma vez aprendida a manipulação das imagens, para compreender, elas valem, muitas vezes, mais do que mil palavras corretas; a questão não diz respeito apenas ao aprendiz, o estudante, mas também ao pesquisador, o criador de Matemática. Tal fato é, por exemplo, garantido por sir Michael F. Atiyah (cit. em Bernardi, 1995):

A intuição geométrica permanece sendo o canal mais poderoso para a compreensão da Matemática e deveria ser estimulada e incentivada.

confirmado por René Thom (sempre cit. em Bernardi, 1995):

Os objetos geométricos são muito pobres semanticamente para se fazerem entender de modo direto como uma figura espacial.

Por outro lado,

A representação não é um epifenômeno, uma espécie de reflexo a coisas feitas pela ação de adaptação do sujeito em seu desenvolvimento; ela é, ao contrário, funcional e indispensável ao tratamento por parte do sujeito de numerosas situações.

(VERGNAUD, 1992)

O que Gerard Vergnaud, psicólogo de primeira linha, aluno direto de Jean Piaget, afirma, vale em geral; mas em Matemática e especialmente em Geometria, as coisas são difíceis de dizer e entender, porque existe uma contínua e sutil mistura de linguagens. Prefiro recorrer então a outro psicólogo, Efraim Fischbein (1920-1998), que criou a “teoria dos conceitos figurais”, para enfrentar o fenômeno.

Foi no longínquo 1963 que Efraim Fischbein lançou essa fértil ideia (FISCHBEIN, 1963). O idioma no qual o livro foi escrito (romeno) não era a língua mais difundida nos ambientes científicos, ou talvez ainda era muito cedo para este tipo de considerações; o fato é que foi preciso esperar até 1993 para acontecer uma explosão efetiva de suas reflexões (FISCHBEIN, 1993).

Do que se trata? Utilizo as palavras do próprio Fischbein, extraídas do último trabalho citado:

As propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições no contexto de um sistema axiomático. Deste ponto de vista, uma figura geométrica possui uma natureza conceitual. Um quadrado não é uma imagem desenhada numa folha de papel; é uma forma controlada por suas definições (mesmo que possa estar inspirada num objeto real). [...] Uma figura geométrica pode então ser descrita como tendo intrinsecamente propriedades conceituais. Todavia, uma figura geométrica não é um puro conceito. É uma imagem, uma imagem visual. Possui uma propriedade que os conceitos usuais não possuem, isto é, inclui a representação mental de propriedades espaciais. [...] Todas as figuras geométricas representam construções mentais que possuem, simultaneamente, propriedades conceituais e figurais. [...] Os objetos de estudo e manipulação no raciocínio geométrico são entidades mentais, por nós chamadas conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, grandeza) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais – como ser ideal, abstrato, geral, perfeito. Não pretendo afirmar que a representação que temos em mente, quando imaginamos uma figura geométrica, esteja desprovida de qualquer qualidade sensorial (como a cor) exceto as propriedades espaciais; afirmo, porém, que, enquanto operamos com uma figura geométrica, agimos como se nenhuma outra qualidade importasse.

Assim, no caso particular das figuras geométricas, estamos dispostos a selecionar propriedades, qualidades, aspectos diferentes porque tendemos a um conceito geométrico; e o figural parece ser então um conceito por si mesmo.

O desenho de uma figura geométrica (por exemplo, de um trapézio) é uma representação gráfica de um conceito complexo: não se trata apenas do conceito geométrico abstrato de trapézio, mas do conceito figurado de trapézio. Assim que tivermos à disposição o desenho de um trapézio, essa figura de trapézio se torna uma produção icônica particular do conceito figurado de trapézio.

O desenho à nossa disposição compartilha parcialmente as propriedades características do conceito de trapézio (generalidade, abstração), mas compartilha totalmente a componente figurada. (Aqui seria necessário abrir um parêntese sobre o fato de que aquela figura de trapézio não é um trapézio – considerado em sua generalidade – por motivos óbvios: as propriedades peculiares específicas da figura produzida circunstanciam a ideia geral de trapézio. Sobre este assunto deveremos retornar). Mas, enquanto que a palavra trapézio não possui [...] forma trapezoidal, a representação (o desenho) de um trapézio alude justamente àquela forma; portanto, as representações figuradas de conceitos geométricos particulares compartilham com o conceito geométrico abstrato ao qual fazem referência, do qual pretendem ser a imagem, alguma coisa: a componente figurada.

Existe, portanto, algo que pode ser chamado conceito figurado que não coincide com o objeto geométrico em si.

Mas então dispara um mecanismo que interessa especialmente ao estudioso em Didática da Matemática: ao privilegiar algumas representações, dados que elas se encontram como mediação, ligação, entre a componente, digamos assim, figurada e o conceito da figura em si, tais representações se tornam fortes, acabam por ser reconhecidas como suportes diretos, senão únicos, para a componente figurada do conceito.

Ao contrário: aquelas figuras, aquelas representações são a componente figurada do conceito.

Agora, seria importante desfrutar deste fato, não para bloquear a aprendizagem mas para reforçá-la. É necessário existir consciência crítica e estar disposto (treinado) a ações mentais oportunas a fim de que estes suportes visuais sejam produtivos.

Escreve Maria Alessandra Mariotti (1995), aluna direta de Fischbein:

Somente com um ato mental, um desenho pode chegar a compartilhar, com o conceito que representa, também a generalidade.

É necessária então uma dinâmica dos conceitos figurados, é preciso fazer interagir os aspectos figurados com aqueles conceituais.

Pode-se falar também de harmonia entre o aspecto figurado e o conceitual: se há dissídio, se falta tal harmonia, então as atividades geométricas baseadas essencialmente em figuras não acarretam crescimento algum na aprendizagem consciente.

Não há apenas as figuras para servir como suportes visuais para os alunos; na prática escolar são muito difun-

didados também modelos concretos de vários tipos (de madeira, de papelão, de plástico); nesse sentido, as figuras e os desenhos são somente um subconjunto do conjunto dos modelos concretos disponíveis para os alunos.

Escreve Hermann Maier (1993):

Em Geometria, muitos são os alunos que possuem dificuldades para entender as indicações, os problemas e as explicações fornecidas pelo professor ou pelo livro-texto, porque suas concepções geométricas permanecem estreitamente ligadas às figuras e aos modelos concretos utilizados como suportes visuais para formar tais concepções. A meu ver, isto é devido ao fato de que os suportes visuais são, muitas vezes, utilizados nas aulas de Geometria de maneira não satisfatória. Às vezes, os modelos utilizados são inadequados para representar a noção tratada e assim os alunos adquirem uma ideia errada no que diz respeito ao sentido do vocabulário geométrico.

Veja-se também Maier (1998), cujo trecho se insere não por acaso em um longo discurso sobre a comunicação, e abre outra área de pesquisa e de reflexão crítica que, ao menos por enquanto, não pretendo abrir.

Voltando às implicações didáticas das reflexões sobre os conceitos figurados, Fischbein escreve ainda, no mesmo artigo (1993):

Um estudante de Ensino Médio deveria ser tornado consciente do conflito e de sua origem, para dar relevância em sua mente à necessidade de se basear nos raciocínios matemáticos sobretudo nos limites formais. Tudo isto leva à conclusão de que o processo de construção dos conceitos figurados na mente do estudante não deve ser considerado um efeito espontâneo dos cursos usuais de Geometria. A integração das propriedades conceituais e figuradas em estruturas mentais unitárias, com a predominância dos limites conceituais em relação aos figurados, não é um processo natural. Isto deveria constituir uma contínua, sistemática e principal preocupação do professor.

A preocupação é legítima, visto que os resultados obtidos sem ela estão aos olhos de todos; o alerta de Fischbein é extremamente claro.

O que me interessava era apresentar uma acepção particular e muito produtiva, no plano didático, de um modo diferente de ver as imagens mentais. Claro que, sobre esse assunto, poder-se-ia dizer muito mais...

Fonte: D'AMORE, Bruno. *Matemática, estupefação e poesia*. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2012. p. 95-102.



MO

ISBN 978-85-16-09986-2



9 788516 099862