Edwaldo Bianchini

MATEMÁTICA BIANCHINI

9º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular:
MATEMÁTICA

MODERNA

Edwaldo Bianchini

Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino
de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo,
no ensino fundamental e médio, por 25 anos.

MATEMÁTICA BIANCHINI

9º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

8ª edição

São Paulo, 2015

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay
Edição de texto: Enrico Briese Casentini, Maria Cecília da Silva Veridiano, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Cármen Matricardi, José Joelson Pimentel de Almeida
Assistência editorial: Izabel Batista Bueno
Preparação de texto: ReCriar editorial
Gerência de *design* e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Projeto gráfico: Everson de Paula, Adriano Moreno Barbosa
Capa: Everson de Paula
Foto: Visitante posa para foto em pintura 3D de Kurt Wenner durante Artphoria 2013, exposição no Ciputra Artpenuer Center, em Jacarta, Indonésia, dez. 2013.
© Kurt Wenner/Agung Kuncahya B/Xinhua/Zuma Press/Glow Images
Coordenação de arte: Patricia Costa, Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Camila Ferreira Leite
Editoração eletrônica: Formato Comunicação
Ilustrações de vinhetas: Adriano Moreno Barbosa
Coordenação de revisão: Adriana Bairrada
Revisão: Cecília Setsuko Oku, Rita de Cássia Sam, Thiago Dias, Viviane Teixeira Mendes
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Marcia Sato, Luciano Baneza (coord.)
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Bureau São Paulo, Fabio N. Precendo, Marina M. Buzzinaro, Resolução Arte e Imagem.
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio N. Precendo, Hélio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto, Rubens M. Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo

Matemática Bianchini / Edwaldo Bianchini. — 8. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos de 6º ao 9º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02025 CDD-372.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2015
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro foi feito especialmente para você.

Ele foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem e, também, ajudá-lo a ver como a Matemática está presente em tudo o que acontece à sua volta.

Aqui você vai encontrar exemplos de situações que permitem perceber que a Matemática faz parte do seu dia a dia.

Leia com atenção as explicações teóricas, para acompanhar as aulas e resolver os exercícios.

Faça deste livro um parceiro em sua vida escolar!

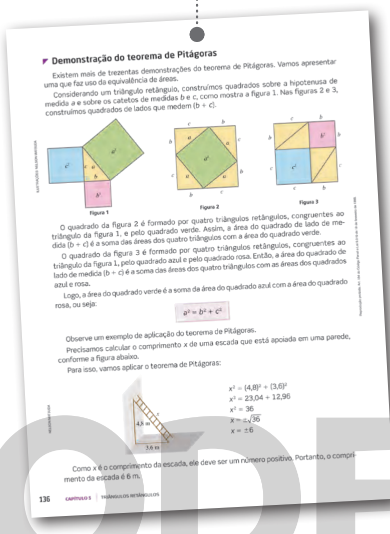
O autor

CONHEÇA O SEU LIVRO

A estrutura de cada capítulo é muito simples, pois permite encontrar com facilidade os assuntos fundamentais, os exemplos, as séries de exercícios e as seções enriquecedoras.

Página de conteúdo

Contém a teoria explicada com linguagem clara e objetiva, apoiada por exemplos e ilustrações cuidadosamente elaborados para ajudar o entendimento da teoria.

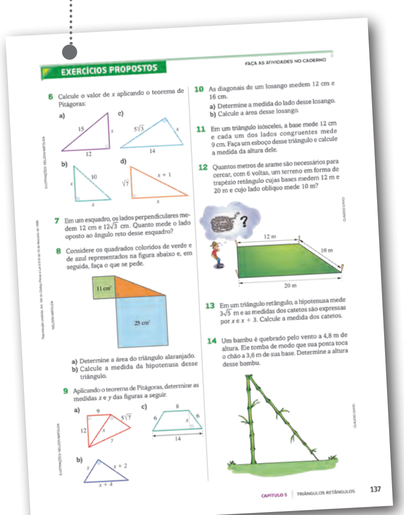


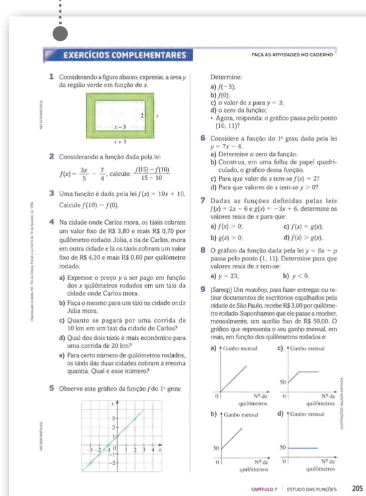
Página de abertura

O tema do capítulo é introduzido por meio de vários recursos, tais como textos com situações do dia a dia, imagens do cotidiano, História da Matemática etc.

Exercícios

O livro apresenta uma variedade de exercícios (de aplicação, de exploração, de sistematização, de aprofundamento), organizados segundo o grau de dificuldade.



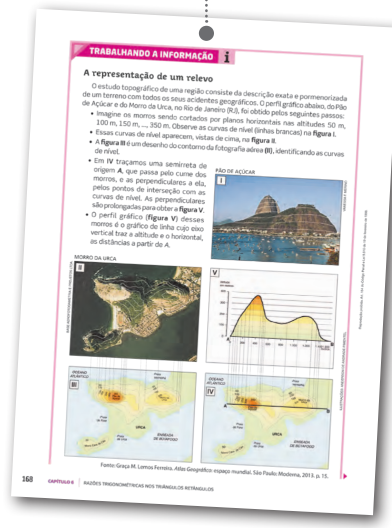


Para saber mais

Esta seção apresenta, entre outras coisas, textos sobre a Geometria e a História da Matemática para enriquecer e aprofundar diversos conteúdos matemáticos.

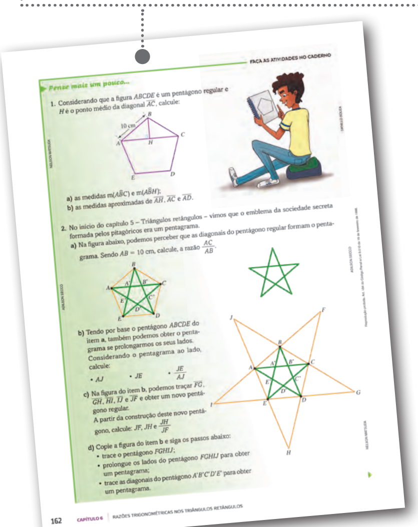
Trabalhando a informação

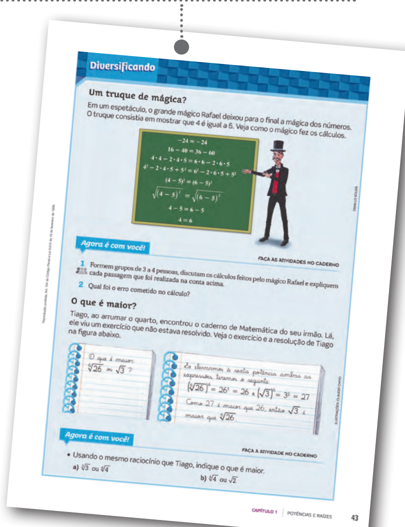
Esta seção permite que o aluno, além de atividades interdisciplinares, trabalhe a informação organizada em diferentes linguagens.



Atividades especiais

Estas seções apresentam atividades e objetivos diferentes. **Pense mais um pouco...** propõe atividades desafiadoras. **Diversificando** propõe ao aluno que entre em contato com atividades que envolvam temas variados.





Há, ainda, atividades de **Calculadora** e de **Cálculo Mental**, além de atividades que podem ser feitas em **dupla** ou em **grupo**.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 Potências e raízes

CAPÍTULO 2 Proporcionalidade e semelhança em Geometria

CAPÍTULO 5 Triângulos retângulos

CAPÍTULO 6 Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

CAPÍTULO 7 Estudo das funções

CAPÍTULO 8 Circunferência, arcos e relações métricas

SUMÁRIO

CAPÍTULO 9 Polígonos regulares e áreas

CAPÍTULO

1 Potências e raízes

1 Potências

Conta-se que o jogo de xadrez foi inventado há mais de 1.500 anos por um indiano chamado Sessa.

BETO CELLI

O rei da Índia ficou tão entusiasmado com o jogo que ofereceu a Sessa a liberdade de escolher o que ele bem desejasse como recompensa por tão notável invento. Toda a corte esperava que Sessa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido:

1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro;
2 grãos de trigo pela segunda casa;
4 grãos de trigo pela terceira casa;
8 grãos de trigo pela quarta casa;
16 grãos de trigo pela quinta casa;
...
e assim por diante, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a 64ª casa (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas).

DANILLO SOUZA

Seu pedido provocou risos. Um invento tão brilhante e um pedido tão simples. O rei e toda a corte ficaram decepcionados. Você não ficaria?

Mas palavra de rei é palavra de rei, e ele pediu a seus criados que entregassem a Sessa um pequeno saco de grãos de trigo. Sessa recusou a oferta, dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido. Nem um grão a mais, nem um grão a menos.

CLAUDIO CHIYO

O rei pediu então a seus calculistas que fizessem as contas. Depois de muitas horas de trabalho, eles chegaram a este número:

DANILLO SOUZA

Ou seja, o que Sessa esperava receber eram dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil, seiscentos e quinze grãos de trigo.

É um número tão grande que seriam necessários muitos séculos para produzir tanto trigo!

De que maneira o rei cumpriria sua promessa? Que situação difícil a dele. Mas como ele poderia imaginar que daquele pedido tão simples resultaria tamanha quantidade de trigo?

Então, Sessa, entendendo a aflição do monarca por não poder cumprir sua promessa, perdoou a dívida. Afinal, seu objetivo havia sido atingido: chamar a atenção do rei para que tomasse mais cuidado com suas promessas e seus julgamentos.

O final não poderia ser mais feliz: Sessa foi nomeado conselheiro do rei.

CLAUDIO CHIYO

O que acabamos de ler é um interessante exemplo de aplicação de potenciação, pois a quantidade de grãos de trigo de cada casa do tabuleiro pode ser expressa por uma potência. Observe:

1ª casa .... 2^0

2ª casa .... 2^1

3ª casa .... 2^2

⋮

64ª casa .... 2^{63}

Agora, vamos recordar o que sabemos sobre potências.

Revendo conhecimentos sobre potências

Você deve se lembrar do significado de 3^2 e de 3^3:

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

De modo geral, sendo *a* um número real, temos:

- $a^2 = a \cdot a$
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$

Considerando um expoente genérico *n*, em que *n* é um número inteiro, definimos a^n assim:

- se $n > 1$, então: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}}$

- se $n = 1$, então: $\boxed{a^1 = a}$

- se $n = 0$ e $a \neq 0$, então: $\boxed{a^0 = 1}$

- se $n = -1$ e $a \neq 0$, então: $\boxed{a^{-1} = \dfrac{1}{a}}$

Isso significa que a^{-1} é o inverso de *a*, pois $\dfrac{1}{a}$ é o inverso de *a*.

Assim, se a^{-1} é o inverso de *a*, também *a* é o inverso de a^{-1}.

De modo geral, se $n > 1$ e $a \neq 0$, temos: $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$


VICENTE MENDONÇA

Veja alguns exemplos.

a) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{49}$

b) $\left(-\frac{2}{7}\right)^1 = -\frac{2}{7}$

c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^0 = 1$

d) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (é o inverso de 3)

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ $\left(\text{é o inverso de } \frac{2}{5}\right)$

f) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{2}{7}} = -\frac{7}{2}$ $\left(\text{é o inverso de } -\frac{2}{7}\right)$

g) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

A potenciação tem algumas propriedades importantes que facilitam os cálculos e simplificam as expressões, veja:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ (com $a \neq 0$)
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ e $(a : b)^m = a^m : b^m$ (com $b \neq 0$)

OBSERVAÇÃO

▸ Note que a definição dada acima de que, para $a \neq 0$, $a^0 = 1$ é compatível com a propriedade:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ (se } a \neq 0)$$

Veja um exemplo: $a^2 : a^2 = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$ e $a^{2-2} = a^0 = 1$

Para aplicar as propriedades da potenciação, vamos calcular o valor das expressões abaixo.

a) $(\underbrace{7^4 \cdot 7^2}_{})^3 : 7^{15} = (\underbrace{7^6)^3}_{} : 7^{15} = \underbrace{7^{18} : 7^{15}}_{} = 7^3 = 343$

b) $\frac{a^{5x-2} \cdot a^{2-x}}{(a^x)^{-2}} = \frac{a^{5x-2+2-x}}{a^{-2x}} = \frac{a^{4x}}{a^{-2x}} = a^{4x-(-2x)} = a^{6x}$, em que $a \neq 0$.

Existe mais de uma forma de calcular o valor da expressão $(7^4 \cdot 7^2)^3 : 7^{15}$ do exemplo **a**. Veja:

- **1ª forma** Apesar de ser mais trabalhosa, essa forma é esclarecedora para os alunos que entendem $7^3 = 7 \cdot 3 = 21$, em vez de $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$.

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$7^2 = 7 \cdot 7$

$7^4 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$(7^4 \cdot 7^2)^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)$

$$\frac{(7^4 \cdot 7^2)^3}{7^{15}} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

- **2ª forma**

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2.401$

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$7^4 \cdot 7^2 = 2.401 \cdot 49 = 117.649$

$(7^4 \cdot 7^2)^3 = (117.649)^3 = 117.649 \cdot 117.649 \cdot 117.649 = 1.628.413.597.910.449$

$7^{15} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 4.747.561.509.943$

$$\frac{(7^4 \cdot 7^2)^3}{7^{15}} = \frac{1.628.413.597.910.449}{4.747.561.509.943} = 343$$

Perceba que, apesar de não ser a única possibilidade, foi mais fácil calcular a expressão do primeiro exemplo usando as propriedades da potenciação.

OBSERVAÇÃO

▸ É importante observar que, em geral, $(a^3)^2 \neq a^{3^2}$. Veja por quê:

- $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$
- $a^{3^2} = a^{(3^2)} = a^9$

Em $(a^3)^2$, o que está elevado ao quadrado é a^3.

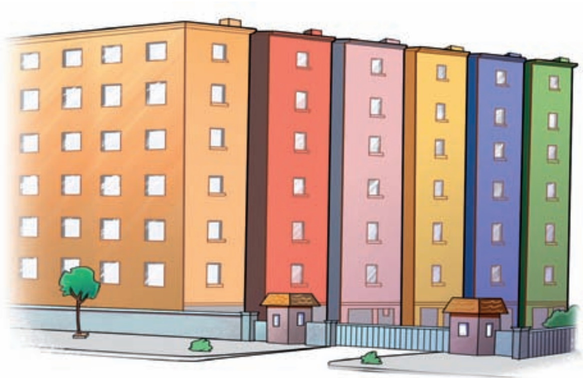
Em a^{3^2}, o que está elevado ao quadrado é o expoente 3.

2. a) falsa, pois $(4^5)^2 = 4^{10}$ e $4^{5^2} = 4^{25}$
b) verdadeira, pois $(4^5)^2 = 4^{10}$ e $(4^2)^5 = 4^{10}$
c) verdadeira, pois $(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2$
d) falsa, pois $(2 + 3)^2 = 25$ e $2^2 + 3^2 = 13$
e) verdadeira, pois $(8 : 4)^3 = 8$ e $8^3 : 4^3 = 8$
f) falsa, pois $(8 - 4)^3 = 64$ e $8^3 - 4^3 = 448$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Em um condomínio, há 6 prédios. Em cada prédio há 6 andares e, em cada andar, 6 apartamentos. Expresse na forma de potência o número de apartamentos desse condomínio. 6^3



LEONARDO CONCEIÇÃO

2 Classifique as expressões abaixo em verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) $(4^5)^2 = 4^{5^2}$

b) $(4^5)^2 = (4^2)^5$

c) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$

d) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$

e) $(8 : 4)^3 = 8^3 : 4^3$

f) $(8 - 4)^3 = 8^3 - 4^3$

3 Simplifique as expressões a seguir, obtendo uma única potência.

a) $(2^4 \cdot 2^6) : (2^5 \cdot 2^3)$ 2^2

b) $(x^4 \cdot x^2 \cdot x^3)^2 : (x^4)^5$, com $x \neq 0$ x^{-2}

c) $\dfrac{2^{5x-1} \cdot 2^{x+2}}{2^{3x-2}}$ 2^{3x+3}

d) $\dfrac{5^2 \cdot 5^3}{5^1 \cdot 5^0}$ 5^4

4 Calcule o valor das expressões abaixo.

a) $(-2)^2 + (-2)^3$ -4
b) $(-3)^0 - (-3)^3$ 28
c) $3^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ 1
d) $8^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\frac{1}{18}$
e) $2^{-1} + 2^0$ $\frac{3}{2}$
f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $-\frac{65}{36}$
g) $\dfrac{5^0 + 5^{-1}}{5^{-2}}$ 30
h) $(0{,}25)^2 - (0{,}5)^3$ $-\frac{1}{16}$

Como escrever um número como potência de uma base dada

Conhecendo o significado de uma potência e as propriedades de potências de mesma base, podemos, em certos casos, escrever um número na forma de potência de determinada base.

Por exemplo, vamos escrever:

a) 32 como potência de base 2.
Decompondo 32 em fatores primos, obtemos $32 = 2^5$.

b) $\frac{1}{8}$ como potência de base $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{8} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Portanto: $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

c) $\frac{1}{8}$ como potência de base 2.

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-3}$$

Portanto: $\frac{1}{8} = 2^{-3}$

d) $\frac{8}{27}$ como potência de base $\frac{3}{2}$.

$$\frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

Portanto: $\frac{8}{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

5 Escreva os números a seguir como potência de base 2.

a) 256 2^8 b) 1.024 2^{10} c) $\frac{1}{64}$ 2^{-6} d) $\frac{1}{128}$ 2^{-7}

6 Escreva os números a seguir como potência de base 3.

a) 9 3^2 b) 81 3^4 c) $\frac{1}{27}$ 3^{-3} d) $\frac{1}{243}$ 3^{-5}

7 Sendo $A = 3x^2 + 5x - 6$, determine o valor de A para:

a) $x = -2$; -4 b) $x = 2^{-1}$. $-\frac{11}{4}$

8 Simplifique as expressões, obtendo uma única potência.

a) $\dfrac{4^2 \cdot 8^3}{2^{10}}$ 2^3 b) $\dfrac{9^3 \cdot 27^2}{81}$ 3^8

9. b) Espera-se que os alunos concluam que, para *n* inteiro e positivo 10^n é o número formado por 1 seguido de *n* zeros.
d) Espera-se que os alunos concluam que, para *n* inteiro e negativo, 10^n é o número formado por 1 antecedido por *n* zeros com a vírgula entre o primeiro e o segundo zeros.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

9 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Reproduzam a tabela abaixo e completem-na, atribuindo a *n* os números inteiros de 1 a 5. construção da tabela

Expoente inteiro positivo (*n*)	Indicação de 10^n	Potência (resultado)	Número de zeros da potência

b) Comparando a primeira e a última coluna da tabela do item **a**, escrevam uma regra para obter, sem fazer cálculos, a potência indicada por 10^n.

c) Reproduzam a tabela abaixo e completem-na atribuindo a *n* os números inteiros de -1 a -5. construção da tabela

Expoente inteiro positivo (*n*)	Indicação de 10^n	Potência (resultado)	Número de zeros da potência

d) Comparando a primeira e a última coluna da tabela do item **c**, escrevam uma regra para obter, sem fazer cálculos, a potência indicada por 10^n.

10 Escreva a representação decimal dos números a seguir.

a) 10^5 100.000
b) 10^6 1.000.000
c) 10^{-5} 0,00001
d) 10^{-6} 0,000001
e) 10^0 1
f) 10^1 10

11 A distância média entre o planeta Saturno e o Sol é 1.000.000.000.000 m. Expresse essa distância com uma potência de 10. 10^{12}

OORKA/SHUTTERSTOCK

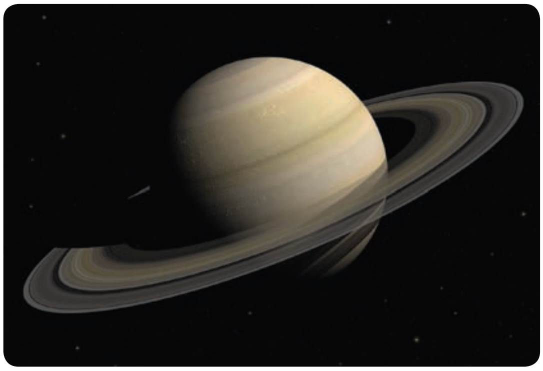


Ilustração em 3-D do planeta Saturno.

12 Expresse cada número a seguir como potência de 10.

a) 10.000.000 10^7
b) 0,0000000001 10^{-10}
c) 0,00001 10^{-5}
d) 1 10^0

13 O diâmetro de um fio de cabelo fino mede aproximadamente 0,0001 m. Escreva essa medida como uma potência de 10. 10^{-4} m

14 No Sistema Internacional de Unidades (SI), para formar um múltiplo ou um submúltiplo de uma unidade de medida basta colocar o prefixo desejado na frente do nome dessa unidade. Isso também vale para os símbolos. Por exemplo:

- para multiplicar a unidade byte por 1 milhão, fazemos:
  mega + byte = megabyte
  1 megabyte = 1.000.000 bytes = 10^6 bytes
- para dividir a unidade segundo por 1 bilhão, fazemos:
  nano + segundo = nanossegundo
  1 nanossegundo = 0,000000001 segundo =
  = 10^{-9} segundo

Pesquise os vinte prefixos estabelecidos pelo SI no *site* do Inmetro (www.inmetro.gov.br) e complete a tabela abaixo. construção de tabela

Prefixos das unidades SI		
Nome	**Símbolo**	**Fator de multiplicação da unidade**
yotta	Y	10^{24} = 1.000.000.000.000.000.000.000.000
zetta	Z	10^{21} = 1.000.000.000.000.000.000.000

15 Determine, o valor de cada expressão abaixo como uma potência de base 10 e na representação decimal.

a) $\dfrac{10^3 \cdot 10^2}{10^7}$ 10^{-2} e 0,01

b) $\dfrac{10^4 \cdot 10^2}{10^9}$ 10^{-3} e 0,001

c) $\dfrac{10^{-9}}{10^{-4} \cdot 10^{-8}}$ 10^3 e 1.000

d) $\dfrac{10^{-4} \cdot 10^{-8}}{10^{-9}}$ 10^{-3} e 0,001

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Mostre que multiplicar 3 por 10^4 é o mesmo que dividir 3 por 10^{-4}.

$3 \cdot 10^4 = 30.000$

$3 : 10^{-4} = \dfrac{3}{10^{-4}} = \dfrac{3}{\frac{1}{10^4}} = 3 \cdot \dfrac{10^4}{1} = 3 \cdot 10^4 = 30.000$

Multiplicação e divisão por potências de base 10

Para multiplicar, de maneira prática, um número por 10, 10^2, 10^3, ..., basta deslocar a vírgula uma, duas, três, ... casas para a direita. Isso é possível porque, nesse caso (expoente inteiro positivo), cada uma dessas potências tem um, dois, três, ... zeros.

Observe alguns exemplos.

a) $5{,}126 \cdot 10^1 = 51{,}26$

b) $0{,}0028 \cdot 10^2 = 0{,}28$

c) $12 \cdot 10^3 = 12.000$

d) $8{,}56 \cdot 10^4 = 85.600$

Já para multiplicar um número por 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., deslocamos a vírgula uma, duas, três, ... casas para a esquerda, o que equivale a dividir esse número por 10^1, 10^2, 10^3, ... ou por 10, 100, 1.000, ...

Veja alguns exemplos.

a) $356 \cdot 10^{-2} = 3{,}56$

b) $25.678{,}2 \cdot 10^{-3} = 25{,}6782$

c) $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}05$

d) $2{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}00245$

Nos exemplos acima, fizemos multiplicações por potências de base 10, mas também é possível fazer divisões. Veja, a seguir, duas dessas multiplicações transformadas em divisões.

sinais contrários

a) $8{,}56 \cdot 10^4 = 8{,}56 \cdot \dfrac{1}{10^{-4}} = \dfrac{8{,}56}{10^{-4}} = 8{,}56 : 10^{-4}$

sinais contrários

b) $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}5 \cdot \dfrac{1}{10^1} = \dfrac{0{,}5}{10^1} = 0{,}5 : 10^1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Efetue:

a) $3{,}6 \cdot 10^4$ 36.000

b) $0{,}025 \cdot 10^2$ 2,5

c) $0{,}4 \cdot 10^{-2}$ 0,004

d) $3.576 \cdot 10^{-3}$ 3,576

17 O produto $0{,}000025 \cdot 0{,}000000002$ é igual a: alternativa **b**

a) $50 \cdot 10^{-14}$.

b) $5 \cdot 10^{-14}$.

c) $5 \cdot 10^{-40}$.

d) $5 \cdot 10^{-4}$.

e) $50 \cdot 10^{-13}$.

18 (PUC-MG) O valor da expressão

$A = 1{,}67 \cdot 10^{-24} + 3{,}95 \cdot 10^{-22}$ é: alternativa **a**

a) $3{,}9667 \cdot 10^{-22}$.

b) $3{,}9667 \cdot 10^{-23}$.

c) $3{,}9667 \cdot 10^{-24}$.

d) $3{,}9667 \cdot 10^{-42}$.

e) $3{,}9667 \cdot 10^{-46}$.

19 Descubra a potência de 10 que deve ser colocada no lugar de a para que se obtenha:

a) $56{,}754 \cdot a = 567.540$ 10^4

b) $0{,}003 \cdot a = 30$ 10^4

c) $a \cdot 23 = 0{,}000023$ 10^{-6}

d) $a \cdot 4{,}5 = 0{,}00045$ 10^{-4}

20 Converta as medidas abaixo usando potências de 10.

a) 1 cm em m 10^{-2} m

b) 100 km em m 10^5 m

c) 10 g em kg 10^{-2} kg

d) 1 t em kg 10^3 kg

e) 10 cm^2 em m^2 10^{-3} m^2

f) 1 cm^3 em dm^3 10^{-3} dm^3

21 (UFMG) O açude de Orós, um dos maiores reservatórios do Brasil, tem capacidade para armazenar $2 \cdot 10^9$ m^3 de água. Sabe-se que o rio Amazonas lança no oceano Atlântico 50 milhões de litros de água por segundo.

Com base nesses dados, é correto afirmar que o tempo que o rio Amazonas leva para lançar no oceano Atlântico um volume igual à capacidade do açude Orós é: alternativa **d**

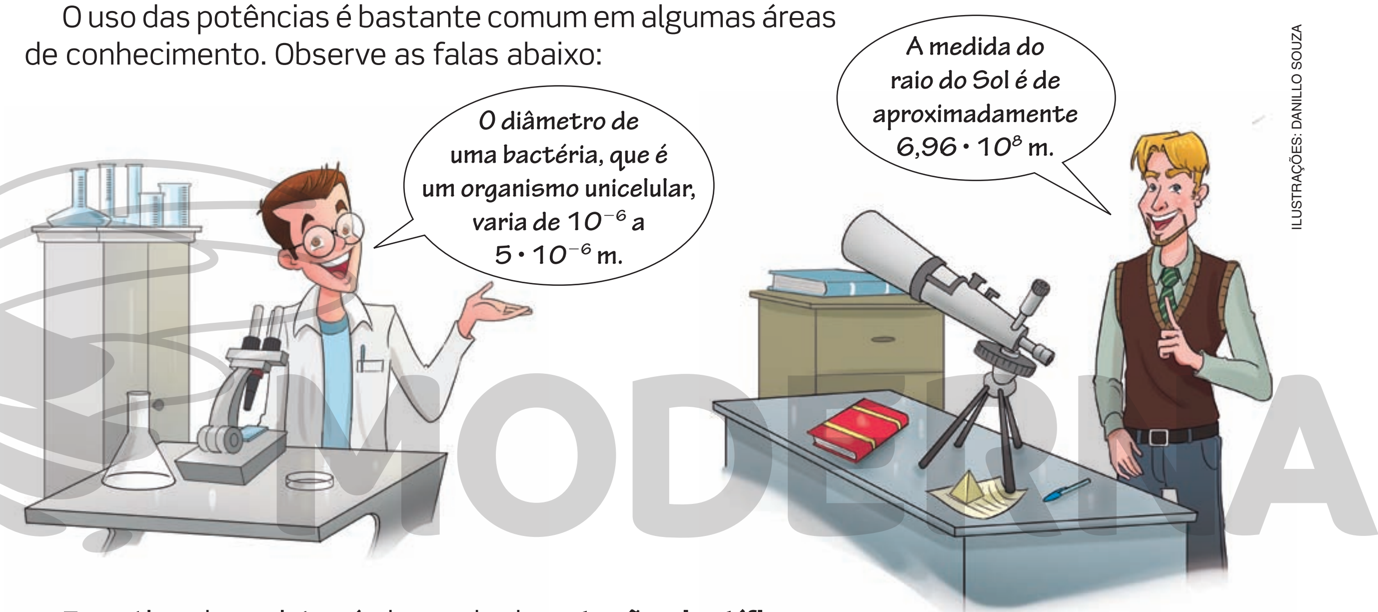
a) maior que 20 horas.
b) menor que 5 horas.
c) maior que 5 horas e menor que 10 horas.
d) maior que 10 horas e menor que 20 horas.

MAURICIO SIMONETTI/PULSAR IMAGENS

O açude de Orós, localizado no município de Orós, Ceará (CE), é formado pela barragem das águas do rio Jaguaribe. (Foto de 2015.)

Notação científica

O uso das potências é bastante comum em algumas áreas de conhecimento. Observe as falas abaixo:



ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA

Esse tipo de registro é chamado de **notação científica**.

A notação científica fornece uma ideia clara da ordem de grandeza (bilhões, milhões, milésimos etc.), fundamental para trabalhar com números "muito grandes" ou "muito pequenos". A ordem de grandeza é dada pela potência de 10.

Os números, em notação científica, são escritos como produto de dois fatores, em que um deles é uma potência de 10 com expoente inteiro (positivo ou negativo), e o outro, um número igual a 1 ou maior que 1 e menor que 10.

Observe os exemplos abaixo.

$1 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-6}$
$6{,}96 \cdot 10^8$

potência de 10 com expoente inteiro

número igual a 1 ou maior que 1 e menor que 10

Veja outros exemplos de números escritos em notação científica.

a) $5{,}2 \cdot 10^6$ **b)** $8{,}1 \cdot 10^{12}$ **c)** $1{,}25 \cdot 10^{-3}$ **d)** $2{,}236 \cdot 10^{-9}$

Agora, vamos escrever alguns números em notação científica.

a) 3.265

Para que esse número tenha apenas um algarismo não nulo na parte inteira, devemos multiplicá-lo por 10^{-3}. Mas isso alteraria o valor do número, portanto, multiplicamos agora por 10^3, pois $10^{-3} \cdot 10^3 = 10^0 = 1$. Assim:

$$3.265 = \underbrace{3.265 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^3 = \underbrace{3,265} \cdot 10^3$$

lugar da vírgula

b) $28,5 = \underbrace{28,5 \cdot 10^{-1}} \cdot 10 = \underbrace{2,85} \cdot 10$

lugar da vírgula

c) 0,0056

Quando o número é menor que 1, devemos multiplicá-lo por uma potência de 10 com expoente positivo e, para não mudar o valor, multiplicar também pela potência de 10 com expoente oposto ao da primeira multiplicação.

$$0,0056 = \underbrace{0,0056 \cdot 10^3} \cdot 10^{-3} = \underbrace{5,6} \cdot 10^{-3}$$

lugar da vírgula

d) $0,65 = \underbrace{0,65 \cdot 10} \cdot 10^{-1} = \underbrace{6,5} \cdot 10^{-1}$

lugar da vírgula

Veja agora como é usada a notação científica para expressar:

a) a distância da Terra até o Sol

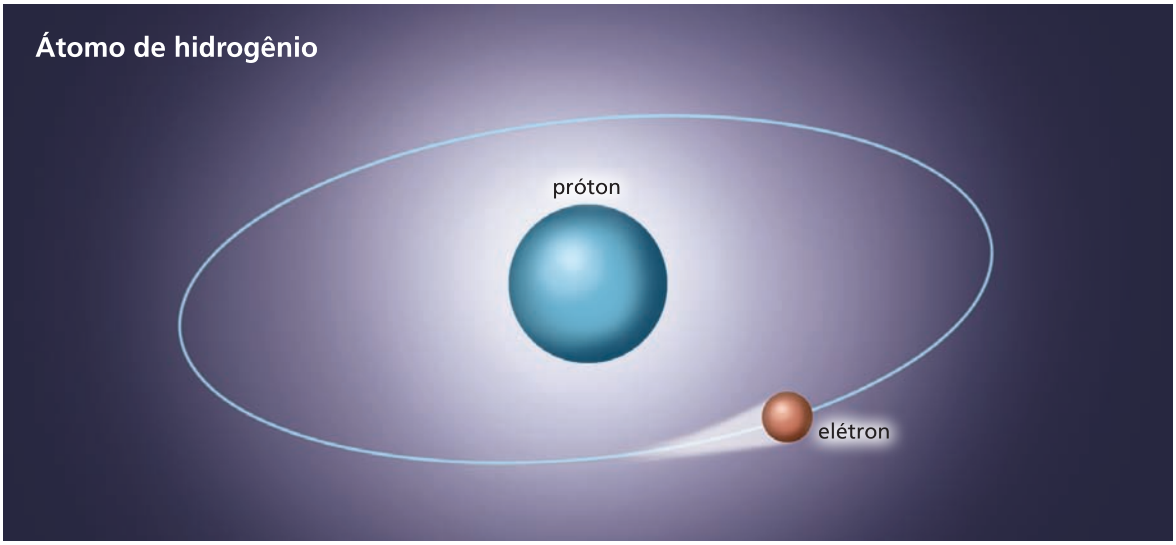
$$150.000.000 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

Representação esquemática: o Sol, os planetas e as órbitas não foram representados na proporção nem nas cores reais.

b) a massa do átomo de hidrogênio

$$0{,}00000000000000000000000166 \text{ g} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$



PAULO MANZI

Representação esquemática, fora da proporção real.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Expresse, em notação científica, cada um dos números abaixo.

a) 12,6 milhões $1{,}26 \cdot 10^7$

b) $361 \cdot 10^6$ $3{,}61 \cdot 10^8$

c) 15 bilhões $1{,}5 \cdot 10^{10}$

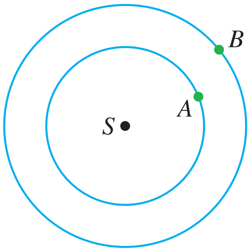
d) $458{,}6 \cdot 10^{-5}$ $4{,}586 \cdot 10^{-3}$

e) $3.576 \cdot 10^{-3}$ $3{,}576 \cdot 10^0$ ou 3,576

f) 0,0000000000001 $1 \cdot 10^{-13}$

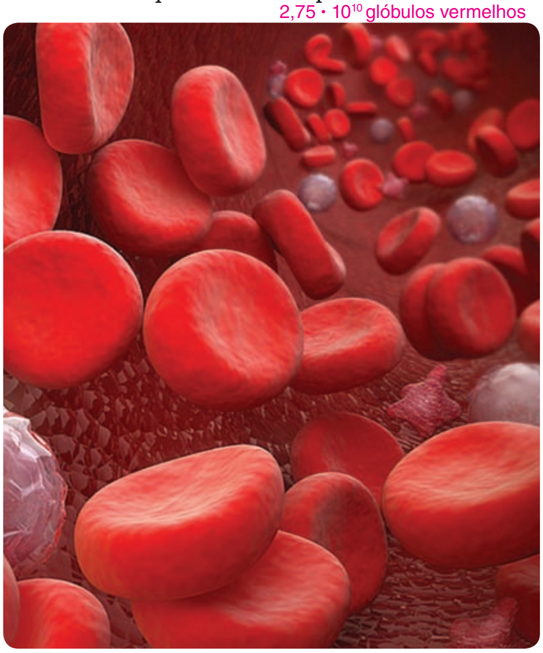
23 A massa do Sol é aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ kg. Expresse, em notação científica, essa massa em toneladas. $2 \cdot 10^{27}$ t

24 Dois planetas, A e B, giram em torno de um sol S em órbitas praticamente circulares e no mesmo plano. A distância de A até o sol S é de $15 \cdot 10^7$ km e a distância de B até o sol S é de $2{,}3 \cdot 10^8$ km. Considerando-se desprezíveis os diâmetros desses astros, calcule a distância máxima e a mínima entre A e B e expresse-as em notação científica. $3{,}8 \cdot 10^8$ km; $8 \cdot 10^7$ km



ADILSON SECCO

25 Cada mililitro de sangue humano contém, em média, $5 \cdot 10^6$ glóbulos vermelhos. O corpo de um ser humano adulto tem, em média, 5,5 litros de sangue. De acordo com esses dados, qual é o número médio de glóbulos vermelhos que há no corpo de um adulto? $2{,}75 \cdot 10^{10}$ glóbulos vermelhos



ALEX MIT/SHUTTERSTOCK

Glóbulos vermelhos (hemácias). Representação esquemática, fora da proporção real.

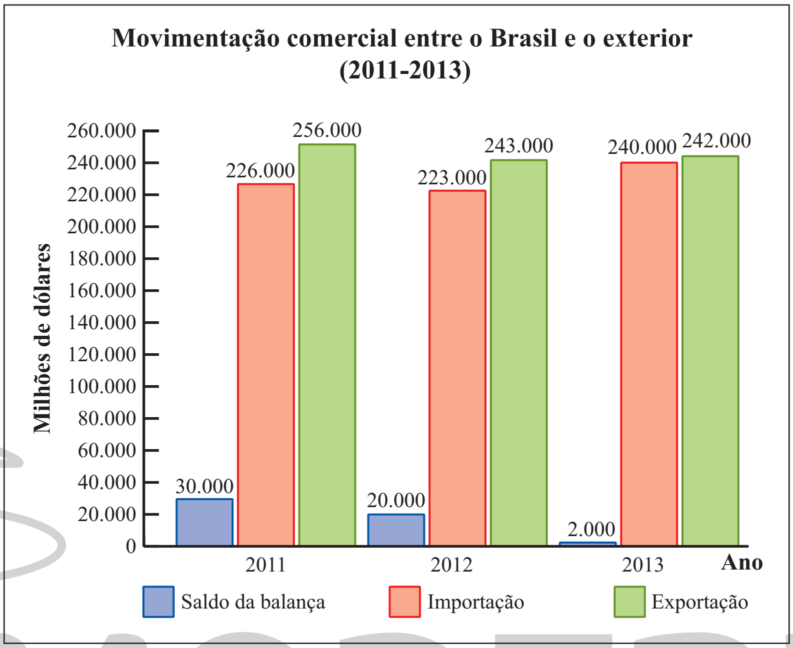
Lembre-se:
Não escreva no livro!

26 (UFSE) Um raio de luz, propagando-se no vácuo, desloca-se com velocidade de $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s aproximadamente. Se a distância entre dois planetas é de $9{,}0 \cdot 10^7$ km, então o tempo, em minuto, que o raio de luz levará para cobrir essa distância é: alternativa **b**

a) 5,2. **b)** 5. **c)** 4,5. **d)** 4. **e)** 3,8.

27 Considere, no gráfico a seguir, os valores aproximados indicados em cada coluna. Reúna-se com um colega, copiem o gráfico e façam o que se pede.

ADILSON SECCO



Fonte: MDIC (Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior). Disponível em: <www.mdic.gov.br>. Acesso em: 30 mar. 2015.

27. a) exportação: $2{,}56 \cdot 10^{11}$ (2011); $2{,}43 \cdot 10^{11}$ (2012); $2{,}42 \cdot 10^{11}$ (2013); importação: $2{,}26 \cdot 10^{11}$ (2011); $2{,}23 \cdot 10^{11}$ (2012); $2{,}40 \cdot 10^{11}$ (2013); saldo da balança: $3{,}0 \cdot 10^{10}$ (2011); $2{,}0 \cdot 10^{10}$ (2012); $2{,}0 \cdot 10^{9}$ (2013)

a) Expressem em notação científica os valores, em dólares, apresentados no gráfico.

b) Para cada ano, verifiquem se a diferença entre a exportação e a importação é igual ao saldo da balança. sim

c) Qual foi a média aproximada das exportações nesse período? E das importações? E do saldo da balança? $2{,}47 \cdot 10^{11}$; $2{,}3 \cdot 10^{11}$; $1{,}7 \cdot 10^{10}$

d) Para cada ano, escrevam com um número negativo o quanto falta para a exportação atingir a média ou com um número positivo em quanto a exportação excedeu a média. Qual é a soma desses três números? 2011: $+9 \cdot 10^{10}$; 2012: $-4 \cdot 10^{10}$; 2013: $-5 \cdot 10^{10}$; soma: zero

e) No gráfico copiado do caderno, tracem uma reta horizontal pelo valor da média das importações. Façam uma estimativa para responder à questão: a parte da coluna da importação de 2012 que ficou abaixo da reta traçada é equivalente à soma das partes, das outras duas colunas, que a ultrapassam? sim

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz, no vácuo, durante um ano, à velocidade de 300.000 km por segundo (velocidade da luz).

a) Escreva, em notação científica, a distância percorrida pela luz em 2 anos-luz. $1{,}89216 \cdot 10^{13}$ km

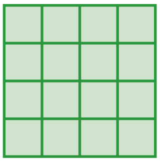
b) A distância do Sol à Terra é $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Em quantos segundos a luz percorre essa distância? 500 s

2 Calculando com raízes

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Observe o quadrado ao lado.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Considerando  como unidade de medida de superfície, podemos dizer que a área desse quadrado é 16  ($4^2 = 16$).

Agora, vamos imaginar a situação inversa. Sabendo que a área do quadrado é 16  e que o lado do quadrado mede 1, vamos calcular quanto mede o lado desse quadrado. Essa medida é dada por um número que, elevado ao quadrado, dá 16. Esse número é a **raiz quadrada** de 16. Assim:

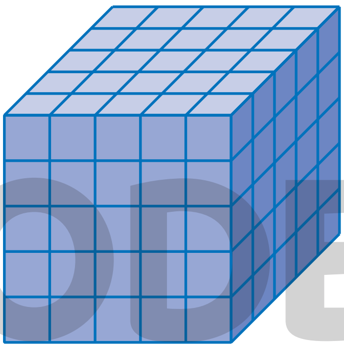
$$\sqrt{16} = 4, \text{ pois } 4^2 = 16$$

(lemos: raiz quadrada de dezesseis)

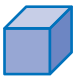
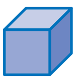
Portanto, a medida do lado do quadrado é 4.

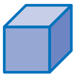
Situação 2

Observe o cubo abaixo.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Tomando o cubinho  como unidade de medida de volume, podemos dizer que o volume do cubo é 125  ($5^3 = 125$).

A situação inversa seria calcular a medida da aresta do cubo sabendo que o volume é 125  e que a medida da aresta de um cubinho é 1. A medida da aresta do cubo é expressa por um número que, elevado ao cubo, dá 125. Esse número é a **raiz cúbica** de 125. Assim:

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ pois } 5^3 = 125$$

(lemos: raiz cúbica de cento e vinte e cinco)

Então, a aresta do cubo mede 5.

Veja outros exemplos.

a) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{1}{3}$, pois $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$

(lemos: raiz quarta de um oitenta e um avos)

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$

(lemos: raiz quinta de menos trinta e dois)

OBSERVAÇÕES

- Dando nomes aos símbolos:

índice → $\sqrt[n]{a} = b$ ← **raiz**

↑

radicando

- $\sqrt[n]{a} = b$ (lemos: raiz enésima de *a* é igual a *b*)
- O sinal $\sqrt{}$ é chamado de **radical**. No entanto, usamos essa mesma palavra para indicar a raiz quadrada de um número *a*.

> De modo geral, sendo *n* um número natural diferente de zero e *a* um número real, temos dois casos:
>
> - Se *n* é **par** e $a \geqslant 0$: $\sqrt[n]{a}$ é o número real *b*, $b \geqslant 0$, tal que $b^n = a$.
> - Se *n* é **ímpar**: $\sqrt[n]{a}$ é o número real *b*, tal que $b^n = a$.

Acompanhe a seguir, alguns exemplos de cada caso.

1º caso: *n* é um número natural não nulo par e *a* é um número real não negativo

Como exemplo, vamos calcular a raiz quadrada de 25.

Temos dois números reais que, elevados ao quadrado, resultam em 25. São eles -5 e $+5$, pois $(-5)^2 = 25$ e $(+5)^2 = 25$.

Devemos, então, dizer que a raiz quadrada de 25 é 5 ou -5.

Para garantir um resultado único, convencionou-se que o símbolo $\sqrt{25}$ representa a raiz positiva de 25, isto é, $\sqrt{25} = 5$.

Veja outros exemplos:

a) $\sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$

c) $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

d) $\sqrt{7} \simeq 2{,}64$.

Observe que o número 2,64 é a representação decimal aproximada de $\sqrt{7}$ com duas casas decimais. Com o auxílio de uma calculadora, podemos obter uma representação decimal com mais casas decimais; no entanto, o valor ainda será aproximado.

OBSERVAÇÃO

- Note que, se a é um número real e $a < 0$, sendo n par, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$.
Como exemplo, vamos mostrar que $\sqrt{-4}$ não representa um número real.
De fato, se $\sqrt{-4}$ fosse um número real m, deveríamos ter $m^2 = -4$, o que é impossível, pois o quadrado de qualquer número real é sempre um número não negativo. Logo, $\sqrt{-4}$ não é um número real.

2º caso: n é um número natural não nulo ímpar e a é um número real

Veja a seguir, alguns exemplos de raízes de índice ímpar.

a) $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $4^3 = 64$

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, pois $(-4)^3 = -64$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} = \dfrac{3}{2}$, pois $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5 = \dfrac{243}{32}$

d) $\sqrt[5]{-\dfrac{243}{32}} = -\dfrac{3}{2}$, pois $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^5 = -\dfrac{243}{32}$

Quando n for ímpar, a raiz enésima terá o mesmo sinal do radicando.

OBSERVAÇÃO

- A raiz de índice n, com n natural não nulo, de zero é zero, ou seja, $\sqrt[n]{0} = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Responda:

a) Dois números, elevados ao quadrado, resultam em 100. Quais são eles? -10 e 10

b) Qual é a raiz quadrada de 100? 10

29 Por que não existe a raiz quadrada de -49 quando trabalhamos com números reais?
Porque nenhum número real elevado ao quadrado dá -49.

30 Responda se existe ou não um número real que seja:

a) a raiz quadrada de 64; Existe.

b) a raiz quadrada de 20; Existe.

c) a raiz quadrada de -9; Não existe.

d) a raiz quarta de -81; Não existe.

e) a raiz sexta de 100; Existe.

f) a raiz quinta de -32. Existe.

31 Classifique cada sentença abaixo em verdadeira ou falsa.

a) $\sqrt{16}$ é igual a 4 ou a -4. falsa

b) $\sqrt{16}$ é igual a 4. verdadeira

c) $\sqrt{16}$ é igual a -4. falsa

d) $\sqrt{-16}$ não é um número real. verdadeira

32 Calcule, se for um número real:

a) o valor de $-\sqrt{441}$; -21

b) o valor real de $\sqrt{-441}$. Não é um número real.

33 Classifique cada sentença abaixo em verdadeira ou falsa.

a) $\sqrt{10^2} = \sqrt{-10^2}$ falsa

b) $\sqrt{10^2} = \sqrt{(-10)^2}$ verdadeira

c) $\sqrt{(-7)^2} = -7$ falsa

d) $\sqrt{(-7)^2} = 7$ verdadeira

e) $-\sqrt{10^2} = \sqrt{(-10)^2}$ falsa

f) $-\sqrt{(-10)^2} = -10$ verdadeira

g) $\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{-8}$ verdadeira

h) $\sqrt[n]{0} = 0$, para $n \geqslant 2$ verdadeira

34 Calcule:

a) $2 \cdot \sqrt{900}$ 60

b) $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{2{,}56}$ 1,2

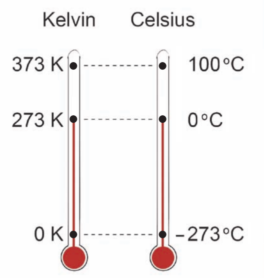
c) $\sqrt{0} - \sqrt[5]{-1}$ 1

d) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}} - \sqrt{\dfrac{25}{64}}$ $-\dfrac{31}{24}$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

35 A relação $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$ determina a velocidade do som no ar em função da temperatura. Nessa relação, v representa a velocidade, em metro por segundo, e t, a temperatura, em grau Celsius.

O número 273, que aparece na fórmula, representa, na escala Kelvin, a temperatura correspondente a 0 na escala Celsius. Veja o esquema ao lado.



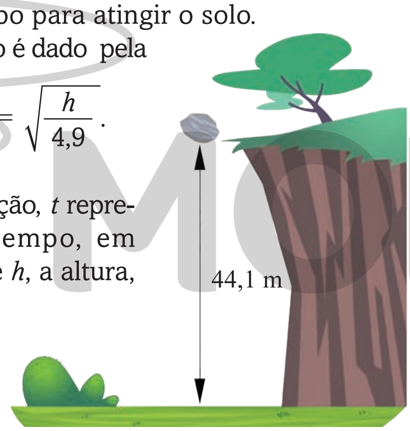
CLAUDIO CHIYO

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de 16 °C? E a 51 °C? E a −17 °C?
340 m/s; 360 m/s; 320 m/s

b) O som se propaga mais rapidamente nas regiões polares ou na região equatoriana?
na região equatoriana

36 Um objeto solto de determinada altura leva certo tempo para atingir o solo.
Esse tempo é dado pela relação $t = \sqrt{\frac{h}{4{,}9}}$.

Nessa relação, t representa o tempo, em segundo, e h, a altura, em metro.



CLAUDIO CHIYO

Calcule quanto tempo um objeto leva para atingir o solo caindo da altura de 44,1 m.
3 segundos

37 Calcule o valor da expressão abaixo.

$$\sqrt[3]{18 + \sqrt{84 - \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$$ 3

38 Sabendo que $273^2 = 74.529$, calcule:

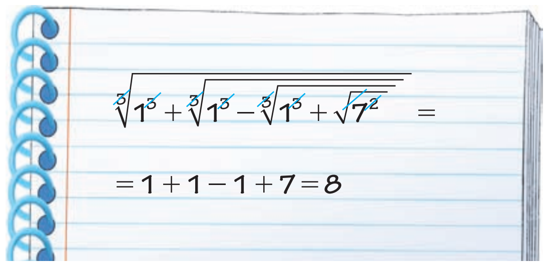
a) $\sqrt{745{,}29}$ 27,3

b) $\sqrt{7.452.900}$ 2.730

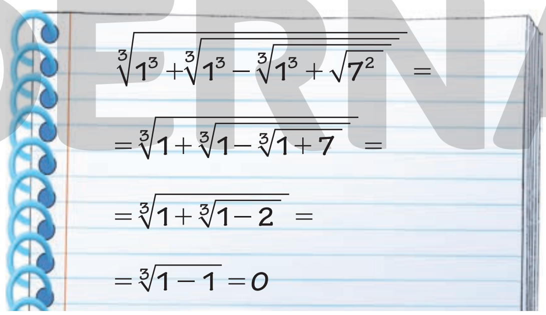
39 A professora pediu aos alunos que calculassem o valor da expressão abaixo.

$$\sqrt[3]{1^3 + \sqrt[3]{1^3 - \sqrt[3]{1^3 + \sqrt{7^2}}}}$$

Daniel fez deste modo:



Fernanda fez desta maneira:



ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIYO

Algum deles acertou? Quem? Sim. Fernanda.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e repondam às questões a seguir.

a) A raiz cúbica de um número real a é 4. Qual é a raiz sexta de a? 2

b) A raiz sexta de um número real a é 3. Qual é a raiz quadrada de a? 27

3 Potências com expoente fracionário

Até aqui, estudamos potências de expoente inteiro. Agora, vamos estudar as potências com expoente fracionário, relacionando potenciação com radiciação.

Já vimos que, se $b^n = a$, então $b = \sqrt[n]{a}$, com n natural não nulo e $b \geq 0$.

Agora, como exemplo, vamos considerar a potência $(7^3)^2 = 7^6$.

De acordo com a definição de raiz, temos que 7^3 é a raiz quadrada de 7^6, pois $(7^3)^2 = 7^6$. Assim, podemos escrever:

$$\sqrt{7^6} = 7^3 \text{ ou } \sqrt[2]{7^6} = 7^{\frac{6}{2}}$$

expoente do radicando

índice da raiz

Todo radical de radicando positivo pode ser escrito como uma potência em que a base é o radicando e o expoente é expresso por uma fração que tem, no numerador, o expoente do radicando e, no denominador, o índice do radical.

Veja, por exemplo, a justificativa para as expressões a seguir.

a) $5^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{5^3}$, pois $\left(5^{\frac{3}{8}}\right)^8 = 5^{\frac{3}{8} \cdot 8} = 5^3$

b) $3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$, pois $\left(3^{\frac{2}{7}}\right)^7 = 3^{\frac{2}{7} \cdot 7} = 3^2$

c) $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}$, pois $\left[\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3 = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3} \cdot 3} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^2$

Se a é um número real positivo, m é um número inteiro e n é um número natural não nulo, temos: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Observe outros exemplos.

a) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{3}} = 2^5$

c) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

d) $7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4}$

e) $9^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

f) $0{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

OBSERVAÇÃO

- As propriedades válidas para as potências de expoente inteiro também são válidas para as potências de expoente fracionário que tenham base positiva.

  Por exemplo:

  - $3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{13}{15}}$
  - $7^{\frac{2}{5}} : 7^{\frac{1}{9}} = 7^{\frac{2}{5} - \frac{1}{9}} = 7^{\frac{13}{45}}$
  - $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{10}}$

44. a) $5^{\frac{6}{12}}$; $5^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{5}$ c) $2,5^{\frac{7}{14}}$; $2,5^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2,5}$ e) $1,3^{\frac{9}{6}}$; $1,3^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{1,3^3}$
b) $11^{\frac{6}{9}}$; $11^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{11^2}$ d) $2,5^{\frac{14}{21}}$; $2,5^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{2,5^2}$ f) $0,3^{\frac{12}{30}}$; $0,3^{\frac{2}{5}}$; $\sqrt[5]{0,3^2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

40 Represente na forma de potência com expoente fracionário.

a) $\sqrt[3]{2^2}$ $2^{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt[4]{5^3}$ $5^{\frac{3}{4}}$ c) $\sqrt[3]{10}$ $10^{\frac{1}{3}}$

41 Represente na forma de radical.

a) $2^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{2^3}$ b) $9^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{9}$ c) $8^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{8}$

42 Reduza a uma só potência, usando as propriedades das potências.

a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ $2^{\frac{7}{12}}$

b) $2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{4}}$ $2^{\frac{1}{12}}$

c) $\left(12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$ $12^{\frac{2}{3}}$

d) $3^{{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{2}}}$ $3^{\frac{1}{4}}$

43 Calcule:

a) $\sqrt{3^6}$ 27 b) $512^{\frac{1}{3}}$ 8 c) $\sqrt[4]{2^8}$ 4

44 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

- Representem cada radical abaixo na forma de potência com expoente fracionário.
- Simplifiquem, se possível, a fração do expoente da potência obtida.
- Representem a potência com expoente simplificado na forma de radical.
- Comparem cada radical dado com o respectivo radical obtido. Escrevam uma regra prática para simplificar, quando possível, um radical.

a) $\sqrt[12]{5^6}$ d) $\sqrt[21]{2,5^{14}}$

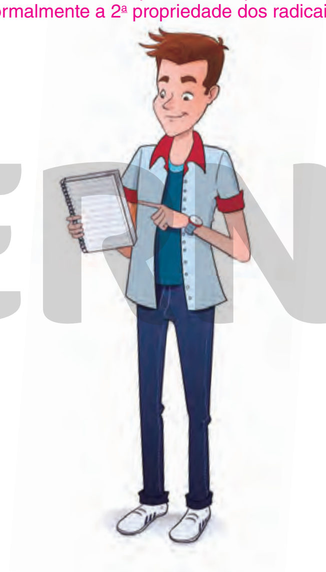
b) $\sqrt[9]{11^6}$ e) $\sqrt[6]{1,3^9}$

c) $\sqrt[14]{2,5^7}$ f) $\sqrt[30]{0,3^{12}}$

44. Espera-se que os alunos percebam que, na prática, basta dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um divisor comum. Essa é uma oportunidade para eles anteciparem informalmente a 2ª propriedade dos radicais.

4 Propriedades dos radicais

1ª propriedade



DANILLO SOUZA

Considerando o radical $\sqrt[3]{5^3}$, temos:

$$\sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

Da mesma maneira:

$$\sqrt[4]{5^4} = 5 \text{ e } \sqrt[3]{(-5)^3} = -5,$$

mas

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = 5,$$

pois $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$ e $\sqrt[4]{625} = 5$.

Ao calcular $\sqrt[3]{(-5)^3}$, extraímos uma raiz de índice ímpar de um número negativo, ou seja, $\sqrt[3]{-125}$. O resultado é um número negativo, -5, pois $(-5)^3 = -125$.

Entretanto, ao calcular $\sqrt[4]{(-5)^4}$, extraímos a raiz de índice par de um número positivo, isto é, $\sqrt[4]{625}$, que é 5, pois $5^4 = 625$.

De modo geral:

- se n é um número natural ímpar, então $\sqrt[n]{a^n} = a$, sendo a um número real;
- se n é um número natural par não nulo, então $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, sendo a um número real.

Veja alguns exemplos.

a) $\sqrt[3]{2^3} = 2$

b) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

c) $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

d) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

OBSERVAÇÃO

▶ Quando o radicando for uma potência de expoente par que tenha na base uma expressão literal que represente um número real, iremos admitir que o radicando assume apenas valores reais iguais a zero ou maiores que zero.

Assim:

- $\sqrt[4]{x^4} = x$ **Admitindo que $x \geqslant 0$.**
- $\sqrt{(3x-5)^2} = 3x - 5$ **Admitindo que $3x - 5 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant \frac{5}{3}$.**

2ª propriedade

Observe o cálculo abaixo.

$$\sqrt[12]{3^8} \underbrace{=}_{\text{Escrevemos a expressão na forma de potência.}} 3^{\frac{8}{12}} \underbrace{=}_{\text{Simplificamos a fração do expoente.}} 3^{\frac{2}{3}} \underbrace{=}_{\text{Escrevemos a expressão na forma de raiz.}} \sqrt[3]{3^2}$$

Assim: $\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12:4]{3^{8:4}} = \sqrt[3]{3^2}$

Dividindo-se o índice e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior que zero, o valor do radical não se altera, ou seja:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

sendo a um número real positivo, m um número inteiro, n um número natural não nulo e p divisor de m e n.

Essa propriedade nos permite simplificar certos radicais, isto é, transformá-los em radicais mais simples e equivalentes aos radicais dados.

Como exemplo, vamos simplificar os radicais a seguir.

a) $\sqrt[12]{2^9} = \sqrt[12:3]{2^{9:3}} = \sqrt[4]{2^3}$ **Dividimos o índice e o expoente por 3, que é divisor de 12 e de 9.**

b) $\sqrt[20]{7^{15}} = \sqrt[20:5]{7^{15:5}} = \sqrt[4]{7^3}$ **Dividimos o índice e o expoente por 5, que é divisor de 20 e de 15.**

c) $\underbrace{\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3}}_{\text{Decompomos 125 em fatores primos.}} = \underbrace{\sqrt[6:3]{5^{3:3}} = \sqrt{5}}_{\text{Dividimos o índice e o expoente por 3.}}$

3ª propriedade

Observe o cálculo abaixo.

$$\sqrt{3 \cdot 5} = (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

Em geral, sendo *a* e *b* números reais positivos e *n* um número natural não nulo, temos:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a \cdot b}}_{\text{radical de um produto}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}_{\text{produto dos radicais}}$$

Veja dois exemplos.

a) $\sqrt[3]{4 \cdot 3} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[5]{7 \cdot 10} = \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{10}$

4ª propriedade

Observe o cálculo abaixo.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Em geral, sendo *a* e *b* números reais positivos, com $b \neq 0$, e *n* um número natural não nulo, temos:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}_{\text{radical de um quociente}} = \underbrace{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}_{\text{quociente dos radicais}}$$

Veja dois exemplos.

a) $\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$

Com base nas propriedades que acabamos de estudar, é possível simplificar certos radicais tirando fatores do radicando.

Como exemplo, vamos simplificar os radicais a seguir.

a) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{\frac{625}{64}} = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{5^3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2^2} = \frac{5\sqrt[3]{5}}{4}$

Da mesma forma que podemos tirar fatores do radicando, podemos fazer o inverso, ou seja, introduzir fatores externos no radicando. Veja alguns exemplos.

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$

b) $3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5}$

c) $2\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 18}$

d) $7\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^2} = \sqrt[3]{7^5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

45 Calcule:

a) $\sqrt[3]{10^3}$ 10

b) $\sqrt[4]{1{,}7^4}$ 1,7

c) $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$ $\frac{5}{6}$

d) $\sqrt[4]{2^4}$ 2

46 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt[9]{5^6}$ $\sqrt[3]{5^2}$

b) $\sqrt[15]{3^{20}}$ $\sqrt[3]{3^4}$

c) $\sqrt[6]{11^3}$ $\sqrt{11}$

d) $\sqrt[18]{7^2}$ $\sqrt[9]{7}$

47 Decomponha o radicando em fatores primos e simplifique os radicais.

a) $\sqrt[10]{32}$ $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{27}$ $\sqrt{3}$

c) $\sqrt[4]{0{,}36}$ $\sqrt{0{,}6}$

d) $\sqrt[6]{0{,}216}$ $\sqrt{0{,}6}$

48 Simplifique os radicais, sabendo que $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $m \geqslant 0$.

a) $\sqrt[6]{a^3}$ $\sqrt{a}$

b) $\sqrt[20]{x^{15}}$ $\sqrt[4]{x^3}$

c) $\sqrt[9]{y^6}$ $\sqrt[3]{y^2}$

d) $\sqrt[12]{m^{10}}$ $\sqrt[6]{m^5}$

49 Transforme em um produto de radicais.

a) $\sqrt{4 \cdot 5}$ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2 \cdot 3}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{7 \cdot 10}$ $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{10}$

50 Represente como um quociente de radicais.

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{18}{5}}$ $\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\sqrt[5]{\frac{2}{9}}$ $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{9}}$

51 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt{8}$ $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{27 \cdot 5}$ $3\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[5]{2^7}$ $2\sqrt[5]{4}$

d) $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4}$ $30\sqrt[4]{24}$

e) $\sqrt[3]{162}$ $3\sqrt[3]{6}$

f) $\sqrt[6]{3^3 \cdot 4^{12}}$ $16\sqrt[6]{27}$

52 Introduza nos radicais os fatores externos em cada caso.

a) $2\sqrt{5}$ $\sqrt{2^2 \cdot 5}$

b) $3\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2}$

c) $-2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3^3 \cdot 10}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{3^2}}$

e) $0{,}2\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{(0{,}2)^3 \cdot 2}$

f) $2\sqrt[4]{3}$ $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}$

5 Adição algébrica com radicais

Acompanhe duas formas de efetuar a adição algébrica com radicais.

1ª forma

Substituímos as raízes por seus valores e fazemos os cálculos indicados. Por exemplo:

a) $\sqrt{49} + \sqrt{16} = 7 + 4 = 11$

b) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16} = 2 - 2 = 0$

c) $-5\sqrt[3]{0{,}125} + 2\sqrt{1{,}69} = -5 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}3 = -2{,}5 + 2{,}6 = 0{,}1$

2ª forma

Se houver vários radicais iguais, podemos colocá-los em evidência. Por exemplo:

colocando em evidência o fator comum

a) $10\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = (10 + 4 - 1)\sqrt[3]{2} = 13\sqrt[3]{2}$

fator comum

b) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + \sqrt{7} + 4\sqrt{7} = (3 - 5)\sqrt{5} + (2 + 1 + 4)\sqrt{7} = -2\sqrt{5} + 7\sqrt{7}$

A expressão $-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7}$ não pode mais ser reduzida, porque seus termos não têm radicais iguais. Mas é possível encontrar um valor aproximado para ela.

Como $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$ e $\sqrt{7} \simeq 2{,}6$, temos:

$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7} \simeq -2 \cdot 2{,}2 + 7 \cdot 2{,}6$

$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7} \simeq 13{,}8$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} = 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 3} + 5\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3 \cdot 5^2} =$

$= 2 \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + \cancel{10\sqrt{3}} - \cancel{10\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

53 Calcule:

a) $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81}$ 11

b) $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{64} + \sqrt[6]{64}$ 6

c) $2\sqrt{4{,}41} - 3\sqrt{2{,}56}$ −0,6

54 Efetue:

a) $3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 6\sqrt{5}$ $-2\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ $2\sqrt{2} + 15\sqrt{3}$

c) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt[5]{3}$ $5\sqrt[5]{3} + \sqrt{3}$

d) $3 + \sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2}$ $10 - 4\sqrt{2}$

55 Reduza os radicais a uma expressão na forma $a\sqrt{b}$, com a e b inteiros.

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$ $5\sqrt{5}$

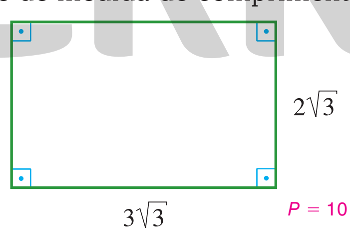
b) $4\sqrt{63} - \sqrt{7}$ $11\sqrt{7}$

c) $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{72}$ $6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{108}$ $13\sqrt{3}$

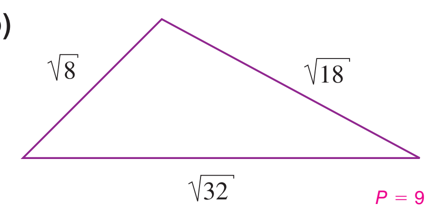
56 Determine o perímetro das figuras, cujas medidas dos lados são dadas em uma mesma unidade de medida de comprimento.

a)



$P = 10\sqrt{3}$

b)



$P = 9\sqrt{2}$

57 (Puccamp-SP) Efetuando-se

$\sqrt[3]{\dfrac{14}{125} + \sqrt{\dfrac{3}{5} - \dfrac{11}{25}}}$, obtém-se: alternativa **d**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{14} + 2}{5}$.

b) $\dfrac{\sqrt[3]{114}}{5}$.

c) $\dfrac{6}{5}$.

d) $\dfrac{4}{5}$.

e) $\dfrac{3}{5}$.

6 Multiplicação e divisão com radicais

Multiplicação com radicais

Para multiplicar radicais de mesmo índice, aplicamos a 3ª propriedade dos radicais:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

sendo n um número natural não nulo e a e b, números reais positivos.

Portanto, para multiplicar radicais de mesmo índice, mantemos o índice e multiplicamos os radicandos, simplificando, sempre que possível, o resultado obtido.

Veja alguns exemplos.

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

b) $-5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = (-5 \cdot 3)\sqrt{3 \cdot 2} = -15\sqrt{6}$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2) = \sqrt{4} + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

d) $(5 + \sqrt{7}) \cdot (2 - \sqrt{7}) = 5 \cdot 2 - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7^2} = 10 - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 7 = 3 - 3\sqrt{7}$

Se os índices dos radicais forem diferentes, antes da multiplicação, reduzimos esses radicais a um mesmo índice. Veja, por exemplo, como fazemos a redução dos radicais $\sqrt[3]{2^2}$ e $\sqrt[4]{3}$ a um mesmo índice.

$$\sqrt[3]{2^2} = \boxed{2^{\frac{2}{3}}} = \boxed{2^{\frac{8}{12}}} = \boxed{\sqrt[12]{2^8}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \boxed{3^{\frac{1}{4}}} = \boxed{3^{\frac{3}{12}}} = \boxed{\sqrt[12]{3^3}}$$

Escrevemos os radicais na forma de potência. **Determinamos, no expoente, frações equivalentes de mesmo denominador.** **Escrevemos as potências na forma de radical.**

Então, multiplicando esses dois radicais, obtemos:

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{6.912}$$

Observe que, no desenvolvimento acima, os números considerados são positivos. Mas também poderíamos ter números negativos. Por exemplo:

a) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(-5) \cdot 2} = \sqrt[3]{-10}$

b) $\sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-27) \cdot (-8)} = \sqrt[3]{216} = 6$

Divisão com radicais

Para dividir radicais de mesmo índice, aplicamos a 4ª propriedade dos radicais:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

sendo n um número natural não nulo e a e b números reais positivos, com $b \neq 0$.

Logo, para dividir radicais de mesmo índice, conservamos o índice e dividimos os radicandos, simplificando, sempre que possível, o resultado obtido.

Veja alguns exemplos.

a) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{20:10} = \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} : \sqrt{7} = \sqrt{28:7} = \sqrt{4} = 2$

c) $30\sqrt{15} : 5\sqrt{3} = (30:5)\sqrt{15:3} = 6\sqrt{5}$

d) $\left(12\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right) : \left(5\sqrt{2}\right) = 12\sqrt{6} : 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = \dfrac{12}{5}\sqrt{3} - \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Se os índices dos radicais forem diferentes, antes da divisão reduzimos esses radicais a um mesmo índice. Por exemplo:

a) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{4^4} : \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^8 : 2^3} = \sqrt[12]{2^5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

58 Efetue as multiplicações.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{30}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ 4

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$ 6

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ $5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$ $2\sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ $\sqrt[6]{200}$

59 Aplicando a propriedade distributiva, calcule:

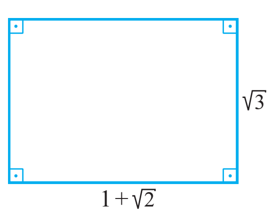
a) $\sqrt{5} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$ $\sqrt{5} + 5$

b) $\left(3\sqrt{2} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 3\right)$ $7\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot \left(2\sqrt{3}\right)$ $6 + 4\sqrt{3}$

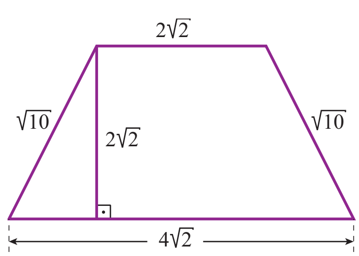
60 Calcule a área e o perímetro das figuras, cujas medidas são dadas em uma mesma unidade de medida de comprimento.

a)



$P = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
$A = \sqrt{3} + \sqrt{6}$

b)



$P = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
$A = 12$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

61 Calcule: $\left(\sqrt{201} + \sqrt{199}\right) \cdot \left(\sqrt{201} - \sqrt{199}\right)$ 2

62 Efetue as divisões.

a) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$ 2

b) $\sqrt{50} : \sqrt{2}$ 5

c) $12\sqrt[3]{-6} : 3\sqrt[3]{2}$ $4\sqrt[3]{-3}$

d) $\sqrt[3]{6} : \sqrt{3}$ $\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$

63 Sendo $x = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 3\sqrt{32}$ e $y = \sqrt{2}$, calcule $x : y$. 10

64 Calcule o valor das expressões.

a) $\left(\sqrt{18} + \sqrt{98} + \sqrt{200}\right) : \left(2\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$ 5

b) $\left(\sqrt{150} - \sqrt{24}\right) : \left(2\sqrt{8} - 3\sqrt{2}\right)$ $3\sqrt{3}$

c) $\left(10\sqrt{27} + 10\sqrt{3}\right) : 10\sqrt{3}$ 4

d) $\left(20\sqrt{10} + 10\sqrt{18}\right) : 2\sqrt{2}$ $10\sqrt{5} + 15$

65 (Uece) Se $p = 3 + \sqrt{2}$ e $q = 2 - \sqrt{2}$, então $p \cdot q - p$ é igual a: alternativa **a**

a) $1 - 2\sqrt{2}$.

b) $1 - \sqrt{2}$.

c) $1 + \sqrt{2}$.

d) $1 + 2\sqrt{2}$.

66 (Fuvest-SP) Se $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt[4]{2}$, então o valor de $a \cdot b$ é: alternativa **a**

a) $\sqrt[4]{8}$.

b) $\sqrt[4]{4}$.

c) $\sqrt{8}$.

d) $\sqrt{4}$.

e) $\sqrt[8]{4}$.

7 Potenciação com radicais

Observe o cálculo abaixo.

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[5]{3^4}$$

Então: $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3^4}$

Para potenciação com radicais, basta elevar o radicando à potência indicada.
Veja como podemos aplicar esse fato para simplificar algumas expressões.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3^2}\right)^2 = \sqrt[3]{(3^2)^2} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

c) $\left(4\sqrt{5}\right)^3 = 4^3 \cdot \sqrt{5^3} = 64 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 5} = 64 \cdot 5\sqrt{5} = 320\sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

67 Calcule:

a) $\left(\sqrt{15}\right)^2$ 15

b) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$ 3

c) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$ 63

d) $\left(3\sqrt[4]{3}\right)^4$ 243

e) $\left(\sqrt{10}\right)^3$ $10\sqrt{10}$

f) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^4$ $48\sqrt[3]{3}$

68 Calcule:

a) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)^2$ $10 + 2\sqrt{21}$

b) $\left(3 - \sqrt{7}\right)^2$ $16 - 6\sqrt{7}$

69 Qual é o valor da expressão $A = x^4 + x^2 + 2$ para $x = -\sqrt{3}$? 14

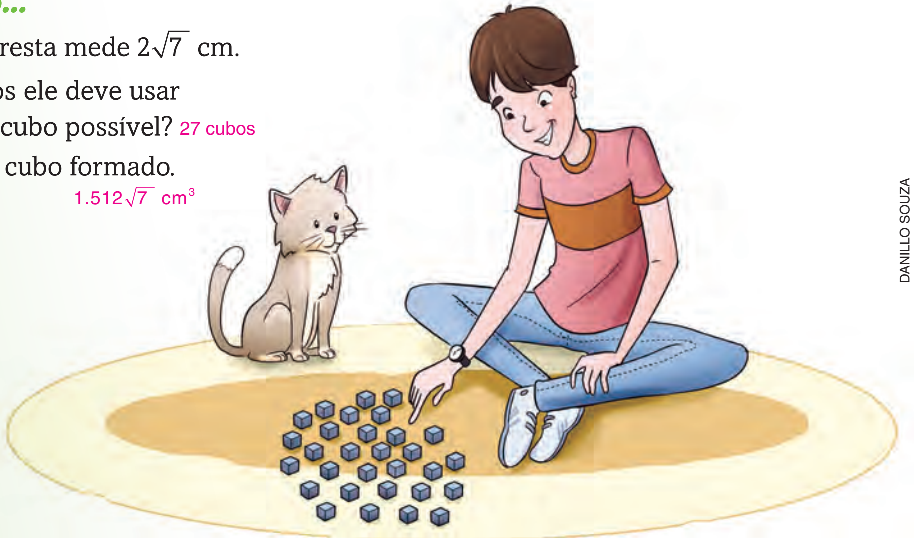
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Bruno tem 30 cubos cuja aresta mede $2\sqrt{7}$ cm.

a) Quantos desses cubos ele deve usar para formar o maior cubo possível? 27 cubos

b) Calcule o volume do cubo formado.
$1.512\sqrt{7}$ cm^3



DANILLO SOUZA

PARA SABER MAIS +

A linguagem das máquinas

LEONARDO CONCEIÇÃO

Os *softwares* têm uma sintaxe, isto é, existe determinada maneira de digitar os comandos para que a máquina os "entenda" corretamente.

Para calcular 2^3 em seu computador, Paulo precisava digitar a sequência 2^3.

Quando Paulo digitava 2^3 e, em seguida, pedia o resultado, a resposta que aparecia era 8.

Para calcular potências de potências, era necessário acrescentar parênteses.

Ou seja, se ele digitasse 2^3^2, a máquina calculava $2^{3^2} = 2^9 = 512$, mas se digitasse (2^3)^2 , o computador calculava $(2^3)^2 = 8^2 = 64$.

Para garantir resultados corretos em seus cálculos, utilizando ferramentas computacionais, é fundamental escrever corretamente. Isso também é importante quando você faz cálculos no papel: o uso adequado dos parênteses das expressões, por exemplo, precisa ser respeitado.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Descubra e efetue as expressões que Paulo queria calcular, considerando o que ele digitou, e escreva os resultados na forma de um número elevado a um expoente.

a) 2^3^3 $2^{3^3} = 2^{27}$ **b)** 2^3^2^3 $2^{3^{2^3}} = 2^{3^8} = 2^{6.561}$ **c)** (2^3)^4 $(2^3)^4 = 2^{12}$ **d)** ((3^2)^3)^2 $((3^2)^3)^2 = 3^{12}$

2 A importância dos parênteses não é uma novidade. De fato, você já deve ter observado que, por exemplo, $(a + b)^2 \neq a + b^2$.

Escreva como você digitaria as expressões a seguir, observando que, no caso da divisão, o comando para a máquina é "/".

a) $(a + b)^2$ (a + b)^2

b) $a + b^2$ a + b^2

c) $\dfrac{1}{a + b}$ 1/(a + b)

d) $\dfrac{1}{a} + b$ 1/a + b

e) $\dfrac{a + b}{c + d}$ (a + b)/(c + d)

f) $\dfrac{a}{c + d} + b$ a/(c + d) + b

3 O comando para calcular a raiz quadrada de um número pode ser, dependendo da máquina ou do *software* utilizado, a tecla $\sqrt{}$ ou a sequência *sqrt*. Para obter a raiz cúbica, não existindo a tecla apropriada, você pode digitar o seguinte:

(a)^(1/3), significando $\sqrt[3]{a}$, ou (a)^(1/2), significando $\sqrt{a}$. Dependendo da máquina, não é necessário colocar os parênteses na fração $\dfrac{1}{2}$. Na dúvida, entretanto, é melhor colocá-los.

Escreva, em cada caso, como você digitaria as expressões abaixo, lembrando que o comando de divisão da máquina é "/" e tomando o devido cuidado com os parênteses.

a) $\sqrt{a + b}$ (a + b)^(1/2)

b) $a + \sqrt{b}$ a + b^(1/2)

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a + b}}$ 1/(a + b)^(1/2)

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + b$ 1/a^(1/2) + b

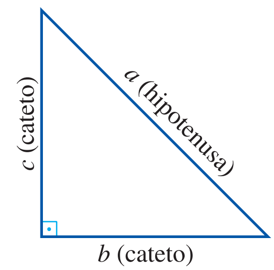
Representação geométrica de números irracionais expressos por radicais

Já representamos números racionais por pontos de uma reta numérica. Observe, a seguir, como representar por pontos da reta numérica alguns números irracionais dados por radicais.

Por exemplo, para representar $\sqrt{2}$ na reta numérica vamos utilizar um triângulo retângulo.

O triângulo retângulo é aquele que tem um ângulo interno reto. Seus lados recebem nomes especiais: catetos e hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto).

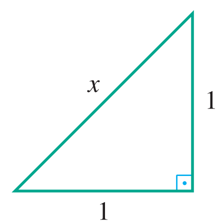
Para todo triângulo retângulo, vale a relação (que será estudada com mais detalhes no capítulo 5 deste livro) entre as medidas de seus lados, conhecida como teorema de Pitágoras:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Para representar $\sqrt{2}$ na reta numérica, vamos considerar um triângulo retângulo isósceles de catetos com uma unidade de comprimento e aplicar a relação entre as medidas de seus lados para achar a medida x da hipotenusa desse triângulo.

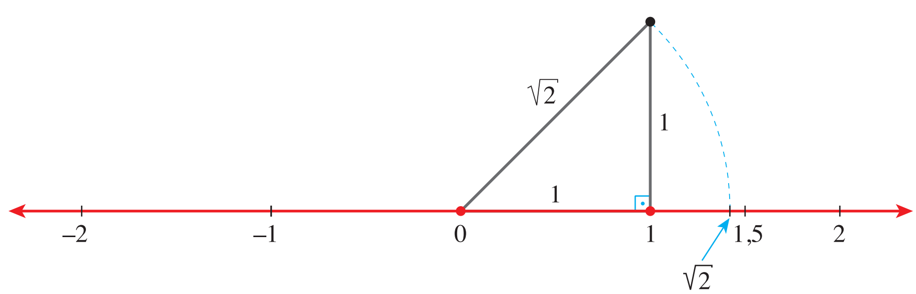


$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$

O valor procurado é um número que, elevado ao quadrado, resulta em 2 e é positivo, pois indica a medida de um segmento. Esse número é $\sqrt{2}$.

Logo, $x = \sqrt{2}$.

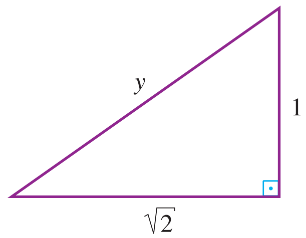
Então, basta construir esse triângulo retângulo isósceles de modo que um de seus catetos represente o segmento de 0 a 1 na reta numérica. A partir do zero, para a direita, transportamos o segmento que mede $\sqrt{2}$ (hipotenusa) sobre a reta. A extremidade direita desse segmento é o ponto que representa $\sqrt{2}$.



NELSON MATSUDA

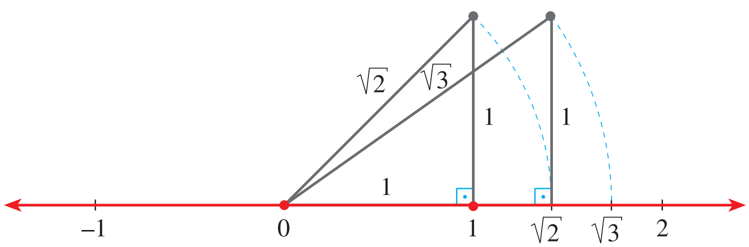
Repare que o número $\sqrt{2}$ ficou entre 1 e 2 na reta numérica. Na calculadora, podemos obter $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$. Então, $\sqrt{2}$ fica entre o ponto que corresponde a 1 e o ponto médio do segmento que vai de 1 a 2, ou seja, o ponto que corresponde a 1,5.

Agora, vamos representar $\sqrt{3}$ na reta numérica. Para isso, basta construir um triângulo retângulo de catetos $\sqrt{2}$ e 1. A hipotenusa medirá $\sqrt{3}$ unidades de comprimento.



$$y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$$
$$y^2 = 3$$
$$y = \sqrt{3}$$

Na reta numérica, aproveitando o segmento que representa $\sqrt{2}$, construímos o segmento que mede $\sqrt{3}$.



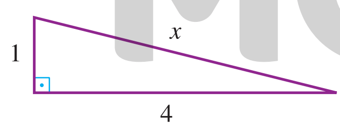
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Na calculadora, obtemos $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. Repare que $\sqrt{3}$ fica entre 2 e o ponto médio do segmento que une 1 e 2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

70 Considere o triângulo retângulo abaixo, cujas medidas dos lados estão indicadas em uma mesma unidade de comprimento.



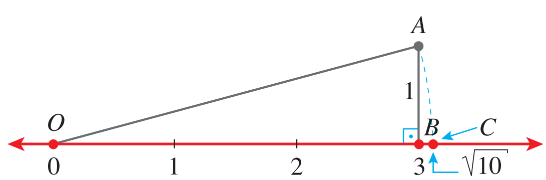
NELSON MATSUDA

a) Encontre o valor de x. $\sqrt{17}$

b) Esse número é racional ou irracional? irracional

c) Usando uma calculadora, represente esse número na forma decimal aproximada, com duas casas decimais. 4,12

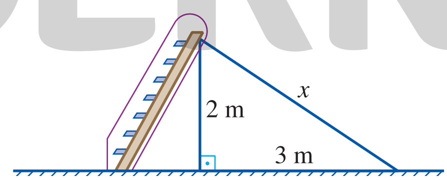
71 Na figura abaixo, foi representado o número $\sqrt{10}$ na reta numérica. Explique por que essa construção está correta. resposta pessoal



NELSON MATSUDA

72 Use uma régua para traçar uma reta numérica e, com auxílio de um compasso, represente nela os números $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$. construção de figura

73 A figura abaixo representa um escorregador cujo comprimento, em metro, foi indicado por x.



NELSON MATSUDA

a) Qual é o número irracional que representa o comprimento desse escorregador? $\sqrt{13}$

b) Qual é o comprimento aproximado desse escorregador em centímetro? 360 cm

74 Com régua e compasso, represente o número $\sqrt{13}$ na reta numérica. construção de figura

75 Com régua e compasso, trace um segmento de $\sqrt{20}\ u$ e outro de $\sqrt{27}\ u$, sendo $u = 2$ cm. Construa um retângulo que tenha essas medidas e determine sua área. Construa outro retângulo que tenha por medidas $2\sqrt{5}\ u$ e $3\sqrt{3}\ u$ e encontre sua área. Compare os resultados encontrados.
Construção de figura; os dois têm mesma área.

8 Radiciação com radicais

Observe como podemos proceder para simplificar as expressões a seguir e reduzi-las a um radical, utilizando os conceitos estudados.

5 × 3

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{6^2}} = \sqrt[5]{6^{\frac{2}{3}}} = 6^{\frac{\frac{2}{3}}{5}} = 6^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{6^2}$

3 × 2 × 4

b) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{7^5}}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{\frac{5}{4}}{2}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{5}{8}}} = 7^{\frac{\frac{5}{8}}{3}} = 7^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{7^5}$

Para extrair a raiz de um radical, devemos multiplicar os índices desses radicais e conservar o radicando, simplificando o radical obtido sempre que possível (considerando o radicando um número real positivo e os índices, números naturais não nulos).

Veja outros exemplos.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\cdot3]{7} = \sqrt[6]{7}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5^2}}} = \sqrt[2\cdot3\cdot2]{5^2} = \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[6]{5}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot5}}} = \sqrt[4\cdot2\cdot3]{8\cdot5} = \sqrt[24]{40}$

d) $\sqrt[4]{2\sqrt{\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{2\sqrt[2\cdot3]{5}} = \sqrt[4]{2\sqrt[6]{5}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^6\cdot5}} = \sqrt[4\cdot6]{64\cdot5} = \sqrt[24]{320}$

e) $\sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^3\sqrt{2^4}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{\sqrt{2^6\cdot2^4}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3\cdot2]{2^{10}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[6]{2^{10}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{12}\cdot2^{10}}} = \sqrt[24]{2^{22}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

76 Reduza as expressões abaixo a um único radical e simplifique, se possível, as expressões.

a) $\sqrt{\sqrt{10}}$ $\sqrt[4]{10}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ $\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$ $\sqrt[18]{3}$

e) $\sqrt[6]{\sqrt{5^3}}$ $\sqrt[4]{5}$

f) $\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}}$ 2

g) $\sqrt{\sqrt{15^4}}$ 15

h) $\sqrt[4]{3\sqrt{5}}$ $\sqrt[8]{45}$

77 Verifique qual das sentenças a seguir é falsa.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11}$ verdadeira

b) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2}$ falsa

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1.024}}} = \sqrt[4]{2^5}$ verdadeira

d) $\sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{3^2}$ verdadeira

9 Racionalização de denominadores

Considere o quociente de 2 por $\sqrt{3}$. Ele pode ser indicado por $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Um quociente não se altera quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número não nulo. Veja, por exemplo, o que acontece quando multiplicamos os dois termos da expressão $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Com essa multiplicação, obtemos uma expressão com denominador racional. Esse procedimento é chamado de **racionalização de denominadores**.

É mais fácil efetuar cálculos com radicais quando eles não estão no denominador. Por isso, quando necessário, racionalizamos o denominador de uma expressão fracionária.

Veja, a seguir, outros exemplos.

a) Vamos racionalizar o denominador da expressão $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

Multiplicando os dois termos dessa expressão por $\sqrt{2}$, obtemos:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) Vamos racionalizar o denominador da expressão $\frac{2}{\sqrt[5]{7^2}}$.

Para multiplicar os dois termos da expressão, convém escolher um número que multiplicado por $\sqrt[5]{7^2}$ resulte em $\sqrt[5]{7^5}$, isto é, em 7. Esse número é o quociente $\sqrt[5]{7^5} : \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{7^3}$.

Portanto, multiplicando os dois termos da expressão por $\sqrt[5]{7^3}$, obtemos:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2 \cdot 7^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{2\sqrt[5]{7^3}}{7} = \frac{2\sqrt[5]{343}}{7}$$

c) Vamos racionalizar o denominador da expressão $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

Neste caso, convém aplicar o produto notável: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Multiplicando os dois termos da expressão por $\sqrt{7} + \sqrt{3}$, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{7 - 3} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{4}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

78 Qual é o número pelo qual devemos multiplicar os dois termos da expressão $\dfrac{15}{4\sqrt{3}}$ para obter uma expressão cujo denominador seja número racional? $\sqrt{3}$

79 Para racionalizar o denominador da expressão $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$, devemos multiplicar seus dois termos por que radical? $\sqrt[3]{5^2}$

80 Racionalize o denominador das expressões a seguir.

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ $2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

d) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}$ $\sqrt[3]{5^2}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt[8]{2^5}}$ $2\sqrt[8]{2^3}$

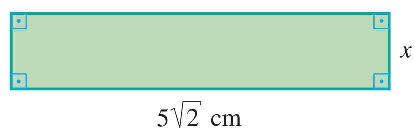
81 Sabendo que $\sqrt{5}$ com três casas decimais é 2,236, calcule o quociente $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$:

a) substituindo $\sqrt{5}$ por 2,236; 1,341

b) racionalizando o denominador e depois substituindo $\sqrt{5}$ por 2,236. 1,341

82 Sabendo que $\sqrt{10}$ com três casas decimais é 3,162, calcule da maneira mais conveniente o quociente $\dfrac{2}{\sqrt{10}-3}$. respostas possíveis: 12, 324 e 12,345

83 Sabendo que a área da região retangular abaixo é 10 cm^2, calcule o valor de x. $x = \sqrt{2}$ cm



NELSON MATSUDA

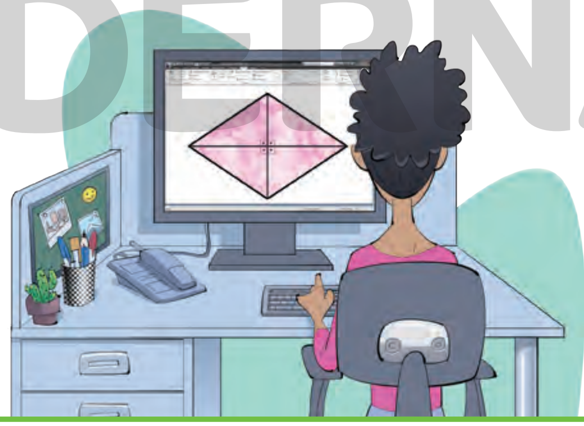
84 Demonstre que o inverso de $\sqrt{2}-1$ é $\sqrt{2}+1$.
resposta pessoal

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Cláudia projeta uma nova lajota para a indústria de cerâmica em que trabalha.

A lajota pode ser decomposta em 4 triângulos retângulos, dos quais um dos catetos mede $2\sqrt{5}$ cm. Qual deve ser a medida do outro cateto para que essa lajota tenha área de 60 cm^2? $3\sqrt{5}$ cm



CLAUDIO CHIYO

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Sendo $x = (2^2)^3$, $y = (2^3)^2$ e $z = 2^{3^2}$, calcule $x \cdot y \cdot z$ na forma de uma potência. 2^{21}

2 Em determinadas condições, uma célula divide-se em duas a cada 30 segundos. Partindo-se de uma única célula, quantas células haverá depois de 20 minutos? Escreva a resposta em forma de potência. 2^{40} células

3 (Vunesp) O valor da expressão

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$ é: alternativa **a**

a) $\dfrac{3}{4}$. **b)** $\dfrac{4}{3}$. **c)** $\dfrac{1}{3}$. **d)** $\dfrac{1}{4}$. **e)** 5.

4 (UFSM-RS) O valor da expressão $\dfrac{16^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{3}}} : \dfrac{2^4}{8^2}$ é igual a: alternativa **d**

a) 2^{-1}.

b) 2^0.

c) $2^{\frac{1}{2}}$.

d) 2^4.

e) 2^6.

5 Sendo $a = 5^0 - 2^{-2}$, $b = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ e $c = 12^0 - 3$, calcule:

a) a^b; $\dfrac{9}{16}$

b) $(b - a)^c$; $\dfrac{16}{25}$

c) $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^c$. $\dfrac{16}{9}$

6 Escreva cada potência abaixo na forma de fração.

a) $(2{,}5)^{-2}$ $\dfrac{4}{25}$

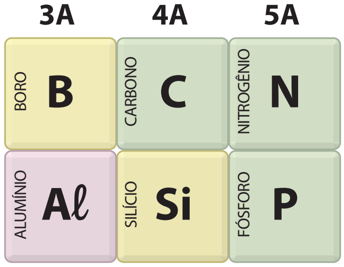
b) $(0{,}15)^{-3}$ $\dfrac{8.000}{27}$

7 Resolva as expressões e apresente os resultados em notação científica.

a) $\dfrac{3{,}6 \cdot 10^4}{10^{-2} \cdot 1{,}2}$ $3 \cdot 10^6$

b) $\dfrac{2{,}1 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 0{,}7}$ $3 \cdot 10$

8 A massa de um átomo de carbono é de aproximadamente $1{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg. Expresse esse valor em grama e usando notação científica. $1{,}99 \cdot 10^{-23}$ g



ADILSON SECCO

9 Calcule o valor da expressão abaixo.

$$\sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{400} + \sqrt{2{,}25}$$ -14

10 (Vunesp) Se $x = 10^{-3}$, então $\dfrac{(0{,}1) \cdot (0{,}001) \cdot 10^{-1}}{10 \cdot (0{,}0001)}$ é igual a: alternativa **b**

a) $100x$.

b) $10x$.

c) x.

d) $\dfrac{x}{10}$.

e) $\dfrac{x}{100}$.

11 (FCC-SP) A expressão $\dfrac{0{,}000036}{80.000}$ é equivalente a: alternativa **d**

a) $0{,}45 \cdot 10^{-12}$.

b) $4{,}5 \cdot 10^{-12}$.

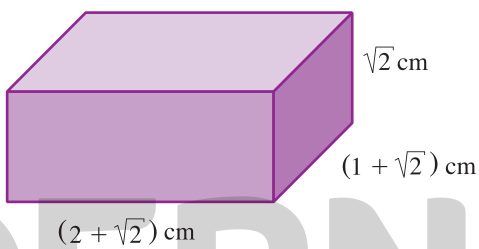
c) $4{,}5 \cdot 10^{-11}$.

d) $45 \cdot 10^{-11}$.

e) $45 \cdot 10^{-10}$.

12 Com régua e compasso, represente o número $\sqrt{17}$ em uma reta numérica. construção de figura

13 Considere o paralelepípedo abaixo.



NELSON MATSUDA

Determine:

a) a soma das medidas de todas as arestas do paralelepípedo; $(12 + 12\sqrt{2})$ cm

b) a soma das áreas das faces laterais; $(6\sqrt{2} + 8)$ cm²

c) o volume desse paralelepípedo. $(4\sqrt{2} + 6)$ cm³

14 O passo de um robô mede exatamente $50\sqrt{3}$ cm. Quantos passos ele deverá dar para percorrer $18{,}5\sqrt{3}$ m? 37 passos

15 Racionalize o denominador de cada uma das expressões abaixo.

a) $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ $4\sqrt{2}$

b) $\dfrac{10}{\sqrt{3} - 1}$ $5(\sqrt{3} + 1)$

c) $\dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $\sqrt{5} + 3$

16 Por volta dos anos 1800, a expressão $\dfrac{26 \cdot \sqrt{146}}{100}$ foi usada como um valor aproximado do número π. Usando uma calculadora simples, verifique até que casa decimal a expressão dada coincide com o valor de π conhecido atualmente: $\pi = 3{,}1415927...$ Até a 5ª casa decimal.

Diversificando

Um truque de mágica?

Em um espetáculo, o grande mágico Rafael deixou para o final a mágica dos números. O truque consistia em mostrar que 4 é igual a 6. Veja como o mágico fez os cálculos.

$$-24 = -24$$
$$16 - 40 = 36 - 60$$
$$4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 5$$
$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 + 5^2$$
$$(4 - 5)^2 = (6 - 5)^2$$
$$\sqrt{(4-5)^2} = \sqrt{(6-5)^2}$$
$$4 - 5 = 6 - 5$$
$$4 = 6$$

DANILLO SOUZA

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Espera-se que os alunos percebam que, na terceira linha, Rafael escreve os mesmos números da segunda linha, mas fatorados. Depois de somar 5^2 a ambos os membros dessa igualdade, ele obtém o quadrado da diferença de dois termos.

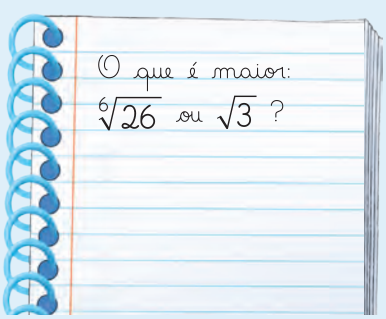
1 Formem grupos de 3 a 4 pessoas, discutam os cálculos feitos pelo mágico Rafael e expliquem cada passagem que foi realizada na conta acima.

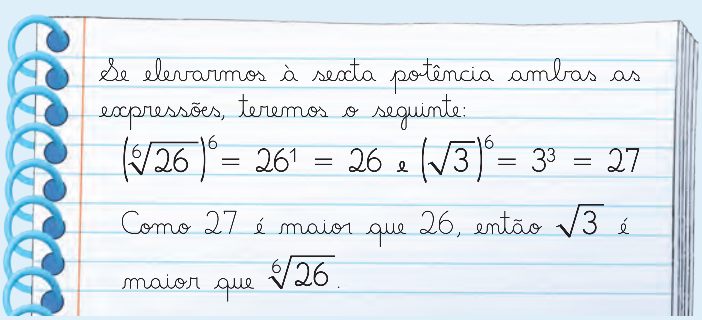
2 Qual foi o erro cometido no cálculo?

2. Espera-se que os alunos percebam que o erro do cálculo está na passagem da sexta para a sétima linha, pois a raiz quadrada de um número elevado ao quadrado é igual ao módulo desse número. Assim teríamos a seguinte igualdade: $|4 - 5| = |6 - 5|$; logo: $|-1| = |1|$ e, portanto, 1 = 1, e não 4 = 6.

O que é maior?

Tiago, ao arrumar o quarto, encontrou o caderno de Matemática do seu irmão. Lá, ele viu um exercício que não estava resolvido. Veja o exercício e a resolução de Tiago na figura abaixo.





ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIYO

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

- Usando o mesmo raciocínio que Tiago, indique o que é maior.

a) $\sqrt[3]{3}$ ou $\sqrt[4]{4}$ **b)** $\sqrt[4]{4}$ ou $\sqrt{2}$

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$ e $\left(\sqrt[4]{4}\right)^{12} = 4^3 = 64$; como $81 > 64$, então $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$. **b)** $\left(\sqrt[4]{4}\right)^4 = 4$ e $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$; como $4 = 4$, então $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

CAPÍTULO 2

Proporcionalidade e semelhança em Geometria

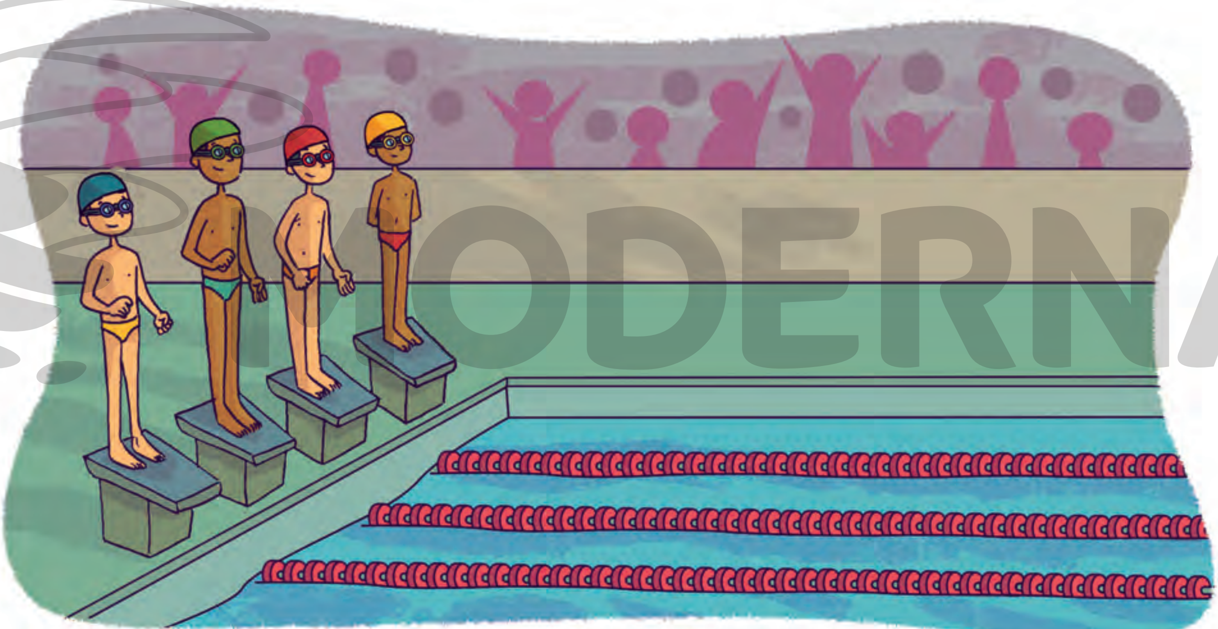
1 Razão entre dois segmentos

Neste capítulo, vamos retomar o conceito de razão entre dois números e o conceito de razão entre grandezas de mesma natureza, estudadas anteriormente.

Considere a situação a seguir.

Situação 1

Em um campeonato de natação, na prova de 50 metros nado livre, Leo precisou dar 48 braçadas para atravessar a piscina, enquanto Márcio deu 56.



A razão entre o número de braçadas de Leo e o número de braçadas de Márcio é dada por:

$$\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

Isso significa que 6 braçadas de Leo equivalem a 7 braçadas de Márcio.

Considerando que Leo tenha 1,80 m de altura e Márcio, 1,71 m, a razão entre suas alturas é:

$$\frac{\text{altura de Leo}}{\text{altura de Márcio}} = \frac{1{,}80 \text{ m}}{1{,}71 \text{ m}} = \frac{180}{171} = \frac{20}{19}$$

ILUSTRAÇÕES: LÉO FANELLI

Agora, vamos analisar outras duas situações que tratam de razão entre dois segmentos.

Situação 2

Observe os segmentos a seguir.

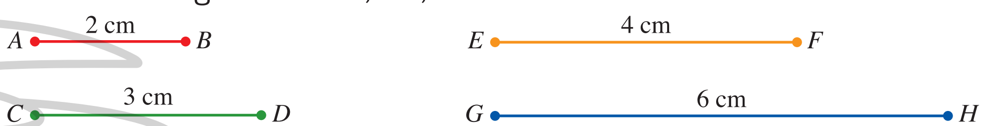
NELSON MATSUDA

A razão entre eles é: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \dfrac{4}{5}$

> A razão entre dois segmentos é a razão entre suas medidas tomadas em uma mesma unidade.

Situação 3

Agora, considere os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$.



NELSON MATSUDA

Vamos calcular as razões:

$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{EF}{GH} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Como as razões são iguais, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

> Dizemos que quatro segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são **segmentos proporcionais** quando suas medidas, tomadas na mesma unidade, formam uma proporção, isto é, quando $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EF}{GH}$.

A proporcionalidade entre segmentos é muito usada em Geometria e na vida prática. Por exemplo, para fazer ampliação de uma fotografia, é necessário que os lados da foto ampliada sejam, respectivamente, proporcionais aos lados da foto original.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe a figura.

NELSON MATSUDA

Considerando as medidas indicadas, determine a razão entre:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\frac{3}{4}$ **b)** $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$; $\frac{13}{21}$ **c)** $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$; $\frac{2}{5}$ **d)** $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. $\frac{1}{3}$

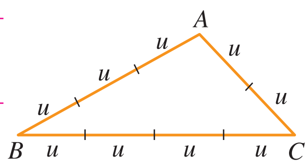
Lembre-se:
Não escreva no livro!

2 No triângulo abaixo, determine a razão entre:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\frac{3}{4}$

b) $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$; $\frac{2}{3}$

c) $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$. $\frac{4}{3}$



NELSON MATSUDA

3 Sendo $\overline{AB}$ um segmento de medida x, calcule essa medida nos seguintes casos:

a) $\frac{AB}{5} = \frac{14}{10}$ 7

b) $\frac{3,4}{AB} = \frac{12}{18}$ 5,1

c) $\frac{0,9}{0,5} = \frac{AB}{3,5}$ 6,3

d) $\frac{2,4}{3,2} = \frac{1,5}{AB}$ 2

4 (PUC-MG) Se o ponto M divide um segmento $\overline{AB}$ de 18 cm na razão $\frac{2}{7}$, as medidas de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são, respectivamente, em cm: alternativa **a**

a) 4 e 14.
b) 7 e 11.
c) 8 e 10.
d) 10 e 8.
e) 14 e 4.

5 Uma foto foi impressa no tamanho 10 × 15 (lemos 10 por 15), ou seja, um lado mede 10 cm e o outro, 15 cm. Para ampliá-la de modo que o lado menor tenha 13 cm, qual deve ser a medida do lado maior? 19,5 cm

6 Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Calcule a medida de $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$, sabendo que $AB = 12$ cm, $MN = 15$ cm e $CD + PQ = 45$ cm. $CD = 20$ cm; $PQ = 25$ cm

7 Considere dois triângulos: o triângulo ABC, cujo lado $\overline{AB}$ mede 20 cm e a altura $\overline{CH}$ relativa a esse lado mede 18 cm; e o triângulo MNP, cujo lado $\overline{MN}$ mede 30 cm e a altura $\overline{PG}$ relativa a esse lado mede x cm. Se $\frac{AB}{MN} = \frac{CH}{PG}$, determine:

a) o valor de x; 27 cm

b) a área do triângulo MNP. 405 cm²

8 Um quadrilátero $ABCD$ tem 63 cm de perímetro. As medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Se $AB = 12$ cm e $BC = 15$ cm, quais são as medidas dos outros dois lados desse quadrilátero? $CD = 16$ cm e $AD = 20$ cm

9 Hélio possui um terreno retangular cujas dimensões estão na razão 2 : 3. O perímetro desse terreno mede 1.500 m. Responda no caderno.

a) Quais são as dimensões desse terreno? 300 m e 450 m

b) Qual é a área desse terreno? 135.000 m²

LÉO FANELLI

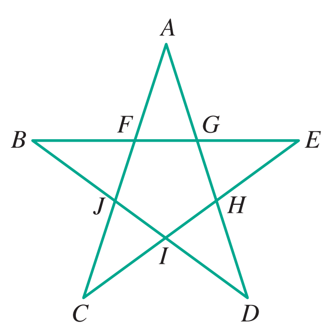
PARA SABER MAIS +

Uma razão de ouro

Estudando o pentágono regular estrelado, os gregos descobriram, mais de 500 anos antes de Cristo, um número irracional determinado pelas razões entre os segmentos desse pentágono.

Na figura ao lado, por exemplo, temos:

$$\frac{AC}{AJ} = \frac{AJ}{AF} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \simeq 1,618$$



NELSON MATSUDA

Cerca de 2.000 anos depois, esse número passou a ser chamado de **número áureo** ou **número de ouro**.

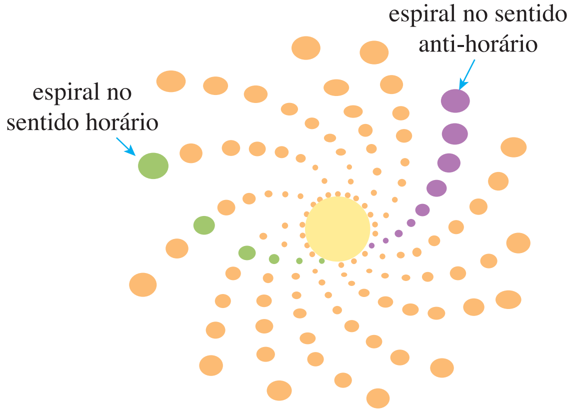
Observando a natureza, a arquitetura, algumas razões entre medidas do corpo humano etc., encontramos razões que se aproximam do número de ouro.

Se achar conveniente, explique aos alunos que o número de ouro $\frac{2}{\sqrt{5} - 1}$ é indicado pela letra grega Φ (lemos: fi). Esse número é formado por infinitas casas decimais, sem período, ou seja, é irracional.

Veja a seguir o exemplo do girassol.

A estrutura central do girassol é formada por um grande número de pequenas sementes dispostas em espirais, algumas no sentido horário e outras no anti-horário.


TEERASAK/SHUTTESTOCK



NELSON MATSUDA

$$\frac{\text{número de espirais no sentido horário}}{\text{número de espirais no sentido anti-horário}} \simeq 1{,}6$$

Outro exemplo é o desenho da fachada do Partenon (templo da deusa Atena, da mitologia grega, construído em Atenas no século V a.C.), que pode ser inscrita em um retângulo cuja razão entre a largura e a altura é:

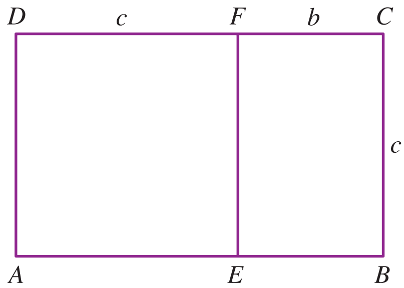
$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{6{,}5}{4{,}0} \simeq 1{,}6$$

Chamamos de **retângulo áureo** ou **retângulo de ouro** todo retângulo cuja razão entre os lados maior e menor é o número de ouro ($\simeq 1{,}618$).

PHOTOSSEE/SHUTTERSTOCK

Para todo retângulo áureo, vale a seguinte propriedade: se dele retirarmos o maior quadrado possível, o retângulo restante também será um retângulo áureo, isto é, a proporção entre os lados se manterá.

Retirando do retângulo *ABCD* o quadrado *AEFD* (maior possível), obtemos o retângulo *EBCF* de modo que:



NELSON MATSUDA

$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$$

Considerando $c = 1$ em $\frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$, temos: $\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b}$ ou $b^2 + b - 1 = 0$

Chegamos a uma equação do 2º grau, cuja resolução será vista no capítulo **4**.

Resolvendo a equação, obtemos $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como um dos valores de *b*; logo:

$$\frac{1}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \simeq 1{,}618$$

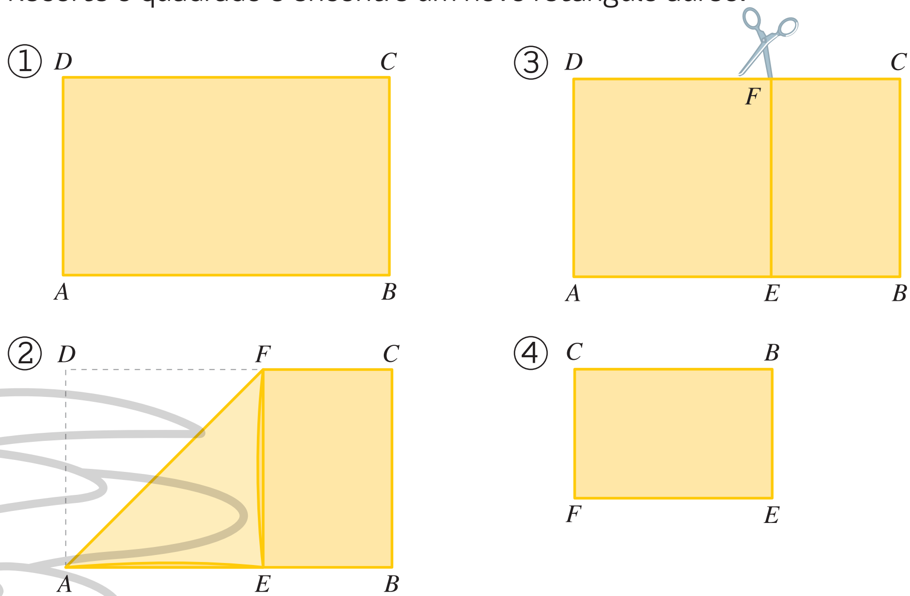
Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe os passos abaixo e construa retângulos áureos de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: com dobradura

- Copie, em uma folha em branco, o retângulo *ABCD*.
- Recorte o retângulo e, com dobradura, encontre o quadrado *AEFD* (veja as figuras a seguir).
- Recorte o quadrado e encontre um novo retângulo áureo.

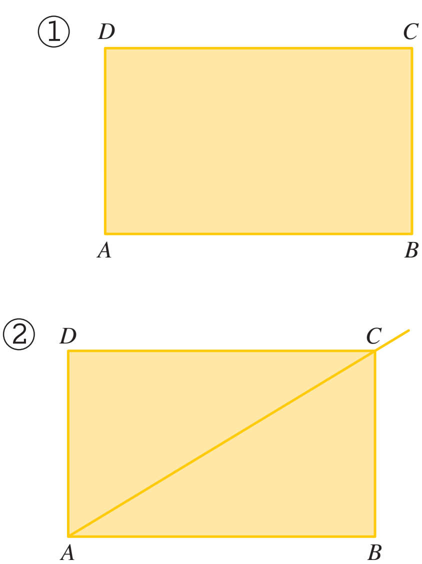


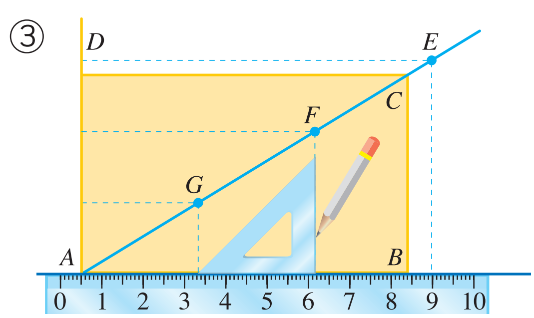
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2ª maneira: com régua e esquadro

Alerte os alunos que essas construções, como qualquer construção, sempre são um pouco imprecisas e o cálculo será aproximado. O que se pode fazer para minimizar esse problema é caprichar nas figuras.

- Copie, em uma folha em branco, o retângulo *ABCD*.
- Trace, com o auxílio de uma régua, uma semirreta com origem em *A* que passe por *C*. $\overline{AC}$ é uma diagonal do retângulo.
- Com o auxílio de um esquadro, trace retas perpendiculares ao lado $\overline{AB}$ (ou à reta-suporte) e determine outros retângulos áureos (veja as figuras abaixo).





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

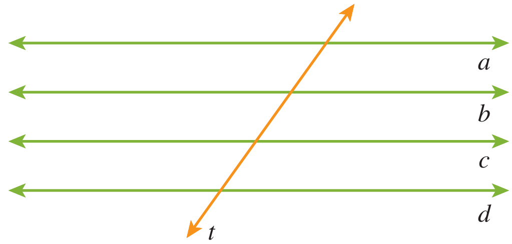
Com os retângulos áureos que construiu, descubra se uma folha de papel de formato A4 (21 cm por 29,7 cm) e uma de formato carta (21,59 cm por 27,94 cm) são retângulos áureos.

A folha no formato A4 e carta não são retângulos áureos.

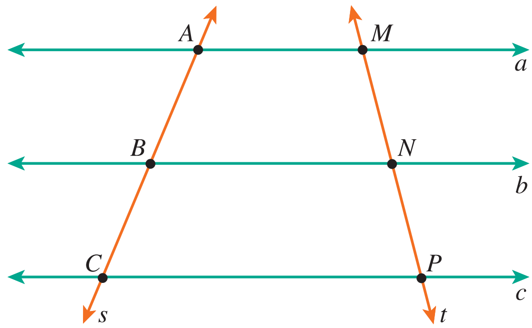
2 Feixe de paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas de um plano (como as retas *a*, *b*, *c* e *d* da figura ao lado) chama-se **feixe de paralelas**.

Uma reta que corta um feixe de paralelas (como a reta *t*) é chamada de **transversal**.



Considere a figura abaixo, com $a \parallel b \parallel c$, em que as retas *s* e *t* são transversais e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



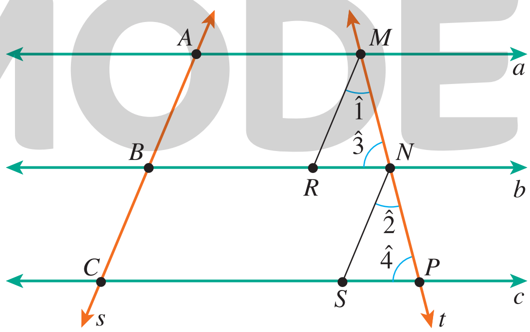
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Queremos provar que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

Demonstração

Por *M* traçamos $\overline{MR} \parallel s$. Com isso, obtemos o paralelogramo *ABRM*. Nele: $\overline{AB} \cong \overline{MR}$ (1)

Por *N* traçamos $\overline{NS} \parallel s$. Assim, obtemos o paralelogramo *BCSN*, em que: $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ (2)



NELSON MATSUDA

De (1) e (2), temos $\overline{MR} \cong \overline{NS}$, pois $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

Comparando os triângulos *MRN* e *NSP*, temos:

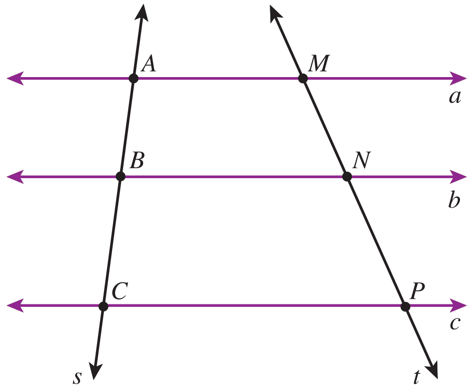
- $\overline{MR} \cong \overline{NS}$ (já provado)
- $\hat{1} \cong \hat{2}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)
- $\hat{3} \cong \hat{4}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

Assim, pelo caso LAA_o, os triângulos *MRN* e *NSP* são congruentes. Como $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são lados correspondentes em triângulos congruentes, então $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então esse feixe determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

3 Teorema de Tales

Considere a figura abaixo, em que $a // b // c$ e as retas s e t são transversais.



NELSON MATSUDA

Queremos provar que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, nessa ordem, são segmentos congruentes.

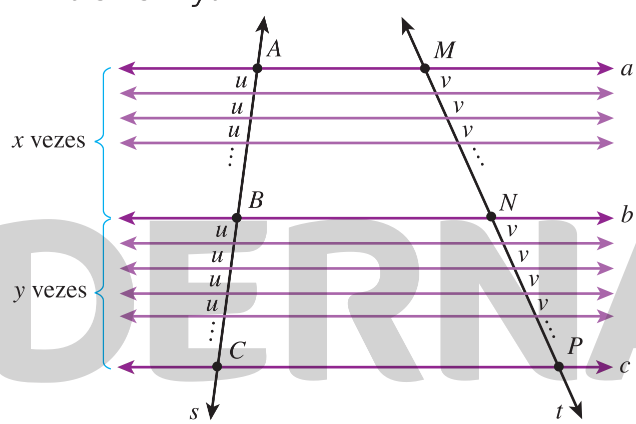
Demonstração

Admitindo que exista um segmento u que caiba x vezes em $\overline{AB}$ e y vezes em $\overline{BC}$, com x e y sendo números inteiros, temos: $AB = xu$ e $BC = yu$.

Logo: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{xu}{yu}$ ou $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{x}{y}$ (1)

Traçando pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ retas paralelas ao feixe, elas dividirão $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ em segmentos congruentes.

Indicando por v a medida desses segmentos, temos $MN = xv$ e $NP = yv$ e, portanto:



NELSON MATSUDA

$$\frac{MN}{NP} = \frac{xv}{yv} \text{ ou } \frac{MN}{NP} = \frac{x}{y} \quad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

A partir dessa demonstração, podemos enunciar o **teorema de Tales**:

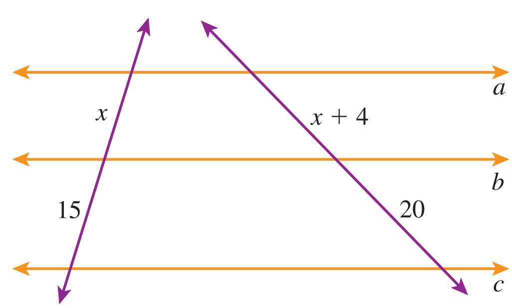
> Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Com o auxílio do teorema de Tales, vamos calcular, como exemplo, o valor de x da figura ao lado, sendo $a // b // c$.

$$\frac{x}{15} = \frac{x + 4}{20}$$

$20x = 15(x + 4)$

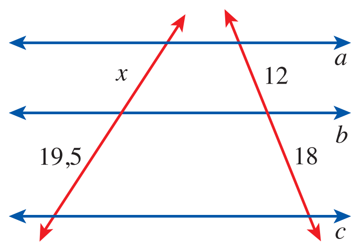
Resolvendo a equação, encontramos: $x = 12$.



NELSON MATSUDA

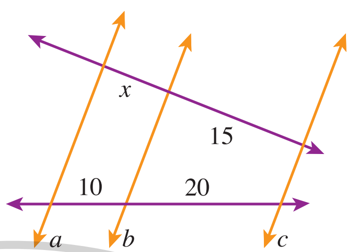
10 Sendo $a \parallel b \parallel c$, calcule o valor de x em cada item.

a)



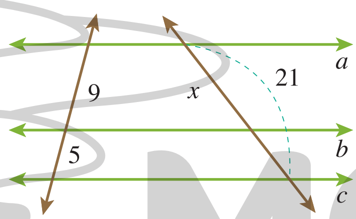
$x = 13$

b)



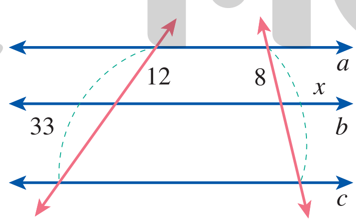
$x = 7{,}5$

c)



$x = 13{,}5$

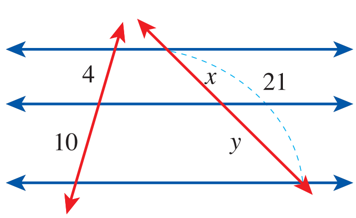
d)



$x = 22$

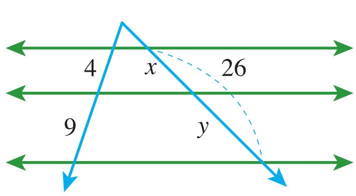
11 Determine os valores de x e de y nos seguintes feixes de paralelas:

a)



$x = 6$
$y = 15$

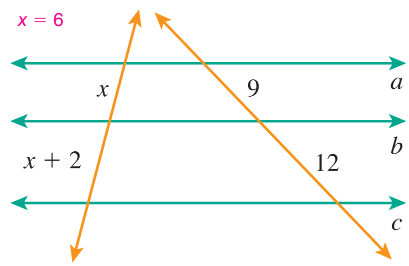
b)



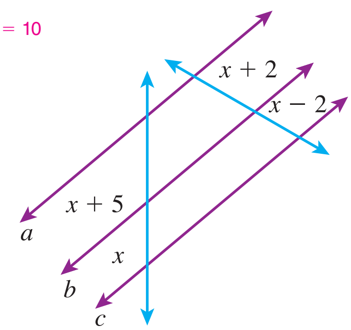
$x = 8$
$y = 18$

12 Sendo $a \parallel b \parallel c$, calcule x aplicando o teorema de Tales.

a) $x = 6$



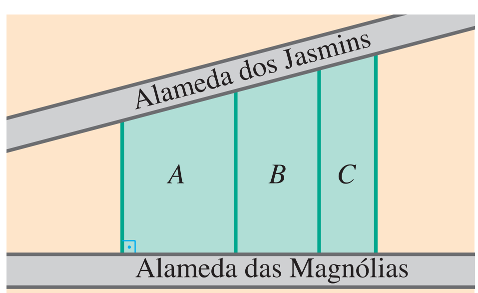
b) $x = 10$



13. 14,4 cm

13 Três retas paralelas determinam sobre uma transversal segmentos de 4,2 cm e 5,4 cm. Calcule a medida do maior segmento que o feixe determina sobre outra transversal, sabendo que o segmento menor mede 6,3 cm.

14 A figura a seguir representa um terreno com frente para duas alamedas. A frente para a alameda das Magnólias tem 90 m, e a frente para a alameda dos Jasmins, 135 m.



O proprietário do terreno resolveu dividi-lo em três lotes menores, traçando sobre ele duas paralelas perpendiculares à alameda das Magnólias. O terreno A ficou com 40 m de frente para essa alameda, e o terreno B, com 30 m de frente para a mesma alameda. Com base nessas informações, responda.

a) Quanto mede a frente do terreno C para a alameda das Magnólias? 20 m

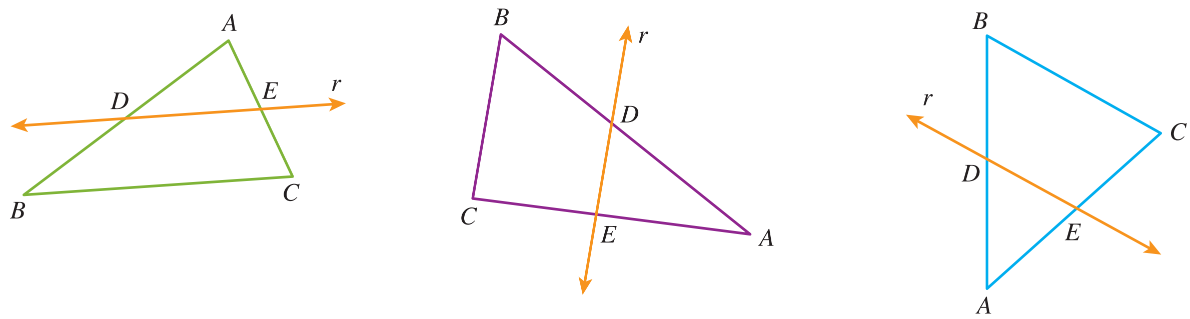
b) Quanto medem as frentes dos três terrenos para a alameda dos Jasmins?
terreno A: 60 m; terreno B: 45 m; terreno C: 30 m

Consequências do teorema de Tales

1ª consequência

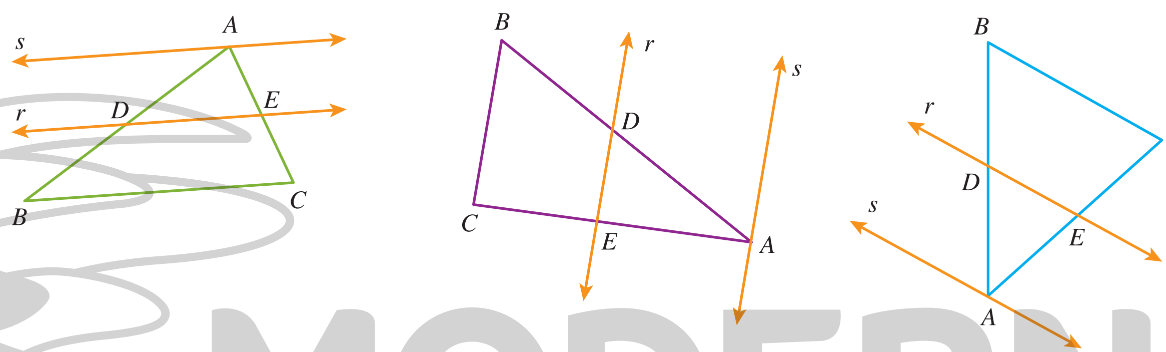
Observe os triângulos *ABC* sobre os quais foi traçada a reta *r*, paralela a um de seus lados.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



Em todos eles, podemos considerar outra reta *s*, paralela a *r*, que passe pelo vértice *A* do triângulo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



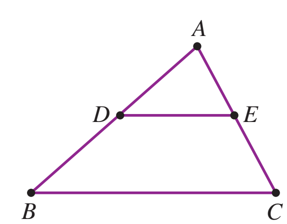
Pelo teorema de Tales, nos três casos, temos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Podemos expressar essa consequência do teorema de Tales do seguinte modo:

> Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

Observe que a recíproca desse teorema é verdadeira: se no triângulo *ABC* vale a relação $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então $\overline{DE} // \overline{BC}$.



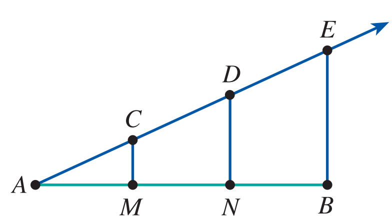
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Acompanhe um exemplo de aplicação dessa propriedade.

Vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ ao lado em três partes iguais.

Pelo ponto *A* traçamos uma semirreta oblíqua a $\overline{AB}$ sobre a qual, a partir de *A*, marcamos os pontos *C*, *D* e *E*, de modo que $AC = CD = DE$, e traçamos o segmento $\overline{BE}$. Pelos pontos *C* e *D*, com o auxílio de uma régua e de um esquadro, traçamos paralelas a $\overline{BE}$.

Como $AC = CD = DE$, então $AM = MN = NB$.

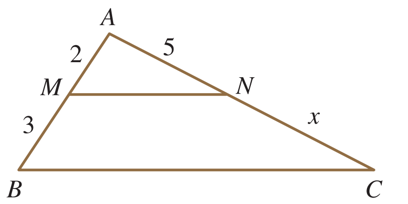


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

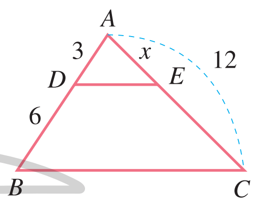
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

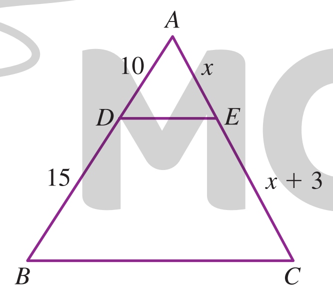
a) $\overline{MN} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ $x = \frac{15}{2}$



b) $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ $x = 4$

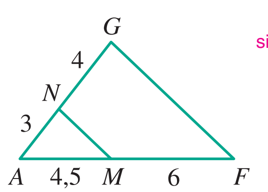


c) $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ $x = 6$



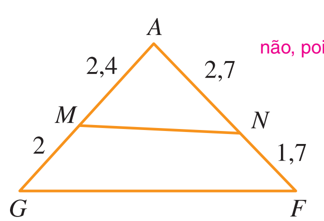
16 Verifique, em cada caso, se o segmento $\overline{NM}$ é paralelo ao lado $\overline{GF}$ do triângulo. Justifique sua resposta.

a)



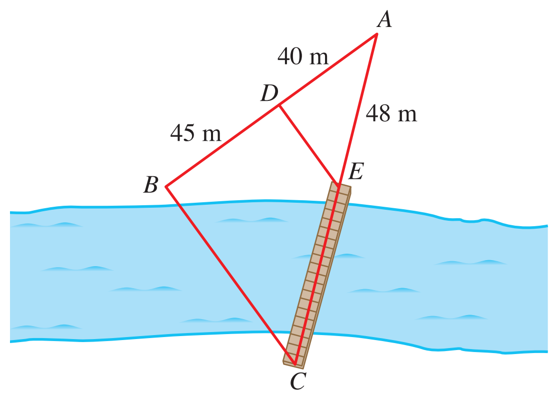
sim, pois: $\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6}$

b)



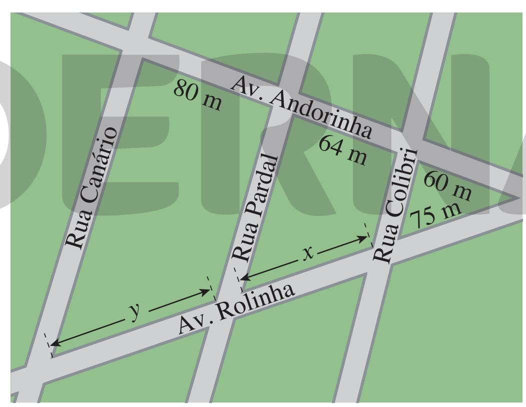
não, pois: $\frac{2,4}{2} \neq \frac{2,7}{1,7}$

17 Para calcular o comprimento da ponte a ser construída, um engenheiro elaborou o esquema abaixo, em que o segmento $\overline{CE}$ representa a ponte. Sabe-se que $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$. Calcule o comprimento dessa ponte. 54 m



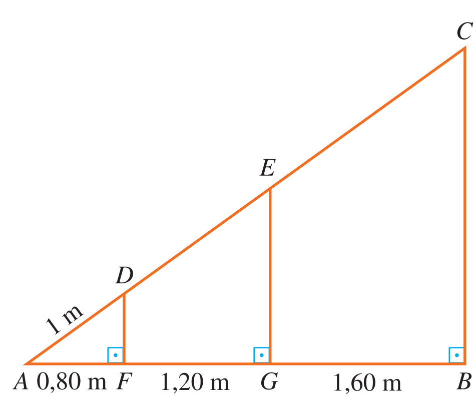
NELSON MATSUDA

18 Na planta abaixo, as ruas Colibri, Pardal e Canário são paralelas. Determine as distâncias x e y. $x = 80$ m e $y = 100$ m



NELSON MATSUDA

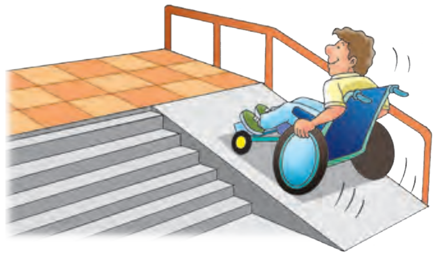
19 Determine a medida do lado $\overline{AC}$ no triângulo abaixo. 4,5 m



NELSON MATSUDA

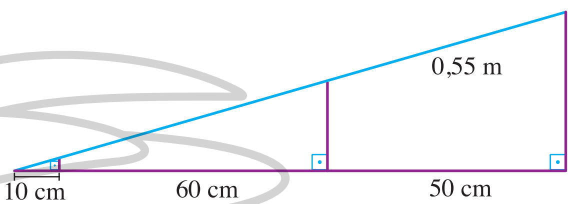
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

20 Um proprietário de loja, preocupado em oferecer a seus clientes um acesso mais seguro e confortável, vai construir uma rampa ao lado dos degraus da escada da entrada de sua loja.



JOSÉ LUÍS JUHAS

Para a construção dessa rampa, deverão ser instaladas três vigas de sustentação: uma a 10 cm do início, outra a 60 cm da primeira e a terceira a 50 cm desta última. Observando o esboço feito pelo dono da loja, determine o comprimento, em metros, da rampa que está destacada com azul. 1,32 m

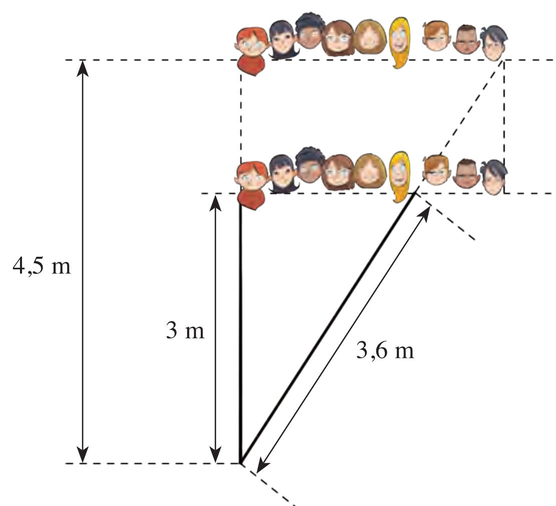


NELSON MATSUDA

21 É hora de fazer o retrato da turma e todos querem aparecer. Ana, a primeira menina da esquerda, está a 3 metros da câmera e Bete, a última da direita, está a 3,6 metros. Mas nessa disposição, todas as meninas ficam enquadradas, mas os meninos, não.

CLAUDIO CHIYO

Então, o fotógrafo pediu a todos que se afastassem, mantendo a mesma posição, de modo que Ana ficasse distante 4,5 metros. Veja o esquema.



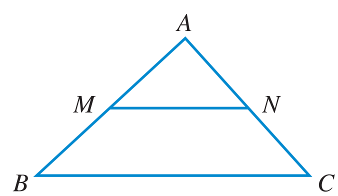
NELSON MATSUDA

Sabendo que essa câmera fotográfica mantém uma boa resolução até 5,5 metros, a imagem do menino da direita ficará prejudicada? Não, pois o menino da direita ficará a 5,4 metros da câmera fotográfica.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.



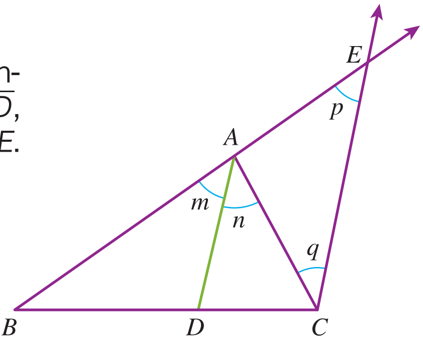
NELSON MATSUDA

1. Em um triângulo ABC, foi traçado um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$ pelo ponto M, ponto médio de $\overline{AB}$.
   Esse segmento tem o outro extremo no lado $\overline{AC}$, no ponto N.
   Provem que N é ponto médio de $\overline{AC}$. demonstração
2. Aprendam a dividir um segmento qualquer em 5 partes iguais sem usar a escala da régua.
   No caderno, executem os seguintes passos: construção de figura
   - tracem um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{AC}$, de modo que B não pertença à reta $\overleftrightarrow{AC}$;
   - com um compasso, marquem os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 em $\overrightarrow{AC}$, de maneira que $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$;
   - tracem a reta $\overleftrightarrow{P_5B}$;
   - com o esquadro deslizando ao lado da régua, tracem, por P_4, P_3, P_2 e P_1, paralelas a $\overleftrightarrow{P_5B}$ que cortam $\overline{AB}$ nos pontos Q_4, Q_3, Q_2, Q_1;
   - verifiquem com o compasso que: $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$
3. Justifiquem a construção acima.

3. No exercício 2, foi construído um feixe de retas paralelas, cortado por dois segmentos transversais ($\overline{AP_5}$ e $\overline{AB}$). Como o feixe divide $\overline{AP_5}$ em partes de medidas iguais, pelo teorema de Tales o feixe também divide $\overline{AB}$ em partes iguais.

2ª consequência

Considere o triângulo *ABC* e a bissetriz $\overline{AD}$ relativa ao ângulo $\hat{A}$. Traçamos pelo vértice *C* uma semirreta paralela a $\overline{AD}$, que cruza a semirreta $\overrightarrow{BA}$ em um ponto que chamamos de *E*.



NELSON MATSUDA

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$$

Dessa forma:

- $p = m$ (medidas de ângulos correspondentes em retas paralelas)
- $m = n$ ($\overline{AD}$ é bissetriz)
- $n = q$ (medidas de ângulos alternos internos em retas paralelas)

Concluímos, então, que $p = q$.

Logo, o triângulo *CAE* é isósceles. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

Substituindo *AE* por *AC* em $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$, temos: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

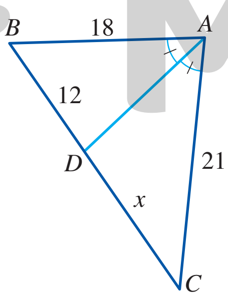
A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

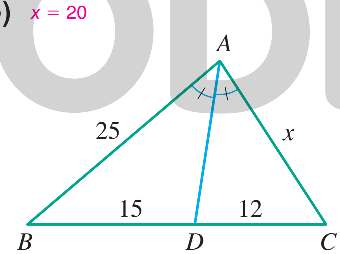
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Calcule x nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

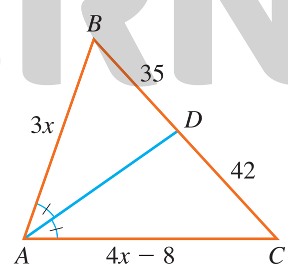
a) $x = 14$



b) $x = 20$



c) $x = 20$

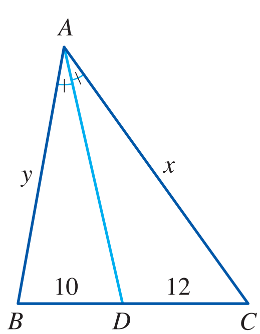


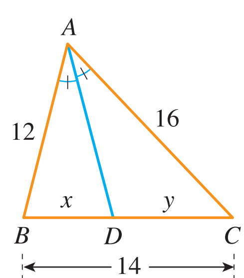
23 Calcule x e y nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

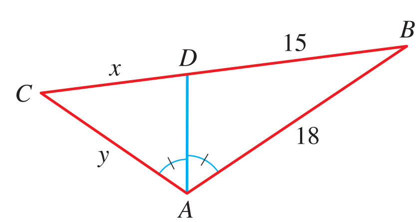
a) $x + y = 55$ $x = 30$ e $y = 25$

b) $x = 6$ e $y = 8$

c) $x + y = 22$ $x = 10$ e $y = 12$







ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

24 Construa um triângulo *ABC*, em que $AB = 4{,}8$ cm, $AC = 7{,}2$ cm e $BC = 8$ cm. Trace a bissetriz $\overline{AD}$. Calcule *BD* e *DC* e depois verifique os valores obtidos, medindo com a régua a figura construída.

$BD = 3{,}2$ cm e $DC = 4{,}8$ cm

4 Figuras semelhantes

Quando projetamos um *slide* em uma tela, o tamanho da imagem projetada geralmente é diferente do da imagem original, no entanto, a forma é mantida. Assim, dizemos que a imagem que aparece na tela é **semelhante** à original.

Além de cópias em tamanho original, as fotocopiadoras podem ampliar ou reduzir determinada imagem, e, nesse caso, também se mantém a forma do original.

Para obter uma ampliação de, por exemplo, 50%, devemos programar a máquina fotocopiadora para que ela faça uma cópia de 150%, pois a ampliação deverá ser igual ao original (100%) aumentado de 50%. Se quisermos uma redução de 25%, devemos programar a máquina para 75%, que corresponde ao original (100%) diminuído de 25%.


SÉRGIO DOTTA

Foto original


EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Vazante do Castelo, em Aquidauana, Mato Grosso do Sul. (Foto de 2014.)

Foto ampliada


EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Foto reduzida


EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Ampliando ou reduzindo figuras em uma fotocopiadora, obtemos figuras semelhantes às originais.

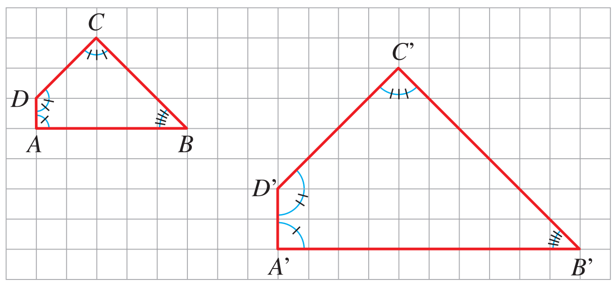
Figuras semelhantes são aquelas que têm a mesma forma mas não necessariamente o mesmo tamanho. Figuras congruentes também são semelhantes.

Pense mais um pouco...

Em uma foto, a altura da imagem do João corresponde a 10 cm. Qual deve ser a porcentagem que devemos programar na fotocopiadora para que a altura de João, na cópia ampliada, seja 12 cm?
Devemos programar uma cópia com 120%, isto é, 100% do original mais 20% de ampliação.

Polígonos semelhantes

O uso de papel quadriculado torna mais simples o trabalho de ampliação ou redução de figuras. Veja, por exemplo, como foi obtida a ampliação em 100% do polígono *ABCD*, que resultou no polígono *A'B'C'D'*.



NELSON MATSUDA

Os pares de ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A}'$, $\widehat{B}$ e $\widehat{B}'$, $\widehat{C}$ e $\widehat{C}'$, $\widehat{D}$ e $\widehat{D}'$ são chamados de **ângulos correspondentes**. Observe que eles são congruentes:

$$\widehat{A} \cong \widehat{A}', \widehat{B} \cong \widehat{B}', \widehat{C} \cong \widehat{C}' \text{ e } \widehat{D} \cong \widehat{D}'$$

Os pares de lados $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{DA}$ e $\overline{D'A'}$ são chamados de **lados correspondentes**. Observe que eles são proporcionais:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{2}{1}$$

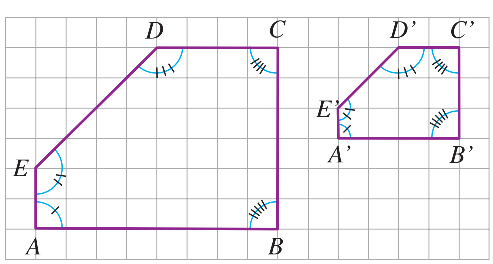
Assim, concluímos que o polígono *A'B'C'D'* é semelhante ao polígono *ABCD* e indicamos por $ABCD \sim A'B'C'D'$.

Como qualquer lado do polígono ampliado (*A'B'C'D'*) tem por medida o dobro da medida do lado correspondente no polígono original (*ABCD*), dizemos que a **razão de semelhança** entre o polígono ampliado e o polígono original é 2. Isso significa que qualquer lado do polígono *A'B'C'D'* tem por medida o dobro da medida do lado correspondente no polígono *ABCD*.

Dois polígonos são **semelhantes** quando os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Agora, vamos reduzir o polígono *ABCDE* em 50%, obtendo o polígono *A'B'C'D'E'*. Veja.

NELSON MATSUDA



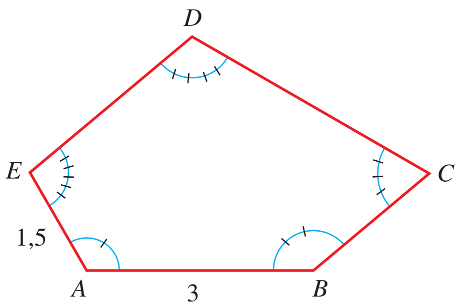
Observe que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. Então, os polígonos *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* são semelhantes.

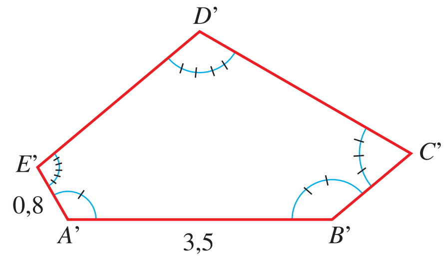
A medida de qualquer lado do polígono *A'B'C'D'E'* tem metade da medida do lado correspondente no polígono *ABCDE*. Nesse caso, dizemos que a razão de semelhança entre o polígono reduzido (*A'B'C'D'E'*) e o polígono original é $\frac{1}{2}$. Então:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2}$$

Observe agora o par de polígonos:

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA





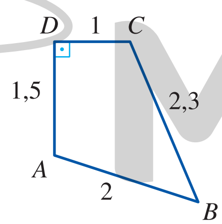
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{3{,}5} = \frac{6}{7}$$

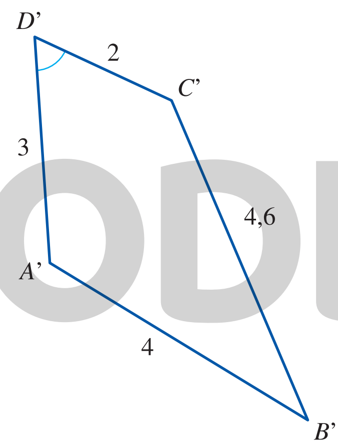
$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = \frac{15}{8}$$

Os polígonos acima têm os ângulos correspondentes congruentes, mas seus lados correspondentes não são proporcionais. Logo, eles **não** são semelhantes.

Veja estes outros polígonos.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA





$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{2{,}3}{4{,}6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DA}{D'A'} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$$

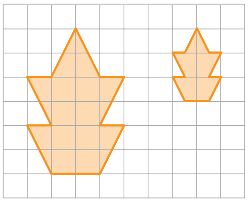
Esses polígonos têm os lados correspondentes proporcionais, mas seus ângulos correspondentes não são congruentes. Logo, eles **não** são semelhantes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

25 Qual é a razão de semelhança entre a figura reduzida (à direita) e a figura original (à esquerda) na ilustração abaixo?

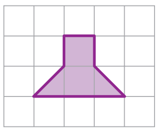
NELSON MATSUDA



$\frac{1}{2}$

26 Em um papel quadriculado, amplie a figura ao lado na razão $\frac{3}{1}$.

construção de figura



NELSON MATSUDA

27 Os lados correspondentes de dois polígonos são proporcionais. Podemos dizer que eles são semelhantes? Por quê?

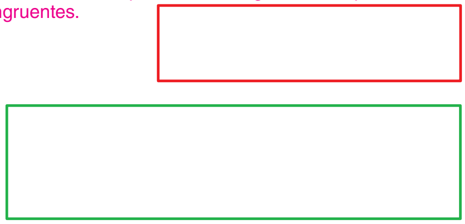
Não, porque é necessário também que os ângulos correspondentes sejam congruentes.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

28 Com uma régua, meça a base e a altura dos retângulos a seguir e, com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos de ambos.

28. c) Sim, pois, além de os lados correspondentes serem proporcionais os ângulos medem 90° e, portanto, os ângulos correspondentes são congruentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



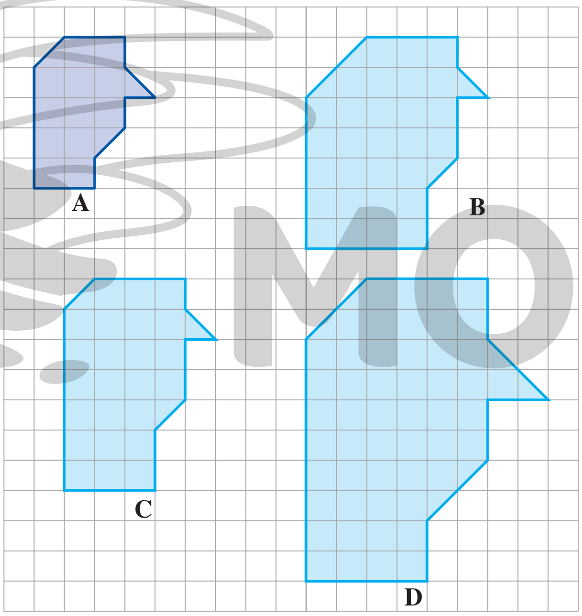
a) Qual é a razão entre a medida da base do retângulo vermelho e a medida da base do retângulo verde? $\frac{2}{3}$

b) Qual é a razão entre a medida da altura do retângulo vermelho e a medida da altura do retângulo verde? $\frac{2}{3}$

c) Esses retângulos são semelhantes? Por quê?

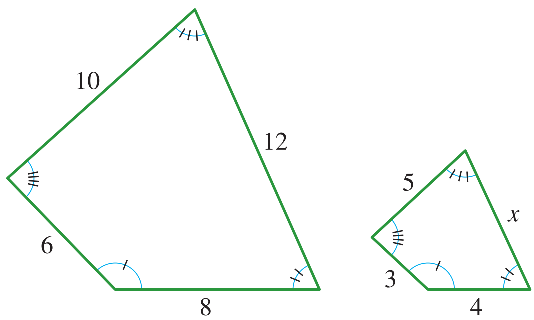
29 Indique a figura semelhante à figura A. figura D

NELSON MATSUDA

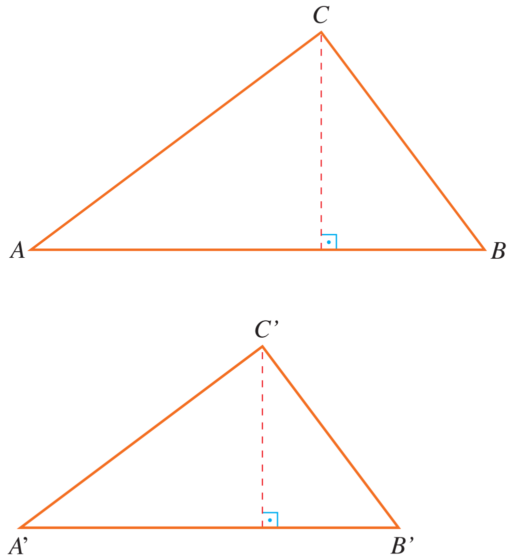


30 Sabendo que os polígonos a seguir são semelhantes, calcule x. 6

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



31 Considere os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Com uma régua, determine a medida dos lados e das alturas relativas a $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Considerando as razões, sempre do triângulo ABC para o triângulo $A'B'C'$, responda:

a) Qual é a razão entre as medidas de dois lados correspondentes? 1,2

b) Qual é a razão entre as medidas de duas alturas relativas a lados correspondentes? 1,2

c) Qual é a razão entre os perímetros? 1,2

d) Qual é a razão entre as áreas? 1,44

32 Marcos desenhou em um papel quadriculado, de 1 cm por 1 cm, um triângulo retângulo. Usou 12 lados do quadradinho para a base e 8 para a altura.

Pedro também desenhou um triângulo retângulo com 12 lados do quadradinho para a base e 8 para a altura, mas em um papel quadriculado de 0,5 cm por 0,5 cm.

Sabendo que os triângulos desenhados por Marcos e Pedro são semelhantes, responda:

a) Qual é a razão de semelhança entre os lados do triângulo de Marcos e os lados do triângulo de Pedro? $\frac{2}{1}$

b) Qual é a razão de semelhança entre o perímetro do triângulo de Marcos e o perímetro do triângulo de Pedro? $\frac{2}{1}$

c) Qual é a razão entre a área do triângulo de Marcos e a área do triângulo de Pedro? $\frac{4}{1}$

Pense mais um pouco...

Um grupo de amigos fez uma viagem para Recife (PE).

Lá tiraram muitas fotos, que foram reveladas no tamanho 10×15.
Uma das fotos, a do Monumento Tortura Nunca Mais, ficou excelente. Resolveram, então, fazer uma cópia ampliada no tamanho 20×30 para cada um.
Na foto original, o monumento tem 7,2 cm de largura. Qual é a medida, em centímetro, dessa largura na cópia ampliada? 14,4 cm


HANS VON MANTEUFFEL/OPÇÃO BRASIL

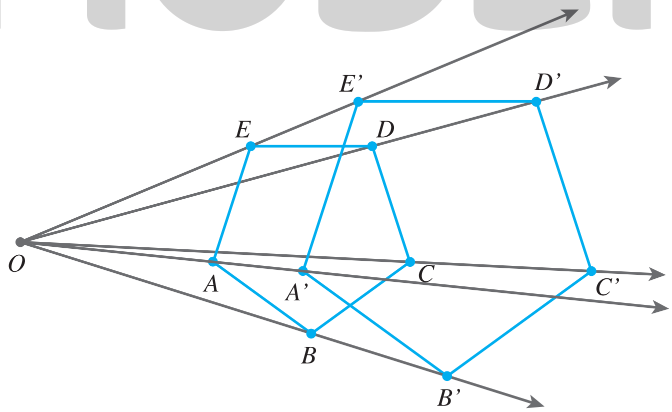
Detalhe do Monumento Tortura Nunca Mais, na Praça Padre Henrique em Recife (PE). (Foto de 2014.)

PARA SABER MAIS +

Construindo figuras semelhantes por homotetia

A **homotetia** é um exemplo de transformação geométrica que preserva a forma da figura original, mas não necessariamente seu tamanho, que pode ser ampliado ou reduzido. Desse modo, a figura original e a figura obtida são semelhantes. Essas figuras são chamadas de **figuras homotéticas**.

Veja como ampliar o pentágono *ABCDE*, na razão 1,5, por homotetia.



NELSON MATSUDA

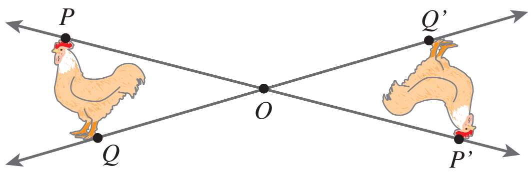
- Fixamos um ponto *O* (centro de homotetia).
- Traçamos, a partir do ponto *O*, semirretas que passam pelos vértices desse pentágono.

Obtemos o pentágono *A'B'C'D'E'*, fazendo $OA' = 1{,}5 \cdot OA$, $OB' = 1{,}5 \cdot OB$ e assim por diante.

O pentágono *A'B'C'D'E'* é semelhante ao pentágono *ABCDE* na razão de semelhança 1,5.

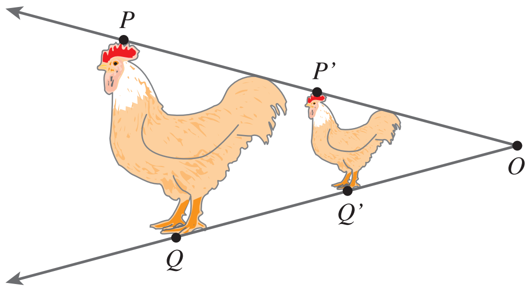
Veja outros exemplos de figuras homotéticas.

a) A figura original foi invertida por homotetia de centro O e razão -1.



Nesse caso, as figuras são congruentes.

b) A figura original foi reduzida por homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$.



c) Por meio da homotetia, podemos formar uma sequência de figuras homotéticas.

Limite do círculo com borboletas, M.C. Escher, 1950.

Agora é com você!

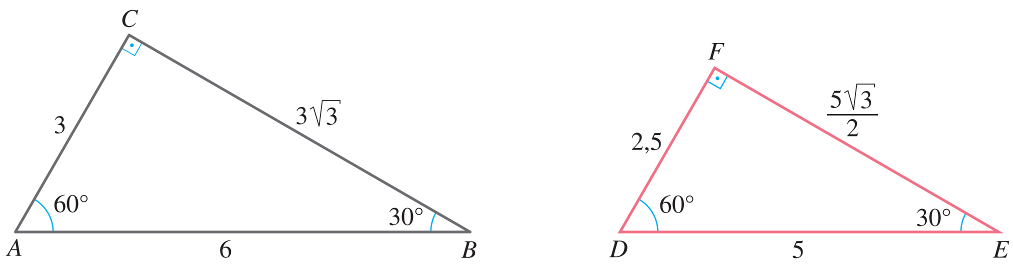
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Desenhe um triângulo retângulo isósceles. Fixe um ponto O e, por homotetia de centro O e razão 2, construa o triângulo homotético ao que você desenhou. construção de figura

5 Semelhança aplicada a triângulos

Já vimos que triângulos são polígonos. Então, podemos dizer que para dois triângulos serem semelhantes deve ser possível estabelecer uma correspondência entre os lados por proporcionalidade e entre os ângulos por congruência.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF* a seguir.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Esses triângulos são semelhantes, pois:

- os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{D},\ \hat{B} \cong \hat{E} \ \text{e} \ \hat{C} \cong \hat{F}$$

- os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{6}{5} \text{ (razão de semelhança)}$$

OBSERVAÇÕES

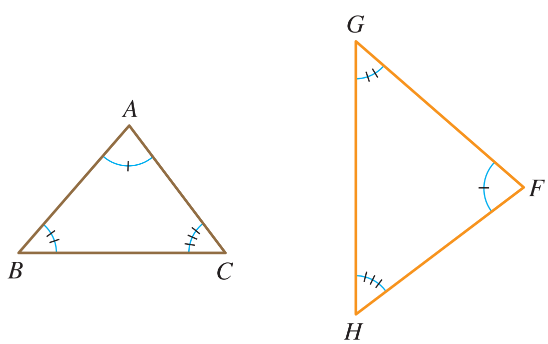
- Para saber que lados se correspondem, observamos os ângulos opostos a eles. Assim:
  - o lado $\overline{AB}$ corresponde ao lado $\overline{DE}$, pois são opostos a ângulos congruentes ($\hat{C} \cong \hat{F}$);
  - o lado $\overline{AC}$ corresponde ao lado $\overline{DF}$, pois são opostos a ângulos congruentes ($\hat{B} \cong \hat{E}$);
  - o lado $\overline{BC}$ corresponde ao lado $\overline{EF}$, pois são opostos a ângulos congruentes ($\hat{A} \cong \hat{D}$).
- Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é *k*, então:
  - a razão entre duas alturas correspondentes é *k*;
  - a razão entre duas medianas correspondentes é *k*;
  - a razão entre duas bissetrizes correspondentes é *k*;
  - a razão entre seus perímetros é *k*;
  - a razão entre suas áreas é k^2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

33 Indique quais são os lados correspondentes nestes triângulos semelhantes.

$\overline{BC}$ e $\overline{GH}$
$\overline{AC}$ e $\overline{FH}$
$\overline{AB}$ e $\overline{FG}$

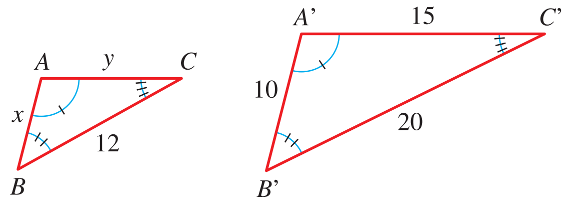


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

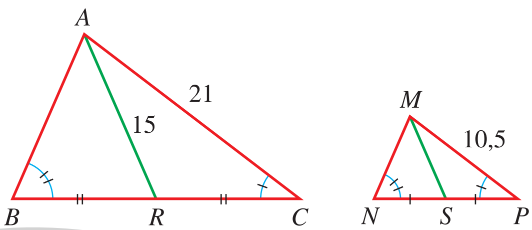
34 Considere o seguinte par de triângulos semelhantes e determine os valores de x e de y.

$x = 6$
$y = 9$



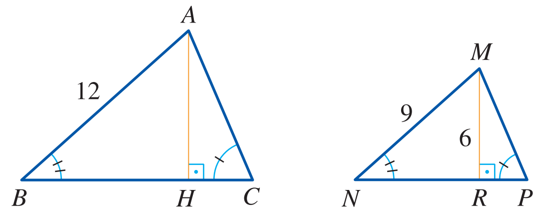
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

35 Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, calcule a medida da mediana $\overline{MS}$ do $\triangle MNP$. $MS = 7{,}5$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

36 Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, calcule a medida da altura $\overline{AH}$ do $\triangle ABC$. 8



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

37 Construa com régua e compasso um triângulo escaleno qualquer. Depois, construa um triângulo semelhante a esse na razão 3 e outro na razão $\frac{3}{4}$. construções de figuras

38 Os lados de um triângulo medem 12 cm, 18 cm e 20,4 cm. O maior lado de um triângulo semelhante ao primeiro mede 15,3 cm.

a) Qual é o perímetro do segundo triângulo? 37,8 cm

b) Calcule a área do segundo triângulo, sabendo que a área do primeiro é $23{,}04\sqrt{11}\ \text{cm}^2$.

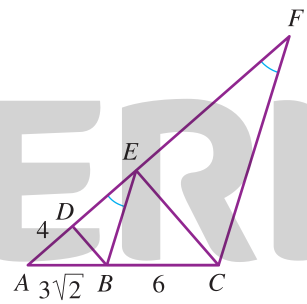
$12{,}96\sqrt{11}\ \text{cm}^2$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Na figura, $\overline{BD} \,//\, \overline{CE}$ e $A\hat{E}B \cong A\hat{F}C$.

Determine, a medida, em centímetro, de $\overline{AF}$. $(12 + 8\sqrt{2})$ cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

PARA SABER MAIS +

A Matemática na História

Para tratar de semelhança, é imprescindível retomar os estudos do filósofo e matemático grego Tales de Mileto (cerca de 624-547 a.C.), cujo nome está associado ao teorema:

> Se um feixe de paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Esse teorema, que provém diretamente da ideia de semelhança entre triângulos, é conhecido como **teorema de Tales**.

Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Acredita-se que ele tenha sido o primeiro filósofo e geômetra da Grécia conhecido e o primeiro de seus sábios. Acredita-se também que Tales tenha criado a Geometria demonstrativa.


MARY EVANS PICTURE LIBRARY – LONDON

Tales de Mileto

Nenhum escrito de Tales chegou até nós, o que dificulta a determinação precisa de suas ideias e de suas descobertas matemáticas. Muito do que sabemos a respeito dele vem do chamado *Sumário eudemiano*, escrito pelo matemático, filósofo e comentarista grego Proclus (411-485 d.C.).

O *Sumário eudemiano* é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde os primeiros tempos até a época de Euclides e é, ainda hoje, o principal registro histórico do início dessa ciência na Grécia.

Muitos dos conhecimentos de Tales resultaram de viagens que ele empreendeu, especialmente ao Egito. Tales morou por um tempo no Egito e, lá, teria aprendido Geometria com os sacerdotes egípcios e, também, aplicado a semelhança de triângulos.

Segundo o *Sumário eudemiano*, Tales introduziu a Geometria na Grécia após essas viagens. Utilizando metodologias gerais e empíricas, o filósofo grego descobriu muitas proposições, algumas delas envolvendo semelhança.

Além de Proclus, outras fontes fazem menção a Tales. O grego Eudemo de Rodes (350-290 a.C.), primeiro grande historiador da Matemática, por exemplo, afirma que Tales mediu a distância de uma torre a um navio.

PHOTONONSTOP/AFP


Pirâmides de Quéfren e Quéops, no Egito. (Foto de 2011.)

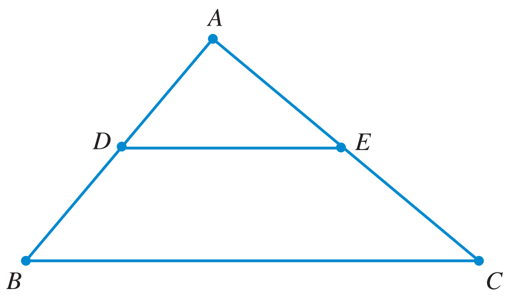
Hierônimo, um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), afirmou que Tales teria medido a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito, por meio da observação e da comparação da própria sombra com a sombra da pirâmide. Tales teria chegado à conclusão de que, quando sua sombra tivesse o mesmo comprimento de sua altura, a sombra da pirâmide teria o mesmo comprimento da altura dela. O matemático e filósofo grego Plutarco (cerca de 46-119 d.C.) também o menciona em sua obra, ao dizer que Tales mediu a altura da pirâmide fincando verticalmente uma vara no chão e comparando as razões entre os dois triângulos formados.

Com base nesses relatos, percebemos que as ideias de proporcionalidade e de semelhança, em particular entre triângulos, estão estreitamente associadas ao nome de Tales. Somando a isso a grande importância que a Arquitetura e a Agrimensura tiveram no Egito antigo, bem como o fato de Tales ter sido o fundador da Geometria demonstrativa na Grécia e quem primeiro organizou a Matemática dedutiva, é razoável a hipótese de que a primeira sistematização da Geometria tenha ocorrido na época de Tales.

Teorema fundamental da semelhança

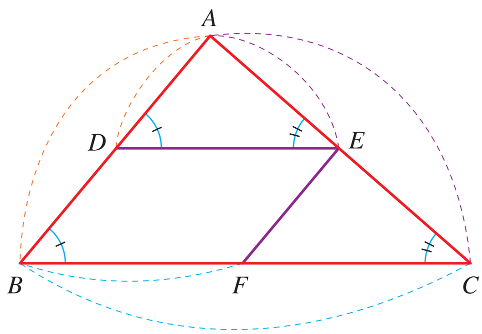
> Toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Observe a figura a seguir, em que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Vamos provar que os triângulos *ADE* e *ABC* são semelhantes.

Para a demonstração formal de um teorema, precisamos indicar com precisão qual é a **hipótese** (proposição aceita como verdadeira) e qual é a **tese** (proposição cuja verdade se quer provar).



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Hipótese $\{\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Tese $\{\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Demonstração

Construção auxiliar: traçamos, por *E*, $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$.

Observe atentamente os passos abaixo para acompanhar a demonstração.

(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (por hipótese)

(2) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (pelo teorema de Tales)

(3) $\hat{A} \cong \hat{A}$ (ângulo comum)

(4) $\hat{B} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

(5) $\hat{C} \cong \hat{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

(6) $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ (pelo teorema de Tales)

(7) $\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

(8) $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de (6) e (7))

(9) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de (2) e (8))

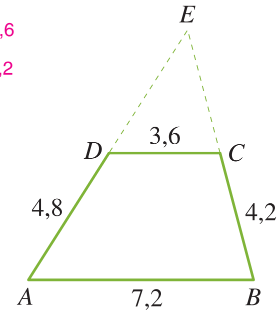
(10) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (de (3), (4), (5) e (9))

Portanto, *ADE* e *ABC* são triângulos semelhantes, como queríamos demonstrar.

39 Os prolongamentos dos lados não paralelos do trapézio $ABCD$ encontram-se em um ponto E. Determine:

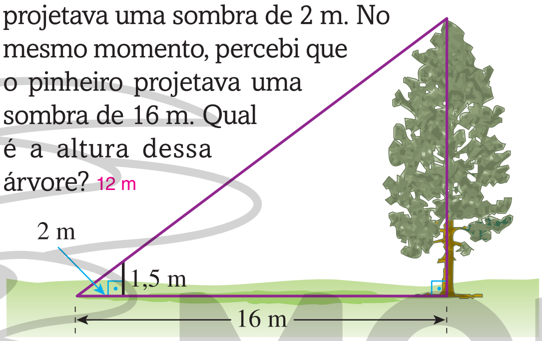
a) a medida de $\overline{AE}$; 9,6

b) a medida de $\overline{CE}$. 4,2



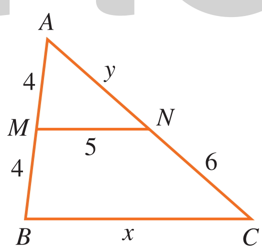
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

40 Para medir a altura de um pinheiro, fiz o seguinte: peguei um bastão de 1,5 m e verifiquei que ele projetava uma sombra de 2 m. No mesmo momento, percebi que o pinheiro projetava uma sombra de 16 m. Qual é a altura dessa árvore? 12 m

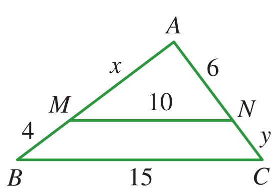


41 Determine o valor de x e de y em cada caso.

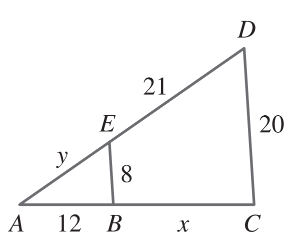
a) $\overline{MN} // \overline{BC}$
$x = 10$
$y = 6$



b) $\overline{MN} // \overline{BC}$
$x = 8$
$y = 3$



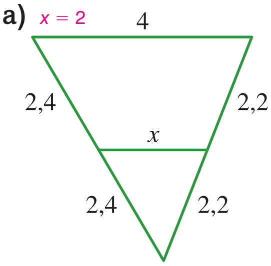
c) $\overline{EB} // \overline{DC}$
$x = 18$
$y = 14$



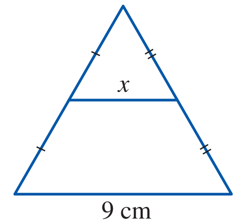
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

42 Calcule x nos seguintes triângulos:

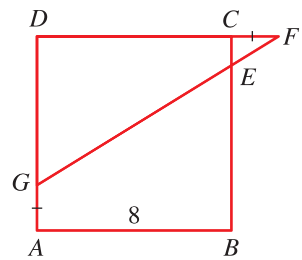
a) $x = 2$



b) $x = 4{,}5$ cm

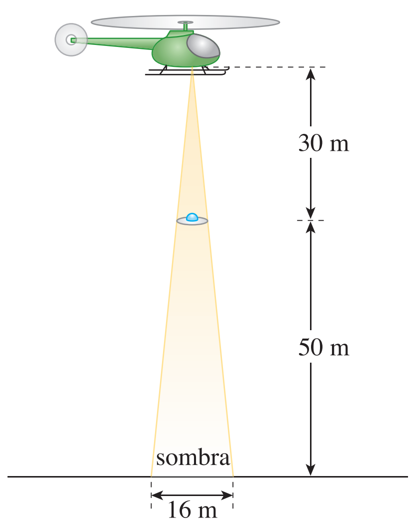


43 Na figura, $ABCD$ é um quadrado e $CF = AG = 2$. Calcule CE. 1,2



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

44 (Unirio-RJ) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do Exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura a seguir. alternativa **a**



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em m, aproximadamente:

a) 3,0. **b)** 3,5. **c)** 4,0. **d)** 4,5. **e)** 5,0.

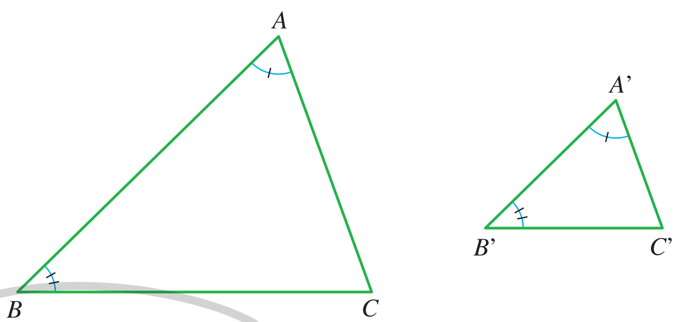
Casos de semelhança de triângulos

Você já viu que dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

No entanto, podemos reconhecer dois triângulos semelhantes pelos casos a seguir.

Caso ângulo-ângulo (AA)

> Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes, esses triângulos são semelhantes.



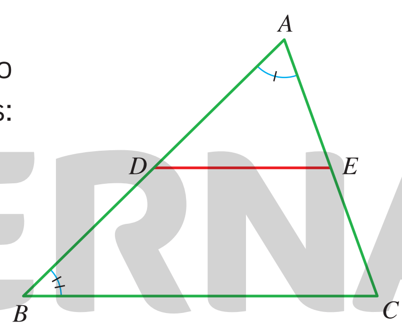
Hipótese $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{cases}$

Tese $\{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Demonstração

Supondo que $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D traçamos $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$. Assim, temos:



(1) $\hat{D} \cong \hat{B}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

(2) $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (por hipótese)

(3) $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção)

(4) $\hat{D} \cong \hat{B}'$ (pois $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\hat{D} \cong \hat{B}$)

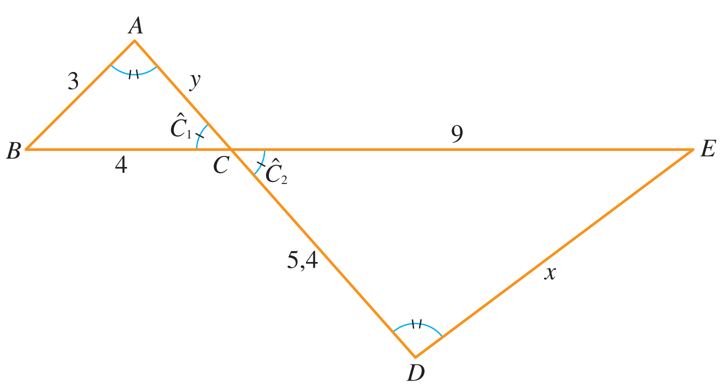
Logo, de (2), (3) e (4) sabemos que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso ALA.

Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos provar.

Observe abaixo um exemplo de aplicação do caso de semelhança AA.

Vamos calcular o valor de x e de y nos triângulos a seguir, sabendo que $\overline{AB} /\!/ \overline{DE}$.



NELSON MATSUDA

Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal)
- $\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)

Portanto, os triângulos ABC e DEC são semelhantes pelo caso AA.

Assim, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \quad \text{e} \quad \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{9}{4} \qquad \frac{y}{5{,}4} = \frac{4}{9}$$

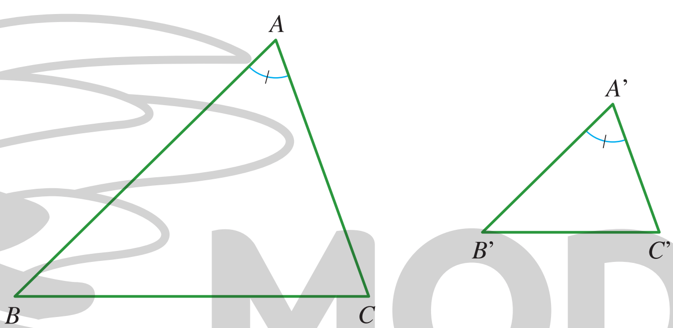
$$x = \frac{27}{4} = 6{,}75 \qquad y = \frac{21{,}6}{9} = 2{,}4$$

Portanto, os valores de x e de y são, respectivamente, 6,75 e 2,4.

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



$$\text{Hipótese} \begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \end{cases}$$

$$\text{Tese } \{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Demonstração

Supondo que $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D traçamos $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$. Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

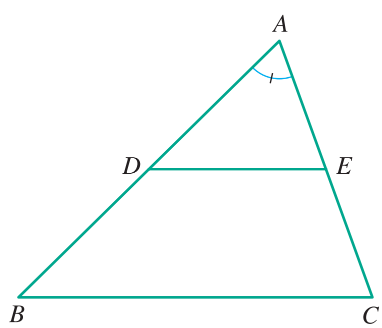
Vamos mostrar, pelo caso LAL de congruência de triângulos, que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Já sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção) e que $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (por hipótese). Resta provar que $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Da conclusão acima ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$), podemos escrever $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ ou, ainda, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$. Então: $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

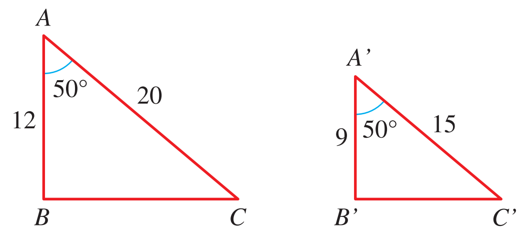
NELSON MATSUDA



Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (pelo caso LAL de congruência de triângulos)
Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos provar.

Observe agora um exemplo de aplicação do caso de semelhança LAL.

Vamos verificar se os triângulos abaixo são semelhantes.



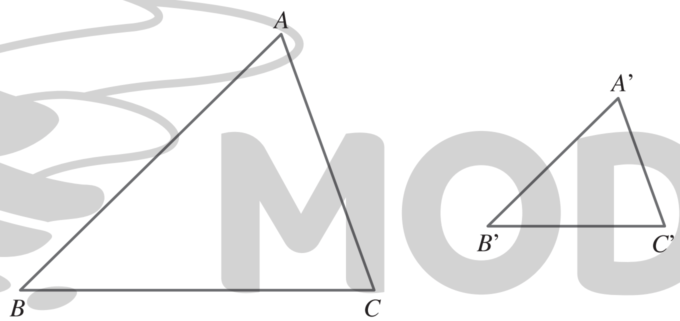
Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (dado)
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, pois: $\dfrac{12}{9} = \dfrac{20}{15}$

Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes pelo caso LAL.

Caso lado-lado-lado (LLL)

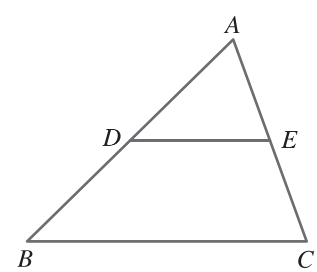
Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



Hipótese $\left\{ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \right.$

Tese $\{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Demonstração



Supondo que $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D traçamos $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$. Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Vamos mostrar, pelo caso LLL de congruência de triângulos, que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Como sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção), resta provar que $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e que $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Da conclusão acima ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$), podemos escrever:

- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ ou, ainda, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

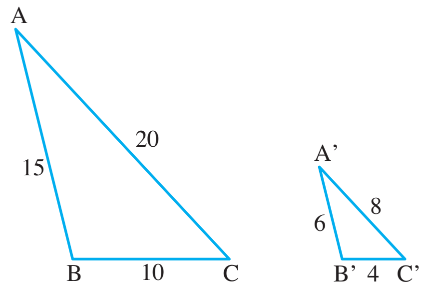
- $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ ou, ainda, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Então: $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (pelo caso LLL).
Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos provar.

Observe um exemplo de aplicação do caso de semelhança LLL.
Vamos verificar se os triângulos abaixo são semelhantes.



NELSON MATSUDA

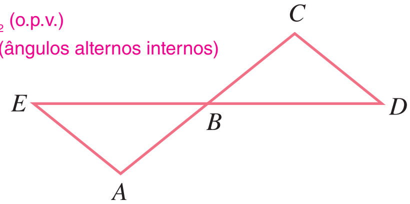
Nesses triângulos, os lados correspondentes são proporcionais:
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$, pois: $\frac{15}{6} = \frac{10}{4} = \frac{20}{8}$
Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes pelo caso LLL.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

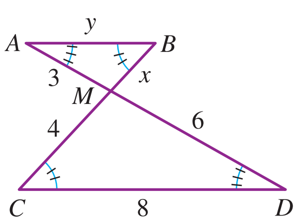
45 Prove que o $\triangle ABE$ e o $\triangle CBD$ são semelhantes, sabendo que $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$. (*Dica*: desenhe marcando os ângulos congruentes ou mudando a posição de um dos triângulos para facilitar a visualização.)

$\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$ (o.p.v.)
$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos alternos internos)

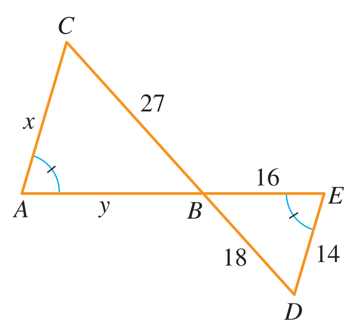


46 Calcule x e y em cada caso.

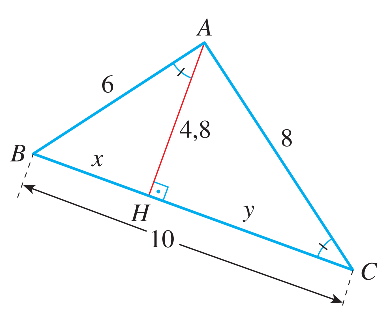
a) $x = 2$
$y = 4$



b) $x = 21$
$y = 24$



c) $x = 3,6$
$y = 6,4$

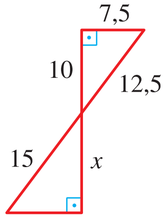


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

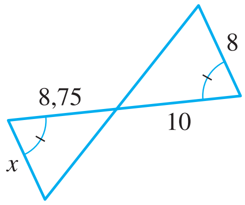
Lembre-se:
Não escreva no livro!

47 Verifique quais triângulos são semelhantes e calcule o valor de x.

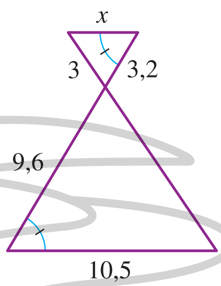
a) $x = 12$



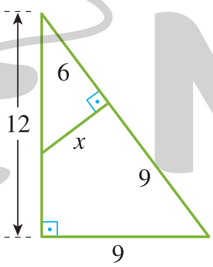
b) $x = 7$



c) $x = 3{,}5$



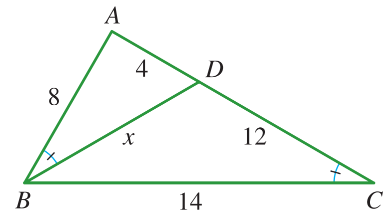
d) $x = 4{,}5$



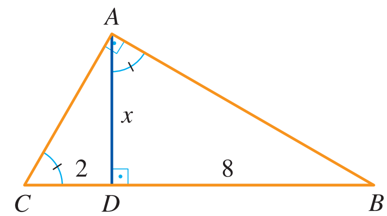
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

48 Mostre que os triângulos são semelhantes e calcule o valor de x. (*Dica*: você pode desenhar cada triângulo separadamente.)

a) $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$ $x = 7$



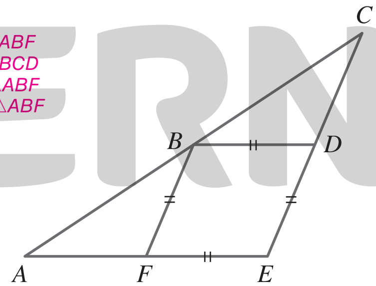
b) $\triangle ADB$ e $\triangle CDA$ $x = 4$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

49 Verifique quais triângulos são semelhantes, sabendo que $\overline{AE} \mathbin{/\!/} \overline{BD}$, $\overline{CE} \mathbin{/\!/} \overline{BF}$ e que F é o ponto médio de $\overline{AE}$. Entre esses pares de triângulos semelhantes, quais são triângulos congruentes?

$\triangle ACE \sim \triangle ABF$
$\triangle ACE \sim \triangle BCD$
$\triangle BCD \sim \triangle ABF$
$\triangle BCD \cong \triangle ABF$



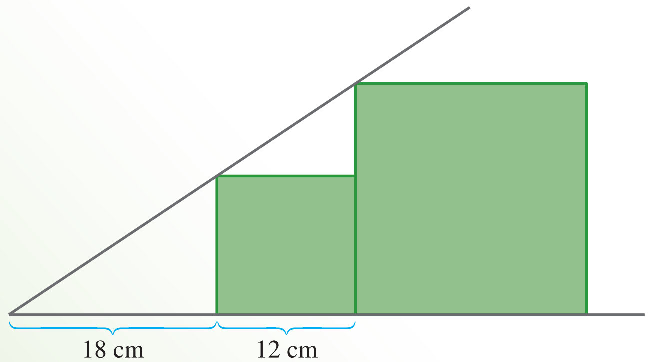
NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Na figura abaixo, há dois quadrados. Determine o perímetro e a área do quadrado maior.

80 cm; 400 cm².

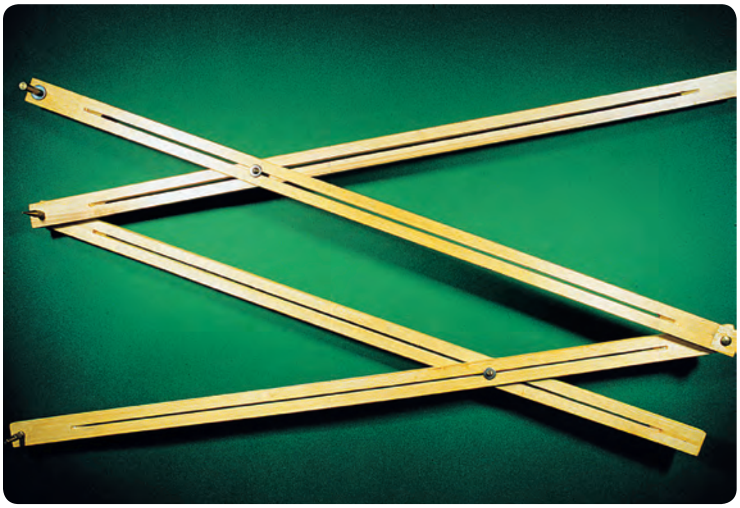


NELSON MATSUDA

PARA SABER MAIS +

Construindo um pantógrafo

Pantógrafo é um aparelho usado para ampliar ou reduzir figuras em determinada razão.


EDUARDO FELTRE

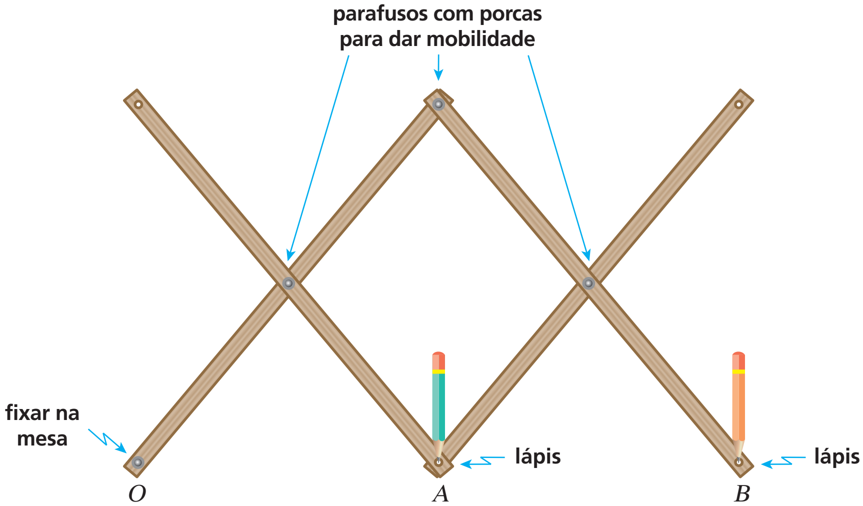
Pantógrafo.

Veja como construí-lo:

Materiais

- 4 ripas de madeira pequenas de mesmo comprimento, perfuradas nas extremidades e no centro
- 2 lápis
- 3 parafusos com porcas

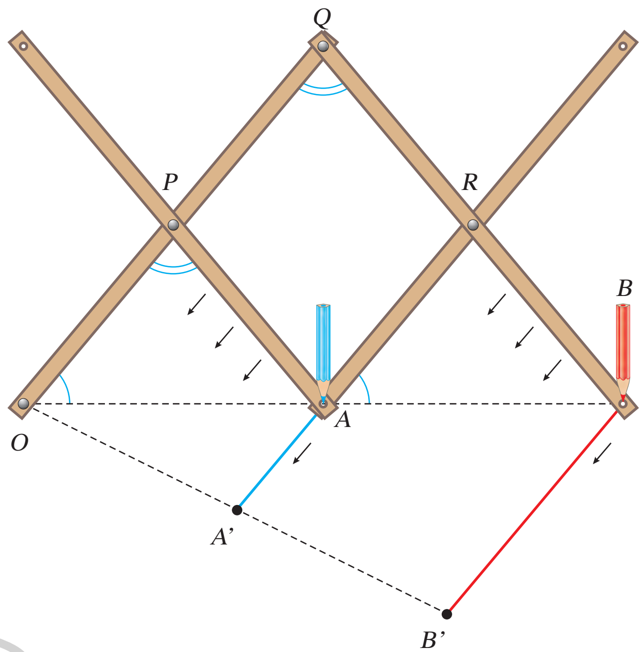
Com os materiais indicados, vamos montar as ripas de madeira de modo que todas as conexões fiquem articuláveis. O ponto *O* deve ficar fixo sobre a mesa. Colocamos em *A* e *B* cada um dos lápis.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Pronto, seu pantógrafo está montado.

Observe que os triângulos *OPA* e *OQB* são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{OP}{OQ} = \frac{1}{2}$. Sendo assim, quando você traçar com o lápis *A* um segmento $\overline{AA'}$, o lápis *B* traçará um segmento $\overline{BB'}$ com o dobro de seu comprimento.



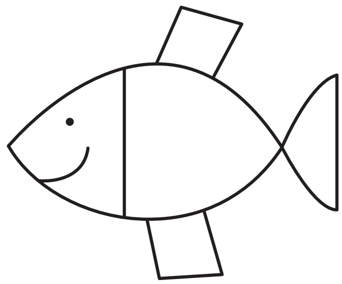
NELSON MATSUDA

Agora é com você!

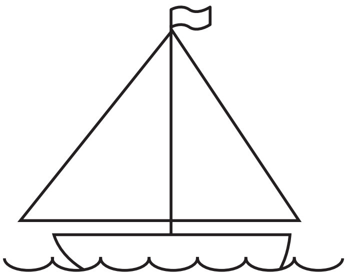
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Use o pantógrafo que você construiu para desenhar figuras semelhantes a estas, de acordo com a razão de semelhança (k) indicada em cada caso. construções de figuras

a) $k = 2$



b) $k = \frac{1}{2}$



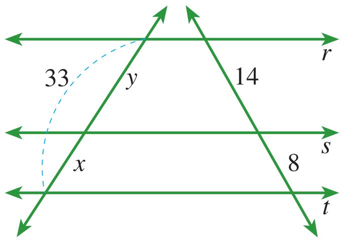
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

OBSERVAÇÃO

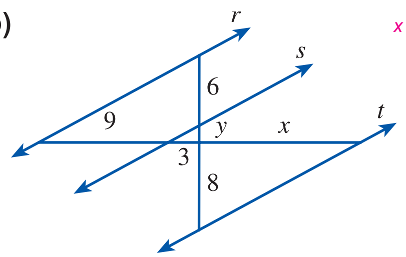
- Perfurando as ripas em várias posições, você poderá montar e desmontar o pantógrafo, obtendo a razão de semelhança que desejar.
  Por exemplo, se as ripas forem perfuradas em três partes iguais, você poderá triplicar uma figura ou reduzi-la a um terço.

1 Sendo $r // s // t$, calcule x e y

a) $x = 12$ e $y = 21$

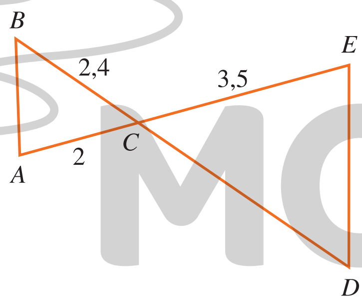


b) $x = 12$ e $y = 2$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

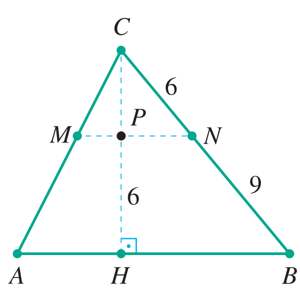
2 Calcule a medida de $\overline{BD}$ na figura, sabendo que $\overline{AB} // \overline{DE}$. 6,6



NELSON MATSUDA

3 Calcule a medida da altura $\overline{CH}$, relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$, sabendo que $\overline{MN} // \overline{AB}$.

$CH = 10$

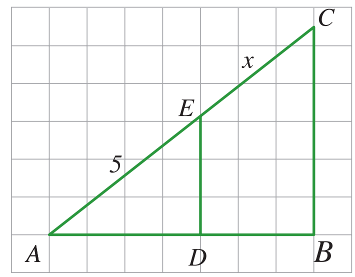


NELSON MATSUDA

4 Construa um segmento de 11 cm e divida-o em quatro partes iguais sem usar a escala da régua. construção de figura

5 As medidas dos lados de um $\triangle ABC$ são: $AB = 21$ cm, $AC = 18$ cm e $BC = 26$ cm. Calcule as medidas dos segmentos determinados no lado $\overline{BC}$ pela bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. 14 cm e 12 cm

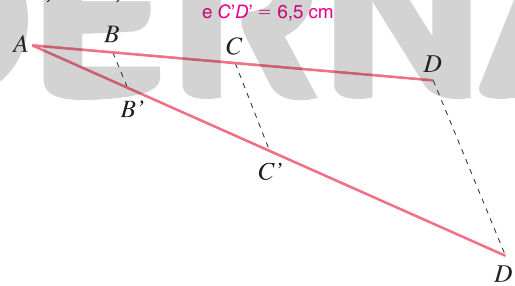
6 Na figura, $\overline{DE} // \overline{BC}$. Considerando o lado do quadradinho do quadriculado como unidade de medida, calcule o valor de x. $x = 3{,}75$



NELSON MATSUDA

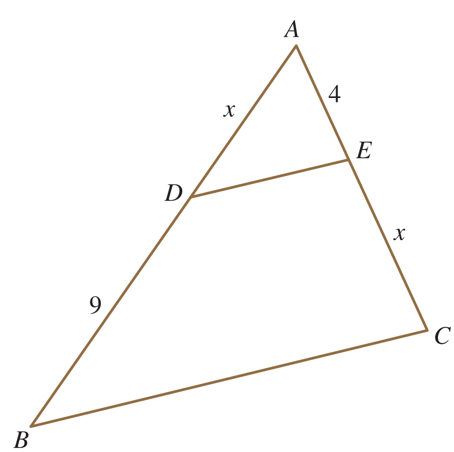
7 A bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$ determina sobre o lado $\overline{BC}$ segmentos de 15 cm e 20 cm. Sabendo que o perímetro do $\triangle ABC$ é 84 cm, calcule as medidas dos lados desse triângulo. 21 cm, 28 cm e 35 cm

8 (Unicamp-SP) A figura mostra um segmento $\overline{AD}$ dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e $CD = 5$ cm. O segmento $\overline{AD'}$ mede 13 cm e as retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas a $\overleftrightarrow{DD'}$. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AB'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$. $AB' = 2{,}6$ cm, $B'C' = 3{,}9$ cm e $C'D' = 6{,}5$ cm



NELSON MATSUDA

9 No triângulo, $\overline{DE} // \overline{BC}$. Calcule o valor de x. $x = 6$



NELSON MATSUDA

11. b) falsa. Resposta possível: Dois triângulos semelhantes com razão de semelhança diferente de 1 não são congruentes.

11. c) falsa. Resposta possível: Há triângulos retângulos que não são semelhantes, como um triângulo retângulo isósceles e um triângulo retângulo escaleno.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

10 Construa um triângulo ABC de modo que $AB = 4{,}2$ cm, $AC = 5{,}6$ cm e $BC = 7$ cm. Trace a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Chame de D o ponto de encontro dessa bissetriz com $\overline{BC}$. Determine as medidas de $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$. $BD = 3$ cm e $CD = 4$ cm
Em seguida, meça esses segmentos com a régua e compare os valores encontrados com as respectivas medidas obtidas pelo cálculo.

11 Classifique cada sentença abaixo em Verdadeira ou Falsa, e justifique as falsas.

a) Todos os triângulos congruentes são semelhantes. Verdadeira

b) Todos os triângulos semelhantes são congruentes.

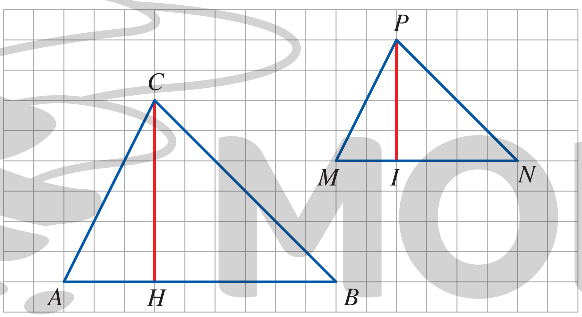
c) Todos os triângulos retângulos são semelhantes.

d) Todos os triângulos equiláteros são semelhantes. Verdadeira

e) Dois triângulos isósceles que têm os ângulos do vértice congruentes são semelhantes. Verdadeira

12 O $\triangle ABC$ e o $\triangle MNP$ abaixo são semelhantes.

NELSON MATSUDA



Determine a razão entre:

a) os lados $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$; $\frac{3}{2}$

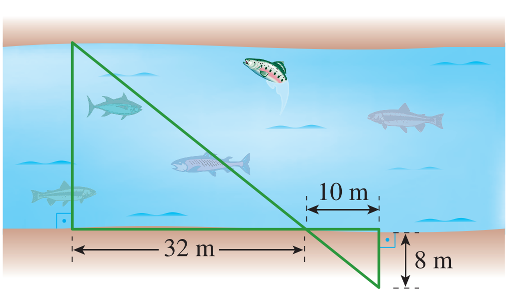
b) os lados $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$; $\frac{3}{2}$

c) as alturas $\overline{CH}$ e $\overline{PI}$; $\frac{3}{2}$

d) as áreas dos triângulos ABC e MNP. $\frac{9}{4}$

13 (Covest-PE) A figura abaixo representa um rio cujas margens são retas paralelas.

NELSON MATSUDA



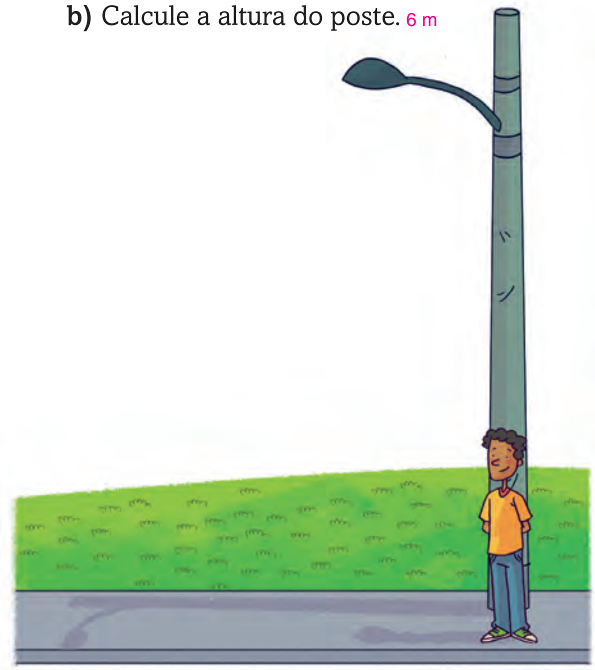
Qual é o inteiro mais próximo da largura do rio, medida em metros? 26

14 Em certo momento do dia, um poste projetava sobre a calçada uma sombra de 4 m. Nesse mesmo momento, um homem de 1,80 m de altura, que estava ao lado do poste, projetava uma sombra de 1,20 m.

a) Ilustre a situação. construção de figura

b) Calcule a altura do poste. 6 m

LÉO FANELLI



15 (Enem) A sombra de uma pessoa que mede 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, a sombra da pessoa passará a medir: alternativa **b**

a) 30 cm.
b) 45 cm.
c) 50 cm.
d) 80 cm.
e) 90 cm.

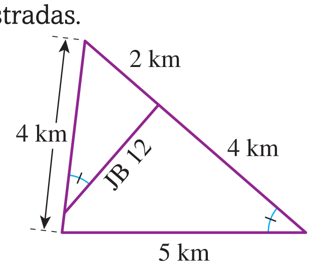
16 Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo medem, respectivamente, 35 cm e 42 cm. No lado $\overline{AB}$, distante 10 cm de A, marca-se um ponto D. Por D traça-se uma paralela a $\overline{BC}$, que encontra $\overline{AC}$ no ponto E. construção de figura

a) Construa uma figura que ilustra a situação.

b) Determine as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$.
$AE = 12$ cm e $EC = 30$ cm

17 O esquema abaixo representa a relação entre quatro estradas.

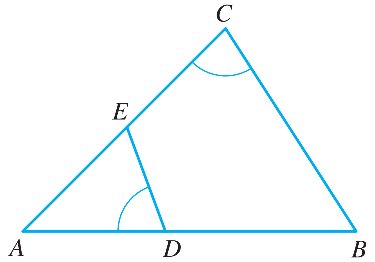
NELSON MATSUDA



Determine o comprimento da estrada JB 12.
2,5 km

18 Os lados de um triângulo medem 15 cm, 20 cm e 25 cm. Calcule a medida dos lados de um triângulo semelhante a ele que tenha 45 cm de perímetro. 11,25 cm; 15 cm e 18,75 cm

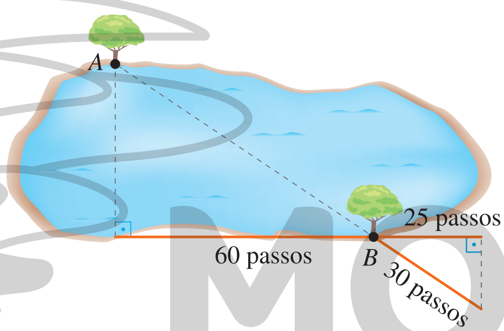
19 Considere a figura:



NELSON MATSUDA

Se $BC = 20$ cm, $AC = 24$ cm, $AD = 12$ cm e $AE = 12{,}6$ cm, determine o perímetro do quadrilátero *BCED*. 54,6 cm

20 Veja na figura o procedimento usado por Marcos para descobrir a distância entre as árvores *A* e *B* próximas do lago.



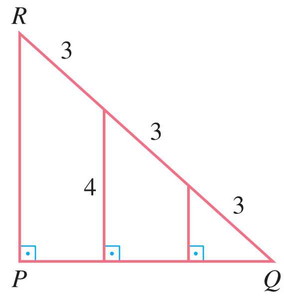
NELSON MATSUDA

Sabendo que a medida do passo de Marcos é 80 cm, determine a distância entre essas árvores, em metro. 57,60 m

21 Os perímetros de dois triângulos são 48 cm e 60 cm. O maior lado do triângulo maior mede 25 cm. Determine a medida do maior lado do triângulo menor. 20 cm

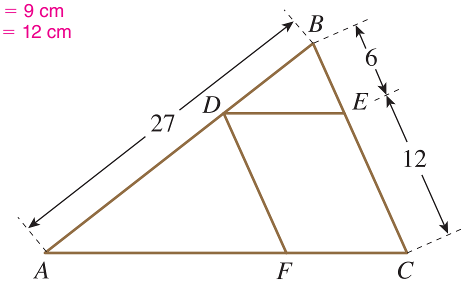
22 (UFRN) Considerando-se as informações constantes no triângulo *PQR* (figura abaixo), pode-se concluir que a altura $\overline{PR}$ desse triângulo mede: alternativa **b**

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.



NELSON MATSUDA

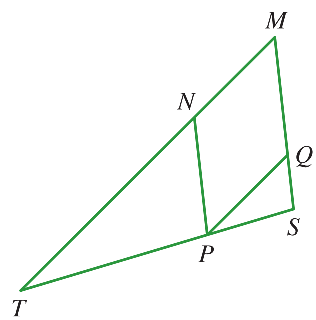
23 No triângulo abaixo, $\overline{DE} // \overline{AC}$ e $\overline{DF} // \overline{BC}$. Sabendo que $AB = 27$ cm, $BE = 6$ cm e $EC = 12$ cm, calcule *BD* e *DF*.
$BD = 9$ cm
$DF = 12$ cm



NELSON MATSUDA

24 (Mackenzie-SP) Na figura, *MNPQ* é um losango. Se $MT = 12$ e $MS = 6$, o lado do losango mede: alternativa **b**

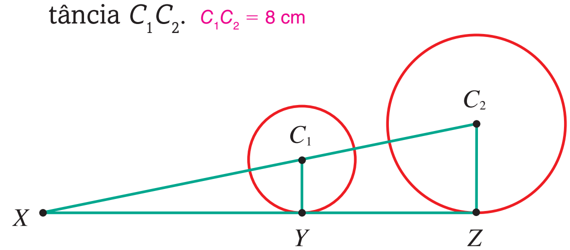
a) 3.
b) 4.
c) 2.
d) $\frac{5}{2}$.
e) $\frac{7}{2}$.



NELSON MATSUDA

25 Uma pessoa sobe uma rampa que tem 4 m de altura na parte mais alta. Após caminhar 12,3 m sobre a rampa, ela nota que está a 1,5 m de altura em relação ao solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. 20,5 m

26 Na figura, o raio da circunferência menor mede 6 cm e o da maior mede 10 cm. Se $XC_1 = 12$ cm e $\overline{YC_1} // \overline{ZC_2}$, determine a distância C_1C_2. $C_1C_2 = 8$ cm



NELSON MATSUDA

27 O perímetro do polígono *ABCDE* é 150 cm e o lado $\overline{AB}$ mede 20 cm. Determine o perímetro do polígono *MNPQR*, semelhante ao primeiro e cujo lado $\overline{MN}$, correspondente de $\overline{AB}$, mede 30 cm. 225 cm

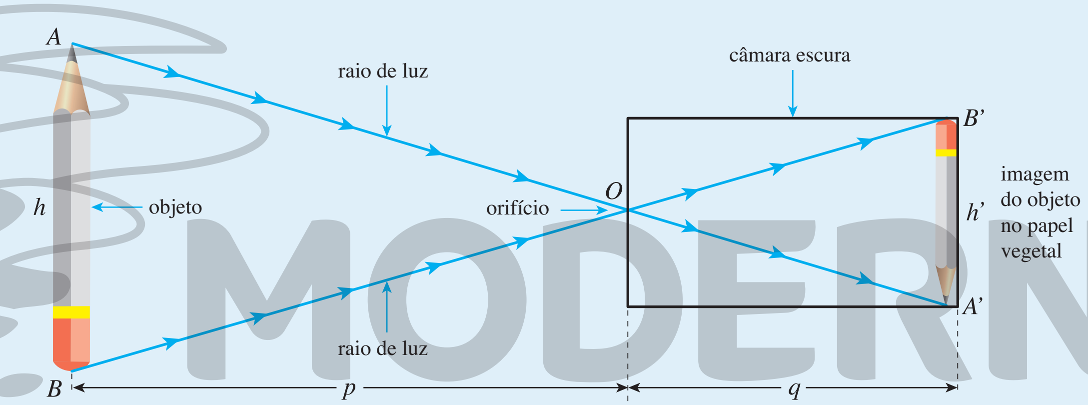
Diversificando

Câmara escura de orifício

A câmara escura de orifício é um objeto óptico muito simples, pois forma imagens apenas selecionando os raios de luz. Ela pode ser feita com uma caixa ou uma lata qualquer, desde que suas paredes sejam opacas. De um lado, deve ter um pequeno orifício e, na parte oposta, um papel vegetal.

Quando apontamos o orifício da câmara escura para um objeto iluminado, observamos a projeção da imagem invertida desse objeto sobre o papel vegetal. Isso ocorre em virtude de uma importante propriedade da luz, que é a de se propagar em linha reta. Veja o esquema a seguir.

ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIYO



NELSON MATSUDA

Os triângulos OBA e $OB'A'$ são semelhantes.

No esquema acima, h é a medida da altura do objeto, h' é a medida da altura da imagem e da caixa também, p é a distância do objeto até o orifício e q é a distância da imagem até o orifício. Os triângulos OAB e $OA'B'$ são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes: $A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$, $A\hat{B}O \cong A'\hat{B}'O$ e $B\hat{A}O \cong B'\hat{A}'O$. Portanto, por semelhança, vale $h \cdot q = p \cdot h'$.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se um objeto de 10 cm de altura está a 20 cm de distância do orifício, qual será a altura dele no papel vegetal? Não é possível calcular, pois as medidas da câmara não são dadas.

2 Felipe usou uma caixa de formato cúbico, com aresta de 20 cm, para fazer uma câmara escura e retratar um quadro pendurado na parede de sua casa. Qual é a distância mínima que esse quadro, de 50 cm $\times$ 50 cm, deve ficar do orifício da câmara para aparecer por inteiro no papel vegetal? A distância do quadro até o orifício deve ser 50 cm.

CAPÍTULO

3 Estatística e probabilidade

1 Origem da Estatística

A **Estatística** é o ramo da Matemática que posibilita coletar, descrever, organizar, analisar e comunicar dados a respeito de uma população ou de um fenômeno.

Os primeiros "dados estatísticos" apareceram há muito tempo, ao mesmo tempo que o desenvolvimento da escrita. Registros históricos (informações que encontramos em vestígios de civilizações anteriores à nossa) de mais de 2.000 anos antes de Cristo apontam o uso de processos que hoje chamaríamos de estatísticos. Grandes impérios da Antiguidade (como o sumério, o egípcio e o chinês) e da América pré-colombiana (maia, asteca e inca) fizeram uso do levantamento e registro de dados quantitativos para obter informações a respeito de sua população e de suas riquezas, especialmente para fins administrativos, tributários (relativo ao pagamento de impostos) e militares.

Talvez em virtude dessa aplicação o termo **estatística** derive da palavra latina *status*, que significa "condição, situação" ou, em um sentido mais amplo, "Estado".

O uso do termo para denominar esse campo de estudo é atribuída a Gottfried Achenwall (1719-1772), professor na Universidade de Göttingen, na Alemanha.

Na atualidade, a Estatística é essencial para o desenvolvimento de todas as ciências e está presente no cotidiano por meio de índices, tabelas e gráficos.

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos que esclarecem as mais diversas informações estatísticas como: população e amostra, formas de obtenção e organização de dados em tabelas e gráficos e medidas de tendência central.

WERNER FORMAN/CORBIS/LATINSTOCK

O povo inca, que dominou a cordilheira dos Andes entre o século XII e meados do XVI, não conhecia a escrita, mas transportava informações estatísticas em sofisticados artefatos de cordas chamados **quipos**: a uma corda principal eram amarradas várias cordas enfileiradas, cujos nós representavam quantidades relativas a bens materiais e humanos.

2 Formas de obtenção, organização e apresentação de dados

A professora Cláudia pretende fazer um estudo sobre a estatura, em centímetro, dos 30 alunos da turma B.

CLAUDIO CHIYO

Nesse estudo, os 30 alunos da turma B representarão a **população estatística**, isto é, o conjunto dos elementos que a professora Cláudia pretende pesquisar. Já a estatura dos alunos, em centímetro, representa a **variável**, ou seja, a característica observada nessa população.

Uma variável pode ser **quantitativa** (característica que pode ser medida) ou **qualitativa** (característica que não pode ser medida, atributo). Nesse exemplo, temos uma variável quantitativa.

Veja outros exemplos:

- cor dos olhos – variável qualitativa;
- idade – variável quantitativa;
- massa – variável quantitativa;
- tipo de cabelo – variável qualitativa.

Explique aos alunos que, em Estatística, a população não é necessariamente um grupo de pessoas. Pode ser, por exemplo, um grupo de animais, de objetos etc.

Quando uma pesquisa considera todos os elementos da população, como a feita pela professora Cláudia, ela é denominada **censo**. Mas nem sempre é possível pesquisar toda a população. Por exemplo, se a professora quisesse fazer a pesquisa com todos os alunos da escola, teria muito trabalho e o custo seria muito alto, sem contar o tempo que passaria organizando os dados. Nesses casos, podemos recorrer a uma **amostra**, isto é, a uma parte da população. Os resultados encontrados na amostra são estendidos à população.

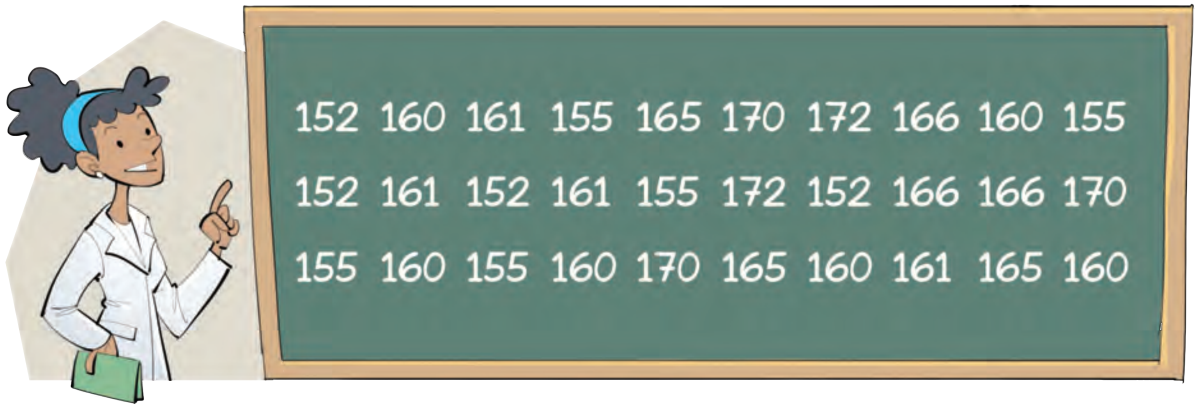
Para que isso seja possível, a amostra tem de ser **representativa**, ou seja, deve apresentar todas as características, quantitativas e qualitativas, da população que representa e também deve ser **imparcial**, isto é, ela deve integrar, igualitariamente, todos os elementos da população.

Existem várias técnicas para escolher uma amostra de forma a garantir que ela represente, da melhor maneira possível, a população da qual foi retirada. Esse assunto será estudado em anos posteriores.

Organização de dados

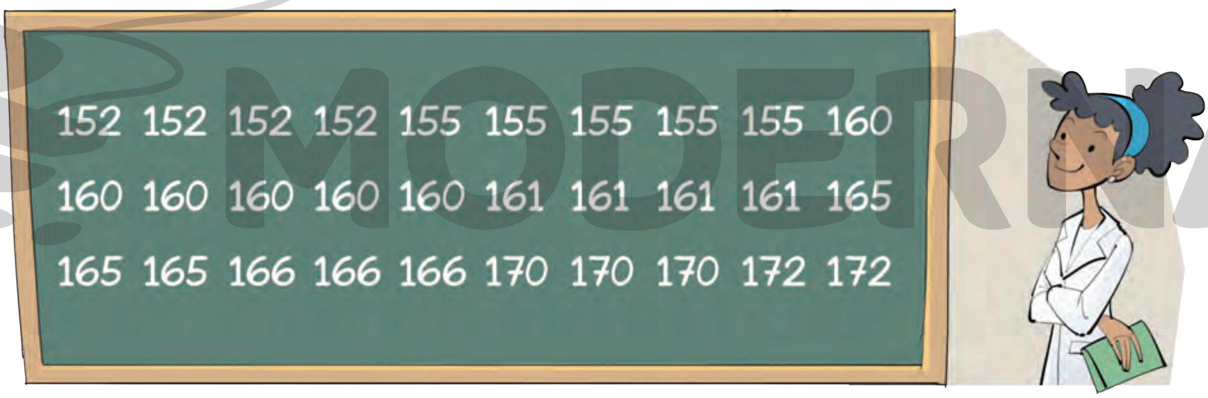
A coleta de dados pode ser feita de diversas maneiras. A professora Cláudia, por exemplo, poderia perguntar aos alunos ou consultar algum documento, mas optou por medi-los.

Ela anotou no quadro de giz as estaturas, em centímetro, dos 30 alunos à medida que as obteve. Veja como ficou.



CLAUDIO CHIYO

Os dados assim apresentados são denominados **dados brutos**. Essa apresentação não favorece a observação de regularidade ou de tendência nos dados; para isso, é conveniente organizá-los em forma de **rol**, ou seja, em ordem crescente ou decrescente.



CLAUDIO CHIYO

Com os dados em ordem, podemos facilmente verificar a **frequência absoluta** de cada estatura, ou seja, a quantidade de vezes que cada uma delas aparece no grupo de dados. Podemos, então, organizá-los em uma tabela, chamada **tabela de distribuição de frequências**.

Distribuição das estaturas dos alunos da turma B (em centímetro)								
Estatura	152	155	160	161	165	166	170	172
Frequência absoluta	4	5	6	4	3	3	3	2

Dados obtidos pela professora Cláudia.

Ao ler a tabela, chegamos a algumas conclusões:

- A estatura 152 cm tem frequência 4, isto é, 4 alunos têm 152 cm de altura.
- A estatura 170 cm tem frequência 3, isto é, 3 alunos têm 170 cm de altura.
- 15 alunos têm altura até 160 cm, pois 4 alunos têm 152 cm, 5 têm 155 cm e 6 têm 160 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 No caderno, classifique as variáveis em quantitativa ou qualitativa.

a) Salário. quantitativa

b) Gênero. qualitativa

c) Número de irmãos. quantitativa

d) Opinião sobre a qualidade da água. qualitativa

e) Número do sapato. quantitativa

f) Escolaridade. qualitativa

2 Dê dois exemplos de variáveis quantitativas e dois exemplos de variáveis qualitativas.
resposta pessoal

3 Em uma pesquisa referente à qualidade da coleta de lixo de determinado município, o instituto responsável escolheu uma amostra formada por moradores de um mesmo bairro. Analisando a situação apresentada, pode-se afirmar que as conclusões obtidas por essa pesquisa são significativas para todo o município? Justifique.

LÉO FANELLI

Não, pois a amostra não foi formada de maneira imparcial, pois se concentrou em um único bairro.

4 Um aluno do curso de Medicina registrou o batimento cardíaco por minuto dos colegas de classe. Observe os números que ele registrou:

75	85	76	85	77	88	78	77	79	77
80	92	85	90	88	78	90	85	92	79
92	90	75	76	76	78	78	76	78	77
90	92	76	90	78	76	76	85	90	80
92	90	75	80	76	78	77	76	85	88

construção de tabela

Com essas informações, construa uma tabela de distribuição de frequências e responda:

a) Quantos alunos participaram da pesquisa? 50 alunos

b) Qual foi o menor batimento por minuto apresentado? 75 batimentos por minuto

c) Quantos alunos apresentaram batimento superior a 79 por minuto? 24 alunos

d) Qual valor de batimento por minuto aparece com maior frequência? 76

5 Escolha uma variável quantitativa que possa ser pesquisada entre os colegas da classe. Faça a pesquisa, organize os dados em uma tabela de distribuição de frequências e, depois, apresente o resultado à turma. resposta pessoal

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

A tabela de distribuição de frequências ao lado refere-se às notas obtidas por todos os competidores em uma etapa classificatória para um torneio de saltos ornamentais.

a) Quantos atletas participaram da etapa classificatória? 40 atletas

b) Determine a porcentagem de atletas correspondente a cada nota.

c) Reproduza essa tabela acrescentando uma terceira linha para indicar as porcentagens. construção de tabela

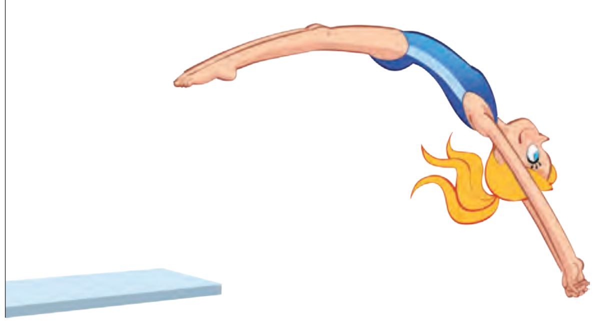
d) Supondo que a nota para aprovação nessa competição seja 5,0, qual é a porcentagem de atletas reprovados nessa etapa? 10%

b) 10% para 4,0; 25% para 5,0; 30% para 7,5; 20% para 8,0; 15% para 9,0

Distribuição das notas obtidas pelos competidores

Nota	4,0	5,0	7,5	8,0	9,0
Frequência	4	10	12	8	6

Dados obtidos pela organização do torneio.



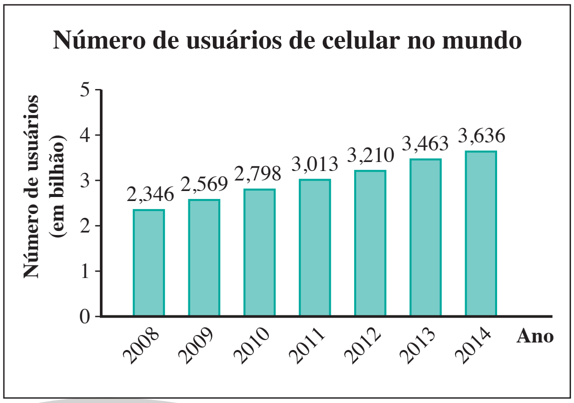
CLAUDIO CHIYO

Apresentação de resultados

Já aprendemos a interpretar e a organizar dados em **tabelas** e **gráficos estatísticos**. Essas representações são utilizadas tanto com o objetivo de organizar os dados obtidos em uma pesquisa para observar padrões comportamentos das variáveis como para comunicar os resultados encontrados.

Vamos relembrar algumas dessas representações.

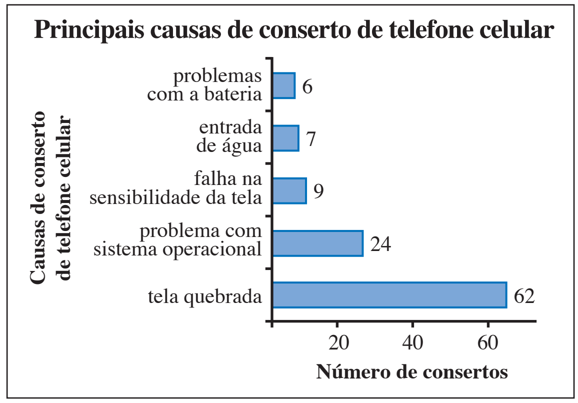
Gráfico de colunas



Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 20 maio 2015.

O gráfico de colunas é formado por retângulos de mesma largura, com a base em um eixo **horizontal** e alturas correspondentes a valores em um eixo **vertical**.

Gráfico de barras



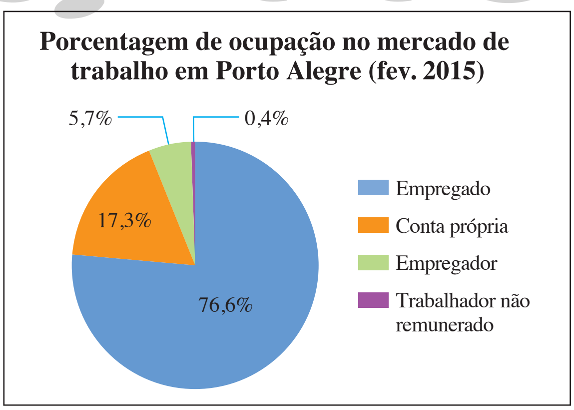
Dados obtidos em: <www.tecnologia.uol.com.br>. Acesso em: 20 maio 2015.

O gráfico de barras é parecido com o gráfico de colunas, só que a base dos retângulos que formam as barras fica apoiada no eixo **vertical** e os valores ficam no eixo **horizontal**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Tanto o gráfico de colunas quanto o de barras são muito utilizados pela facilidade nas construções e pela clareza na apresentação dos dados.

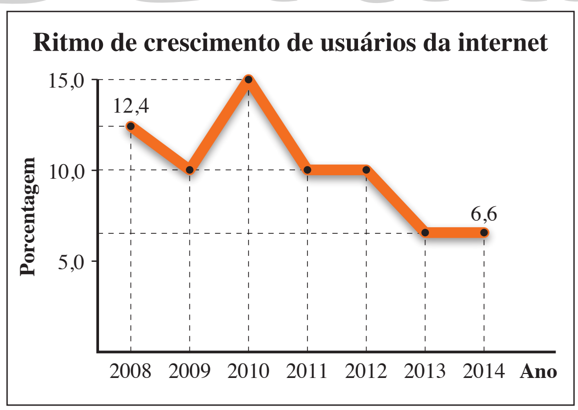
Gráfico de setores



Dados obtidos em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 7 abr. 2015.

No gráfico de setores, a frequência de cada dado estatístico é representada por um setor (uma "fatia") do círculo, cuja área é proporcional à frequência. Ele é usado quando se deseja relacionar os dados estatísticos entre si ou com o todo. Nesse tipo de gráfico, a soma das porcentagens correspondentes às fatias deve ser 100%.

Gráfico de linha

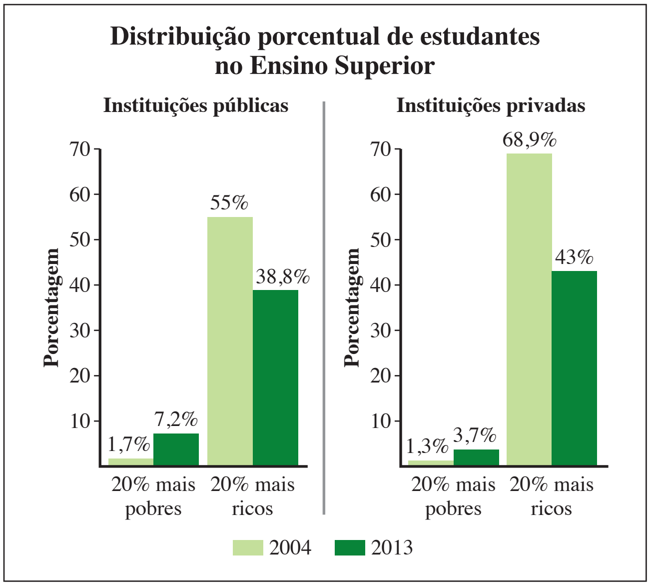


Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 20 maio 2015.

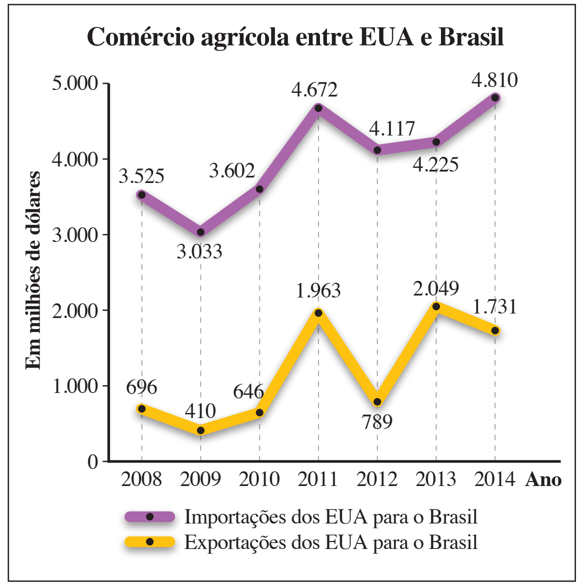
O gráfico de linha é usado principalmente para estudar um fenômeno no decorrer do tempo. Ele tem dois eixos: o **horizontal**, em que no exemplo acima foram anotados os intervalos de tempo; e o **vertical**, em que são marcadas frequências em determinada escala. Unindo os pontos obtidos no cruzamento das paralelas aos eixos pelos valores das variáveis, determinamos a linha do gráfico.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Gráficos de múltiplas entradas



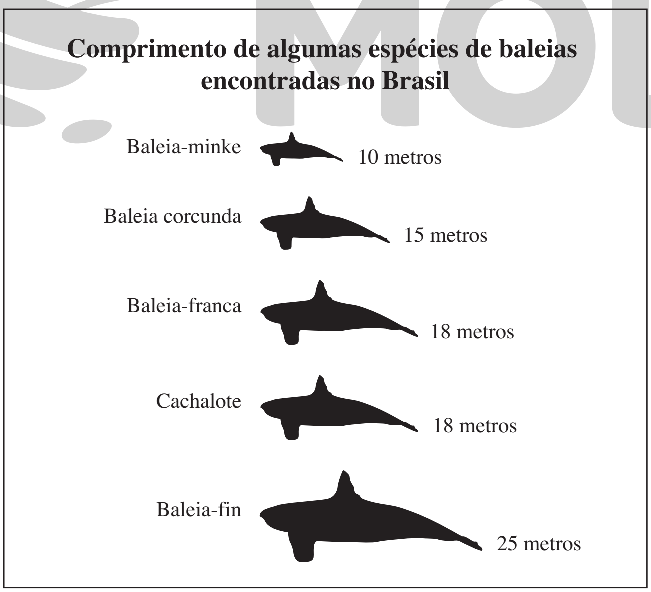
Dados obtidos em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 7 abr. 2015.



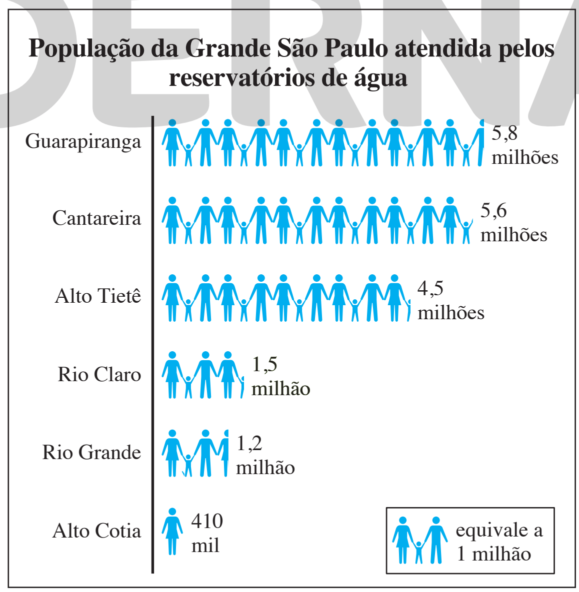
Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 19 fev. 2015.

Um gráfico de múltiplas entradas pode ser de linha, de colunas, de barras, entre outros tipos. Nele, representa-se uma mesma característica estudada para duas ou mais amostras, facilitando a comparação entre elas.

Pictograma



Dados obtidos em: <www.super.abril.com.br> Acesso em: 22 maio 2015.



Dados obtidos em: <www.g1.globo.com>. Acesso em: 10 maio 2015.

O pictograma é um gráfico constituído por desenhos relacionados ao tema. Em alguns casos, as frequências são representadas pela mesma figura em tamanhos proporcionais a essas frequências; às vezes, escolhe-se um ícone para representar determinada frequência. Esse tipo de gráfico é muito usado em revistas e jornais.

Cartograma

O cartograma é um mapa em que se representa, por meio de linhas e figuras, a ocorrência ou a intensidade de fenômenos como clima, distribuição de população, vegetação, conservação de solo etc.

É muito comum o uso de cartograma em revistas e jornais impressos, televisionados ou virtuais, para informar a previsão do tempo.

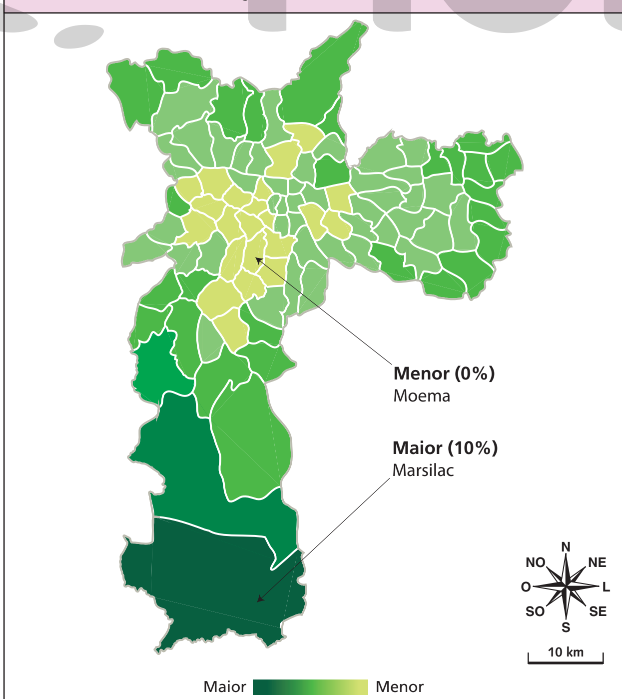
TEMPERATURA, EM °C, E CONDIÇÕES DO TEMPO NAS CAPITAIS EM 9 DE MARÇO DE 2015

Disponível em: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 9 mar. 2015.

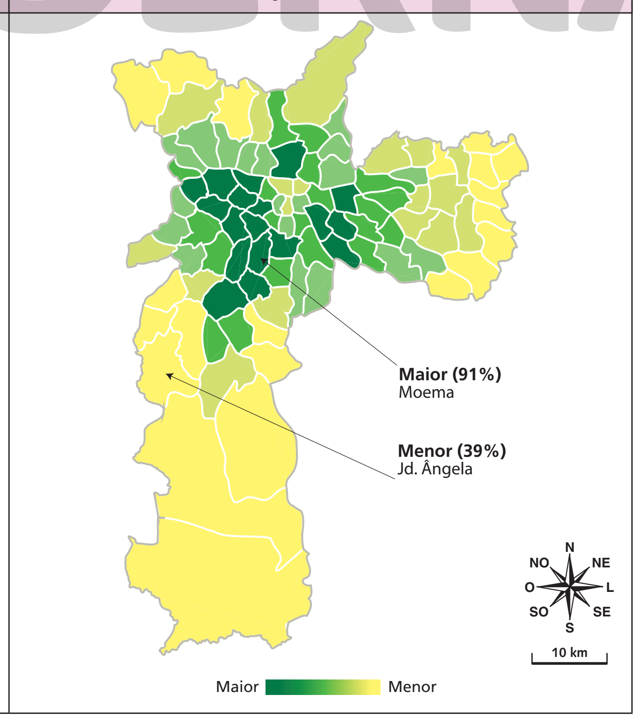
Os cartogramas também são usados para ilustrar e simplificar a comunicação de dados em reportagens e em estudos sobre determinadas variáveis características de um lugar.

Veja abaixo um estudo do perfil do município de São Paulo quanto a duas variáveis: proporção de analfabetos, com maior ocorrência nas periferias; e proporção de população branca, com maior ocorrência na região central e áreas consideradas nobres.

PROPORÇÃO DE ANALFABETOS



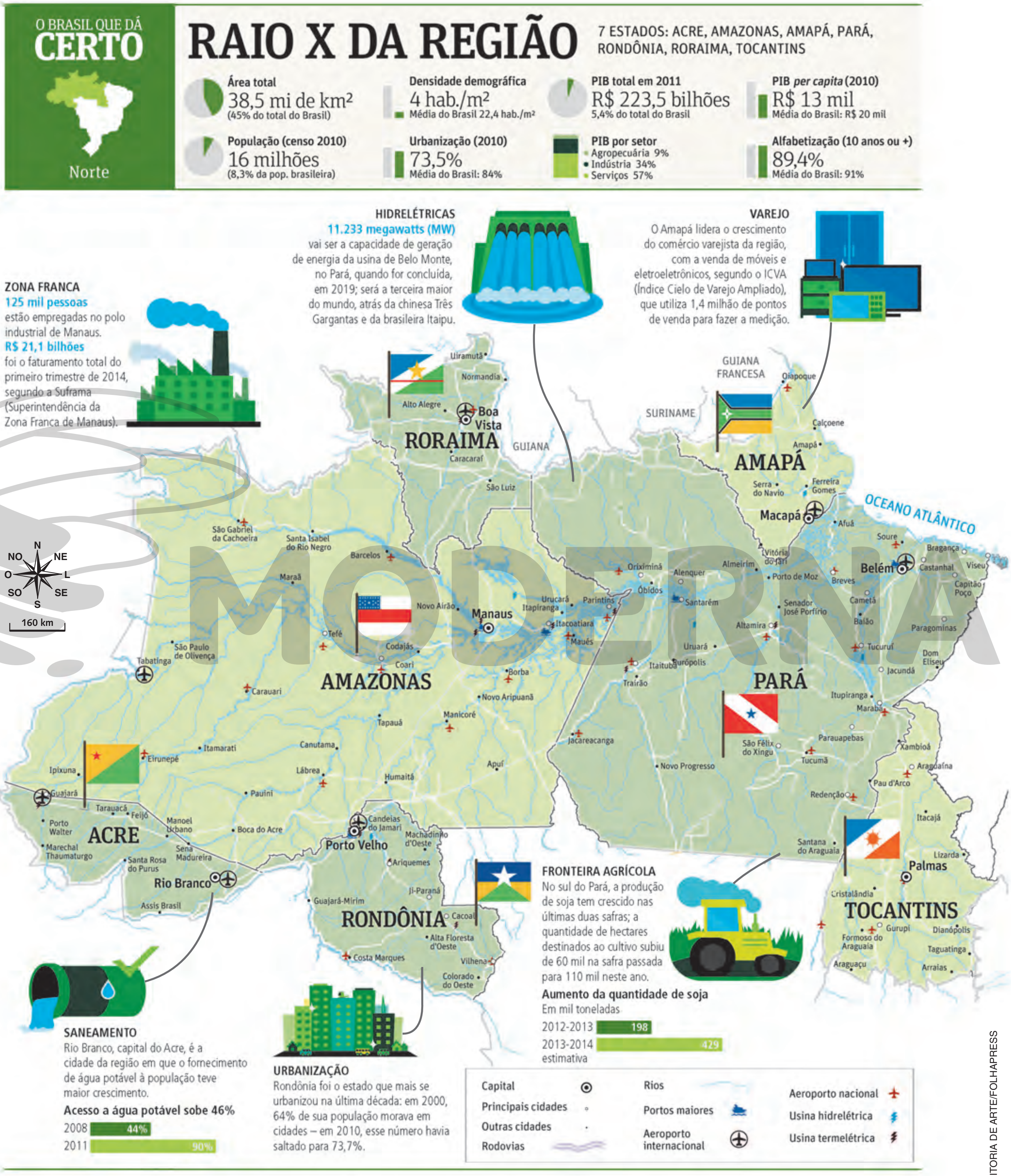
PROPORÇÃO DE BRANCOS



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 17 nov. 2011, p. C5.

Infográfico

O infográfico é usado para apresentar informações por meio de recursos diversos, como gráficos, textos, ilustrações, fotos, mapas etc. Atualmente, têm aparecido muitos infográficos em jornais, revistas e na internet.

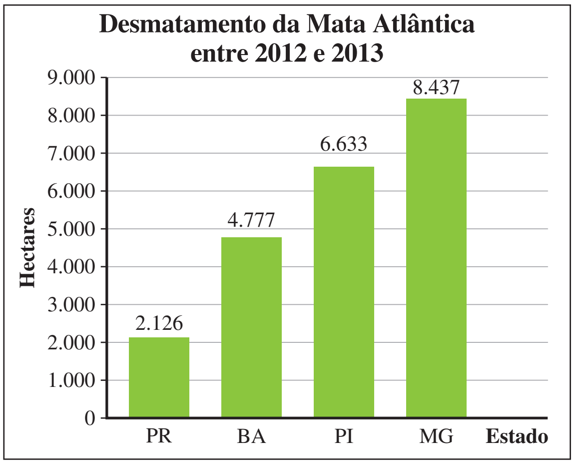


Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 8 jun. 2015.

EDITORIA DE ARTE/FOLHAPRESS

6 Observe o gráfico a seguir e responda:

ADILSON SECCO



Dados obtidos em: <www.sosma.org.br>. Acesso em: 8 abr. 2015.

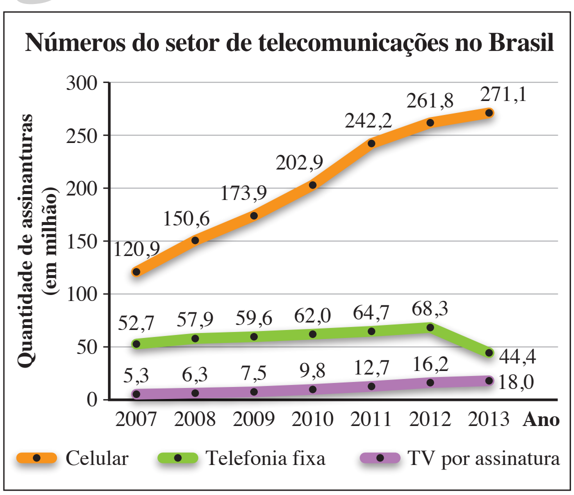
6. a) Paraná: 1.968; Bahia: 4.423; Piauí: 6.142; Minas Gerais: 7.812

a) Considere: 1 hectare = 10.000 m²; área de um campo de futebol = 10.800 m². O equivalente a quantos campos de futebol foi desmatado em cada estado, aproximadamente?

b) Construa um gráfico de barras com os dados obtidos no item **a**. construção de gráfico

7 O gráfico a seguir apresenta a evolução ao longo dos anos do número de linhas de telefonia fixa e móvel e do número de contratos de TV por assinatura no Brasil.

ADILSON SECCO



Dados obtidos em: <www.anatel.gov.br/portal> Acesso em: 10 maio 2015.

a) Calcule a porcentagem de crescimento ou redução de cada segmento, de 2007 a 2013, e responda qual deles teve a maior porcentagem de crescimento nesse período.

celular: crescimento de 124%; telefonia fixa: diminuição de 16%; TV por assinatura: crescimento de 240%; o que teve a maior porcentagem de crescimento foi TV por assinatura.

b) Houve redução da quantidade de assinantes de algum segmento mostrado? sim; telefonia fixa

c) Redija um texto que sintetize as informações apresentadas nesse gráfico. resposta pessoal

8 Observe o mapa e a tabela a seguir.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Fonte: IBGE, 2015.

Área das regiões brasileiras	
Regiões do Brasil	**Área (em milhões de km²)**
Norte	3,85
Nordeste	1,55
Sudeste	0,92
Sul	0,58
Centro-Oeste	1,60

Fonte: IBGE, 2015.

a) Construa um gráfico de colunas que apresente a área de cada região brasileira. construção de gráfico

b) Construa um gráfico de colunas que apresente a quantidade de estados de cada região brasileira. construção de gráfico

c) Qual região brasileira tem maior área? Norte

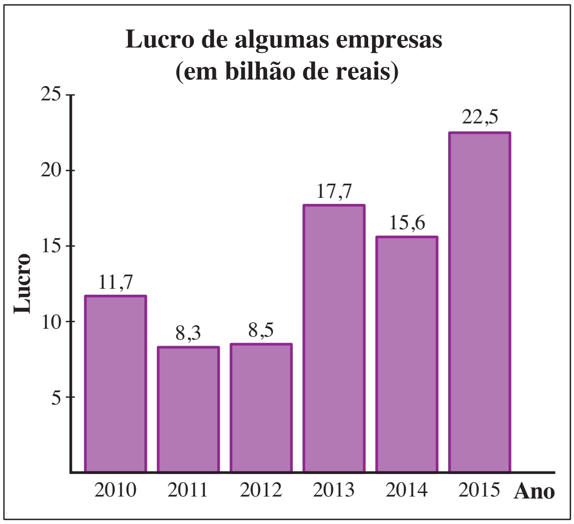
d) É correto afirmar que a região de maior área tem a maior quantidade de estados?

Não, pois a região Norte tem 7 estados e a região Nordeste tem 9 estados.

9 A consultoria Economática realizou uma pesquisa para verificar o lucro de algumas empresas brasileiras que possuem ações negociadas na bolsa de valores. Os dados obtidos foram registrados no gráfico de colunas a seguir.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

ADILSON SECCO



Dados obtidos pela Economática.

Agora, faça o que se pede.

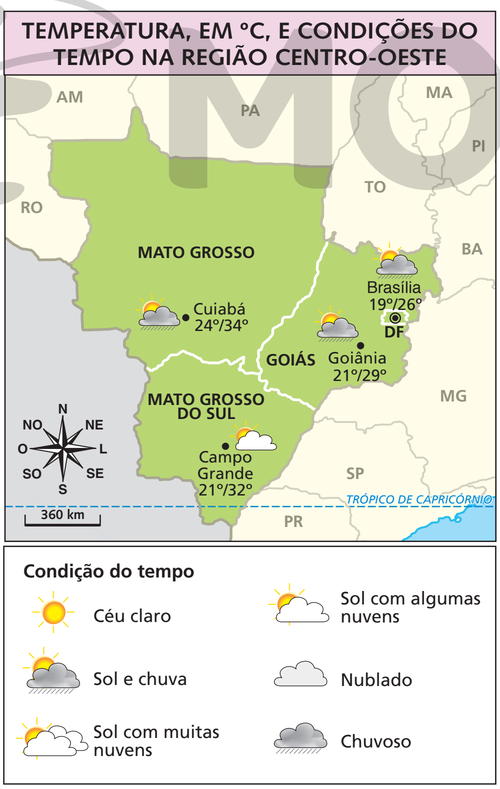
a) Construa um gráfico de linha com as informações do gráfico. construção de gráfico

b) Em que ano o lucro das empresas foi maior? 2015

c) O que é possível observar em relação ao lucro dessas empresas nesse período? Oscilou.

10 Veja no cartograma a previsão meteorológica para a região Centro-Oeste para o dia 10 de março de 2015.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL



Dados obtidos em: <www.climatempo.com.br>. Acesso em: 10 mar. 2015.

a) Para qual capital foi prevista a menor temperatura mínima? Brasília

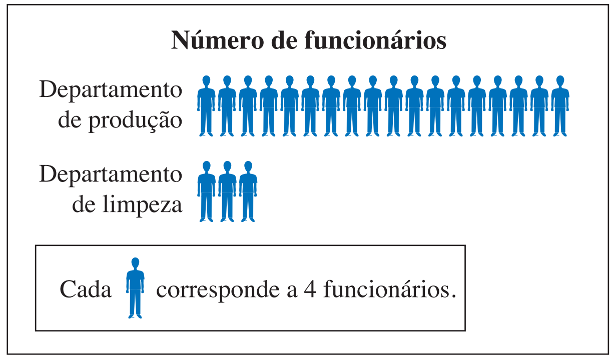
Brasília

b) E qual terá a menor temperatura máxima?

c) Qual foi a maior temperatura prevista? 34 °C

11 O pictograma abaixo mostra a quantidade de funcionários em dois setores da empresa Aquitem.

NELSON MATSUDA



Dados obtidos pela empresa Aquitem.

72 funcionários

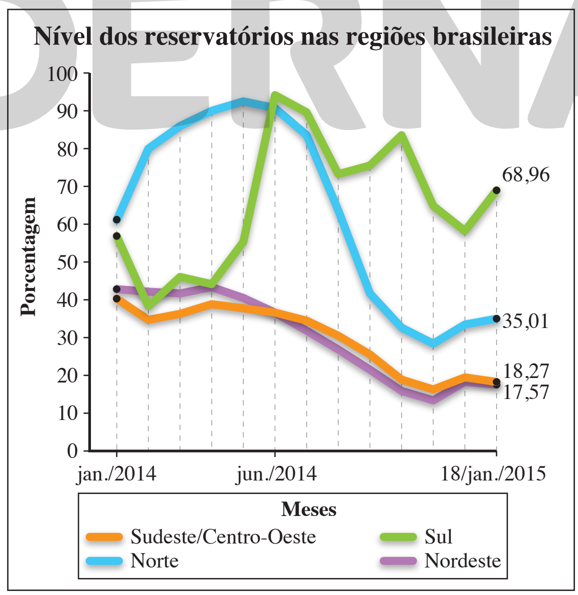
a) Quantos funcionários trabalham no departamento de produção dessa empresa?

b) Quantos funcionários trabalham no departamento de limpeza? 12 funcionários

c) É possível construir um gráfico de setores para essa situação? Não, pois não sabemos o número total de funcionários da empresa.

12 A crise hídrica atingiu diversas regiões do Brasil em 2014 e 2015. Veja a seguir o nível dos reservatórios, por região brasileira, medidos ao longo de 2014 até 18 de janeiro de 2015.

ADILSON SECCO



Dados obtidos em: <www.estadao.com.br>. Acesso em: 8 abr. 2015.

a) Não, no início do ano de 2014 os reservatórios atingiram níveis ainda menores.

a) Em dezembro, os reservatórios da região Sul atingiram o menor nível do ano?

b) Em 2014, qual região obteve o menor nível de seus reservatórios? Podemos afirmar que os reservatórios dessa região também apresentam o menor volume de água disponível?

nordeste; Não é possível afirmar que apresenta o menor volume, pois os gráficos indicam percentuais.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO i

Abordando um assunto com vários tipos de gráfico

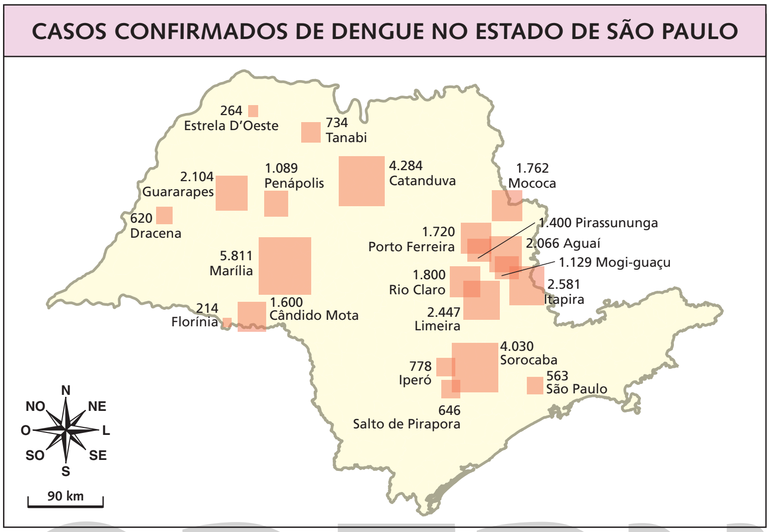
Há tempos que a dengue vem preocupando a população brasileira. Dados mostram que é necessário tomar todas as precauções para que essa doença não se dissemine ainda mais no Brasil. Veja a seguir os dados referentes a essa doença no estado de São Paulo, organizados em diferentes tipos de gráfico.

BSIP/ALAMY/GLOW IMAGENS

Fêmea do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue.

Cartograma

Esse cartograma mostra geograficamente o registro do número de casos confirmados da doença até 4 de março de 2015 em municípios do estado de São Paulo.

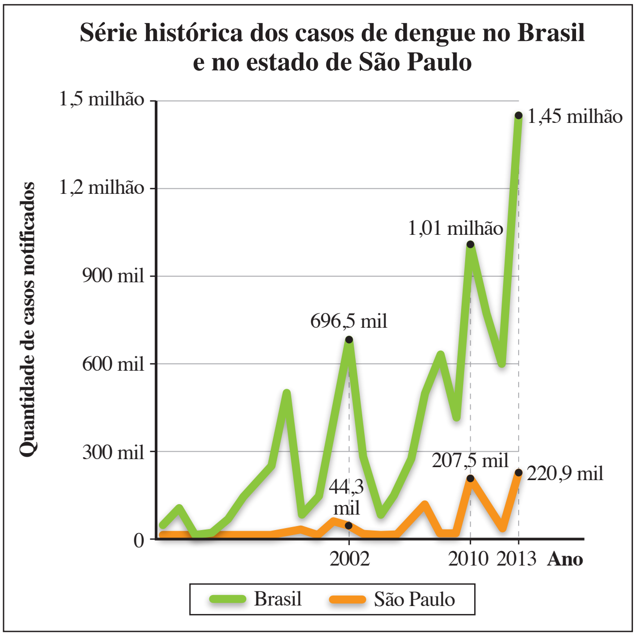


ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 5 mar. 2015.

Gráfico de linhas

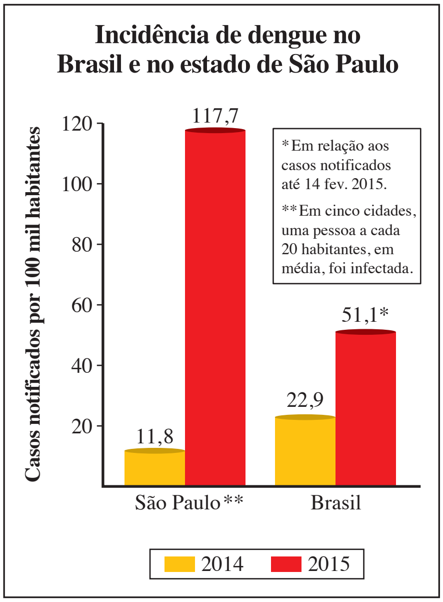
Um gráfico de linha é um bom instrumento para mostrar a evolução do número de casos de dengue nos últimos anos no estado de São Paulo e no Brasil.



Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 24 abr. 2015.

Gráfico de colunas

Em um gráfico de colunas, visualizamos a comparação da incidência da doença no estado de São Paulo e no Brasil em 2014 e em 2015.



Dados obtidos em: <www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 24 abr. 2015.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. respostas possíveis: política pública de prevenção insuficiente, política educativa para a população insuficiente e falta de conscientização da população etc.

1 A que é possível atribuir o aumento dos casos de dengue no Brasil de 2010 para 2013?

2 Considerando o ano de 2013, qual porcentagem do total de casos de dengue no Brasil corresponde ao estado de São Paulo? aproximadamente 15%

3 No gráfico de colunas é possível ler a seguinte informação: "Em cinco cidades, uma pessoa a cada 20 habitantes, em média, foi infectada". Qual a porcentagem da população dessas cidades que foi infectada? 5%

3 Frequência relativa

Para a festa de formatura do 9º ano do colégio Monte Alegre, a diretora elaborou uma pesquisa sobre o gênero musical preferido dos alunos de duas turmas. Na turma A há 26 alunos, e na B, 35 alunos. O resultado obtido na pesquisa foi organizado na tabela a seguir.

Gênero musical preferido entre os alunos do 9º ano

Gênero	Frequência absoluta: turma A	Frequência absoluta: turma B
Pagode	8	12
Axé	5	8
Rock	**10**	**10**
Sertanejo	**1**	**1**
Outros	2	4
Total de alunos	**26**	**35**

Dados obtidos pela diretoria do colégio Monte Alegre.


CLAUDIO CHIYO

Ao observar os resultados da tabela, é possível afirmar que os gêneros *rock* e sertanejo têm a mesma preferência nas duas turmas?

Apesar de os dois gêneros musicais apresentarem a mesma frequência absoluta (número de alunos) nas duas turmas, a preferência de cada tipo de música não é a mesma, pois as turmas não têm a mesma quantidade de alunos.

Vamos analisar os resultados em relação ao *rock*:

- na turma A temos 10 alunos em um total de 26 alunos;
- na turma B temos 10 alunos em um total de 35 alunos.

A mesma observação pode ser feita para o sertanejo:

- na turma A temos 1 aluno em um total de 26 alunos;
- na turma B temos 1 aluno em um total de 35 alunos.

Assim, percebemos que só é possível comparar a preferência de um gênero musical entre essas turmas se observarmos a **razão** entre o número de alunos que preferem esse gênero e o total de alunos da turma. Essa razão, em estatística, é chamada de **frequência relativa**.

A frequência relativa é dada por:

$$\frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total de elementos}}$$

Na turma A, vamos calcular a frequência relativa para cada um dos gêneros musicais. Veja:

- pagode: frequência relativa $= \frac{8}{26} \simeq 0{,}31$
- sertanejo: frequência relativa $= \frac{1}{26} \simeq 0{,}04$
- axé: frequência relativa $= \frac{5}{26} \simeq 0{,}19$
- outros: frequência relativa $= \frac{2}{26} \simeq 0{,}08$
- *rock*: frequência relativa $= \frac{10}{26} \simeq 0{,}38$

Agora, vamos fazer o mesmo para a turma B:

- pagode: frequência relativa $= \frac{12}{35} \simeq 0{,}34$
- sertanejo: frequência relativa $= \frac{1}{35} \simeq 0{,}03$
- axé: frequência relativa $= \frac{8}{35} \simeq 0{,}23$
- outros: frequência relativa $= \frac{4}{35} \simeq 0{,}11$
- *rock*: frequência relativa $= \frac{10}{35} \simeq 0{,}29$

Podemos, então, montar a seguinte tabela:

Gênero musical preferido entre os alunos do 9º ano

Gênero	Frequência relativa: turma A	Frequência relativa: turma B
Pagode	0,31	0,34
Axé	0,19	0,23
Rock	**0,38**	**0,29**
Sertanejo	**0,04**	**0,03**
Outros	0,08	0,11
Total	**1,00**	**1,00**

Dados obtidos pela diretora do colégio Monte Alegre.

A frequência relativa geralmente é apresentada na forma percentual. Organizando os dados dessa maneira, obtemos a seguinte tabela:

Gênero musical preferido entre os alunos do 9º ano

Gênero	Frequência relativa: turma A	Frequência relativa: turma B
Pagode	31%	34%
Axé	19%	23%
Rock	**38%**	**29%**
Sertanejo	**4%**	**3%**
Outros	8%	11%
Total	**100%**	**100%**

Dados obtidos pela diretora do colégio Monte Alegre.

Com base nos dados dessa tabela, notamos que, apesar de o *rock* apresentar a mesma frequência absoluta a frequência relativa para esse gênero musical não foi a mesma nas duas turmas. O mesmo acontece com o gênero sertanejo. Com isso, concluímos que a prefêrencia desses dois gêneros não é a mesma nas duas turmas.

16. a) Não. Apesar de as frequências absolutas de meninos e meninas que acessam por 4 horas a internet serem iguais, não há nessa turma o mesmo número de meninos e meninas. Então, o percentual de meninos e o de meninas em relação ao total são diferentes. A tabela de frequências percentuais mostra que o percentual de meninas ($\simeq$ 21%) que passam 4 horas na internet é maior que o de meninos ($\simeq$ 17%).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

13. c) É a frequência relativa na forma percentual das crianças nascidas com 3.190 gramas.

13 Na tabela abaixo estão as massas, em grama, de 50 crianças nascidas na maternidade Bem-Nascidos, em determinado período.

Massa, em grama, dos recém-nascidos

Massa	Frequência absoluta
2.560	7
2.680	7
2.780	10
2.850	12
2.980	6
3.190	8

Dados obtidos pela maternidade Bem-Nascidos.

a) Reproduza essa tabela e acrescente nela uma terceira coluna com a frequência relativa. construção de tabela

b) Qual é a porcentagem da massa que apresentou maior frequência? 24%

c) Observando a tabela que você construiu, qual é o significado dos 16%?

d) Considerando que a massa ideal de um recém-nascido seja maior que 2.900 g, o que podemos concluir com base nos dados dessa maternidade, nesse período?
resposta possível: Que apenas 28% dos recém-nascidos nasceram com massa ideal.

14 Em uma pesquisa para saber o tempo, em hora, que os jovens gastam ouvindo música durante um dia, obtiveram-se os seguintes resultados:

0,5	3,0	4,5	3,0	1,0
1,0	3,0	4,5	3,0	1,0
1,0	4,0	4,0	3,0	4,0
4,0	4,5	0,5	3,0	4,0

a) Construa uma tabela de distribuição de frequência para essa situação, apresentando a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

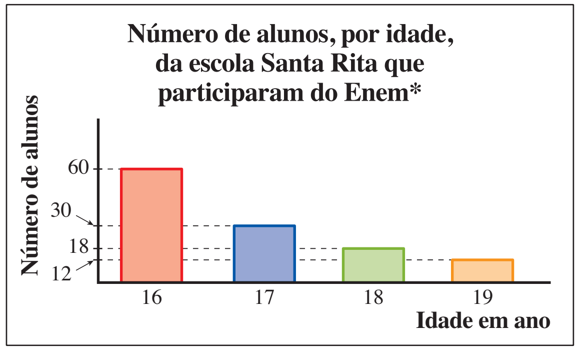
b) Qual é a frequência absoluta dos jovens que gastam mais de 3 horas ouvindo música durante um dia? 8

c) Determine a frequência relativa dos jovens que gastam 3 horas ouvindo música durante um dia. 30%

d) Analisando a tabela de distribuição de frequências construída, o que representam os 25%? É a frequência relativa dos jovens que gastam 4 horas ouvindo música durante um dia.

e) Podemos afirmar que mais de 50% dos jovens passam mais de 3 horas por dia ouvindo música? Justifique sua resposta.
Não, pois os jovens que passam mais de 3 horas por dia ouvindo música representam 40% do total dos jovens consultados.

15 Com base no gráfico abaixo, resolva:



ADILSON SECCO

Dados obtidos pela escola Santa Rita.
* Enem: Exame Nacional do Ensino Médio.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências com a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Qual é a frequência relativa dos participantes do Enem com 18 anos na escola Santa Rita? 15%

c) Qual é a porcentagem de participantes com idade superior a 17 anos? 25%

d) O que é possível perceber, em relação à participação no Enem, à medida que a idade dos alunos aumenta? A participação diminui.

16 A tabela abaixo mostra o tempo, em hora, que os meninos e as meninas do 9º ano do colégio Alegria acessam a internet semanalmente:

Tempo, semanal, de acesso a internet

Tempo	Frequência absoluta: meninos	Frequência absoluta: meninas
Até 1 hora	7	0
2 horas	9	9
3 horas	6	6
4 horas	5	5
5 horas	3	4
Total	**30**	**24**

Dados obtidos pelo colégio Alegria.

a) De acordo com os dados da tabela, é possível afirmar que, entre os alunos do 9º ano, o percentual de meninos e o percentual de meninas que acessam a internet por 4 horas semanalmente são iguais? Justifique.

b) Construa a tabela de frequências relativas na forma percentual e verifique se sua resposta do item **a** está correta. construção de tabela

4 Medidas de tendência central ou medidas-resumo

Já aprendemos vários recursos e técnicas estatísticas para a descrição do grupo de valores que uma variável pode assumir. Observamos que as organizações de dados em tabelas de frequências e gráficos podem fornecer informações sobre o comportamento de uma variável, permitindo a verificação de tendências e padrões. Porém, às vezes, precisamos resumir ainda mais um conjunto de dados para expressar determinada característica da população pesquisada.

Medidas de tendência central são medidas que podem resumir um conjunto de dados a um só valor, numérico ou não, que seja representativo de todos os dados.

Vamos estudar as três medidas de tendência central: **moda**, **média** e **mediana**.

Moda

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Para uma gincana, o professor Renato pesquisou a estatura, em metro, dos alunos da escola Porto Feliz. Veja a tabela abaixo com a distribuição das frequências absolutas dos dados coletados.

Distribuição das estaturas dos alunos

Estatura (em metro)	1,50	1,55	1,56	1,58	1,60	1,62	1,68	1,70	1,72	1,75
Frequência absoluta	10	15	22	23	25	35	12	10	5	3

Dados obtidos pelo professor Renato.

Observe que nessa tabela a estatura que apresenta a maior frequência (35) é 1,62 m. Então, dizemos que **1,62 m** é a **moda** desse conjunto de dados.

Tendo como referência o mesmo grupo de alunos, o professor construiu uma tabela de distribuição das frequências absolutas das idades dos alunos.

Distribuição das idades dos alunos

Idade (em ano)	10	11	12	13	14	15
Frequência absoluta	11	34	34	32	31	18

Dados obtidos pelo professor Renato.

CLAUDIO CHIYO

Na tabela, as idades que apresentam a maior frequência (34) são 11 e 12 anos. Então, dizemos que nesse conjunto de dados existem **duas modas** (**bimodal**): **11 anos** e **12 anos**.

> **Moda** é o valor ou valores, numéricos ou não, que se destacam por apresentarem a maior frequência absoluta em um conjunto de dados.

Professor, explique aos alunos que os valores podem ser não numéricos quando, por exemplo, o conjunto de dados pesquisados é referente à cor de preferência, ao time de futebol para o qual torce, ao esporte que pratica, ao bairro em que mora etc.

Situação 2

Na tabela a seguir, temos o resultado de uma pesquisa realizada com 2.000 clientes de uma empresa de TV por assinatura para conhecer melhor a preferência dos telespectadores em relação a alguns canais.

CLAUDIO CHIYO

Preferência dos telespectadores de alguns canais de TV						
Canal de TV	Canal X	Canal Y	Canal Z	Canal K	Canal W	**Total**
Frequência absoluta: telespectadores	420	600	500	280	200	**2.000**

Dados obtidos pela empresa de TV por assinatura Mundial.

Com base nessa tabela percebemos que o canal de TV que apresenta maior frequência, 600 telespectadores, é o canal Y. Podemos dizer, então, que esse canal é a moda desse conjunto de dados.

OBSERVAÇÃO

- Quando todos os valores de uma pesquisa tiverem a mesma frequência, dizemos que não há moda ou que o conjunto de dados é **amodal**.

  Por exemplo:

  Quantidade de alunos que usaram o transporte público nos 6 últimos meses: 700, 700, 700, 700, 700, 700.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Para avaliar a qualidade das lâmpadas produzidas por uma empresa, uma equipe técnica separou uma amostra com 20 lâmpadas e registrou sua vida útil, em dia:

15	10	12
14	10	12
12	12	12
13	13	14
14	10	15
14	15	12
15	10	

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências absolutas para essa situação. construção de tabela

b) Determine a moda dessa distribuição de frequências. 12 dias

18 Em uma pesquisa sobre as preferências esportivas de 1.500 pessoas, chegou-se à seguinte tabela:

Esporte preferido	Frequência absoluta
natação	250
basquete	150
futebol	350
voleibol	250
tênis	210
judô	290

Dados obtidos pelos entrevistadores.

Podemos dizer que, entre os pesquisados, o esporte da moda é o futebol? Justifique.

Sim, pois a moda é o futebol, que tem a maior frequência absoluta.

19 Faça uma pesquisa com os colegas da classe e descubra qual é o esporte da moda entre vocês.

resposta pessoal

Média aritmética

Vamos relembrar como calcular a média de um conjunto de dados. Acompanhe a situação a seguir.

Alexandre, o professor de História, avisou aos alunos que a média bimestral seria calculada conforme o seguinte critério: adicionam-se as notas obtidas no projeto individual na prova e no trabalho em grupo e o resultado obtido é dividido por 3.

Laura é aluna de Alexandre e calculou sua média bimestral desta maneira:

$$\text{média} = \frac{\underset{\text{projeto individual}}{5{,}0} + \underset{\text{prova}}{6{,}5} + \underset{\text{trabalho em grupo}}{9{,}5}}{3} = \frac{21}{3} = 7{,}0$$

Pergunte aos alunos o que mudaria no cálculo da média caso tivesse alteração em alguma nota e/ou na quantidade de notas. Sugira nota 5 para uma quarta avaliação.

Portanto, nesse bimestre, Laura obteve média 7,0.

A **média aritmética**, ou simplesmente média, das notas de Laura é 7,0. Analisando o cálculo, é como se Laura tivesse obtido notas 7,0 em todas essas avaliações.

Portanto, para calcular a média aritmética de dois ou mais números, basta dividir a soma desses números pela quantidade de números dados.

Média aritmética ponderada

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

A prefeitura de um município brasileiro promoveu um concurso público para o preenchimento de algumas vagas. Cada candidato realizou, na 1ª etapa do concurso, três provas: Matemática, Língua Portuguesa e Conhecimentos Gerais.

A média mínima para passar para a 2ª etapa do concurso era 6,0.

Observe o critério para o cálculo da média dos candidatos:

- prova de Matemática, peso **4**;
- prova de Língua Portuguesa, peso **3**;
- prova de Conhecimentos Gerais, peso **3**.

Fernando era um dos candidatos. Assim que as notas foram publicadas no Diário Oficial do Município, ele resolveu conferir sua média.

Notas das provas de Fernando

Matemática: 7,5

Língua Portuguesa: 5,0

Conhecimentos Gerais: 6,0

Média obtida por Fernando

Como os pesos das provas são diferentes, para calcular sua média, Fernando precisou multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso e, então, somar todos os resultados obtidos. Em seguida, dividiu o resultado pela soma de todos os pesos.

Veja como ele fez:

$$\frac{\mathbf{4} \times 7{,}5 + \mathbf{3} \times 5{,}0 + \mathbf{3} \times 6{,}0}{\mathbf{4} + \mathbf{3} + \mathbf{3}} = \frac{30 + 15 + 18}{10} = \frac{63}{10} = 6{,}3$$

Dessa forma, Fernando confirmou que sua média foi 6,3 e, portanto, passou para a 2ª etapa do concurso público da prefeitura. Pergunte aos alunos o que mudaria no cálculo da média caso tivesse alteração no peso de alguma nota. Sugira que a prova de Língua Portuguesa tivesse peso 4.

Situação 2

Durante o último mês, o número de atendimentos diários de uma clínica radiológica foi:

16	18	19	19	16
19	20	19	18	19
17	17	16	18	18
20	20	18	16	17


CHAMELEONSEYE/SHUTTERSTOCK

Para determinar a média diária de atendimentos feitos nessa clínica, podemos verificar a quantidade de atendimentos diários e calcular a média. Veja:

- 16 aparece **4** vezes
- 18 aparece **5** vezes
- 20 aparece **3** vezes
- 17 aparece **3** vezes
- 19 aparece **5** vezes

Então:

$$\text{média} = \frac{\mathbf{4} \times 16 + \mathbf{3} \times 17 + \mathbf{5} \times 18 + \mathbf{5} \times 19 + \mathbf{3} \times 20}{\mathbf{4} + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \mathbf{5} + \mathbf{3}} = \frac{64 + 51 + 90 + 95 + 60}{20} = \frac{360}{20} = 18$$

Logo, a média diária de atendimentos feitos nessa clínica radiológica foi 18.

Observe que, tanto na situação do concurso público quanto na situação da clínica radiológica, foi necessário considerar o peso de cada dado para calcularmos a média. Por esse motivo, ela é chamada de **média aritmética ponderada**. Note que, depois de multiplicar cada dado pelo seu peso e somar os resultados obtidos, devemos dividir o total pela soma dos pesos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20 Observe nas tabelas abaixo a altura de alguns atletas que participaram da Copa do Mundo de futebol em 2014.

Os atletas mais baixos			
Nome	**Posição**	**Seleção**	**Altura**
Marvin Chávez	meia	Honduras	1,56 m
Salli	meia	Camarões	1,63 m
Insigne	atacante	Itália	1,63 m

Os atletas mais altos			
Nome	**Posição**	**Seleção**	**Altura**
Forster	goleiro	Inglaterra	2,01 m
Lee Bum-Young	goleiro	Coreia do Sul	1,99 m
Courtois	goleiro	Bélgica	1,98 m
Begovic	goleiro	Bósnia	1,98 m
Fejzic	goleiro	Bósnia	1,98 m
Mertesacker	zagueiro	Alemanha	1,98 m

Fonte: Abril na Copa, revista *Placar*, jul. 2014.

Qual é a altura média:

a) entre os jogadores mais baixos da lista?
b) entre os jogadores mais altos da lista?
c) entre todos os jogadores dessa lista?

a) aproximadamente 1,61 m
b) aproximadamente 1,99 m
c) 1,86 m

21 Num concurso, a prova escrita tem peso 3 e a prova prática tem peso 2. Qual é a média de um candidato que obteve nota 8 na prova escrita e nota 5 na prova prática? 6,8

22 Catarina é professora de Matemática. Ela obtém a média bimestral dos alunos propondo três atividades durante o bimestre: a nota da primeira atividade tem peso 1, a da segunda tem peso 2 e a da terceira tem peso 3. Calcule a média bimestral de um aluno de Catarina que obteve 4,0 na primeira atividade, 7,0 na segunda e 8,0 na terceira. 7,0

23 No primeiro trimestre do ano, uma concessionária de automóveis vendeu o número de veículos indicado no quadro:

Janeiro	38	Fevereiro	22	Março	42

a) Qual foi o número médio de automóveis vendidos nesse trimestre? 34

b) Quantos carros foram vendidos acima da média em março? 8 carros

c) Tomando como base os três primeiros meses, faça uma estimativa de quantos automóveis devem ser vendidos no primeiro semestre do ano. 204 automóveis

d) Mostre duas formas diferentes de chegar ao resultado do item anterior.
38 + 22 + 42 + 34 + 34 + 34 ou 34 · 6

24 Uma imobiliária vendeu 5 terrenos a R$ 48.000,00 cada um e 10 terrenos a R$ 45.000,00 cada um. Qual foi o valor médio dos terrenos vendidos pela imobiliária? R$ 46.000,00

25 O salário mensal, em real, de cada um dos 10 funcionários de uma microempresa é:

1.200	1.320	1.200	1.050	1.200
1.320	1.320	1.050	1.780	4.970

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências para essa situação. construção de tabela

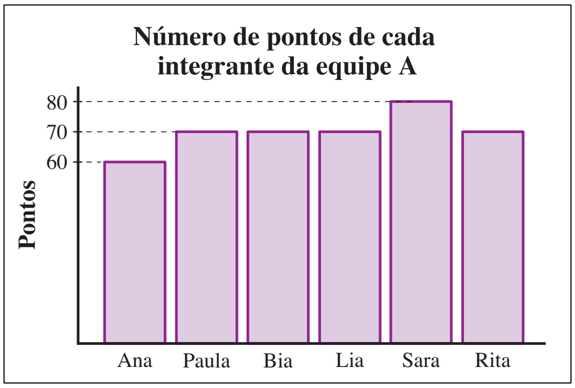
b) Determine o salário modal (moda) desses funcionários. 1.200 reais e 1.320 reais

c) Calcule o salário mensal médio desses funcionários. 1.641 reais

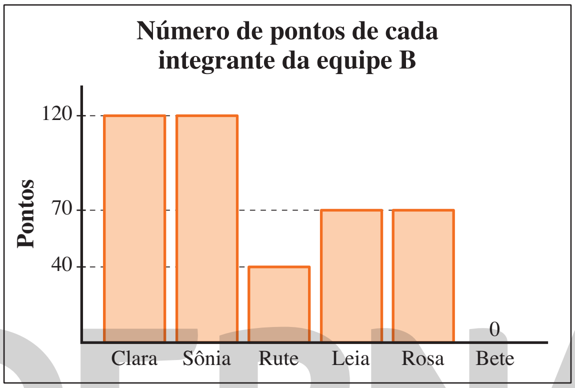
d) Quantos funcionários recebem salário mensal menor que o salário mensal médio? Que porcentagem do total de funcionários eles representam? 8 funcionários; 80%

e) Discuta com um colega como é possível que o salário médio dos funcionários dessa empresa seja maior que o salário da maioria dos funcionários. Espera-se que os alunos percebam que o fato de haver um salário bem maior que os outros faz o salário médio aumentar.

26 Os gráficos abaixo representam pontos, de 0 a 100, que cada integrante das equipes **A** e **B** obteve na final da competição de saltos ornamentais promovida pelo Clube Esportista.



Dados obtidos pelo Clube Esportista.



Dados obtidos pelo Clube Esportista.

equipe **A**: 420 pontos; equipe **B**: 420 pontos

a) Quantos pontos cada equipe obteve?

6 integrantes

b) Quantos integrantes tem cada equipe?

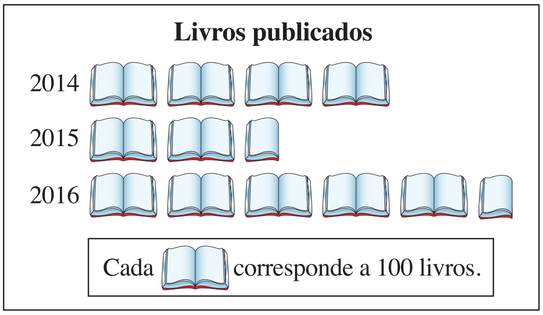
c) Calcule a média de pontos de cada equipe.

d) Qual equipe obteve maior média?

e) Nesse caso, a média aritmética traduz o perfil de cada equipe? Justifique.

26. c) equipe **A**: 70 pontos; equipe **B**: 70 pontos
d) As duas obtiveram médias iguais.

27 A editora Lampejo apresentou a quantidade de livros publicados no período de 2014 a 2016 em um gráfico:



Dados obtidos pela editora Lampejo.

Calcule a média anual de livros produzidos pela editora Lampejo nesse período. 400 livros

26. e) Não, pois, no caso da equipe **B**, a média 70 não deixa claro que Rute, Leia, Rosa e, principalmente, Bete deveriam treinar mais.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

28 Após todas as partidas de futebol da Copa do Mundo de futebol de 2014, realizada no Brasil, foi feito um levantamento do público que foi aos estádios. Veja esses números.

Público na Copa

Arena da Amazônia

Jogo	Público
Inglaterra 1 × 2 Itália	39.800
Camarões 0 × 4 Croácia	39.982
EUA 2 × 2 Portugal	40.123
Honduras 0 × 3 Suíça	40.322
Média	40.057

Arena da Baixada

Jogo	Público
Irã 0 × 0 Nigéria	39.081
Honduras 1 × 2 Equador	39.224
Austrália 0 × 3 Espanha	39.375
Argélia 1 × 1 Rússia	39.311
Média	39.248

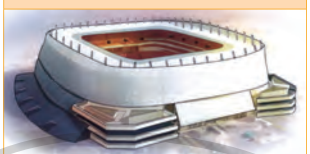
Arena das Dunas

Jogo	Público
México 1 × 0 Camarões	39.216
Gana 1 × 2 EUA	39.760
Japão 0 × 0 Grécia	39.485
Itália 0 × 1 Uruguai	39.706
Média	39.542

Arena Pantanal

Jogo	Público
Chile 3 × 1 Austrália	40.275
Rússia 1 × 1 C. do Sul	37.603
Nigéria 1 × 0 Bósnia	40.499
Japão 1 × 4 Colômbia	40.340
Média	39.679

Arena Pernambuco



Jogo	Público
C. do Marfim 2 × 1 Japão	40.267
Itália 0 × 1 Costa Rica	40.285
Croácia 1 × 3 México	41.212
EUA 0 × 1 Alemanha	41.876
Costa Rica 1 × 1 Grécia	41.242
Média	40.976

Beira-Rio

Jogo	Público
França 3 × 0 Honduras	43.012
Austrália 2 × 3 Holanda	42.877
C. do Sul 2 × 4 Argélia	42.732
Nigéria 2 × 3 Argentina	43.285
Alemanha 2 × 1 Argélia	43.063
Média	42.994

Castelão

Jogo	Público
Uruguai 1 × 3 Costa Rica	58.679
Brasil 0 × 0 México	60.342
Alemanha 2 × 2 Gana	59.621
Grécia 2 × 1 C. do Marfim	59.095
Holanda 2 × 1 México	58.817
Brasil 2 × 1 Colômbia	60.342
Média	59.483

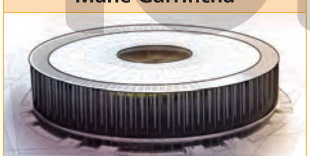
Fonte Nova

Jogo	Público
Espanha 1 × 5 Holanda	48.173
Alemanha 4 × 0 Portugal	51.081
Suíça 2 × 5 França	51.003
Bósnia 3 × 1 Irã	48.011
Bélgica 2 × 1 EUA	51.227
Holanda 0 × 0 Costa Rica	51.179
Média	50.112

Itaquerão

Jogo	Público
Brasil 3 × 1 Croácia	62.103
Uruguai 2 × 1 Inglaterra	62.575
Holanda 2 × 0 Chile	62.996
C. do Sul 0 × 1 Bélgica	61.397
Argentina1 × 0 Suíça	63.255
Holanda 0 × 0 Argentina	63.267
Média	62.593

Mané Garrincha



Jogo	Público
Suíça 2 × 1 Equador	68.351
Colômbia 2 × 1 C. do Marfim	68.748
Camarões 1 × 4 Brasil	69.112
Portugal 2 × 1 Gana	67.540
França 2 × 0 Nigéria	67.882
Argentina 1 × 0 Bélgica	68.551
Brasil 0 × 3 Holanda	68.034
Média	68.316

Maracanã

Jogo	Público
Argentina 2 × 1 Bósnia	74.738
Espanha 0 × 2 Chile	74.101
Bélgica 1 × 0 Rússia	73.819
Equador 0 × 0 França	73.749
Colômbia 2 × 0 Uruguai	73.804
França 0 × 1 Alemanha	74.240
Alemanha 1 × 0 Argentina	74.738
Média	74.169

Mineirão

Jogo	Público
Colômbia 3 × 0 Grécia	57.174
Bélgica 2 × 1 Argélia	56.800
Argentina 1 × 0 Irã	57.698
C. Rica 0 × 0 Inglaterra	57.823
Brasil 1 × 1 Chile	57.714
Brasil 1 × 7 Alemanha	58.141
Média	57.558

Dados obtidos em: <www.pe.superesportes.com.br> Acesso em: 13 abr. 2015.

ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA

a) Faça um gráfico de barras comparando a média de público por estádio. Qual estádio teve a maior média de público? E qual teve a menor? construção de gráfico; maior: Maracanã (74.169); menor: Arena da Baixada (39.248)

b) Escolha quatro estádios e faça um gráfico de colunas duplo comparando o jogo de maior com o de menor público. construção de gráfico

c) Calcule a média de público em jogos do Brasil durante essa Copa do Mundo. Quantos jogos da seleção brasileira tiveram público maior que a média que você acabou de calcular? Quais?
62.255 pessoas em média; dois jogos: Brasil × Holanda (68.034) e Camarões × Brasil (69.112)

Mediana

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Em uma turma, as 7 melhores notas referentes à avaliação de Língua Portuguesa foram: 8,0; 9,5; 7,0; 7,5; 7,0; 9,0; 6,5.

Vamos colocar essas notas em ordem crescente para encontrar a mediana desse conjunto de dados:

6,5 7,0 7,0 7,5 8,0 9,0 9,5

Observe que esse grupo de notas é formado por 7 termos que ocupam 7 posições:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição	6ª posição	7ª posição
6,5	**7,0**	**7,0**	**7,5**	**8,0**	**9,0**	**9,5**
3 termos			**termo central**	**3 termos**		

Como o grupo pesquisado é formado por uma **quantidade ímpar** de termos, podemos assinalar o **termo central**, que divide o grupo em duas partes com a mesma quantidade de termos.

Na situação apresentada, o termo central ocupa a 4ª posição ordinal, crescente, que corresponde à nota 7,5. Então, dizemos que 7,5 é a **mediana** do grupo pesquisado.

Situação 2

A seleção brasileira masculina de basquete que disputou a Copa do Mundo de 2014 na Espanha era composta por 12 atletas, cujas alturas, em centímetros, são as seguintes: 192, 204, 208, 185, 192, 191, 200, 207, 211, 184, 211 e 211.

Para encontrar a mediana das alturas, primeiro vamos colocar esse conjunto de dados em ordem crescente:


SERGIO LOPEZ/BPI/DPPI/AFP

Equipe completa de basquete masculino no Mundial FIBA 2014 em Granada, Espanha. (Foto de 2014.)

184 185 191 192 192 200 204 207 208 211 211 211

Veja que o grupo das alturas dos atletas da seleção brasileira masculina de basquete é formado por 12 termos que ocupam 12 posições:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição	6ª posição	7ª posição	8ª posição	9ª posição	10ª posição	11ª posição	12ª posição
184	**185**	**191**	**192**	**192**	**200**	**204**	**207**	**208**	**211**	**211**	**211**
5 termos					**termos centrais**		**5 termos**				

Como o grupo pesquisado é formado por uma **quantidade par** de termos, existem **dois termos centrais**.

Na situação apresentada, os termos centrais ocupam a 6ª posição e a 7ª posição ordinais, crescentes.

Assim, para obter a **mediana**, precisamos **calcular a média aritmética** desses **dois termos centrais**:

termo da 6ª posição — **termo da 7ª posição**

$$\text{média aritmética} = \frac{200 + 204}{2} = \frac{404}{2} = 202$$

Logo, a altura 202 cm é a **mediana**.

Mediana de um grupo de valores ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o termo que ocupa a posição central (quantidade ímpar de termos) ou é o valor obtido pela média aritmética de seus dois termos centrais (quantidade par de termos).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

29 Nos últimos 5 dias Jair gastou, em real, as quantias abaixo:

25,00 32,00 18,00 40,00 20,00

Determine o gasto mediano (mediana) que Jair teve nesses 5 dias. R$ 25,00

30 Esta é a relação do salário mensal, em real, de 10 funcionários de uma empresa:

1.624,00	1.824,00	1.822,00
1.624,00	1.378,00	1.600,00
1.378,00	1.224,00	1.258,00
1.378,00		

Determine o salário mediano (mediana) desses funcionários. R$ 1.489,00

31 Marta registrou o tempo, em minuto, que seus colegas gastam no percurso de casa à escola:

10	120	15	20	30	30	25
60	40	40	50	30	20	15
35	35	20	60	90	90	15

Determine:

a) a mediana desses valores; 30 min

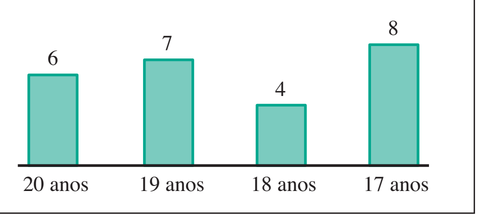
b) a moda desses valores; 15 min, 20 min e 30 min

c) o tempo médio desse percurso; 40 min

d) a medida que, na sua opinião, caracteriza melhor esse grupo de dados. Justifique. resposta pessoal

32 Observe o gráfico a seguir.

Idade dos jovens residentes no Edifício Novo Horizonte



Dados obtidos pelo Edifício Novo Horizonte.

a) Quantos jovens residem nesse edifício? 25 jovens

b) Calcule a idade média desses jovens. 18,44 anos

c) Determine a idade modal desses jovens. 17 anos

d) Calcule a idade mediana desses jovens. 19 anos

e) Se forem acrescentados a esses dados dois jovens de 16 anos, o que acontecerá com cada medida de tendência central calculada anteriormente? A média diminuirá para 18,26 anos, a moda continuará a mesma e a mediana passará a ser 18 anos.

33 O fabricante de chocolate Chocobom fez uma pesquisa sobre a preferência de 1.500 consumidores em relação a 5 tipos de chocolate. Veja o resultado.

Preferência dos consumidores	
Meio amargo	256
Ao leite	470
Branco	324
Amargo	135
Crocante	315

Dados obtidos pela empresa Chocobom.

Qual das três medidas de tendência central caracteriza melhor essa pesquisa? Justifique.
Espera-se que o aluno perceba que não faz sentido calcular a média e a mediana para essa pesquisa, por ser uma variável qualitativa. Portanto, deve concluir que a moda é a medida mais adequada para esse caso.

PARA SABER MAIS +

Estimativa de multidões

Leia a notícia a seguir.

JOSÉ LUÍS JUHAS

Blocos de rua surpreendem CET e multidão fecha trânsito em SP

J. DURAN MACHFEE/FUTURA PRESS

Os blocos de rua que desfilaram na tarde deste sábado em São Paulo arrastaram multidões e surpreenderam a Companhia de Engenharia de Tráfego (CET), que não havia se planejado para fechar as vias antes de os foliões tomarem as ruas. No centro da capital paulista, o público do bloco [...], que homenageia a obra de Caetano Veloso, bloqueou o trânsito conforme foi passando.

O grupo, que segundo estimativa da CET atraiu cerca de 4.000 pessoas, partiu da esquina da Avenida São João com a Ipiranga, mas apenas um trecho da São João havia sido bloqueado previamente. Quando o trio elétrico começou a se mover, seus seguidores foram na frente do carro rumo à Avenida Ipiranga, bloqueando a passagem de carros, ônibus e trólebus. O mesmo aconteceu quando o bloco chegou à Avenida Rio Branco. [...]

Fonte: <www.veja.abril.com.br>. Acesso em: 13 abr. 2015.

Cidades como Rio de Janeiro, São Paulo, Salvador e Recife, entre outras, têm recebido eventos que concentram públicos cada vez maiores. Estimar o número de pessoas de uma multidão é fundamental para qualquer organização responsável pelo planejamento ou mesmo pela avaliação posterior de um evento.

Para isso, os organizadores, a Polícia Militar e os órgãos de imprensa e de trânsito fazem uma estimativa, considerando que cada metro quadrado abriga até quatro pessoas. Por se tratar de uma norma internacional, esse método de estimativa é usado tanto pelos órgãos de segurança pública quanto pelos órgãos de imprensa de todo o planeta.

Outro método que fornece uma estimativa mais próxima do valor real é a fotografia aérea: tiram-se fotos aéreas da multidão, calcula-se a escala das fotos e, em seguida, divide-se a foto em pequenas regiões quadradas, das quais se calcula a densidade média, para depois estimar a densidade da área toda.

Veja, nesta sequência de fotos, exemplos de diferentes densidades em uma mesma área:

7 pessoas por metro quadrado

6 pessoas por metro quadrado

5 pessoas por metro quadrado

4 pessoas por metro quadrado

FOTOS: BRUNO ENGERT RIZZO

3 pessoas por metro quadrado

2 pessoas por metro quadrado

1 pessoa por metro quadrado

0,11 pessoa por metro quadrado

Uma atividade interessante é fazer marcações com 1 m² no chão e repetir as diferentes densidades das fotos com os alunos. Assim, eles conseguirão interpretar melhor as informações sobre o público de grandes eventos.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A imagem abaixo representa a foto aérea de um *show*. Faça uma estimativa do público deste evento. Espera-se que os alunos cheguem a um valor próximo de 680 pessoas.

JOSÉ LUÍS JUHAS

2 Reúna-se com um colega e discutam a questão abaixo.

Para comemorar o título do campeonato nacional, torcedores de um time de futebol ocuparam a principal avenida da cidade. Estimativas indicaram que mais de 300 mil torcedores ocuparam toda a avenida e comemoraram pela madrugada toda. Sabendo que essa avenida tem 1 km de comprimento e 26 m de largura, o que pode ser afirmado sobre essa estimativa? Justifique sua resposta. Espera-se que os alunos percebam que, se for considerado que essas 300 mil pessoas estiveram ao mesmo tempo nessa avenida, a estimativa estaria errada, pois teríamos uma densidade de 11,5 pessoas por metro quadrado.

3 Procure uma notícia sobre um grande evento em sua cidade que tenha duas estimativas de participantes: uma da Polícia Militar e outra dos organizadores do evento. Em seguida, pesquise as dimensões do local e discuta qual estimativa possivelmente está correta.

resposta pessoal

5 Noções de probabilidade

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Para arrecadar dinheiro para a formatura, um grupo de alunos resolveu rifar uma televisão. A rifa é composta de 100 nomes, e apenas um deles é o premiado. Qual é a probabilidade de Joana ganhar a TV sabendo que ela comprou 5 nomes dessa rifa?

CLAUDIO CHIYO

Você já viu anteriormente que probabilidade é a medida da chance de um evento acontecer, nesse caso, a medida da chance de Joana ganhar a TV.

Essa situação lida com a **incerteza**, pois, ao comprar um nome da rifa, não é possível saber qual é o premiado. Esse tipo de experiência é objeto de estudo da **Teoria das Probabilidades**.

A Teoria das Probabilidades estuda as leis que regem os fenômenos que dependem do **acaso**, ou seja, aqueles fenômenos cujos resultados não se podem prever. Nesse caso, interessam a essa teoria as **experiências aleatórias**, ou seja, aquelas cujo resultado é imprevisível, mesmo se forem repetidas sob as mesmas condições.

São exemplos de experiências aleatórias:

- escolher um aluno ao acaso para saber qual é o seu time preferido;
- lançar um dado e verificar a face superior;
- lançar uma moeda e verificar se saiu cara ou coroa;
- retirar ao acaso uma carta do baralho;
- lançar dois dados e obter a soma dos pontos de suas faces superiores.

Retornemos ao problema de Joana. Os 100 nomes da rifa formam o **espaço amostral** (**S**) dessa experiência aleatória.

O espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Os cinco nomes da rifa adquiridos por Joana formam um **evento** dessa experiência aleatória.

De forma geral, um evento é todo subconjunto do espaço amostral.

Definidos o espaço amostral e o evento de um experimento aleatório, calculamos a probabilidade da ocorrência desse evento pela seguinte razão:

$$\text{probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

No caso da rifa, temos:

$$\text{probabilidade de Joana ganhar a TV} = \frac{5}{100} \text{ ou } 0{,}05 \text{ ou } 5\%$$

Situação 2

Qual é a probabilidade de sair a soma 6 no lançamento de dois dados?

Antes de calcularmos a probabilidade, devemos definir o espaço amostral:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Observe que os casos favoráveis são:

(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)

Desse modo, a probabilidade de sair soma 6 nas faces dos dados é dada pela razão:

$$\frac{5}{36} \simeq 0{,}14 \text{ ou} \simeq 14\%$$

OBSERVAÇÕES

- Quando a probabilidade é zero, dizemos que o evento é impossível.
- Quando a probabilidade é 1 ou 100%, dizemos que o evento é certo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

34 Em uma urna há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela? $\simeq$ 29%

35 A professora vai sortear, ao acaso, um aluno entre os 30 da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino? 60%; 40%

36 Considerando o lançamento de dois dados, determine a probabilidade de a soma das faces ser:

a) 8; $\simeq$ 14%
b) um número par; 50%
c) maior que 10. $\simeq$ 8%

37 Quantos alunos há na sua classe? Quantos são meninos? Calcule a probabilidade de que, ao sortear um aluno ao acaso, ele seja um menino. resposta pessoal

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

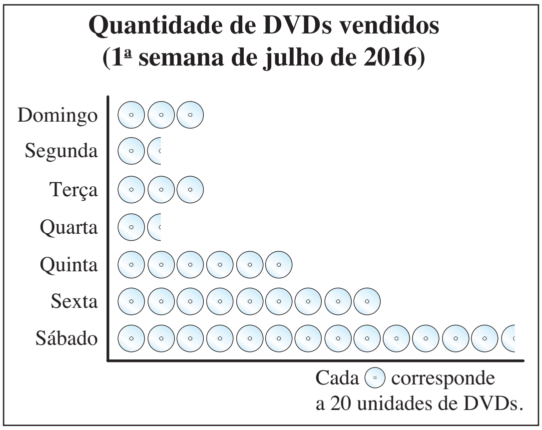
Lucas inventou o seguinte jogo com dados: o desafiante lança dois dados; se em pelo menos um dos dados sair o número 1, Lucas ganha o jogo. Se em pelo menos um dos dados sair como menor número o 2 ou o 3, o desafiante lança os dados novamente. E se em pelo menos um dos dados não sair os números 1, 2 ou 3, o desafiante ganha o jogo. Quem tem maior probabilidade de vencer o jogo: Lucas ou seu desafiante?

Basta comparar as possibilidades de vitória de Lucas com as possibilidades de seu desafiante. Lucas tem 11 possibilidades em 36 e seu desafiante tem somente 9 em 36. Portanto, Lucas tem maior probabilidade de vencer que seu desafiante.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 O pictograma a seguir mostra a quantidade de CDs vendidos na loja Som Maior durante a primeira semana de julho de 2016.

NELSON MATSUDA



Dados obtidos pela loja Som Maior,

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências, com a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Sabendo que a meta de venda diária dessa loja é de 100 DVDs, em quantos dias a loja vendeu menos que a meta desejada? em 4 dias

2 Foi realizada uma pesquisa sobre o tempo que os 140 trabalhadores de uma empresa gastam no percurso entre a residência e o trabalho. Para tanto, foram selecionados, de modo imparcial, 40 trabalhadores.

Tempo gasto pelos trabalhadores (em minuto)

20	20	25	10	15	60
20	100	25	25	20	15
30	60	20	100	90	60
90	90	20	15	30	100
20	60	20	30	35	35
35	100	40	35	30	30
30	40	40	100		

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências, mostrando a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana do tempo gasto por esses trabalhadores.
média: 43,5 min; moda: 20 min; mediana: 30 min

c) Qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um trabalhador que gasta 90 minutos no percurso entre a residência e o trabalho? 7,5%

3 A tabela abaixo mostra a idade das pessoas que se associaram a uma biblioteca pública durante o mês de julho.

Idade (em anos)	Número de pessoas
14	30
16	7
18	2
20	10
21	12
27	18
30	21

Dados obtidos pela direção da biblioteca.

b) idade modal: 14 anos; idade mediana: 21 anos

Faça o que se pede.

21,36 anos

a) Calcule a idade média dessas pessoas.

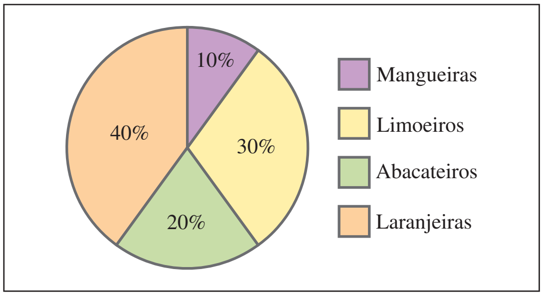
b) Determine a idade modal e a idade mediana.

c) Construa um gráfico de colunas para essa situação. construção de gráfico

d) Qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um sócio que tenha mais de 21 anos? 39%

4 (Saresp) Em uma chácara, há um total de 350 árvores frutíferas, assim distribuídas:

NELSON MATSUDA



As quantidades de laranjeiras e mangueiras são, respectivamente: alternativa **a**

a) 140 e 35.

b) 140 e 70.

c) 140 e 105.

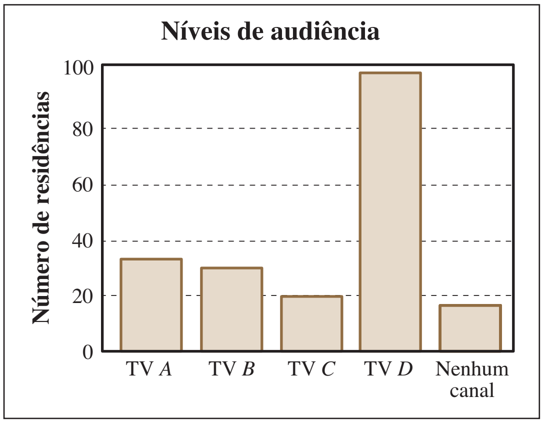
d) 105 e 70.

O texto e o gráfico a seguir referem-se aos testes 5 e 6.

(Enem) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20 h e 21 h, durante uma determinada noite.

Os resultados obtidos estão representados no gráfico a seguir.

NELSON MATSUDA



5 (Enem) O número de residências atingidas nessa pesquisa foi aproximadamente de: alternativa **d**

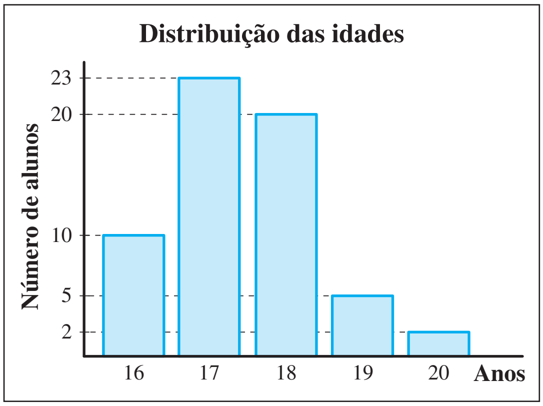
a) 100.
b) 135.
c) 150.
d) 200.
e) 220.

6 (Enem) A porcentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TV *B* é aproximadamente igual a: alternativa **a**

a) 15%.
b) 20%.
c) 22%.
d) 27%.
e) 30%.

7 (Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo seguinte gráfico:

NELSON MATSUDA



Qual das alternativas representa melhor a média da idade dos alunos? alternativa **c**

a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos
c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

8 (Fuvest-SP) Sabe-se que a média aritmética de cinco números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é: alternativa **d**

a) 16.
b) 20.
c) 50.
d) 70.
e) 100.

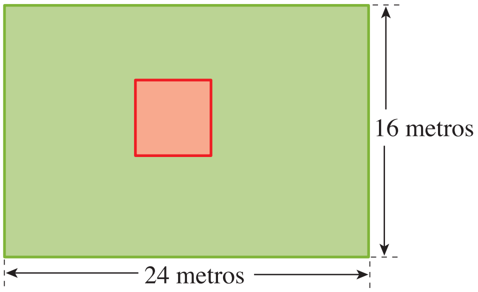
9 (PUC-MG) Em uma pesquisa eleitoral para verificar a posição de três candidatos a prefeito de uma cidade, 1.500 pessoas foram consultadas. Se o resultado da pesquisa deve ser mostrado em três setores circulares de um mesmo disco e certo candidato recebeu 350 intenções de voto, qual é o ângulo central correspondente a esse candidato? alternativa **e**

a) 42°
b) 168°
c) 90°
d) 242°
e) 84°

10 (UFMS) Uma empresa tem 18 funcionários. Um deles pede demissão e é substituído por um funcionário de 22 anos de idade. Com isso, a média das idades dos funcionários diminui 2 anos. A idade do funcionário que se demitiu é: alternativa **e**

a) 50 anos.
b) 48 anos.
c) 54 anos.
d) 56 anos.
e) 58 anos.

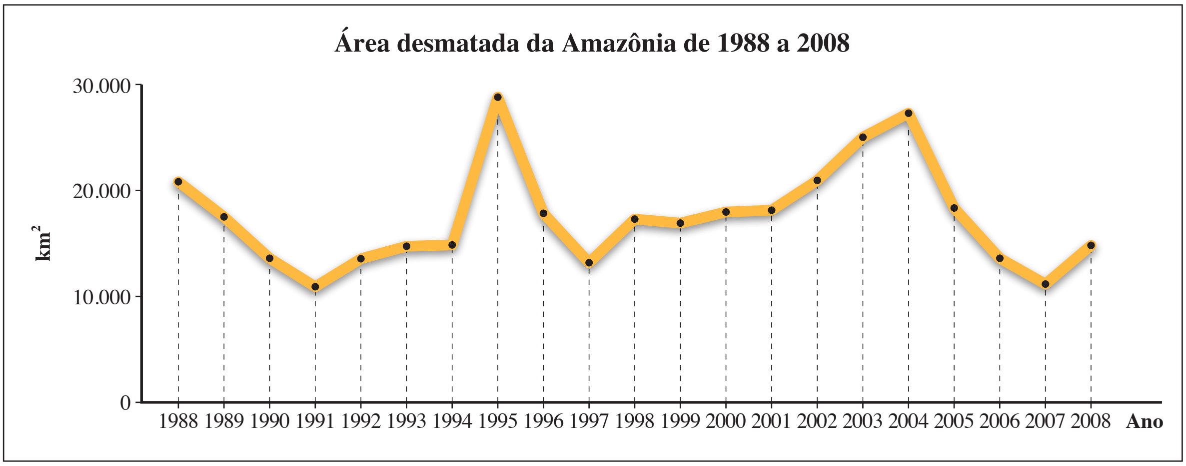
11 Um paraquedista precisa pousar em uma região quadrada localizada em um terreno retangular, conforme o esquema abaixo. Sabendo que o lado da região quadrada mede 8 metros e que o paraquedista certamente pousará no terreno retangular, calcule a probabilidade de o paraquedista pousar na região quadrada. aproximadamente 17%



NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

12 (Enem) O gráfico abaixo mostra a área desmatada da Amazônia, em km², a cada ano, no período de 1988 a 2008.



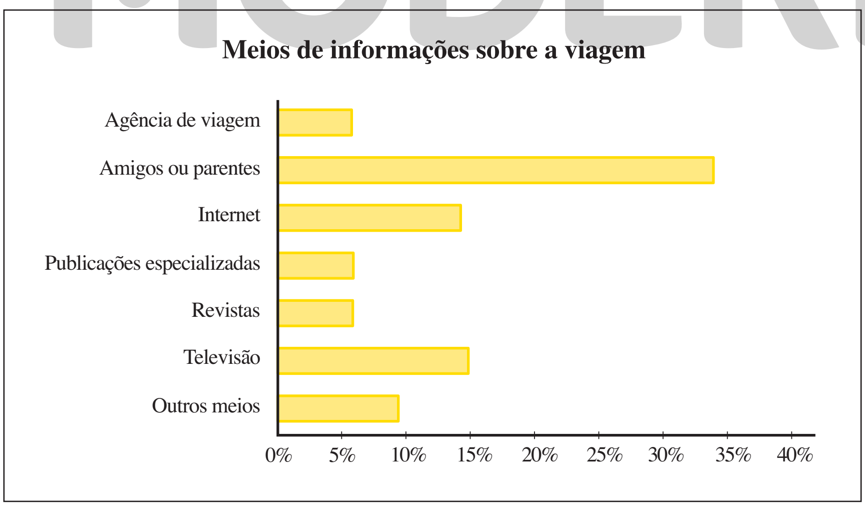
ADILSON SECCO

Fonte: MMA.

As informações do gráfico indicam que: alternativa **d**

a) o maior desmatamento ocorreu em 2004.
b) a área desmatada foi menor em 1997 que em 2007.
c) a área desmatada a cada ano manteve-se constante entre 1998 e 2001.
d) a área desmatada por ano foi maior entre 1994 e 1995 que entre 1997 e 1998.
e) o total de área desmatada em 1992, 1993 e 1994 é maior que 60.000 km².

13 (Etec-SP) Em dezembro de 2002, a Empresa Brasileira de Turismo (Embratur) apresentou um relatório sobre o turismo praticado em ambientes naturais conservados, que são aqueles que têm garantida a proteção de seus recursos naturais originais. Para a elaboração do relatório, foi feita uma pesquisa com frequentadores de algumas dessas unidades de conservação. Após o levantamento dos dados, construiu-se um gráfico referente aos meios de informação que levaram os turistas a escolher um desses ambientes naturais conservados para a sua viagem de férias.



NELSON MATSUDA

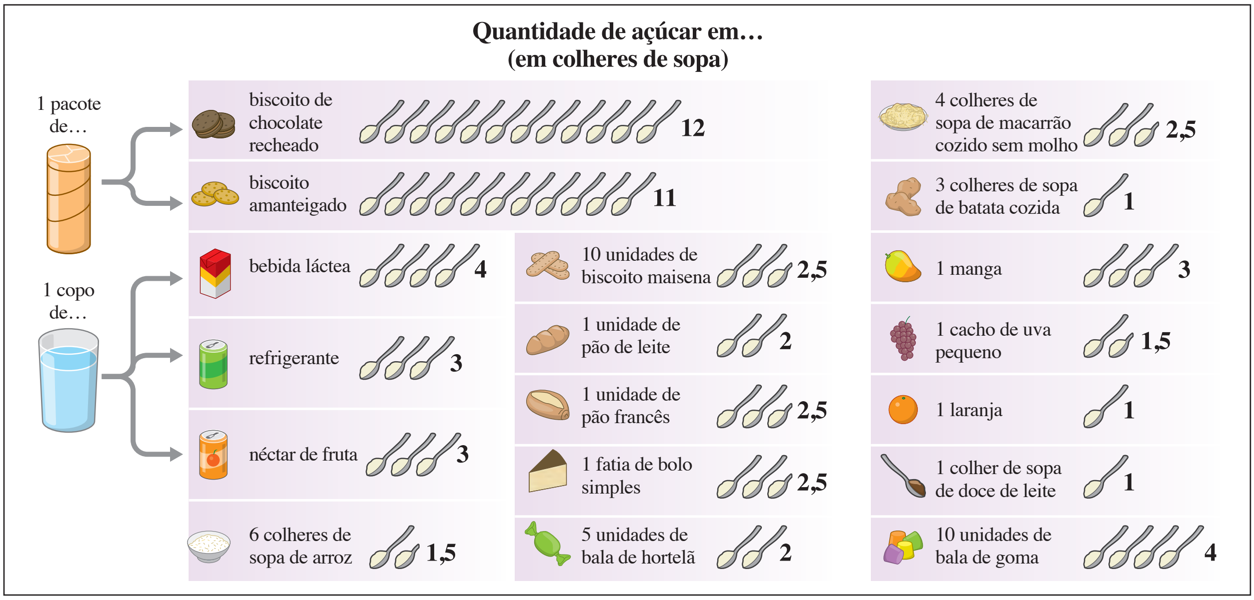
Disponível em: <www.turismo.gov.br>. Acesso em: 13 abr. 2015.

Analisando o gráfico, pode-se dizer que: alternativa **d**

a) mais da metade dos pesquisados obtiveram a informação por intermédio de amigos ou parentes.
b) agências de viagens e revistas juntas tiveram, percentualmente, mais influência na decisão do que a internet.
c) a influência de amigos e parentes é o triplo da influência de publicações especializadas.
d) menos de um quinto dos pesquisados obtiveram informações via televisão.
e) a maioria dos pesquisados obtiveram a informação via internet.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

14 Observe o pictograma abaixo, que mostra a quantidade de açúcar em alguns alimentos e bebidas comuns em nosso cotidiano.



ADILSON SECCO

Fonte: Ambulatório de Nutrição da Divisão de Nutrição e Dietética da FMUSP.

a) Agrupe os alimentos em 4 categorias, de acordo com seu consumo:
- diariamente
- semalmente
- raramente
- nunca

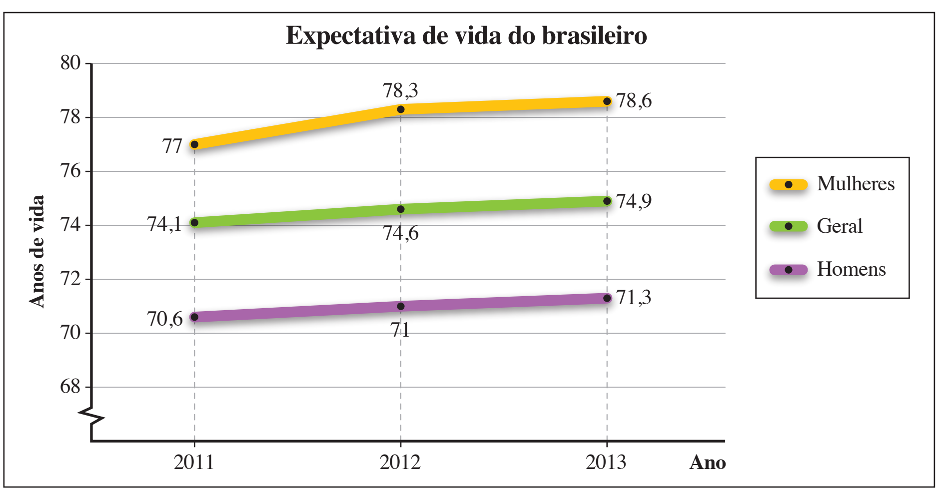
Agora, calcule quantas colheres de açúcar você consome diariamente. resposta pessoal

b) Calcule a quantidade média de açúcar, em colheres, de um copo de bebida láctea e de néctar de fruta indicadas no pictograma. Como você representaria essa média em um pictograma?

c) Reúna-se com um colega e discuta: vocês sabiam que alimentos salgados também têm açúcar? Considerando essas informações, quais são os cuidados que vocês devem ter com a alimentação? resposta pessoal

14. b) 3,5; três colheres e mais uma colher incompleta.

15 Observe o gráfico de múltiplas entradas da expectativa de vida do brasileiro ao longo dos últimos anos.



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 13 abr. 2015.

Tanto em 2012 quanto em 2013 essa diferença foi de 7,3 anos.

a) Em que ano a diferença absoluta entre a expectativa de vida de homens e o de mulheres foi maior?

b) Em que ano a expectativa de vida do homem foi superior à da mulher? em nenhum ano

c) Reúna-se com seu colega e discutam: por que a expectativa de vida das mulheres é maior que a dos homens? resposta pessoal

CAPÍTULO

4

Equações do 2º grau

1 Equações do 2º grau com uma incógnita

Considere a situação a seguir.

A encomenda recebida pelo engenheiro Vítor, para a construção de uma piscina retangular, apresentava duas exigências:

1ª) comprimento com 10 m a mais que a largura;

2ª) área de 144 m^2.

HOTELPIX/ALAMY/OTHER IMAGES

Para determinar as medidas da superfície dessa piscina, Vítor representou a largura por x e o comprimento por $x + 10$.

Como a área de um retângulo é o produto das medidas da largura e do comprimento, Vítor escreveu:

$$x \cdot (x + 10) = 144 \quad \text{ou} \quad x^2 + 10x - 144 = 0$$

Observe que a equação obtida, $x^2 + 10x - 144 = 0$, tem uma só incógnita (a letra x) cujo maior expoente é 2. Ela é um exemplo de **equação do 2º grau com uma incógnita**.

Toda equação do 2º grau com uma incógnita pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}_{\text{forma reduzida de uma equação do 2º grau}} \text{ (com } a \neq 0\text{)}$$

DANILLO SOUZA

Os números reais *a*, *b* e *c* são os coeficientes da equação do 2º grau, sendo:

- ***a*** o coeficiente do quadrado da incógnita (coeficiente de x^2);
- ***b*** o coeficiente da incógnita (coeficiente de x);
- ***c*** o termo independente da incógnita.

Nos exemplos a seguir, as equações do 2º grau estão escritas na forma reduzida, e destacamos seus coeficientes *a*, *b* e *c*.

a) Na equação $5x^2 - 6x + \frac{1}{5} = 0$, temos: $a = 5$, $b = -6$ e $c = \frac{1}{5}$

b) Na equação $4x^2 + 9x = 0$, temos: $a = 4$, $b = 9$ e $c = 0$

c) Na equação $\frac{x^2}{2} - 10 = 0$, temos: $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ e $c = -10$

d) Na equação $-\frac{\sqrt{5}}{5}x^2 = 0$, temos: $a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $b = 0$ e $c = 0$

Uma equação do 2º grau é considerada **completa** quando os coeficientes *b* e *c* são diferentes de zero e é **incompleta** quando $b = 0$ ou $c = 0$, ou, ainda, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que nos exemplos acima o item **a** apresenta uma equação completa e os itens **b**, **c** e **d** apresentam equações incompletas do 2º grau.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 No caderno, verifique quais das equações a seguir são do 2º grau e identifique os coeficientes *a*, *b* e *c*. alternativas **a**, **d**, **e**, **f**

a) $8x^2 + 17x + 4 = 0$ $a = 8$; $b = 17$; $c = 4$

b) $3x - 5 = 0$

c) $0x^2 + 10x - 8 = 0$

d) $-\frac{y^2}{5} - 25 = 0$ $a = -\frac{1}{5}$; $b = 0$; $c = -25$

e) $4y^2 - 5y = 0$ $a = 4$; $b = -5$; $c = 0$

f) $-9 + x^2 = 0$ $a = 1$; $b = 0$; $c = -9$

2. **a)** $2x^2 - 5x + 2 = 0$ **b)** $x^2 + 4x - 3 = 0$ **c)** $y^2 - 8y = 0$ **d)** $-5x^2 - 30x - 40 = 0$ **e)** $3x^2 - 10x + 2 = 0$ **f)** $x^2 - 6x - 4 = 0$

2 Escreva as equações do 2º grau a seguir na forma reduzida e classifique-as em completa ou incompleta.

a) $2x^2 - 5x = -2$ completa

b) $x^2 + 6x = 2x + 3$ completa

c) $y^2 = 8y$ incompleta

d) $-5x^2 = 30x + 40$ completa

e) $3x \cdot (x - 2) = 2 \cdot (2x - 1)$ completa

f) $(x + 4) \cdot (x - 5) = 5x - 16$ completa

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Dados os coeficientes a, b e c, escreva as equações do 2º grau correspondentes.

a) $a = 5$; $b = -7$; $c = 0$ $5x^2 - 7x = 0$

b) $a = -1$; $b = 3$; $c = -4$ $-x^2 + 3x - 4 = 0$

c) $a = 2$; $b = 0$; $c = 4$ $2x^2 + 4 = 0$

d) $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{5}{7}$; $c = \sqrt{2}$ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{7}x + \sqrt{2} = 0$

4 Para que valor de n a equação $(5n + 2)x^2 - 4nx + n = 0$ não é do 2º grau? $n = -\frac{2}{5}$

5 Determine os valores de m na equação $(m + 3)x^2 - (2m - 1)x + m + 4 = 0$ de modo que ela:

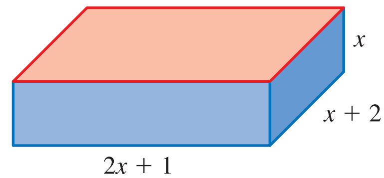
a) não seja do 2º grau em x; $m = -3$

b) seja do 2º grau em x; $m \neq -3$

c) seja do 2º grau em x e seja completa; $m \neq -3$, $m \neq \frac{1}{2}$ e $m \neq -4$

d) seja do 2º grau em x e seja incompleta. $m = \frac{1}{2}$ ou $m = -4$

6 A figura ao lado representa uma caixa em forma de paralelepípedo.



NELSON MATSUDA

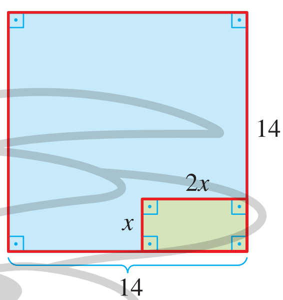
a) Determine a expressão da soma das áreas das faces laterais.

b) Determine a expressão da área da face destacada em vermelho.

c) Se a soma das áreas das faces laterais for 880, determine a equação correspondente.

6. a) $6x^2 + 6x$
b) $2x^2 + 5x + 2$
c) $6x^2 + 6x - 880 = 0$

7 Considere a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

a) Determine a área da parte azul. $A = 196 - 2x^2$

b) Calcule o valor de x quando a área da parte azul for 124. $x = 6$

8 Sendo x um número desconhecido, vamos representar com símbolos a sentença:

$$\text{“}\underbrace{\text{o quadrado de um número}}_{x^2}\ \underbrace{\text{somado com}}_{+}\ \underbrace{\text{o seu triplo}}_{3x}\ \underbrace{\text{é igual a}}_{=}\ \underbrace{\text{dezoito}}_{18}\text{”}$$

Na forma reduzida, escrevemos $x^2 + 3x - 18 = 0$.

Seguindo o modelo acima, represente o número desconhecido por x e escreva a equação do 2º grau na forma reduzida que traduz cada sentença abaixo.

a) O quadrado de um número somado com o dobro desse número é igual a 99. $x^2 + 2x - 99 = 0$

b) O triplo do quadrado de um número menos o próprio número é igual a 30. $3x^2 - x - 30 = 0$

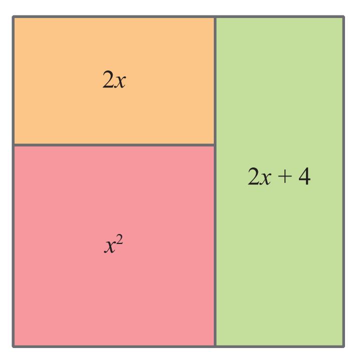
c) Um número é igual ao quadrado desse próprio número menos 42. $x^2 - x - 42 = 0$

d) Três quintos do quadrado de um número é igual a esse número menos 40. $\frac{3}{5}x^2 - x + 40 = 0$

9 Elabore um problema que possa ser resolvido por meio da equação $x^2 + x + 5 = 0$. resposta pessoal

10 Junte-se a um colega e façam o que se pede.

Na figura ao lado, estão indicadas as áreas, em uma mesma unidade de medida, de três retângulos adjacentes.



ADILSON SECCO

a) Escrevam as medidas dos lados desses retângulos. x e x; x e 2; $x + 2$ e 2

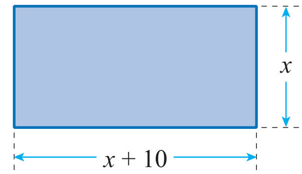
b) Escrevam uma expressão para a área do quadrilátero que é a reunião dos três retângulos. $x^2 + 4x + 4$

c) Classifiquem o quadrilátero citado no item **b**. quadrado

2 Raízes de uma equação do 2º grau

Voltando ao problema da construção da piscina do início deste capítulo, podemos obter, por tentativa, o valor de x da medida da largura.

Vamos recordar que Vítor desenhou a figura e chegou à equação $x \cdot (x + 10) = 144$.



ADILSON SECCO

Atribuindo a x, por exemplo:

- o número 10, o valor do 1º membro da equação é:

$$10 \cdot (10 + 10) = 200, \text{ maior que o 2º membro } (200 > 144)$$

- o número 7, o valor do 1º membro da equação é:

$$7 \cdot (7 + 10) = 119, \text{ menor que o 2º membro } (119 < 144)$$

- o número 8, o valor do 1º membro da equação é:

$$8 \cdot (8 + 10) = 144, \text{ igual ao 2º membro } (144 = 144)$$

Ao substituir x por 8 na equação $x \cdot (x + 10) = 144$, ou na sua equivalente $x^2 + 10x - 144 = 0$, obtemos uma sentença verdadeira. Veja:

$$8 \cdot (8 + 10) = 144 \quad \text{ou} \quad 8^2 + 10 \cdot 8 - 144 = 0$$

Portanto, a largura da piscina deve medir 8 metros e o comprimento, 18 metros.

Quando substituímos a incógnita de uma equação por um número e encontramos uma sentença verdadeira, dizemos que esse número é **raiz** da equação. Se a equação for do 2º grau, ela pode ter até duas raízes reais diferentes.

Veja alguns exemplos.

a) Vamos verificar se os números -3, -2, 2 e 6 são raízes da equação $x^2 + x - 6 = 0$.

- Para $x = -3$, temos:
  $(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$
  $9 - 3 - 6 = 0$
  $9 - 9 = 0$ (verdadeira)
  Logo, -3 é raiz da equação.

- Para $x = 2$, temos:
  $2^2 + 2 - 6 = 0$
  $4 + 2 - 6 = 0$
  $6 - 6 = 0$ (verdadeira)
  Logo, 2 é raiz da equação.

- Para $x = -2$, temos:
  $(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$
  $4 - 2 - 6 = 0$
  $4 - 8 = 0$ (falsa)
  Logo, -2 não é raiz da equação.

- Para $x = 6$, temos:
  $6^2 + 6 - 6 = 0$
  $36 + 6 - 6 = 0$
  $36 = 0$ (falsa)
  Logo, 6 não é raiz da equação.

b) Vamos determinar m na equação $(3m - 1) \cdot x^2 - (m + 8) \cdot x + 10 = 0$ de modo que uma de suas raízes seja 2.

Como 2 deve ser raiz da equação, temos como verdadeira a sentença:

$(3m - 1) \cdot 2^2 - (m + 8) \cdot 2 + 10 = 0$

Assim:

$(3m - 1) \cdot 4 - (m + 8) \cdot 2 + 10 = 0$

$12m - 4 - 2m - 16 + 10 = 0$

$10m - 10 = 0$

$\dfrac{10m}{10} = \dfrac{10}{10}$

$m = 1$

11 Observe o diálogo entre Júlia e Dora.

CLAUDIO CHIYO

Complete a resposta de Júlia para Dora.
... substituir x por 7; se a sentença obtida for falsa, 7 não será a raiz dessa equação.

12 Verifique, entre os números 2, -5, 9 e 10, quais são raízes da equação $x^2 - 11x + 18 = 0$. 2 e 9

13 Verifique se o número 5 é raiz de cada equação a seguir.

a) $x^2 + 6x = 0$ não

b) $2x^2 - 10x = 0$ sim

c) $3x^2 - 75 = 0$ sim

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ sim

14 Dois dos números -10, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ e 10 são raízes da equação $x^2 - 10 = 0$. Quais são eles?
$-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$

15 Calcule q de modo que -1 seja raiz da equação $(3q - 2) \cdot x^2 + (2q - 1) \cdot x + 5 = 0$. $q = -4$

16 Calcule o valor de:

a) p na equação $3x^2 - 14x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja 4; $p = 4$

b) k na equação $(k - 3)x^2 - (k + 4)x + 6 = 0$ para que uma das raízes seja 2. $k = 7$

3 Resolvendo equações do 2º grau

Vamos estudar a resolução de algumas equações do 2º grau.

Equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $ax^2 + bx = 0$

Vamos considerar a equação $5x^2 + 6x = 0$. Ela é uma equação do 2º grau incompleta.

Podemos fatorar o primeiro membro dessa equação colocando x em evidência. Observe:

$$x \cdot (5x + 6) = 0$$

Sabemos que o produto de dois números reais é zero somente se um dos fatores for zero.

Então, o produto de x por $(5x + 6)$ é 0 quando $x = 0$ ou $5x + 6 = 0$.

Resolvendo a equação $5x + 6 = 0$, encontramos $x = -\frac{6}{5}$.

Portanto, as raízes da equação $5x^2 + 6x = 0$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Toda equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ tem duas raízes reais, sendo uma delas o zero.

Veja outro exemplo.

Vamos resolver a equação $4y^2 + 2y = 0$.

Inicialmente, vamos fatorar o primeiro membro dessa equação colocando $2y$ em evidência.

$2y(2y + 1) = 0$

Se o produto de dois ou mais fatores que representam números reais é igual a zero, obrigatoriamente um deles deve ser igual a zero. Então:

$2y + 1 = 0$	$2y = 0$
$2y = -1$	$y = 0$
$y = -\dfrac{1}{2}$	

Portanto, a equação tem duas soluções. Indicando essas soluções por y_1 e y_2, temos $y_1 = 0$ e $y_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $(mx + n)^2 = 0$

Vamos considerar a equação $x^2 - 12x + 36 = 0$. Ela é uma equação do 2º grau completa. Observe que o 1º membro dessa equação é um **trinômio quadrado perfeito**:

$$\underbrace{x^2}_{(x)^2} - \underbrace{12x}_{-2 \cdot x \cdot 6} + \underbrace{36}_{(6)^2} = (x - 6)^2$$

Então, podemos escrever $(x - 6)^2 = 0$.

Uma potência é nula somente se a base for zero. Logo, devemos ter:

$$x - 6 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad x = 6$$

Nesse caso, dizemos que a equação tem duas raízes iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = 6$.

> Toda equação do 2º grau do tipo $(mx + n)^2 = 0$, com m e n reais, tem duas raízes reais e iguais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Resolva as equações a seguir.

a) $3x^2 + 15x = 0$ $x_1 = 0$ e $x_2 = -5$

b) $2y^2 - \dfrac{y}{3} = 0$ $y_1 = 0$ e $y_2 = \dfrac{1}{6}$

c) $9 \cdot (2n - 5) \cdot (n + 2) = 0$ $n_1 = \dfrac{5}{2}$ e $n_2 = -2$

d) $\dfrac{2x - 3}{x - 6} = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ $(x \neq 6$ e $x \neq 2)$ $x_1 = 0$ e $x_2 = 12$

18 Encontre as soluções das equações e, em seguida, responda à questão.

a) $5x^2 + 12x = 0$ 0 e $-\dfrac{12}{5}$

b) $-3y^2 = 6y$ 0 e -2

c) $\sqrt{3}\,x^2 + x = 0$ 0 e $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $(m + 3) \cdot (m - 6) = -18$ 0 e 3

- O que essas equações têm em comum?

São equações do 2º grau com duas raízes, sendo uma delas igual a zero.

19 Crie um problema que seja resolvido por uma equação do 2º grau em que uma de suas soluções seja igual a zero. Em seguida, troque com seu colega para que ambos resolvam o problema do outro. Em seguida, confiram as resoluções. resposta pessoal

20 Calcule p na equação $x^2 - 6x + p + 5 = 0$ de modo que uma das raízes seja nula. $p = -5$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

21 O dobro do quadrado de um número negativo somado ao triplo dele é igual a zero. Determine esse número. $-\frac{3}{2}$

22 Resolva cada uma das equações abaixo.

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$ $x_1 = x_2 = 7$

b) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$

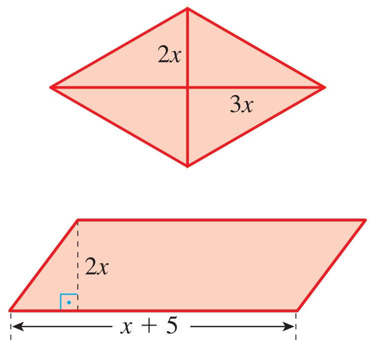
c) $4y^2 = 4y - 1$ $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$

d) $p^2 + 6p = 16p - 25$ $p_1 = p_2 = 5$

23 Se do quadrado da idade de Luísa subtrairmos o dobro da idade dela, obteremos 10 vezes a idade de Lúcia, a irmã gêmea de Luísa. Qual é a idade de Luísa? 12 anos

24 Elabore um problema que possa ser resolvido por uma equação do 2º grau que tenha duas raízes reais e iguais. resposta pessoal

25 Para que valor de x o losango e o paralelogramo abaixo têm a mesma área? $x = 1$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $ax^2 + c = 0$

Vamos considerar a equação $x^2 - 25 = 0$. Ela é uma equação do 2º grau incompleta, com $b = 0$. Isolando a incógnita no 1º membro, temos:

$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 25$$

Existem dois valores de x que verificam essa equação. São eles -5 e $+5$, pois $(-5)^2 = 25$ e $(+5)^2 = 25$. Em vista disso, vamos continuar a resolução da equação, escrevendo:

$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Logo, as raízes dessa equação são $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$.

> Quando uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$ admitir raízes reais, elas serão opostas.

Veja outros exemplos.

a) Vamos resolver a equação $x^2 - 1 = 8{,}61$.

$$x^2 - 1 = 8{,}61$$
$$x^2 = 8{,}61 + 1$$
$$x^2 = 9{,}61$$
$$x = \pm\sqrt{9{,}61}$$
$$x = \pm 3{,}1$$

Logo, as raízes são $x_1 = -3{,}1$ e $x_2 = 3{,}1$.

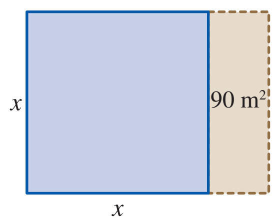
b) Vamos resolver a equação $x^2 + 9 = 0$.

$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$

Como não existe número real que elevado ao quadrado resulte em -9, essa equação não tem raiz real.

c) Luís tem um terreno em forma de quadrado. Ele pretende comprar um terreno de 90 m² que faz divisa com o dele. Desse modo, ele ficaria com um terreno retangular de 414 m². Vamos calcular a medida do lado do terreno em forma quadrangular de Luís.

Considerando a figura abaixo como uma representação do novo terreno de Luís, temos:



NELSON MATSUDA

$$x^2 + 90 = 414$$
$$x^2 = 414 - 90$$
$$x^2 = 324$$
$$x = \pm\sqrt{324}$$
$$x = \pm 18$$

Como a medida do lado deve ser um número positivo, o lado do terreno mede 18 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 Escreva as equações a seguir na forma reduzida. Depois, resolva-as.

a) $(3y - 4) \cdot (3y + 1) = 14 - 9y$ $y_1 = -\sqrt{2}$ e $y_2 = \sqrt{2}$

b) $(m + 5) \cdot (m - 4) = m + 16$

$m_1 = -6$ e $m_2 = 6$

27 Quais valores de x verificam estas equações?

a) $x^2 - 100 = 0$ $x = -10$ e $x = 10$

b) $4x^2 = 81$ $x = -\frac{9}{2}$ e $x = \frac{9}{2}$

c) $(2x - 1) \cdot (x + 2) = 3x - 7x^2$ $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $x + 10 = \dfrac{8x}{x - 2}$ $(x \neq 2)$ $x = -2\sqrt{5}$ e $x = 2\sqrt{5}$

- O que podemos afirmar sobre as raízes dessas equações? São opostas.

28 Encontre mentalmente as raízes reais das equações abaixo.

a) $-\dfrac{7x^2}{3} = 0$ $x_1 = x_2 = 0$

b) $x^2 = \dfrac{9}{4}$ $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

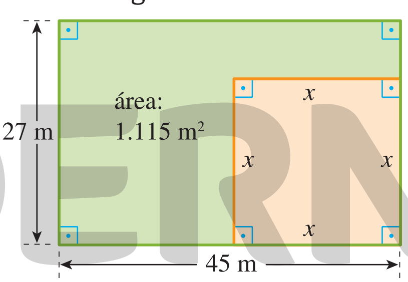
c) $-4x^2 + 2 = +2$ $x_1 = x_2 = 0$

d) $2x^2 = 1$ $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

29 Pensei em um número, elevei-o ao quadrado, subtraí 60 e obtive 840.

Se pensei em um número negativo, qual é esse número? −30

30 Considere a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

a) Escreva uma equação que represente a área da figura verde. resposta possível: $1.115 = 45 \cdot 27 - x^2$

b) Determine as raízes dessa equação. $x_1 = -10$ e $x_2 = 10$

c) Dê o valor de x da medida do lado do quadrado. $x = 10$ m

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Descubra o valor de x no quadrado mágico e encontre o valor da soma das colunas, das linhas e das diagonais.

Lembre-se de que a soma das colunas, das linhas e das diagonais em um quadrado mágico é sempre a mesma.

$x = 4$; soma = 30

$2x^2 - 20$ 12	3	$x^2 - 1$ 15
$3x + 1$ 13	$2x + 2$ 10	7
5	$\frac{x^2}{2} + 9$ 17	$2x$ 8

4 Resolvendo equações do 2º grau completando quadrados

Tábua babilônica BM 13901 (1800 a.C.). Nessa tábua há 24 problemas que envolvem equações do 2º grau.

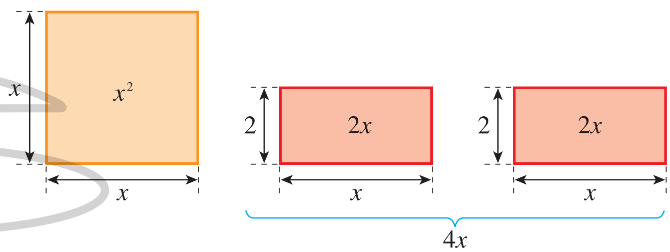
As equações do 2º grau já eram resolvidas pelos babilônios, que usavam métodos de completar quadrados associados a tábuas de quadrados, por volta do ano 1800 a.C. Esse método também era utilizado pelos matemáticos hindus, como Brahmagupta (598-670). A seguir, vamos aprofundar o estudo desse procedimento geométrico.

Como exemplo, acompanhe a resolução da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$.

A expressão do primeiro membro não é um trinômio quadrado perfeito, mas podemos transformá-la para que o seja. Para isso, primeiro somamos 21 aos dois membros da equação, obtendo:

$$x^2 + 4x = 21$$

Em seguida, representamos geometricamente os termos do primeiro membro.



Agora, tentamos montar um quadrado com as figuras obtidas (figura 1).

Observe que a área que falta para completar um quadrado perfeito é 2^2 (figura 2).

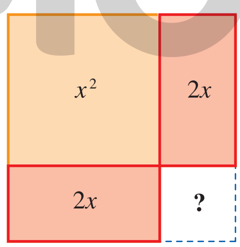


Figura 1

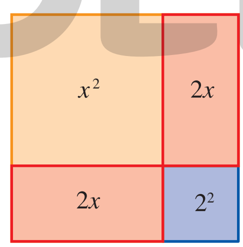


Figura 2

Dessa forma, devemos somar 2^2 ao primeiro membro para formar o trinômio quadrado perfeito. Para não alterar a equação, também devemos somar 2^2 ao segundo membro. Daí, chegamos a:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$

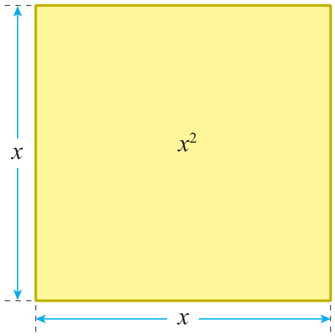
Fatorando o trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, obtemos:

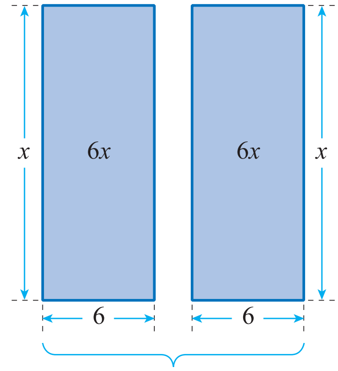
$$(x + 2)^2 = 25$$
$$x + 2 = \pm\sqrt{25}$$
$$x + 2 = \pm 5$$

- Para $x + 2 = 5$, temos $x_1 = 3$.
- Para $x + 2 = -5$, temos $x_2 = -7$.

Veja outro exemplo.

Para resolver a equação $x^2 - 12x - 13 = 0$, primeiro fazemos $x^2 - 12x = 13$. Em seguida, fazemos as representações geométricas:





Do quadrado de lado x, devemos tirar os dois retângulos de lados 6 e x.

Observe que, na figura 1, há um quadrado de lado 6 que deve ser tirado duas vezes, o que nos leva à figura 2.

O que sobra é só a parte amarela. Note, na figura 2, que, para completar o quadrado de lado $x - 6$, devemos acrescentar um quadrado de lado 6. Isso equivale a dizer que, para obter um trinômio quadrado perfeito, devemos somar 6^2 no primeiro membro.

E, para manter a igualdade, somar 6^2 no segundo membro.

$$x^2 - 12x + 6^2 = 13 + 6^2$$
$$x^2 - 12x + 36 = 13 + 36$$
$$(x - 6)^2 = 49$$
$$x - 6 = \pm\sqrt{49}$$
$$x - 6 = \pm 7$$

- Para $x - 6 = 7$, temos $x_1 = 13$.
- Para $x - 6 = -7$, temos $x_2 = -1$.

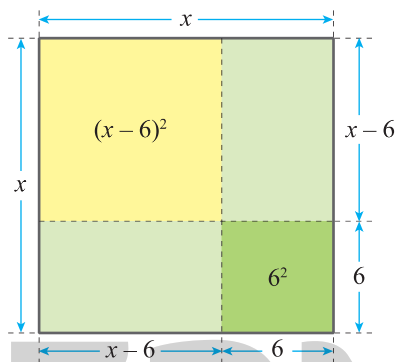


Figura 1

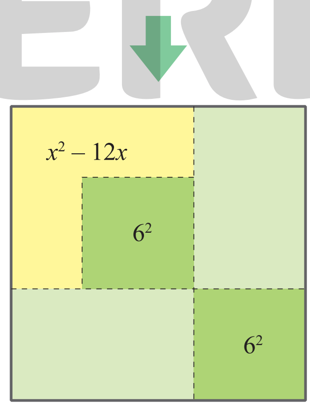
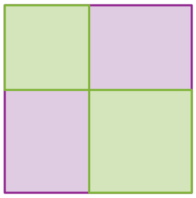


Figura 2

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

31 Na figura ao lado, das partes quadradas coloridas com verde, a maior tem área x^2. A soma das áreas dos retângulos lilases é $8x$. Determine a área do quadrado menor. 16



Lembre-se:
Não escreva no livro!

32 Resolva as equações abaixo usando o método de completar quadrados.

a) $x^2 + 10x + 24 = 0$ $x_1 = -4$ ou $x_2 = -6$

b) $y^2 - 4y + 3 = 0$ $y_1 = 1$ ou $y_2 = 3$

c) $n^2 + 4n - 12 = 0$ $n_1 = -6$ ou $n_2 = 2$

d) $r^2 - 2r - 3 = 0$ $r_1 = -1$ ou $r_2 = 3$

33 Determine os valores reais de x que verificam as equações a seguir.

a) $4x^2 - 12x + 5 = 0$ $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{5}{2}$

b) $9y^2 - 3y - 2 = 0$ $y_1 = -\frac{1}{3}$ e $y_2 = \frac{2}{3}$

c) $2n^2 + 7n + 6 = 0$ $n_1 = -2$ e $n_2 = -\frac{3}{2}$

d) $3x^2 + 8x - 3 = 0$ $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

34 Considere três números naturais e consecutivos. O produto dos dois maiores é igual a 10 vezes o menor mais 10 unidades. Calcule a média aritmética desses três números. 9

35 Daqui a 6 anos, a idade de Daniela será igual ao quadrado da idade dela há 6 anos. Indique a idade atual de Daniela por x para resolver as questões que se seguem.

a) Construa uma tabela com as idades de Daniela: hoje, 6 anos atrás e daqui a 6 anos. construção de tabela

b) Que equação traduz a situação do problema?

c) Qual é a idade atual de Daniela? 10 anos

b) $x + 6 = (x - 6)^2$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Leia e resolva o problema.

Um prédio é abastecido por duas caixas-d'água em forma de cubo. A maior tem 1 m de aresta a mais que a menor.

Conversando com um morador do prédio sobre a capacidade das caixas-d'água, o síndico disse:

— A diferença entre os volumes das duas caixas é 91.000 litros.

Qual é a medida, em metro, da aresta de cada uma dessas caixas-d'água? 6 m e 5 m

5 A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

A resolução de uma equação do 2º grau pode ser obtida pela fórmula que vamos deduzir a seguir.

Vamos considerar a equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = -c$ ← **Isolamos o termo independente no 2º membro da equação.**

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ ← **Multiplicamos ambos os membros por 4*a* (*a* ≠ 0).**

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ ← **Adicionamos *b*² aos dois membros.**

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ ← **Fatoramos o 1º membro.**

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ (para $b^2 - 4ac \geqslant 0$)

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Isolando x, obtemos:

Em algumas regiões do Brasil, a fórmula para resolver a equação do 2º grau é conhecida como fórmula de Bhaskara; entretanto, não foi Bhaskara quem a descobriu. Sabe-se que somente com o matemático francês François Viète (1540-1603) passou-se a usar fórmulas para obter as raízes de uma equação do 2º grau.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ ← **fórmula resolutiva**

Na fórmula resolutiva, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de **discriminante da equação**, que geralmente é representado pela letra grega Δ (lemos: delta). Então:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Desse modo, se $\Delta \geqslant 0$, podemos escrever a fórmula resolutiva da seguinte maneira:

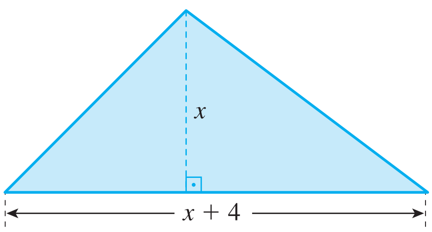
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

OBSERVAÇÃO

- Quando $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais.

Veja um exemplo.

Vamos calcular a medida da altura do triângulo ao lado, cuja área é 10,5 cm².



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{medida da base} \times \text{medida da altura}}{2}$$

$$10{,}5 = \frac{(x+4)x}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x(x+4)}{2} = 10{,}5$$

$$2 \cdot \frac{x(x+4)}{2} = 2 \cdot 10{,}5$$

$$x(x+4) = 2 \cdot 10{,}5$$

$$x^2 + 4x = 21$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

Nessa equação, temos $a = 1$, $b = 4$ e $c = -21$.

Resolvendo a equação, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4+10}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

e

$$x_2 = \frac{-4-10}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

As raízes da equação são $x_1 = 3$ e $x_2 = -7$.

Como x representa um comprimento, a solução não pode ser -7. Logo, $x = 3$.

OBSERVAÇÃO

- Substituindo cada um dos valores encontrados na equação $x^2 + 4x - 21 = 0$, obtemos igualdades numéricas verdadeiras. Por exemplo, para $x = -7$, temos:

  $(-7)^2 + 4 \cdot (-7) - 21 = 0$

  $49 - 28 - 21 = 0$

  $49 - 49 = 0$ (verdadeira)

Veja outros exemplos.

a) Vamos resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 0$.

Temos: $a = 1$, $b = 8$ e $c = 16$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (16)$$
$$\Delta = 64 - 64 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais dadas por $x = \frac{-b}{2a}$.

Então, $x_1 = x_2 = \frac{-(+8)}{2} = -4$.

b) Vamos resolver a equação $3x^2 - 2x + + 1 = 0$.

Temos: $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (1)$$
$$\Delta = 4 - 12$$
$$\Delta = -8 < 0$$

Como os números negativos não têm raiz quadrada real, dizemos que a equação não admite raízes reais.

c) Vamos resolver a equação $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

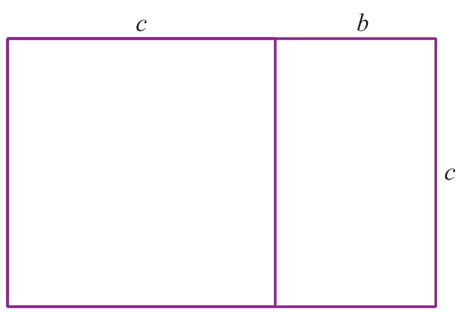
Temos: $a = 4$, $b = -12$ e $c = 7$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (7) = 144 - 112 = 32$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-12) \pm 4\sqrt{2}}{2 \cdot (4)} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{\cancel{4}^{1}\left(3 \pm \sqrt{2}\right)}{\cancel{8}_{2}} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Portanto, as raízes são $x_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Número de ouro

Na seção **Para saber mais**, no texto *Uma razão de ouro*, do capítulo **2**, vimos que, se retirarmos o maior quadrado possível de um retângulo áureo, o retângulo restante também será um retângulo áureo, isto é, a proporção entre os lados se manterá. Veja a figura abaixo.



ADILSON SECCO

$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$$

Fazendo $c = 1$, temos:

$$\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b}$$
$$b^2 + b - 1 = 0$$

Agora, podemos resolver a equação do 2º grau obtida.

Os coeficientes são 1, 1 e −1.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

$b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como a medida do lado é positiva, temos $b = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Logo, o número de ouro, que fascinou os matemáticos gregos, instrumentou arquitetos do Partenon (templo da deusa Atena) e inspirou mestres da pintura como Leonardo da Vinci, é dado por:

$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{1 + b}{1} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 1{,}618$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

36 Encontre as raízes reais das equações.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{4}{3}$

b) $2m^2 - m - 6 = 0$ $m_1 = -\frac{3}{2}$ e $m_2 = 2$

c) $-x^2 + 3x + 10 = 0$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$

d) $y^2 + 8y - 4 = 0$ $y_1 = -4 + 2\sqrt{5}$ e $y_2 = -4 - 2\sqrt{5}$

e) $9y^2 - 12y + 4 = 0$ $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$

f) $5x^2 + 3x + 5 = 0$ Não tem raízes reais.

37 Escreva as equações abaixo na forma reduzida e resolva-as na sequência.

a) $x(x + 3) = 5x + 15$ $x_1 = -3$ e $x_2 = 5$

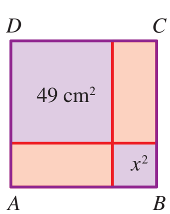
b) $\dfrac{3y + 1}{2} = \dfrac{y^2 - 1}{3}$ $y_1 = -\frac{1}{2}$ e $y_2 = 5$

c) $(x + 4)^2 = 9x + 22$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$

d) $(x - 1)^2 + 3x = x + 26$ $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$

e) $(x + 4) \cdot (x - 1) = 5x + 20$ $x_1 = -4$ e $x_2 = 6$

38 Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado. As partes lilases também são quadrados.



NELSON MATSUDA

a) Escreva a expressão que representa a área da figura. $x^2 + 14x + 49$

b) Sabendo que a área do quadrado *ABCD* é 100 cm², determine a medida do lado do menor quadrado dessa figura. 3 cm

39 Sendo *x* um número desconhecido, escreva a equação do 2º grau que expressa as descrições abaixo.

a) A metade da soma de um número com o seu quadrado é igual a 210. $\frac{x + x^2}{2} = 210$

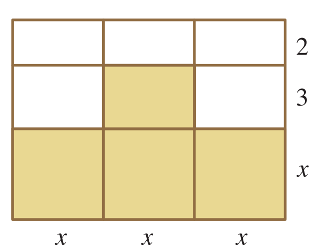
b) O quadrado de um número aumentado de seus $\frac{3}{5}$ é igual a 28. $x^2 + \frac{3}{5}x = 28$

- Encontre as raízes reais das equações dos itens **a** e **b**. **a)** $x_1 = -21$ ou $x_2 = 20$ **b)** $x_1 = 5$ ou $x_2 = -\frac{28}{5}$

40 A diferença entre a terça parte do quadrado de um número e o próprio número é 60. Qual é o triplo desse número? 45 ou −36

41 Uma folha quadrada de cartolina tem *x* cm de lado. Recorta-se dessa folha um retângulo que tem *x* cm de comprimento e 15 cm de largura. A parte que restou da folha é um retângulo de área 1.750 cm². Encontre a área da folha de cartolina. 2.500 cm²

42 A área da parte bege da figura abaixo é 60.



NELSON MATSUDA

Calcule:

a) o valor de *x*; $x = 4$

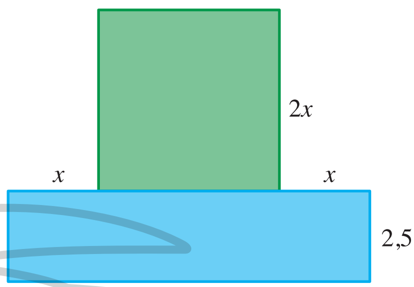
b) a área da parte restante. 48

Lembre-se:
Não escreva no livro!

43 A base de um retângulo tem 5 m a mais que a altura dele. A área do retângulo é 300 m². Calcule o perímetro desse retângulo. 70 m

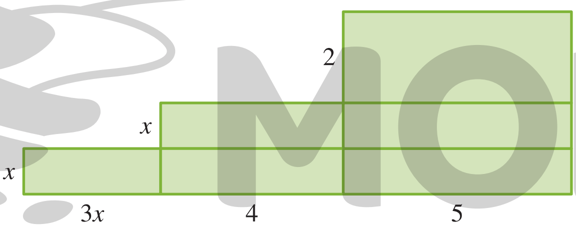
44 Sabemos que o número de diagonais de um polígono convexo é determinado pela fórmula $d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$, na qual d é o número de diagonais e n, o número de lados do polígono. Assim, escreva o nome do polígono que tem 35 diagonais. decágono

45 Para que valor de x a área do quadrado verde será igual à área do retângulo azul na figura a seguir? $x = 2{,}5$



NELSON MATSUDA

46 Considere a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

a) Qual é a expressão que representa a área dessa figura? $3x^2 + 18x + 10$

b) Se a área for 31, qual será a equação correspondente? $3x^2 + 18x - 21 = 0$

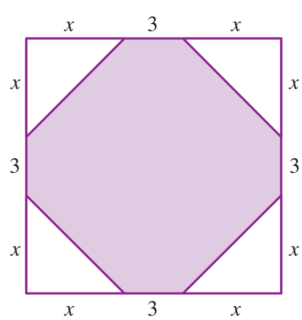
c) Quais são as raízes da equação encontrada? $x_1 = -7$ e $x_2 = 1$

d) Qual dessas raízes será solução se a área for 31? 1

47 Considere a figura a seguir.

a) Determine a expressão que representa a área lilás da figura.

b) Indique o valor de x para que essa área seja 119. $x = 5$

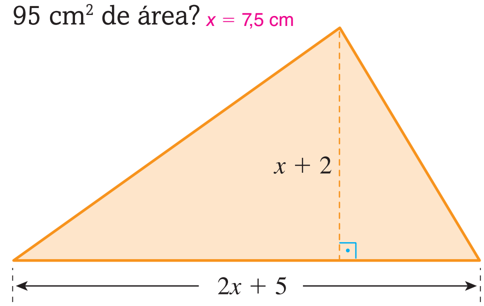


NELSON MATSUDA

47. a) $(2x + 3)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$ ou $2x^2 + 12x + 9$

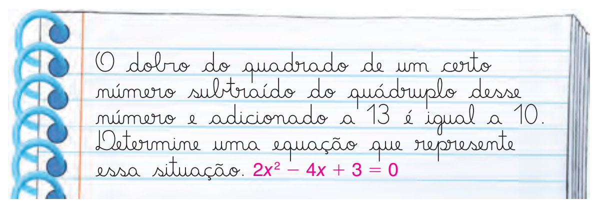
48 A medida do lado de um quadrado é $(5x - 3)$ cm. A área desse quadrado mede 16 cm². Qual é a área de um retângulo cujas dimensões sejam $(5x - 3)$ cm e $(5x + 4)$ cm? 44 cm²

49 Para que valor de x o triângulo a seguir tem 95 cm² de área? $x = 7{,}5$ cm



NELSON MATSUDA

50 Sueli gosta de inventar problemas de Matemática para suas amigas. Outro dia, ela escreveu um problema em uma folha de papel e entregou para Marlene resolver.


O dobro do quadrado de um certo número subtraído do quádruplo desse número e adicionado a 13 é igual a 10. Determine uma equação que represente essa situação. $2x^2 - 4x + 3 = 0$

NELSON MATSUDA

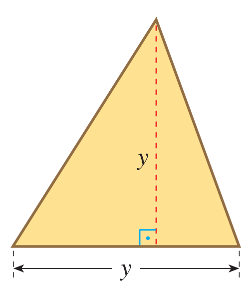
Resolva o problema que Sueli inventou.
$\Delta < 0$, não existe número real que satisfaça a equação.

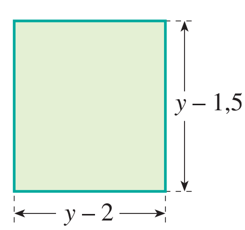
51 (Vunesp) Corta-se um pedaço de arame de 12 dm em duas partes e constrói-se, com cada uma delas, um quadrado. Se a soma das áreas é 5 dm², determine a que distância de uma das extremidades do arame foi feito o corte.
4 dm ou 8 dm

52 Contornando-se um quadrado com uma faixa de 2 cm de largura, obtém-se um novo quadrado com 56,25 cm² de área. Qual é a medida do lado do primeiro quadrado? 3,5 cm

53 Subtraindo-se 6,75 do quadrado de um número, obtém-se o triplo do próprio número. Que número é esse? −1,5 ou 4,5

54 Qual deve ser o valor de y para que as figuras tenham áreas iguais? $y = 6$





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

6 Estudando as raízes de uma equação do 2º grau

Do estudo que fizemos sobre as equações do 2º grau, podemos dizer que:

- Uma equação do 2º grau admite duas raízes reais e diferentes se, e somente se, $\Delta > 0$. Nesse caso, as raízes são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Uma equação do 2º grau admite duas raízes reais e iguais se, e somente se, $\Delta = 0$. Nesse caso, as raízes são dadas por:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Uma equação do 2º grau não admite raízes reais se, e somente se, $\Delta < 0$.

Acompanhe a resolução dos exemplos a seguir.

a) Vamos determinar o valor de k para que a equação $x^2 - 8x + k = 0$ tenha duas raízes reais e diferentes.

DANILLO SOUZA

OBSERVAÇÃO

▶ Podemos substituir valores possíveis de k na equação para verificar se o valor de Δ é positivo. Veja:

- Para $k = 0$, temos:
  $x^2 - 8x = 0$
  $\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 0$
  $\Delta = 64 > 0$
- Para $k = 16$, temos:
  $x^2 - 8x + 16 = 0$
  $\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 16$
  $\Delta = 0$
- Para $k = 20$, temos:
  $x^2 - 8x + 20 = 0$
  $\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 20$
  $\Delta = -16 < 0$

Esse procedimento não resolve a questão proposta e serve apenas para verificar valores particulares.

b) Vamos determinar o valor de n para que a equação $x^2 - 5x + n = 0$ tenha duas raízes reais e iguais.

Como queremos que a equação do 2º grau admita duas raízes reais e iguais, devemos impor a condição $\Delta = 0$.

Temos: $a = 1$, $b = -5$ e $c = n$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (n) = 0$

$25 - 4n = 0$

$4n = 25$

$n = \dfrac{25}{4}$

c) Vamos determinar o valor de m na equação $3x^2 - 5x + 2m = 0$ para que não existam raízes reais.

Como queremos que a equação do 2º grau não admita raízes reais, devemos impor a condição $\Delta < 0$.

Temos: $a = 3$, $b = -5$ e $c = 2m$

$b^2 - 4ac < 0$

$(-5)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (2m) < 0$

$25 - 24m < 0$

$24m > 25$

$m > \dfrac{25}{24}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

55 Dada a equação $2x^2 + 3x + p = 0$, determine:

a) o valor de p para que as raízes sejam reais e iguais; $p = \frac{9}{8}$

b) as raízes para o valor de p encontrado no item anterior; $x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$

c) o valor de p para que uma das raízes seja igual a zero; $p = 0$

d) o valor de p para que uma das raízes seja 2; $p = -14$

e) o valor de p para que a equação não admita raízes reais. $p > \frac{9}{8}$

56 Para que valores de k a equação $2x^2 + 4x + 5k = 0$ tem raízes reais e diferentes? $k < \frac{2}{5}$

57 Determine o valor de k na equação $x^2 - kx + 9 = 0$ para que as raízes sejam reais e iguais. $k = 6$ ou $k = -6$

58 Determine o valor de p na equação $x^2 - (p + 5)x + 36 = 0$ para que as raízes sejam reais e iguais. $p = 7$ ou $p = -17$

59 Considere a equação $9x^2 + 12x + 2m = 0$. Para que valores de m essa equação:

a) não admite raízes reais? $m > 2$

b) tem duas raízes reais e iguais? $m = 2$

c) tem duas raízes reais e diferentes? $m < 2$

d) tem o número 0,2 como raiz? $-1{,}38$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

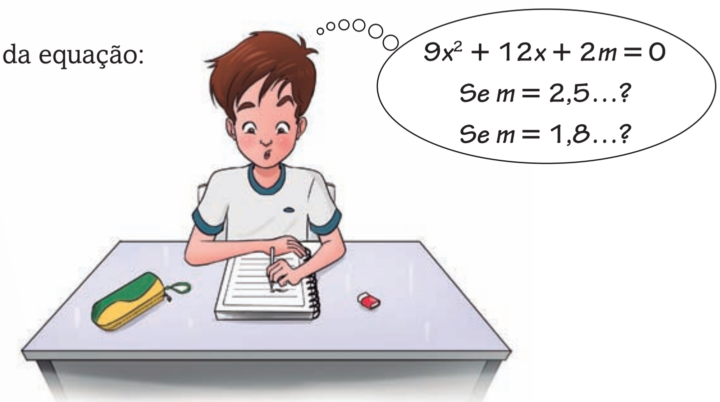
Pense mais um pouco...

Considere o exercício **59** da série acima.

O que podemos concluir sobre as raízes da equação:

- quando $m = 2{,}5$?
- quando $m = 1{,}8$?

Como $m = 2{,}5 > 2$, nesse caso a equação não admite raízes reais.
Como $m = 1{,}8 < 2$, a equação tem duas raízes reais e diferentes.



CLAUDIO CHIYO

7 Relações de Girard

No início do século XVII, houve grande interesse em toda a Europa Ocidental pelos estudos matemáticos. Muitas pesquisas foram feitas para encontrar soluções às diversas equações e estabelecer relações entre seus coeficientes e suas raízes. Porém, esses estudos eram limitados porque os matemáticos da época não consideravam as raízes negativas.

Em 1629, foi publicado o livro *Invention nouvelle en l'algèbre* (algo como Novas invenções em álgebra), do francês Albert Girard (1595-1632). Nesse livro, ele demonstra as relações que há entre as raízes e os coeficientes de uma equação, admitindo a existência das raízes negativas.

Vejamos agora como aplicar essas relações em uma equação do 2º grau.

Consideremos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, sendo x_1 e x_2 suas raízes.

Vamos estabelecer as relações de Girard entre essas raízes e os coeficientes *a*, *b* e *c* dessa equação.

Já vimos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ (\text{com } \Delta \geqslant 0)$$

1ª relação: soma das raízes

Considerando *S* a soma das raízes de uma equação do 2º grau, podemos verificar que $S = \frac{-b}{a}$.

De fato:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Então:

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{ou} \quad S = \frac{-b}{a}}$$

2ª relação: produto das raízes

Indicando por *P* o produto das raízes de uma equação do 2º grau, podemos verificar que $P = \frac{c}{a}$.

De fato:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad P = \frac{c}{a}}$$

Veja alguns exemplos de aplicação das relações de Girard.

a) Vamos determinar o valor de k, com $k \neq 0$, na equação $kx^2 - 22x + 20 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{11}{3}$.

Temos: $a = k$, $b = -22$ e $c = 20$

$$\underbrace{x_1 + x_2} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-(-22)}{k} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{22}{k} = \frac{11}{3}$$

$$11k = 66$$

$$\frac{11k}{11} = \frac{66}{11}$$

Portanto, $k = 6$.

JOSÉ LUÍS JUHAS

b) Vamos determinar o valor de p, com $p \neq 0$, na equação $px^2 - 5x + (p - 5) = 0$ para que o produto das raízes seja $\frac{1}{6}$.

Temos: $a = p$, $b = -5$ e $c = p - 5$

$$\underbrace{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{p-5}{p} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot (p - 5) = p$$

$$6p - 30 = p$$

$$5p = 30$$

Portanto, $p = 6$.

c) Vamos calcular o valor de k na equação $x^2 - 12x + k = 0$ para que uma das raízes seja o dobro da outra.

Indicando as raízes dessa equação por m e n, temos:

$$\begin{cases} m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12 \\ m \cdot n = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m + n = 12 \\ m \cdot n = k \end{cases}$$

De acordo com a condição do problema, $m = 2n$.

Primeiro, vamos resolver o sistema: $\begin{cases} m + n = 12 \\ m = 2n \end{cases}$

Substituindo m por $2n$ na equação $m + n = 12$, obtemos:

$$2n + n = 12$$
$$n = 4$$

Como $m = 2n$ e $n = 4$, temos, $m = 8$.

Mas $k = m \cdot n$, então: $k = 8 \cdot 4 = 32$

61. a) $S = 8$; $P = 15$; $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$
b) $S = -2$; $P = -3$; $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$
c) $S = -\frac{21}{5}$; $P = \frac{4}{5}$; $x_1 = -4$ e $x_2 = -\frac{1}{5}$
d) $S = -7$; $P = 12$; $x_1 = -3$ e $x_2 = -4$
e) $S = 2$; $P = 0$; $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$
f) $S = 0$; $P = -144$; $x_1 = -12$ e $x_2 = 12$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

60 Considere x_1 e x_2 como as raízes da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$. Sem resolver a equação, determine:

a) $x_1 + x_2$; 6　　b) $x_1 \cdot x_2$. 5

61 Em cada caso, determine a soma S e o produto P das raízes das equações e calcule as raízes.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
b) $x^2 + 2x - 3 = 0$
c) $5x^2 + 21x + 4 = 0$
d) $x^2 + 7x + 12 = 0$
e) $3x^2 - 6x = 0$
f) $x^2 - 144 = 0$

62 Se m e n são raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$, determine o valor da expressão $mn(m + n)$. 180

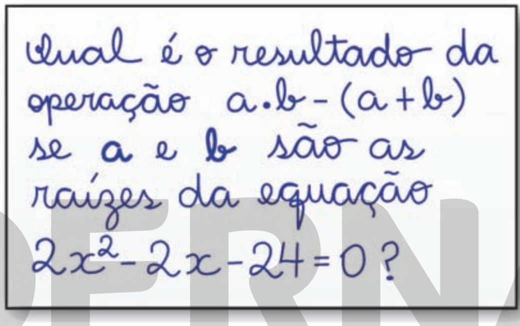
63 Determine o valor de m na equação $4x^2 - (m - 2) \cdot x + 3 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{3}{4}$. $m = 5$

64 Calcule o valor de m na equação $(m + 10) \cdot x^2 + 21x + 5 = 0$ para que a soma das raízes seja $-\frac{7}{6}$. $m = 8$

65 Determine o valor de p na equação $6x^2 - 11x + (p - 1) = 0$ para que o produto das raízes seja $\frac{2}{3}$. $p = 5$

66 Calcule o valor de p na equação $x^2 - 8x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja o triplo da outra. $p = 6$

67 A professora Neusa fez vários cartões com exercícios para sortear na aula de Matemática. Felipe pegou este cartão:



JOSÉ LUÍS JUHAS

Felipe acertou a questão. Que resposta ele deu? -13

Composição de uma equação do 2º grau

Conhecidas as relações de Girard, é possível compor uma equação do 2º grau quando são dadas suas raízes. É o que vamos estudar a seguir.

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Dividindo todos os termos por a, sendo $a \neq 0$, temos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

De acordo com as relações de Girard, temos:

$$\frac{-b}{a} = S \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} = -S \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = P$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por $-S$ e $\frac{c}{a}$ por P, em $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, temos:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Observe agora alguns exemplos de composição de equações do 2º grau a partir de suas raízes.

a) Vamos compor uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 3 e -8.

Inicialmente, vamos calcular a soma S das raízes.

$$S = x_1 + x_2$$
$$S = 3 + (-8)$$
$$S = -5$$

Agora, vamos calcular o produto P das raízes.

$$P = x_1 \cdot x_2$$
$$P = 3 \cdot (-8)$$
$$P = -24$$

Substituindo S por -5 e P por -24 em $x^2 - Sx + P = 0$, temos:

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - (-5) \cdot x + (-24) = 0$$
$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

Logo, $x^2 + 5x - 24 = 0$ é a equação procurada.

b) Vamos compor uma equação do 2º grau de coeficientes inteiros cujas raízes sejam 2 e $\frac{3}{5}$.

$$S = x_1 + x_2 \qquad\qquad P = x_1 \cdot x_2$$
$$S = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \qquad\qquad P = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{6}{5} = 0$$

Como os coeficientes devem ser inteiros, temos: $5x^2 - 13x + 6 = 0$

Logo, a equação procurada é $5x^2 - 13x + 6 = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

68 Forme uma equação do 2º grau de coeficientes inteiros em que as raízes sejam:

a) $x_1 = -8$ e $x_2 = 5$; $x^2 + 3x - 40 = 0$

b) $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{4}{5}$; $5x^2 - 14x + 8 = 0$

c) $x_1 = -3$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$; $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = -\frac{2}{5}$. $15x^2 + x - 2 = 0$

69 Escreva uma equação do 2º grau em que a soma das raízes seja 35 e o produto, 300.

Em seguida, calcule as raízes dessa equação.
$x^2 - 35x + 300 = 0$; 15 e 20

70 Determine, por meio de uma equação do 2º grau, dois números tais que a soma e o produto sejam, respectivamente:

a) 2 e -120; 12 e -10

b) 0,2 e $-1{,}2$. 1,2 e -1

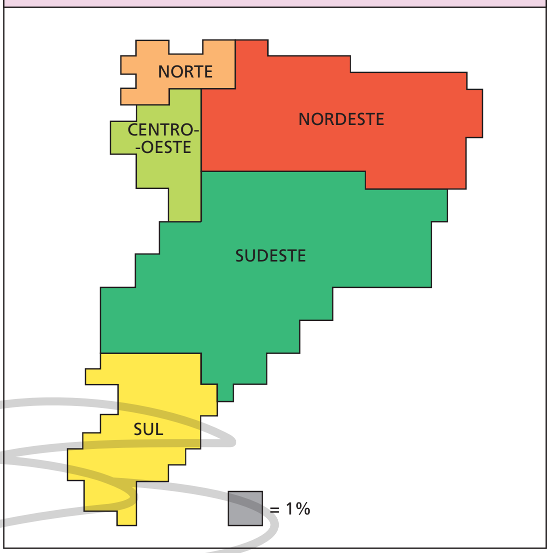
TRABALHANDO A INFORMAÇÃO i

A leitura de um mapa, anamorfose geográfica

Quando representamos as superfícies de um país em áreas proporcionais a determinada quantidade, dizemos que construímos uma anamorfose geográfica.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

BRASIL – POPULAÇÃO POR REGIÕES



Fonte: Graça M. Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 14.

Veja à esquerda uma anamorfose geográfica da população do Brasil, por regiões, que é um tipo de cartograma. Observe que o quadradinho indicado na legenda equivale a 1% da população brasileira. A superfície referente ao total da população vale 100%, mas não há preocupação com a precisão, pois o objetivo é comunicar visualmente informações gerais sobre a proporção entre as partes entre si e em relação ao todo.

Podemos quadricular essa representação e estimar quantos quadradinhos de 1% tem cada região.

Sabendo que, em 2013, o Brasil tinha aproximadamente 201.000.000 habitantes, aplicamos a porcentagem de cada região e calculamos a respectiva população. Nesse mapa, a região Sudeste tem aproximadamente 42,5 quadradinhos, ou seja, sua população corresponde a, aproximadamente, 42,5% de 201.000.000 habitantes.

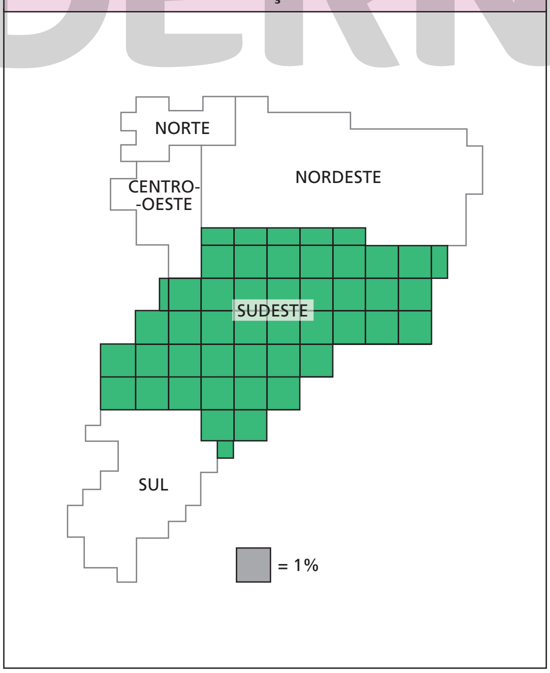
População $\simeq 0{,}425 \cdot 201.000.000$

População $\simeq 85.425.000$

CLAUDIO CHIYO

BRASIL – POPULAÇÃO POR REGIÕES

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL



Fonte: Graça M. Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 14.

Agora quem trabalha é você!

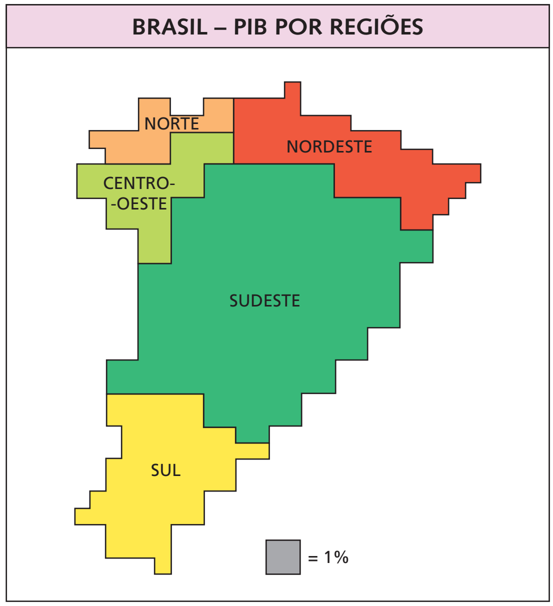
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Sul: 14%, aproximadamente 28.140.000 hab.; nordeste: 28%, aproximadamente 56.280.000 hab.; norte: 8,5%, aproximadamente 17.085.000 hab.; centro-oeste: 7%, aproximadamente 14.070.000 hab.

1 Já sabemos qual é a população aproximada do Sudeste. Agora, copie o mapa da população e termine de quadriculá-lo. Em seguida, estime quantos quadradinhos de 1% tem cada região e calcule a população aproximada de cada uma delas.

2 Copie o mapa do PIB ao lado e quadricule-o. Em seguida, estime quantos quadradinhos de 1% tem cada região e calcule quanto falta para a soma das porcentagens das regiões atingir 100%.

3 O IBGE disponibiliza uma ferramenta simplificada para criar cartogramas baseados nos dados contidos no canal Cidades@. Disponível em: <www.ibge.gov.br/webcart>. Acesso em: 7 abr. 2015.
Entre no *site* indicado e experimente construir alguns cartogramas.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Fonte: Graça M. Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 14.

2. Sudeste: 55% do PIB; sul: 16% do PIB; nordeste: 13,5% do PIB; norte: 5,5% do PIB; centro-oeste: 10% do PIB.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Determine o valor de k na equação $(k + 5)x^2 + (k - 1)x + k = 0$, de modo que ela seja do 2º grau. $k \neq -5$

2 Escreva as equações a seguir na forma reduzida e encontre as respectivas raízes.

a) $(1 - x) \cdot (5 + 2x) = 5$ $2x^2 + 3x = 0$; $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $(3y - 5) \cdot (y - 5) + y^2 = 0$

c) $(-2x - 1) \cdot (x - 2) = 3x + 5x^2$

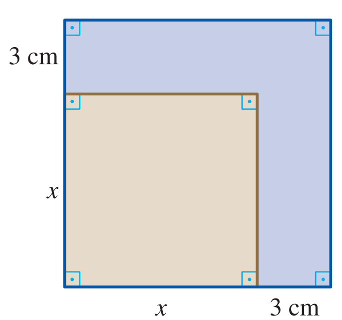
d) $5x^2 + 7 = 2x^2 - 5$ $3x^2 + 12 = 0$; não tem raiz real

c) $7x^2 - 2 = 0$; $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{2}{7}}$

2.b) $4y^2 - 20y - 25 = 0$; $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$

3 Na figura abaixo, qual deve ser o valor de x para que a área pintada de azul tenha 57 cm²?

$x = 8$ cm



NELSON MATSUDA

4 Dada a equação $x^2 - (m - 5) \cdot x + (1 - m) = 0$, determine m de modo que:

a) uma das raízes seja nula; $m = 1$

b) as raízes sejam opostas. $m = 5$

5 Determine os números reais que são soluções da equação $x^2 + 10x = 11x$. $x = 1$ ou $x = 0$

6 A soma das áreas de três terrenos quadrados de mesmo tamanho é igual à área de um campo de futebol com 80 m por 60 m.

JOSÉ LUÍS JUHAS

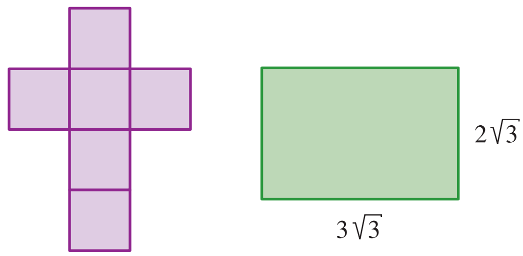
a) Escreva a equação que corresponde a essa situação. $3x^2 = 4.800$

b) Quais são as raízes dessa equação? -40 e 40

c) Qual dessas raízes representa a medida do lado de cada terreno quadrado? 40

7 Observe as figuras abaixo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



A área da figura lilás é igual à área do retângulo. Qual é a medida da altura da figura lilás? $4\sqrt{3}$

8 Determine o valor de k na equação $kx^2 - 16x + 5 = 0$ para que:

a) uma das raízes seja 3; $k = \frac{43}{9}$

b) uma das raízes seja $\frac{1}{2}$; $k = 12$

c) as raízes sejam reais e distintas; $k < \frac{64}{5}$

d) a soma das raízes seja $\frac{4}{3}$. $k = 12$

9 (UCS-RS) Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, então o valor de p é:

a) 5. **b)** $\frac{13}{3}$. **c)** 7. **d)** -5. **e)** -7. alternativa **c**

10 (Unifor-CE) Uma das soluções da equação $\frac{2x^2 + x}{11} = 2x + 1$ é um número inteiro múltiplo de: alternativa **e**

a) 2. **b)** 3. **c)** 5. **d)** 7. **e)** 11.

11 (Fuvest-SP) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 9 = 0$. O número inteiro mais próximo do número $5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot (x_1 + x_2)$ é: alternativa **b**

a) -33. **b)** -10. **c)** -7. **d)** 10. **e)** 33.

12 (Ulbra-RS) O(s) valor(es) de B na equação $x^2 - Bx + 4 = 0$ para que o discriminante seja igual a 65 é(são): alternativa **d**

a) 0. **b)** 9. **c)** -9. **d)** -9 ou 9. **e)** 16.

13 (Ufes) O valor de k para que a soma das raízes da equação $(k - 3)x^2 - 4kx + 1 = 0$ seja igual ao seu produto é: alternativa **c**

a) $\frac{1}{2}$. **b)** $\frac{1}{3}$. **c)** $\frac{1}{4}$. **d)** $\frac{2}{3}$. **e)** $\frac{3}{4}$.

14 (PUC-MG) O quociente da divisão de 72 por um número negativo é o dobro desse número. A metade desse número é: alternativa **a**

a) -3. **b)** -4. **c)** -5. **d)** -6. **e)** -7.

15 (Vunesp) Se aumentarmos em 3 cm o lado de um quadrado, sua área aumentará 27 cm². A partir desses dados, podemos dizer que o lado do quadrado mede, em cm: alternativa **a**

a) 3. **b)** 4. **c)** 5. **d)** 6. **e)** 7.

16 (UFF-RJ) Cortando-se pedaços quadrados iguais nos cantos de uma cartolina retangular de 80 cm de comprimento por 60 cm de largura, obtém-se uma figura em forma de cruz. Se a área da cruz for a terça parte da área retangular original, o tamanho do lado de cada quadrado é igual a: alternativa **d**

a) $5\sqrt{2}$ cm. **b)** $10\sqrt{2}$ cm. **c)** $15\sqrt{2}$ cm. **d)** $20\sqrt{2}$ cm. **e)** $25\sqrt{2}$ cm.

17 Ao compor uma equação do 2º grau, Fernanda, por engano, escreveu:

$$x^2 - Px + S = 0$$

Resolveu a equação corretamente e encontrou as raízes 1 e 5. Se Fernanda tivesse usado corretamente as relações de Girard para compor sua equação, quais seriam as raízes? 2 e 3

18 (FGV-SP) Se a soma das raízes da equação $kx^2 + 3x - 4 = 0$ é 10, podemos afirmar que o produto das raízes é: alternativa **a**

a) $\frac{40}{3}$. **b)** $-\frac{40}{3}$. **c)** $\frac{80}{3}$. **d)** $-\frac{80}{3}$. **e)** $-\frac{3}{10}$.

19 (Unifor-CE) Um estudante resolve uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ e, enganando-se no valor de c, obtém as raízes 8 e 2. Um colega seu, resolvendo a mesma equação, engana-se no valor de b e obtém as raízes -9 e -1. Resolvendo-se a equação correta, quanto se obtém somando o triplo da menor raiz com a outra? 12

CAPÍTULO 5
Triângulos retângulos

1 Um pouco de História

O filósofo grego Pitágoras nasceu na ilha de Samos provavelmente em 570 a.C., cerca de cinquenta anos depois do nascimento de Tales de Mileto.

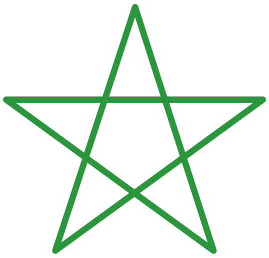
Filho de um rico comerciante, viajou pelo Egito, pela Babilônia e talvez tenha ido até a Índia.

Ao voltar para a Grécia, fixou-se em sua terra natal, mas, descontente com as arbitrariedades do governo de Samos, mudou-se para Crotona, uma colônia grega situada na Itália. Lá, fundou a escola pitagórica.

Nessa escola, havia aulas de Religião, Filosofia, Política, Música, Astronomia e Matemática. Seus alunos eram divididos em duas categorias: os dos três primeiros anos eram chamados ouvintes e os dos anos seguintes, matemáticos, pois somente a estes eram revelados os segredos da Matemática. Aliás, a origem da palavra **matemática** (que significa "o aprendizado da arte, da ciência") é atribuída a Pitágoras.

O lema da escola era "Tudo é número". Nela, procuravam explicar com números tudo o que existe na natureza.

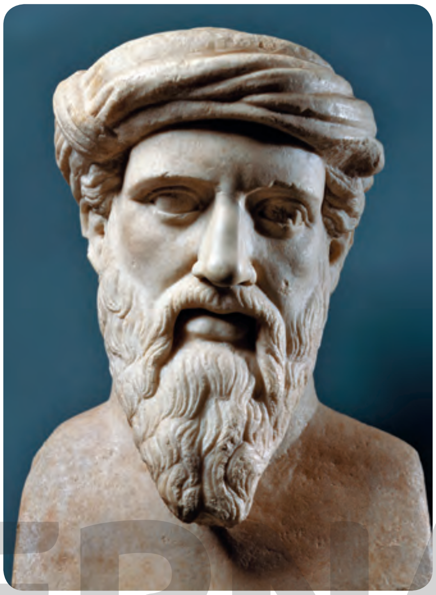
Os pitagóricos formaram uma sociedade secreta cujo emblema era um pentágono estrelado — ou pentagrama. Sua única aspiração era o conhecimento.



NELSON MATSUDA

Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente para a Geometria. Entre essas contribuições, a de maior sucesso foi sem dúvida o conhecido teorema de Pitágoras.

Mesmo depois da morte de Pitágoras, por volta de 500 a.C., a sociedade dos pitagóricos continuou a existir por mais de quatro séculos.



DEAGOSTINI/GETTY IMAGES – MUSEU CAPITOLINI, ROMA

Busto de Pitágoras, no Museu Capitolino em Roma, Itália. (Foto de 2014.)

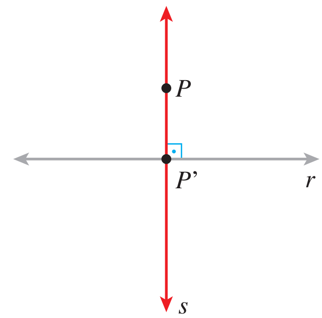
STUART BLACK/ALAMY/LATINSTOCK

Monumento a Pitágoras, ilha de Samos, Grécia. (Foto de 2011.)

2 Projeções ortogonais

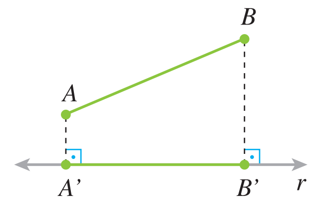
Considere uma reta *r* e um ponto *P* externo a ela.

Vamos traçar por *P* a reta *s*, perpendicular à reta *r*. No cruzamento das retas *r* e *s* obtemos o ponto *P*’, que é chamado de **projeção ortogonal de *P* sobre *r*.**



Considere agora a reta *r* e o segmento $\overline{AB}$ da figura ao lado.

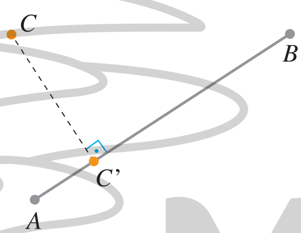
Projetando as extremidades do segmento $\overline{AB}$ sobre *r*, obtemos os pontos *A*’ e *B*’. O segmento $\overline{A'B'}$ é chamado de **projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre *r*.**



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

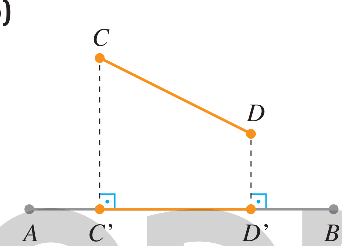
Também podemos projetar ortogonalmente um ponto ou um segmento sobre um segmento. Veja os exemplos.

a)



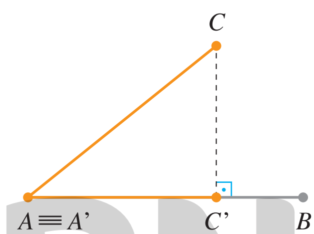
C’ é a projeção ortogonal do ponto *C* sobre o segmento $\overline{AB}$.

b)



$\overline{C'D'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{CD}$ sobre o segmento $\overline{AB}$.

c)



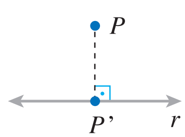
$\overline{A'C'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre o segmento $\overline{AB}$.

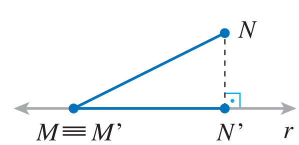
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe as figuras. Depois, classifique as sentenças em verdadeira ou falsa.





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

a) *P* é a projeção ortogonal do ponto *P*’ sobre a reta *r*. falsa

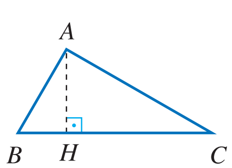
b) $\overline{C'D'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{CD}$ sobre o segmento $\overline{AB}$. verdadeira

c) *N*’ é a projeção ortogonal do ponto *N* sobre a reta *r*. verdadeira

d) $\overline{M'N'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{MN}$ sobre a reta *r*. verdadeira

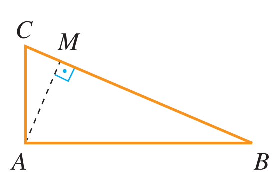
2 Quais são as projeções ortogonais dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{BC}$ em cada triângulo?

a)



$\overline{BH}$ e $\overline{HC}$

b)



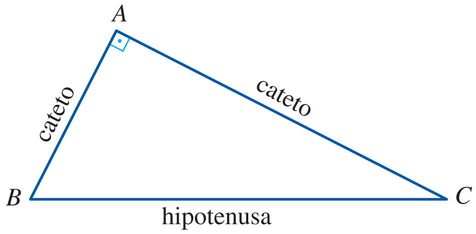
$\overline{BM}$ e $\overline{CM}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

3 Elementos de um triângulo retângulo

O triângulo *ABC* a seguir é um triângulo retângulo, pois tem um ângulo reto (ângulo $\hat{A}$).

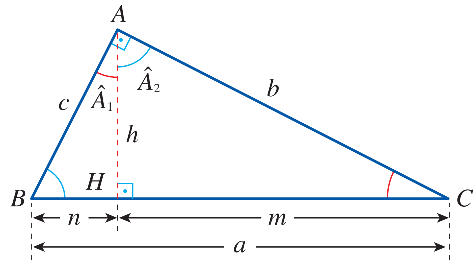
NELSON MATSUDA



Chamamos de **catetos** os lados perpendiculares entre si que formam o ângulo reto em um triângulo retângulo. Já o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**.

Observe o triângulo retângulo *ABC* da figura abaixo.

NELSON MATSUDA



Nesse triângulo, destacamos:

- *a*, que é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$;
- *c*, que é a medida do cateto $\overline{AB}$, oposto ao ângulo $\hat{C}$;
- *b*, que é a medida do cateto $\overline{AC}$, oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- *h*, que é a medida da altura $\overline{AH}$, relativa à hipotenusa;
- *n*, que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$;
- *m*, que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

Em relação aos ângulos, temos:

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}) = 90° \\ m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90° \end{array}\right\} m(\hat{A}_1) + \cancel{m(\hat{B})} = \cancel{m(\hat{B})} + m(\hat{C}), \text{ então } m(\hat{A}_1) = m(\hat{C}) \text{ ou } \hat{A}_1 \cong \hat{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}) = 90° \\ m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90° \end{array}\right\} m(\hat{A}_2) + \cancel{m(\hat{C})} = m(\hat{B}) + \cancel{m(\hat{C})}, \text{ então } m(\hat{A}_2) = m(\hat{B}) \text{ ou } \hat{A}_2 \cong \hat{B}$$

OBSERVAÇÕES

- Lembre-se de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, nos triângulos retângulos, a soma das medidas dos dois ângulos agudos de cada triângulo é 90°, ou seja, eles são complementares.
- Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então eles são triângulos semelhantes. Chamamos esse fato de caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança.

3 Com auxílio de uma régua, dê a medida:

a) da hipotenusa do triângulo retângulo MNP; 5 cm

b) do cateto oposto ao $\hat{N}$; 3 cm

c) do cateto adjacente ao $\hat{N}$; 4 cm

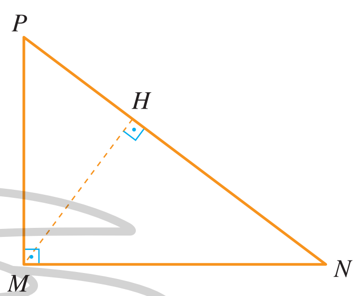
d) do cateto oposto ao $\hat{P}$; 4 cm

e) do cateto adjacente ao $\hat{P}$; 3 cm

f) da altura relativa à hipotenusa; 2,4 cm

g) da projeção ortogonal do cateto menor sobre a hipotenusa; 1,8 cm

h) da projeção ortogonal do cateto maior sobre a hipotenusa. 3,2 cm



NELSON MATSUDA

4 Desenhe um triângulo retângulo cujos catetos meçam 4,2 cm e 5,6 cm. construção de figura

a) Obtenha, com auxílio de uma régua, a medida aproximada da hipotenusa desse triângulo. 7 cm

b) Verifique se o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. sim

5 Usando régua e compasso, construa os triângulos de medidas: construção de figuras

- 2 cm, 4 cm e 5 cm
- 2 cm, 3,5 cm e 4 cm
- 4,2 cm, 5,6 cm e 7 cm

5. a) • obtusângulo • acutângulo • retângulo
b) • $25 > 4 + 16$ • $16 < 4 + 12{,}25$ • $49 = 17{,}64 + 31{,}36$

a) Classifique os triângulos construídos de acordo com as medidas dos ângulos.

b) Para cada triângulo, estabeleça uma relação entre o quadrado do maior lado e a soma dos quadrados dos outros dois lados.

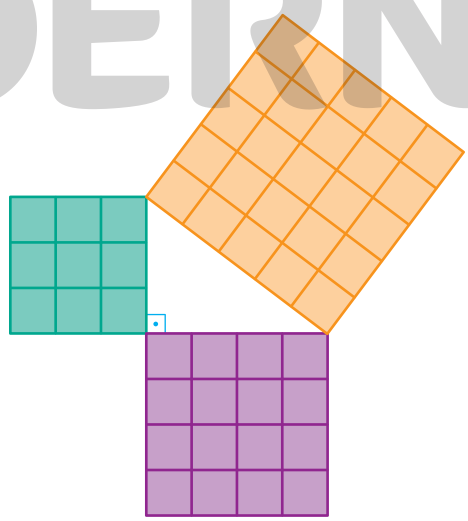
4 Teorema de Pitágoras

Considerando como unidade de medida a área de cada quadradinho da figura ao lado, notamos que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores, ou seja:

$$25 = 9 + 16$$

Como $25 = 5^2$, $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$, podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira: $5^2 = 3^2 + 4^2$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.



NELSON MATSUDA

A relação entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração do teorema de Pitágoras

Existem mais de trezentas demonstrações do teorema de Pitágoras. Vamos apresentar uma que faz uso da equivalência de áreas.

Considerando um triângulo retângulo, construímos quadrados sobre a hipotenusa de medida a e sobre os catetos de medidas b e c, como mostra a figura 1. Nas figuras 2 e 3, construímos quadrados de lados que medem $(b + c)$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

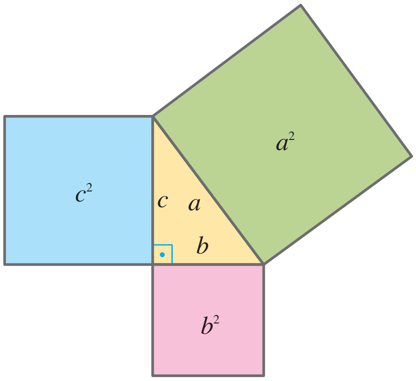


Figura 1

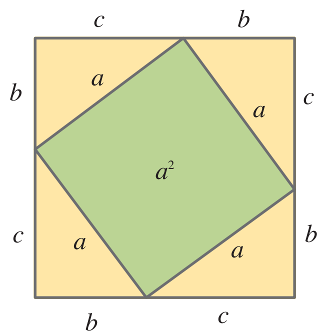


Figura 2

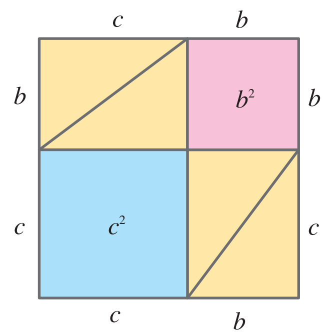


Figura 3

O quadrado da figura 2 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, e pelo quadrado verde. Assim, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado verde.

O quadrado da figura 3 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, pelo quadrado azul e pelo quadrado rosa. Então, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com as áreas dos quadrados azul e rosa.

Logo, a área do quadrado verde é a soma da área do quadrado azul com a área do quadrado rosa, ou seja:

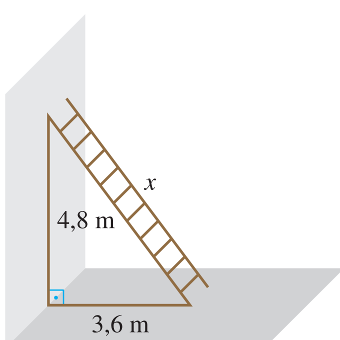
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Observe um exemplo de aplicação do teorema de Pitágoras.

Precisamos calcular o comprimento x de uma escada que está apoiada em uma parede, conforme a figura abaixo.

Para isso, vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

NELSON MATSUDA



$$x^2 = (4{,}8)^2 + (3{,}6)^2$$
$$x^2 = 23{,}04 + 12{,}96$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

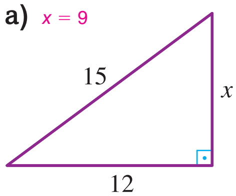
Como x é o comprimento da escada, ele deve ser um número positivo. Portanto, o comprimento da escada é 6 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

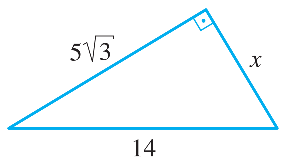
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

6 Calcule o valor de x aplicando o teorema de Pitágoras:

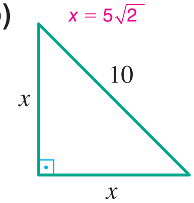
a) $x = 9$



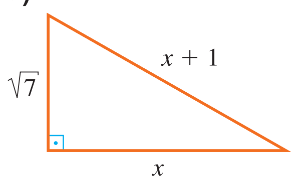
c) $x = 11$



b) $x = 5\sqrt{2}$



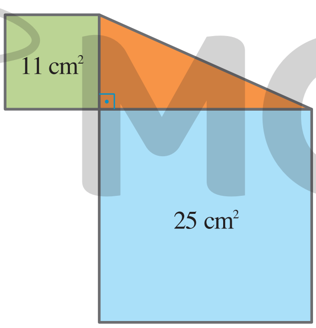
d) $x = 3$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

7 Em um esquadro, os lados perpendiculares medem 12 cm e $12\sqrt{3}$ cm. Quanto mede o lado oposto ao ângulo reto desse esquadro? 24 cm

8 Considere os quadrados coloridos de verde e de azul representados na figura abaixo e, em seguida, faça o que se pede.



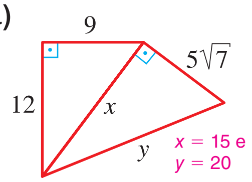
NELSON MATSUDA

a) Determine a área do triângulo alaranjado. $2{,}5\sqrt{11}$ cm²

b) Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo. 6 cm

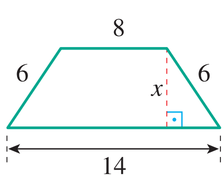
9 Aplicando o teorema de Pitágoras, determine as medidas x e y das figuras a seguir.

a)



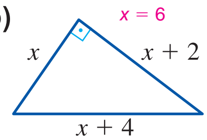
$x = 15$ e $y = 20$

c)



$x = 3\sqrt{3}$

b) $x = 6$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

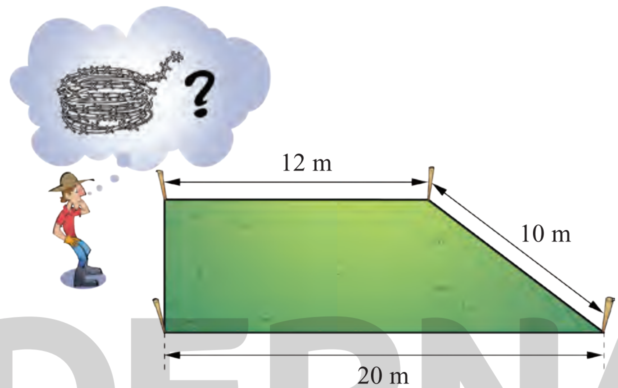
10 As diagonais de um losango medem 12 cm e 16 cm.

a) Determine a medida do lado desse losango. 10 cm

b) Calcule a área desse losango. 96 cm²

11 Em um triângulo isósceles, a base mede 12 cm e cada um dos lados congruentes mede 9 cm. Faça um esboço desse triângulo e calcule a medida da altura dele. $3\sqrt{5}$ cm

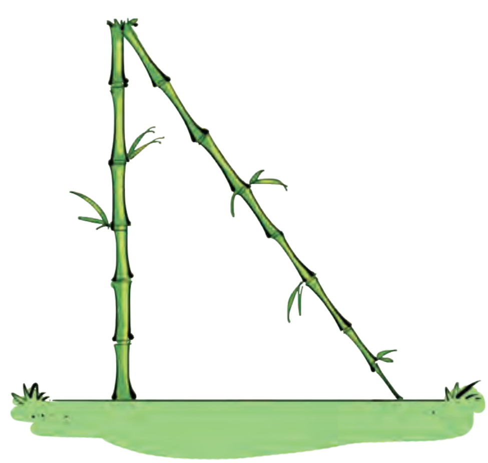
12 Quantos metros de arame são necessários para cercar, com 6 voltas, um terreno em forma de trapézio retângulo cujas bases medem 12 m e 20 m e cujo lado oblíquo mede 10 m? 288 m



CLAUDIO CHIYO

13 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ m e as medidas dos catetos são expressas por x e $x + 3$. Calcule a medida dos catetos. 3 m e 6 m

14 Um bambu é quebrado pelo vento a 4,8 m de altura. Ele tomba de modo que sua ponta toca o chão a 3,6 m de sua base. Determine a altura desse bambu. 10,8 m

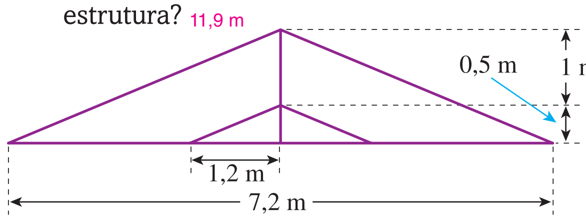


CLAUDIO CHIYO

Lembre-se:
Não escreva no livro!

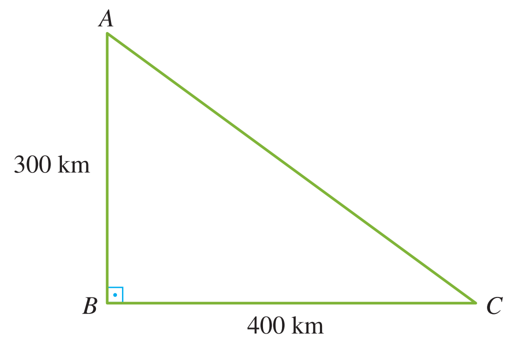
15 Para reforçar a sustentação de uma placa de propaganda com formato retangular, que mede 2 m de comprimento por 5 m de largura, foram colocadas duas ripas de madeira no sentido das diagonais da placa. Qual é o comprimento aproximado de cada ripa? 5,38 m

16 A figura abaixo representa a estrutura de madeira do telhado de uma residência. A base tem 7,2 m. Quantos metros de madeira são necessários para construir as outras partes dessa estrutura? 11,9 m



NELSON MATSUDA

17 Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, quantos quilômetros percorreria? 500 quilômetros



NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

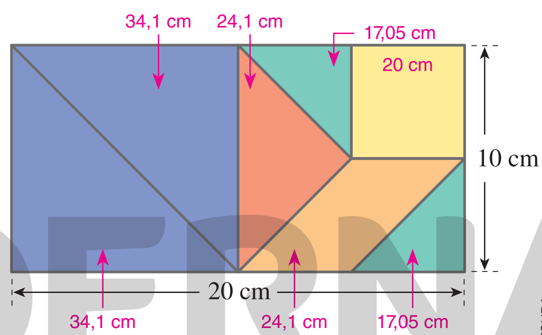
Pense mais um pouco...

Já vimos que o tangram é formado por sete peças: cinco triângulos retângulos isósceles, sendo dois grandes, um médio e dois pequenos; um quadrado e um paralelogramo.

Com essas sete peças, é possível montar muitas figuras.

Observe, por exemplo, o retângulo ao lado, feito com as peças do tangram.

Determine o perímetro aproximado de cada peça desse tangram. Use para $\sqrt{2}$ o valor aproximado 1,41.



NELSON MATSUDA

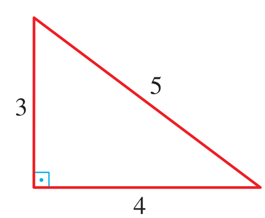
PARA SABER MAIS +

Triângulos pitagóricos

Triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros são chamados de **triângulos pitagóricos**.

Entre eles, o mais famoso é o triângulo cujos lados medem números inteiros e consecutivos: 3, 4 e 5.

Pelo caso LLL de semelhança, qualquer triângulo retângulo cujos lados sejam proporcionais aos números 3, 4 e 5 é um triângulo pitagórico.

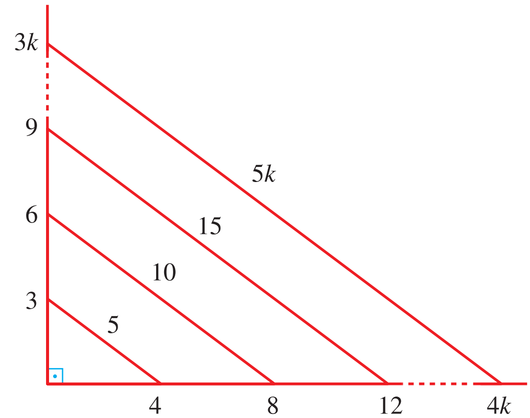


NELSON MATSUDA

Em outras palavras, os triângulos cujas medidas são dadas pelos ternos pitagóricos (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), ..., ($3k$, $4k$, $5k$), sendo k um número inteiro positivo, são triângulos pitagóricos.

Esse assunto inspirou diversos estudos que chegaram a resultados bastante curiosos.

Um desses estudos mostra como podemos obter determinado tipo de terno pitagórico e, por consequência, um triângulo pitagórico. Observe:



ADILSON SECCO

Consideremos dois números ímpares consecutivos (ou dois números pares consecutivos) x e $(x + 2)$.

- A medida de um cateto é a soma dos números: $x + (x + 2)$.
- A medida do outro cateto é o produto dos números: $x \cdot (x + 2)$.
- A medida da hipotenusa é o produto dos números, mais 2.

Por exemplo, se $x = 1$, temos $x + 2 = 3$; então:

- um cateto mede $1 + 3 = 4$;
- o outro cateto mede $1 \cdot 3 = 3$;
- a hipotenusa mede $1 \cdot 3 + 2 = 5$;

Temos aqui o triângulo de medidas 3, 4 e 5.

Veja outro exemplo em que $x = 8$ e $x + 2 = 10$.

Os catetos medem 18 $(8 + 10)$ e 80 $(8 \cdot 10)$, e a hipotenusa mede 82 $(8 \cdot 10 + 2)$.

Note que $82^2 = 18^2 + 80^2$.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

a) respostas possíveis: 20 cm e 25 cm; 8 cm e 17 cm; 36 cm e 39 cm; 112 cm e 113 cm

Reúna-se com um colega, usem uma calculadora e façam o que se pede.

a) Um dos catetos de um triângulo pitagórico mede 15 cm. Determinem dois possíveis pares de medidas do outro cateto e da hipotenusa desse triângulo.

b) A hipotenusa de um triângulo pitagórico semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm mede 35 cm. Determinem o perímetro e a área desse triângulo. 84 cm e 294 cm²

c) O perímetro de um triângulo pitagórico semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm é 108 cm. Determinem a medida dos catetos e da hipotenusa desse triângulo.
27 cm, 36 cm e 45 cm

d) Construam um quadro como o que vem a seguir e atribuam a x cinco números inteiros, completando-o. Depois, verifiquem que os ternos pitagóricos obtidos, ou seja, os números das três colunas da direita, satisfazem o teorema de Pitágoras. construção de quadro

MODELO

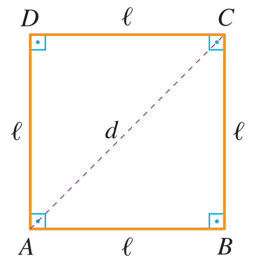
x	$x + 2$	$x + (x + 2)$	$x \cdot (x + 2)$	$x \cdot (x + 2) + 2$

5 Aplicações do teorema de Pitágoras

Relacionando as medidas da diagonal e do lado de um quadrado

Considere o quadrado *ABCD*, com lado medindo ℓ e diagonal, *d*.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *ABC*, temos:



NELSON MATSUDA

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$

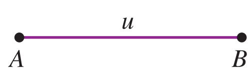
Portanto, com a expressão $d = \ell\sqrt{2}$ é possível calcular a diagonal de um quadrado quando se conhece a medida de seu lado, e vice-versa.

Veja, a seguir, alguns exemplos.

a) Vamos calcular a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é 12 cm.
Se $P = 12$ cm, então $\ell = 3$ cm.
$d = \ell\sqrt{2}$
$d = 3\sqrt{2}$
Logo, a diagonal desse quadrado mede $3\sqrt{2}$ cm.

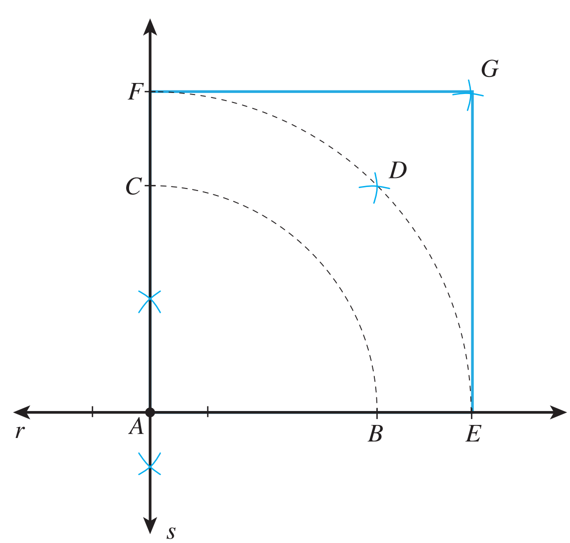
b) Vamos calcular a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ cm.
Substituímos *d* por $7\sqrt{2}$ em $d = \ell\sqrt{2}$.
$\ell\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
$\ell = 7$
Logo, o lado desse quadrado mede 7 cm.

c) Dado o segmento $\overline{AB}$ com medida *u* abaixo, vamos construir um quadrado cujo lado meça $\sqrt{2}$ u.



Usando régua e compasso podemos seguir os seguintes passos:

- transportamos $\overline{AB}$ para uma reta *r*;
- por *A*, traçamos a reta *s*, perpendicular a *r*;
- com abertura do compasso igual a *u*, traçamos três arcos: com centro em *A*, obtemos o ponto *C* em *s*; com centro em *B*, e depois em *C*, obtemos o ponto *D*;
- com abertura do compasso igual a *AD* ($AD = \sqrt{2}\,u$) traçamos três arcos: com centro em *A*, obtemos o ponto *E* em *r* e o ponto *F* em *s*; com centro em *E*, e depois em *F*, obtemos o ponto *G*;
- traçamos $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$ e obtemos o quadrado *AEGF*, com lado de medida $\sqrt{2}\,u$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

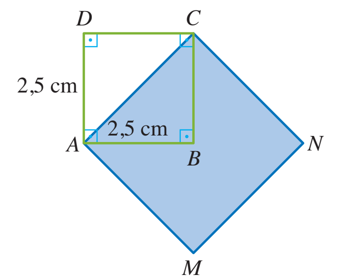
18 Considere que o lado de um quadrado *ABCD* mede 15 cm. $15\sqrt{2}$ cm

a) Determine a medida de sua diagonal.

b) Calcule a área do quadrado cujo lado tem a mesma medida da diagonal do quadrado *ABCD*. 450 cm²

19 A diagonal de um quadrado mede $10\sqrt{2}$ cm. Três quadrados que possuem diagonais com essa medida são colocados um ao lado do outro, de modo que formem um retângulo. Calcule o perímetro desse retângulo. 80 cm

20 Calcule a área do quadrado *AMNC*, no qual *B* é ponto médio de uma de suas diagonais. 12,50 cm²

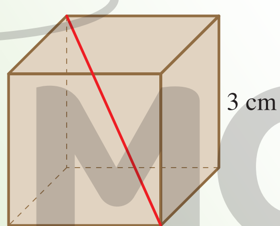


FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

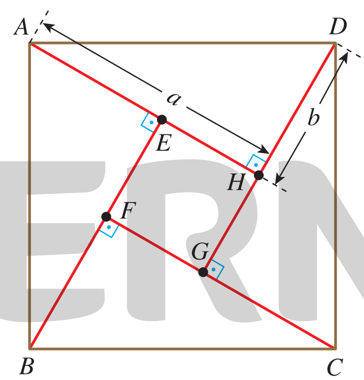
Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e resolvam os exercícios a seguir.

1. Quanto mede a diagonal do cubo abaixo, destacada em vermelho? $3\sqrt{3}$ cm

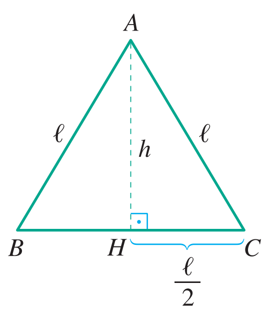


2. Mostrem que, se *ABCD* é um quadrado, a área do quadrado *EFGH* é igual a $(a - b)^2$. demonstração



Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC*, com lado medindo ℓ e altura, *h*.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *HCA*, temos:



$$(AH)^2 + (HC)^2 = (AC)^2$$

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

A fórmula $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ permite calcular a medida da altura do triângulo equilátero quando se conhece a medida do lado desse triângulo, e vice-versa.

Veja os exemplos a seguir.

a) Vamos calcular a medida da altura de um triângulo equilátero de 18 cm de perímetro. Se $P = 18$ cm, então $\ell = 6$ cm.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Logo, a medida da altura desse triângulo é $3\sqrt{3}$ cm.

b) Vamos calcular a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura mede $6\sqrt{3}$ cm. Substituímos h por $6\sqrt{3}$ em $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$:

$$6\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$\ell\cancel{\sqrt{3}} = 12\cancel{\sqrt{3}}$$

$$\ell = 12$$

Logo, o lado desse triângulo mede 12 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

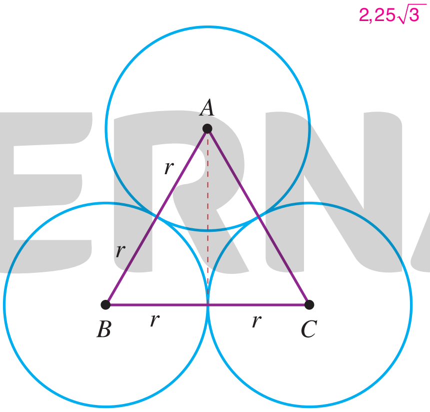
21 O lado de um triângulo equilátero mede 3 cm. Calcule a medida da altura desse triângulo. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

22 Determine a área de um triângulo equilátero cuja altura mede $12\sqrt{3}$ cm. $144\sqrt{3}$ cm^2

23 Com um barbante de 48 cm, contorna-se exatamente um triângulo equilátero. Qual é a medida da altura desse triângulo? $8\sqrt{3}$ cm

24 O lado de um triângulo equilátero tem a mesma medida que a diagonal de um quadrado com 25 cm de lado. Calcule a medida da altura desse triângulo. $\dfrac{25\sqrt{6}}{2}$ cm

25 Na figura abaixo, cada circunferência tem 1,5 cm de raio. Determine a área do triângulo *ABC*. $2{,}25\sqrt{3}$ cm^2



NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

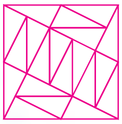
Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Recortem, em um papel quadriculado, 20 triângulos retângulos congruentes tais que a medida de um cateto (x cm) seja o dobro da medida do outro cateto ($2x$ cm). Disponham os triângulos lado a lado sobre a carteira formando um quadrado.

Qual é a medida do lado desse quadrado?

$(2x\sqrt{5})$ cm

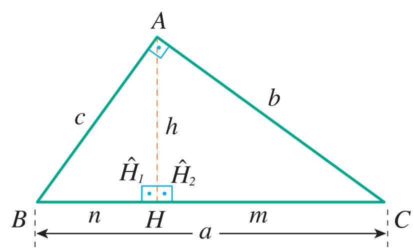


DANILLO SOUZA

6 Relações métricas em um triângulo retângulo

1ª relação

Considere o triângulo *ABC* ao lado. Traçando a altura relativa à hipotenusa, obtemos alguns pares de triângulos semelhantes.



NELSON MATSUDA

1. Comparando os triângulos *ABC* e *HBA*, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_1$ (ângulos retos)
- $\hat{B} \cong \hat{B}$ (ângulo comum)

Logo, pelo caso AA, os triângulos *ABC* e *HBA* são semelhantes e, portanto, os lados desses triângulos são proporcionais.

Então, podemos escrever a proporção:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}, \text{ ou seja, } c^2 = an$$

2. Comparando os triângulos *ABC* e *HAC*, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulo comum)

Do mesmo modo, pelo caso AA, os triângulos *ABC* e *HAC* são semelhantes. Portanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}, \text{ ou seja, } b^2 = am$$

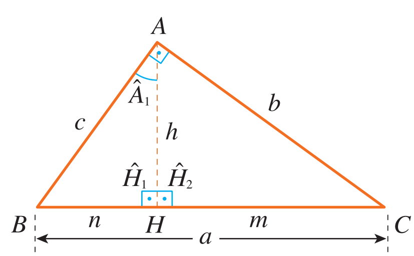
O quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela.

2ª relação

Comparando os triângulos *ABH* e *CAH*, temos:

- $\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{A}_1 \cong \hat{C}$ (ambos têm por complemento o ângulo $\hat{B}$)

Logo, pelo caso AA, os triângulos *ABH* e *CAH* são semelhantes. Portanto:



NELSON MATSUDA

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}, \text{ ou seja, } h^2 = mn$$

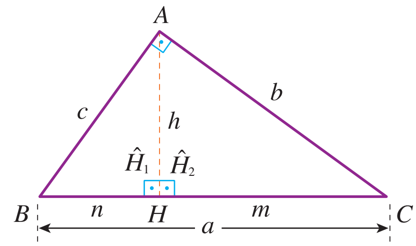
O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre ela.

3ª relação

Comparando os triângulos *ABC* e *HAC*, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulo comum)

Logo, pelo caso AA, os triângulos *ABC* e *HAC* são semelhantes. Portanto:



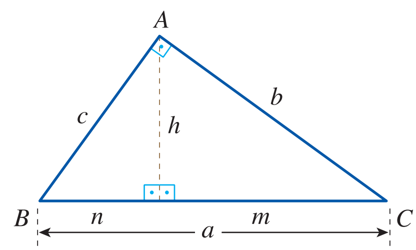
NELSON MATSUDA

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}, \text{ ou seja, } bc = ah$$

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

Outra demonstração do teorema de Pitágoras

Dado um triângulo retângulo *ABC*, vamos provar que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



NELSON MATSUDA

Hipótese {$\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em *A*

Tese {$b^2 + c^2 = a^2$

Demonstração

Como o quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela, temos:

$$b^2 = am \quad \text{e} \quad c^2 = an$$

Somando membro a membro essas duas igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am$$

$$b^2 + c^2 = a(n + m) \longleftarrow \textbf{Colocamos } \boldsymbol{a} \textbf{ em evidência.}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \longleftarrow \textbf{Substituímos } (\boldsymbol{m + n}) \textbf{ por } \boldsymbol{a}\textbf{.}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Desse modo também provamos o teorema de Pitágoras.

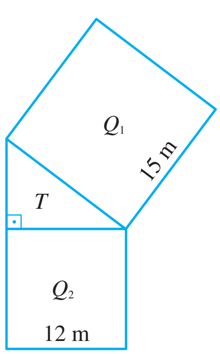
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 (Saresp) Na figura abaixo, têm-se os quadrados Q_1 e Q_2.

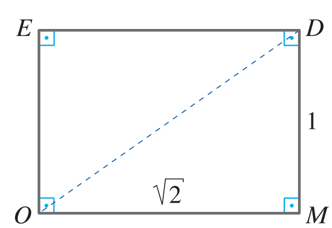
A área do triângulo *T*, em metros quadrados, é igual a: alternativa **c**

a) 100.
b) 76.
c) 54.
d) 48.



NELSON MATSUDA

27 Considere a figura abaixo e responda.



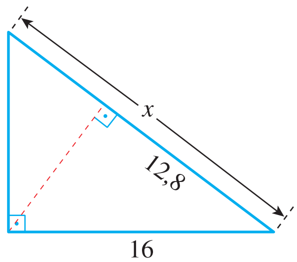
NELSON MATSUDA

a) Qual é o perímetro do $\triangle ODM$? $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) Considere um quadrado de lado de medida *OD*. Qual é a área desse quadrado? 3

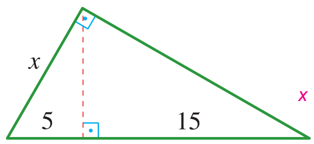
28 Aplicando as relações métricas dos triângulos retângulos, calcule o valor de x.

a)



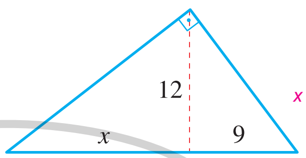
$x = 20$

b)



$x = 10$

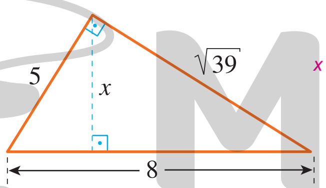
c)



$x = 16$

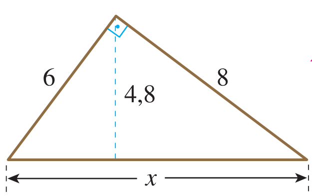
29 Aplique as relações métricas dos triângulos retângulos e calcule o valor de x.

a)



$x = \dfrac{5\sqrt{39}}{8}$

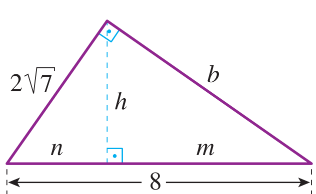
b)



$x = 10$

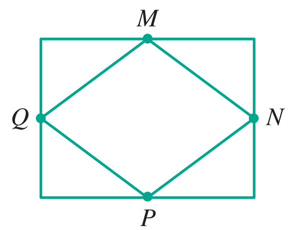
30 Calcule as medidas indicadas por letras no triângulo retângulo abaixo.

$b = 6$
$m = 4,5$
$n = 3,5$
$h = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$



31 As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 1,8 cm e 3,2 cm. Determine a medida dos catetos desse triângulo. 3 cm e 4 cm

32 (Unifor-CE) Na figura a seguir, tem-se um retângulo cujos lados medem 8 cm e 6 cm. Os pontos M, N, P e Q são pontos médios dos lados.

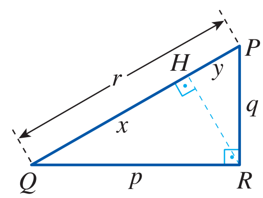


O perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é:

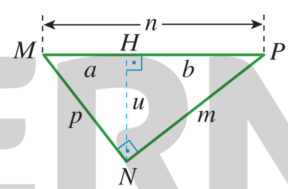
a) 20 cm.
b) 24 cm.
c) 32 cm.
d) 36 cm. alternativa **a**
e) 52 cm.

33 Aplique os casos de semelhança entre triângulos para provar que: demonstração

a) $p^2 = rx$



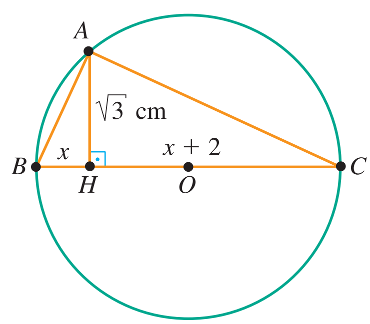
b) $u^2 = ab$



34 (UFPE) Quanto mede, em cm, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm? 12 cm

35 A área do triângulo retângulo RST é 36 cm². Determine o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura referente à hipotenusa. 72 cm²

36 Determine a medida do diâmetro da circunferência da figura abaixo. 4 cm



TRABALHANDO A INFORMAÇÃO i

Gráfico usado em Geografia – Pirâmide

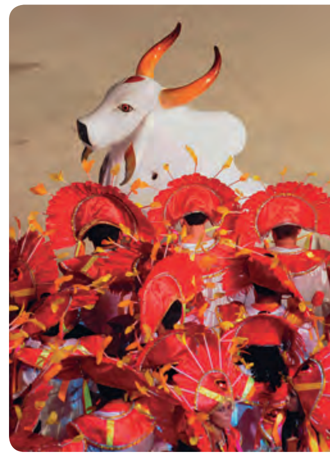
Os gráficos são muito comuns na Matemática e na Física. No entanto, outras ciências, como a Geografia, também fazem uso desse importante instrumento de informação. Particularmente o gráfico de barras duplas conhecido como **pirâmide etária** é frequente no estudo da distribuição da população de acordo com a idade e o sexo.

Veja a tabela abaixo.

Distribuição da população na região Norte do Brasil (em porcentagem)		
Faixa etária	**Masculina**	**Feminina**
0 – 4	5,0	4,8
5 – 9	5,3	5,1
10 – 14	5,6	5,4
15 – 19	5,2	5,1
20 – 24	4,9	4,9
25 – 29	4,6	4,7
30 – 34	4,1	4,1
35 – 39	3,4	3,4
40 – 44	3,0	2,8
45 – 49	2,4	2,3
50 – 54	2,0	1,9

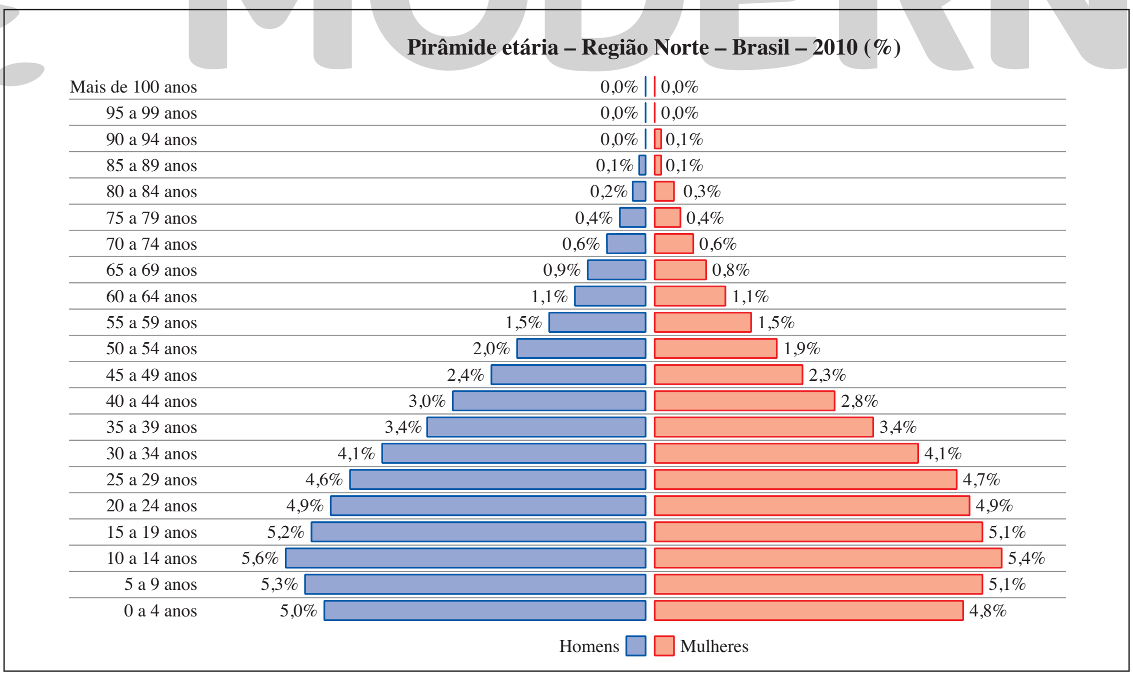
Distribuição da população na região Norte do Brasil (em porcentagem)		
Faixa etária	**Masculina**	**Feminina**
55 – 59	1,5	1,5
60 – 64	1,1	1,1
65 – 69	0,9	0,8
70 – 74	0,6	0,6
75 – 79	0,4	0,4
80 – 84	0,2	0,3
85 – 89	0,1	0,1
90 – 94	0,0	0,1
95 – 99	0,0	0,0
100 anos ou mais	0,0	0,0

Dados obtidos em: IBGE. *Censo 2010*.


ODAIR LEAL/A CRÍTICA/FOLHAPRESS

O boi Garantido, durante o festival folclórico de Parintins, no Amazonas. (Foto de 2012.)

Os geógrafos costumam traduzir essas informações em uma pirâmide etária como esta:



ADILSON SECCO

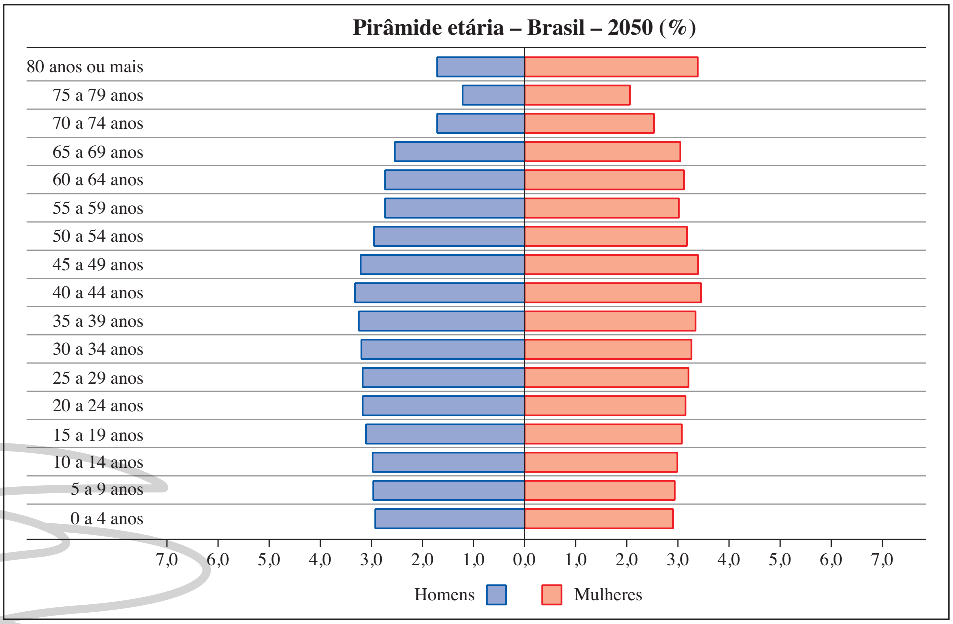
Fonte: IBGE. *Censo 2010*.

Perceba como fica fácil saber por esse gráfico que a maioria da população pesquisada é constituída por crianças, adolescentes e jovens (até 29 anos). Com esse gráfico também é possível traçar um perfil da população, por sexo e por faixa etária, e, assim, elaborar projetos que atendam às suas necessidades, ou seja, indicar ao governo o quanto e em que setores – educação, esporte etc. – deve ser investido.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe a pirâmide etária relativa à projeção da população do Brasil em 2050.



ADILSON SECCO

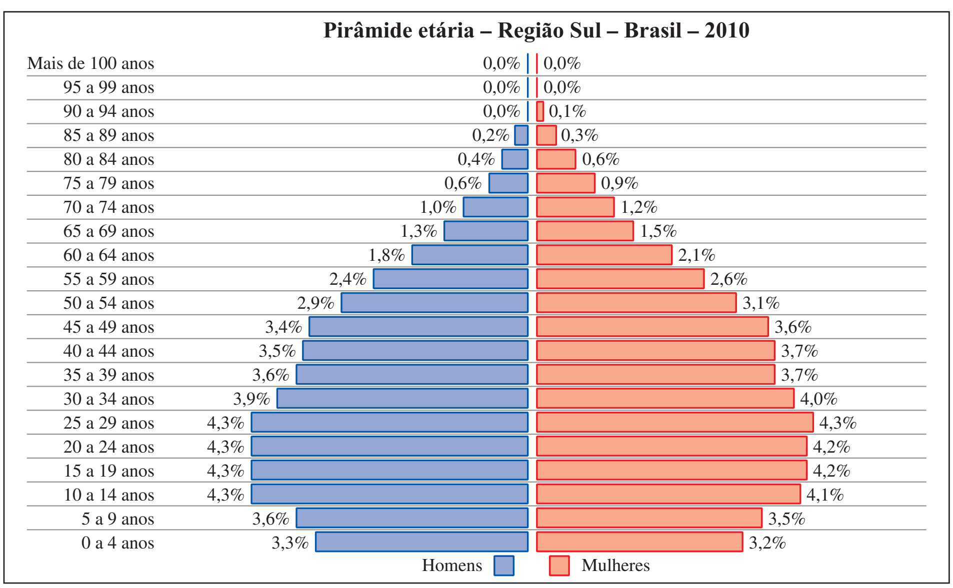
Fonte: IBGE. *Censo 2010*.

a) A maior parte dessa população também é constituída por crianças, adolescentes e jovens? não

b) Em relação aos dias de hoje, os futuros governos do Brasil deverão destinar à terceira idade uma parte maior ou menor de seu orçamento? Por quê? Maior, pois a população terá envelhecido.

c) Pesquise a respeito de previdência social e previdência privada. A mudança prevista no perfil da população brasileira afetará a atual situação previdenciária brasileira? Por quê?
Sim; resposta possível: a aposentadoria, a pensão e a assistência médica e hospitalar aos idosos serão mais onerosas e terão menos contribuintes para lhes dar suporte.

2 Agora observe a pirâmide etária relativa à população da região Sul do Brasil em 2010.



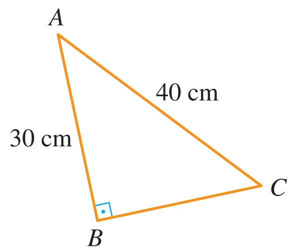
ADILSON SECCO

Fonte: IBGE. *Censo 2010*.

Que diferenças você observa nessa pirâmide em relação à da região Norte? resposta pessoal

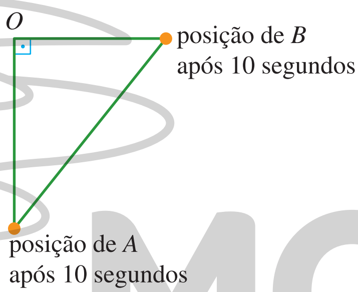
1 (UPF-RS) Para que o triângulo ABC da figura seja retângulo em B, o lado $\overline{BC}$ deve medir aproximadamente: alternativa **c**

a) 10 cm.
b) 20 cm.
c) 26,45 cm.
d) 28,28 cm.
e) 50 cm.



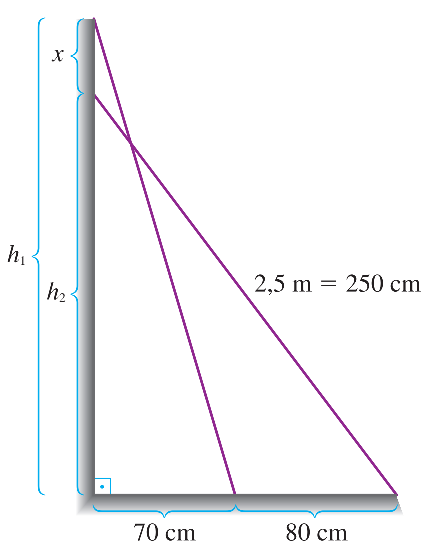
NELSON MATSUDA

2 Dois ciclistas, A e B, partem de um ponto O e movem-se perpendicularmente um ao outro, a velocidades de 16 metros por segundo e 12 metros por segundo, respectivamente. Que distância os separa após 10 segundos? 200 m



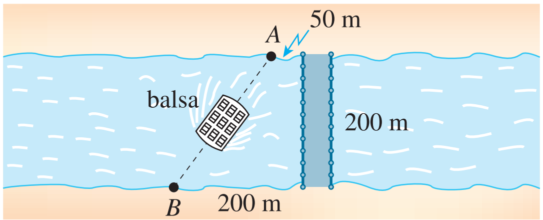
NELSON MATSUDA

3 Uma escada de 2,5 m de comprimento estava apoiada em um muro, do qual o pé da escada distava 70 cm. O pé afastou-se 80 cm de onde se encontrava. Quantos centímetros a parte superior da escada se deslocou para baixo? 40 cm



NELSON MATSUDA

4 Uma balsa está fazendo a travessia de veículos e transeuntes, pois a ponte sobre o rio foi interditada. Ela parte do ponto A, que por segurança fica a 50 metros da ponte, e chega ao ponto B.

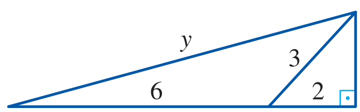


NELSON MATSUDA

a) Quantos metros a balsa percorre nessa travessia? 250 m

b) Se a balsa demorar 5 minutos para fazer a travessia, qual será a velocidade média em quilômetro por hora? 3 km/h

5 Determine o valor de y na figura. $y = \sqrt{69}$

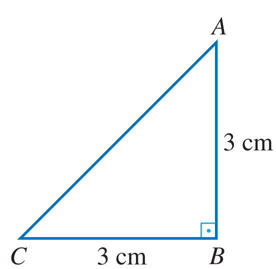


NELSON MATSUDA

6 Em um trapézio retângulo $ABCD$, a altura $\overline{AD}$ mede 6 m, a base menor $\overline{DC}$ mede 3,5 cm e a diagonal maior $\overline{BD}$ mede 10 cm. Determine:

a) a medida da base maior; 8 cm
b) a medida do lado oblíquo; 7,5 cm
c) o perímetro desse trapézio; 25 cm
d) a área desse trapézio. 34,5 cm²

7 Construa o triângulo retângulo ABC conforme a figura a seguir. Depois, construa uma perpendicular à hipotenusa $\overline{CA}$ pelo ponto C. Marque sobre essa perpendicular um ponto D, tal que $CD = 3$ cm. Unindo D com A, você obterá o triângulo CDA. Trace uma perpendicular a $\overline{AD}$ pelo ponto D e marque sobre essa perpendicular um ponto E, tal que $DE = 3$ cm. Unindo E com A, você obterá outro triângulo retângulo DEA. Qual é a medida da hipotenusa deste triângulo? 6 cm

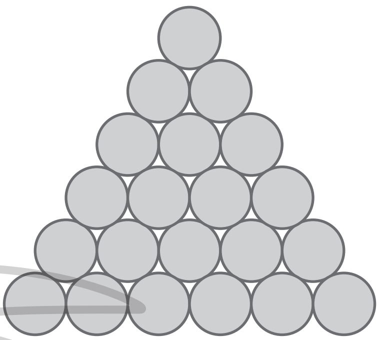


NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

8 Abalada por uma tempestade, uma torre metálica corre o risco de cair. Peritos da área de edificações foram chamados para avaliar a situação. Resolveram, então, firmar a torre amarrando a seu topo dois cabos de aço, cada um com 12 m de comprimento, fixados no chão a 6 m da base da torre. Determine a altura dessa torre. $6\sqrt{3}$ m

9 A figura representa a vista frontal de uma pilha de latas de leite em pó deitadas. Determine a medida da altura da pilha, sabendo que o raio de cada lata mede 4,5 cm. $\left(\frac{45\sqrt{3}}{2} + 9\right)$ cm



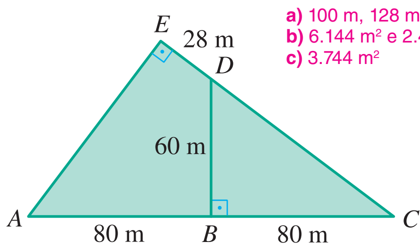
NELSON MATSUDA

10 Num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 15 cm. Determine a área desse triângulo, sabendo que sua base mede 24 cm. 108 cm²

11 É possível colocar um lápis de 18 cm num estojo retangular de 12 cm por 15 cm? Justifique sua resposta. Sim, se o lápis for acomodado no sentido da diagonal, que mede 19,2 cm.

12 Observe a figura abaixo e faça o que se pede:

a) 100 m, 128 m e 96 m
b) 6.144 m² e 2.400 m²
c) 3.744 m²



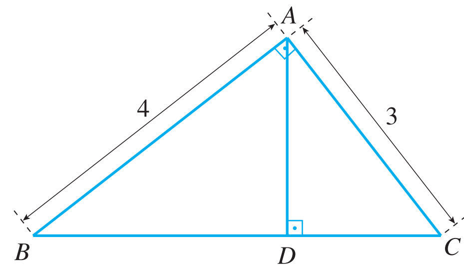
NELSON MATSUDA

a) Determine as medidas CD, EC e AE.
b) Determine as áreas dos $\triangle ACE$ e $\triangle BCD$.
c) Calcule a área do quadrilátero $ABDE$.

13 Um losango tem 60 cm de perímetro. Sabendo que a diagonal maior desse losango mede 26 cm, calcule a medida da diagonal menor. $4\sqrt{14}$ cm

14 As dimensões de um retângulo são expressas por $x + 1$ e $x - 2$. Sabendo que a área é 18 cm², determine a medida da diagonal desse retângulo. $3\sqrt{5}$ cm

15 (OM-ABC) No triângulo ABC, a medida do ângulo $\hat{A}$ é 90° e $\overline{AD}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

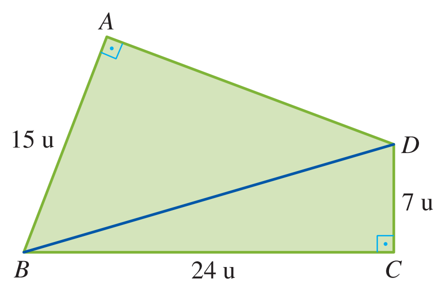


NELSON MATSUDA

Se $m = BD$, $n = DC$ e $L = 25 \cdot m \cdot n$, então L é igual a: alternativa **d**

a) 100. **b)** 121. **c)** 169. **d)** 144. **e)** 225.

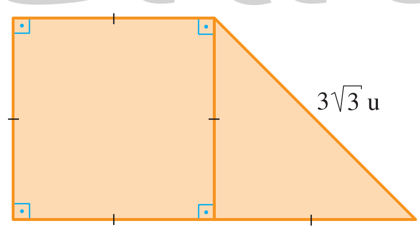
16 Considere a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Determine:
a) a medida do segmento $\overline{BD}$; 25 u
b) a área do quadrilátero $ABCD$. 234 u²

17 Qual é a área da figura a seguir? 20,25 u²



NELSON MATSUDA

18 (Fuvest-SP) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é: alternativa **d**
a) 13.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 17.

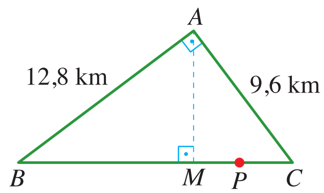
19 (UEL-PR) As medidas, em centímetro, dos três lados de um triângulo retângulo são expressas por $(x - 2)$, x e $(x + 2)$. A medida, em centímetro, da hipotenusa desse triângulo é: alternativa **c**

a) 5. **b)** 8. **c)** 10. **d)** 12. **e)** 14.

20 A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e um dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa mede 9 cm. Calcule a medida dos catetos desse triângulo. 15 cm e 20 cm

21 O cateto de um triângulo retângulo e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa medem 1 cm e $\frac{\sqrt{5}}{5}$ cm, respectivamente. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo. $\sqrt{5}$ cm

22 A figura abaixo mostra o esquema do roteiro de uma prova de ciclismo.



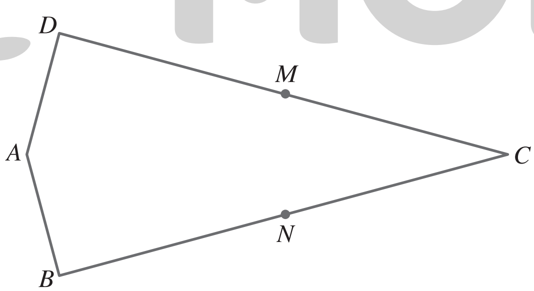
NELSON MATSUDA

A sequência do percurso é:

$$A \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow P$$

O ponto P está a 80 metros do ponto M. Quantos quilômetros tem esse percurso? 46 km

23 No quadrilátero $ABCD$ abaixo, $m(A\hat{B}C) = 150°$, $AD = AB = 4$ cm, $BC = 10$ cm, $MN = 2$ cm, sendo M e N, respectivamente, os pontos médios de $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$. Calcule a área do triângulo BCD. 20 cm²



NELSON MATSUDA

24 (FEI-SP) Se em um triângulo os lados medem 9, 12 e 15 cm, então a altura relativa ao maior lado mede: alternativa **b**

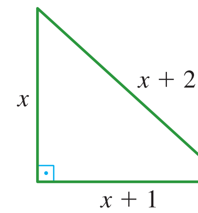
a) 8,0 cm.
b) 7,2 cm.
c) 6,0 cm.
d) 5,6 cm.
e) 4,3 cm.

25 (FEI-SP) Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é 7 cm. A hipotenusa desse triângulo mede: alternativa **d**

a) 10 cm.
b) 15 cm.
c) 20 cm.
d) 25 cm.
e) 30 cm.

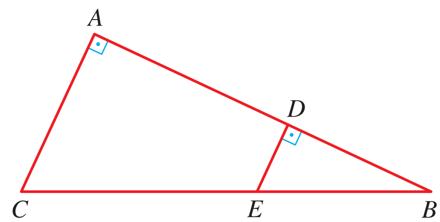
26 (Ulbra-RS) A área do triângulo a seguir mede 6 m². O valor do perímetro desse triângulo é: alternativa **d**

a) 6 m.
b) 9 m.
c) 10 m.
d) 12 m.
e) 20 m.



NELSON MATSUDA

27 (Unifor-CE) No triângulo retângulo representado na figura abaixo, têm-se $AB = 12$ cm e $AC = 9$ cm.



NELSON MATSUDA

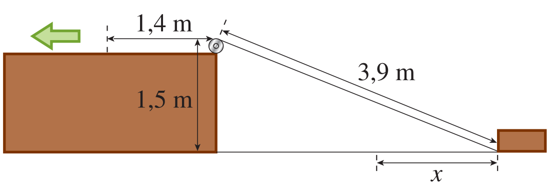
Se o ponto D divide o segmento $\overline{AB}$ na razão de 2 para 1, então a razão entre os perímetros do quadrilátero $ADEC$ e do triângulo DBE, nessa ordem, é igual a: alternativa **b**

a) $\frac{16}{5}$. **b)** $\frac{5}{2}$. **c)** $\frac{5}{3}$. **d)** $\frac{3}{2}$. **e)** $\frac{1}{5}$.

28 (UFPE) Um barco navegou 10 km para o oeste, depois 5 km para o sul, depois 13 km para o leste e finalmente 9 km para o norte. Onde o barco parou relativamente ao ponto de partida? alternativa **e**

a) 5 km ao norte.
b) 3 km a sudeste.
c) 4 km ao sul.
d) 3 km a sudoeste.
e) 5 km a nordeste.

29 (UFPR) Uma corda de 3,9 m de comprimento conecta um ponto na base de um bloco de madeira a uma polia localizada no alto de uma elevação, conforme o esquema abaixo. Observe que o ponto mais alto dessa polia está 1,5 m acima do plano em que esse bloco desliza. Caso a corda seja puxada 1,4 m, na direção indicada abaixo, a distância x que o bloco deslizará será de: alternativa **c**



NELSON MATSUDA

a) 1,0 m.
b) 1,3 m.
c) 1,6 m.
d) 1,9 m.
e) 2,1 m.

Diversificando

Uma quase circunferência!

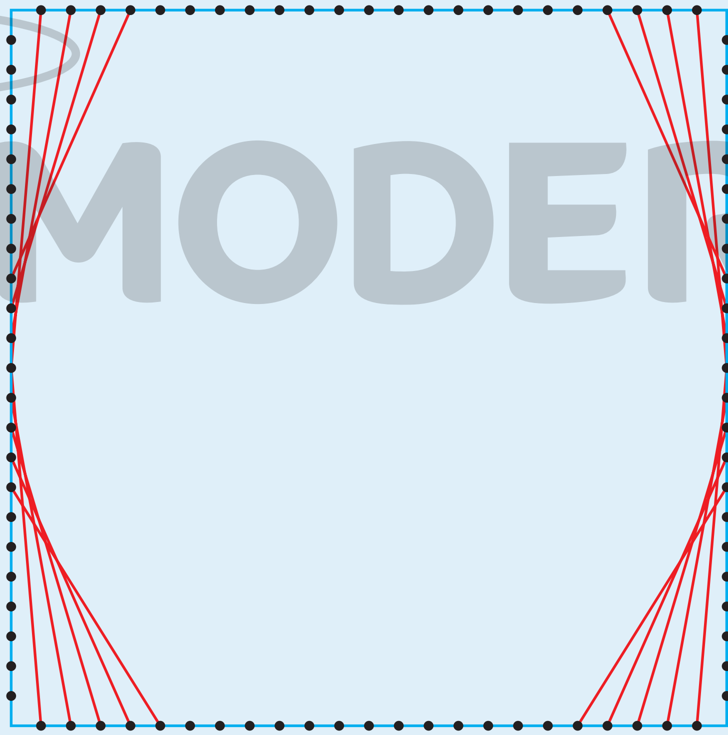
CLAUDIO CHIYO

Aninha ficou admirada quando a professora de Arte disse que, naquela aula, com paciência, os alunos fariam uma "quase circunferência" usando triângulos retângulos.

A professora então pediu a eles que primeiro desenhassem no caderno, com régua e esquadro, um quadrado de 12 cm de lado. Na sequência, eles deveriam:

- em cada lado do quadrado, marcar pontos de 0,5 cm em 0,5 cm, a partir do vértice;
- construir 8 triângulos retângulos com catetos nos lados do quadrado, sendo que um cateto mede 0,5 cm e o outro, 6 cm;
- construir grupos de 8 triângulos retângulos com catetos nos lados do quadrado, sendo que, em cada um, a soma das medidas dos catetos é sempre igual a 6,5 cm.

Veja como Aninha começou o desenho em seu caderno.



ADILSON SECCO

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Em um papel quadriculado, para facilitar, desenhe um quadrado cujos lados tenham 24 quadradinhos e siga as indicações da professora de Aninha para obter uma "quase circunferência". O que poderia ser feito para obter uma figura mais próxima de uma circunferência?

Dividir os lados em um número maior de pontos.

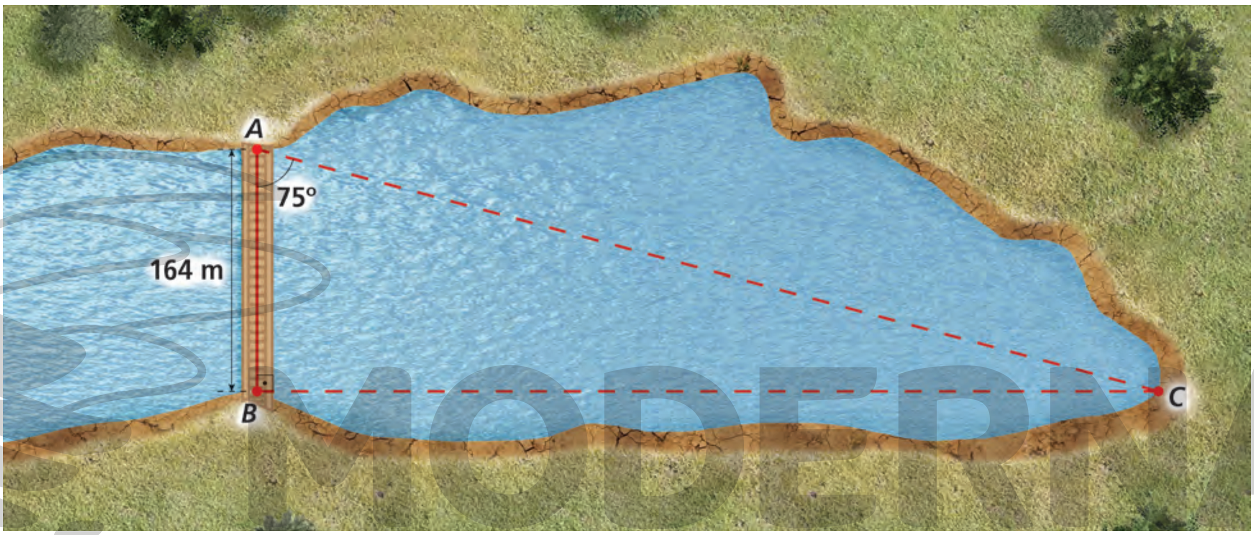
CAPÍTULO 6
Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

1 A Trigonometria

A figura abaixo mostra o esquema de uma represa. A ponte, representada pelo segmento $\overline{AB}$, pode ser medida com auxílio de uma trena.

$$m(\overline{AB}) = 164 \text{ m}$$

PAULO MANZI



Já o ângulo $B\hat{A}C$ pode ser medido diretamente com o auxílio de um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e verticais): $m(B\hat{A}C) = 75°$.

Existem, contudo, muitas situações em que não é possível medir diretamente um ângulo ou a distância entre dois pontos, como por exemplo na figura acima, quando se deseja obter a distância entre os pontos *A*, localizado em um extremo da ponte, e *C*, localizado na margem oposta da represa.

Procurando resolver problemas dessa natureza, os matemáticos estabeleceram importantes relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo. A área da Matemática que estuda essas relações é chamada de **Trigonometria**.

A palavra "trigonometria", de origem grega, significa “medida de triângulos”. Embora não tenhamos informações precisas sobre a origem dos estudos trigonométricos, há registros de sua aplicação por babilônios e antigos egípcios, especialmente na Agrimensura e na Astronomia.

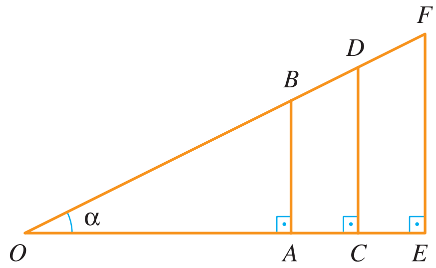
Sabe-se que a Trigonometria era usada, por exemplo, para determinar distâncias que não podiam ser medidas com instrumentos, como a distância entre os planetas. Para tais cálculos, eram aplicadas relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

Neste capítulo, estudaremos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

2 As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente

Seno de um ângulo agudo

Considere a figura ao lado.



NELSON MATSUDA

Os triângulos retângulos *OAB*, *OCD* e *OEF* são semelhantes pelo caso AA, pois têm em comum o ângulo de medida α (também chamado de ângulo α) e um ângulo reto.

Como os triângulos *OAB* e *OCD* são semelhantes e os lados correspondentes são proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

Os triângulos *OAB* e *OEF* são semelhantes, portanto os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}$$

Observe as duas proporções que destacamos acima: $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ e $\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}$

Da propriedade fundamental das proporções, podemos escrever:

$$\frac{CD}{OD} = \frac{AB}{OB} \text{ e } \frac{EF}{OF} = \frac{AB}{OB}$$

Assim, temos: $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

Há infinitos outros triângulos retângulos que têm como ângulo interno o ângulo α e que, por isso, também são semelhantes aos triângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*.

Para todos esses triângulos retângulos, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa é constante. A essa razão constante chamamos **seno do ângulo α** e a indicamos por **sen α**.

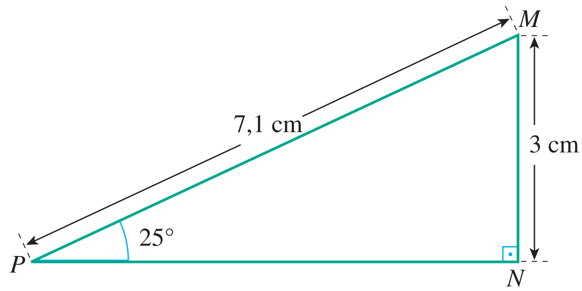
> **Seno** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Considerando qualquer um desses triângulos, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Acompanhe um exemplo.

No triângulo *MNP*, vamos calcular o seno do ângulo interno $\hat{P}$, que mede 25°.



NELSON MATSUDA

$$\text{sen } 25° = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{P}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } 25° = \frac{3}{7{,}1}$$

$$\text{sen } 25° \simeq 0{,}42$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

No exercício 2, pode-se também propor, como variação do problema, manter os ângulos do triângulo e alterar a medida de seu lado, por exemplo $AC = 8$ cm. Dessa forma, os alunos poderão constatar que, nos dois casos, as razões não variam.

1 Construa um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 30°. Com uma régua, determine a medida aproximada, em milímetro, do cateto oposto ao ângulo de 30° e da hipotenusa.

a) Qual é o valor da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° e a medida da hipotenusa desse triângulo? 0,5

b) Indique o valor de sen 30°. 0,5

2 Construa um triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{B}$, em que se tenha $m(\hat{C}) = 40°$ e $AC = 10$ cm. Com uma régua encontre, em milímetro, a medida aproximada do cateto $\overline{AB}$.
Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, de sen 40°? 0,6

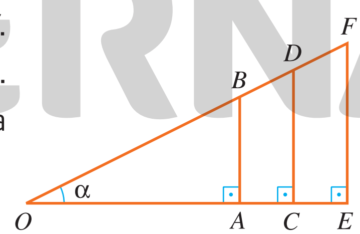
3 O valor do seno de um ângulo varia de acordo com as medidas dos lados do triângulo ou de acordo com a medida do ângulo?
De acordo com a medida do ângulo.

Cosseno e tangente de um ângulo agudo

Considere novamente os triângulos retângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*.

Como já vimos, os triângulos *OAB*, *OCD* e *OEF* são semelhantes.

De modo análogo ao que fizemos para a razão seno, dessa semelhança obtemos:



NELSON MATSUDA

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

A essa razão constante chamamos de **cosseno do ângulo α** e a indicamos por **cos α**.

Cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Para qualquer um desses triângulos, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Da mesma semelhança, também obtemos:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

A essa razão constante chamamos de **tangente do ângulo α** e a indicamos por **tg α**.

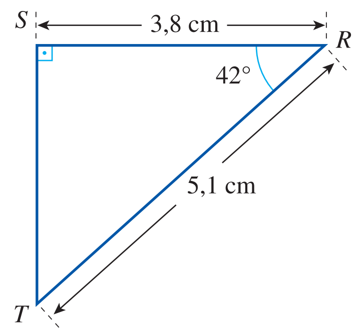
Tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Considerando qualquer dos triângulos da figura anterior, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Veja alguns exemplos:

a) No triângulo *RST* ao lado, vamos calcular o cosseno do ângulo interno $\hat{R}$, que mede 42°.



NELSON MATSUDA

$$\cos 42° = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{R}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

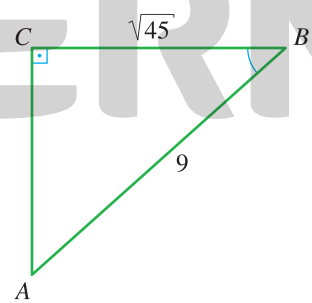
$$\cos 42° = \frac{3{,}8}{5{,}1}$$

$$\cos 42° \simeq 0{,}74$$

b) Vamos calcular a tangente do ângulo interno $\hat{B}$ do triângulo *ABC* abaixo.

Inicialmente aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular *AC*:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$
$$(AC)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = 9^2$$
$$(AC)^2 + 45 = 81$$
$$(AC)^2 = 36$$
$$AC = 6$$



NELSON MATSUDA

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}}$$

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{45}}{45} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{5}}{45} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Portanto: $\text{tg}\ \hat{B} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

OBSERVAÇÕES

- O seno e o cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo são números reais positivos menores que 1.
- A tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é um número real positivo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4 Construa um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 45°. Com uma régua, determine a medida aproximada, em centímetro, dos catetos e da hipotenusa. construção de figura

a) Qual é o valor aproximado da razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45° e a medida da hipotenusa desse triângulo? 0,7

b) Qual é o valor aproximado de cos 45°? 0,7

c) Qual é o valor da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 45° e a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45°? 1

d) Qual é o valor de tg 45°? 1

5 Use uma calculadora. Considere o triângulo retângulo abaixo e calcule, com duas casas decimais:

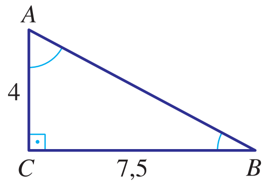
a) medida de $\overline{AB}$; 8,5

b) $\cos \widehat{B}$; 0,88

c) $\text{tg}\, \widehat{B}$; 0,53

d) $\cos \widehat{A}$; 0,47

e) $\text{tg}\, \widehat{A}$. 1,88



6 Um brinquedo tem uma rampa de 64 cm de comprimento, através da qual se desloca um carrinho. A parte mais alta da rampa está a 12 cm da horizontal que passa pela parte mais baixa.

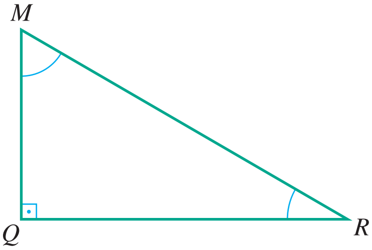
a) Faça a figura representando a situação. construção de figura

b) Calcule o seno do ângulo que a rampa forma com a horizontal. $\simeq$ 0,19

7 Considere um papel retangular com 15,6 cm de comprimento por 7,2 cm de largura. Traça-se uma das diagonais desse retângulo. Qual é a tangente do ângulo que a diagonal forma com o lado maior do papel? E a que forma com o lado menor? $\simeq$ 0,46; $\simeq$ 2,17

8 Justifique a afirmação: “O seno e o cosseno de um ângulo agudo são números reais positivos menores que 1”. São positivos porque representam razões entre medidas e são menores que 1 porque todo cateto é menor que a hipotenusa.

9 No triângulo retângulo MQR, determine:



a) a medida aproximada dos lados (use uma régua); $MQ \simeq 2{,}5$ cm, $MR \simeq 5{,}1$ cm e $QR \simeq 4{,}4$ cm

b) a medida dos ângulos agudos (use um transferidor); $m(\widehat{M}) = 60°$ e $m(\widehat{R}) = 30°$

c) $\text{sen}\, \widehat{M}$; $\simeq$ 0,86

d) $\cos \widehat{M}$; $\simeq$ 0,49

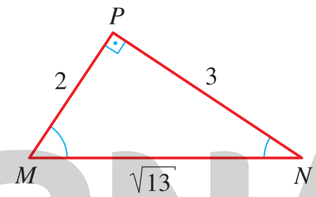
e) $\text{tg}\, \widehat{M}$. 1,76

10 Desenhe um triângulo retângulo ABC de modo que $m(\widehat{B}) = 36°$. Determine, com duas casas decimais, o valor aproximado de:

a) $\text{sen}\, \widehat{B}$; 0,59 **b)** $\cos \widehat{B}$; 0,80 **c)** $\text{tg}\, \widehat{B}$. 0,73

11 A tampa retangular de uma caixa de madeira tem 32 cm de comprimento por 24 cm de largura. Entre dois cantos diagonalmente opostos da tampa, prende-se um fio esticado. Qual é o cosseno do ângulo que o fio forma com o lado maior da tampa? 0,8

12 Considerando o triângulo MNP, determine, com duas casas decimais, o que se pede a seguir.



a) $\text{sen}\, \widehat{M}$ 0,83

b) $\cos \widehat{N}$ 0,83

c) $\text{tg}\, \widehat{M}$ 1,50

d) $\cos \widehat{M}$ 0,55

e) $\text{tg}\, \widehat{N}$ 0,66

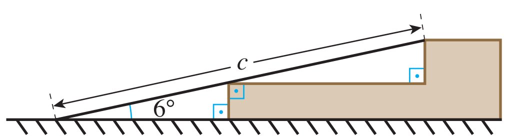
f) $\text{sen}\, \widehat{N}$ 0,55

13 (Etec-SP) O acesso a um edifício é feito por uma escada de dois degraus, sendo que cada um tem 16 cm de altura. Para atender portadores de necessidades especiais, foi construída uma rampa.

Respeitando a legislação em vigor, a rampa deve formar, com o solo, um ângulo de 6°, conforme mostrado na figura.

Dados:

- sen 6° = 0,10
- cos 6° = 0,99



A medida c do comprimento da rampa é, em metros, igual a: alternativa **e**

a) 1,8. **b)** 2,0. **c)** 2,4. **d)** 2,9. **e)** 3,2.

14 Reúna-se com três colegas e façam o que se pede.

a) Cada um constrói um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, e passa ao colega que medirá os seus lados e ângulos. respostas pessoais

b) Com base nas medidas obtidas no item **a**, calculem o valor das expressões:

- $\text{sen}\,\widehat{B} - \cos\widehat{C}$ 0
- $\text{sen}\,\widehat{C} - \cos\widehat{B}$ 0
- $\text{tg}\,\widehat{B} \cdot \text{tg}\,\widehat{C}$ 1
- $\dfrac{\text{sen}\,\widehat{B}}{\cos\widehat{B}} - \text{tg}\,\widehat{B}$ 0
- $\dfrac{\text{sen}\,\widehat{C}}{\cos\widehat{C}} - \text{tg}\,\widehat{C}$ 0

c) Analisem os valores obtidos em cada expressão do item **b** e respondam às questões:

- O que ocorre com o seno de um ângulo e com o cosseno do seu complementar? Têm o mesmo valor.
- O que ocorre com as tangentes de um ângulo e de seu complementar? Têm valores inversos.
- O que ocorre com a razão entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo e com a tangente desse ângulo? Têm o mesmo valor.

3 Como usar a tabela de razões trigonométricas

As razões trigonométricas são aplicadas na resolução de uma grande variedade de problemas. Para facilitar reproduzimos na página seguinte uma tabela dos valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 1° a 89°.

Atribui-se ao astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) o estabelecimento das bases da Trigonometria, e deve-se a ele a construção das primeiras tabelas trigonométricas.

Mais tarde, Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C.), astrônomo, matemático e geógrafo grego, ampliou o trabalho de Hiparco com sua obra *Sintaxe matemática*, na qual apresenta um trabalho sobre Trigonometria.

Os árabes traduziram os treze livros que compunham a obra de Ptolomeu e a chamaram de *Almagesto*, que em árabe significa "o maior".

Atualmente, muitas calculadoras fornecem os valores das razões trigonométricas.

Veja como calculamos o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45° usando uma calculadora como a da foto abaixo:

sen 45°: sin 4 5 = 0,707106781

cos 45°: cos 4 5 = 0,707106781

tg 45°: tan 4 5 = 1

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MAURICE CROOKS/ALAMY/GLOW IMAGES

Muitas calculadoras científicas são importadas. Nessas calculadoras, a tecla sin representa o seno, a tecla cos, o cosseno, e a tecla tan, a tangente.

Em outras calculadoras, a sequência de teclas a serem pressionadas pode ser diferente.

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS							
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Observe alguns exemplos de utilização da tabela de razões trigonométricas. Vamos considerar os valores aproximados da tabela como se fossem exatos.

a) Vamos procurar o sen 35° na tabela.

Na coluna **ângulo**, procuramos 35°.

Na coluna **seno**, encontramos 0,5736.

Portanto, sen 35° = 0,5736

Ângulo	Seno
35°	0,5736

b) Vamos descobrir a medida do ângulo cujo cosseno é 0,4695.

Na coluna **cosseno**, procuramos o número 0,4695.

Na coluna **ângulo**, encontramos 62°, que é a medida do ângulo cujo cosseno é 0,4695.

Ângulo	Seno	Cosseno
62°	0,8829	0,4695

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Consulte a tabela de razões trigonométricas para encontrar o valor de:

a) sen 54°; 0,8090
b) cos 36°; 0,8090
c) tg 12°; 0,2126
d) sen 56°; 0,8290
e) cos 75°; 0,2588
f) tg 89°. 57,2900

16 Determine x com auxílio da tabela de razões trigonométricas.

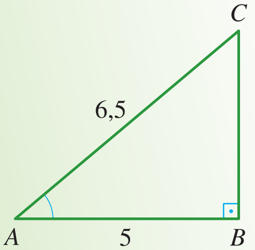
a) sen x = 0,4695; 28°
b) cos x = 0,7771; 39°
c) tg x = 0,2867; 16°
d) sen x = 0,9135; 66°
e) cos x = 0,1908; 79°
f) tg x = 9,5144. 84°

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

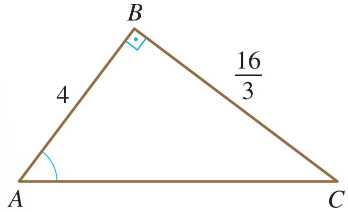
Pense mais um pouco...

1. Consultando a tabela e sem usar transferidor, determine a medida aproximada do ângulo $\hat{A}$.

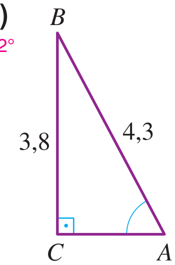
a) 40°



b) 53°

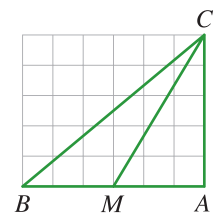


c) 62°



2. Determine, consultando a tabela e sem usar transferidor, a medida aproximada, em grau, dos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{M}C$ e $B\hat{C}M$.

m($A\hat{B}C$) ≃ 40°
m($B\hat{M}C$) ≃ 121°
m($B\hat{C}M$) ≃ 19°



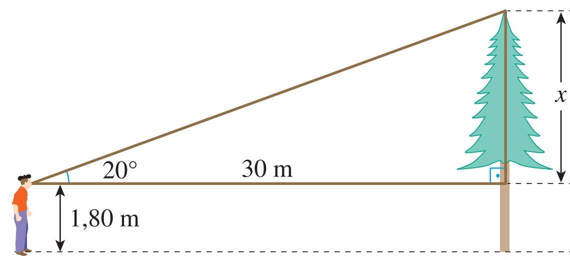
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

4 Resolução de problemas que envolvem triângulos retângulos

Observe algumas situações envolvendo triângulos retângulos.

Situação 1

Um homem observa o ponto mais alto de uma árvore sob um ângulo de 20° em relação à horizontal, conforme a figura ao lado. Vamos calcular a altura dessa árvore.



NELSON MATSUDA

No triângulo retângulo da figura, temos:

- medida do cateto adjacente ao ângulo de 20°: 30 m
- medida do cateto oposto ao ângulo de 20°: x

Como conhecemos a medida do cateto adjacente e queremos determinar a medida do cateto oposto ao ângulo de 20°, vamos usar, com duas casas decimais, tg 20° = 0,36.

$$\text{tg } 20° = \frac{x}{30}$$

$$\frac{0{,}36}{1} = \frac{x}{30}$$

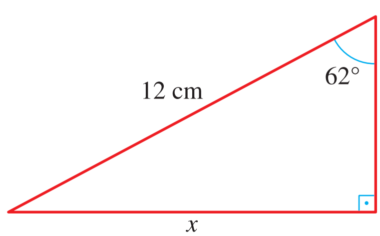
$$x = 10{,}8$$

Altura da árvore = x + 1,80 = 10,8 + 1,80 = 12,60

Portanto, a altura dessa árvore é 12,60 m.

Situação 2

Vamos calcular, com duas casas decimais, a medida x nos triângulos retângulos a seguir.



NELSON MATSUDA

Temos:

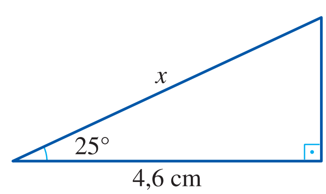
- medida da hipotenusa: 12 cm
- medida do cateto oposto ao ângulo de 62°: x

$$\text{sen } 62° = \frac{x}{12}$$

$$0{,}88 = \frac{x}{12}$$

$$x = 0{,}88 \cdot 12$$

$$x = 10{,}56 \text{ cm}$$



NELSON MATSUDA

Temos:

- medida do cateto adjacente ao ângulo de 25°: 4,6 cm
- medida da hipotenusa: x

$$\cos 25° = \frac{4{,}6}{x}$$

$$0{,}90 = \frac{4{,}6}{x}$$

$$0{,}9x = 4{,}6$$

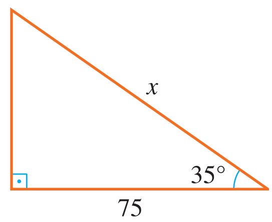
$$\frac{0{,}9x}{0{,}9} = \frac{4{,}6}{0{,}9}$$

$$x \simeq 5{,}11 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Usando valores das razões trigonométricas com duas casas decimais, calcule o valor aproximado de x no triângulo retângulo ao lado. 92,59



NELSON MATSUDA

18 A base de um triângulo isósceles mede 16 cm, e o ângulo do vértice, 70°. Calcule a medida aproximada:

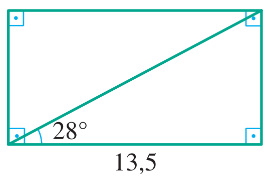
a) da altura relativa à base; 11,36 cm

b) de cada lado congruente desse triângulo isósceles. 14 cm

19 Observando a figura, determine:

a) a medida aproximada da largura do retângulo; 7,16

b) a área aproximada do retângulo. 96,66



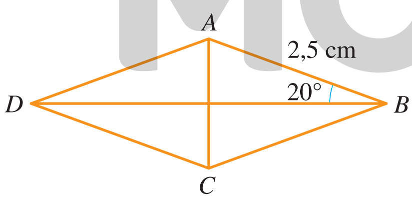
NELSON MATSUDA

20 Para o losango $ABCD$ a seguir, determine:

4,7 cm **a)** a medida aproximada da diagonal maior;

1,7 cm **b)** a medida aproximada da diagonal menor;

4 cm² **c)** a área aproximada do losango.



NELSON MATSUDA

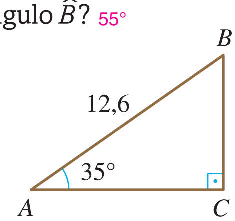
21 Um bombeiro é chamado para tirar um gato de cima de uma árvore. Ele apoia na árvore uma escada a 1,4 m do tronco, formando com o chão um ângulo de 68°. Calcule o comprimento aproximado dessa escada. 3,8 m

22 Considere o triângulo retângulo abaixo e faça o que se pede.

a) Qual é a medida do ângulo $\hat{B}$? 55°

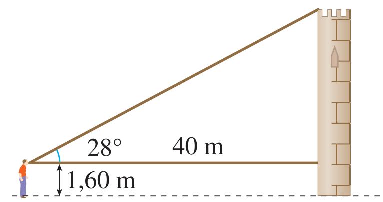
b) Calcule a medida aproximada do cateto $\overline{BC}$. 7,182

c) Determine a área aproximada desse triângulo sabendo que os lados são expressos em centímetro. 37 cm²



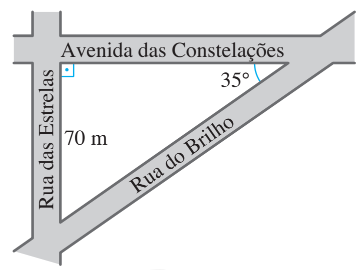
NELSON MATSUDA

23 Um observador vê o ponto mais alto de uma torre sob um ângulo de 28°, conforme a figura a seguir. Calcule a altura aproximada dessa torre. 22,8 m



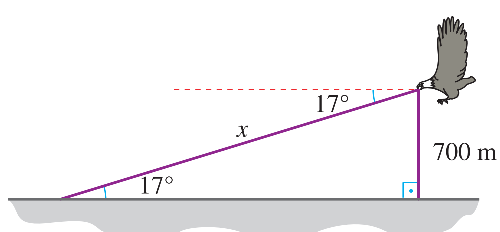
NELSON MATSUDA

24 Observando o mapa a seguir, calcule quanto mede, aproximadamente, o trecho da avenida das Constelações entre a rua do Brilho e a rua das Estrelas. 100 m



NELSON MATSUDA

25 Um gavião, a 700 m de altura, avista uma presa; faz uma descida de 17° em relação à horizontal e consegue capturá-la. Que distância o gavião percorreu para capturar a presa? 2.414 m



NELSON MATSUDA

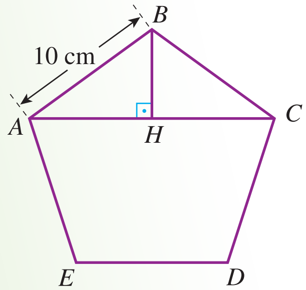
26 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Cada um escolhe cinco medidas de 1° a 89° para que o outro calcule, usando a tabela de razões trigonométricas e uma calculadora, a soma dos quadrados do seno e do cosseno de cada uma das medidas escolhidas. Os valores devem ser próximos de 1.

b) Arredondando os resultados obtidos no item **a**, qual é o valor do quadrado do seno de um ângulo mais o quadrado do cosseno do mesmo ângulo? 1

Pense mais um pouco...

1. Considerando que a figura $ABCDE$ é um pentágono regular e H é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, calcule:



NELSON MATSUDA

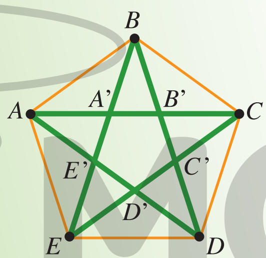
DANILLO SOUZA

a) as medidas $m(A\hat{B}C)$ e $m(A\hat{B}H)$; 108°; 54°

b) as medidas aproximadas de $\overline{AH}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$.
8,9 cm; 16,18 cm; 16,18 cm

2. No início do capítulo 5 – Triângulos retângulos – vimos que o emblema da sociedade secreta formada pelos pitagóricos era um pentagrama.

a) Na figura abaixo, podemos perceber que as diagonais do pentágono regular formam o pentagrama. Sendo $AB = 10$ cm, calcule, a razão $\frac{AC}{AB}$. 1,618



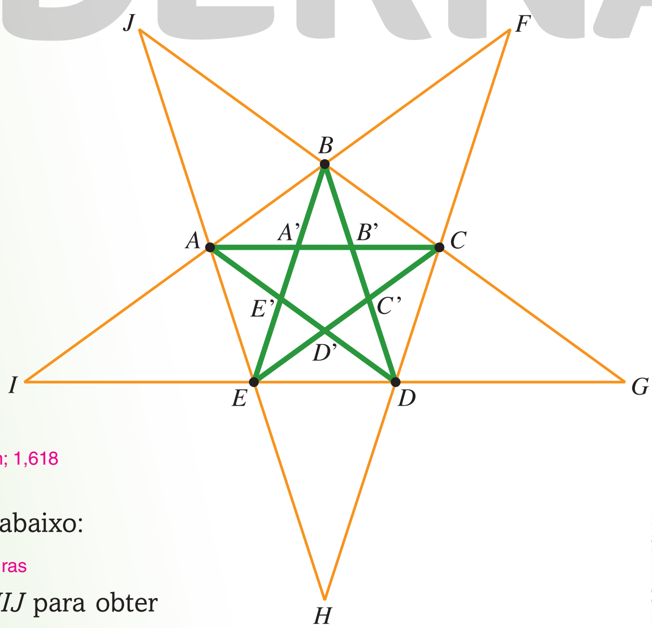
ADILSON SECCO

ADILSON SECCO

b) Tendo por base o pentágono $ABCDE$ do item **a**, também podemos obter o pentagrama se prolongarmos os seus lados. Considerando o pentagrama ao lado, calcule:

- AJ 16,18 cm
- JE 26,18 cm
- $\frac{JE}{AJ}$ 1,618

c) Na figura do item **b**, podemos traçar $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{JF}$ e obter um novo pentágono regular.
A partir da construção deste novo pentágono, calcule: JF, JH e $\frac{JH}{JF}$ 26,18 cm; 42,36 cm; 1,618



NELSON MATSUDA

d) Copie a figura do item **b** e siga os passos abaixo:

- trace o pentágono $FGHIJ$; construção de figuras
- prolongue os lados do pentágono $FGHIJ$ para obter um pentagrama;
- trace as diagonais do pentágono $A'B'C'D'E'$ para obter um pentagrama.

e) Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

As razões $\frac{AC}{AB}$, $\frac{JE}{AJ}$ e $\frac{JH}{JF}$ são iguais a um mesmo número irracional, conhecido como número de ouro, do qual vocês já obtiveram um valor aproximado. Pesquisem a respeito desse número e façam um resumo de sua pesquisa.

PARA SABER MAIS +

O teodolito

O teodolito, instrumento para medir ângulos, é usado geralmente por agrimensores e construtores para calcular grandes distâncias ou alturas inacessíveis. À primeira vista, o teodolito parece uma máquina fotográfica montada sobre um tripé. Para efetuar as medidas com o auxílio desse instrumento, o profissional utiliza-se do conceito de tangente de um ângulo agudo.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Pessoa medindo ângulos com teodolito em uma obra.

Vamos aprender a construir um teodolito?

Construção de um teodolito "caseiro"

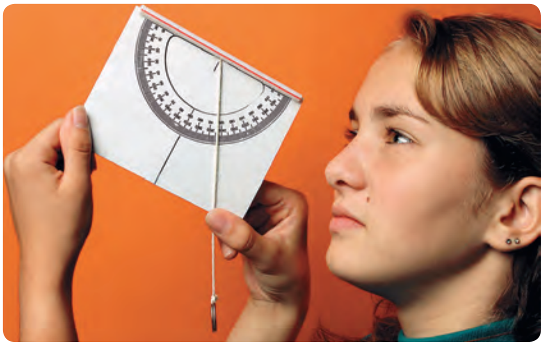
Material:

- um pedaço de papelão grosso (o melhor é aquele ondulado em uma das faces) de aproximadamente 10 cm × 15 cm
- um pedaço de barbante de aproximadamente 20 cm
- um canudo plástico
- um peso de linha de pesca, uma moeda ou uma argola de metal

- um desenho ou cópia xerográfica de um transferidor de 180°
- fita adesiva
- cola

Como construir:

- Com a fita adesiva, prenda o canudo em uma das bordas de 15 cm do papelão.
- Cole o desenho do transferidor logo abaixo do canudo.
- Prenda o peso em uma das extremidades do barbante.
- Com cuidado, faça um pequeno furo, transpassando o papelão bem no encontro da linha de fé do transferidor com a linha que marca 90°.
- Passe por esse furo a outra extremidade do barbante, deixando o restante no mesmo lado onde está o transferidor, e dê um nó bem firme.


EDUARDO SANTALIESTRA

Teodolito "caseiro".

Como efetuar a medição:

Agora, vamos experimentar o instrumento para cálculos de grandes alturas. Para isso, necessitamos de uma trena (ou de uma fita métrica ou de um metro de carpinteiro).

- Afaste-se de um poste de iluminação, meça sua distância até ele e anote (corresponde ao cateto adjacente).
- Olhe pelo orifício do canudo até enxergar o topo do poste. A altura do poste corresponderá ao cateto oposto.
- Segure o barbante com o peso na posição em que ele parou.
- Anote a medida do ângulo determinado pelo barbante (na posição horizontal, o ângulo marcado é de 90°).
- Procure, na tabela de razões trigonométricas, a tangente do seu ângulo de visão, que é igual a 90° menos o valor anotado.
- Essa tangente será a razão entre a altura do poste, vista pelo observador, e a distância desse observador até o poste.

Faça os cálculos e determine a altura do poste. Não se esqueça de somar a distância entre o chão e seus olhos à altura que você determinou.

Faça outras experiências semelhantes a essa e procure calcular distâncias a partir de algum objeto do qual você conheça a altura.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Paulo, treinando o uso de um teodolito "caseiro", observa uma torre. Calcule a altura da torre sabendo que o ângulo de visão de Paulo ao topo dela é de 45°, que ele está a 3,5 m dela e que seus olhos estão a 1,25 m do chão. 4,75 m

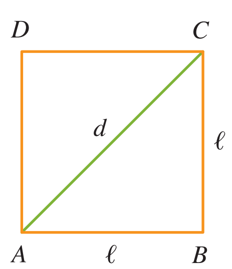
2 Paulo, ainda treinando o uso de seu teodolito, observou o topo de um poste de 7 m, sob um ângulo de visão de 15°. Qual é a distância aproximada de Paulo até o poste? 21,5 m

5 Razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°

ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO CHIYO

Razões trigonométricas do ângulo de 45°

Considere o quadrado $ABCD$, com lado de medida ℓ.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

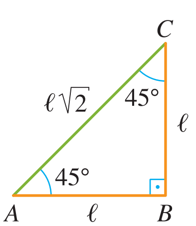
$\ell^2 + \ell^2 = d^2$

$2\ell^2 = d^2$

$\ell\sqrt{2} = d$ ou $d = \ell\sqrt{2}$

A diagonal $\overline{AC}$ mede $\ell\sqrt{2}$.

Destacando o triângulo ABC, temos:

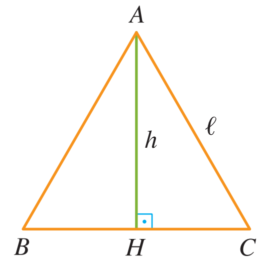


$\text{sen } 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\text{tg } 45° = \dfrac{\ell}{\ell}$
$\text{sen } 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\text{tg } 45° = 1$
$\text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

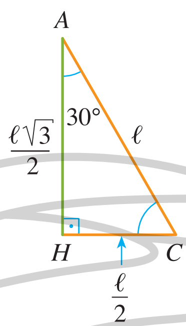
Razões trigonométricas do ângulo de 30°

Observe agora o triângulo equilátero *ABC*, com lado de medida ℓ.



Já aprendemos no capítulo anterior que a altura $\overline{AH}$ do triângulo mede $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Destacando do triângulo *ABC* o triângulo *AHC*, temos:



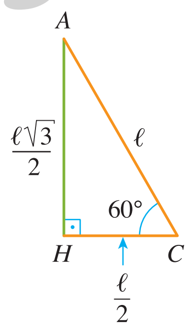
$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$$
$$\text{sen } 30° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$
$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$$
$$\cos 30° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$
$$\text{tg } 30° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}}$$
$$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Razões trigonométricas do ângulo de 60°

Destacando novamente o triângulo *AHC*, da figura anterior, temos:



$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$$
$$\text{sen } 60° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$$
$$\cos 60° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}}$$
$$\text{tg } 60° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell}$$
$$\text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

Agora, vamos organizar em um quadro todos os valores encontrados:

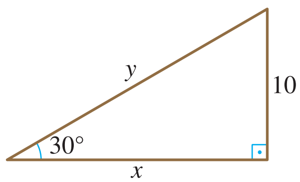
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

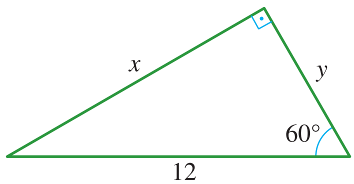
27 Usando as razões trigonométricas, calcule o valor de x e de y nos triângulos retângulos:

a)



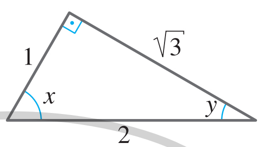
$x = 10\sqrt{3}$
$y = 20$

b)



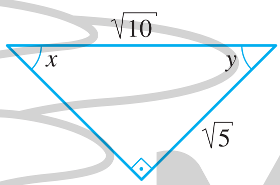
$x = 6\sqrt{3}$
$y = 6$

c)



$x = 60°$
$y = 30°$

d)



$x = 45°$
$y = 45°$

28 (UFV-MG) O cosseno do ângulo α, assinalado na figura abaixo, é: alternativa **d**

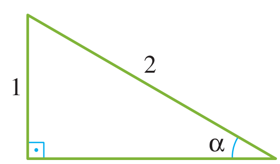
a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



29 O lado não perpendicular às bases de um trapézio retângulo forma com a base maior um ângulo de 45°. Considerando que as bases medem 12 cm e 9 cm, determine:

a) a medida da altura; 3 cm

b) a medida do lado não perpendicular às bases. $3\sqrt{2}$ cm

30 Construa um losango em que uma das diagonais meça 12 cm e forme com um dos lados um ângulo de 30°. Determine:

a) a medida da outra diagonal; $4\sqrt{3}$ cm

b) a medida do lado do losango. $4\sqrt{3}$ cm

31 Um poste projeta uma sombra de 5,6 m no momento em que os raios solares determinam um ângulo de 45° com a vertical. Qual é a altura desse poste? 5,6 m

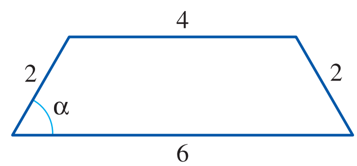
32 Uma das alturas de um triângulo equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm. Determine, a medida do lado desse triângulo. 4 cm

33 Em um trapézio isósceles, os lados não paralelos formam com a base maior ângulos de 60°. Se as bases medem 28 cm e 20 cm, então:

a) qual é o perímetro do trapézio? 64 cm

b) qual é a área do trapézio? $96\sqrt{3}$ cm²

34 (UCSal-BA) Na figura abaixo, tem-se um trapézio isósceles cujos lados têm as medidas indicadas.

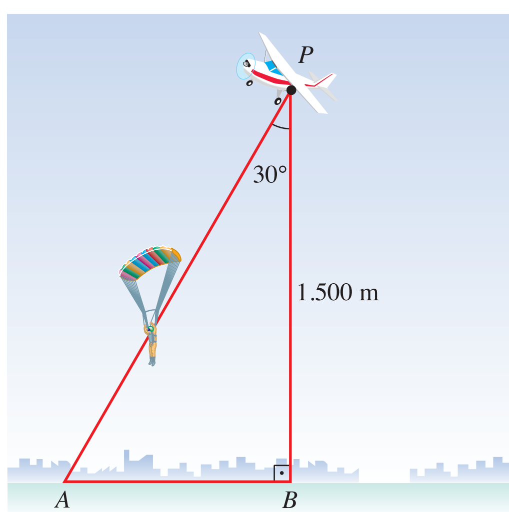


NELSON MATSUDA

A medida do ângulo assinalado é: alternativa **a**

a) 60°.
b) 45°.
c) 30°.
d) 22°30'.
e) 15°.

35 Um paraquedista salta de um avião que voa a 1.500 m de altura. Devido à velocidade do avião e à ação do vento, o paraquedista cai conforme indica o segmento $\overline{PA}$, na figura abaixo, inclinado 30° em relação a $\overline{PB}$. A que distância do ponto B o paraquedista cai? $500\sqrt{3}$ m



NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO i

A representação de um relevo

O estudo topográfico de uma região consiste da descrição exata e pormenorizada de um terreno com todos os seus acidentes geográficos. O perfil gráfico abaixo, do Pão de Açúcar e do Morro da Urca, no Rio de Janeiro (RJ), foi obtido pelos seguintes passos:

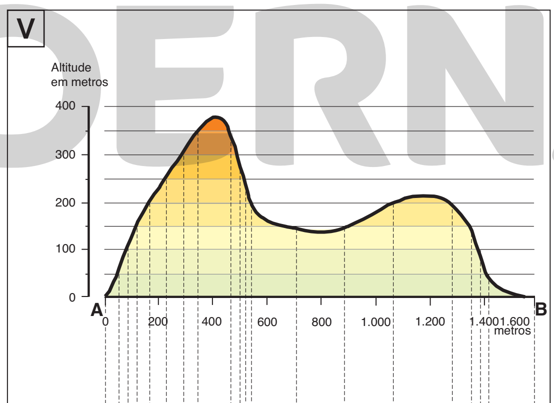
- Imagine os morros sendo cortados por planos horizontais nas altitudes 50 m, 100 m, 150 m, ..., 350 m. Observe as curvas de nível (linhas brancas) na **figura I**.
- Essas curvas de nível aparecem, vistas de cima, na **figura II**.
- A **figura III** é um desenho do contorno da fotografia aérea **(II)**, identificando as curvas de nível.
- Em **IV** traçamos uma semirreta de origem ***A***, que passa pelo cume dos morros, e as perpendiculares a ela, pelos pontos de interseção com as curvas de nível. As perpendiculares são prolongadas para obter a **figura V**.
- O perfil gráfico (**figura V**) desses morros é o gráfico de linha cujo eixo vertical traz a altitude e o horizontal, as distâncias a partir de *A*.

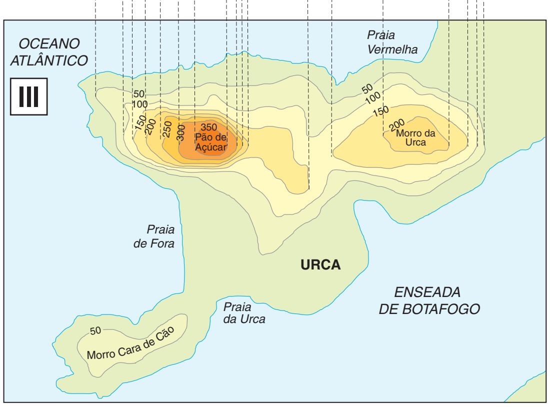
PÃO DE AÇÚCAR

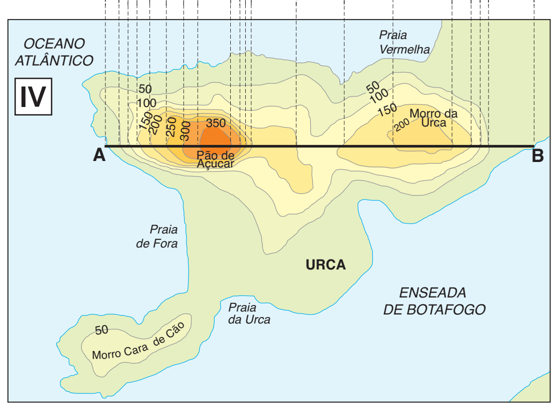
VANESSA F. MERINO

MORRO DA URCA

BASE AEROFOTOGAMETRIA E PROJETOS LTDA.







ILUSTRAÇÕES: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Fonte: Graça M. Lemos Ferreira. *Atlas Geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 15.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe o perfil gráfico (**figura V**) e dê a altitude aproximada do Pão de Açúcar e do Morro da Urca.
380 m, 210 m

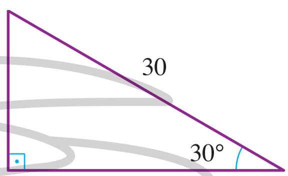
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

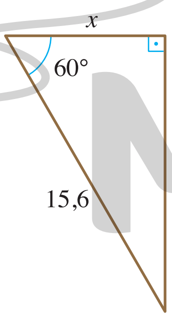
1 Construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 55°. Meça os lados desse triângulo, em milímetro. Calcule as razões trigonométricas desse ângulo, com uma casa decimal. Confira os resultados consultando a tabela ou uma calculadora.
sen 55° = 0,8; cos 55° = 0,6; tg 55° = 1,4

2 Nos triângulos retângulos a seguir, determine quanto vale x:

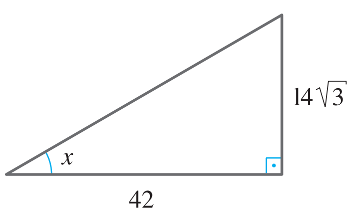
a) 15



b) 7,8



c) 30°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

3 (Unopar-PR) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem a e $3a$, respectivamente, então o cosseno do ângulo oposto ao menor lado é: alternativa **b**

a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

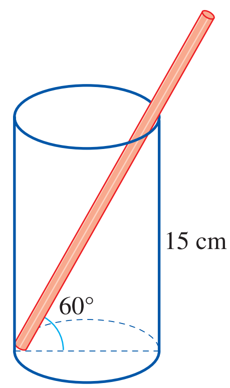
b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

e) $2\sqrt{2}$.

4 A figura abaixo representa um canudinho dentro de um copo de 15 cm de altura.



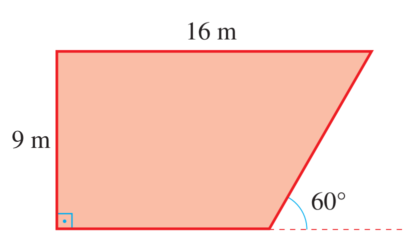
NELSON MATSUDA

Calcule o comprimento aproximado desse canudinho sabendo que 8 cm dele estão fora do copo.
(Dado: $\sqrt{3} = 1{,}73$.) 25,3 cm

5 Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 50°. Calcule a medida aproximada dos lados congruentes sabendo que a altura em relação à base mede 20 cm. 26,31 cm

6 Uma escada de 2,80 m de comprimento está apoiada no topo de um muro, formando com ele um ângulo de 60°. Qual é a altura do muro?
1,40 m

7 Regina possui um terreno na forma de um trapézio, conforme a figura abaixo. Quantos metros quadrados de muro, aproximadamente, serão necessários para cercar esse terreno se o muro tiver 1,80 m de altura? 83 m²

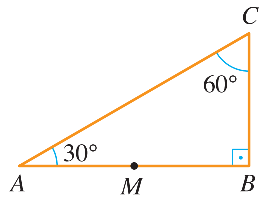


NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

8 (UCSal-BA) Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC, cujos ângulos internos têm as medidas indicadas.

NELSON MATSUDA



Se M é ponto médio de $\overline{AB}$ e $AC = 10$ cm, qual é a medida do segmento $\overline{AM}$? $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

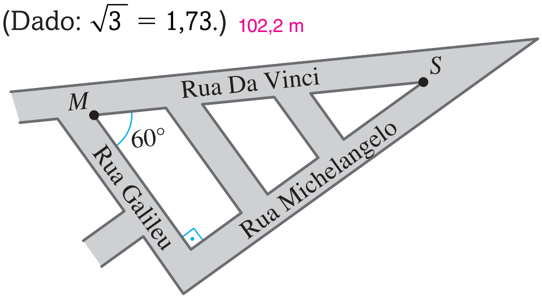
9 Rosana mediu a largura de um rio fixando um ponto A em uma das margens e um ponto B na margem oposta, de modo que $\overline{AB}$ ficasse perpendicular às margens do rio. Do ponto A, caminhou 40 m perpendicularmente a $\overline{AB}$ e marcou um ponto C. Mediu o ângulo $B\hat{C}A$, obtendo 30°. Assim, ela pôde determinar a largura do rio.
(Dado: $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

a) Determine essa largura, expressa na forma $a\sqrt{b}$. $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ m

b) Determine o valor aproximado dessa largura. 23 m

10 Ana mora na esquina da rua Da Vinci com a rua Galileu. A sorveteria que ela frequenta fica a 280 m de sua casa, na esquina da rua Da Vinci com a rua Michelangelo. Num domingo, depois de tomar sorvete nessa sorveteria, Ana resolveu retornar por um caminho diferente, pela rua Michelangelo. Aproximadamente em quantos metros aumentou sua caminhada? (Dado: $\sqrt{3} = 1{,}73$.) 102,2 m

NELSON MATSUDA



11 (Vunesp) Duas rodovias retilíneas, A e B, cruzam-se formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4 km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia retilínea C, perpendicular à rodovia B. A distância do posto de gasolina à rodovia B, indo através de C, em quilômetro, é:

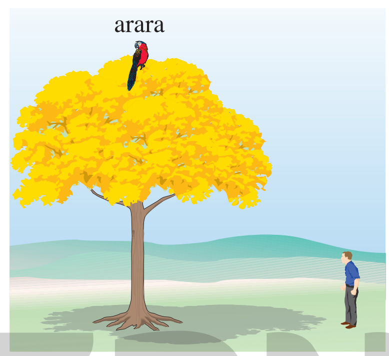
a) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **d)** $\sqrt{2}$. **e)** $2\sqrt{2}$.

alternativa **e**

12 De uma folha de cartolina, foi recortado um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede 120°. Cada um dos lados congruentes do triângulo mede 40 cm. Qual é a área do triângulo recortado? $400\sqrt{3}$ cm²

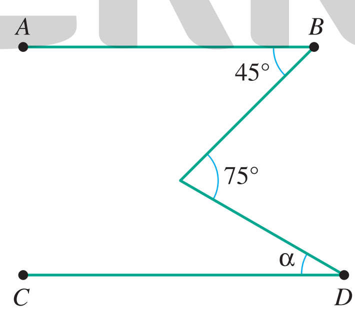
13 Uma escada rolante liga dois andares de uma loja. Sabendo que essa escada tem 10 m de comprimento e inclinação de 30°, a medida de sua altura, em metro, fica entre quais números pares consecutivos? entre 4 e 6

14 Uma arara está pousada no ponto mais alto de uma árvore de 19,5 m de altura. Ela é observada por um garoto de 1,50 m de altura, que se encontra afastado 18 m da árvore. Determine o ângulo, em relação à horizontal, sob o qual o garoto observa a arara. 45°



NELSON MATSUDA

15 (Mackenzie-SP) Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$.



NELSON MATSUDA

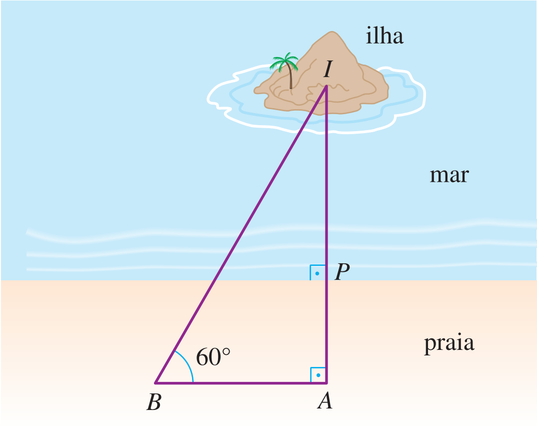
O valor de sen α é: alternativa **c**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **c)** $\frac{1}{2}$. **d)** 1. **e)** 0.

16 Dois prédios, A e B, estão situados num mesmo plano. Da base do prédio A, avista-se o topo do prédio B sob um ângulo de 45° com a horizontal, e da base do prédio B avista-se o topo do prédio A sob um ângulo de 60° com a horizontal. Se a distância entre A e B, medida em metro, é 34,6, determine a altura do prédio:

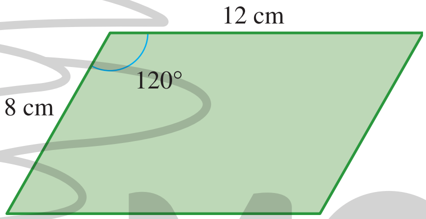
a) A; 60 m **b)** B. 34,6 m

17 (Puccamp-SP) Na praia, mediu-se a distância de A até B (750 m) e de A até P (620 m), além do ângulo $A\hat{B}I$ (60°). Qual é a distância da ilha até a praia? $10(75\sqrt{3} - 62)$ m



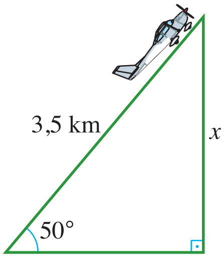
NELSON MATSUDA

18 Um paralelogramo tem lados de medida 8 cm e 12 cm, e um de seus ângulos internos mede 120°. Calcule sua área. $48\sqrt{3}$ cm²



NELSON MATSUDA

19 Um avião de acrobacia levanta voo formando um ângulo de 50° em relação à pista. Calcule a que altura o avião estará do solo após percorrer 3,5 km. (Dado: sen 50° = 0,76.) 2,66 km



NELSON MATSUDA

20 (UFSM-RS) Uma torre vertical, construída sobre um plano horizontal, tem 25 m de altura. Um cabo de aço, esticado, liga o topo da torre ao plano, fazendo com este um ângulo de 60°. O comprimento do cabo de aço é: alternativa **b**

a) 50 m.

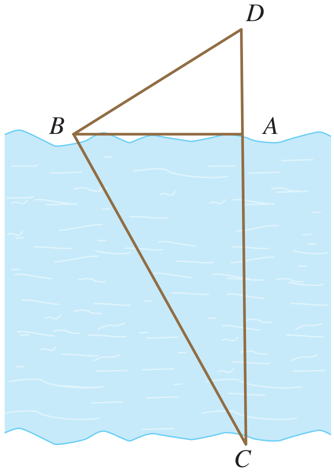
b) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ m.

c) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ m.

d) $\frac{50\sqrt{3}}{2}$ m.

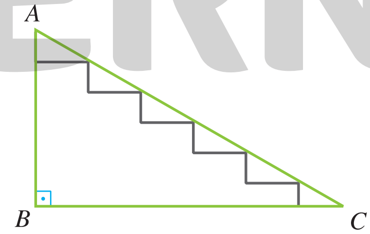
e) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ m.

21 (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto D no prolongamento de $\overline{CA}$, de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse de 90°. Medindo $AD = 40$ m, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio. 120 m; resposta pessoal



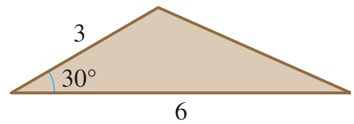
NELSON MATSUDA

22 (Vunesp) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se $AB = 2$ m e $B\hat{C}A$ mede 30°, qual é a medida da extensão de cada degrau? $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m



NELSON MATSUDA

23 A área do triângulo abaixo é: alternativa **b**



NELSON MATSUDA

a) 4. **b)** 4,5. **c)** 5. **d)** 5,5. **e)** 6.

24 Um automóvel parte de A e segue, numa direção que forma com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ um ângulo de 30°, com velocidade média de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a distância que o automóvel estará da reta $\overleftrightarrow{AC}$ será de: alternativa **a**

a) 75 km.

b) $75\sqrt{3}$ km.

c) $50\sqrt{3}$ km.

d) $75\sqrt{2}$ km.

e) 50 km.

CAPÍTULO

7 Estudo das funções

1 Conceito de função

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

A empresa de TV a cabo Cab cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$ 95,00 e mais R$ 5,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante.

FLYING COLOURS/GETTY IMAGES

Vamos organizar um quadro que mostre a relação entre o número de programas extras comprados e o total a ser pago.

Número de programas extras	Preço (em real)
0	95
1	$95 + 1 \cdot 5$
2	$95 + 2 \cdot 5$
3	$95 + 3 \cdot 5$
4	$95 + 4 \cdot 5$

Indicando por x o número de programas extras comprados e por y o preço a pagar, podemos relacionar essas duas grandezas pela sentença:

$$y = 95 + x \cdot 5 \text{ ou } y = 95 + 5x$$

Note que, a cada valor atribuído à letra x, obtemos **um único** valor para y, por exemplo:

- para $x = 0$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 0 = 95 + 0 = 95$$

  Isso significa que, quando não se compra programa extra, o preço é R$ 95,00.

- para $x = 1$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 1 = 95 + 5 = 100$$

  Ou seja, com a compra de 1 programa extra, o preço sobe para R$ 100,00.

- para $x = 2$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 2 = 95 + 10 = 105$$

  Ou seja, com a compra de 2 programas extras, o preço é R$ 105,00.

Nesse caso, podemos dizer que o preço a pagar (y) é obtido em **função** do número de programas extras comprados (x).

> Dizemos que a grandeza y é **função** da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.

Na função que relaciona o número de programas extras comprados (x) e o preço a pagar (y), escrevemos a sentença $y = 95 + 5x$. Nesse caso, as letras x e y são chamadas de **variáveis** e a sentença $y = 95 + 5x$ é chamada de **lei da função**.

Em geral, dizemos que y é uma função de x por $y = f(x)$ (lemos: y é igual a f de x). Então, para o caso em que a lei da função é $y = 95 + 5x$, podemos escrever $f(x) = 95 + 5x$.

Situação 2

Paulo é vendedor de assinaturas de revistas e seu salário varia conforme o número de assinaturas que ele vende no mês. Paulo recebe um valor fixo de R$ 1.200,00, mais comissão de R$ 40,00 para cada assinatura vendida. Veja no quadro abaixo a relação entre o número de assinaturas vendidas e o salário de Paulo.

Número de assinaturas vendidas	Salário de Paulo (em real)
0	1.200
1	$1.200 + 1 \cdot 40 = 1.240$
2	$1.200 + 2 \cdot 40 = 1.280$
3	$1.200 + 3 \cdot 40 = 1.320$
4	$1.200 + 4 \cdot 40 = 1.360$
5	$1.200 + 5 \cdot 40 = 1.400$

DANILLO SOUZA

Nesse caso, podemos escrever a seguinte lei de função:

$$f(x) = 1.200 + x \cdot 40 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1.200 + 40x$$

Observe que $f(x)$ representa o salário de Paulo e x, o número de assinaturas vendidas.

Com essas informações, podemos responder, por exemplo, às questões a seguir.

a) Se Paulo vender 59 assinaturas em um mês, qual será seu salário?
Nesse caso, substituímos x por 59 na lei da função $f(x) = 1.200 + 40x$:

$$f(59) = 1.200 + 40 \cdot 59$$
$$f(59) = 1.200 + 2.360$$
$$f(59) = 3.560$$

Logo, se Paulo vender 59 assinaturas, ele receberá R$ 3.560,00 de salário.

Observe que $f(59)$ corresponde ao salário de Paulo quando x for igual a 59.

DANILLO SOUZA

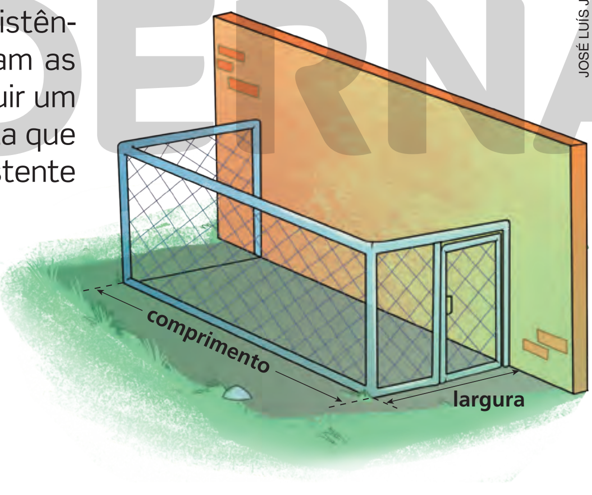
b) Se o salário ao final do mês foi de R$ 3.240,00, quantas assinaturas Paulo vendeu?
Agora, substituímos $f(x)$ por 3.240 e encontramos o valor de x correspondente.

$$3.240 = 1.200 + 40x$$
$$-40x = 1.200 - 3.240$$
$$40x = 2.040$$
$$x = 51$$

Portanto, se Paulo receber R$ 3.240,00 de salário, significa que foram vendidas 51 assinaturas.

Situação 3

José tem um sítio e pratica agricultura de subsistência. Como viviam soltas, suas galinhas comiam as verduras da horta; então, ele resolveu construir um galinheiro retangular com os 16 metros de tela que comprou e, para isso, aproveitou um muro já existente como um dos lados.



JOSÉ LUÍS JUHAS

Observe que a soma de duas larguras com um comprimento resulta em 16 metros. Assim, se José construir um galinheiro de 3 metros de largura, o comprimento terá 10 metros.

$$16 - 2 \cdot 3 = 10, \text{ pois } 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

Veja no quadro abaixo outros possíveis valores para as dimensões do galinheiro, em metro.

Largura (em metro)	Comprimento (em metro)
1	$16 - 2 \cdot 1 = 14$
2	$16 - 2 \cdot 2 = 12$
3,5	$16 - 2 \cdot 3{,}5 = 9$
5	$16 - 2 \cdot 5 = 6$
6,4	$16 - 2 \cdot 6{,}4 = 3{,}2$

LEONID IKAN/SHUTTERSTOCK

Note que o comprimento y é uma função da largura x, e que ambos se relacionam de acordo com a lei $y = 16 - 2x$, ou seja, para essa situação podemos considerar a função f dada por $f(x) = 16 - 2x$, em que x assume valores entre 0 e 8.

Com essas informações, podemos responder, por exemplo, às questões a seguir.

a) Para José construir um galinheiro de 7,5 metros de comprimento, qual será a largura?
Basta substituir $f(x)$ por 7,5 e encontramos o valor de x correspondente.

$$7{,}5 = 16 - 2x$$
$$2x = 16 - 7{,}5$$
$$2x = 8{,}5$$
$$x = 4{,}25$$

Portanto, para o galinheiro ter 7,5 metros de comprimento, a largura deverá ser igual a 4,25 metros.

b) Se José quiser construir um galinheiro quadrado, qual será a largura?
Nesse caso, a largura x deverá ser igual ao comprimento $f(x)$. Assim, substituímos $f(x)$ por x na lei $f(x) = 16 - 2x$.

$$x = 16 - 2x$$
$$3x = 16$$
$$x = \frac{16}{3}$$

Logo, se José construir um galinheiro quadrado, ele terá $\frac{16}{3}$ metros de largura.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Responda oralmente às questões.

Em certa loja, uma blusa custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

PRESSMASTER/SHUTTERSTOCK

a) Na compra de 2 blusas, qual será o preço pago? E na compra de 10? R$ 80,00; R$ 400,00

b) Para cada quantidade comprada dessas blusa, o preço associado é único? sim

c) A relação entre a quantidade de blusas compradas e o preço a ser pago é uma função? sim

d) Determine o preço pago (y), como uma função do número de blusas compradas (x). $y = 40x$

2 Responda: **2. a)** Não, pois pode existir uma mãe que esteja associada a mais de um filho.

a) Considerando a relação que associa uma mãe a cada filho dela, podemos dizer que essa relação é uma função?

b) Considerando a relação que associa cada filho à mãe dele, podemos dizer que essa relação é uma função? Sim, pois qualquer filho tem uma única mãe.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

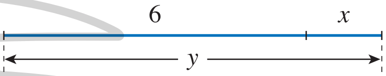
- pela 1ª hora: R$ 5,00;
- pela 2ª hora e seguintes: R$ 2,00 por hora.

Se x representa o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento e y, o valor a ser pago, qual é a lei da função que fornece y em função de x? resposta possível: $y = 5 + 2 \cdot (x - 1)$

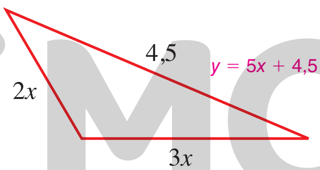

G. EVANGELISTA/OPÇÃO BRASIL

4 Faça o que se pede.

a) Represente o comprimento y em função de x, na figura a seguir. $y = x + 6$

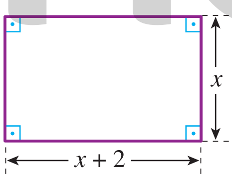


b) Determine o perímetro y em função de x, nos polígonos a seguir.



$y = 5x + 4,5$

$y = 4x + 4$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

5 Uma máquina produz 8 litros de sorvete a cada 10 minutos. Assim, a produção p depende da quantidade t de minutos em que a máquina produz.

Escreva a lei dessa função, que fornece p em função de t.

resposta possível: $p = \frac{8}{10} \cdot t$

Os alunos poderão expressar as leis de outras formas.


PHOTOFUSION/UNIVERSALIMAGES GROUP/ GETTY IMAGES

6 Considerando a função f cuja lei é $f(x) = 4x + 9$, determine:

a) $f(2)$; 17

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 11

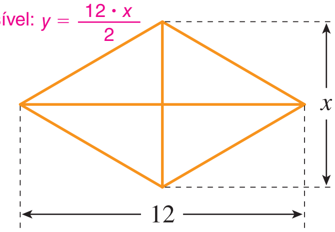
c) $f(-2)$; 1

d) $f(-0,3)$; 7,8

e) $f\left(\sqrt{2}\right)$. $4\sqrt{2} + 9$

7 A diagonal maior de um losango mede 12 cm.

7. a) resposta possível: $y = \frac{12 \cdot x}{2}$



ADILSON SECCO

a) Represente a área desse losango em função da medida da diagonal menor.

b) Calcule a área desse losango quando a diagonal menor tiver 7 cm de medida. 42 cm²

c) Quanto deve medir a diagonal menor para que a área desse losango seja 45 cm²? 7,5 cm

8 Reúna-se com um colega para resolver a atividade a seguir. **8. a)** $c = 27 + 0,30n$ **d)** 80 pirulitos

Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 e mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20.

a) Represente o custo diário c em função da quantidade n de pirulitos produzidos.

b) Se em um dia ele vender 200 pirulitos, terá lucro ou prejuízo? De quanto? lucro; R$ 153,00

c) Qual é o número mínimo de pirulitos que esse fabricante deverá vender por dia para ter lucro? 31 pirulitos

d) Para esse fabricante ter um lucro de R$ 45,00, quantos pirulitos ele deve vender?

e) Quantos pirulitos ele deve vender por dia útil para que, no fim de um mês com 22 dias úteis, lucre 6 salários mínimos?

f) Expliquem a outra dupla como vocês chegaram às respostas das questões. resposta pessoal

8. e) A resposta depende do salário mínimo vigente.

9 A produção de uma fábrica onde trabalham 121 funcionários é dada por $y = 50\sqrt{x}$, em que y representa a quantidade de unidades de certo produto fabricado mensalmente e x o número de funcionários.

a) Calcule quantas unidades a mais serão produzidas, em um mês, com a contratação de 48 novos funcionários. 100 unidades

Lembre-se:
Não escreva no livro!

b) Se o número de funcionários fosse quadruplicado, a produção também seria quadruplicada? A variação do número de funcionários é proporcional à variação da produção?
Não, seria duplicada; não.

10 Faça um desenho representando um retângulo com 10 m de comprimento e a largura com x metros a menos.

10. a) construção de tabela
b) Não, pois a largura seria nula ou negativa.

a) Construa uma tabela colocando na primeira linha os valores 1, 2, 3, 4 e 5 para x e, na segunda linha, a área (A) do retângulo.

b) Pode-se atribuir a x um valor igual a 10 ou maior que 10? Justifique sua resposta.

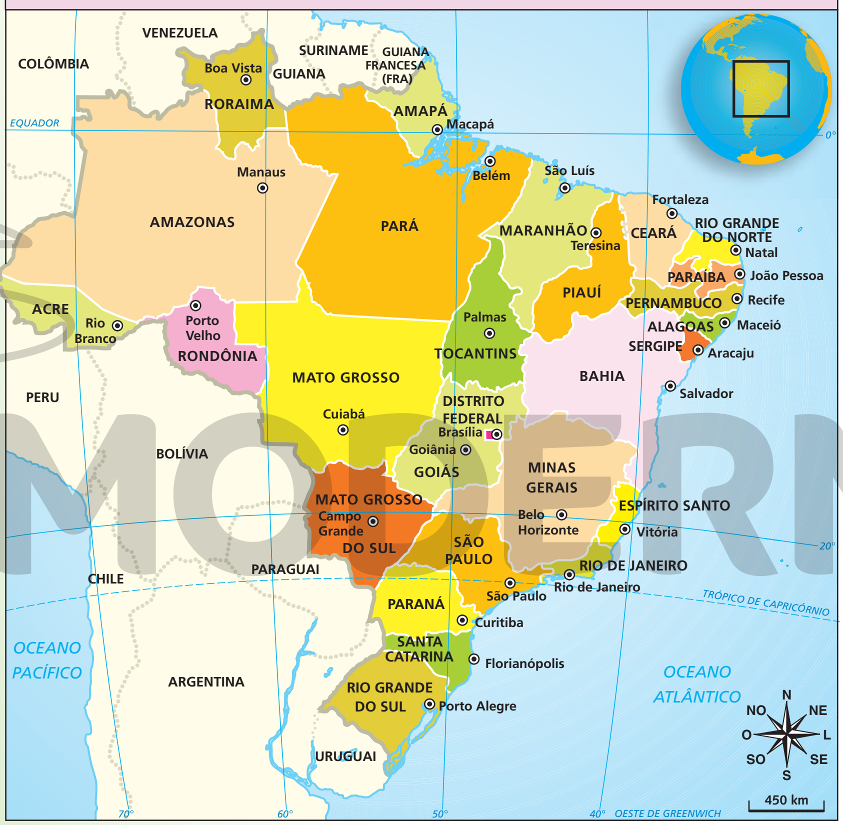
c) Escreva uma dupla desigualdade, do tipo $a < x < b$, para indicar os valores reais que x pode assumir. $0 < x < 10$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Observe o mapa abaixo. Comente com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter rosa dos ventos, que indica a orientação.

MAPA POLÍTICO BRASILEIRO



FERNANDO JOSÉ FERREIRA

Elaborado a partir de IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

Considerando a escala indicada no mapa, resolva as questões a seguir.

a) Escreva a lei da função que fornece a distância real y, em quilômetro, entre duas cidades do mapa em função da distância x, em centímetro, medida no mapa. $y = x \cdot 450$

b) Use uma régua para medir a distância entre São Paulo e Florianópolis em linha reta. Em seguida, calcule a distância real entre essas duas cidades. 495 km

c) Qual capital está a 1.800 km de Brasília? Natal

d) Um pequeno avião tem autonomia de voo igual a 1.350 km. Se ele partisse de Belo Horizonte, a quais das cidades destacadas no mapa ele conseguiria chegar sem precisar reabastecer?
Brasília, Florianópolis, Curitiba, São Paulo, Rio de Janeiro, Campo Grande, Goiânia, Palmas, Aracaju, Salvador, Vitória

PARA SABER MAIS +

A Matemática na História

Não sabemos exatamente quando o conceito de **função** foi usado pela primeira vez. Sabe-se que os babilônios, cerca de 2000 a.C., construíram tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser consideradas tabelas de funções.

Antigos registros mesopotâmicos sobre lunações (espaços entre duas luas novas consecutivas) representavam, por meio de tabelas, a relação entre as fases da Lua e o período de tempo solar. Os babilônios valorizavam essas tabelas, pois elas estabeleciam uma correspondência de valores. Eles as utilizavam não somente para obter as informações que continham, mas também para avaliar os resultados correspondentes a valores intermediários, calculados por meio de aproximações por segmentos de reta.

O emprego das aproximações na Antiguidade significa a aplicação de uma relação funcional elementar, pois é uma simples proporcionalidade e constituiu o primeiro passo rumo ao desenvolvimento posterior de noções mais gerais de função.

Novas contribuições, ainda implícitas, para o desenvolvimento do conceito de função surgiram muito depois, no final da Idade Média, como as do matemático francês Nicole Oresme (1323-1382).

As ideias mais explícitas de função parecem ter surgido somente na época de René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês que adotou equações em x e em y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo que permitisse o cálculo de valores de uma delas por meio do valor da outra.

MUSEU DO LOUVRE, PARIS

Retrato de René Descartes (c. 1649).

Foi somente a partir dos trabalhos do físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) e do matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) que a palavra **função**, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida. Foram eles que fizeram as primeiras contribuições efetivas para o desenvolvimento desse conceito.

Por volta de 1718, o matemático suíço Jean Bernoulli (1667-1748) chegou a considerar uma função como uma expressão qualquer, formada de uma variável e algumas constantes. Usou várias notações para uma função de x, sendo fx a mais próxima da que usamos hoje.

O suíço Leonhard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos de sua época, também trabalhou com funções e introduziu a notação $f(x)$, hoje padronizada.

Posteriormente, outros matemáticos, como Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) e Johann Dirichlet (1805-1859), contribuíram significativamente para o desenvolvimento do conceito de função.

A teoria dos conjuntos, criada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), ampliou o conceito de função até chegar à definição conhecida atualmente.

Gráfico de uma função

Considere a função f dada pela lei $y = x + 1$, em que x representa um número inteiro qualquer. Vamos construir seu gráfico.

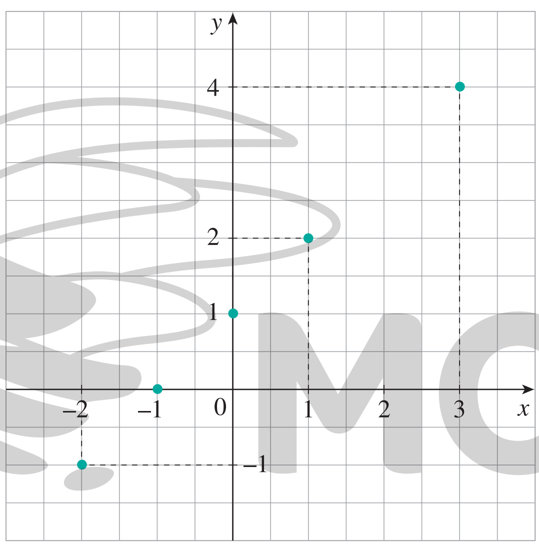
Para isso, atribuímos valores a x e calculamos os valores de y, determinando os pares ordenados correspondentes. Esses dados foram organizados no quadro ao lado.

Quadro com alguns pontos do gráfico de *f*

x	**$y = x + 1$**	**(x, y)**
-2	$y = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
3	$y = 3 + 1 = 4$	$(3, 4)$

Para representar graficamente essa função, vamos marcar, em um plano cartesiano, os pontos determinados por esses pares ordenados. Os pontos marcados são apenas alguns dos pontos do gráfico dessa função, pois existem infinitos pares ordenados (x, y), que satisfazem a lei $y = x + 1$, sendo x um número inteiro.

gráfico de *f*



ADILSON SECCO

Note que há uma reta que passa por esses pontos, porém nem todos os pontos da reta são pontos do gráfico. Por exemplo, no gráfico não há um ponto de abscissa 0,5, pois 0,5 não é um número inteiro.

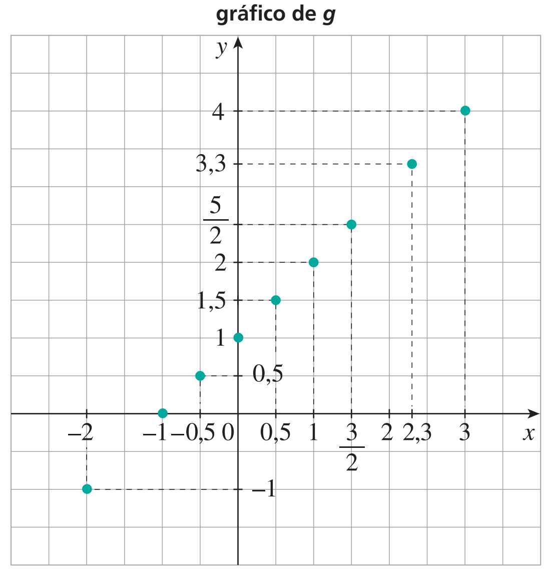
Considere agora uma função g dada pela mesma lei da função f, $y = x + 1$, porém com x representando um número racional qualquer.

Como todo número inteiro é também um número racional, todos os pontos do gráfico de f também são pontos do gráfico de g. Além desses pontos, podemos obter outros. Veja:

Quadro com alguns pontos do gráfico de *g*

x	**$y = x + 1$**	**(x, y)**
$-0{,}5$	$y = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$	$(-0{,}5; 0{,}5)$
$0{,}5$	$y = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$	$(0{,}5; 1{,}5)$
$\frac{3}{2}$	$y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$2{,}3$	$y = 2{,}3 + 1 = 3{,}3$	$(2{,}3; 3{,}3)$

gráfico de *g*



ADILSON SECCO

Também neste caso não foram marcados todos os pontos do gráfico de *g*, pois existem infinitos pares ordenados (x, y), sendo x um número racional, que satisfazem a lei $y = x + 1$.

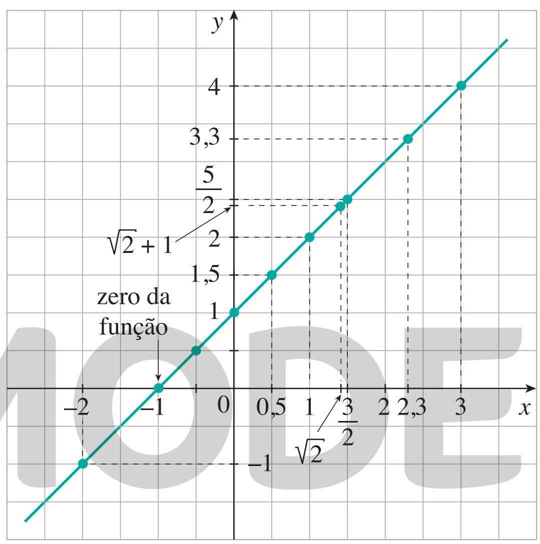
Novamente, é possível perceber que há uma reta passando pelo gráfico da função *g*. Embora haja nesse gráfico infinitos pontos dessa reta, nem todos os pontos dela pertencem ao gráfico de *g*, como o ponto de abscissa $x = \sqrt{2}$, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional.

OBSERVAÇÃO

- O termo *infinitos* não significa *todos*, por isso não podemos traçar a reta que passa pelos pontos obtidos no gráfico da função *g*. Imagine esse gráfico como "uma reta com buracos".

Agora, vamos considerar uma função *h* dada pela mesma lei da função *f*, $y = x + 1$, porém com x representando um número real qualquer.

gráfico de *h*



Os pontos obtidos para os gráficos das funções *f* e *g* também são pontos do gráfico de *h*, pois os números inteiros e os números racionais são números reais. Além desses pontos, devemos considerar aqueles cujos pares ordenados (x, y) satisfazem a lei $y = x + 1$, sendo x um número irracional, como $x = \sqrt{2} \simeq 1{,}4$, ou seja, $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1\right)$.

Neste caso, em que x representa todos os números reais, podemos traçar a reta que passa pelos pontos obtidos.

Observe que a abscissa do ponto que tem $y = 0$ é $x = -1$. Esse valor de x é chamado de **zero da função**.

Zero da função é todo valor de x para o qual y é igual a zero, ou seja, é a abscissa do ponto onde o gráfico da função cruza o eixo dos x.

Desse modo, para calcular o zero da função do nosso exemplo, basta resolver a equação $x + 1 = 0$. Assim, obtemos $x = -1$.

Como reconhecer o gráfico de uma função

Daqui em diante, vamos considerar, salvo observação em contrário, apenas as funções que tenham para valores de *x* todos os números reais.

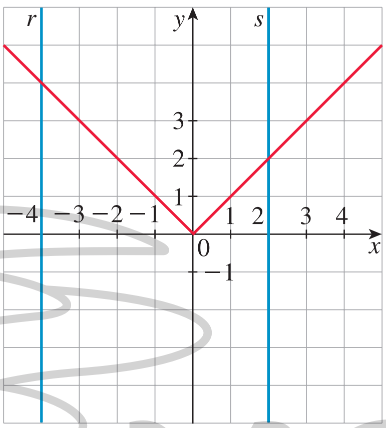
Já vimos que quando *y* é função de *x*, para cada valor de *x* existe um único valor de *y*.

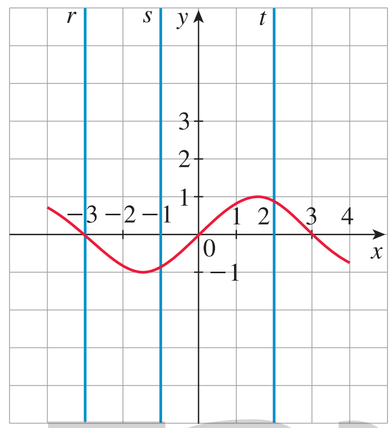
Desse modo, em um gráfico de função, para cada abscissa haverá somente um ponto correspondente no gráfico.

Podemos verificar isso geometricamente, traçando retas perpendiculares ao eixo dos *x*. Se uma dessas retas interceptar o gráfico em mais de um ponto, o gráfico não representa uma função.

Veja alguns exemplos.

a)



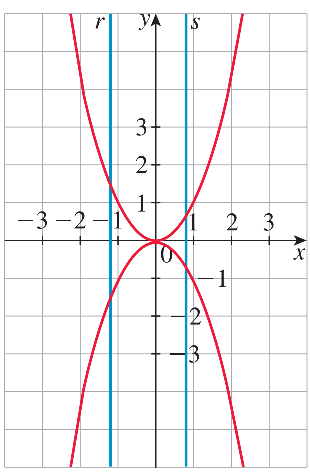


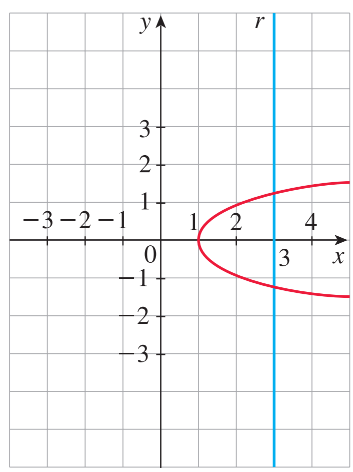
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Cada um desses gráficos representa uma função, pois, para qualquer valor de *x*, temos um único valor de *y* correspondente.

Em ambos os casos, qualquer reta perpendicular ao eixo dos *x* interceptará os gráficos em um único ponto.

b)





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Já esses gráficos não representam nenhuma função, pois existe valor de *x* com dois valores de *y* correspondentes.

Observe, em cada caso, que a reta *r*, perpendicular ao eixo dos *x*, intercepta os gráficos em dois pontos com ordenadas (*y*) diferentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Considere a função dada pela lei $y = -x + 1$. Construa em uma folha de papel quadriculado o gráfico dessa função, sendo: construção de gráfico

a) x um número inteiro qualquer;

b) x um número real qualquer.

12 Um automóvel percorre uma estrada à velocidade constante de 80 km por hora.

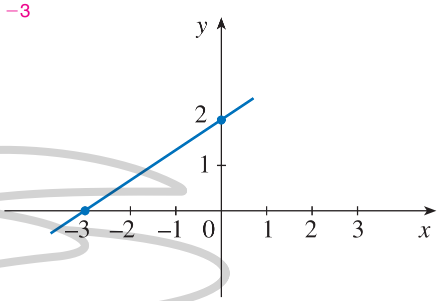
a) Indicando por x o tempo transcorrido (em hora) e por y a distância percorrida (em quilômetro), monte uma tabela com os seguintes valores para x: 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Em seguida, escreva a lei da função que fornece y em relação a x. $y = 80x$

b) A variável x pode assumir um número negativo? não

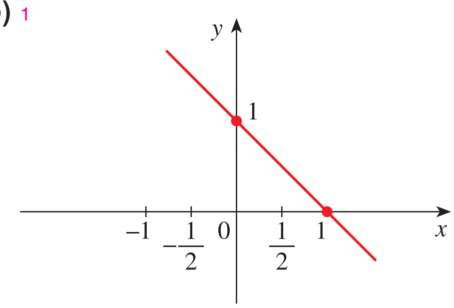
c) Represente, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico correspondente. construção de gráfico

13 Determine o zero das funções representadas nos gráficos a seguir.

a) -3



b) 1



14 Determine o zero das funções dadas por:

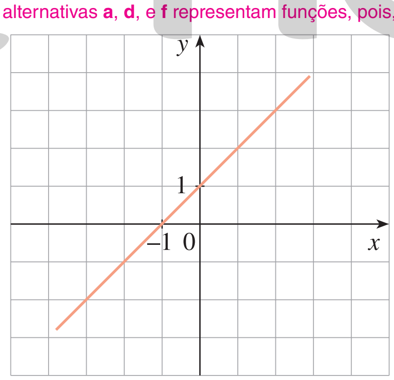
a) $y = x + 3$ -3

b) $y = -3x^2 + 6$ $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

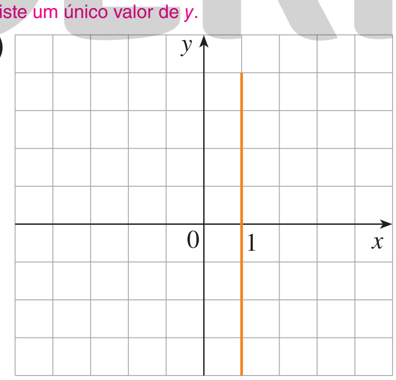
c) $y = 3x + 18$ -6

15 Observe os gráficos a seguir e identifique aqueles que representam funções. Justifique sua resposta.
As alternativas **a**, **d**, e **f** representam funções, pois, para cada valor de x, existe um único valor de y.

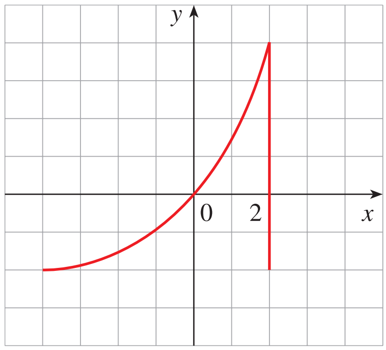
a)



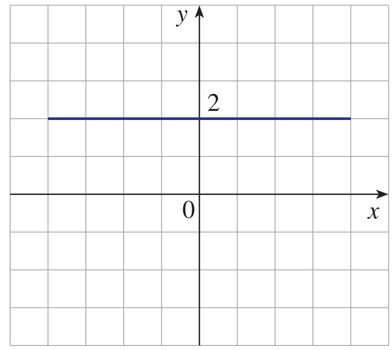
c)



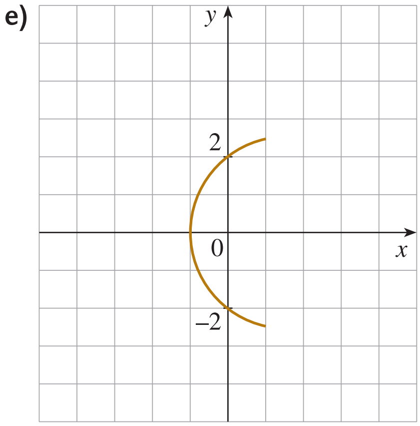
b)



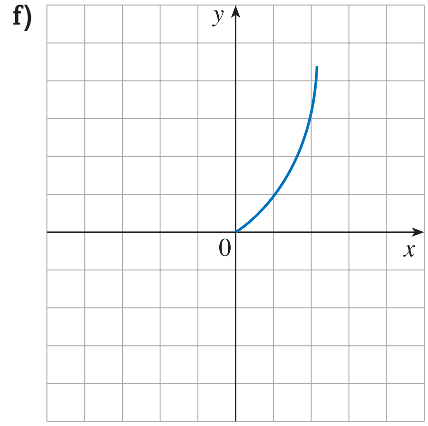
d)



e)



f)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Sabendo que o preço de uma revista é 6 reais, faça o que se pede.

a) Construa uma tabela que apresente o preço de 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 exemplares dessa revista. construção de tabela

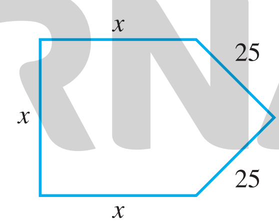
b) Represente em um plano cartesiano os pares ordenados (x, y) da tabela, colocando no eixo dos x o número de revistas e no eixo dos y, o preço a pagar. construção do gráfico

c) É possível comprar 4,5 revistas? E $\sqrt{3}$ revistas? Justifique sua resposta. resposta pessoal

d) Você pode traçar uma reta por esses pontos para representar o gráfico? Por quê?
Não. Porque a quantidade de revistas é uma grandeza discreta, ela é representada pelos números naturais e não pelos reais.

2 Função polinomial do 1º grau

Considere o pentágono da figura ao lado. Nele, as medidas são dadas em centímetro. O perímetro desse polígono depende dos valores que forem atribuídos a x. Indicando o perímetro por y, temos:



NELSON MATSUDA

$$y = 3x + 50$$

A função definida pela lei $y = 3x + 50$ é um exemplo de **função polinomial do 1º grau**.

> Uma função polinomial do 1º grau é toda função do tipo $y = ax + b$, sendo a e b números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Veja outros exemplos de funções do 1º grau, dos quais destacamos os valores de a e b.

a) $y = 2x - 1$, sendo $a = 2$ e $b = -1$

b) $y = -\dfrac{3}{2}x + 5$, sendo $a = -\dfrac{3}{2}$ e $b = 5$

c) $y = -5x$, sendo $a = -5$ e $b = 0$

d) $y = \dfrac{x}{2}$, sendo $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 0$

DANILLO SOUZA

16 Identifique as leis que representam funções do 1º grau. alternativas **a**, **b**, **d**, **f**

a) $y = x + 3$
b) $y = -5x + 1$
c) $y = x^2 - 3x$
d) $y = -4x$
e) $y = x^2 - 5x + 6$
f) $y = 2 - x$

17 Dados a e b, escreva a lei de cada função do 1º grau, em que $y = ax + b$.

a) $a = 2$ e $b = -1$ $y = 2x - 1$
b) $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$ $y = \frac{x}{2}$
c) $a = \sqrt{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$ $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$
d) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$ $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

18 Dada a função definida pela lei $f(x) = 5x - 4$ com x real, determine:

a) $f(-1)$; -9
b) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$; -7
c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 6$; 2
d) o valor de x para que se tenha $f(x) = 0$. $\frac{4}{5}$

19 Considere o retângulo abaixo.

NELSON MATSUDA

Determine:

a) o perímetro em função de x; $y = 2x + 70$
b) o perímetro para $x = 12{,}5$; 95
c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 90$. 10

20 Considerando um quadrado cujo lado mede x cm, determine:

a) o perímetro do quadrado em função de x; $p = 4x$
b) o perímetro para $x = 10$. 40 cm

21 A lei que fornece a temperatura T, em grau Celsius, de ebulição da água de acordo com a altitude h, em metro, é: $T = 100 - 0{,}001h$

DANILLO SOUZA

Responda:

a) Qual é a temperatura de ebulição da água a 2.400 m de altitude? 97,6 °C
b) Qual é a temperatura de ebulição da água ao nível do mar? 100 °C

22 Uma caixa-d'água de 1.000 ℓ de capacidade é alimentada por um registro que, totalmente aberto, despeja 25 ℓ de água a cada 3 minutos.

CLAUDIO CHIYO

a) Considerando que a caixa-d'água esteja vazia, em quanto tempo ela ficará cheia depois que o registro for aberto? 120 minutos ou 2 horas
b) Se o registro permanecer aberto por 15 minutos, quantos litros de água será despejado na caixa durante esse tempo? 125 litros
c) Faça uma tabela indicando o volume de água que haverá na caixa de 15 em 15 minutos até ela ficar cheia. construção de tabela
d) Qual é a lei da função que representa o volume de água v em função do tempo t do registro totalmente aberto? $v = 25 \cdot \frac{t}{3}$

Gráfico de uma função polinomial do 1º grau

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é sempre uma reta.
Veja os exemplos a seguir.

a) Vamos representar graficamente a função do 1º grau definida pela lei $y = 2x + 1$.

Quadro com alguns pontos do gráfico da função

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
-1	-1	$(-1, -1)$
0	1	$(0, 1)$
1	3	$(1, 3)$

Indicação dos pontos encontrados no quadro

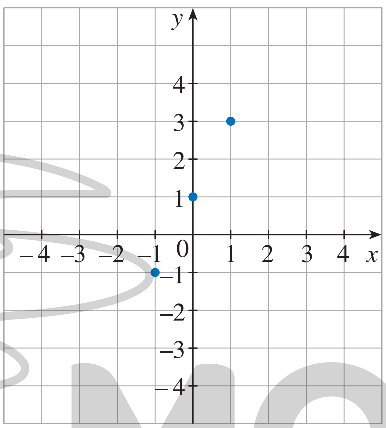
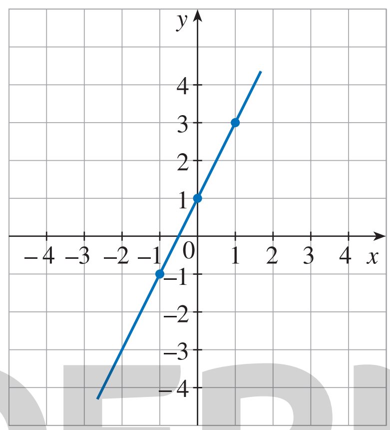


Gráfico da função



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

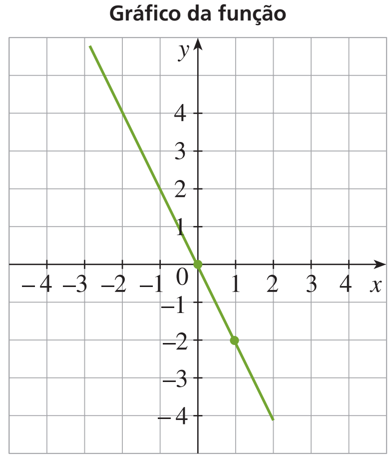
Como uma reta pode ser determinada por dois pontos distintos, então para construir o gráfico de uma função do 1º grau é suficiente representar apenas dois pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.

b) Vamos representar graficamente a função do 1º grau definida pela lei $y = -2x$.

Quadro com dois pontos do gráfico da função

x	$y = -2x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
1	-2	$(1, -2)$

Gráfico da função

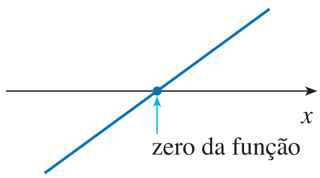


NELSON MATSUDA

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax$ é sempre uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.
A função de 1º grau definida pela lei $y = -2x$ é um exemplo de função com essa característica.

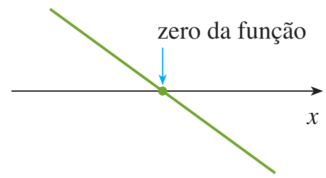
Como observamos nos gráficos construídos nos exemplos anteriores, a reta pode ter diferentes inclinações.

- Se $a > 0$, a inclinação da reta é:



Esboço do gráfico

- Se $a < 0$, a inclinação da reta é:



Esboço do gráfico

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Conhecido o zero de uma função do 1º grau e identificada a inclinação da reta, podemos esboçar o gráfico dessa função.

Como exemplo, vamos determinar o zero e esboçar o gráfico das funções definidas pelas leis:

a) $y = 5x - 4$

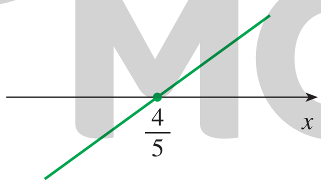
Zero da função:

$5x - 4 = 0$

$5x = 4$

$x = \dfrac{4}{5}$

Como $a = 5$ e, portanto, $a > 0$, o gráfico tem o seguinte esboço:



b) $y = -6x - 2$

Zero da função:

$-6x - 2 = 0$

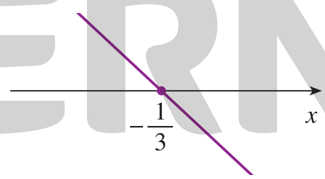
$-6x = 2$

$6x = -2$

$x = -\dfrac{2}{6}$

$x = -\dfrac{1}{3}$

Como $a = -6$ e, portanto, $a < 0$, o gráfico tem o seguinte esboço:

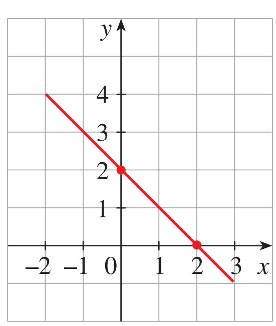


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23 Observe o gráfico de uma função para responder às questões abaixo.



NELSON MATSUDA

a) Qual é o valor de y quando $x = 2$? 0

b) Para que valor de x temos $y = 4$? −2

24 Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico das funções polinomiais do 1º grau definidas pelas leis abaixo. construção de gráfico

a) $y = -x + 3$

b) $y = 3x$

c) $y = -2x$

d) $y = 3x - 2$

25 O par ordenado (2, 8) representa um ponto do gráfico de uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax$.

a) Determine o valor de a da lei dessa função. 4

b) Determine o valor de y para $x = 3{,}5$. 14

c) Dê o valor de x para que se tenha $y = 0$. 0

d) Represente graficamente essa função em uma folha de papel quadriculado. construção de gráfico

Lembre-se:
Não escreva no livro!

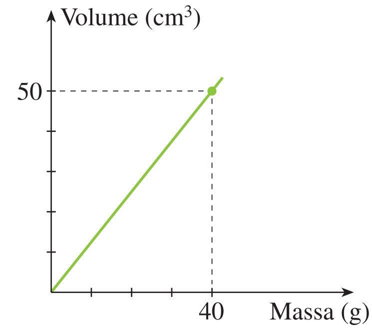
26 Considere a função polinomial do 1º grau definida pela lei $y = x - 3$.

a) Represente graficamente essa função em uma folha de papel quadriculado. construção de gráfico

b) Qual é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo dos x? 3

c) Qual é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos y? -3

27 O gráfico a seguir mostra a variação do volume de álcool em função de sua massa.



NELSON MATSUDA

Determine:

a) a lei da função; $y = 1{,}25x$

b) a massa (em grama) de 30 cm³ de álcool. 24 gramas

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

1. Usando uma folha de papel quadriculado, represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções polinomiais do 1º grau dadas pelas leis: $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = -2x + 6$.

Em seguida, responda:

a) Para que valor de x temos $f(x) = 0$? $-\frac{1}{3}$

b) Qual é a abscissa do ponto onde o gráfico da função g corta o eixo dos x? 3

c) Qual é a ordenada do ponto onde o gráfico da função f corta o eixo dos y? 1

d) Para que valor de x temos $f(x) = g(x)$? 1

2. Ainda no papel quadriculado, construa o gráfico, em um mesmo plano cartesiano, das funções polinomiais do 1º grau dadas pelas leis: $h(x) = -3x + 1$ e $i(x) = -3x + 6$.

Em seguida, responda:

a) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de h corta o eixo dos x? E o eixo dos y? $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; $(0, 1)$

b) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de i corta o eixo dos x? E o eixo dos y? $(2, 0)$; $(0, 6)$

c) Os gráficos de h e de i têm ponto comum? não

d) Para que valor de x temos $h(x) = i(x)$? Não existe valor de x para $h(x) = i(x)$.

Estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau

Estudar o sinal de uma função é determinar os valores reais de x para que:

- a função se anule ($y = 0$);
- a função seja positiva ($y > 0$);
- a função seja negativa ($y < 0$).

Veja dois exemplos.

a) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei: $y = 2x - 4$.

Podemos fazer esse estudo por meio do esboço do gráfico da função. Para isso, calculamos o valor de x que anula essa função.

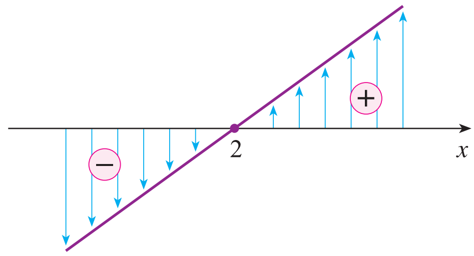
Para $y = 0$, temos:

$2x - 4 = 0$, ou seja, $x = 2$

Logo, essa função se anula para $x = 2$.

Observando ainda que na lei dessa função $y = 2x - 4$, $a = 2$, portanto $a > 0$, podemos esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.

NELSON MATSUDA



- Para $x = 2$, temos: $y = 0$
- Para $x > 2$, temos: $y > 0$
- Para $x < 2$, temos: $y < 0$

b) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei: $y = -2x + 4$.

Inicialmente, vamos calcular o valor de x que anula essa função.

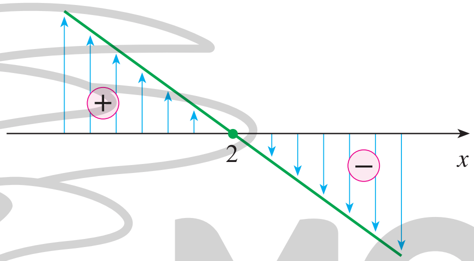
Para $y = 0$, temos:

$-2x + 4 = 0$, ou seja, $x = 2$

Logo, essa função se anula para $x = 2$.

Observando ainda que em $y = -2x + 4$, $a = -2$, portanto $a < 0$, podemos esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.

NELSON MATSUDA



- Para $x = 2$, temos: $y = 0$
- Para $x > 2$, temos: $y < 0$
- Para $x < 2$, temos: $y > 0$

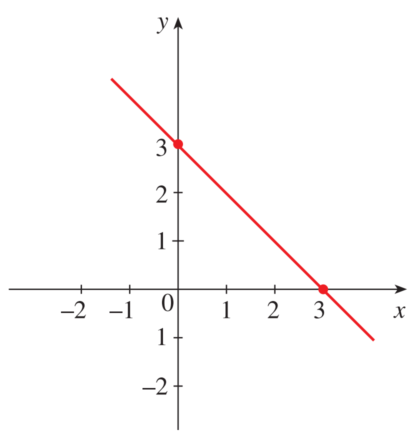
29. a) $x = 4$: $y = 0$; $x > 4$: $y > 0$; $x < 4$: $y < 0$
b) $x = 2$: $y = 0$; $x > 2$: $y < 0$; $x < 2$: $y > 0$
c) $x = \frac{5}{2}$: $y = 0$; $x > \frac{5}{2}$: $y > 0$; $x < \frac{5}{2}$: $y < 0$
d) $x = -\frac{1}{2}$: $y = 0$; $x > -\frac{1}{2}$: $y < 0$; $x < -\frac{1}{2}$: $y > 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Considere o seguinte gráfico de uma função do 1º grau.

NELSON MATSUDA



Responda:

a) Para que valor de x temos $y = 0$? 3

b) Para que valores de x temos $y > 0$? $x < 3$

c) Para que valores de x temos $y < 0$? $x > 3$

29 Estude o sinal das funções do 1º grau.

a) $y = 2x - 8$
b) $y = -3x + 6$
c) $y = 2x - 5$
d) $y = -2x - 1$

30 Considere a função do 1º grau definida por $y = ax + b$. Sabe-se que $a > 0$ e que o ponto determinado pelo par $(5, 0)$ pertence ao gráfico dessa função. Determine o sinal de y quando:

a) $x = -2$; negativo
b) $x = 0$; negativo
c) $x = 3$; negativo
d) $x = 8$; positivo
e) $x = 10$. positivo

31 Crie uma função do 1º grau de modo que:

- o zero dessa função seja 2;
- o gráfico para $x > 2$ esteja acima do eixo das abscissas, ou seja, $y > 0$.

Quantas funções assim existem? infinitas

respostas possíveis: $y = x - 2$, $y = +\frac{x}{2} - 1$; $y = 2x - 4$

PARA SABER MAIS +

Trabalhando com juro

DANILLO SOUZA

Quando pegamos dinheiro emprestado de um banco, pagamos uma espécie de aluguel por ele. Esse "aluguel" é chamado de **juro** (j).

Nas compras a prazo também pagamos juro. Do mesmo modo, recebemos juro quando fazemos uma aplicação financeira, por exemplo na caderneta de poupança.

O que pagamos ou recebemos de juro é uma porcentagem sobre o dinheiro emprestado ou aplicado durante determinado **tempo** (t). Essa porcentagem é chamada de **taxa de juro** (i).

A quantia que se empresta é chamada de **capital** (C). A soma do capital empregado com o juro obtido é denominada **montante** (M).

Quando um capital é aplicado por certo tempo a determinada taxa de juro, o montante pode crescer segundo dois regimes de capitalização (processo de formação do juro): o **juro simples** ou o **juro composto**.

Dada uma aplicação de R$ 500,00 a juro de 10% ao mês, durante 3 meses, considere as situações a seguir.

Situação 1

O juro é calculado sempre sobre os R$ 500,00.

A cada mês, o juro é dado por:

$$10\% \text{ de } 500 = \frac{10}{100} \cdot 500 = 50$$

Ao final dos 3 meses, o capital de R$ 500,00 produziu R$ 150,00 de juro.

O juro assim calculado é chamado de **juro simples**.

Situação 2

A cada mês o juro é acrescentado ao capital, e o total passará a render juro no próximo mês.

Assim, ao final do 1º mês, o capital de R$ 500,00 produz R$ 50,00 de juro.

Somando o capital com o juro, temos, agora, um novo capital, que é o montante.

montante = R$ 500,00 + R$ 50,00 = R$ 550,00

Ao final do 2º mês, esse montante produz R$ 55,00 de juro. Veja:

$$10\% \text{ de } 550 = \frac{10}{100} \cdot 550 = 55$$

Somando R$ 550,00 com R$ 55,00, obtemos o novo montante de R$ 605,00.

Ao final do 3º mês, esse montante produz juro de R$ 60,50 (10% de 605).

Somando o juro obtido em cada mês, temos:

R$ 50,00 + R$ 55,00 + R$ 60,50 = R$ 165,50

Logo, ao final dos 3 meses, o capital inicial de R$ 500,00 produziu R$ 165,50 de juro.

O juro assim calculado é chamado de **juro composto**.

Agora, vamos chegar a uma fórmula para calcular juro simples.

Sendo C o capital, i a taxa (expressa na forma decimal), t o período de tempo (na mesma unidade da taxa) e j o juro, temos:

Período (t)	Juro (j)
primeiro	$C \cdot i$
segundo	$C \cdot i + C \cdot i$
terceiro	$C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$
...	...
t-ésimo	$\underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + ... + C \cdot i}_{t \text{ parcelas}}$

Assim, o cálculo do juro simples pode ser feito do seguinte modo:

$$\boxed{j = C \cdot i \cdot t}$$

Observe que, fixados o capital e a taxa, temos o juro em **função** do tempo. Essa função é do 1º grau, pois é do tipo $y = ax + b$, com $a = C \cdot i$ e $b = 0$.

Como exemplo, vamos considerar que um capital de R$ 2.000,00 seja aplicado a uma taxa de 2,5% ao mês, no regime de juro simples.

Pelos dados, temos: C = R$ 2.000,00 e $i = 2{,}5\% = 0{,}025$

Podemos expressar o juro em função do tempo t por:

$$j = C \cdot i \cdot t\text{, ou seja, } j = 2.000{,}00 \cdot 0{,}025 \cdot t\text{, ou ainda, } j = 50t$$

Assim, após 3 meses, por exemplo, essa aplicação rende juro de R$ 150,00, pois $j = 50 \cdot 3$.

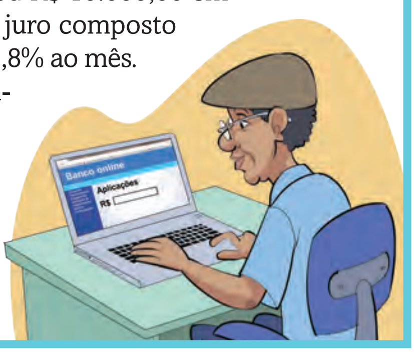
Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um capital de R$ 18.000,00 é aplicado à taxa de 8% ao ano no regime de juro simples. Determine o juro obtido para uma aplicação de 2 anos. j = R$ 2.880,00

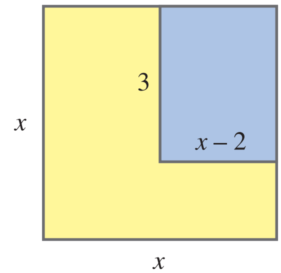
2 Por quanto tempo o capital de R$ 12.000,00 esteve empregado à taxa de juro simples de 1,6% ao mês para render R$ 2.304,00 de juro? 12 meses (ou 1 ano)

3 Adriano aplicou R$ 10.000,00 em um regime de juro composto com taxa de 0,8% ao mês. Calcule o montante após 4 meses de aplicação. R$ 10.323,86



CLAUDIO CHIYO

3 Função polinomial do 2º grau



NELSON MATSUDA

Considere a figura ao lado. Vamos calcular a área da parte amarela em função de x.

A área do quadrado é: x^2

A área do retângulo azul é: $3(x - 2)$

Então, a área representada pela parte amarela é:

$$x^2 - 3(x - 2), \text{ ou seja, } x^2 - 3x + 6$$

Indicando essa área por y, temos: $y = x^2 - 3x + 6$

A função definida pela lei $y = x^2 - 3x + 6$ é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** (ou **função quadrática**).

> Uma função polinomial do 2º grau é toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Veja outros exemplos de funções do 2º grau, em que destacamos os valores de a, b e c.

a) $y = x^2 - 5x + 4$, sendo $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$

b) $y = 2x^2 + 5x - 2$, sendo $a = 2$, $b = 5$ e $c = -2$

c) $y = x^2 - 9$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$

d) $y = -3x^2 + 2x$, sendo $a = -3$, $b = 2$ e $c = 0$

e) $y = x^2$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Sendo $f(x) = x^2 - 5x + 6$, determine:

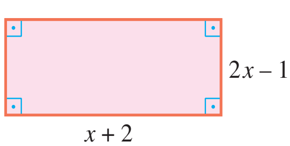
a) $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$; $f(0) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 2$

b) os valores de x de modo que $f(x)$ seja 0; 2 ou 3

c) os valores de x de modo que $f(x)$ seja 20. −2 ou 7

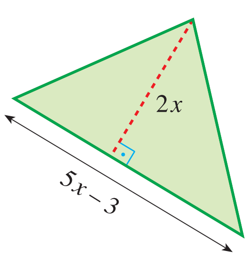
33 Expresse a área y de cada polígono em função de x.

a)



$y = 2x^2 + 3x - 2$

b)



$y = 5x^2 - 3x$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

34 Sendo $f(x) = x^2 + 3x$, determine:

a) $f(0)$; 0

b) os valores de x para que se tenha $y = 0$; 0 ou −3

c) $f(2)$; 10

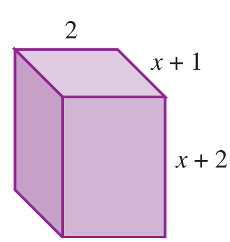
d) os valores de x para que se tenha $y = 10$. −5 ou 2

35 Sendo $f(x) = 2x^2 + 5$, determine:

a) $f\left(\sqrt{3}\right)$; 11

b) os valores de x para que se tenha $f(x) = 21$. $\pm 2\sqrt{2}$

36 Expresse na forma $y = ax^2 + bx + c$, o volume do paralelepípedo. $y = 2x^2 + 6x + 4$



NELSON MATSUDA

Gráfico de uma função polinomial do 2º grau

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma curva chamada **parábola**.

Para construir o gráfico de uma função desse tipo, procedemos como no caso da função polinomial do 1º grau:

- Atribuímos valores a x e obtemos os correspondentes valores de y.
- Organizamos os dados obtidos em um quadro com os pares ordenados.
- Localizamos esses pontos no plano cartesiano.
- Se o conjunto de pontos localizados permitir que se perceba a linha que passa por eles, traçamos essa linha. Caso contrário, devemos obter e localizar mais pontos do gráfico.


CHARLIE RIEDEL/AP PHOTO/GLOW IMAGES

Trajetória parabólica descrita por uma bola de basquete.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos representar graficamente a função do 2º grau definida pela lei: $y = x^2 - 2x - 3$.

Para $x = -2$, temos: $y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$

Para $x = -1$, temos: $y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

Para $x = 0$, temos: $y = (0)^2 - 2 \cdot (0) - 3 = -3$

Para $x = 1$, temos: $y = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Para $x = 2$, temos: $y = (2)^2 - 2 \cdot (2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

Para $x = 3$, temos: $y = (3)^2 - 2 \cdot (3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

Para $x = 4$, temos: $y = (4)^2 - 2 \cdot (4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$

Quadro com alguns pontos do gráfico da função

x	$y = x^2 - 2x - 3$	(x, y)
-2	5	$(-2, 5)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-4	$(1, -4)$
2	-3	$(2, -3)$
3	0	$(3, 0)$
4	5	$(4, 5)$

Indicação dos pontos encontrados no quadro

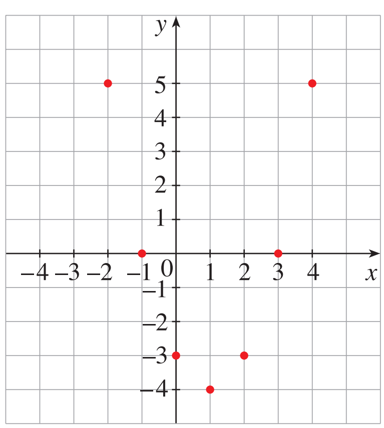
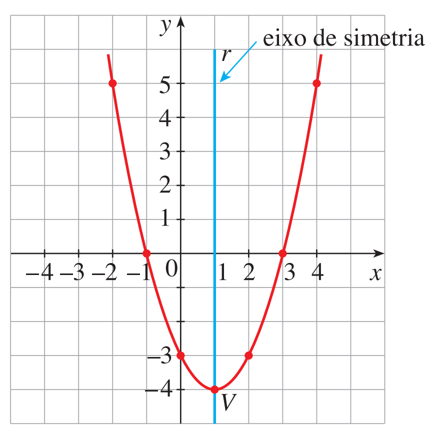


Gráfico da função



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O ponto V indicado na figura é o **vértice** da parábola.

Toda parábola, que é o gráfico de uma função polinomial do 2º grau, apresenta um **eixo de simetria**, isto é, a reta paralela ao eixo dos *y*, que passa pelo seu vértice.

No nosso exemplo, a reta *r* é o eixo de simetria da parábola. Observe que os pontos da parábola de abscissas -1 e 3, por exemplo, são simétricos em relação a esse eixo. O mesmo ocorre com os pontos da parábola de abscissas -2 e 4.

Os **zeros** de uma função do 2º grau são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos *x*. Observe, no gráfico da função de lei $y = x^2 - 2x - 3$, que:

- o número -1 é zero da função, pois para $x = -1$, temos $y = 0$;
- o número 3 é também zero da função, pois para $x = 3$, temos $y = 0$.

b) Vamos representar graficamente a função do 2º grau definida pela lei: $y = -x^2 + 4x - 3$.

Para $x = 0$, temos: $y = -(0)^2 + 4 \cdot (0) - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

Para $x = 1$, temos: $y = -(1)^2 + 4 \cdot (1) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$

Para $x = 2$, temos: $y = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$

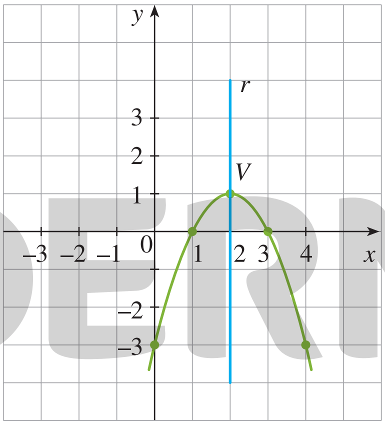
Para $x = 3$, temos: $y = -(3)^2 + 4 \cdot (3) - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$

Para $x = 4$, temos: $y = -(4)^2 + 4 \cdot (4) - 3 = -16 + 16 - 3 = -3$

Quadro com alguns pontos do gráfico da função

x	$y = -x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	-3	$(0, -3)$
1	0	$(1, 0)$
2	1	$(2, 1)$
3	0	$(3, 0)$
4	-3	$(4, -3)$

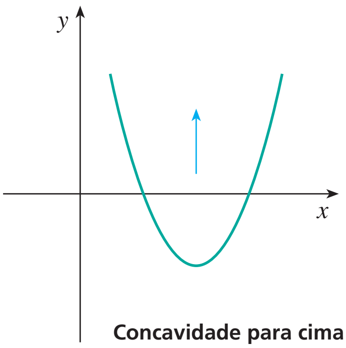
Gráfico da função



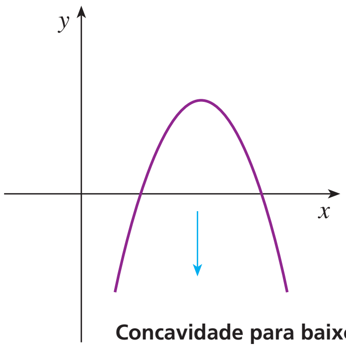
NELSON MATSUDA

Nesse gráfico, o vértice da parábola é o ponto (2, 1) e a reta *r* é seu eixo de simetria. Os zeros dessa função são 1 e 3, pois são as abscissas dos pontos onde a parábola cruza o eixo dos *x*.

Conforme observamos nos gráficos dos dois exemplos anteriores, a parábola pode ter a **concavidade** voltada **para cima** ou **para baixo**.



Concavidade para cima



Concavidade para baixo

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

No primeiro exemplo ($y = x^2 - 2x - 3$), o coeficiente a é positivo e a parábola tem a concavidade voltada para cima.

No segundo exemplo ($y = -x^2 + 4x - 3$), o coeficiente a é negativo e a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

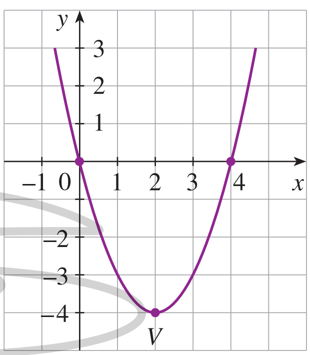
Considerando a função dada pela lei $y = ax^2 + bx + c$, temos:

- se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Considere a parábola abaixo.



NELSON MATSUDA

a) Qual é o sinal do coeficiente a? positivo

b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola? (2, −4)

c) Quais são os zeros da função correspondente a esse gráfico? 0 e 4

d) Identifique o ponto de intersecção entre o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola. (2, 0)

38 As medidas das diagonais de um losango são expressas por $(x + 2)$ e $(2x + 4)$. Determine:

a) a área y desse losango em função de x; $y = x^2 + 4x + 4$

b) para que valor de x esse losango tem área 25. 3

39 O gráfico de cada uma das funções a seguir é uma parábola. Determine os casos em que a parábola tem concavidade voltada para cima. alternativas **a**, **d**, **e**

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

c) $y = -3x^2 + x - 4$

d) $y = x^2 + 5x$

e) $y = x^2$

f) $y = -x^2 + 9$

40 Considerando a parábola a seguir, determine:

a) x quando $y = -3$; −2 e 2

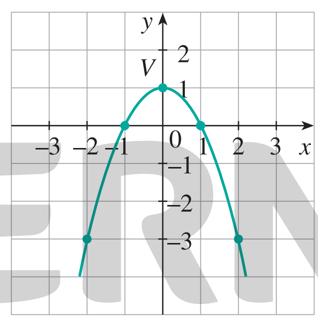
b) x quando $y = 2$; não existe

c) y quando $x = 2$; −3

d) $f(1)$; 0

e) os zeros da função; −1 e 1

f) as coordenadas do vértice. (0, 1)



NELSON MATSUDA

41 Determine os valores de p na função definida pela lei $y = (p - 3)x^2 - 5x - 24$ para que a parábola tenha a concavidade voltada para cima. $p > 3$

42 Determine os valores de p na função definida pela lei $y = (2p + 1)x^2 - 2x + 1$ para que a parábola tenha a concavidade voltada para baixo. $p < -\frac{1}{2}$

43 Uma função do 2º grau é definida pela lei:

$y = (m + 2)x^2 + (m + 3)x + m + 4$.

Responda:

a) Para que valores reais de m o gráfico dessa função tem concavidade voltada para baixo? $m < -2$

b) Para que valores reais de m o gráfico dessa função passa pelo ponto (0, 0)? $m = -4$

Esboço do gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Antes de fazer o esboço de uma parábola, devemos determinar os zeros da função e identificar sua concavidade.

Acompanhe um exemplo.

Vamos determinar os zeros da função dada pela lei $y = x^2 - 3x - 10$.

$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (a = 1, b = -3 \text{ e } c = -10)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 \longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

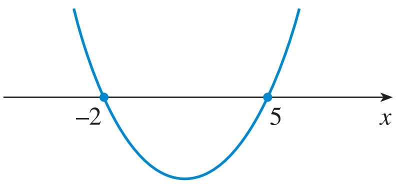
$$x_1 = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

e

$$x_2 = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Portanto, os zeros da função são -2 e 5.

Como $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Desse modo, podemos fazer o esboço do gráfico da função dada pela lei $y = x^2 - 3x - 10$.



NELSON MATSUDA

Veja outros exemplos.

a) $y = -2x^2 + 5x - 2$

$-2x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(5) \pm 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

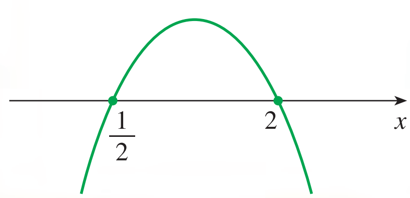
e

$$x_2 = \frac{-8}{-4} = 2$$

VICENTE MENDONÇA

Como $a = -2$, portanto $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

NELSON MATSUDA



b) $y = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

Como o 1º membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito, podemos escrever:

$$(2x - 1)^2 = 0$$

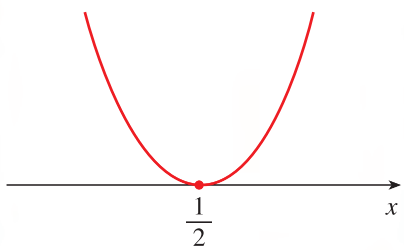
Assim, temos:

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

VICENTE MENDONÇA

Como $a = 4$, portanto $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.



NELSON MATSUDA

c) $y = -3x^2 + 2x - 1$

$-3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

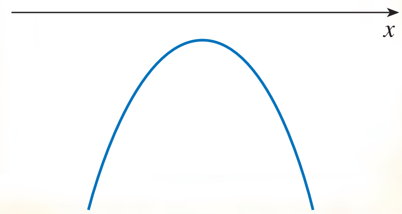
$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)$

$\Delta = 4 - 12 = -8$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Portanto, a parábola não corta o eixo dos x.

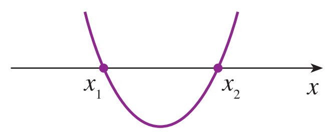
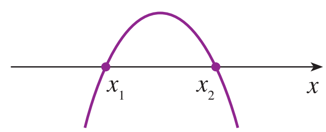
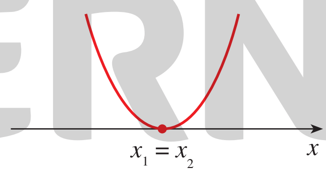
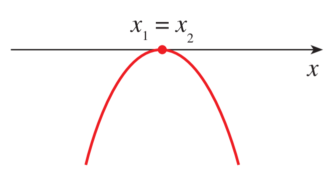
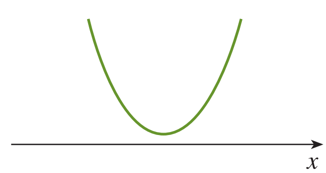
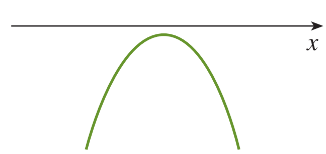
Como $a = -3$, portanto $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



VICENTE MENDONÇA

NELSON MATSUDA

No esboço do gráfico de uma função quadrática, podem ocorrer os seguintes casos:

<table>
<tr><td rowspan="2">Δ > 0
A parábola corta o eixo dos x em dois pontos distintos.</td><td>a > 0
concavidade voltada para cima</td><td></td></tr>
<tr><td>a < 0
concavidade voltada para baixo</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δ = 0
A parábola tangencia o eixo dos x.</td><td>a > 0
concavidade voltada para cima</td><td></td></tr>
<tr><td>a < 0
concavidade voltada para baixo</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δ < 0
A parábola não corta nem tangencia o eixo dos x.</td><td>a > 0
concavidade voltada para cima</td><td></td></tr>
<tr><td>a < 0
concavidade voltada para baixo</td><td></td></tr>
</table>

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Relembre aos alunos que, ao resolver uma equação do 2º grau em $\mathbb{R}$, temos três possibilidades:
$\Delta > 0$ (a equação tem duas raízes reais e distintas, x_1 e x_2);
$\Delta = 0$ (a equação tem duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$);
$\Delta < 0$ (a equação não tem raízes reais).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

44 Determine os zeros (se existentes) das funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma. construção de esboço

a) $y = x^2 - 6x + 8$ 2 e 4

b) $y = x^2 + 2$ Não existem.

c) $y = -x^2 + 4x$ 0 e 4

d) $y = x^2 - 6x + 9$ 3

e) $y = -9x^2 + 12x - 4$ $\frac{2}{3}$

f) $y = 2x^2 - 2x + 1$ Não existem.

45 A trajetória de um projétil lançado por um canhão, em um local plano e horizontal, é dada por parte do gráfico da função cuja lei é:

$$y = \frac{-x^2}{32} + \frac{x}{8}$$

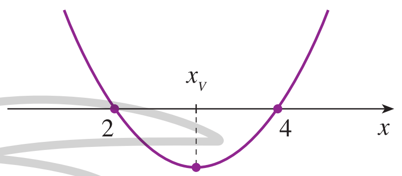
Se x representa a distância horizontal do projétil em relação ao canhão e y a distância vertical do projétil em relação ao canhão, determine a que distância do canhão o projétil caiu, considerando que x e y são distâncias dadas em quilômetro.

4 km

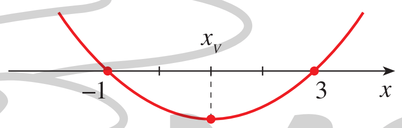
Coordenadas do vértice da parábola

Observe a seguir os esboços de gráficos de funções polinomiais do 2º grau com $\Delta > 0$.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Em razão da simetria das parábolas, os pontos cujas abscissas são os zeros da função são simétricos em relação ao vértice. Por isso, a **abscissa** do vértice da parábola é obtida pela semissoma dos zeros da função.

No esboço do item **a**, temos: $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

No esboço do item **b**, temos: $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-1 + 3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Como a soma das raízes de uma equação do 2º grau é obtida por $S = \dfrac{-b}{a}$, podemos concluir que:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

ou seja, a abscissa do vértice da parábola é dada por: $\boxed{x_v = \dfrac{-b}{2a}}$

OBSERVAÇÃO

- Essa fórmula, embora tenha sido demonstrada considerando $\Delta > 0$, também é válida nos casos de $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

Conhecida a abscissa do vértice da parábola, o valor da **ordenada** é obtido atribuindo o valor de x_v à variável x da função dada.

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola das funções quadráticas dadas por:

a) $y = x^2 - 8x + 15$

- Abscissa do vértice:

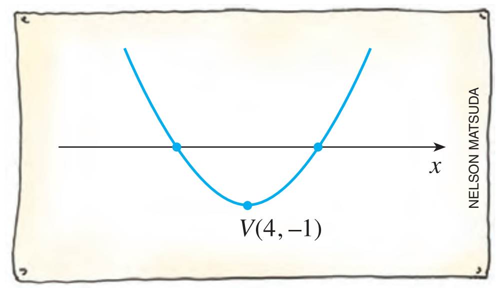
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot (1)} = \frac{8}{2} = 4$$

- Ordenada do vértice:

Substituindo x por 4 na lei da função, temos:

$y_v = (4)^2 - 8 \cdot (4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Logo, o vértice da parábola é $V(4, -1)$.



b) $y = 2x^2 - 3x + 2$

- Abscissa do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot (2)} = \frac{3}{4}$$

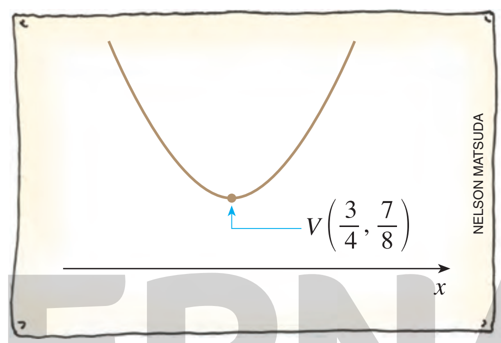
- Ordenada do vértice:

$$y_v = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} + 2 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 2 =$$

$$= \frac{18}{16} - \frac{36}{16} + \frac{32}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Portanto, o vértice da parábola é $V\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

46 Determine as coordenadas do vértice da parábola em cada caso. **a)** $V(-4, 32)$

a) $y = -x^2 - 8x + 16$

b) $y = 2x^2 + 6x$ $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

c) $y = x^2 - 16$ $V(0, -16)$

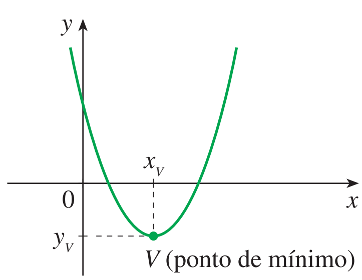
47 O ponto de vértice da parábola definida pela lei da função $y = 3x^2 - px + 2q$ é dado por $V(2, 1)$. Determine os valores reais de p e q.

$p = 12$ e $q = \frac{13}{2}$

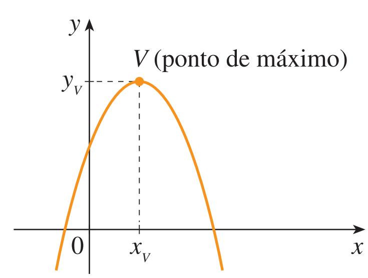
Valor máximo e valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau

Considere as funções do 2º grau cujos gráficos estão representados abaixo.

$a > 0$



$a < 0$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Examinando esses gráficos, podemos dizer que:

- Se $a > 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado **ponto de mínimo** e a ordenada do vértice, **valor mínimo** da função.
- Se $a < 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é chamado **ponto de máximo** e a ordenada do vértice, **valor máximo** da função.

Veja dois exemplos.

a) Para que valor de x o valor de $y = -2x^2 + 6x + 1$ é máximo?

O ponto de máximo de uma função do 2º grau com $a < 0$ é o vértice V. Como queremos o valor de x, devemos calcular x_v.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+6)}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Logo, y tem valor máximo para $x = 1{,}5$.

b) Vamos determinar o valor mínimo da função dada pela lei $y = x^2 - 10x + 24$.

O valor mínimo de uma função do 2º grau com $a > 0$ é dado pela ordenada y_v do vértice da parábola. Primeiro, calculamos x_v:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$$

Agora, calculamos y_v, substituindo x por 5 na lei da função:

$$y_v = 5^2 - 10 \cdot 5 + 24 = 25 - 50 + 24 = -1$$

Logo, o valor mínimo dessa função é -1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

48 Verifique se a função tem ponto de máximo ou de mínimo.

a) $y = 4x^2 - 9x + 2$ ponto de mínimo
b) $y = x^2 + 3x - 70$ ponto de mínimo
c) $y = -x^2 + 14x - 24$ ponto de máximo
d) $y = 5x^2 - 6x$ ponto de mínimo
e) $y = -3x^2 + 9x$ ponto de máximo
f) $y = -2x^2 - 50$ ponto de máximo

49 Para cada lei da função, calcule o x correspondente ao valor mínimo.

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ $\frac{2}{3}$
b) $y = x^2 + 12x + 11$ -6

50 Para cada lei da função, calcule o x correspondente ao valor máximo.

a) $y = -2x^2 + 11x - 5$ $\frac{11}{4}$
b) $y = -2x^2 + 25x - 150$ $\frac{25}{4}$

51 Calcule o valor máximo da função dada pela lei $y = -x^2 + 11x - 18$. $\frac{49}{4}$

52 Calcule o valor mínimo da função dada pela lei $y = x^2 - 6x + 8$. -1

53 Fernando demarcou uma região retangular de 100 m de perímetro em um terreno para construir uma casa.

Calcule as dimensões dessa região para que Fernando aproveite a maior área possível.
A maior área é obtida por um quadrado de 25 m de lado.

54 O custo C, em real, de um produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3.000$, sendo x a quantidade de unidades produzidas.

a) Qual deve ser a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo? 40 unidades
b) Qual é o valor desse custo mínimo? R$ 1.400,00

Construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Podemos agora, com maior precisão, construir o gráfico da função quadrática. Para isso, procedemos da seguinte maneira:

- determinamos as coordenadas do vértice V;
- atribuímos a x valores próximos de x_V e calculamos os correspondentes valores de y;
- construímos um quadro com os valores encontrados;
- marcamos no plano cartesiano os pontos obtidos;
- traçamos o gráfico (a parábola).

Veja alguns exemplos.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

Coordenadas do vértice

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_v = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$

Portanto, $V(2, -1)$ é o vértice da parábola.

Vamos atribuir a x valores próximos de x_v.

$$\underbrace{0 \qquad 1}_{\text{valores menores}} \qquad \underset{x_v}{\boxed{2}} \qquad \underbrace{3 \qquad 4}_{\text{valores maiores}}$$

Para $x = 0$, temos: $y = (0)^2 - 4 \cdot (0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

Para $x = 1$, temos: $y = (1)^2 - 4 \cdot (1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

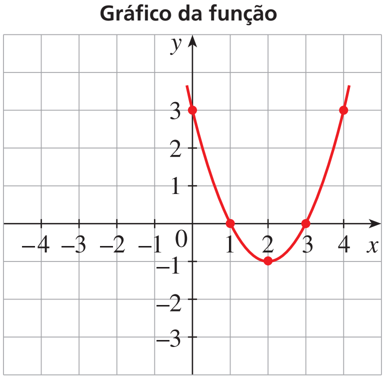
Para $x = 3$, temos: $y = (3)^2 - 4 \cdot (3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

Para $x = 4$, temos: $y = (4)^2 - 4 \cdot (4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico da função

x	$y = x^2 - 4x + 3$	(x, y)	
0	3	(0, 3)	
1	0	(1, 0)	
2	−1	**(2, −1)**	V
3	0	(3, 0)	
4	3	(4, 3)	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

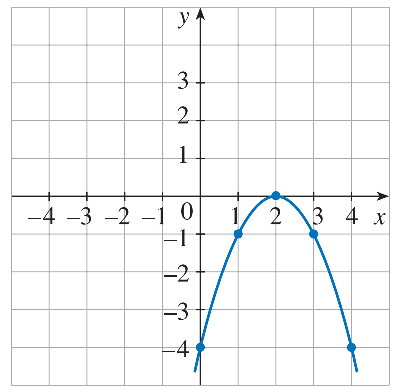
Coordenadas do vértice

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y_v = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 4 = -4 + 8 - 4 = 0 \end{array}\right\} V(2, 0)$$

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico da função

x	$y = -x^2 + 4x - 4$	(x, y)	
0	-4	$(0, -4)$	
1	-1	$(1, -1)$	
2	0	**(2, 0)**	V
3	-1	$(3, -1)$	
4	-4	$(4, -4)$	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

c) $y = x^2 - 2x + 2$

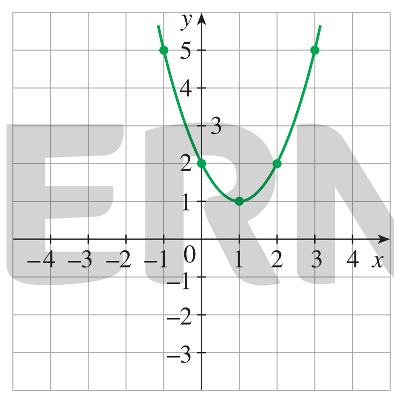
Coordenadas do vértice

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (1)} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_v &= (1)^2 - 2 \cdot (1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \end{aligned}\right\} V(1, 1)$$

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico da função

x	$y = x^2 - 2x + 2$	(x, y)	
-1	5	$(-1, 5)$	
0	2	$(0, 2)$	
1	1	**(1, 1)**	V
2	2	$(2, 2)$	
3	5	$(3, 5)$	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

55 Construa o gráfico das funções quadráticas em uma folha de papel quadriculado. construção de gráficos

a) $y = x^2 + 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 6x - 5$

c) $y = 3x^2 - 12x + 9$

d) $y = -x^2 + x + 1$

e) $y = -x^2$

f) $y = x^2 - x + 2$

56 Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos das funções dadas pelas leis $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$ em um mesmo plano cartesiano e determine os pontos de cruzamento desses dois gráficos. $(-2, 0)$ e $(2, 0)$

57 Reúna-se com um colega para fazer esta atividade.

Usando uma folha de papel quadriculado, para cada item, construam, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas pelas seguintes leis: construção de gráficos

a) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2$ e $y = -x^2$

c) $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = 4x^2$

Comparando os gráficos em cada plano cartesiano, o que vocês podem observar? resposta pessoal

Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau

Já vimos que estudar o sinal de uma função é determinar os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

Também já vimos como determinar os zeros de uma função quadrática (valores de x que anulam a função) e como esboçar seu gráfico.

Agora, acompanhe alguns exemplos do estudo do sinal de funções do 2º grau.

a) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = x^2 - 6x + 8$.

Podemos fazer esse estudo por meio do esboço do gráfico da função. Para isso, precisamos calcular os valores de x que anulam essa função (zeros da função).

Zeros da função

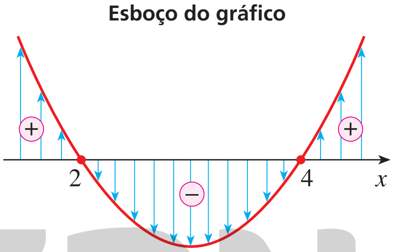
$x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad (a = 1 > 0, b = -6, c = 8)$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ e } x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Esboço do gráfico



NELSON MATSUDA

Estudo do sinal

- Para $x < 2$ ou $x > 4$, temos: $y > 0$
- Para $x = 2$ ou $x = 4$, temos: $y = 0$
- Para $2 < x < 4$, temos: $y < 0$

b) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = -x^2 - 6x - 9$.

Zeros da função

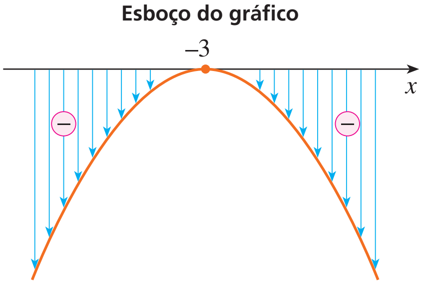
$-x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad (a = -1 < 0, b = -6, c = -9)$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-(-6)}{2 \cdot (-1)} = \frac{6}{-2} = -3$$

Esboço do gráfico



NELSON MATSUDA

Estudo do sinal

- Para $x \neq -3$, temos: $y < 0$
- Para $x = -3$, temos: $y = 0$
- Não existe valor real de x que torne a função positiva.

c) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = x^2 - 3x + 3$.

Zeros da função

$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad (a = 1 > 0, b = -3, c = 3)$

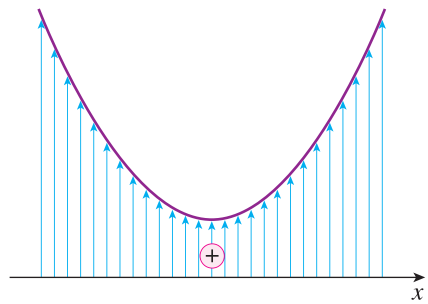
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$

A função não tem zeros reais.

Estudo do sinal

A função nunca se anula e não existe valor de x real que a torne negativa, ou seja, para qualquer x real, a função sempre é positiva.

Esboço do gráfico



NELSON MATSUDA

d) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = -x^2 + 3x - 3$.

Zeros da função

$-x^2 + 3x - 3 = 0 \qquad (a = -1 < 0, b = 3, c = -3)$

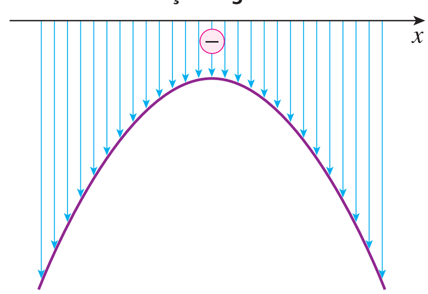
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -3$

A função não tem zeros reais.

Estudo do sinal

A função nunca se anula e não existe valor de x real que a torne positiva, ou seja, para cada x real, a função sempre é negativa.

Esboço do gráfico



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIO PROPOSTO

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

a) $x < 1$ ou $x > 2$; $y > 0$; $x = 1$ ou $x = 2$; $y = 0$; $1 < x < 2$; $y < 0$

b) $x < \frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2}$; $y > 0$; $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$; $y = 0$; $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$; $y < 0$

c) $-3 < x < \frac{1}{2}$; $y > 0$; $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$; $y = 0$; $x < -3$ ou $x > \frac{1}{2}$; $y < 0$

58 Estude o sinal das funções dadas pelas leis:

a) $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = 6x^2 - 5x + 1$

c) $y = -2x^2 - 5x + 3$

d) $y = x^2 + 8x + 16$ $x \neq -4$; $y > 0$; $x = -4$; $y = 0$

e) $y = -x^2 + 12x - 36$ $x = 6$; $y = 0$; $x \neq 6$; $y < 0$

f) $y = 3x^2 - 2x + 1$ Para qualquer x real a função é sempre positiva.

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Logo depois da festa de formatura, a família de Juliana resolveu comemorar em uma pizzaria. Ao se despedirem, todos os familiares apertaram-se as mãos. Juliana reparou que o total de cumprimentos foi 78. Sabendo que, quando uma pessoa cumprimenta outra, a outra também está cumprimentando essa pessoa, portanto conta-se como um só cumprimento, quantas pessoas foram comemorar nessa pizzaria? 13 pessoas

DANILLO SOUZA

PARA SABER MAIS +

Sistema de equações do 2º grau

As situações que relacionam dados por meio de uma igualdade são expressas, na linguagem matemática, por uma equação.

Duas ou mais equações constituem um sistema de equações. Se pelo menos uma delas é do 2º grau, temos um sistema de equações do 2º grau.

Considere a situação a seguir.

Hoje, a soma das idades de um pai e de seu filho é 38 anos. Sabendo que daqui a 2 anos a idade do pai será igual ao quadrado da idade do filho, calcule a idade de cada um hoje.

Para calcular as idades, vamos chamar de x a idade do pai e de y a idade do filho. Com os dados fornecidos, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2 = (y + 2)^2 \end{cases}$$

DANILLO SOUZA

Isolando x na equação $x + y = 38$, obtemos:

$$x = 38 - y$$

Substituindo x por $38 - y$ na equação $x + 2 = (y + 2)^2$, temos:

$$x + 2 = (y + 2)^2$$
$$38 - y + 2 = y^2 + 4y + 4$$
$$-y^2 - y - 4y + 38 + 2 - 4 = 0$$
$$-y^2 - 5y + 36 = 0$$
$$y^2 + 5y - 36 = 0$$

Resolvendo essa equação na incógnita y, temos:

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 13}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$y_1 = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

e

$$y_2 = \frac{-5 - 13}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Como não podemos ter uma idade negativa, então y = 4.

Portanto, o filho tem 4 anos.

Substituindo y por 4 na equação $x = 38 - y$, encontramos a idade do pai.

$$x = 38 - y = 38 - 4 = 34$$

Logo, hoje o filho tem 4 anos e o pai, 34 anos.

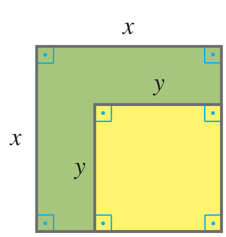
Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Determine dois números positivos a e b de modo que $a + b = 2$ e $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$.
$a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$ ou $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

2 A diferença entre dois números é 3. A soma de seus quadrados é 17. Qual é o maior desses números? 4 ou −1

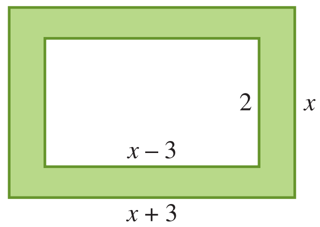
3 Na figura ao lado, a área verde tem 51 cm² e a diferença entre as medidas dos lados dos quadrados é 3 cm. Calcule a área amarela. 49 cm²



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Considerando a figura abaixo, expresse, a área y da região verde em função de x. $y = x^2 + x + 6$



NELSON MATSUDA

2 Considerando a função dada pela lei

$$f(x) = \frac{3x}{5} - \frac{7}{4}, \text{ calcule: } \frac{f(15) - f(10)}{15 - 10} \quad \frac{3}{5}$$

3 Uma função é dada pela lei $f(x) = 10x + 10$. Calcule $f(10) - f(0)$. 100

4 Na cidade onde Carlos mora, os táxis cobram um valor fixo de R$ 3,80 e mais R$ 0,70 por quilômetro rodado. Júlia, a tia de Carlos, mora em outra cidade e lá os táxis cobram um valor fixo de R$ 4,30 e mais R$ 0,60 por quilômetro rodado.

a) Expresse o preço y a ser pago em função dos x quilômetros rodados em um táxi da cidade onde Carlos mora. $y = 3{,}80 + 0{,}70x$

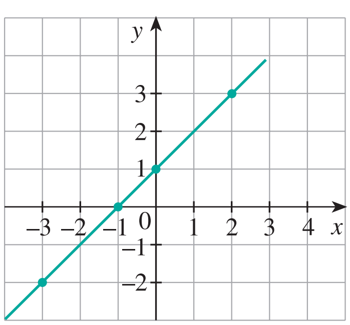
b) Faça o mesmo para um táxi na cidade onde Júlia mora. $y = 4{,}30 + 0{,}60x$

c) Quanto se pagará por uma corrida de 10 km em um táxi da cidade de Carlos? R$ 10,80

d) Qual dos dois táxis é mais econômico para uma corrida de 20 km? o táxi da cidade de Júlia

e) Para certo número de quilômetros rodados, os táxis das duas cidades cobram a mesma quantia. Qual é esse número? 5 km

5 Observe este gráfico da função f do 1º grau:



NELSON MATSUDA

Determine:

a) $f(-3)$; -2

b) $f(0)$; 1

c) o valor de x para $y = 3$; 2

d) o zero da função; -1

- Agora, responda: o gráfico passa pelo ponto (10, 11)? sim

6 Considere a função do 1º grau dada pela lei $y = 7x - 4$.

a) Determine o zero da função. $\frac{4}{7}$

b) Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico dessa função. construção de gráfico

c) Para que valor de x tem-se $f(x) = 2$? $\frac{6}{7}$

d) Para que valores de x tem-se $y > 0$? $x > \frac{4}{7}$

7 Dadas as funções definidas pelas leis $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = -3x + 6$, determine os valores reais de x para que:

a) $f(x) > 0$; $x > 3$

b) $g(x) > 0$; $x < 2$

c) $f(x) = g(x)$; $x = \frac{12}{5}$

d) $f(x) > g(x)$. $x > \frac{12}{5}$

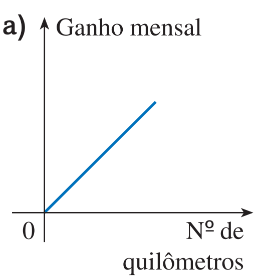
8 O gráfico da função dada pela lei $y = 6x + p$ passa pelo ponto (1, 11). Determine para que valores reais de x tem-se:

a) $y = 23$; 3

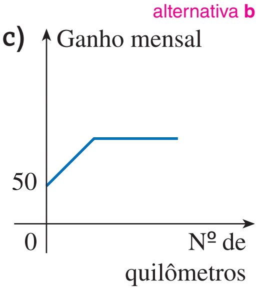
b) $y < 0$. $x < -\frac{5}{6}$

9 (Saresp) Um *motoboy*, para fazer entregas ou retirar documentos de escritórios espalhados pela cidade de São Paulo, recebe R$ 3,00 por quilômetro rodado. Suponhamos que ele passe a receber, mensalmente, um auxílio fixo de R$ 50,00. O gráfico que representa o seu ganho mensal, em reais, em função dos quilômetros rodados é: alternativa **b**

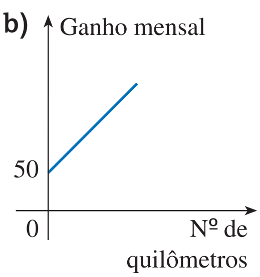
a)



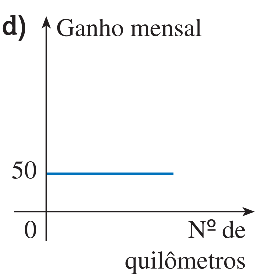
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

10 (Unifor-CE) A função f do 1º grau é definida por $f(x) = -3x + k$. O valor de k para que o gráfico de f corte o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5 é: alternativa **e**

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

11 Considere a função definida pela lei $y = x^2 - 2x + 1$.

a) Determine o(s) zero(s) dessa função. 1
b) Construa o gráfico da função. construção de gráfico
c) Para que valores de x temos $y = 1$? $x = 0$ ou $x = 2$
d) Para que valores de x temos $y > 0$? $x \neq 1$

12 A temperatura, em grau Celsius, no interior de uma câmara frigorífica é dada por uma função cuja lei é $y = t^2 - 7t + c$, em que t indica o tempo e y indica a temperatura.

a) Sabendo que para $t = 0$ a temperatura é de 10 °C, calcule o valor de c. $c = 10$
b) Qual é a lei da função? $y = t^2 - 7t + 10$
c) Calcule o valor de t para que a temperatura seja a mínima possível. 3,5 minutos

13 (UCSal-BA) A parábola de equação $y = 2x^2 - 3x + 1$ corta o eixo das abscissas nos pontos: alternativa **d**

a) (0, 0) e (3, 0).
b) (0, 1) e (0, 2).
c) (0, 1) e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
d) (1, 0) e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
e) (2, 0) e (1, 0).

14 O custo (C) de certo produto é obtido pela função definida pela lei $C = x^2 - 50x + 2$, em que x representa a quantidade do produto. Calcule o valor de x para que o custo desse produto seja mínimo. 25

15 (PUC-MG) O valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ é: alternativa **b**

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

16 (Puccamp-SP) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo? alternativa **b**

a) 2,5
b) 5
c) 7
d) 10
e) 25

17 (UFRGS-RS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, em que y é a altura dada em metro. A altura máxima atingida pela bola é: alternativa **b**

a) 36 m.
b) 18 m.
c) 12 m.
d) 6 m.
e) 3 m.

18 Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por x, $(20 - x)$ e 2. Qual é o maior volume que essa piscina poderá ter, em metro cúbico? 200 m³

19 (ESPM-SP) A estrutura do lucro de uma pequena empresa pode ser estudada através da equação $y = -x^2 + 120x - 2.000$, sendo y o lucro em real quando a empresa vende x unidades. Com base nisso, pode-se afirmar que: alternativa **a**

a) o lucro é máximo quando $x = 60$.
b) o lucro é máximo quando $x = 1.600$.
c) o lucro é máximo quando $x = 20$ ou $x = 100$.
d) o lucro é máximo quando $x > 2.000$.
e) o lucro é máximo quando $x < 20$ ou $x > 100$.

20 O lucro (L) de uma empresa para certo produto é obtido pela função definida pela lei $L = -2x^2 + 2.000x - 100$, em que x representa a quantidade do produto. Calcule para quantas unidades se obtém o lucro máximo possível. 500 unidades

21 (Fesp-SP) Considere a função quadrática $f(x) = (m + 1)x^2 - 5x + 5$.

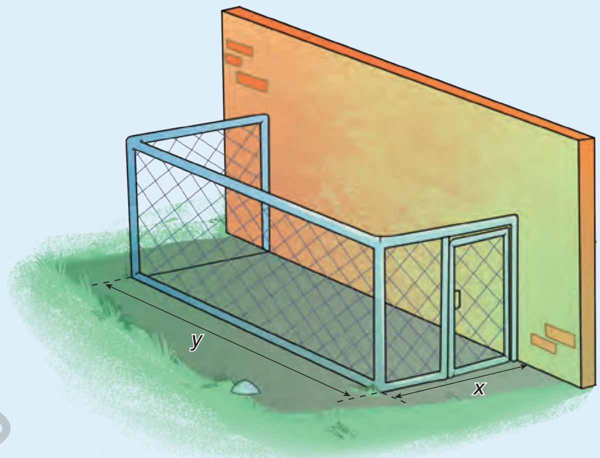
a) Para que valores de m o gráfico da função tem concavidade voltada para baixo? $m < -1$
b) Para que valor de m o gráfico da função tangencia o eixo das abscissas? $m = \frac{1}{4}$

Diversificando

Cercando

Você se lembra do José, sitiante que pratica agricultura de subsistência, da **situação 3**, do início deste capítulo?

Em seu quintal, José pretende construir um galinheiro retangular de modo que, com os 16 m de tela de arame que comprou, consiga ter o melhor aproveitamento possível. Para isso, ele resolveu usar o muro do quintal como um dos lados do galinheiro. Veja a ilustração a seguir.



JOSÉ LUÍS JUHAS

Podemos representar essa situação com expressões algébricas:

(I) a área do galinheiro: $A = x \cdot y$

(II) o comprimento da tela: $y + 2x = 16$

Vamos isolar y no primeiro membro de (II):

$y = -2x + 16$

Substituindo o valor de y em (I), temos a lei da área em função de x:

$A(x) = -2x^2 + 16x$

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúnam-se em grupo e, consultando o texto e a ilustração acima, façam o que se pede.

a) Atribuindo valores 1; 2; 3; 3,9; 4; 4,1; 5; 6; 7; 8, para x, construam uma tabela como esta: construção de tabela

x	y	$A = x \cdot y$	$A(x) = -2x^2 + 16x$

b) Para que valor de x a área é máxima? Qual é essa área? 4; 32 m²

c) Em papel quadriculado, esbocem o gráfico da função dada pela lei $A(x) = -2x^2 + 16x$. **c)** construção de figura

d) Esse gráfico apresenta um ponto de máximo ou de mínimo? máximo

e) Calculem as coordenadas do vértice da parábola, gráfico da função A, e comparem-nas com a resposta do item **b**. Espera-se que os alunos percebam que a ordenada do vértice é a área máxima.

f) Resolvam o problema de José caso ele tivesse comprado 20 m de tela de arame.

g) Pesquisem o significado de “agricultura de subsistência”. resposta pessoal

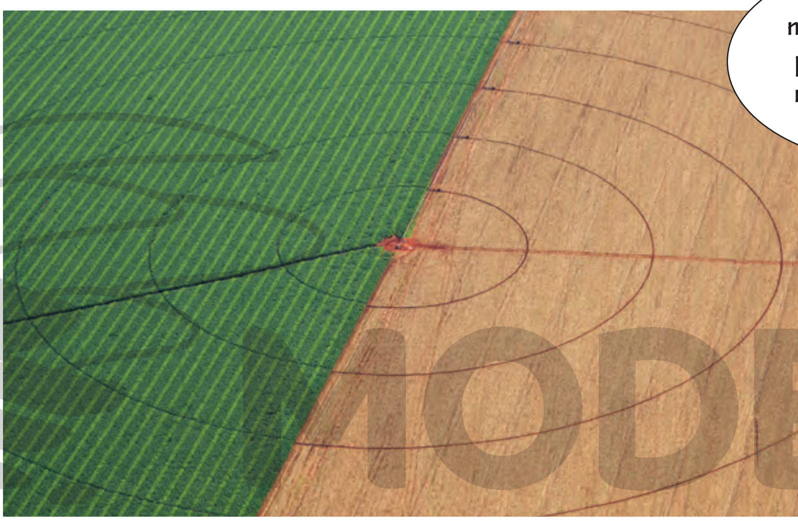
f) Os alunos podem resolver esse item substituindo valores (itens **a** e **b**) ou algebricamente (lei da função e coordenadas do gráfico). Eles encontrarão $x = 5$ m e $y = 10$ m. A área encontrada é 50 m².

CAPÍTULO 8 Circunferência, arcos e relações métricas

1 Circunferência e arcos de circunferência

Em muitas culturas agrícolas é empregado um sistema de irrigação chamado pivô central. Nesse sistema, a água é distribuída de maneira controlada, com economia e eficiência, por meio de uma tubulação que, apoiada em torres sobre rodas, dá voltas completas em torno de um dispositivo central.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS



Plantação com sistema de irrigação com pivô central. (Foto de 2013).

LEONARDO CONCEIÇÃO

LEONARDO CONCEIÇÃO

WASSILY KANDINSKY - PHILADELPHIA MUSEUM OF ART, ESTADOS UNIDOS

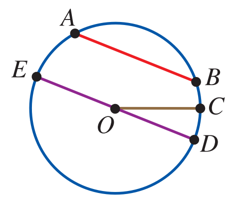
Círculos em um círculo. Vasily Kandinsky, 1923. Óleo sobre tela 98,7 × 95,6 cm.

Vamos recordar um pouco do que já estudamos sobre circunferências.

Circunferência é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano.

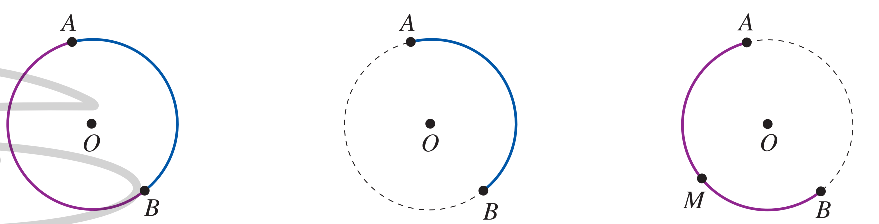
Na circunferência ao lado:

- O é o centro;
- $\overline{AB}$ é uma corda;
- $\overline{OC}$ é um dos raios;
- $\overline{DE}$ é um dos diâmetros.



NELSON MATSUDA

Considere dois pontos distintos de uma circunferência. Esses pontos a dividem em duas partes chamadas de **arco**.

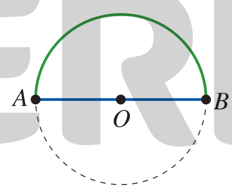


Arco $\overset{\frown}{AB}$: arco menor

Arco $\overset{\frown}{AMB}$: arco maior

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

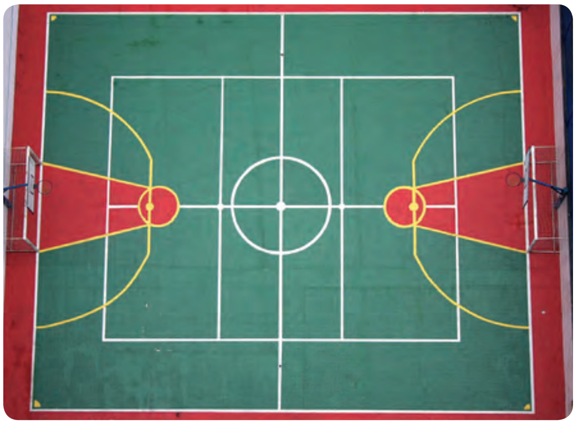
Quando os dois pontos coincidirem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos será chamado de **semicircunferência**.



NELSON MATSUDA

Comprimento de uma circunferência

Acompanhe a situação a seguir.



CARLOS TERRANA/KINO

Suponha que, para renovar a pintura da quadra, foi necessário determinar o comprimento da circunferência do círculo central, que tem 3 m de raio. Como podemos determinar essa medida?

Já vimos que a razão entre o comprimento (C) de uma circunferência e a medida de seu diâmetro (d) é constante e aproximadamente igual a 3,14. Essa constante é representada pela letra grega π (lemos: pi). Ou seja, dada uma circunferência de raio r, temos:

$$\frac{C}{d} = \pi \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2r} = \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r$$

Na situação, como o raio do círculo central da quadra mede 3 m, podemos calcular o comprimento de sua circunferência deste modo:

$$C = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \text{ m}$$
$$C \simeq 18{,}84 \text{ m}$$

Portanto, o comprimento da circunferência do círculo central da quadra poliesportiva é, aproximadamente, 18,84 m.

Convém lembrar que o número π, que indica a razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro, é um número irracional, isto é, não pode ser representado na forma decimal exata nem por uma dízima periódica.

$$\pi = 3{,}141592653...$$

Veja alguns exemplos de aplicação.

a) Vamos calcular o comprimento de uma circunferência de 16 cm de diâmetro, considerando $\pi = 3{,}14$.

Temos: $d = 16$ cm e $C = \pi d$

Assim:

$C = 3{,}14 \cdot 16 = 50{,}24$

Logo, a circunferência tem 50,24 cm de comprimento.

b) Vamos calcular a medida do raio de uma circunferência de 37,68 cm de comprimento, considerando $\pi = 3{,}14$.

Temos: $C = 37{,}68$ cm e $C = 2\pi r$

Assim:

$2\pi r = 37{,}68$

$2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 37{,}68$

$6{,}28 \cdot r = 37{,}68$

$r = 6$

Logo, a medida do raio da circunferência é de 6 cm.

JOSÉ LUÍS JUHAS

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

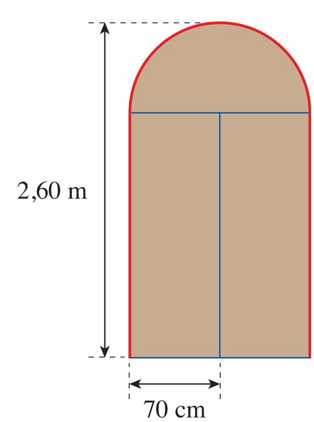
(Para os exercícios a seguir, adote $\pi = 3{,}14$.)

1 Um ciclista deu 500 pedaladas completas. O raio da roda da bicicleta desse ciclista mede 25 cm. Determine quantos metros ele percorreu aproximadamente, supondo que cada pedalada corresponde a uma volta completa da roda da bicicleta. 785 m

2 Construa uma circunferência de raio r. Trace dois diâmetros, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, perpendiculares entre si. Determine a diferença entre o comprimento da circunferência e o perímetro do quadrado $ABCD$ em função de r. (Use $\sqrt{2} = 1{,}41$.) $0{,}64r$

3 Um marceneiro construiu uma porta com as características da figura ao lado.

Determine o comprimento do acabamento em madeira destacado em vermelho na figura. 5,998 m



NELSON MATSUDA

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Uma polegada equivale a cerca de 2,5 cm. A medida do diâmetro de um cano é de $\frac{3}{4}$ de polegada. Quantos centímetros isso representa, aproximadamente? 1,875 cm


THANIDA/SHUTTERSTOCK

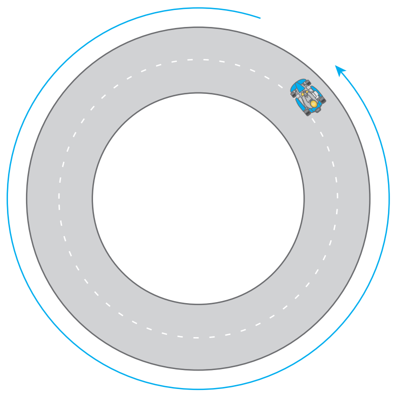
5 A roda de uma moto tem 70 cm de diâmetro. Se ela der 10 voltas completas por segundo, qual será a velocidade aproximada, em quilômetro por hora, dessa roda? 79,128 km/h


LEONARDO CONCEIÇÃO

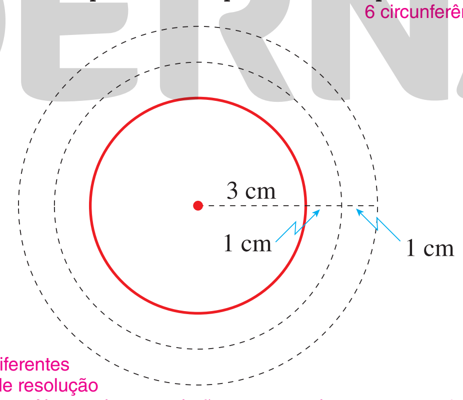
6 O diâmetro de uma praça circular mede 118 m. Edu e Ari, partindo de um mesmo ponto, correm em torno dela em sentido contrário, e param ao se encontrar. Nesse instante, Edu havia percorrido 192,52 m. Quanto Ari havia corrido, aproximadamente? 178 m

7 Em outra praça circular, Teca e Lia fizeram o mesmo que Edu e Ari. Quando elas se encontraram, Teca havia corrido 180 m e Lia, 196,8 m. Qual é a medida aproximada do raio dessa praça? 60 m

8 Uma pista circular de corrida de *kart* foi construída a partir de duas circunferências concêntricas de comprimentos 1.500 m e 1.200 m. Determine a largura aproximada dessa pista. 47,77 m


NELSON MATSUDA

9 Lucila traçou uma circunferência de 3 cm de raio. Depois traçou outras circunferências, concêntricas à primeira, aumentando a medida do raio de 1 em 1 centímetro. Quantas circunferências ela deverá traçar até encontrar aquela que tenha o triplo do comprimento da primeira? 6 circunferências



NELSON MATSUDA

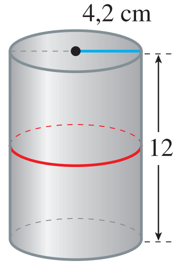
Explore as diferentes estratégias de resolução deste problema. Alguns alunos poderão, por exemplo, acrescentar 1 cm à medida do raio e calcular o comprimento de cada circunferência. Outros poderão analisar as expressões $C_1 = 2 \cdot \pi \cdot 3$ e $C_2 = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 3$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

A figura ao lado representa uma lata de formato cilíndrico.

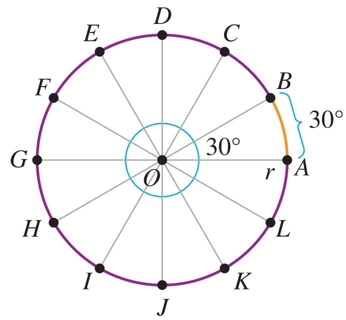
Calcule quantos centímetros de fita adesiva são necessários, aproximadamente, para contornar a linha vermelha sobre a lata. 26,4 cm



NELSON MATSUDA

Arco de circunferência

Ana Paula faz projetos de lustres e luminárias. Ela precisa projetar um lustre com 12 lâmpadas igualmente espaçadas entre si e do centro do lustre. Para isso, ela desenhou um esquema: uma circunferência dividida em 12 arcos de mesma medida angular.



NELSON MATSUDA

CLAUDIO CHIYO

Ana percebeu que a soma de todas as medidas angulares desses arcos é igual à medida angular de uma circunferência (360°) e, portanto, cada um deles mede 30° (360° : 12).

Na circunferência, Ana destacou o arco $\overset{\frown}{AB}$, correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

> A medida angular (em grau) de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente.

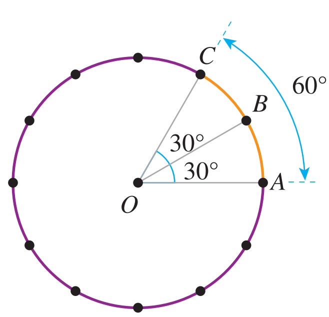
Indicamos a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ por $m(\overset{\frown}{AB}) = 30°$.

Vimos que o comprimento de uma circunferência em determinada unidade de medida de comprimento é dado por: $C = 2\pi r$.

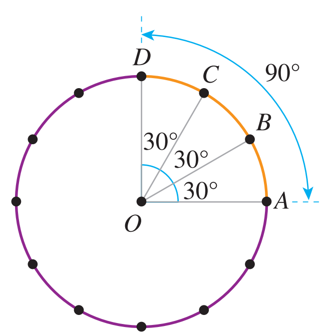
O arco $\overset{\frown}{AB}$ da figura é $\dfrac{1}{12}$ da circunferência, então podemos dizer que o comprimento desse arco, na mesma unidade de medida, é igual a $\dfrac{2\pi r}{12}$.

Observe algumas relações que podemos estabelecer entre a medida angular e o comprimento de arcos de uma mesma circunferência.

- Um arco de medida angular de 60° tem o dobro do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $2 \cdot \dfrac{2\pi r}{12}$.

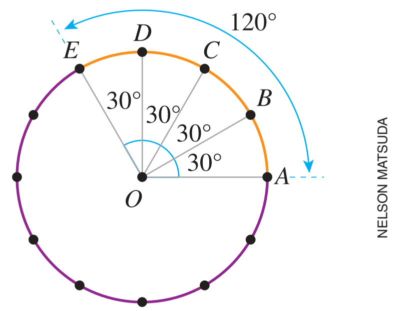


- Um arco de medida angular de 90° tem o triplo do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $3 \cdot \dfrac{2\pi r}{12}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

- Um arco de medida angular de 120° tem o quádruplo do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $4 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



Em uma mesma circunferência, o comprimento de um arco em determinada unidade de medida é diretamente proporcional à sua medida angular (em grau).

Vamos considerar a seguinte terminologia:

- ℓ: comprimento de um arco da circunferência (medido em determinada unidade de comprimento);
- α: medida angular do mesmo arco em grau;
- r: medida do raio da circunferência (medido na mesma unidade de comprimento de ℓ)

Lembrando que uma circunferência tem 360°, podemos, por meio da regra de três, montar o seguinte quadro:

Comprimento do arco	Medida angular do arco
$2\pi r$	360°
ℓ	α

Assim, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{\alpha}$

Veja dois exemplos.

a) Vamos calcular o comprimento de um arco de 20° em uma circunferência de 10 cm de raio.

Comprimento do arco (cm)	Medida angular do arco (grau)
$2\pi \cdot (10)$	360°
ℓ	20°

$$\frac{20\pi}{\ell} = \frac{360°}{20°}$$
$$\frac{10\pi}{\ell} = \frac{9}{1}$$
$$9\ell = 10\pi$$
$$\frac{9\ell}{9} = \frac{10\pi}{9}$$
$$\ell = \frac{10\pi}{9}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$\ell \simeq \frac{10 \cdot 3{,}14}{9} \simeq 3{,}49$$

Portanto, o arco mede, aproximadamente, 3,49 cm.

b) Vamos calcular a medida em grau de um arco de 6π cm em uma circunferência de 15 cm de raio.

Comprimento do arco (cm)	Medida angular do arco (grau)
$2\pi \cdot (15)$	360°
6π	α

$$\frac{30\pi}{6\pi} = \frac{360°}{\alpha}$$
$$\frac{5}{1} = \frac{360°}{\alpha}$$
$$5\alpha = 360°$$
$$\frac{5\alpha}{5} = \frac{360°}{5}$$
$$\alpha = 72°$$

Portanto, o arco mede 72°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

10 Uma circunferência tem 12 cm de raio. Calcule a medida aproximada, em centímetro, de um arco dessa circunferência correspondente a um ângulo central de 40°. 8,4 cm

11 Construa uma circunferência de 3 cm de raio. Trace dois diâmetros perpendiculares entre si. Quantos centímetros mede aproximadamente cada um dos quatro arcos em que a circunferência ficou dividida? 4,71 cm

12 Uma circunferência é dividida em 12 arcos congruentes de medida 3π cm. Determine:

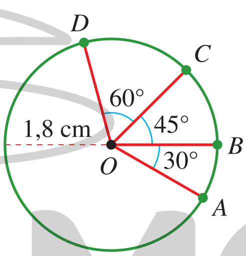
a) o comprimento da circunferência; 36π cm

b) a medida do raio dessa circunferência. 18 cm

13 Calcule o comprimento aproximado dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CD}$ da circunferência abaixo.

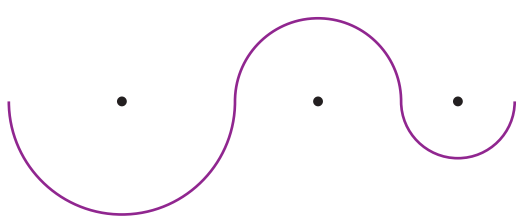
NELSON MATSUDA

arco $\overset{\frown}{AB}$: 0,9 cm
arco $\overset{\frown}{BC}$: 1,4 cm
arco $\overset{\frown}{CD}$: 1,9 cm



14 Calcule, com o auxílio de uma régua, o comprimento aproximado da linha representada pela figura abaixo: 10,99 cm

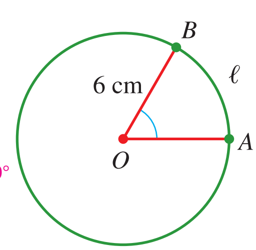
NELSON MATSUDA



15 Construa uma circunferência de 4 cm de raio. Trace um de seus diâmetros e apague metade da circunferência traçada. A figura obtida tem perímetro de quantos centímetros, aproximadamente? 20,56 cm

16 Na figura, considere que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é de 6,28 cm. Calcule a medida aproximada do ângulo $A\hat{O}B$. 60°

NELSON MATSUDA



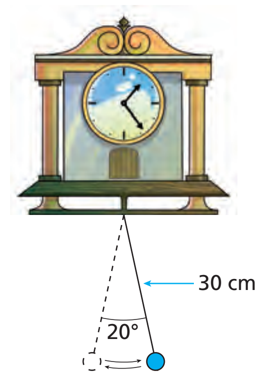
17 Calcule em grau a medida de um arco de circunferência de 9,42 cm, sabendo que o raio dessa circunferência mede 15 cm. 36°

18 Uma circunferência tem 18 cm de raio. Calcule o comprimento aproximado do arco de 40° contido nessa circunferência. 12,56 cm

19 O pêndulo de um relógio de parede tem 30 cm de comprimento.

A cada movimento, o pêndulo descreve um arco de 20°.

Determine o comprimento aproximado desse arco. 10,5 cm



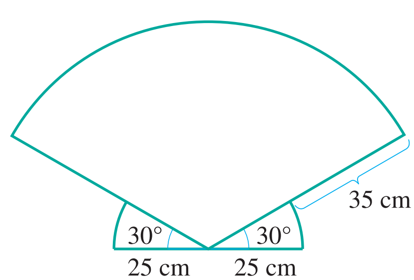
LEONARDO CONCEIÇÃO

20 Calcule a medida em grau de um arco de 7,85 cm em uma circunferência de 10 cm de raio. 45°

21 Alguns adereços das fantasias de carnaval são apreciados por sua beleza e pompa.

CLAUDIO CHIYO

Veja, no esquema abaixo, a estrutura feita com arame grosso de um desses adereços.



NELSON MATSUDA

Quantos metros de arame, aproximadamente, são necessários para construir esse adereço? 3,22 m

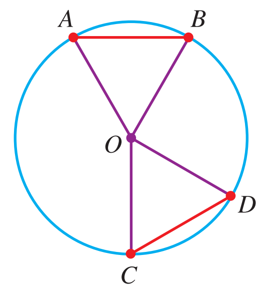
Propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência

1ª propriedade

Considere a figura ao lado, em que $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são arcos congruentes de uma circunferência.

Vamos mostrar que as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ subentendidas por esses arcos são também congruentes.

Observe que:



NELSON MATSUDA

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \overline{OA} \cong \overline{OD} \text{ (raios)} \\ ② \ A\hat{O}B \cong C\hat{O}D \ (\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}) \\ ③ \ \overline{OB} \cong \overline{OC} \text{ (raios)} \end{array}\right\} \text{Logo: } \triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (pelo caso LAL)}$$

Portanto, os lados correspondentes são congruentes, isto é, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

> Em toda circunferência, se dois arcos têm a mesma medida, então as cordas subentendidas por esses arcos são congruentes.

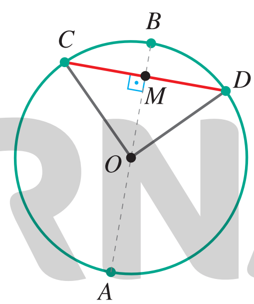
2ª propriedade

Considere a figura ao lado, em que o diâmetro $\overline{AB}$ é perpendicular à corda $\overline{CD}$.

Observe que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios) e, portanto, COD é um triângulo isósceles cuja altura é $\overline{OM}$.

Como em um triângulo isósceles a altura relativa à base coincide com a mediana, então M é ponto médio de $\overline{CD}$. Logo, $\overline{MC} \cong \overline{MD}$.

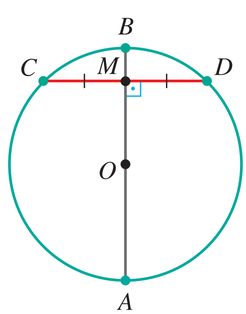
Com isso, mostramos que:



NELSON MATSUDA

> Em uma circunferência, todo diâmetro perpendicular a uma corda divide-a ao meio.

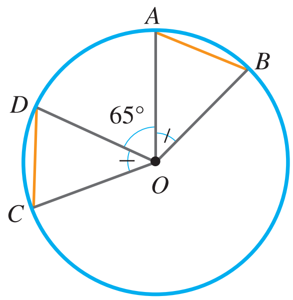
Também é verdadeiro que, se uma corda é cortada perpendicularmente ao meio por outra corda, então essa segunda corda é um diâmetro.



NELSON MATSUDA

Se $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ e $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, então $\overline{AB}$ é diâmetro.

22 Na figura abaixo, temos $AB = 1{,}2$ cm e $m(A\hat{O}B) = 45°$.



NELSON MATSUDA

Calcule:

a) a medida da corda $\overline{CD}$; 1,2 cm

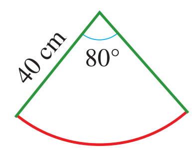
b) a medida do ângulo $B\hat{O}C$. 155°

23 Considere um ponto P comum ao diâmetro $\overline{XY}$ de uma circunferência (de centro O) e a uma corda $\overline{AB}$. Determine a medida do raio dessa circunferência, sabendo que $\overline{XY}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, $OP = 5$ cm e $AB = 24$ cm. 13 cm

24 Marque sobre uma folha de seu caderno três pontos: A, B e C, não alinhados. Trace o segmento $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{BC}$. Trace a mediatriz de cada um desses segmentos. Chame de M o ponto de encontro dessas mediatrizes. Com centro em M e abertura AM, trace uma circunferência. Qual é a posição dos pontos A, B e C em relação à circunferência? Estão situados sobre a circunferência.

25 Construa um triângulo ABC, em que $AB = 4$ cm, $BC = 3{,}6$ cm e $AC = 5$ cm. Trace uma circunferência que passe pelos vértices desse triângulo. construção de figura

26 Para confeccionar um chapéu de palhaço, Aline seguiu o modelo ao lado. Determine a medida aproximada do arco de circunferência desse modelo. 55,8 cm

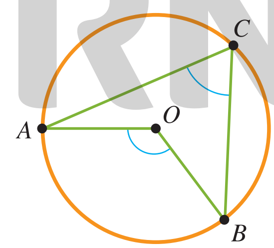


NELSON MATSUDA

2 Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

Considere a figura ao lado.

Nela, destacamos o ângulo inscrito $A\hat{C}B$, ou seja, um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência.



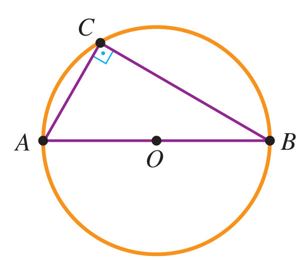
NELSON MATSUDA

Lembrando que um ângulo inscrito em uma circunferência tem por medida a metade da medida do ângulo central correspondente e, portanto, a metade da medida do arco compreendido por seus lados, ou seja:

$$m(A\hat{C}B) = \frac{m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

Nesta outra figura, vemos um triângulo em que um dos lados é um diâmetro da circunferência. Esse triângulo é retângulo, pois:

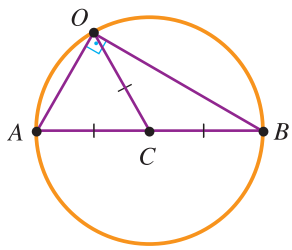
$$m(\hat{C}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$



NELSON MATSUDA

De modo geral, todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo e, reciprocamente, todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência.

Agora, observe na figura a seguir que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é um raio da circunferência que o circunscreve.



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 Determine a medida da mediana, relativa à hipotenusa, de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{20}$ cm e 4 cm. 3 cm

28 A mediana de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa mede 4 cm, e um dos catetos mede $\sqrt{15}$ cm. Qual é a medida do outro cateto? 7 cm

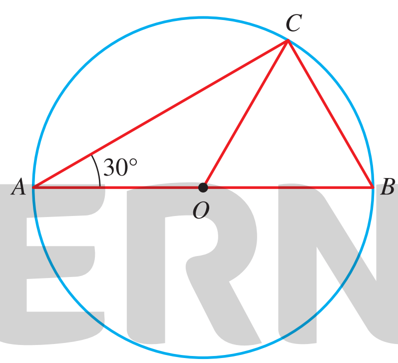
29 A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 cm. Calcule quantos centímetros tem o comprimento da circunferência que o circunscreve. ≃75,36 cm

30 Uma circunferência tem 10π cm de comprimento. Determine:

a) a medida do cateto maior de um triângulo retângulo inscrito nessa circunferência, sabendo que o menor cateto tem a mesma medida da mediana relativa à hipotenusa; $5\sqrt{3}$ cm

b) a área desse triângulo. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm²

31 Considere o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio 3 cm.



ADILSON SECCO

a) Quais são as medidas de $A\hat{C}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{O}C$, $B\hat{C}O$ e $A\hat{O}C$? 90°, 60°, 60°, 60° e 120°

b) Quais são as medidas de $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? 3 cm, 3 cm, 3 cm, 6 cm, $3\sqrt{3}$ cm

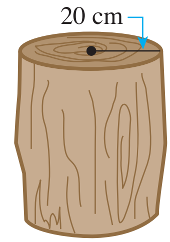
c) Classifique, quanto aos ângulos e aos lados, os triângulos ABC, AOC e OBC.
triângulo retângulo e escaleno, triângulo obtusângulo e isósceles, triângulo acutângulo e equilátero

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

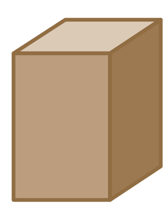
Pense mais um pouco...

Deseja-se cortar, de um tronco de árvore de raio igual a 20 cm, uma coluna de base quadrada.

1. Determine a medida máxima do lado da base que se pode obter. $20\sqrt{2}$ cm
2. Calcule a área da base quadrada da coluna em centímetro quadrado. 800 cm²



tronco de árvore



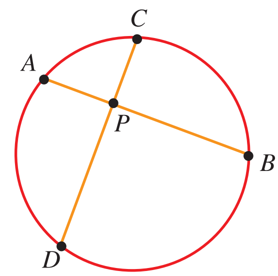
coluna de base quadrada

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

3 Relações métricas em uma circunferência

1ª relação

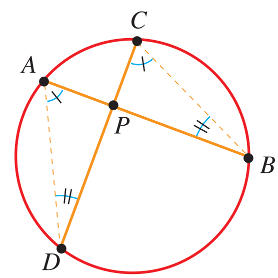
Considerando a figura ao lado, vamos demonstrar que:



> Se duas cordas se cortam em um ponto interior a uma circunferência, então o produto das medidas dos dois segmentos de uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra.

Traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, obtemos os triângulos *APD* e *CPB*. Nesses triângulos:

- os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos e determinam na circunferência o mesmo arco $\overset{\frown}{BD}$;
- os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos e determinam na circunferência o mesmo arco $\overset{\frown}{AC}$.



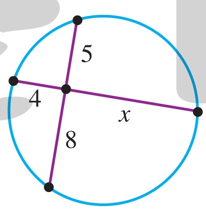
Logo, pelo caso AA, os triângulos *APD* e *CPB* são triângulos semelhantes.

Portanto: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$, ou seja, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Veja um exemplo.

Vamos calcular o valor de *x* nas figuras abaixo.

a)



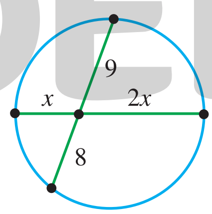
$4 \cdot x = 8 \cdot 5$

$4x = 40$

$x = \dfrac{40}{4}$

$x = 10$

b)



$2x \cdot x = 8 \cdot 9$

$2x^2 = 72$

$x^2 = \dfrac{72}{2}$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6$

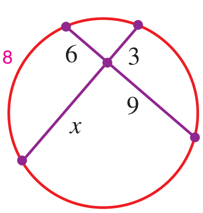
Como *x* é um número positivo, $x = 6$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

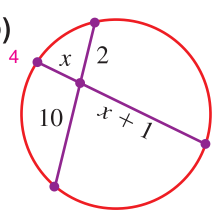
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Calcule o valor de *x* em cada uma das figuras abaixo.

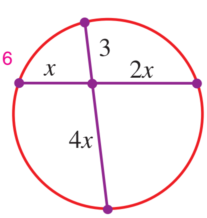
a) 18



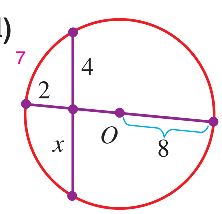
b) 4



c) 6

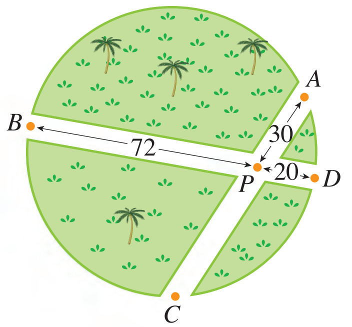


d) 7



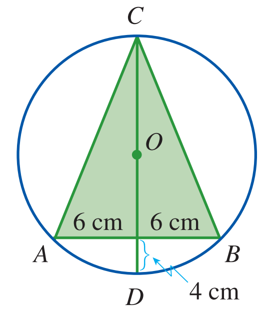
Lembre-se:
Não escreva no livro!

33 Uma praça circular é cortada por duas ruas, como mostra a figura a seguir. Para ir de A até P, Rita dá 30 passos. Luísa dá 72 passos para ir de B a P e 20 passos para ir de P a D. Calcule quantos passos Rita deve dar para chegar até C, admitindo que os passos das duas garotas tenham mesmo comprimento. 48 passos



NELSON MATSUDA

34 Determine a área do $\triangle ABC$ abaixo. 54 cm²

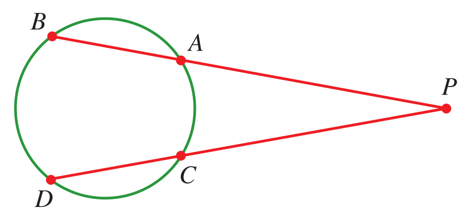


NELSON MATSUDA

35 Uma corda de 6 cm corta perpendicularmente um diâmetro a 4 cm do centro de uma circunferência. Calcule a área do círculo determinada por essa circunferência. 25π cm²

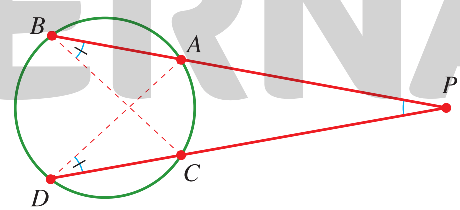
2ª relação

Considerando a figura ao lado, vamos provar que:



> Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos dois segmentos secantes, então o produto das medidas de um segmento secante e de sua parte externa é igual ao produto das medidas do outro segmento secante e de sua parte externa.

Traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ obtemos os triângulos PAD e PCB. Nesses triângulos:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

- os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{B}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos e determinam na circunferência o mesmo arco $\overset{\frown}{AC}$;
- o ângulo $\hat{P}$ é comum.

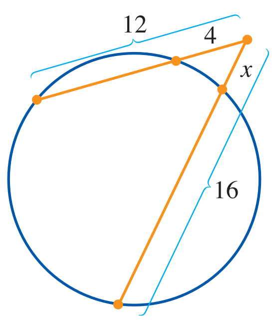
Logo, pelo caso AA, os triângulos APD e CPB são triângulos semelhantes.

Portanto: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$, ou seja, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Veja um exemplo.

Vamos calcular o valor de x nas figuras abaixo.

a)



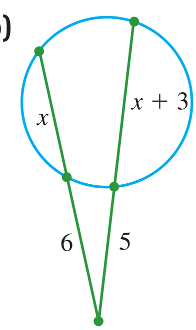
$16 \cdot x = 4 \cdot 12$

$16x = 48$

$x = \dfrac{48}{16}$

$x = 3$

b)



$6 \cdot (6 + x) = 5 \cdot (x + 8)$

$36 + 6x = 5x + 40$

$6x - 5x = 40 - 36$

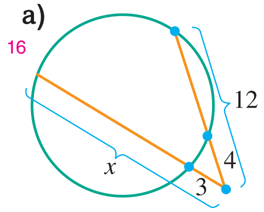
$x = 4$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

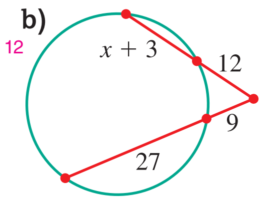
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

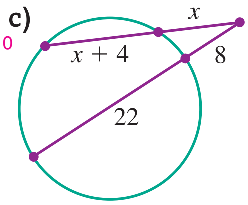
a) 16



b) 12

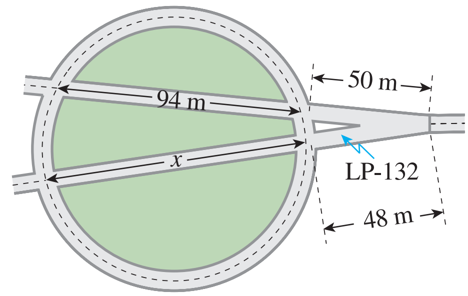


c) 10



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

37 O canteiro circular de uma rotatória é cortado por duas estradas, como mostra a figura a seguir. O comprimento da parte da estrada LP-132 que corta o canteiro está indicado por x. Calcule o valor de x. 102 m



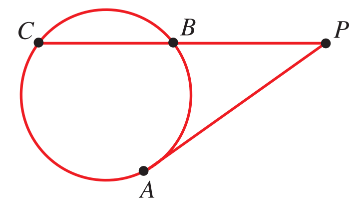
NELSON MATSUDA

3ª relação

Na figura ao lado, $\overline{PA}$ é tangente à circunferência.

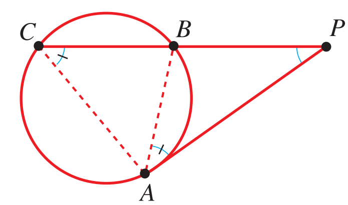
Vamos provar que:

> Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos um segmento tangente e um segmento secante a essa circunferência, então o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto das medidas do segmento secante e de sua parte externa.



Traçando os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, obtemos os triângulos *PBA* e *PAC*. Nesses triângulos:

- os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$ são congruentes, pois são ângulos com vértice na circunferência e determinam nela o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$;
- o ângulo $\hat{P}$ é comum.



Logo, pelo caso AA, os triângulos *PBA* e *PAC* são triângulos semelhantes.

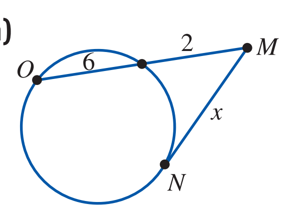
Portanto: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PB}{PA}$, ou seja, $(PA)^2 = PB \cdot PC$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Veja um exemplo.

Vamos calcular o valor de x nas figuras abaixo, sabendo que $\overline{MN}$ é tangente à circunferência.

a)



$x^2 = 8 \cdot 2$

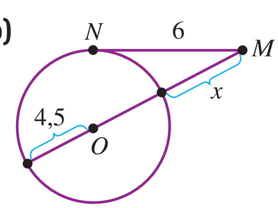
$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Como x é um número positivo, $x = 4$.

b)



$6^2 = x \cdot (x + 9)$

$x^2 + 9x - 36 = 0$

$x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1}$

Como x é um número positivo, $x = 3$.

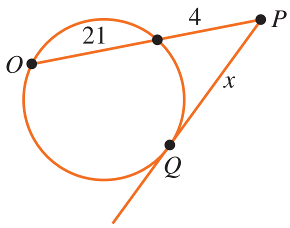
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

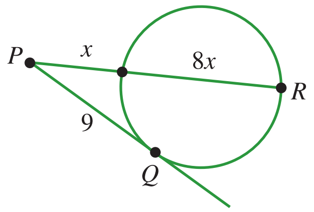
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

38 Calcule o valor de x nas figuras a seguir, sendo $\overline{PQ}$ tangente à circunferência.

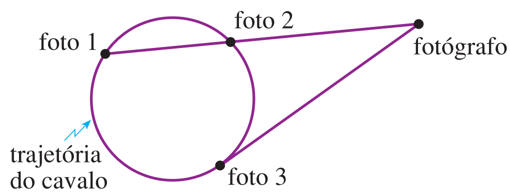
a) 10



b) 3



39 Um fotógrafo assistia a uma apresentação circense na qual um acrobata se mantinha em pé sobre as costas de um cavalo, que descrevia um movimento circular em torno do picadeiro. Em três momentos distintos, o fotógrafo tirou fotos conforme o esquema abaixo.



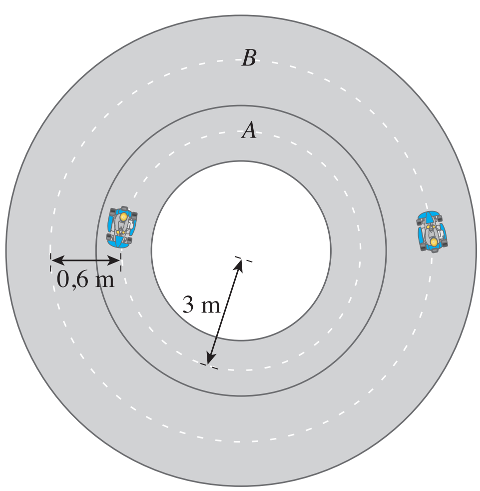
Estime valores para as distâncias entre o acrobata e o fotógrafo, nos momentos das fotos, de modo que atendam à 3ª relação estudada. resposta pessoal

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 No centro de um jardim retangular, com 45 m × 32 m, foi construída uma fonte circular cuja medida do raio é igual a $\frac{2}{9}$ do comprimento do maior lado do jardim. Determine o comprimento da circunferência dessa fonte. 62,8 m

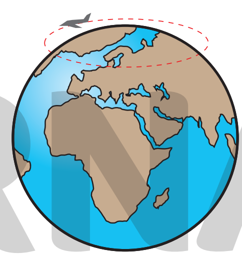
2 Um autorama circular tem duas pistas, A e B, conforme esquema abaixo.



a) Depois que o carro da pista A der 36 voltas, quantos metros terá andado? ≃ 678,24 m

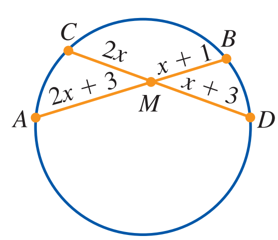
b) Quantos metros terá andado o carro da pista B depois de dar 24 voltas? ≃ 542,59 m

3 Um avião contorna o polo norte em um dia, seguindo a trajetória do círculo polar ártico, cujo comprimento é 2.492 km. Qual é a medida aproximada do raio do círculo polar ártico? 396,8 km



4 Um ciclista, em uma pista circular de 24 m de raio, dá 15 voltas em 160 segundos. Qual é a sua velocidade média? 14,13 m/s

5 (Unifor-CE) Uma circunferência e duas de suas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, concorrem no ponto M.

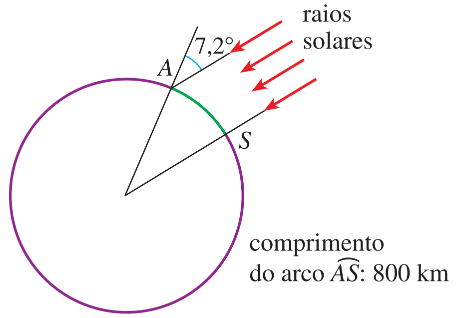


Se as medidas dos segmentos $\overline{CM}$, $\overline{MD}$, $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são dadas em centímetro, a corda $\overline{AB}$ mede, em centímetro: alternativa **e**

a) 36. **b)** 18. **c)** 15. **d)** 14. **e)** 13.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

6 (Unicamp-SP) Para calcular a circunferência terrestre, o sábio Eratóstenes valeu-se da distância conhecida de 800 km entre as localidades de Alexandria e Siena no Egito (A e S, respectivamente), situadas no mesmo meridiano terrestre. Ele sabia que, quando em Siena, os raios solares caíam verticalmente, em Alexandria eles faziam um ângulo de 7,2° com a vertical. Calcule, com esses dados, a circunferência terrestre, isto é, o comprimento de uma volta completa em torno da Terra. 40.000 km



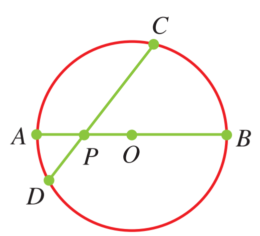
NELSON MATSUDA

7 Construa uma circunferência de raio 3 cm. Por um ponto P exterior a ela, trace um segmento tangente e um segmento secante que passe pelo centro da circunferência. A parte do segmento secante que fica externa à circunferência mede 5 cm. Quanto mede o segmento tangente? $\sqrt{55}$ cm

8 (USF-SP) Na circunferência abaixo, de centro O e raio $r = 4$, a corda $\overline{CD}$ corta o diâmetro $\overline{AB}$ no ponto P de tal forma que P é o ponto médio do raio $\overline{OA}$ e $PC = 2 \cdot PD$.

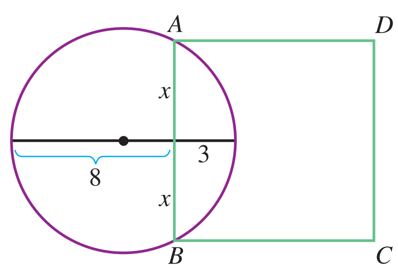
Então: alternativa **b**

a) $CD = 2\sqrt{6}$
b) $CD = 3\sqrt{6}$
c) $CD = 6\sqrt{6}$
d) $CD = \sqrt{6}$
e) $CD = 6$



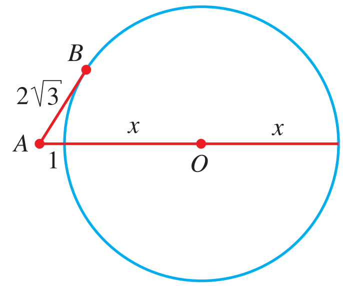
NELSON MATSUDA

9 Considerando a figura abaixo, determine a área do quadrado $ABCD$. 96



NELSON MATSUDA

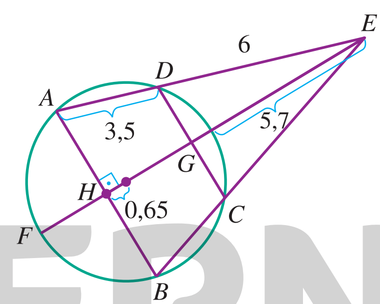
10 Calcule o comprimento da circunferência abaixo, sendo $\overline{AB}$ tangente à circunferência. $C = 11\pi$



NELSON MATSUDA

11 Construa uma circunferência de 12 cm de diâmetro e trace um diâmetro $\overline{AB}$. Marque sobre ele, distante 11 cm de A, um ponto M. Trace, por esse ponto, uma perpendicular que cruze a circunferência em um ponto P. O segmento $\overline{PM}$ é a representação geométrica de qual número? $\sqrt{11}$

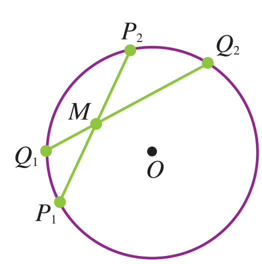
12 Determine a medida da altura $\overline{EH}$ do triângulo ABE na figura abaixo. 8,5



NELSON MATSUDA

13 Em uma circunferência, duas cordas se cruzam de modo que, em uma delas, os segmentos medem 4 cm e 32 cm e, na outra, um dos segmentos mede o dobro da medida do primeiro. Calcule a medida do segundo segmento. 16 cm

14 (Unifor-CE) A circunferência da figura abaixo tem centro no ponto O, e M é o ponto de interseção das cordas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$.



NELSON MATSUDA

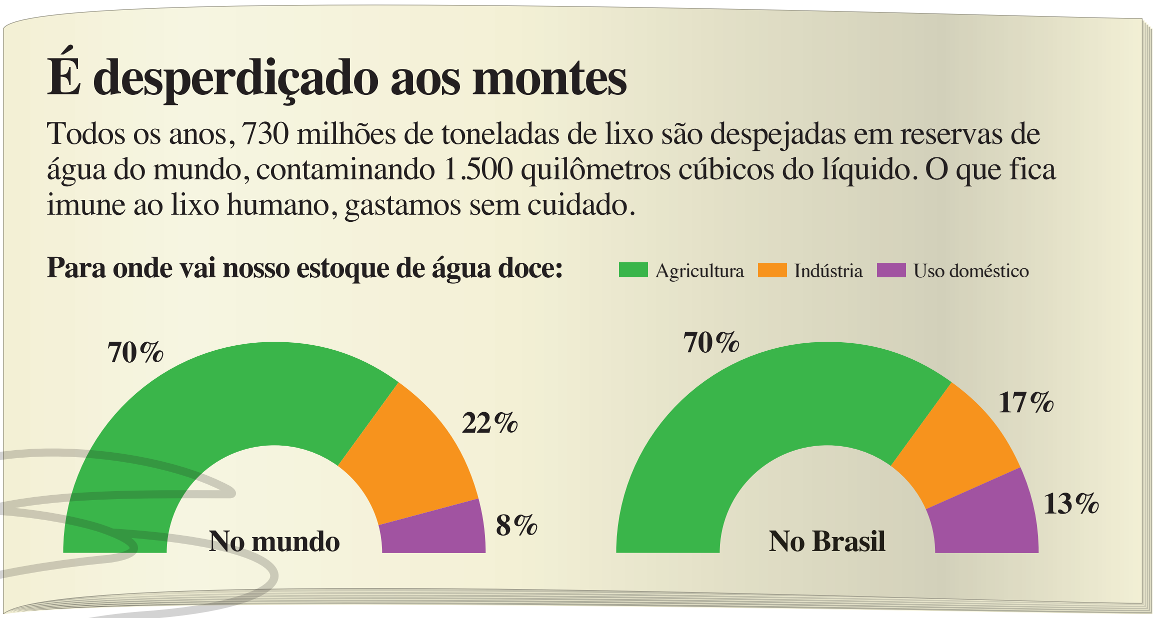
Se $P_1M = 4$ cm, $MP_2 = (k + 1)$ cm, $Q_1M = 3$ cm e $MQ_2 = (3k - 7)$ cm, então a corda $\overline{Q_1Q_2}$, em cm, mede: alternativa **c**

a) 5. **b)** 8. **c)** 11. **d)** 14.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO i

Semicoroa circular

Observe na reportagem abaixo um tipo de gráfico, diferente dos que já vimos nesta coleção, cada vez mais usado em jornais e revistas.



Fonte: *Veja*, 29 out. 2014. p. 89.

Podemos considerar o gráfico usado na reportagem como uma variação de um gráfico de setores. Porém, em vez de ser composto de setores circulares cujo total forma um círculo, suas partes compõem uma semicoroa circular, ou seja, uma região limitada por dois semicírculos concêntricos.

Para construir um gráfico com semicoroa circular, uma vez construída a tabela com as frequências relativas dos dados pesquisados, basta multiplicar as porcentagens por 180° (no gráfico de setores multiplicamos por 360°) e construir, com um transferidor, setores circulares adjacentes, de mesmo raio e centro, cujas medidas angulares são os produtos obtidos. A soma desses setores resulta em um semicírculo do qual retiramos outro semicírculo concêntrico de raio menor.

No exemplo da reportagem, 70% da água doce é destinada à agricultura (tanto no Brasil como no mundo). Então, o setor que inicialmente devemos desenhar para esse dado deve medir $0{,}7 \cdot 180°$, isto é, $126°$.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Faça uma pesquisa com seus colegas de turma sobre a quantidade de água que bebem, em média, por dia e, em seguida, construa uma tabela e um gráfico como o da reportagem.

construção de tabela e de gráfico

Considere na pesquisa as seguintes quantidades:

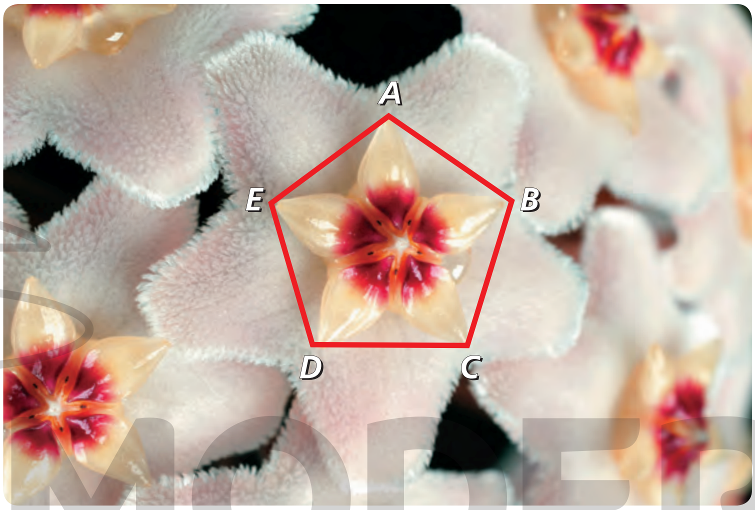
- 1 copo;
- 2 copos;
- 3 copos;
- 4 copos;
- 5 copos;
- 6 ou mais copos.

CAPÍTULO

9 Polígonos regulares e áreas

1 Polígonos regulares

Na natureza, podemos encontrar muitas formas que lembram polígonos regulares. Observe, por exemplo, o pentágono regular que destacamos nesta bela flor que se chama flor-de-cera.



NORDRODEN/SHUTTERSTOCK

No pentágono regular *ABCDE* destacado na foto, temos:

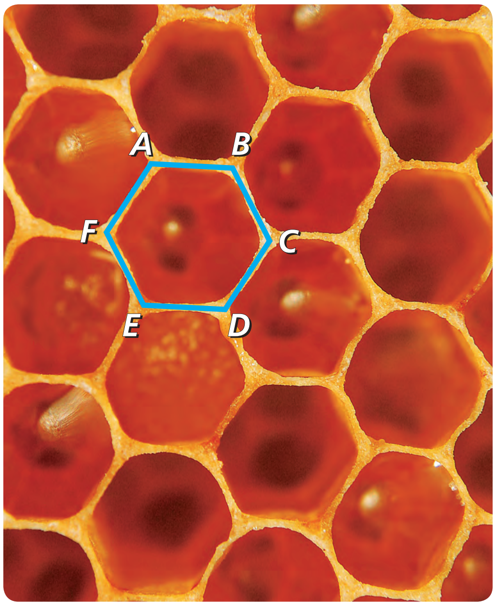
- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E}$

Veja que o alvéolo de um favo de mel também nos faz lembrar um polígono, que é o hexágono regular.

No hexágono regular *ABCDEF* destacado na foto, temos:

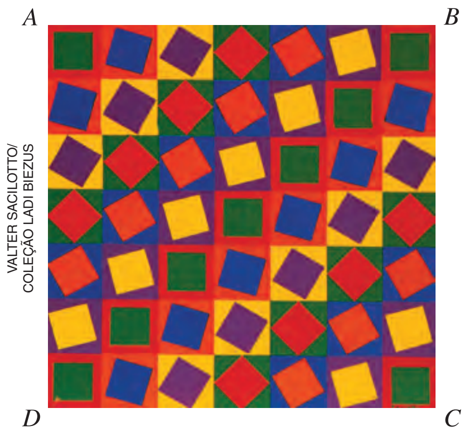
- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E} \cong \hat{F}$

DANILLO SOUZA



DARIOS/SHUTTERSTOCK

Os polígonos regulares são também muito usados nas artes plásticas, especialmente em algumas obras de tendências modernistas. Veja abaixo a reprodução do quadro do pintor paulista Luiz Sacilotto (1924-2003) cuja forma lembra um quadrado.



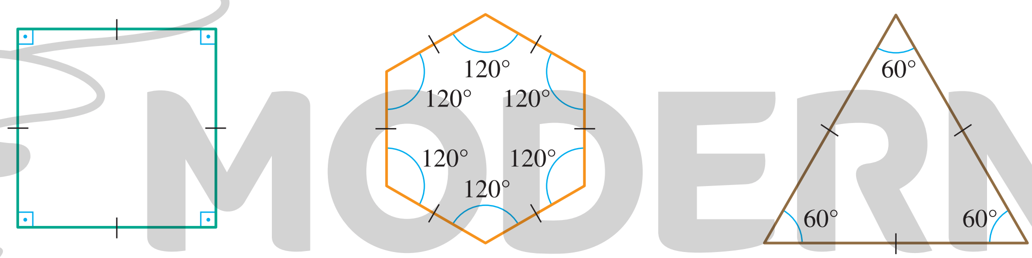
No quadrado *ABCD* destacado na reprodução da tela, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$

Luiz Sacilotto. *Concreção 8457*, 1984, têmpera rhodopás sobre tela fixada em duratex, 20 cm × 20 cm.

Um polígono é regular quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos são congruentes entre si.

Veja alguns exemplos.

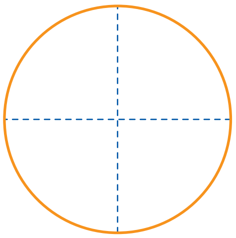


Propriedades dos polígonos regulares

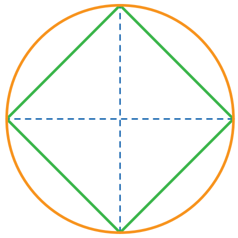
- Se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes, então as cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular **inscrito** na circunferência.
- Se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes, então as tangentes aos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular **circunscrito** à circunferência.

Acompanhe, a seguir, como inscrever e como circunscrever um quadrado.

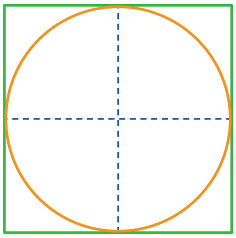
- Na circunferência ao lado, traçamos dois diâmetros perpendiculares entre si. Observe que a circunferência ficou dividida em quatro arcos congruentes.



- As cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um quadrado inscrito na circunferência.



- As tangentes determinadas pelos pontos de divisão formam um quadrado circunscrito à circunferência.

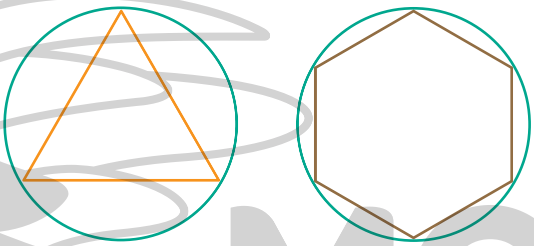


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

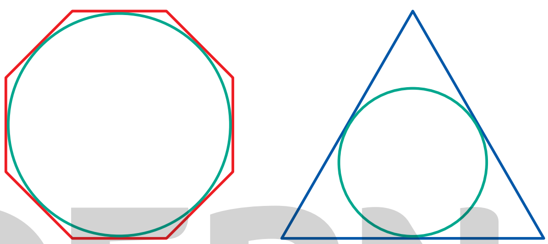
Podemos dizer que, se um polígono é regular, então existe uma circunferência que passa por todos os seus vértices e outra que tangencia todos os seus lados.

- Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.
- Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.

Veja os exemplos abaixo.



polígonos regulares inscritos



polígonos regulares circunscritos

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Para exemplificar, observe agora algumas situações do cotidiano.

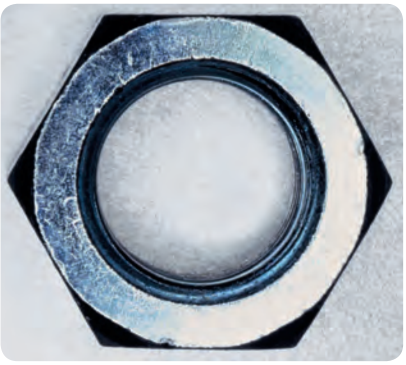
Situação 1

A moeda de 25 centavos, cunhada em 1995, tem ao fundo o desenho de um heptágono regular. Essa situação sugere um polígono cujos vértices estão sobre uma circunferência. Nesse caso, dizemos que o polígono está **inscrito na circunferência**.

SÉRGIO LIMA/FOLHAPRESS

Situação 2

A porca, na foto ao lado, tem uma parte com forma circular e outra com forma de um hexágono regular. Essa situação sugere um polígono cujos lados são tangentes a uma circunferência. Nesse caso, dizemos que o polígono está **circunscrito à circunferência.**



JOHN PAYNE/IONICA/GETTY IMAGES

Situação 3

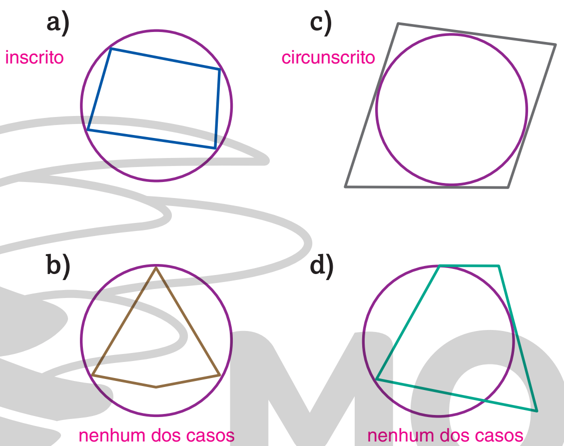
O DVD que vemos na foto ao lado também tem forma circular. Sua embalagem lembra a forma de um quadrado. Essa situação também sugere um polígono circunscrito a uma circunferência.


JAKRIT JIRARATWARO/SHUTTERSTOCK

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

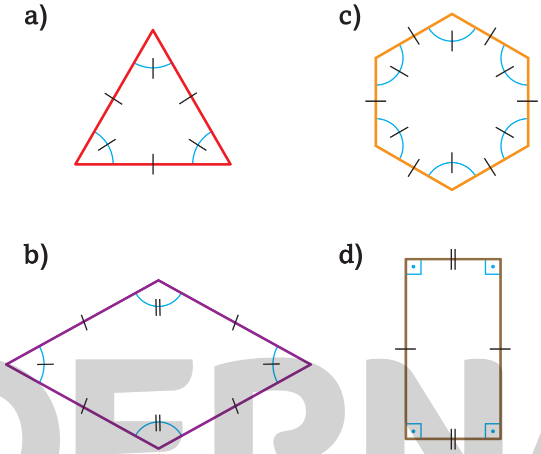
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Indique se o polígono é inscrito na circunferência, circunscrito a ela ou se nenhum dos casos se aplica ao item.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2 Indique os itens que não apresentam polígonos regulares. Em seguida, justifique.



b) Não tem todos os ângulos congruentes.
d) Não tem todos os lados congruentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

PARA SABER MAIS

A Matemática na História

Muitos matemáticos gregos da Antiguidade preocuparam-se com medidas de comprimento e de área, sobretudo Arquimedes.

Arquimedes foi um dos maiores matemáticos da Antiguidade, embora o centro da Matemática no período em que viveu, chamado de Idade Helenística, estivesse em Alexandria (no Egito).

Esse sábio – mistura de matemático, físico e inventor – nasceu no início do século III a.C., em Siracusa (cidade localizada na atual ilha da Sicília, na Itália), e morreu em 212 a.C., durante um ataque dos romanos à cidade.

Sempre muito engenhoso, mesmo durante o cerco à cidade pelas tropas romanas, Arquimedes inventou catapultas para lançar pedras, assim como polias e ganchos para espatifar navios romanos. Com essas e outras invenções, Arquimedes conseguiu manter o inimigo distante por, pelo menos, três anos. Contudo, durante o massacre que sucedeu à tomada de Siracusa, foi assassinado por um soldado romano, apesar das ordens expressas do general Marcelo para que preservassem a vida do grande sábio.

CHRIS HELLIER/CORBIS/LATINSTOCK

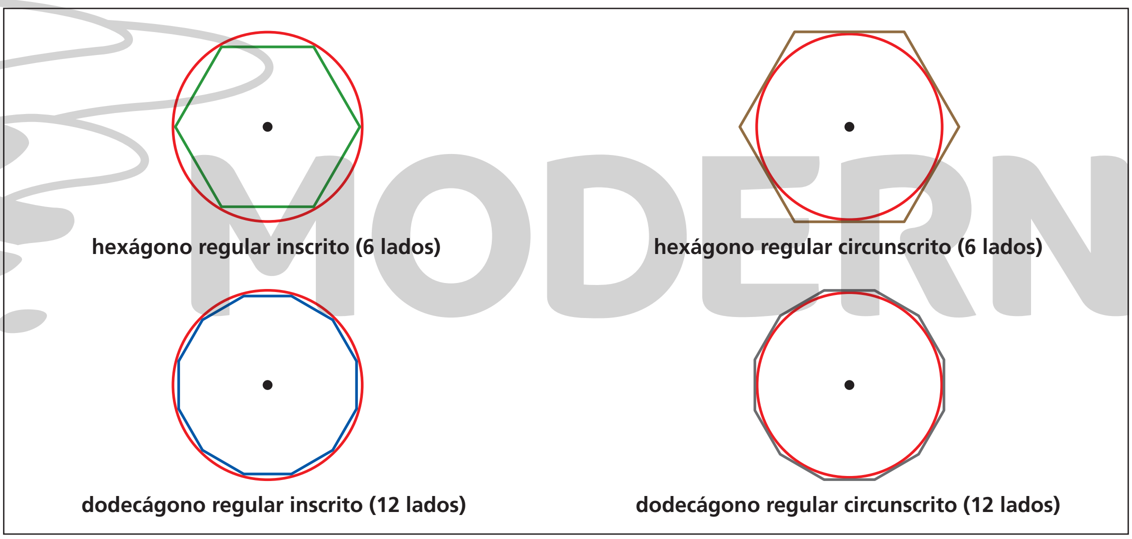
JOSÉ LUÍS JUHAS

Catapulta.

Entre as obras escritas por esse matemático grego, aproximadamente dez tratados foram preservados até hoje. No que diz respeito à medida de comprimentos e de áreas, interessa-nos um tratado de geometria plana denominado *A medida do círculo*, no qual Arquimedes faz uma aproximação para a medida do comprimento da circunferência, estabelecendo, ainda pela primeira vez, um método para o cálculo do **número irracional** hoje denominado π, que é a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência.

O comprimento da circunferência fica entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e qualquer polígono regular circunscrito como mostram as figuras abaixo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



Para obter o comprimento da circunferência, Arquimedes tomou um círculo de raio 1.

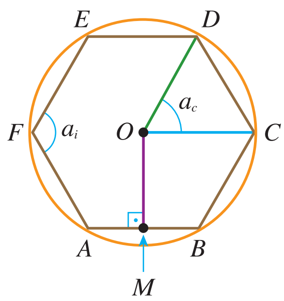
Calculando o perímetro dos hexágonos regulares e após obter os polígonos inscrito e circunscrito com o dobro do número de lados, ele calculou o perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito de 12, 24, 48 e 96 lados, obtendo resultados que se aproximavam cada vez mais de 2π.

Foi assim que Arquimedes obteve a primeira aproximação historicamente conhecida para o comprimento da circunferência, bem como para o número π. Ele chegou à conclusão de que π era um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, 3,140... e 3,142... Assim, Arquimedes obteve uma aproximação para π com duas casas. Esse método é conhecido como **método clássico** para o cálculo de π.

Elementos de um polígono regular

Chame a atenção dos alunos para o fato de que o apótema do polígono é o raio da circunferência inscrita nele.

Em um polígono regular, temos:



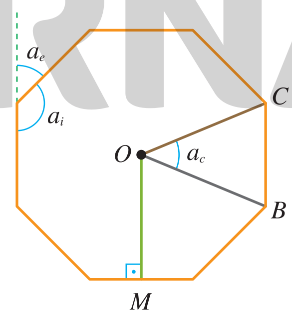
NELSON MATSUDA

- **centro do polígono**: centro da circunferência circunscrita a ele (ponto O);
- **raio do polígono**: raio da circunferência circunscrita a ele ($\overline{OC}$);
- **apótema do polígono**: segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados ($\overline{OM}$);
- **ângulo central:** aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados são semirretas que contêm dois vértices consecutivos do polígono ($C\hat{O}D$).

Representando por a_c a medida do ângulo central de um polígono regular de n lados e por a_i a medida do ângulo interno, temos: $a_c = \dfrac{360°}{n}$ e $a_i = \dfrac{S_i}{n}$

Recorde que a soma S_i das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer é igual a: $(n - 2) \cdot 180°$, em que n é o número de lados.

Como exemplo, vamos considerar o octógono regular ao lado.



NELSON MATSUDA

- O ponto O *é o centro do octógono.*
- Os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ são raios.
- O segmento $\overline{OM}$ é um dos apótemas.
- O ângulo $C\hat{O}B$ é um ângulo central.

A medida a_c de um ângulo central desse octógono é dada por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Assim, $a_c = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

- A medida a_i de um ângulo interno desse polígono é dada por:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Assim, $a_i = \dfrac{(8 - 2) \cdot 180°}{8} = 135°$

- A medida a_e de um ângulo externo desse polígono é dada por: $a_i + a_e = 180°$. Assim, $135° + a_e = 180°$, ou seja, $a_e = 45°$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

3 Calcule a medida do ângulo central de um triângulo equilátero. 120°

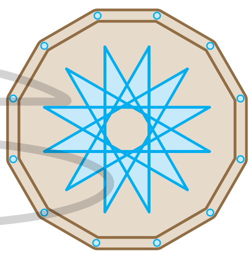
4 Qual é a medida do ângulo central, do ângulo interno e do ângulo externo de um quadrilátero regular? $a_c = 90°$; $a_i = 90°$; $a_e = 90°$

5 Um polígono regular tem 20 lados.

a) Quanto mede seu ângulo central? 18°

b) Quanto mede seu ângulo interno? E seu ângulo externo? 162°; 18°

6 A figura central do tampo de uma mesa foi formada a partir de um dodecágono regular, como vemos na figura abaixo. Determine a medida do ângulo central desse dodecágono. 30°



NELSON MATSUDA

7 Quantos lados tem um polígono regular em que:

a) o ângulo interno mede 144°? 10 lados

b) o ângulo externo mede 30°? 12 lados

c) o ângulo central mede 10°? 36 lados

8 A figura a seguir é um selo comemorativo dos 50 anos de fundação de certo colégio.

NELSON MATSUDA

Sabendo que o hexágono desenhado nesse selo é regular, determine as medidas do ângulo central, do ângulo externo e do ângulo interno. 60°, 60°, 120°

9 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3.240°.

Determine:

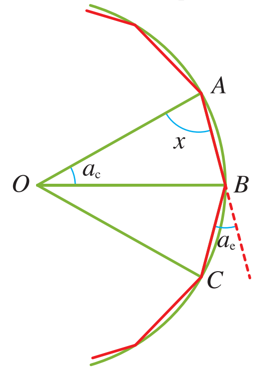
a) a medida do ângulo central desse polígono; $a_c = 18°$

b) a medida do ângulo externo desse polígono. $a_e = 18°$

10 Reúna-se a um colega e façam o que se pede.

Copiem a figura abaixo. Nela, temos parte de um polígono regular de n lados e de uma circunferência de centro O circunscrita a esse polígono.

Indicamos por a_c, a_e e x as medidas dos ângulos central, externo e $O\hat{A}B$, respectivamente.



NELSON MATSUDA

a) Classifiquem, quanto aos lados, os triângulos OAB e OBC. Esses triângulos são congruentes? isósceles, isósceles; sim

b) Representem, em função de x, as medidas do ângulo $O\hat{B}A$ e do ângulo central. x; $180° - 2x$

c) Representem, em função de x, as medidas do ângulo $A\hat{B}C$ e do ângulo externo. $2x$; $180° - 2x$

d) Qual é a relação entre as medidas do ângulo central e do ângulo externo? São iguais.

11 Ainda com um colega, façam o que se pede.

Cada um deve traçar duas circunferências de raio 4 cm e escolher um polígono regular com n lados, $n > 6$, para ser construído pelo outro de duas maneiras.

I. Traçam-se n ângulos centrais adjacentes de medida $\frac{360°}{n}$ cujos lados determinam, na circunferência, os n vértices do polígono. Em seguida, traçam-se os lados do polígono.

II. Traça-se um só ângulo central de medida $\frac{360°}{n}$, determinando, na circunferência, os vértices A e B. Usando um compasso com abertura igual a AB, marcam-se na circunferência, a partir de B, os demais vértices. Em seguida, traçam-se os lados do polígono.

Depois de cada um construir o polígono das duas maneiras, discutam e escolham qual delas é a melhor. Justifiquem a escolha.
construção de figura; respostas pessoais

2 Relações métricas nos polígonos regulares

A seguir, vamos estudar como calcular a medida do lado e a medida do apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência em função da medida do raio.

Quadrado inscrito

Considere uma circunferência de centro O e raio de medida r.

Para construir um quadrado $ABCD$ inscrito nessa circunferência, podemos traçar dois diâmetros perpendiculares entre si ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), determinando os vértices do quadrado.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse quadrado em função de r.

Cálculo da medida do lado (ℓ)

No $\triangle AOB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

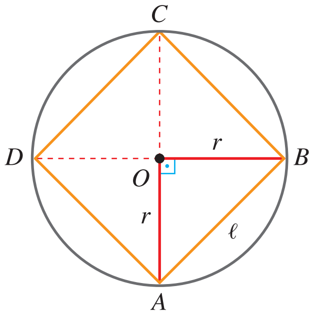
$$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2$$

$$\ell^2 = r^2 + r^2$$

$$\ell^2 = 2r^2 \quad (r > 0)$$

$$\ell = \pm\sqrt{2r^2}$$

$$\ell = \pm r\sqrt{2}$$



Como ℓ é um número positivo, pois é a medida do lado do quadrado, temos:

$$\boxed{\ell = r\sqrt{2}}$$

Cálculo da medida do apótema (a)

No $\triangle OMB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(OM)^2 + (BM)^2 = (BO)^2$$

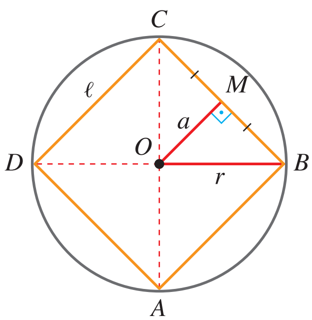
$$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a^2 + \frac{2r^2}{4} = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4} \quad (r > 0)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{2r^2}{4}}$$

$$a = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

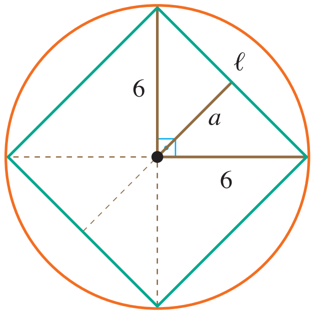
Como a é um número positivo, pois é a medida do apótema do quadrado, temos:

$$\boxed{a = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Vamos calcular as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência de 6 cm de raio.

Observe a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

DANILLO SOUZA

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\ell^2 = 6^2 + 6^2$

$\ell^2 = 72$

$\ell = \pm\sqrt{72}$

$\ell = \pm 6\sqrt{2}$

Como ℓ é um número positivo, $\ell = 6\sqrt{2}$ cm.

$a = \dfrac{\ell}{2}$

$a = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$

$a = 3\sqrt{2}$

Portanto, $a = 3\sqrt{2}$ cm.

Outra maneira de resolver:

Pelo enunciado, temos $r = 6$ cm.

Assim:

$\ell = r\sqrt{2}$

$\downarrow$

$\ell = 6\sqrt{2}$

$a = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

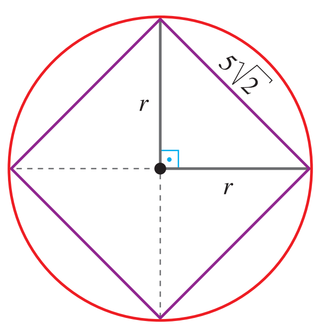
$a = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$

$a = 3\sqrt{2}$

Portanto, $\ell = 6\sqrt{2}$ cm e $a = 3\sqrt{2}$ cm.

b) Vamos calcular a medida do raio de uma circunferência na qual está inscrito um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{2}$ cm.

Observe a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 + r^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$$
$$2r^2 = 25 \cdot 2$$
$$r^2 = 25$$
$$r = \pm\sqrt{25}$$
$$r = \pm 5$$

Como r é um número positivo, $r = 5$ cm.

Outra maneira de resolver:

Pelo enunciado, temos $\ell = 5\sqrt{2}$ cm. Então:

$$\ell = r\sqrt{2}$$
$$5\sqrt{2} = r\sqrt{2}$$
$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$r = 5$$

Portanto, $r = 5$ cm.

JOSÉ LUÍS JUHAS

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

12 Construa um quadrado inscrito em uma circunferência de 3 cm de raio.

a) Que número irracional representa a medida do lado desse quadrado? A representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica. Determine essa representação decimal com uma casa decimal. $3\sqrt{2} \simeq 4{,}2$

b) Que número irracional representa a medida do apótema? $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

13 O apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{2}$ cm.
Calcule a medida da diagonal desse quadrado. 24 cm

14 O lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência mede 8 cm.

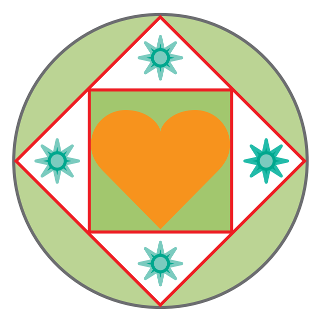
a) Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência. $4\sqrt{2}$ cm

b) Calcule a medida da diagonal do quadrado inscrito nessa circunferência. 8 cm

15 Construa um quadrado circunscrito e um quadrado inscrito em uma mesma circunferência. Determine a diferença entre os perímetros desses quadrados em função da medida r do raio da circunferência. $\left(8 - 4\sqrt{2}\right)r$

16 A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm. Calcule a distância do centro desse quadrado a um de seus lados (medida do apótema). 2,5 cm

17 Uma fábrica de chocolate lançou no mercado a nova caixa de bombons decorada. O desenho da tampa da caixa foi elaborado a partir de dois quadrados, como se vê na figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Sabe-se que a medida do lado do quadrado menor é 10 cm. Sabe-se, também, que os vértices do quadrado menor são os pontos médios dos lados do quadrado maior. Nessas condições, determine:

a) a medida do lado do quadrado maior; $10\sqrt{2}$ cm

b) o comprimento da faixa vermelha que cobre os lados dos dois quadrados; $\left(40 + 40\sqrt{2}\right)$ cm

c) a área da parte superior da tampa da caixa. 100π cm²

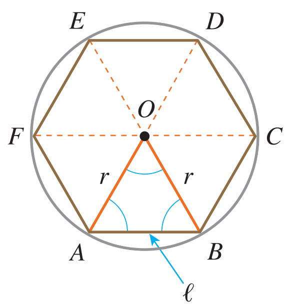
Hexágono regular inscrito

Considere uma circunferência de centro O e raio de medida r.

Como o ângulo central do hexágono regular mede $\frac{360°}{6} = 60°$, podemos construir na circunferência um ângulo central com esse valor, obtendo um arco $\overset{\frown}{AB}$. Com a abertura do compasso igual a $\overline{AB}$, marcamos os outros vértices do hexágono.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse hexágono em função de r.

Cálculo da medida do lado (ℓ)



Temos:

$m(A\hat{O}B) = 60°$

$$m(A\hat{B}O) = \frac{m(\overset{\frown}{AE})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

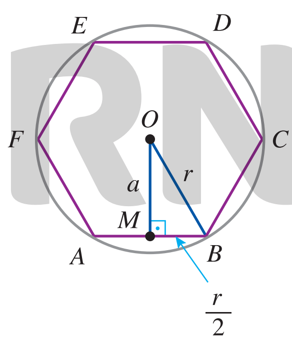
$$m(B\hat{A}O) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

O $\triangle AOB$, sendo equiângulo, é também equilátero, ou seja: $AB = OA = OB$

Logo:

$$\boxed{\ell = r}$$

Cálculo da medida do apótema (a)



No $\triangle OMB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(OM)^2 + (MB)^2 = (BO)^2$

$$a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a^2 + \frac{r^2}{4} = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{3r^2}{4} \quad (r > 0)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$a = \pm\frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Como a é um número positivo, pois é a medida do apótema, temos:

$$\boxed{a = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

O fato de a medida do lado do hexágono regular ser igual a r permite que marquemos os vértices do hexágono, na circunferência, tomando a abertura do compasso igual a r.

Veja os exemplos a seguir.

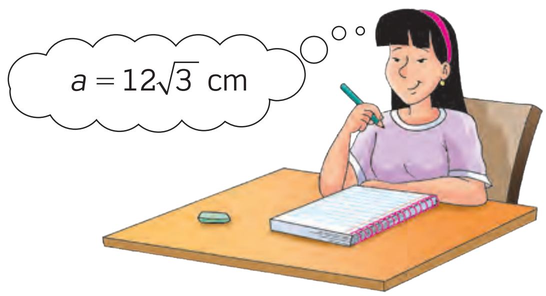
a) Vamos calcular a medida do raio de uma circunferência na qual o apótema do hexágono regular inscrito mede $12\sqrt{3}$ cm.

$a = 12\sqrt{3}$

$\dfrac{r\cancel{\sqrt{3}}}{2} = 12\cancel{\sqrt{3}}$

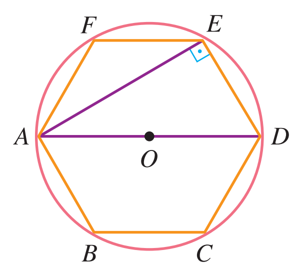
$r = 24$

Portanto, o raio mede 24 cm.



JOSÉ LUÍS JUHAS

b) Vamos calcular o perímetro do hexágono regular ao lado cuja medida AE é $10\sqrt{3}$ cm.



NELSON MATSUDA

Temos:

- $ED = r$;
- $AD = 2r$;
- $AE = 10\sqrt{3}$ cm;
- $\triangle ADE$ é retângulo.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ADE$, obtemos:

$$(AE)^2 + (ED)^2 = (AD)^2$$
$$\left(10\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = (2r)^2$$
$$300 = 4r^2 - r^2$$
$$300 = 3r^2$$
$$r^2 = 100$$
$$r = \pm 10$$

Como r é um número positivo, pois é a medida do raio, temos $r = 10$ cm.

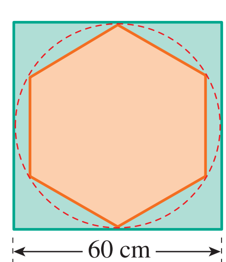
Assim, $\ell = 10$ cm.

Portanto, o perímetro é 60 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

18 Marina é projetista em uma fábrica de lustres. Ela criou um lustre formado por quatro placas quadradas de polipropileno translúcido (um tipo de plástico que deixa passar a luz) com 60 cm de lado cada uma. A figura central dessas placas é um hexágono regular, desenhado a partir de uma circunferência tangente aos lados das placas. Determine a medida do lado e a área desse polígono. 30 cm; $1.350\sqrt{3}$ cm²



NELSON MATSUDA

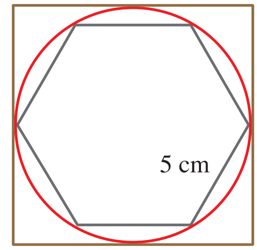
Lembre-se:
Não escreva no livro!

19 Um hexágono regular é inscrito em uma circunferência de 3,2 cm de raio. Calcule:
a) a medida dos lados desse hexágono; 3,2 cm
b) o perímetro desse hexágono; 19,2 cm
c) a medida do apótema. $1,6\sqrt{3}$ cm

20 O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do lado do quadrado inscrito nessa circunferência. $18\sqrt{2}$ cm

21 A menor diagonal de um hexágono regular mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule o perímetro desse hexágono. 72 cm

22 Considerando a figura ao lado, determine o perímetro do quadrado circunscrito à circunferência. 40 cm



NELSON MATSUDA

23 Divide-se uma circunferência que tem 10 cm de diâmetro em seis partes iguais. Escolhem-se três pontos alternados dessa divisão, os quais são unidos com segmentos de reta. Determine a medida de cada um desses segmentos. $5\sqrt{3}$ cm

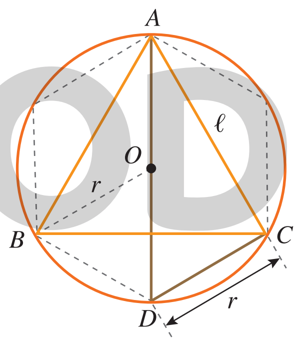
Triângulo equilátero inscrito

Considere uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

Para construir um triângulo equilátero *ABC* inscrito nessa circunferência, dividimos a circunferência em seis arcos congruentes e, em seguida, unimos alternadamente os pontos de divisão.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse triângulo em função de *r*.

Cálculo da medida do lado (ℓ)



NELSON MATSUDA

Observe que:

- o $\triangle ADC$ é retângulo (inscrito na semicircunferência);
- $DC = \ell = r$, pois $\overline{DC}$ é lado de um hexágono regular inscrito na circunferência.

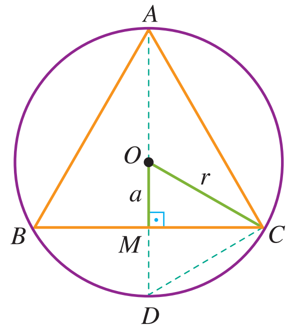
No $\triangle ADC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 + (DC)^2 = (AD)^2$$
$$(\ell)^2 + (r)^2 = (2r)^2$$
$$\ell^2 + r^2 = 4r^2$$
$$\ell^2 = 3r^2 \ (r > 0)$$
$$\ell = \pm\sqrt{3r^2}$$

Como ℓ é um número positivo, pois é a medida do lado do triângulo, temos:

$$\boxed{\ell = r\sqrt{3}}$$

Cálculo da medida do apótema (a)



NELSON MATSUDA

JOSÉ LUÍS JUHAS

No $\triangle OMC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

JOSÉ LUÍS JUHAS

$$(OM)^2 + (MC)^2 = (OC)^2$$

$$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a^2 + \frac{3r^2}{4} = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{r^2}{4} \quad (r > 0)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{r^2}{4}}$$

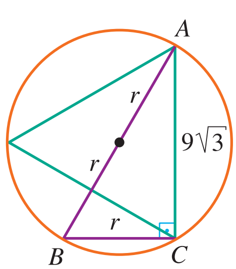
Como a é um número positivo, pois é a medida do apótema, temos:

$$\boxed{a = \frac{r}{2}}$$

Veja a aplicação desse cálculo no exemplo a seguir.

O lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{3}$ cm. Vamos calcular a medida do raio dessa circunferência.

Observe a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

No $\triangle ABC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$

$$\left(9\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = (2r)^2$$

$$81 \cdot 3 + r^2 = 4r^2$$

$$81 \cdot 3 = 3r^2$$

$$r^2 = 81$$

$$r = \pm\sqrt{81}$$

$$r = \pm 9$$

Como r é um número positivo, pois é a medida do raio, temos $r = 9$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24 Trace uma circunferência de 3 cm de raio e um triângulo equilátero inscrito nela. Calcule:

a) a medida do lado do triângulo; $3\sqrt{3}$ cm

b) a medida do apótema. 1,5 cm

25 Se o apótema de um triângulo equilátero mede $\sqrt{12}$ cm, determine:

a) a medida do lado do triângulo; 12 cm

b) a medida da altura do triângulo. $6\sqrt{3}$ cm

26 Um triângulo equilátero é inscrito em uma circunferência de 8 cm de raio.

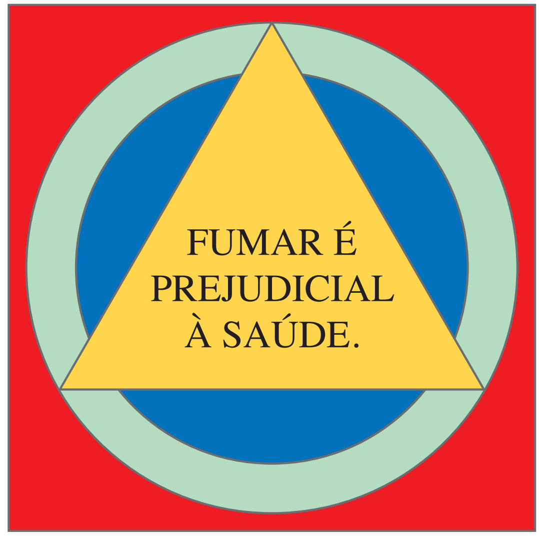
a) Calcule a medida do apótema. 4 cm

b) Some a medida do raio com a medida do apótema. 12 cm

c) Calcule a medida da altura do triângulo aplicando a fórmula $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$. 12 cm

d) Considerando um triângulo equilátero em que o lado tem medida ℓ, o raio tem medida r, e o apótema, medida a, e tendo em vista os resultados dos itens **b** e **c**, podemos dizer que $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = r + a$? sim

27 Um colégio está promovendo uma campanha contra o tabagismo. Para isso, realizou um concurso entre os alunos para a escolha de um cartaz para a campanha. O cartaz a seguir foi o vencedor.



Sabendo que o raio da circunferência que circunscreve o triângulo equilátero mede 30 cm, determine a área desse triângulo. $675\sqrt{3}$ cm²

28 Em uma mesma circunferência, são inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. O apótema do quadrado mede $3{,}5\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema do triângulo. 3,5 cm

29 Em uma circunferência, é inscrito um triângulo equilátero cujo lado mede $15\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do lado do hexágono regular inscrito nessa circunferência. 15 cm

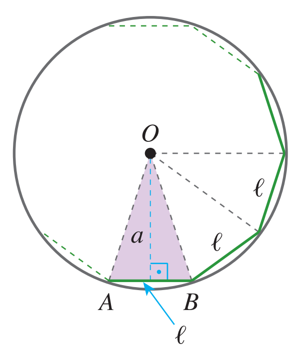
3 Área de um polígono regular

Considere um polígono regular de n lados.

Indicando por ℓ a medida do lado do polígono e por a a medida de seu apótema, a área do $\triangle AOB$ é dada por:

$$\frac{\ell \cdot a}{2}$$

Como o polígono tem n lados, terá também n triângulos com a mesma área do $\triangle AOB$.



A área A do polígono será, portanto:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}, \text{ ou seja, } A = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}$$

O perímetro do polígono é $n \cdot \ell$. Indicando o perímetro por $2p$, temos:

$$A = \frac{\cancel{2}p \cdot a}{\cancel{2}}\text{, ou seja:}$$

$$\boxed{A = p \cdot a}$$

A medida p é chamada de **semiperímetro**.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Vamos calcular a área de um decágono regular com 12 cm de lado. Considere tg 18° = 0,32.

- Cálculo do semiperímetro, em centímetro:

$$p = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60\text{, ou seja, } p = 60 \text{ cm}$$

- Cálculo do ângulo central:

$$a_c = \frac{360°}{10} = 36°$$

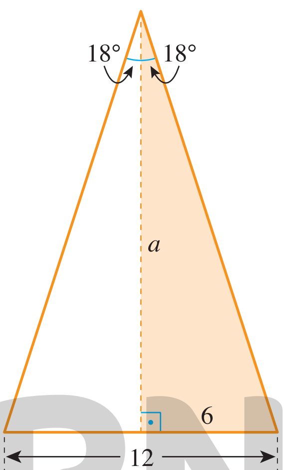
- Cálculo do apótema, em centímetro:

$$\text{tg } 18° = \frac{6}{a}$$

$$a \cdot 0{,}32 = 6$$

$$\frac{a \cdot 0{,}32}{0{,}32} = \frac{6}{0{,}32}$$

$$a = 18{,}75\text{, ou seja, } a = 18{,}75 \text{ cm}$$



NELSON MATSUDA

- Cálculo da área do polígono, em centímetro quadrado:

$$A = p \cdot a$$

$$A = 60 \cdot 18{,}75$$

$$A = 1.125$$

Logo, a área do decágono regular é 1.125 cm².

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 O professor de Matemática de uma escola promoveu um campeonato de pipas entre os alunos. Para isso, passou a seguinte especificação: a pipa deverá ter a forma de um hexágono regular com lados medindo 20 cm. Calcule a medida do apótema e a área da pipa. $10\sqrt{3}$ cm; $600\sqrt{3}$ cm²

31 O lado de um pentágono regular mede 20 cm. Calcule sua área. (Dado: tg 36° $\simeq$ 0,73) aproximadamente 684,93 cm²

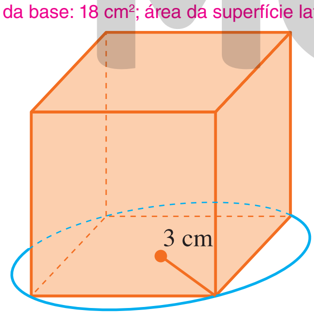
32 Um eneágono regular é inscrito em uma circunferência de 18 cm de raio. Calcule sua área, sabendo que sen 20° ≃ 0,34 e cos 20° ≃ 0,93.
aproximadamente 922,04 cm²

33 Este desenho faz parte do anúncio publicitário de um bufê infantil.


CLAUDIO CHIYO

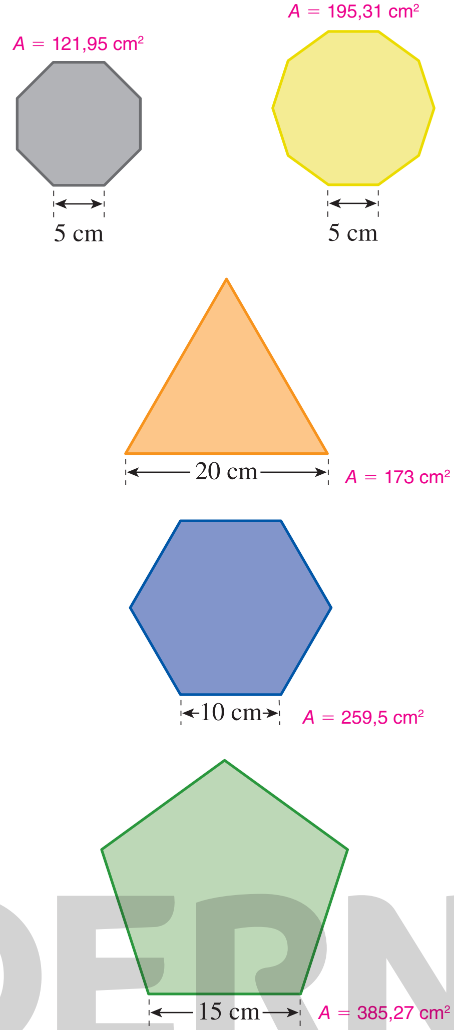
Sabendo que o diâmetro da circunferência da figura mede 3,6 cm, determine a área do triângulo equilátero impresso nesse anúncio.
$2{,}43\sqrt{3}\ cm^2$

34 Determine a área da base e a área da superfície lateral de um cubo que tem uma das faces inscrita em uma circunferência de 3 cm de raio.
área da base: 18 cm²; área da superfície lateral: 72 cm²



NELSON MATSUDA

35 Observe as figuras a seguir.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

a) Represente em um gráfico de colunas as áreas dos polígonos regulares. construção de gráfico
(Considere: $\sqrt{3} = 1{,}73$; tg 30° = 0,58; tg 36° = 0,73; tg 22,5° = 0,41; tg 18° = 0,32)

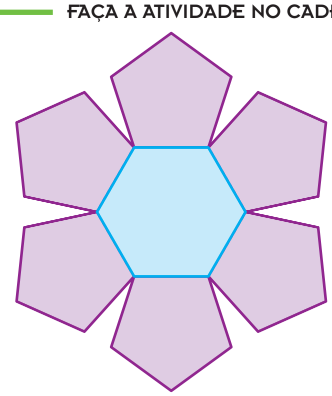
b) Calcule a média das áreas desses polígonos (área média). 227,006 cm²

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Ângela é proprietária de uma loja de artesanato. No final do ano, ela pretende oferecer um brinde aos clientes da loja: um enfeite confeccionado em madeira. O enfeite será uma flor estilizada, formada por polígonos regulares: um hexágono e seis pentágonos.

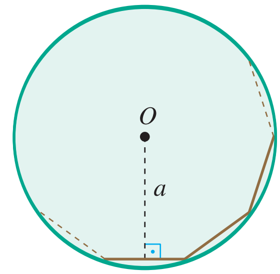
Sabendo que o hexágono tem lado de medida igual a 2,0 cm, determine a área aproximada de madeira que Ângela utilizará para produzir cada enfeite. Considere tg 36° = 0,73. 51,47 cm²


NELSON MATSUDA

4 Área de um círculo

Considere um círculo de centro O e raio de medida r.

Vamos inscrever nesse círculo um polígono regular de n lados, sendo a a medida do apótema do polígono.



NELSON MATSUDA

Supondo que o número de lados (n) cresça indefinidamente, acontecerá o seguinte:

- o perímetro $2p$ do polígono regular vai se aproximar do comprimento $2\pi r$ da circunferência e, portanto, o semiperímetro p se aproximará de πr;
- a medida do apótema do polígono regular vai se aproximar da medida do raio do círculo;
- a área do polígono regular vai se aproximar da área do círculo.

Então, vamos encontrar uma fórmula que forneça a área de um círculo:

$$A_{\text{polígono}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \pi r}}{p} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ r}}{a}$$

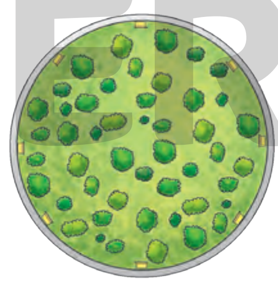
$$A_{\text{círculo}} = \pi r \cdot r$$

$$\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$$

Observe um exemplo.

Vamos calcular, em metro quadrado, a área de uma praça circular que tem 35 m de raio. Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$
$$A_{\text{círculo}} \simeq 3{,}14 \cdot (35)^2$$
$$A_{\text{círculo}} \simeq 3{,}14 \cdot 1.225$$
$$A_{\text{círculo}} \simeq 3.846{,}50$$



JOSÉ LUIS JUHAS

Logo, a praça tem aproximadamente 3.846,50 m² de área.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

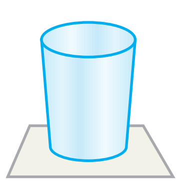
36 (Saresp) Juliana colocou um copo molhado sobre a mesa, e nela ficou a marca da base circular do copo. A área da marca é de 16π cm². O diâmetro da base do copo é: alternativa **b**

a) 4 cm.

b) 8 cm.

c) 16 cm.

d) $\simeq$ 5,7 cm.



NELSON MATSUDA

37 (Fuvest-SP) O triângulo ABC é inscrito em uma circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda $\overline{BC}$ mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em cm², vale: alternativa **a**

a) 24.

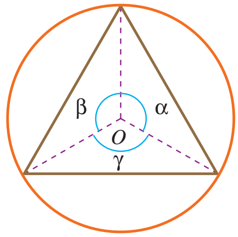
b) 12.

c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

d) $6\sqrt{2}$.

e) $2\sqrt{3}$.

38 (Unifor-CE) Um triângulo está inscrito em uma circunferência de centro *O*, como mostra a figura abaixo.



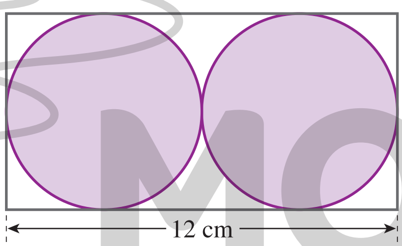
Se o raio da circunferência mede 1 cm e os ângulos α, β e γ são congruentes, então o lado do triângulo mede: alternativa e

a) 1,2 cm.
b) 1,3 cm.
c) $\sqrt{2}$ cm.
d) 1,5 cm.
e) $\sqrt{3}$ cm.

39 Junte algumas moedas de diferentes valores e calcule a área aproximada de cada uma delas. Em seguida, construa uma tabela com as áreas das moedas de todos os valores.
construção de tabela

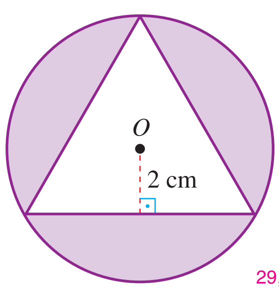
40 Calcule a área da parte pintada de lilás, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$.

a)



56,52 cm²

b)

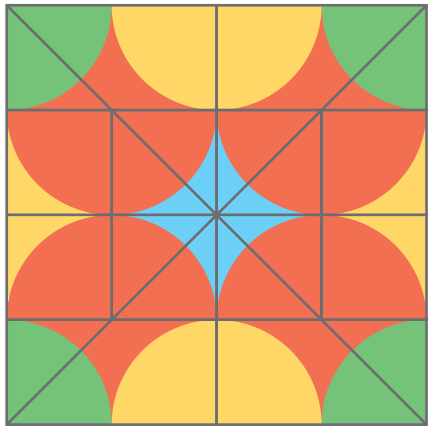


29,48 cm²

41 A professora de Matemática Sueli pediu aos alunos do 9º ano que se organizassem em grupos e criassem um quebra-cabeça com figuras geométricas. Em seguida, os alunos deveriam formular uma questão a respeito do quebra-cabeça. O grupo de Ricardo elaborou o quebra-cabeça a seguir e formulou esta questão: "Determine a área da parte pintada de azul, sabendo que o quebra-cabeça foi construído a partir de um quadrado de lado 20 cm".

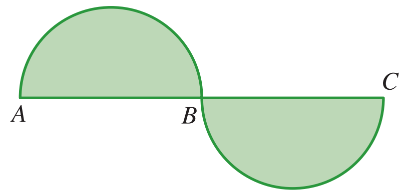
Lembre-se:
Não escreva no livro!

Resolva a questão elaborada pelo grupo de Ricardo. 21,50 cm²

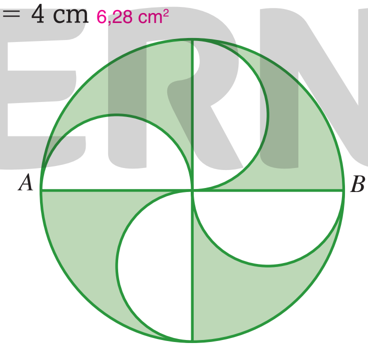


42 Calcule a área aproximada da parte pintada de verde.

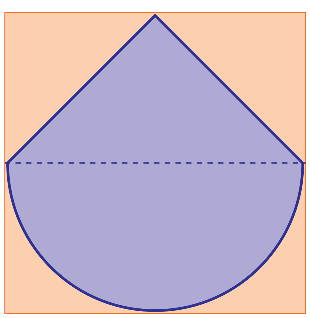
a) $AB = BC = 2{,}4$ cm 4,52 cm²



b) $AB = 4$ cm 6,28 cm²



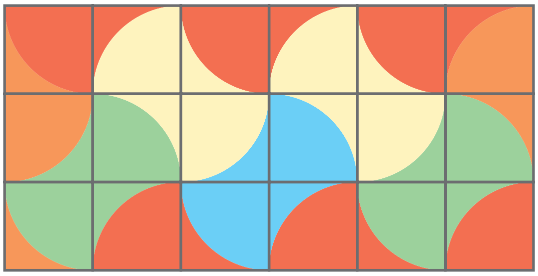
43 Uma fábrica de bijuterias criou um pingente que é recortado de um quadrado de acrílico cujo lado mede 2,5 cm, conforme a figura abaixo.



Determine a área aproximada do pingente. 4 cm²

Lembre-se:
Não escreva no livro!

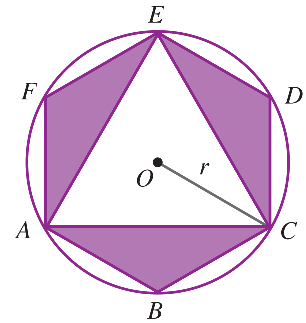
44 Durante uma aula de Arte, Pedro elaborou um painel, conforme a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Esse painel foi feito em um papel quadriculado cujo quadradinho tem 3 cm de lado. Determine a área da parte pintada de verde. 36 cm^2

45 Na figura, r é a medida do raio da circunferência, e $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE} \cong \overset{\frown}{EF} \cong \overset{\frown}{FA}$.



NELSON MATSUDA

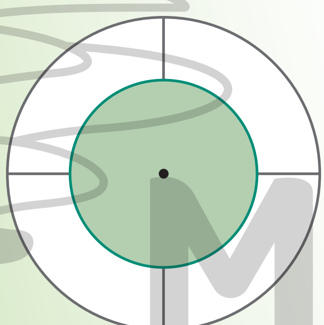
Calcule a área da região pintada de roxo. $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

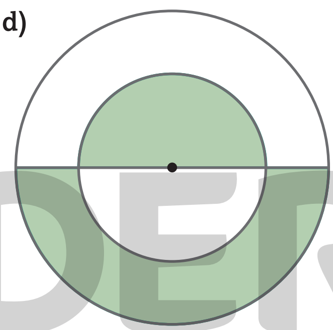
Pense mais um pouco...

Todas as figuras abaixo são formadas por duas circunferências concêntricas cujos raios medem 2 cm e 3 cm, mas apenas duas delas podem ser sobrepostas. Descubra que figuras são essas e determine a área da região pintada de verde. alternativas **c**, **d**; área: $\frac{9\pi}{2}$ cm^2

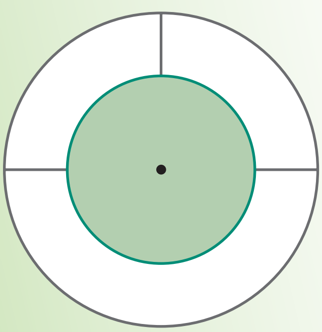
a)



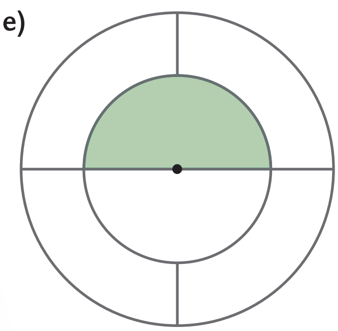
d)



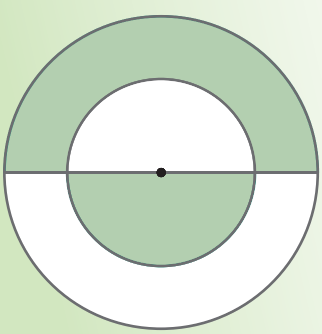
b)



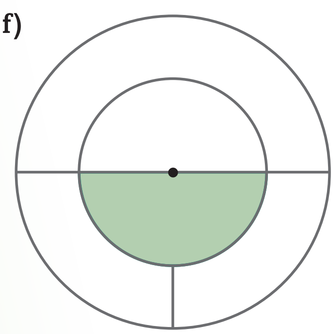
e)



c)



f)



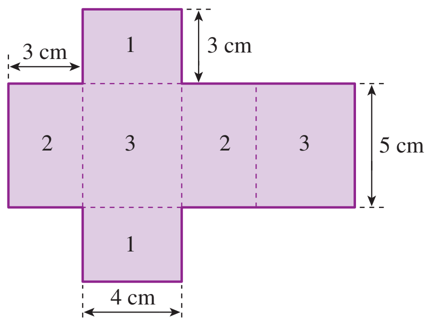
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

PARA SABER MAIS +

Calculando áreas e fazendo experiências com volumes

Você se lembra de como fazer a planificação de um paralelepípedo? E a de um cubo? Analisando as planificações, podemos determinar a área total da superfície desses sólidos. Veja.

planificação de um paralelepípedo



Cálculo da área em centímetro quadrado:

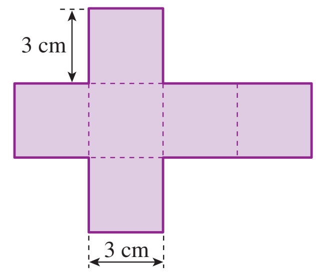
$$A = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 4}_{\text{área do retângulo 1}} + 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 5}_{\text{área do retângulo 2}} + 2 \cdot \underbrace{4 \cdot 5}_{\text{área do retângulo 3}}$$

$A = 24 + 30 + 40$

$A = 94$

A área total da superfície do paralelepípedo é 94 cm².

planificação de um cubo



Cálculo da área em centímetro quadrado:

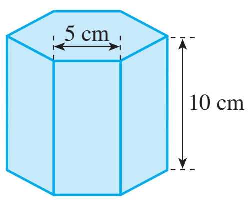
$$A = 6 \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{área do quadrado}}$$

$A = 54$

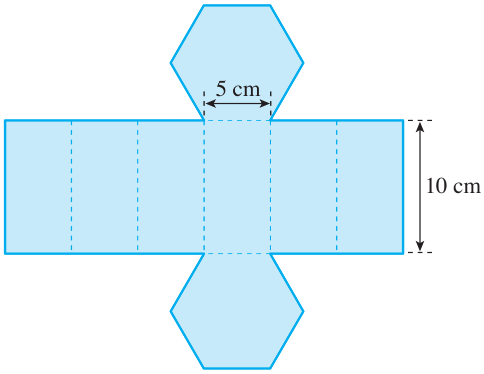
A área total da superfície do cubo é 54 cm².

Do mesmo modo, podemos determinar a área total da superfície de um prisma, fazendo sua planificação. Veja.

prisma



planificação de um prisma



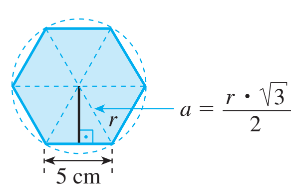
Cálculo da área em centímetro quadrado:

$$A = 6 \cdot \underbrace{10 \cdot 5}_{\text{área do retângulo}} + 2 \cdot A_{\text{hexágono}}$$

$A = 300 + 2 \cdot 6 \cdot A_{\text{triângulo}}$

$$A = 300 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}$$

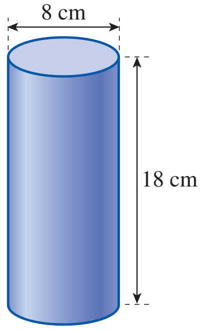
$A = 300 + 75\sqrt{3}$



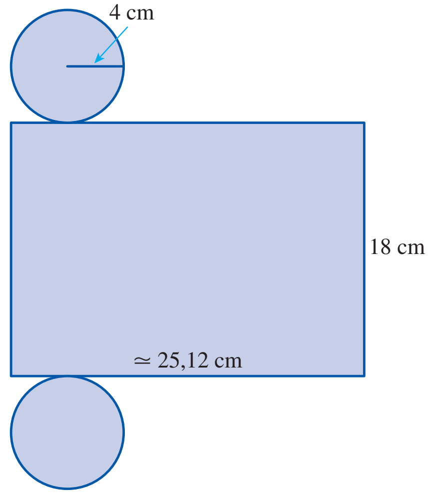
A área total da superfície do prisma é $\left(300 + 75\sqrt{3}\right)$ cm².

Vamos recorrer à planificação de um cilindro para determinar a área total de sua superfície.

cilindro



planificação



Cálculo da área em centímetro quadrado:

$$A \simeq 2 \cdot \underbrace{\pi \cdot 4^2}_{\text{área do círculo}} + \underbrace{18 \cdot 25{,}12}_{\text{área do retângulo}}$$

$$A \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 + 452{,}16$$

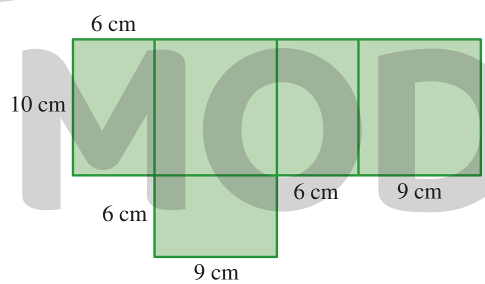
$$A \simeq 552{,}64$$

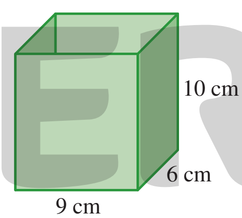
A área total da superfície do cilindro é aproximadamente 552,64 cm^2.

Agora, veja como podemos constatar, experimentalmente, o volume de alguns sólidos.

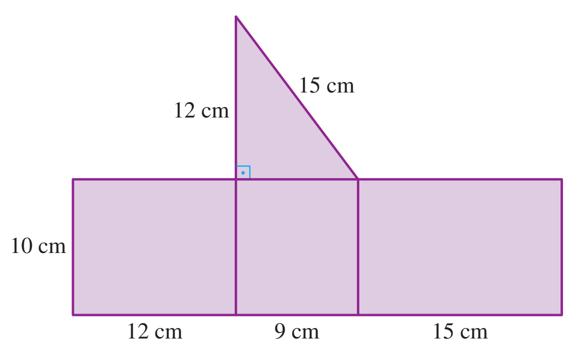
Experiência 1

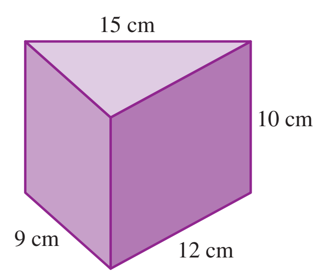
Construímos um modelo de prisma de base retangular a partir de sua planificação, conforme as figuras. Observe que eliminamos uma das faces, pois nesse modelo de prisma despejaremos areia até a borda.





Construímos, também, um modelo de prisma de base triangular a partir de sua planificação, tendo eliminado uma das faces.





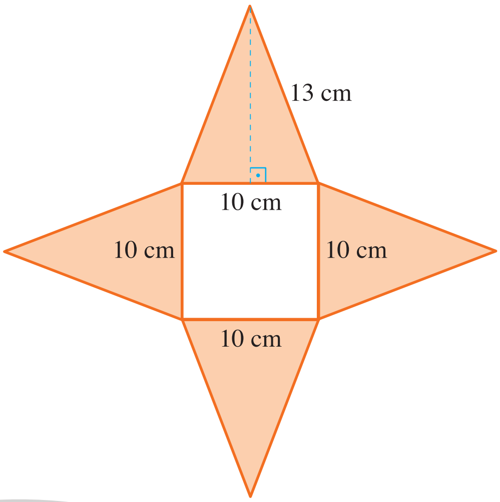
Os dois prismas têm mesma altura (10 cm) e bases com áreas iguais (54 cm^2).

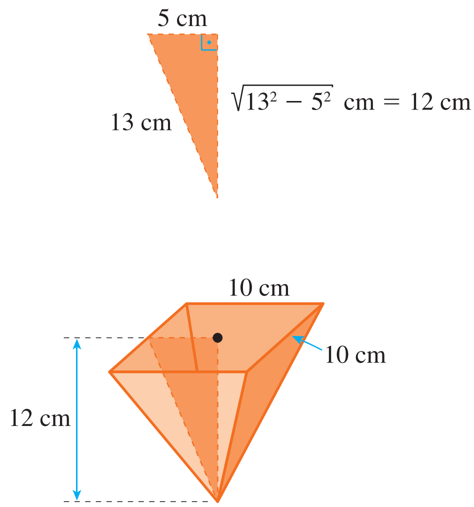
Ao despejar a areia do prisma de base retangular no prisma de base triangular, verificamos que os dois têm mesmo volume. Como já sabemos calcular o volume do primeiro prisma ($V = 9 \cdot 6 \cdot 10$), concluímos que o segundo prisma também tem volume igual a 540 cm^3.

Experiência 2

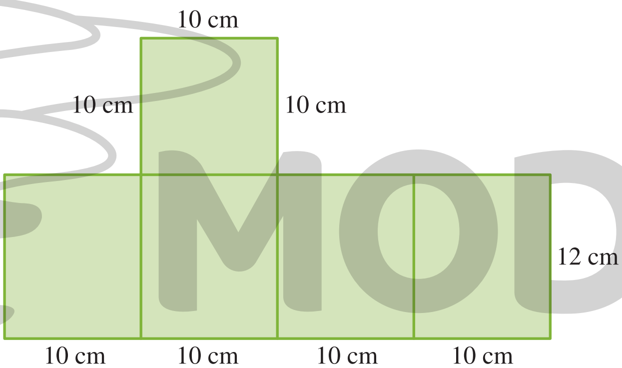
Construímos um modelo de pirâmide de base quadrada e um modelo de prisma de base quadrada a partir de suas planificações, conforme as figuras. Observe que eliminamos uma das faces para poder enchê-los com areia.

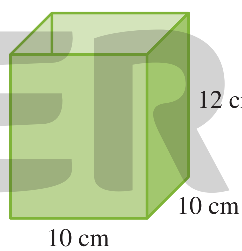
modelo de pirâmide





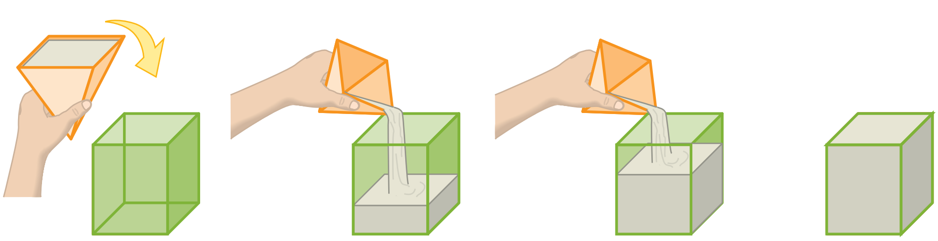
modelo de prisma





Observe que o prisma e a pirâmide têm mesma área de base e também mesma altura.

Enchendo a pirâmide de areia e despejando seu conteúdo no prisma, é possível repetir o procedimento três vezes, ou seja, para encher o prisma, precisamos do conteúdo de três pirâmides.



O volume da pirâmide corresponde, portanto, a um terço do volume do prisma, ou seja:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12$$

Logo, o volume da pirâmide é igual a 400 cm³.

Agora é com você!

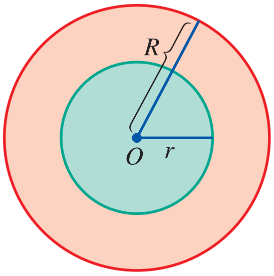
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Se achar conveniente, peça aos alunos que verifiquem a relação entre os volumes de um cone e de um cilindro (tomando o cuidado de comparar sólidos de mesma altura e áreas de bases iguais).

Reproduza em cartolina as planificações de uma das experiências anteriores, recorte-as (respeitando as medidas indicadas e tomando o cuidado de deixar abas para colagem onde for necessário) e monte os sólidos. Em seguida, usando areia ou material similar, comprove as relações entre os volumes.

Área de uma coroa circular

Na figura ao lado, temos dois círculos concêntricos. O círculo menor tem raio de medida *r*, e o maior, raio de medida *R*.



NELSON MATSUDA

A parte da figura pintada de vermelho é chamada de **coroa circular**.

Observe que a área da coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos dois círculos, ou seja:

$$A_{\text{coroa circular}} = \pi R^2 - \pi r^2$$

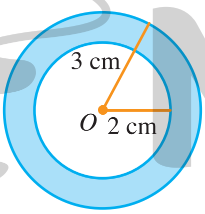
$$\boxed{A_{\text{coroa circular}} = \pi(R^2 - r^2)}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

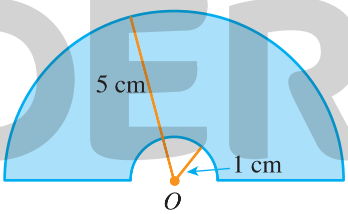
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

46 Calcule a área pintada de azul em cada uma das figuras abaixo.

a) 15,70 cm²



b) 37,68 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

47 Dois círculos concêntricos de raios 6 cm e 2 cm formam uma coroa circular. Calcule a área dessa coroa. 100,48 cm²

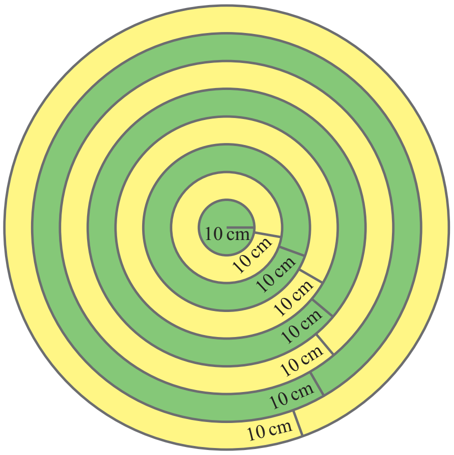
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Adotando $\pi = 3{,}14$, calcule:

- a área total da parte verde do alvo; 8.792 cm²
- a área total da parte amarela do alvo. 11.304 cm²

JOSÉ LUIS JUHAS

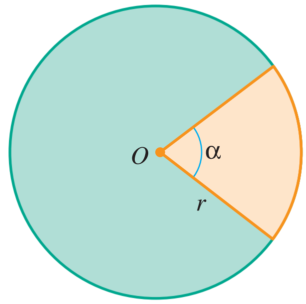


NELSON MATSUDA

Área de um setor circular

Todo ângulo central determina em um círculo uma região chamada de **setor circular**.

Considerando o setor circular em que a medida do ângulo central, em grau, é α, podemos calcular a área desse setor estabelecendo uma proporção. Observe.



NELSON MATSUDA

Área	Medida do ângulo central
πr^2	360°
$A_{\text{setor circular}}$	α

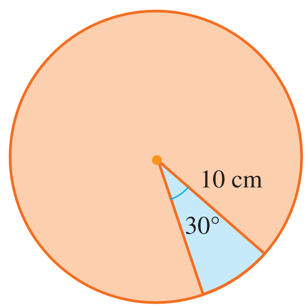
$$\frac{\pi r^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{\alpha}$$

Veja um exemplo.

Vamos calcular a área do setor circular cujo ângulo central mede 30° e cujo raio mede 10 cm.

Pelo enunciado, temos: $\alpha = 30°$ e $r = 10$ cm

Assim:



NELSON MATSUDA

$$\frac{\pi \cdot 10^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{30°}$$

$$\frac{100\pi}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{12}{1}$$

$$12 \cdot A_{\text{setor circular}} = 100\pi$$

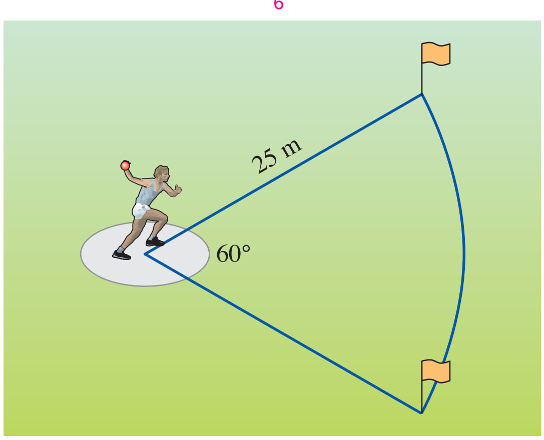
$$A_{\text{setor circular}} = \frac{25\pi}{3}$$

Portanto, a área do setor circular é $\frac{25\pi}{3}$ cm^2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

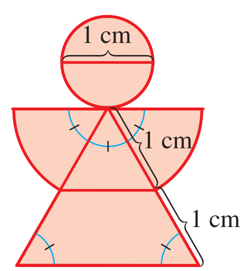
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

48 Em uma pista de atletismo, o campo de arremesso de peso tem a forma de um setor circular com 60° de abertura e 25 m de raio. Calcule a área desse campo. $\frac{625\pi}{6}$ m^2 $\simeq$ 327 m^2



NELSON MATSUDA

49 Para fazer um molde, Clarice desenhou a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Calcule a área aproximada da figura desenhada por Clarice. 3,56 cm^2

50 Em uma circunferência de 15 cm de raio, o arco de um setor circular mede 10π cm. Determine:

a) a medida do ângulo central desse setor; 120°

b) a área desse setor. 75π cm^2

51 Em cada figura, calcule a área da parte colorida. Em seguida, verifique se existem figuras equivalentes. (Adote $\pi = 3{,}14$.) As figuras 2 e 4 são equivalentes.

Figura 1

50,24 cm²

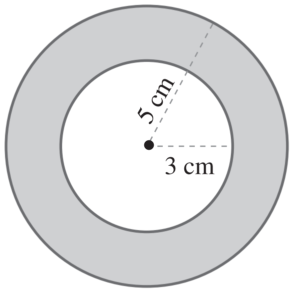


Figura 2

23,44 cm²

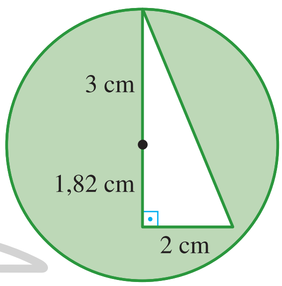


Figura 3

23,55 cm²

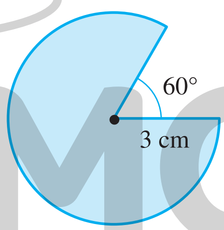
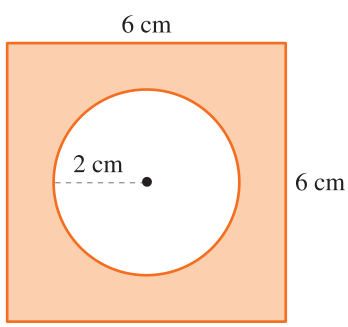


Figura 4

23,44 cm²



52 (PUC-RJ) Triplicando-se o raio de uma circunferência: alternativa **c**

a) a área é multiplicada por 9π.

b) o comprimento é multiplicado por 3π.

c) a área é multiplicada por 9 e o comprimento por 3.

d) a área e o comprimento são ambos multiplicados por 3.

e) a área é multiplicada por 3 e o comprimento por 9.

53 (Fuvest-SP) Um comício político lotou uma praça semicircular de 130 m de raio. Admitindo uma ocupação média de quatro pessoas por m², qual a melhor estimativa do número de pessoas presentes? alternativa **b**

a) dez mil

b) cem mil

c) meio milhão

d) um milhão

e) muito mais de um milhão

54 (Vunesp) Um cavalo se encontra preso em um cercado de pastagem cuja forma é um quadrado, com lado medindo 50 m. Ele está amarrado a uma corda de 40 m que está fixada em um dos cantos do quadrado. Considerando $\pi = 3{,}14$, calcule a área, em metro quadrado, da região do cercado que o cavalo não conseguirá alcançar, porque está amarrado. alternativa **a**

a) 1.244

b) 1.256

c) 1.422

d) 1.424

e) 1.444

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

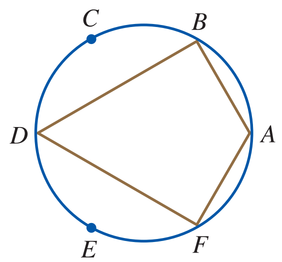
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A medida do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência é $8\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. 4 cm

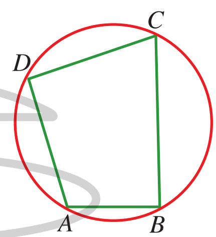
2 O perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é 42 m. Calcule o perímetro do quadrado inscrito nessa circunferência. $28\sqrt{2}$ m

3 A circunferência abaixo tem $7\sqrt{2}$ cm de raio e está dividida em seis arcos congruentes. Calcule o perímetro do polígono *ABDF*.

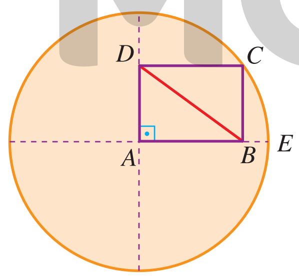
$14\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm



4 Na figura, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são lados de um quadrado inscrito, $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular inscrito, $\overline{BC}$ é lado de um triângulo equilátero inscrito. Sabe-se que $BC = 4\sqrt{3}$. Calcule *AB* e *AD*. $AB = 4$ e $AD = 4\sqrt{2}$



5 Na figura abaixo, *ABCD* é um retângulo inscrito em um quadrante de um círculo. Calcule a medida de $\overline{BD}$, sendo $CD = 8$ cm e $BE = 2$ cm.
10 cm

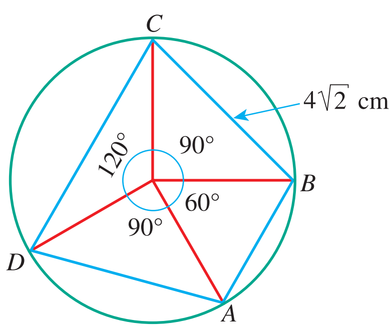


6 Considerando a figura abaixo, calcule:

a) a medida do raio da circunferência; 4 cm

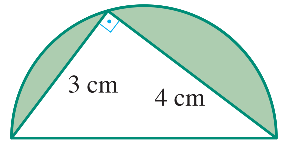
b) a medida de $\overline{AB}$; 4 cm

c) a medida de $\overline{CD}$. $4\sqrt{3}$ cm

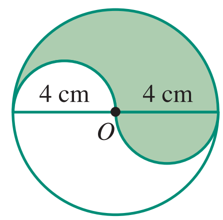


7 Considerando $\pi = 3{,}14$, determine a área das figuras pintadas de verde. Nos itens **b** e **d**, *O* é o centro da circunferência.

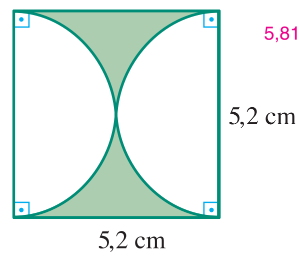
a) 3,8125 cm²



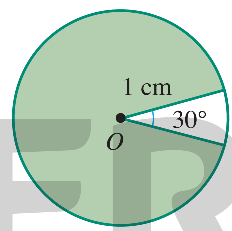
b) 25,12 cm²



c) 5,8136 cm²

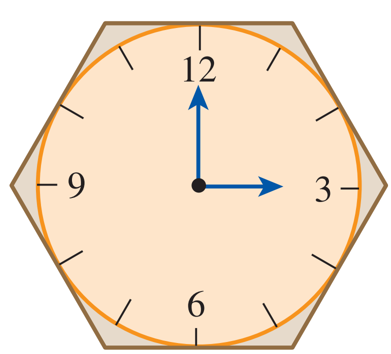


d) 2,88 cm²



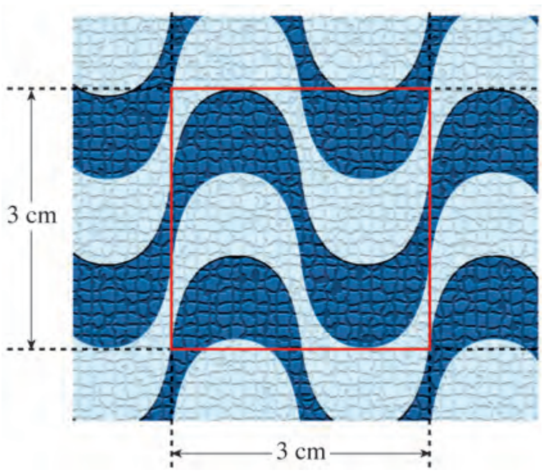
8 Qual é a diferença entre os perímetros de dois quadrados, um circunscrito e outro inscrito em uma mesma circunferência de $\sqrt{2}$ cm de raio? $8\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm

9 Raul deu de presente à sua mãe um relógio de parede com formato de hexágono regular, como na figura a seguir.



Determine a área do mostrador circular desse relógio, sabendo que o hexágono regular circunscrito tem 12 cm de lado. 108π cm²

10 Ao quadricular uma ilustração do calçadão de uma praia, Lucas notou que a área ocupada pelas pedras azul-escuras era maior que a ocupada pelas pedras azul-claras.

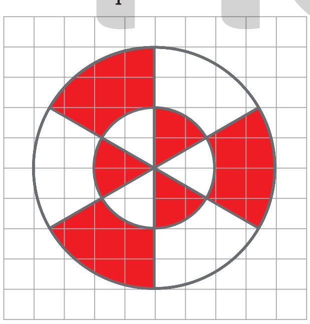


NELSON MATSUDA

a) Faça a estimativa da área, em centímetro quadrado, ocupada pelas pedras azul-escuras do quadrado em destaque na figura acima. 6 cm²

b) Considerando que a área estimada da parte azul-escura no quadrado seja igual à área de um círculo, faça um desenho de como ficaria um novo revestimento para esse calçadão com círculos azul-escuros. Indique as medidas em seu desenho. resposta pessoal; O círculo terá 1,38 cm de raio.

11 Calcule a área aproximada da parte da figura pintada de vermelho, sabendo que o lado do quadradinho do quadriculado mede 0,5 cm. 6,28 cm²



NELSON MATSUDA

12 Um polígono regular tem 12 lados e é inscrito em uma circunferência de 10 cm de raio.

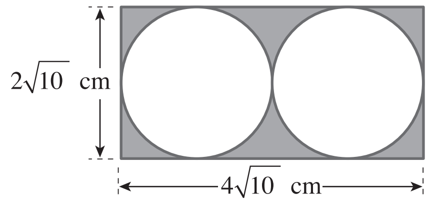
a) Qual é a medida do ângulo central do polígono? 30°

b) Use a tabela de razões trigonométricas da página 158, com duas casas decimais, para determinar a medida do apótema e a do lado desse polígono. 9,70 cm; 5,20 cm

c) Estabeleça a diferença entre o comprimento da circunferência e o perímetro desse polígono. 0,4 cm

d) Qual é a área desse polígono? 302,64 cm²

13 (Unifor-CE) Uma indústria utiliza as placas retangulares de alumínio mostradas na figura, nas quais toda a região sombreada, que está fora dos círculos, é desperdiçada.



NELSON MATSUDA

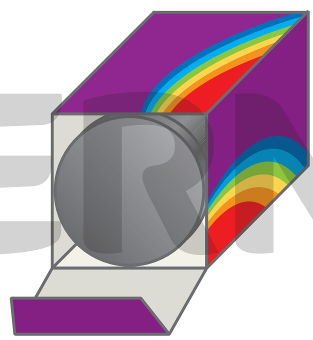
Qual é a área desperdiçada, em centímetro quadrado? (Considere $\pi = 3,1$.) 18 cm²

14 Uma folha de papel tem 18 cm por 12 cm.

a) Qual é o maior número de círculos tangentes entre si com 3 cm de raio que é possível desenhar nessa folha? 6 círculos

b) Se esses círculos forem recortados, qual é a quantidade de aparas de papel, em centímetro quadrado, que restará? (Adote $\pi = 3,14$.) 46,44 cm²

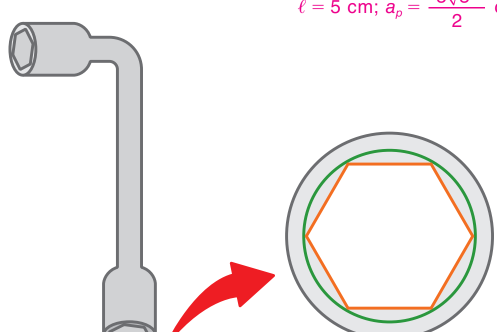
15 A situação ilustrada abaixo sugere um quadrado circunscrito a uma circunferência. Sabendo que o lado do quadrado mede 3,6 cm, calcule a medida do raio dessa circunferência. 1,8 cm



NELSON MATSUDA

16 A ferramenta representada na figura é uma chave *L* número 10. Sabendo que a circunferência destacada em verde tem, na realidade, 5 cm de raio, calcule a medida do lado e do apótema do hexágono destacado na cor laranja. Explique por que essa ferramenta tem esse nome.

$\ell = 5$ cm; $a_p = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm



NELSON MATSUDA

A chave *L* número 10 tem esse nome porque tem o formato da letra *L*, e o número 10 corresponde à medida aproximada do diâmetro da circunferência em milímetros.

Diversificando

Jogo do desenhe ou responda

Número de participantes: 2 jogadores

Material:

- 20 cartas com figuras geométricas (polígono e seus elementos; circunferência e seus elementos – ângulo, mediatriz, bissetriz etc.), com ênfase em figuras estudadas nos capítulos 8 e 9 deste livro. As figuras devem estar identificadas corretamente.
- Um saquinho não transparente para guardar as cartas confeccionadas.
- Papel e lápis para esboçar a figura e marcar os pontos.

Regras:

- Após o sorteio, o primeiro a jogar retira uma carta do saquinho, sem mostrá-la.
- O jogador que tira a carta deve dizer ao outro uma característica da figura para que ele tente adivinhá-la com um desenho ou uma resposta oral. Para cada carta, podem ser dadas até três dicas, uma a cada tentativa. Por exemplo, se a carta tiver um quadrado, o jogador poderá dar as seguintes dicas: “é um quadrilátero”, “tem ângulos opostos congruentes” e “tem todos os lados com medidas iguais”.
- Se um jogador der uma dica errada, perderá 2 pontos.
- Pontuação: ao acertar o nome ou o desenho na 1ª tentativa, o jogador ganha 3 pontos; na 2ª tentativa, ganha 2 pontos; e na 3ª, ganha 1 ponto.
- Após o acerto ou erro na 3ª tentativa, passa-se a vez.
- Vence aquele que completar primeiro 15 pontos. Caso nenhum jogador consiga atingir os 15 pontos, vence aquele que conseguir a maior pontuação.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe o diálogo de Rafael e Karina. De acordo com as regras, o que deverá acontecer com a pontuação de Rafael? Rafael deu uma dica errada e, segundo as regras, ele deve perder 2 pontos.

CLAUDIO CHIYO

2 Se um jogador tirasse uma carta com um hexágono regular, que dica ele poderia dar sobre essa figura? respostas possíveis: “Você pode encontrar um formato parecido na colmeia de abelhas”, ou “A soma das medidas dos ângulos internos é 720°”, ou “Minha figura tem seis lados de mesma medida”.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

Exercícios complementares

Páginas 41 e 42

1. 2^{21}

2. 2^{40} células

3. alternativa **a**

4. alternativa **d**

5. a) $\frac{9}{16}$

b) $\frac{16}{25}$

c) $\frac{16}{9}$

6. a) $\frac{4}{25}$

b) $\frac{8.000}{27}$

7. a) $3 \cdot 10^6$

b) $3 \cdot 10$

8. $1{,}99 \cdot 10^{-23}$ g

9. -14

10. alternativa **b**

11. alternativa **d**

12. construção de figura

13. a) $\left(12 + 12\sqrt{2}\right)$ cm

b) $\left(6\sqrt{2} + 8\right)$ cm^2

c) $\left(4\sqrt{2} + 6\right)$ cm^3

14. 37 passos

15. a) $4\sqrt{2}$

b) $5\left(\sqrt{3} + 1\right)$

c) $\sqrt{5} + 3$

16. A expressão dada coincide com o valor de π até a 5ª casa decimal.

Pense mais um pouco...

Página 17

$3 \cdot 10^4 = 30.000$

$3 : 10^{-4} = \dfrac{3}{10^{-4}} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{10^4}} = 3 \cdot \dfrac{10^4}{1} = 3 \cdot 10^4 = 30.000$

Página 22

a) $1{,}89216 \cdot 10^{13}$ km

b) 500 s

Página 26

a) 2

b) 27

Página 35

a) 27 cubos

b) $1.512\sqrt{7}$ cm^3

Página 41

$3\sqrt{5}$ cm

Para saber mais

Página 36

1. a) $2^{3^3} = 2^{27}$

b) $2^{3^{2^3}} = 2^{3^8} = 2^{6.561}$

c) $(2^3)^4 = 2^{12}$

d) $((3^2)^3)^2 = 3^{12}$

2. a) $(a + b)$^2

b) $a + b$^2

c) $1/(a + b)$

d) $1/a + b$

e) $(a + b)/(c + d)$

f) $a/(c + d) + b$

3. a) $(a + b)$^(1/2)

b) $a + b$^(1/2)

c) $1/(a + b)$^(1/2)

d) $1/a$^(1/2) $+ b$

Diversificando

Página 43

Um truque de mágica? – O que é maior?

1. Na terceira linha, Rafael escreve os mesmos números da segunda linha, mas fatorados. Depois de somar 5^2 a ambos os membros dessa igualdade, ele obtém o quadrado da diferença de dois termos.

2. O erro do cálculo está na passagem da sexta para a sétima linha, pois a raiz quadrada de um número elevado ao quadrado é igual ao módulo desse número. Assim, teríamos a seguinte igualdade: $|4 - 5| = |6 - 5|$; logo: $|-1| = |1|$ e, portanto, $1 = 1$, e não $4 = 6$.

- **a)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$ e $\left(\sqrt[4]{4}\right)^{12} = 4^3 = 64$; como $81 > 64$, então $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

  b) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^4 = 4$ e $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$; como $4 = 4$, então $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

CAPÍTULO 2

Exercícios complementares

Páginas 74, 75 e 76

1. a) $x = 12$ e $y = 21$
b) $x = 12$ e $y = 2$

2. 6,6

3. $CH = 10$

4. construção de figura

5. 14 cm e 12 cm

6. $x = 3{,}75$

7. 21 cm, 28 cm e 35 cm

8. $AB' = 2{,}6$ cm, $B'C' = 3{,}9$ cm e $C'D' = 6{,}5$ cm

9. $x = 6$

10. $BD = 3$ cm e $CD = 4$ cm

11. a) verdadeira
b) falsa; resposta possível: Dois triângulos semelhantes com razão de semelhança diferente de 1 não são congruentes.
c) falsa; resposta possível: Há triângulos retângulos que não são semelhantes, como um triângulo retângulo isósceles e um triângulo retângulo escaleno.
d) verdadeira
e) verdadeira

12. a) $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{3}{2}$
b) $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{9}{4}$

13. 26

14. a) construção de figura
b) 6 m

15. alternativa **b**

16. a) construção de figura
b) $AE = 12$ cm e $EC = 30$ cm

17. 2,5 km

18. 11,25 cm; 15 cm e 18,75 cm

19. 54,6 cm

20. 57,60 m

21. 20 cm

22. alternativa **b**

23. $BD = 9$ cm e $DF = 12$ cm

24. alternativa **b**

25. 20,5 m

26. $C_1C_2 = 8$ cm

27. 225 cm

Pense mais um pouco...

Página 54

1. demonstração

2. construção de figura

3. No exercício 2, foi construído um feixe de retas paralelas, cortado por dois segmentos transversais ($\overline{AP_5}$ e $\overline{AB}$). Como o feixe divide $\overline{AP_5}$ em partes de medidas iguais, pelo teorema de Tales, o feixe também divide $\overline{AB}$ em partes iguais.

Página 57

Devemos programar uma cópia com 120%, isto é, 100% do original mais 20% de ampliação.

Página 60

14,4 cm

Página 63

$\left(12 + 8\sqrt{2}\right)$ cm

Página 71

80 cm; 400 cm^2

Para saber mais

Páginas 46, 47 e 48

A folha no formato A4 e carta não são retângulos áureos.

Páginas 60 e 61

construção de figura

Páginas 72 e 73

construções de figuras

Diversificando

Página 77

Câmara escura de orifício

1. Não é possível calcular, pois as medidas da câmara não são dadas.

2. A distância do quadro até o orifício deve ser 50 cm.

CAPÍTULO 3

Exercícios complementares

Páginas 104, 105, 106 e 107

1. a) construção de tabela
   b) em 4 dias
2. a) construção de tabela
   b) média: 43,5 min; moda: 20 min; mediana: 30 min
   c) 7,5%
3. a) 21, 36 anos
   b) idade modal: 14 anos; idade mediana: 21 anos
   c) construção de gráfico
   c) 39%
4. alternativa **a**
5. alternativa **d**
6. alternativa **a**
7. alternativa **c**
8. alternativa **d**
9. alternativa **e**
10. alternativa **e**
11. aproximadamente 17%
12. alternativa **d**
13. alternativa **d**
14. a) resposta pessoal
    b) 3,5; três colheres e mais uma colher incompleta.
    c) resposta pessoal
15. a) Tanto em 2012 quanto em 2013 essa diferença foi de 7,3 anos.
    b) em nenhum ano
    c) resposta pessoal

Pense mais um pouco...

Página 81

a) 40 atletas
b) 10% para 4,0; 25% para 5,0; 30% para 7,5; 20% para 8,0: 15% para 9,0
c) construção de tabela
d) 10%

Página 103

Basta comparar as possibilidades de vitória de Lucas com as possibilidades de seu desafiante. Lucas tem 11 possibilidades em 36 e seu desafiante tem somente 9 em 36. Portanto, Lucas tem maior probabilidade de vencer que seu desafiante.

Para saber mais

Páginas 100 e 101

1. aproximadamente 680 pessoas
2. Se for considerado que essas 300 mil pessoas estiveram ao mesmo tempo nessa avenida, a estimativa estaria errada, pois teríamos uma densidade de 11,5 pessoas por metro quadrado.
3. resposta pessoal

Trabalhando a informação

Páginas 88 e 89

1. respostas possíveis: política pública de prevenção insuficiente, política educativa para a população insuficiente e falta de conscientização da população etc.
2. aproximadamente 15%
3. 5%

CAPÍTULO 4

Exercícios complementares

Páginas 130 e 131

1. $k \neq -5$
2. a) $2x^2 + 3x = 0$; $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$
   b) $4y^2 - 20y - 25 = 0$; $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$
   c) $7x^2 - 2 = 0$; $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{2}{7}}$
   d) $3x^2 + 12 = 0$; não tem raiz real
3. $x = 8$ cm
4. a) $m = 1$
   b) $m = 5$
5. $x = 1$ ou $x = 0$
6. a) $3x^2 = 4.800$
   b) -40 e 40
   c) 40
7. $4\sqrt{3}$
8. a) $k = \frac{43}{9}$
   b) $k = 12$
   c) $k < \frac{64}{5}$
   d) $k = 12$
9. alternativa **c**
10. alternativa **e**
11. alternativa **b**

12. alternativa **d**

13. alternativa **c**

14. alternativa **a**

15. alternativa **a**

16. alternativa **d**

17. 2 e 3

18. alternativa **a**

19. 12

Pense mais um pouco...

Página 115

$x = 4$; soma = 30

12	3	15
13	10	7
5	17	8

Página 118

6 m e 5 m

Página 124

Como $m = 2{,}5 > 2$, nesse caso a equação não admite raízes reais. Como $m = 1{,}8 < 2$, a equação tem duas raízes reais e diferentes.

Trabalhando a informação

Páginas 129 e 130

1. Sul: 14%, aproximadamente 28.140.000 hab.; Nordeste: 28%, aproximadamente 56.280.000 hab.; Norte: 8,5%, aproximadamente 17.085.000 hab.; Centro-oeste: 7%, aproximadamente 14.070.000 hab.

2. Sudeste: 55% do PIB; Sul: 16% do PIB; Nordeste: 13,5% do PIB; Norte: 5,5% do PIB; Centro-oeste: 10% do PIB.

CAPÍTULO 5

Exercícios complementares

Páginas 148, 149 e 150

1. alternativa **c**

2. 200 m

3. 40 cm

4. a) 250 m
b) 3 km/h

5. $y = \sqrt{69}$

6. a) 8 cm
b) 7,5 cm
c) 25 cm
d) 34,5 cm^2

7. 6 cm

8. $6\sqrt{3}$ m

9. $\left(\frac{45\sqrt{3}}{2} + 9\right)$ cm

10. 108 cm^2

11. Sim, se o lápis for acomodado no sentido da diagonal, que mede 19,2 cm.

12. a) 100 m, 128 m e 96 m
b) 6.144 m^2 e 2.400 m^2
c) 3.744 m^2

13. $4\sqrt{14}$ cm

14. $3\sqrt{5}$ cm

15. alternativa **d**

16. a) 25 u
b) 234 u^2

17. 20,25 u^2

18. alternativa **d**

19. alternativa **c**

20. 15 cm e 20 cm

21. $\sqrt{5}$ cm

22. 46 km

23. 20 cm^2

24. alternativa **b**

25. alternativa **d**

26. alternativa **d**

27. alternativa **b**

28. alternativa **e**

29. alternativa **c**

Pense mais um pouco...

Página 138

triângulos azuis: 34,1 cm; triângulo laranja: 24,1 cm; triângulos verdes: 17,05 cm; paralelogramo: 24,1 cm; quadrado: 20 cm

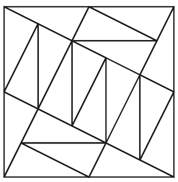
Página 141

1. $3\sqrt{3}$ cm

2. demonstração

Página 142

$\left(2x\sqrt{5}\right)$ cm;



NELSON MATSUDA

Para saber mais

Páginas 138 e 139

a) respostas possíveis: 20 cm e 25 cm; 8 cm e 17 cm; 36 cm e 39 cm; 112 cm e 113 cm
b) 84 cm e 294 cm^2
c) 27 cm, 36 cm e 45 cm
d) construção de quadro

Trabalhando a informação

Páginas 146 e 147

1. **a)** não
b) Maior, pois a população terá envelhecido.
c) Sim; resposta possível: a aposentadoria, a pensão e a assistência médica e hospitalar aos idosos serão mais onerosas e terão menos contribuintes para lhes dar suporte.

2. resposta pessoal

Diversificando

Página 151

Uma quase circunferência!

Dividir os lados em um número maior de pontos.

CAPÍTULO 6

Exercícios complementares

Páginas 169, 170 e 171

1. sen 55° = 0,8; cos 55° = 0,6; tg 55° = 1,4

2. **a)** 15
b) 7,8
c) 30°

3. alternativa **b**

4. 25,3 cm

5. 26,31 cm

6. 1,40 m

7. 83 m^2

8. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

9. **a)** $\dfrac{40}{3}\sqrt{3}$ m
b) 23 m

10. 102,2 m

11. alternativa **e**

12. $400\sqrt{3}$ cm^2

13. entre 4 e 6

14. 45°

15. alternativa **c**

16. **a)** 60 m
b) 34,6 m

17. $10\left(75\sqrt{3} - 62\right)$ m

18. $48\sqrt{3}$ cm^2

19. 2,66 km

20. alternativa **b**

21. 120 m; resposta pessoal

22. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

23. alternativa **b**

24. alternativa **a**

Pense mais um pouco...

Página 159

1. **a)** 40°
b) 53°
c) 62°

2. $m(A\hat{B}C) \simeq 40°$; $m(B\hat{M}C) \simeq 121°$; $m(B\hat{C}M) \simeq 19°$

Páginas 162 e 163

1. a) 108°; 54°
   b) 8,9 cm; 16,18 cm; 16,18 cm

2. a) 1,618
   b) • 16,18 cm; • 26,18 cm; • 1,618
   c) 26,18 cm; 42,36 cm; 1,618
   d) construção de figuras
   e) resposta pessoal

Para saber mais

Páginas 163 e 164

1) 4,75 m 2) 21,5 m

Trabalhando a informação

Páginas 168 e 169

380 m, 210 m

CAPÍTULO 7

Exercícios complementares

Páginas 205 e 206

1. $y = x^2 + x + 6$

2. $\frac{3}{5}$

3. 100

4. a) $y = 3{,}80 + 0{,}70x$
   b) $y = 4{,}30 + 0{,}60x$
   c) R$ 10,80
   d) o táxi da cidade de Júlia
   e) 5 km

5. a) -2
   b) 1
   c) 2
   d) -1
   • sim

6. a) $\frac{4}{7}$
   b) construção de gráfico
   c) $\frac{6}{7}$
   d) $x > \frac{4}{7}$

7. a) $x > 3$
   b) $x < 2$
   c) $x = \frac{12}{5}$
   d) $x > \frac{12}{5}$

8. a) 3
   b) $x < -\frac{5}{6}$

9. alternativa **b**

10. alternativa **e**

11. a) 1
    b) construção de gráfico
    c) $x = 0$ ou $x = 2$
    d) para $x \neq 1$

12. a) $c = 10$
    b) $y = t^2 - 7t + 10$
    c) 3,5 minutos

13. alternativa **d**

14. 25

15. alternativa **b**

16. alternativa **b**

17. alternativa **b**

18. 200 m^3

19. alternativa **a**

20. 500 unidades

21. a) $m < -1$
    b) $m = \frac{1}{4}$

Pense mais um pouco...

Página 177

a) $y = x \cdot 450$
b) 495 km
c) Natal
d) Brasília, Florianópolis, Curitiba, São Paulo, Rio de Janeiro, Campo Grande, Goiânia, Palmas, Aracaju, Salvador, Vitória

Página 183

a) construção de tabela
b) construção do gráfico
c) resposta pessoal
d) Não. Porque a quantidade de revistas é uma grandeza discreta, ela é representada pelos números naturais e não pelos reais.

Página 187

1. a) $-\frac{1}{3}$
   b) 3
   c) 1
   d) 1

2. a) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; (0, 1)
   b) (2, 0); (0, 6)
   c) não
   d) Não existe valor de x para $h(x) = i(x)$.

Página 203

13 pessoas

Para saber mais

Páginas 189 e 190

1. j = R$ 2.880,00
2. 12 meses (ou 1 ano)
3. R$ 10.323,86

Página 204

1. $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$ ou $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$
2. 4 ou -1
3. 49 cm^2

Diversificando

Página 207

Cercando

a) construção de tabela
b) 4; 32 m^2
c) construção de figura
d) máximo
e) A ordenada do vértice é a área máxima.
f) $x = 5$ m e $y = 10$ m; A área encontrada é 50 m^2.
g) resposta pessoal

CAPÍTULO 8

Exercícios complementares

Páginas 221 e 222

1. 62,8 m
2. a) $\simeq 678{,}24$ m
   b) $\simeq 542{,}59$ m
3. 396,8 km
4. 14,13 m/s
5. alternativa **e**
6. 40.000 km
7. $\sqrt{55}$ cm
8. alternativa **b**
9. 96
10. $C = 11\pi$
11. $\sqrt{11}$
12. 8,5
13. 16 cm
14. alternativa **c**

Pense mais um pouco...

Página 211

26,4 cm

Página 217

1. $20\sqrt{2}$ cm
2. 800 cm^2

Trabalhando a informação

Página 223

construção de tabela e de gráfico

CAPÍTULO 9

Exercícios complementares

Páginas 249, 250 e 251

1. 4 cm
2. $28\sqrt{2}$ m
3. $14\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$ cm
4. $AB = 4$ e $AD = 4\sqrt{2}$
5. 10 cm
6. a) 4 cm
   b) 4 cm
   c) $4\sqrt{3}$ cm
7. a) 3,8125 cm^2
   b) 25,12 cm^2

c) 5,8136 cm^2
d) 2,88 cm^2

8. $8\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm

9. 108π cm^2

10. a) 6 cm^2
b) resposta pessoal; O círculo terá 1,38 cm de raio.

11. 6,28 cm^2

12. a) 30°
b) 9,70 cm; 5,20 cm
c) 0,4 cm
d) 302,64 cm^2

13. 18 cm^2

14. a) 6 círculos
b) 46,44 cm^2

15. 1,8 cm

16. $\ell = 5$ cm; $a_p = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; A chave L número 10 tem esse nome porque tem o formato da letra L, e o número 10 corresponde à medida aproximada do diâmetro da circunferência em milímetros.

Pense mais um pouco...

Página 240

51,47 cm^2

Página 243

alternativas **c**, **d**; área: $\dfrac{9\pi}{2}$ cm^2

Página 247

- 8.792 cm^2
- 11.304 cm^2

Diversificando

Página 252

Jogo do desenhe ou responda

1. Rafael deu uma dica errada e, segundo as regras, ele deve perder 2 pontos.
2. respostas possíveis: “Você pode encontrar um formato parecido na colmeia de abelhas”, ou “A soma das medidas dos ângulos internos é 720°”, ou “Minha figura tem seis lados de mesma medida”.

LISTA DE SIGLAS

Covest-PE – Comissão do Vestibular das Universidades Federal e Federal Rural de Pernambuco
Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
ESPM-SP – Escola Superior de Propaganda e Marketing
Etec-SP – Escola Técnica Estadual
FCC-SP – Fundação Carlos Chagas de São Paulo
FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial
Fesp-SP – Fundação Escola de Sociologia e Política de São Paulo
FGV-SP – Fundação Getúlio Vargas
Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular
Mackenzie-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie
OM-ABC – Olimpíada de Matemática do Grande ABC
Puccamp-SP – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Saresp – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UCSal-BA – Universidade Católica do Salvador
UCS-RS – Universidade de Caxias do Sul
Uece – Universidade Estadual do Ceará
UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina
Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ – Universidade Federal Fluminense
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco
UFPR – Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFSE – Universidade Federal de Sergipe
UFSM-RS – Universidade Federal de Santa Maria
UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa
Ulbra-RS – Universidade Luterana do Brasil
Unicamp-SP – Universidade Estadual de Campinas
Unifor-CE – Universidade de Fortaleza
Unirio-RJ – Fundação Universidade do Rio de Janeiro
Unopar-PR – Universidade Norte do Paraná
UPF-RS – Universidade de Passo Fundo
USF-SP – Universidade São Francisco
Vunesp – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ALUNO

GUELLI, Oscar. *Dando corda na trigonometria*. São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *Equação: o idioma da Álgebra*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *História da equação do 2º grau*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *História de potências e raízes*. São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Equação do 2º grau*. São Paulo: Atual, 2004. (Coleção Pra que serve Matemática?)

______. *Estatística*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

______. *Semelhança*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

MACHADO, Nílson José. *Lógica? É lógico!* São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

______. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

______. *Semelhança não é mera coincidência*. São Paulo: Scipione, 2006. (Coleção Vivendo a Matemática)

ROSA Neto, Ernesto. *As mil e uma equações*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

______. *Em busca das coordenadas*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

______. *Saída pelo triângulo*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas*: *uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo, CAEM-USP, 1995.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC; SEF, 1998.

CASTRUCCI, Benedito. *Fundamentos da geometria*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1998.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995.

FRANCISCO, Walter de. *Estatística básica*. Piracicaba: Unimep, 1995.

GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. Nova York: Dover, 1972.

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2004.

______. *Censo demográfico 2000: resultados preliminares*. Rio de Janeiro: IBGE, 2000.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1994.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *O ensino da Matemática no primeiro grau.* São Paulo: Atual, 1986.

PÈNE, N.; DEPRESLE, P. *Décimale*. Paris: Belin, 1996. Math 6.

ROSA Neto, Ernesto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1996.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. *Álgebra*: *das variáveis às equações e funções*. São Paulo: CAEM-USP, 1996.

SOUZA, E. R. et al. *A Matemática das sete peças do tangram*. São Paulo: CAEM-USP, 1997.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

WALDEGG, G.; VILLASEÑOR, R.; GARCÍA, V. *Matemáticas en contexto*: *aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Cidade do México: Iberoamérica, 1999.

SUPLEMENTO COM ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

9º ano

MODERNA

Sumário

Parte geral - Orientações para o professor

Parte específica - Orientações gerais para o desenvolvimento dos capítulos

Parte geral - Orientações para o professor

Apresentação

Professor(a),

Como material de apoio à prática pedagógica, este Suplemento traz, de forma concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do aluno como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que ele o(a) auxilie no melhor aproveitamento e na compreensão das diretrizes pedagógicas que nortearam a atualização dos quatro volumes desta coleção.

Este Suplemento também discute variadas propostas de avaliação da aprendizagem sob a luz dos atuais *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN). Além disso, oferece indicações de leituras complementares e *sites* de centros de formação continuada, na tentativa de contribuir para a ampliação de seu conhecimento e sua experiência e para sua constante atualização.

As características da coleção, assim como as escolhas didáticas da obra, as opções de abordagem e os objetivos educacionais a alcançar são, também aqui, expostos e discutidos.

A coleção

Esta coleção tem como principal objetivo servir de apoio ao(à) professor(a) no desenrolar da prática didática e oferecer ao aluno um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos.

Através do desenvolvimento dos conteúdos curriculares próprios do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, a obra procura possibilitar ao aluno a aquisição do conhecimento matemático e subsidiar o trabalho docente. Nesse sentido, dispensa especial importância à apreensão de conceitos de forma precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para as noções de maior importância, cuidando da linguagem para que não sejam geradas dificuldades nas aprendizagens posteriores.

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o aluno a dar conta da totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de "esgotar" o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas dos conteúdos, não apenas com o objetivo de revisão, mas de complementação e aprofundamento dos conhecimentos desses conteúdos, de forma que o aluno possa ter diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos.

Em relação à abordagem, a apresentação de cada conteúdo é clara e objetiva, buscando situações contextualizadas e problematizadoras que possibilitem ao aluno estabelecer relações da Matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano, com sua realidade social e entre os diversos campos conceituais da própria Matemática.

Essa contextualização abarcou situações comuns, vivenciadas pelos jovens em seu cotidiano, assim como informações mais elaboradas, que costumam aparecer nos grandes veículos de comunicação. A obra tem por objetivo, assim, contribuir para a formação global do educando, de modo que, enquanto assimila e organiza os conteúdos próprios da Matemática, coloque em prática, sempre que possível, suas capacidades reflexiva e crítica, inter-relacionando tanto os tópicos matemáticos entre si quanto estes com os de diferentes áreas do saber. O intento é colaborar de forma proficiente para a solidificação do conhecimento matemático e para o desenvolvimento da plena cidadania e da participação positiva na sociedade.

Na sequência, os conceitos teóricos são desenvolvidos e entremeados por blocos de exercícios e, algumas vezes, com atividades de outra natureza em algumas seções. A distribuição dos exercícios em diferentes seções procura facilitar e flexibilizar o planejamento do trabalho docente, bem como possibilitar ao aluno desenvolver habilidades diversas.

As atividades também foram pensadas segundo o mesmo viés da exposição teórica, intercalando-se às mais convencionais, de aplicação direta do aprendizado, algumas propostas que contemplam temas transversais pertinentes, abrangendo informações de outras áreas, como Biologia, Ecologia, Economia, História, Geografia, Política, Artes, Ciências e Tecnologia.

As seções de cada capítulo se inter-relacionam conforme o desenvolvimento do conteúdo abordado e são adequadas à profundidade do tema visto em cada ano escolar.

A obra procura trazer um número suficiente de exercícios, possibilitando a sistematização dos procedimentos e a reflexão sobre os conceitos em construção. Os exercícios procuram abordar diferentes aspectos do conceito em discussão por meio de variados formatos, apresentando, quando possível, questões abertas, que dão oportunidade a respostas pessoais, questões que apresentam mais de uma solução ou aquelas cuja solução não existe. Da mesma forma, há exercícios que colocam o aluno em ação, possibilitando o desenvolvimento de argumentações, a abordagem de problemas de naturezas diversas e as discussões entre colegas e em grupos de trabalho. O professor tem, então, uma gama de questões a seu dispor para discutir os conceitos matemáticos em estudo.

É importante reafirmar que, ao longo de toda a coleção, houve preocupação explícita com a precisão e a concisão da linguagem. A abordagem dos conteúdos procurou ser clara, objetiva e simples, a fim de contribuir adequadamente para o desenvolvimento da Matemática escolar no nível do Ensino Fundamental. Além do correto uso da língua materna e da linguagem propriamente matemática, procuramos auxílio da linguagem gráfica, com ilustrações, esquemas e diagramas que auxiliem a aprendizagem pelas mudanças dos registros de representação.

Objetivos gerais da obra

- Apresentar a Matemática, em seus diversos usos, como uma das linguagens humanas, explorando suas estruturas e seus raciocínios.
- Introduzir informações que auxiliem a apreensão de conteúdos matemáticos, com vistas à sua inserção em um corpo maior de conhecimentos e à sua aplicação em estudos posteriores.
- Possibilitar ao aluno o domínio de conteúdos matemáticos, os quais lhe deem condições de utilização dessa ciência no cotidiano e na realidade social.
- Propiciar, com o auxílio do conhecimento matemático, o desenvolvimento das múltiplas habilidades cognitivas do aluno, preparando-o como pessoa capaz de exercer conscientemente a cidadania e de progredir profissionalmente.
- Desenvolver hábitos de leitura, de estudo e de organização.

Estrutura da obra

A coleção é composta por quatro volumes, que cobrem do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental. Os conteúdos estão distribuídos em capítulos. Cada capítulo enfatiza conteúdos referentes a um dos seguintes eixos da Matemática:

- números e operações;
- grandezas e medidas;
- espaço e forma;
- tratamento da informação.

No entanto, sempre que possível, em um mesmo capítulo aparecem conteúdos relacionados a mais de um eixo.

Na maioria das unidades, encontram-se também as seguintes seções:

- **Pense mais um pouco...**

  Atividades e desafios de aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos na unidade. Essas atividades solicitam do aluno um pensamento mais elaborado, com a criação de estratégias pessoais de resolução.

- **Para saber mais**

  Conteúdos e atividades que, fundamentados em contextos diversos, integram a Matemática a outras áreas do saber. A seção geralmente é finalizada por **Agora é com você!**, proposta de exercícios relacionados com o tema exposto.

- **Trabalhando a informação**

  Os conteúdos de Estatística e de tratamento da informação, como arredondamentos, tabelas, gráficos e probabilidades, são trabalhados nessa seção.

- **Diversificando**

  Esta seção apresenta atividades que diversificam o conteúdo trabalhado no capítulo, relacionando a outros contextos, como jogos, aplicações e desafios.

As atividades presentes na coleção — distribuídas entre **Exercícios propostos**, **Exercícios complementares** e **Diversificando** — foram pensadas com o intuito de:

- estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas;
- propor temáticas atuais relevantes à faixa etária a que a obra se destina.

Essa estrutura de obra pretende ser organizadora do trabalho docente sem, contudo, tornar-se uma "camisa de força" para alunos e professores. Por isso, os capítulos contemplam aspectos fundamentais a serem trabalhados com os alunos, mas oferecem maleabilidade e flexibilidade em sua abordagem, na tentativa de facilitar o trabalho do(a) professor(a) em fazer as necessárias adaptações a cada turma.

A importância de aprender Matemática

Ao construir sua história, o homem tem modificado e ampliado constantemente suas necessidades, individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura. O corpo de conhecimentos desenvolvido nesse longo trajeto ocupa lugar central no cenário humano. No que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, muitos continuam atravessando os séculos, enquanto outros já caíram em desuso, e há outros que ainda estão sendo incorporados ao rol de conteúdos necessários ao desenvolvimento de nossas ações cotidianas — afinal, fomos absorvendo práticas cada vez mais novas, que solicitam a ampliação e o aprofundamento de conhecimentos matemáticos.

Até algumas décadas atrás, "saber bem" Matemática implicava basicamente dominar e aplicar as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na atualidade, contudo, as pesquisas educacionais e as diretrizes pedagógicas oficiais apontam para a necessidade de que, em todos os anos da Educação Básica, a escola trabalhe conteúdos dos eixos números e operações, grandezas e medidas, espaço e forma, e tratamento da informação, tendo como referência os temas transversais.

Na perspectiva mundial da permanente busca de melhor qualidade de vida, a Matemática, sobretudo em seus aspectos essenciais, contribui de modo significativo para a formação do cidadão crítico e autoconfiante, com compreensão clara dos fenômenos sociais e de sua atuação na sociedade.

Para entender a real importância da Matemática, basta pensar em nosso cotidiano. É fácil fazer uma longa lista de ações nas quais precisamos mobilizar os conhecimentos desse campo: calcular uma despesa para efetuar seu pagamento; examinar diferentes alternativas de crédito; estimar valores aproximados; calcular medidas e quantidades com alguma rapidez; compreender um anúncio ou uma notícia apresentados por meio de tabelas e gráficos; analisar criticamente a validade de um argumento lógico; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico ou estatístico; decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema; orientarmo-nos no espaço (para deslocamentos ou indicações de trajetórias), entre tantas outras situações.

Podemos afirmar que a maior parte das sociedades de hoje depende cada vez mais do conjunto de conhecimento produzido pela humanidade, incluindo de maneira notável as contribuições da ciência matemática. Ao mesmo tempo, esse arcabouço cultural revigora-se incessantemente, com grande diversificação e sofisticação. Os apelos de um mundo que se transforma em incrível velocidade, em uma crescente variedade de domínios, constituem uma das razões mais significativas para o maior desafio dos educadores: preparar os jovens para uma atuação ética e responsável, balizada por uma formação múltipla e consistente.

Matemática acadêmica × Matemática escolar

No âmbito específico da Matemática, há muito mais conhecimento já estabelecido do que o que chega à sala de aula. A seleção desses conhecimentos-conteúdos e a forma de apresentá-los aos estudantes exigem bom senso e uma série de estudos e adaptações.

Em sua formação inicial, na universidade, o futuro professor de Matemática tem contato simultâneo com a **Matemática acadêmica** e a **Matemática escolar**. No entanto, em seu exercício profissional, o destaque será para a Matemática escolar; daí a relevância de procurarmos entender a distinção entre ambas.

De acordo com Moreira e David (2003), a Matemática acadêmica, ou científica, é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais. Nesse caso, as demonstrações, definições e provas de um fato e o rigor na linguagem utilizada ocupam papel relevante, visto que é por meio deles que determinado conhecimento é aceito como verdadeiro pela comunidade científica.

No caso da Matemática escolar, há dois aspectos fundamentais que modificam significativamente o papel do rigor nas demonstrações. O primeiro refere-se ao fato de a "validade" dos resultados matemáticos, que serão apresentados aos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, não ser colocada em dúvida; ao contrário, já está garantida pela própria Matemática acadêmica. O segundo aspecto diz respeito à aprendizagem; neste caso, o mais importante é o desenvolvimento de uma prática pedagógica que assegure a compreensão dos conteúdos matemáticos essenciais, assim como a construção de justificativas que permitam ao jovem estudante utilizá-los de maneira coerente e conveniente, tanto na vida escolar quanto na cotidiana.

O pensador Jules Henri Poincaré também discute a diferença entre o rigor necessário e conveniente à Matemática científica e o rigor adequado a um processo educativo. Para ele, uma boa definição é aquela que pode ser entendida pelo estudante. Além disso, deve-se considerar, no contexto escolar, a necessidade e a oportunidade de apresentar uma definição formal para os conteúdos matemáticos em estudo.

Segundo os PCN (1998),

> *[...] Tornar o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. [...]*
>
> (BRASIL, 1998, p. 36)

Nessa perspectiva, facilitar a aprendizagem com definições mais descritivas e metodologias adequadas ao nível de escolarização do aluno e proceder à avaliação desse processo são elementos fundamentais da práxis da Matemática escolar.

A Matemática como disciplina do currículo escolar do Ensino Fundamental

Nos currículos da Educação Básica, a Matemática está presente como objeto de estudo desde o início da escolarização. Em nossa cultura, está enraizada a ideia de que é necessário ensiná-la para todas as crianças. Mas, enfim, qual Matemática? E para quê?

Ao professor de Matemática é fundamental refletir sobre o que é ensinado aos alunos da disciplina no nível elementar, isto é, no Ensino Fundamental. Entender por que consideramos importante desenvolver na escola determinados saberes matemáticos em detrimento de outros e por que escolhemos dedicar um tempo maior a alguns conteúdos e menor a outros pode auxiliar o planejamento didático e orientar a prática pedagógica.

Partimos da proposição de que uma característica da Matemática é ser uma linguagem humana e, como forma linguística, tem o poder de decodificar, traduzir e expressar o pensamento humano.

A palavra ***matemática*** vem do grego *mathematike* e, em sua origem, estava ligada ao ato de aprender, pois significava "tudo o que se aprende", enquanto ***matemático***, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém "disposto a aprender". O verbo ***aprender*** era originalmente, em grego, *manthanein*, mas hoje o radical *math*, antes presente nas palavras ligadas à aprendizagem, parece ter perdido essa conotação, do que talvez resulte a ideia geral de que a Matemática é uma disciplina que lida apenas com números, grandezas e medidas e que se aprende na escola de forma compulsória.

Na realidade, a Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja,

> *[...] a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar. É por isso que a Matemática, assim como a alfabetização, é algo que deveria ser tornado disponível para todos [...].*
>
> (NUNES; BRYANT, 1997, p. 105)

Ou seja, a Matemática é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio na sociedade.

Um ponto crucial a considerar é que as formas de pensar características da Matemática podem expandir-se para outros raciocínios, impulsionando a capacidade global de aprendizado. Ao lidar com a Matemática, fundamentamos o pensamento em um conjunto de axiomas, na geração e validação de hipóteses, no desenvolvimento de algoritmos e procedimentos de resolução de problemas — ferramentas aplicáveis a um conjunto de situações similares —, estabelecendo conexões e fazendo estimativas. Analisando situações particulares e inserindo-as na estrutura global, é possível construir estruturas de pensamento também úteis em situações não matemáticas da vida em sociedade.

Hoje sabemos da importância de o indivíduo aprender continuamente, durante toda a vida, para assimilar as incessantes inovações do mundo moderno e, desse modo, realimentar seu repertório cultural. Em um ambiente mundial cada vez mais competitivo e desenvolvido do ponto de vista tecnológico, é preciso tornar acessíveis a todas as pessoas as vantagens desses avanços. E é responsabilidade também da escola levar o aluno a perceber criticamente a realidade, cuja interpretação depende da compreensão de sua estrutura lógica, do entendimento da simbologia adotada no contexto, da análise das informações veiculadas por dados numéricos, imagens, taxas, indexadores econômicos etc. Um indivíduo com poucos conhecimentos matemáticos pode estar privado de exercer seus direitos como cidadão, por não ter condições de opinar em situação de igualdade com os demais membros da sociedade, nem de definir seus atos políticos e sociais com base em uma avaliação acurada da situação.

No ensino da Matemática, assumem grande importância aspectos como o estímulo a relacionar os conceitos matemáticos com suas representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); a motivação para identificar no mundo real o uso de tais representações; o desafio à interpretação, por meio da Matemática, da diversidade das informações advindas desse mundo.

A Matemática no currículo

A importância de ensinar Matemática no Ensino Fundamental, conforme indicam os PCN, decorre também da contribuição que a disciplina representa na formação do cidadão. Por isso, um currículo de Matemática

> *[...] deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente [...]*
>
> (BRASIL, 1998, p. 30)

Diversos pesquisadores e profissionais ligados à Educação Matemática têm procurado sintetizar o papel social do ensino dessa disciplina. Na literatura, segundo Ponte (2002), cabem ao ensino da Matemática quatro diferentes papéis:

- instrumento da cultura científica e tecnológica, fundamental para profissionais como cientistas, engenheiros e técnicos, que utilizam a Matemática em suas atividades;
- filtro social para a continuação dos estudos e seleção para as universidades;
- instrumento político, como símbolo de desenvolvimento e arma de diversas forças sociais, que utilizam as estatísticas do ensino da Matemática para seus propósitos;
- promotora do desenvolvimento dos modos de pensar a serem aplicados na vida cotidiana e no exercício da cidadania.

É evidente que cada um desses papéis serve a diferentes interesses e finalidades. Contudo, considerando os indivíduos seres sociais, é o último desses papéis o mais importante e o que mais nos interessa. Como explica Ponte:

> *Incluem-se aqui os aspectos mais diretamente utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isto sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância.*
>
> (Ibidem)

A função de promotora dos modos de pensar, porém, não se concretiza na prática somente por estar explicitada no currículo e nos programas.

> *O sistema de avaliação, os manuais escolares e a cultura profissional dos professores podem influenciar de tal modo as práticas de ensino que as finalidades visadas pelo currículo em ação, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é solenemente proclamado nos textos oficiais.*
>
> (Ibidem)

Ponte, ao discorrer sobre esses papéis, analisa em particular a função de filtro de alunos – “a verdade é que este papel de instrumento fundamental de seleção tem pervertido a relação dos jovens com a Matemática” (ibidem) –, que passam a enxergá-la como obstáculo a ser transposto para a conquista de objetivos, em vez de entendê-la como aliada nesse processo. Ponte enfatiza a importância de identificar os fatores que originam o insucesso dos alunos em Matemática. Para o pesquisador, tais fatores estão relacionados com:

- a crise da escola como instituição, que se reflete na aprendizagem em geral e na Matemática em particular;
- aspectos de natureza curricular — tradição pobre de desenvolvimento curricular de Matemática; insuficiente concretização prática e caráter difuso das finalidades do aprendizado;
- o próprio fato de a Matemática constituir-se em instrumento de seleção, o que, de imediato, desencanta e amedronta o aluno;
- questões ligadas à formação dos professores.

O papel do livro didático

Entendemos que, em geral, os recursos presentes nas salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do aluno. Neste caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando grande parte desse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de atividades e exercícios. Assim, o livro didático passaria a ser um contribuinte no processo de ensino-aprendizagem, como mais um interlocutor para o diálogo entre educador e educando.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, não pode se tornar uma "camisa de força"; seu uso deve ser intercalado com outros recursos de modo que enriqueça o trabalho do professor.

Concordamos com Romanatto (2004) quando diz que, partindo do princípio de que o verdadeiro aprendizado apoia-se na compreensão, e não na memória, e de que somente uma real interação com os alunos pode estimular o raciocínio e o desenvolvimento de ideias próprias em busca de soluções, cabe ao professor aguçar seu espírito crítico perante o livro didático.

Por todas essas razões, é importante que o professor de Matemática, ao adotar um livro didático, verifique se ele está de acordo com seus objetivos e se mantenha atento em não deixar que esse livro comprometa sua autonomia didática.

Temas transversais

As atuais e inúmeras discussões na área educacional têm nos alertado sobre mudanças na forma de conceber a Educação Básica no mundo. No que diz respeito à Educação Matemática, podemos dizer que ela atravessa um grato momento de revitalização:

> *Novos métodos, propostas de novos conteúdos e uma ampla discussão dos seus objetivos fazem da Educação Matemática uma das áreas mais férteis nas reflexões sobre o futuro da sociedade.*
>
> (D'AMBRÓSIO, 2000)

Uma proposta inovadora para o trabalho de conhecimentos diversificados foi sintetizada nos PCN, que orientam a incorporação de **temas transversais** às propostas curriculares das escolas de Educação Básica.

A orientação de introduzir e interligar no âmbito escolar temas como Trabalho e consumo, Orientação sexual, Pluralidade social, Ética, Meio ambiente e Saúde traz efetivas possibilidades de expansão dos currículos, para além dos conteúdos das disciplinas tradicionais.

Claro que a seleção dos temas transversais não se restringe aos temas propostos oficialmente e que não é possível trabalhar com todas as sugestões em um único ano. Eles podem ser escolhidos de acordo com as necessidades dos estudantes e da comunidade em que estão inseridos.

O importante é ter em vista que, por meio dos temas transversais, é possível incluir as questões sociais nos currículos escolares. Dessa perspectiva, os conteúdos trabalhados em cada disciplina ganham novo papel; o aprendizado da Matemática, entre outras abordagens, concorre para a formação da cidadania e, consequentemente, para um entendimento mais amplo da realidade social.

Por compreender a importância do trabalho com temas transversais, esta coleção procura, na medida do possível, incorporar e discutir alguns conteúdos matemáticos em contextos diversificados.

Propostas didáticas

Os tópicos a seguir destinam-se a oferecer suporte à discussão sobre as atuais tendências de ensino, que priorizam a globalidade da formação educacional, no sentido de capacitar os jovens para a positiva atuação na sociedade.

A resolução de problemas

O trabalho com a resolução de problemas é um dos destaques do ensino matemático contemporâneo. Para atender aos pressupostos de uma educação globalmente formadora, o "problema matemático" deve, sempre que possível, ser apresentado em um contexto desafiador, que faça sentido ao aluno, possibilitando a mobilização dos conteúdos estudados na busca de soluções e, sobretudo, abrindo espaço para a criação de estratégias pessoais e para a produção de novos conhecimentos.

De acordo com os PCN, resolver um problema pressupõe que o aluno:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros alunos;
- valide seus procedimentos.

Nesta coleção, procuramos entremear aos exercícios convencionais, de pura fixação do conteúdo, aqueles que associam os contextos matemáticos aos de outras áreas do conhecimento. A constante recorrência a imagens, gráficos e tabelas, muitos deles publicados em mídias atuais, tem por objetivo estimular os alunos a estabelecer conexões razoáveis com o mundo em que vivem.

Dentro da mesma proposta, algumas unidades também apresentam jogos desafiadores, já que a atividade lúdica na sala de aula tem sido apontada como parte da estratégia de ensino, pois, além do prazer inerente ao jogo, promove um efetivo desenvolvimento cognitivo ao propiciar, entre outros benefícios:

- a introdução e (re)significação de conceitos;
- a descoberta de estratégias de resolução de problemas;
- o estímulo à tomada de decisões;
- a interação social;
- o conhecimento da própria forma de pensar.

É importante lembrar que, para as atividades lúdicas alcançarem os efeitos esperados, são necessários alguns cuidados, como: a análise do conteúdo do jogo; a escolha do momento adequado — momento real e momento do aprendizado; a organização da sala de aula; e as necessárias intervenções pedagógicas.

O uso da calculadora nas aulas de Matemática

Esta coleção sugere o uso da calculadora como auxiliar na resolução de problemas. Das tecnologias disponíveis na escola, a calculadora é sem dúvida uma das mais simples e de menor custo.

É importante salientar que, como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem, a calculadora é somente mais um recurso auxiliar, e não um substituto do exercício do raciocínio ou da capacidade analítica. O que propomos é o uso da calculadora de maneira consciente, de modo que contribua para a reflexão dos conteúdos matemáticos.

De acordo com os PCN, alguns estudos recentes evidenciaram que a calculadora pode ser utilizada como instrumento motivador na realização de atividades exploratórias e investigativas e, assim, contribuir para a melhoria do ensino.

Podemos tomar como orientação para o uso da calculadora em atividades matemáticas os seguintes aspectos:

- É um instrumento que possibilita o desenvolvimento de conteúdos pela análise de regularidades e padrões e pela formulação de hipóteses.
- É um facilitador da verificação e análise de resultados e procedimentos.
- Sua manipulação e utilização são, em si, conteúdos a serem aprendidos.

Sugerimos que, inicialmente, o(a) professor(a) verifique o conhecimento que os alunos têm sobre o funcionamento da calculadora. O ideal é que a escola disponha de calculadoras simples, que ofereçam as funções básicas. Caso não seja possível disponibilizar uma calculadora para cada aluno, pode-se trabalhar em duplas ou a critério do(a) professor(a).

As atividades sugeridas pela coleção pressupõem um uso simples da calculadora, o que, no entanto, poderá ser ampliado de acordo com as necessidades e interesses de cada turma.

O trabalho em grupo

O trabalho em grupo, quando orientado e praticado adequadamente, além de contribuir para o desenvolvimento da habilidade de interação e participação social, auxilia no cultivo de habilidades que dependem do confronto e da partilha de ideias, já que oferece a oportunidade de provar resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos de resolução e validar ou não o pensamento na busca de soluções.

Além de reforçar a aprendizagem conceitual, o trabalho em grupo contribui para o aprimoramento do desenvolvimento de procedimentos e atitudes, tanto em relação ao pensar matemático quanto em relação à dinâmica grupal.

Pesquisas acerca dos processos de aprendizagem indicam que, mesmo com o exercício em grupo, acaba prevalecendo o aprendizado individual, que apenas se enriquece com as múltiplas contribuições geradas pelo trabalho grupal, pela interação entre diferentes modos de pensar.

Repetimos que, de qualquer modo, o sucesso do trabalho em grupo depende notavelmente do planejamento e da supervisão pedagógica, respeitados os diferentes tipos de aprendizes. No intuito de colaborar com a atuação do professor em sala de aula, esta coleção preocupou-se em indicar, pontualmente, as atividades que mais possibilitam a exploração em grupo.

Outras possibilidades de trabalho

Como já exposto, entendemos o livro didático como apoio do trabalho pedagógico. Nessa perspectiva, o conhecimento, a experiência e a autonomia profissional fazem do docente um coautor do material publicado. Assim, a despeito das propostas explícitas da coleção, o(a) professor(a) sempre poderá ampliar, complementar e inovar no desenvolvimento e nas discussões dos temas e atividades sugeridos, aproveitando as novas questões que emergem em sala de aula no desenrolar do estudo.

É sempre bom lembrar que o estímulo à imaginação e ao interesse dos alunos conta com uma gama interessante de recursos didáticos, como o trabalho com jogos ou com materiais manipulativos, vídeos e ferramentas da informática; a pesquisa em livros paradidáticos, dicionários, periódicos (jornais, boletins, revistas de informação geral e especializada) e internet; ou as propostas para a realização de feiras, gincanas e exposições.

A avaliação e as práticas avaliativas

O cenário de ampla discussão dos modelos e das práticas pedagógicas que se estabeleceu nos últimos anos de nossa história trouxe à tona um ponto vital para o estabelecimento de novas formas de pensar a educação: as concepções e os métodos de **avaliação da aprendizagem**.

Quanto à importância da avaliação, tomamos emprestadas as palavras de Regina Pavanello e Clélia Nogueira:

> *Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao aluno, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.*
>
> *[...] Acreditamos que poucos educadores e educandos têm consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural aos seres humanos, de que os homens se avaliam constantemente, nas mais diversas situações, diante da necessidade de tomar decisões, desde as mais simples até as mais complexas.*
>
> (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 30, 36)

As divergências, contudo, têm início quando se pretende **redefinir** a avaliação escolar e os **modos** e **graus de exigência** deste processo. Podemos dizer que, por longo tempo, na maior parte da história da educação matemática, o que vigorou foi a chamada **avaliação informativa**:

> *Na prática pedagógica da Matemática, a avaliação tem, tradicionalmente, centrado-se nos conhecimentos específicos e na contagem de erros. É uma avaliação somativa, que não só seleciona os estudantes, mas os compara entre si e os destina a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Porém, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do "certo ou errado".*
>
> (Ibidem, p. 36-7)

Alguns autores, porém, concordam que mesmo na avaliação tradicional há algum espaço para uma busca mais consciente do processo formativo do aluno. As mesmas pesquisadoras, por exemplo, fazem a seguinte consideração:

> *Mesmo numa avaliação tradicional, na qual é solicitada ao aluno apenas a resolução de exercícios, é possível avançar para além da resposta final, considerando:*
> - *o modo como o aluno interpretou sua resolução para dar a resposta;*
> - *as escolhas feitas por ele para desincumbir-se de sua tarefa;*
> - *os conhecimentos matemáticos que utilizou;*
> - *se utilizou ou não a Matemática apresentada nas aulas; e*
> - *sua capacidade de comunicar-se matematicamente, oralmente ou por escrito.*
>
> (BURIASCO, 2002, apud PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37)

Uma concepção de avaliação que tem se configurado nos últimos anos é a que se refere à **avaliação formativa**. Alguns autores esclarecem que ela consiste num conjunto de métodos e recursos cujos objetivos são recolher informações sobre a aprendizagem e lidar melhor com os problemas experimentados pelos estudantes, ou seja, fazer as devidas ponderações sobre cada caso e partir para as alterações que se fizerem necessárias.

Principalmente a partir da década de 1980, muitos estudiosos têm feito importantes contribuições ao entendimento que devemos ter sobre avaliação como processo, ação contínua. Entre esses pesquisadores, destacamos o trabalho de Luckesi (2001). Segundo o autor, a avaliação deve ser tomada como instrumento para a compreensão do estágio em que se encontra o estudante, tendo em vista a tomada de decisões, suficientes e satisfatórias, para avançar no processo de aprendizagem.

Os PCN, divulgados desde fins dos anos 1990, colaboraram para a ampliação do olhar sobre as funções da avaliação. Destacam, por exemplo, a **dimensão social** e a **dimensão pedagógica** da avaliação.

No primeiro caso, a avaliação tem a função de, para os estudantes, informar acerca do desenvolvimento das potencialidades que serão exigidas no contexto social, garantindo sua participação no mercado de trabalho e na esfera sociocultural. Para os professores, a avaliação deve auxiliar na identificação dos objetivos alcançados, com a intenção de reconhecer as capacidades matemáticas dos educandos.

No segundo caso, a avaliação tem a função de informar os estudantes sobre o andamento da aprendizagem propriamente dita, isto é, dos conhecimentos adquiridos, do desenvolvimento de raciocínios, dos valores e hábitos incorporados e do domínio de estratégias essenciais.

Os **instrumentos de avaliação** (provas, trabalhos e registros de atitudes, entre outros) devem ser capazes de fornecer informações ao professor sobre as condições de cada estudante com relação à resolução de problemas, ao uso adequado da linguagem matemática, ao desenvolvimento de raciocínios e análises e à integração desses aspectos em seu conhecimento matemático. Devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não se evidenciam em avaliações escritas.

Para Charles Hadji (2001, p. 21), a avaliação formativa implica, por parte do professor, flexibilidade e vontade de adaptação e de ajuste. O autor ressalta que a avaliação que não é seguida da **modificação das práticas pedagógicas** tem pouca capacidade de ser formativa. Posição semelhante é defendida pelas educadoras Pavanello e Nogueira:

> *É preciso reconhecer [...] que o professor deve selecionar, dentre as informações captadas, apenas o que é realmente importante [...]. Para isso, existem indicadores que, segundo Vergani (1993, p.155), podem nortear a observação pelo professor, entre os quais poderiam ser citados:*
>
> - *o interesse com que o aluno se entrega às atividades matemáticas;*
> - *a confiança que tem em suas possibilidades;*
> - *sua perseverança, apesar das dificuldades encontradas;*
> - *se formula hipóteses, sugere ideias, explora novas pistas de pesquisa;*
> - *se avalia criteriosamente a adequação do processo que adotou ou a solução que encontrou;*
> - *se reflete sobre a maneira de planificar uma atividade e de organizar seu trabalho;*
> - *se pede ajuda em caso de dúvida ou de falta de conhecimentos; e*
> - *se comunica suas dificuldades e descobertas aos colegas, de maneira adequada.*
>
> *No entanto, para que essas atitudes possam ser cultivadas pelo aluno, a prática pedagógica não pode mais se centrar na exposição e reprodução de conteúdos que só privilegiam a memorização e não o desenvolvimento do pensamento.*
>
> (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 38-9)

Afinal o que deve ser avaliado: conteúdos, habilidades, competências...?

Tudo deve ser avaliado. O fundamental, porém, é saber **como olhar**, **o que olhar** e **como analisar** as coletas. Para isso, o professor pode recorrer a diversificados instrumentos de coleta de informações, selecionando aqueles que permitam compor o melhor panorama da aprendizagem matemática de seus alunos.

Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática

Como sugestão ao professor, vamos apresentar aqui, resumidamente, um leque de modalidades de avaliação.

- **Autoavaliação**: em primeiro lugar, o professor deve auxiliar os alunos a compreenderem os objetivos da autoavaliação, fornecendo-lhes para isso um roteiro de orientação. Os alunos devem ser motivados a detectar suas dificuldades e a questionar as razões delas.
- **Prova em grupo seguida de prova individual**: nessa modalidade, as questões são resolvidas em grupo e, a seguir, cada aluno resolve questões do mesmo tipo individualmente. O intuito é colaborar para a metacognição, para que o aluno tenha consciência do próprio conhecimento, de suas potencialidades e dificuldades.
- **Testes-relâmpago**: os testes-relâmpago normalmente propõem poucas questões, uma ou duas apenas. Têm por objetivo não permitir que os alunos mantenham-se sem estudo durante longos períodos, de modo que se acumule uma grande quantidade de conteúdos. Este recurso, além de manter os alunos atentos aos assuntos contemplados em aula, ajuda-os na familiarização com os processos avaliativos.
- **Testes e/ou provas cumulativas**: este instrumento de avaliação traz à tona conteúdos trabalhados em momentos anteriores. Tal prática contribui para que os alunos percebam as conexões entre os conteúdos e a importância de usar os conhecimentos matemáticos de forma contínua.

- **Testes em duas fases**: este tipo de teste, ou prova, é realizado em duas etapas:
  1ª) a prova é realizada em sala de aula, sem a interferência do professor;
  2ª) os alunos refazem a prova dispondo dos comentários feitos pelo professor.

  O sucesso desse instrumento depende de fatores como:

  — a escolha das questões deve ser norteada pelos objetivos do teste;

  — o conteúdo dos comentários formulados pelo professor entre as duas fases;

  — a consciência, por parte dos alunos, de que a segunda fase não consiste em mera correção do que está errado, mas em uma oportunidade de aprendizagem.

  As questões devem ser de dois tipos:

  — as que requerem interpretação ou justificação, e problemas de resolução relativamente breve;

  — as abertas, e problemas que exijam alguma investigação e respostas mais elaboradas.
- **Resolução de problemas**: chamamos de "problema matemático" aquele que envolve um raciocínio matemático na busca por solução. Pode ser resolvido individualmente ou em grupo. A atividade de resolução de problemas deve envolver, entre outros fatores:

  — a compreensão da situação-problema por meio de diferentes técnicas (leitura, interpretação, dramatização etc.);

  — a promoção da criação de estratégias pessoais (não haver solução pronta);

  — a identificação do problema e a seleção e mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários a sua resolução;

  — a avaliação do processo, para verificar se, de fato, os objetivos estão sendo atingidos;

  — a interpretação e verificação dos resultados, para que se avaliem sua razoabilidade e validade.
- **Mapa conceitual**: durante a fase formal de avaliação, o professor pode solicitar aos alunos que construam o mapa conceitual sobre um tema já discutido e explorado em aula. Esse tipo de instrumento propicia a verificação da aprendizagem mais aberta e pode ser usado como autoavaliação.
- **Trabalho em grupo**: para que o grupo trabalhe de fato como grupo, são fundamentais a orientação e o auxílio do professor no sentido de estimular os alunos a desempenharem novas funções em sala de aula, em colaboração com os colegas. Um incentivo para isso é o grupo receber uma única folha de papel com as atividades propostas, para que todos resolvam em conjunto. A questão a ser respondida deve ser desafiadora, despertando a curiosidade e a vontade de resolvê-la.
- **Diálogos criativos**: a proposta é que os alunos produzam diálogos matemáticos em que estejam inseridos conceitos e propriedades de determinado conteúdo.
- **Histórias em quadrinhos**: nesta modalidade, os alunos criam histórias em quadrinhos para explorar os assuntos estudados em sala de aula. Esse é um recurso que, além de intensificar o interesse pela Matemática, permite ao professor a avaliação do conhecimento assimilado pelos alunos em contextos diversificados.
- **Seminários e exposições**: são atividades que oferecem oportunidade para os alunos organizarem seu conhecimento matemático e suas ideias sobre os assuntos explorados em aula, além de promover a desinibição e autonomia dos alunos.
- **Portfólios**: é uma coletânea dos melhores trabalhos que podem ser escolhidos pelos próprios estudantes. O professor deve orientá-los e sugerir que selecionem, durante um período, as atividades de Matemática que preferirem e que justifiquem as suas escolhas.

Pretendemos aqui apenas apresentar sugestões que auxiliem a prática avaliativa. Sem dúvida, outros instrumentos de avaliação podem ser contemplados em conformidade com o contexto escolar.

É importante reforçar que um processo fecundo de avaliação deverá considerar, além dos instrumentos apropriados, o estabelecimento de critérios de correção alicerçado em objetivos claros e justos. Chamamos a atenção para o tratamento que devemos dar ao "**erro**" nas atividades de Matemática. Ele deve ser analisado criticamente, de modo que forneça indícios de sua natureza e da correção do percurso pedagógico, para o (re)planejamento e a execução das atividades em sala de aula.

> *Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no aluno um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para seu futuro pessoal.*
>
> (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37)

Por fim, a observação atenta e a percepção aguçada do professor também são relevantes no processo de avaliação, no sentido de detectar as aprendizagens, que muitas vezes não são reveladas pelos instrumentos avaliativos escolhidos.

Formação continuada e desenvolvimento profissional docente

Assim como os estudantes precisam desenvolver habilidades e competências diversificadas, em sintonia com a época em que vivem, nós, professores, mais que outros profissionais, temos a máxima urgência e necessidade de cuidar da continuidade de nossa formação e do consequente desenvolvimento profissional.

O que aprendemos na universidade e a experiência que adquirimos com a prática pedagógica não são suficientes para nos manter longe de atividades de formação. Pesquisas e estudos no campo da Educação Matemática e áreas afins têm nos auxiliado a encontrar as respostas para as muitas dúvidas e angústias inerentes à profissão: "O que ensinar?", "Por que ensinar?", "Como ensinar?"...

O desenvolvimento profissional do(a) professor(a) deve ser entendido como um processo contínuo, que se dá ao longo de toda a vida profissional, não ocorre ao acaso, tampouco é espontâneo, mas é resultado do processo de busca que parte das necessidades e dos interesses que surgem no percurso.

Na realidade, a formação profissional docente tem início na experiência como aluno e na formação acadêmica específica, do período de iniciação à docência, até edificar-se com a experiência profissional e os processos de formação continuada.

Lembramos que as ações de formação continuada podem ser desenvolvidas por múltiplas modalidades, como leituras atualizadas, cursos, palestras, oficinas, seminários e grupos de estudos.

Algumas associações e centros de Educação Matemática

- APM – Associação de Professores de Matemática (Portugal)
  Disponível em: <http://www.apm.pt>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- Caem – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (USP)
  Disponível em: <http://www.ime.usp.br/caem/>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- CCE – Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina (UEL)
  Disponível em: <http://www.uel.br/cce/portal/>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- CECEMCA – Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp)
  Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/cecemca/index.htm>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- Cecimig – Centro de Ensino de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
  Disponível em: <http://www.uel.br/cce/portal/>. Acesso em: 27 abr. 2015.

- Cempem – Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

  Disponível em: <http://www.cempem.fae.unicamp.br/>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- CREEM – Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino da Universidade Estadual de Blumenau (Furb)

  Disponível em: <http://www.furb.br/cremm/>. Acesso em: 27 abr. 2015.
- Edumatec – Programa de pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

  Disponível em: <http://www.ufpe.br/ppgedumatec>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

  Disponível em: <http://www.gepem.ufrrj.br>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- Gepeticem – Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

  Disponível em: <http://www.gepeticem.ufrrj.br/>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- GPEEM - Grupo de Pesquisa e Estudo em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

  Disponível em: <http://www.ufrgs.br/faced/educacaomatematica>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- LEG – Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense (UFF)

  Disponível em: <http://www.uff.br/leg/>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- LEM – Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

  Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/lem/>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- LEM – Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo (USP)

  Disponível em: <http://www.ime.usp.br/lem/>. Acesso em: 28 abr. 2015.
- Lemat – Laboratório de Educação Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFGO)

  Disponível em: <http://lemat.mat.ufg.br/>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- Lemat – Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

  Disponível em: <http://lemat.sites.ufsc.br/>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- Lepac – Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica da Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

  Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/lepac/frame.htm>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- PPGECEM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

  Disponível em: <http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- PPGECNM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

  Disponível em: <http://www.posgraduacao.ufrn.br//ppgecnm>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

  Disponível em: <http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

  Disponível em: <http://www.sbem.com.br/>. Acesso em: 29 abr. 2015.
- SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática

  Disponível em: <http://www.sbhmat.org/>. Acesso em: 30 abr. 2015.
- SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

  Disponível em: <http://www.sbm.org.br>. Acesso em: 30 abr. 2015.
- SBMAC – Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

  Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/>. Acesso em: 30 abr. 2015.

Sugestões de leituras para o professor

Álgebra

- *Álgebra*: das variáveis às equações e funções. Eliane Reame de Sousa e Maria Ignes Diniz. São Paulo: IME-USP, 1994.
- *Aplicações da matemática escolar*. D. Bushaw; M. Bell; H. O. Pollack. São Paulo: Atual, 1997.
- *Aprenda Álgebra brincando*. I. Perelmann. Curitiba: Hemus, 2001.
- *Erros e dificuldades no ensino da Álgebra*: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula. Renata Anastacia Pinto. 1997. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.
- *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. R. Lins; C. Rômulo; J. Gimenez. Campinas: Papirus, 1997.
- Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro. Ângela Miorin; Antonio Miguel; Dário Fiorentini. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp, n. 1, 1993.
- *Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental*. Nathalia Tornisiello Scarlassari. 2007. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.

Avaliação

- *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Helena Noronha Cury. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática*: métodos alternativos. Vânia Maria Pereira dos Santos (Coord.). Rio de Janeiro: UFRJ; Projeto Fundão, 1997.
- *Avaliação da aprendizagem escolar*. Cipriano Carlos Luckesi. São Paulo: Cortez, 2001.
- *Avaliação:* da excelência à regulação das aprendizagens. Philippe Perrenoud. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- *Avaliação desmistificada*. Charles Hadji. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Jussara Hoffmann. Porto Alegre: Mediação, 2000.
- *Currículo e avaliação*: uma perspectiva integrada. Maria Palmira Castro Alves. Porto: Porto, 2004.
- *O erro como estratégia didática*: estudo dos erros no ensino da matemática elementar. Neuza Bertoni Olinto. Campinas: Papirus, 2000.
- Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. Regina Buriasco. *Educação em Revista*. Belo Horizonte: UFMG, n. 36, 2002.

Educação Matemática

- *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Cecília Parra; Irma Saiz (Org.). Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- *Educação Matemática, leitura e escrita*: Armadilhas, utopias e realidade. Celi Espasadin Lopes; Adair Mendes Nacarato (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2009.
- *Ensinar e aprender Matemática*. Luiz Carlos Pais. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- *Ensino de Matemática na escola de nove anos*: Dúvidas, dívidas e desafios. Vinício de Macedo Santos. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Adair Mendes Nacarato; Celi Espasandin Lopes (Org.). Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Ubiratan D'Ambrosio. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

- *Fundamentos da Didática da Matemática*. Saddo Ag Almouloud. Curitiba: UFPR, 2007.
- *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. Maria da Conceição (Org.) F. R. Fonseca. São Paulo: Global, 2004.
- *Matemática, estupefação e poesia*. Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- *Múltiplos olhares*: Matemática e produção de conhecimento. Jackeline Rodrigues Mendes; Regina Célia Grando (Org.). São Paulo: Musa, 2007.
- *Para aprender Matemática*. Sérgio Lorenzato. Campinas: Autores Associados, 2006.

Espaço e forma

- *Aprendendo e ensinando Geometria*. Mary M. Lindquist; Albert P. Shulte (Org.). São Paulo: Atual, 1994.
- *Ensino de Geometria no virar do milênio*: investigações em Geometria na sala de aula. Eduardo Veloso; Helena Fonseca; João Pedro da Ponte; Paulo Abrantes (Org.). Lisboa: DEFCUL, 1999.
- *Espaço e forma*. Célia Maria C. Pires; Edda Curi; Tânia Maria M. Campos. São Paulo: Proem, 2000.
- *Experiências com Geometria na escola básica*: narrativas de professores em (trans)formação. Adair Mendes Nacarato; Adriana A. M. Gomes; Regina Célia Grando. São Carlos: Pedro & Editores, 2008.
- *Geometria na era da imagem e do movimento*. Maria Laura Lopes; Lilian Nasser (Org.). Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.
- O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. Regina Maria Pavanello. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp, n. 1, p. 7-17, mar. 1993.
- Por que não ensinar Geometria? Sérgio Lorenzato. *Educação Matemática em Revista*. Florianópolis: SBEM, n. 4, 1º sem. 1995.

História da Matemática

- *Introdução à história da Educação Matemática*. Antonio Miguel; Maria Ângela Miorim. São Paulo: Atual, 1998.
- *Introdução à história da Matemática*. Howard Eves. Campinas: Unicamp, 1997.
- *História concisa das matemáticas*. Dirk J. Struik. Lisboa: Gradiva, 1998.
- *História da Matemática*. Carl B. Boyer. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Tatiana Roque. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- *História universal dos algarismos*. Georges Ifrah. São Paulo: Nova Fronteira, 1997.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*: Álgebra. John K. Baumgart. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*: Geometria. Howard Eves. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*: Números e numerais. Bernard H. Gundlash. São Paulo: Atual, 1992.
- *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*: Trigonometria. Howard Eves. São Paulo: Atual, 1992.

Jogos

- *Aprender com jogos e situações-problema*. Lino de Macedo; Ana Lúcia S. Petty; Norimar C. Passos. Porto Alegre: Artmed, 2000.
- *Jogos de matemática de 6º ao 9º ano*. Kátia Stocco Smole; Estela Milani Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- *O jogo como espaço para pensar*: a construção de noções lógicas e aritméticas. Rosely Palermo Brenelli. Campinas: Papirus, 1996.

- *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. Regina Célia Grando. São Paulo: Paulus, 2004.
- *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*. Lino de Macedo; Ana Lúcia S. Petty; Norimar C. Passos. Porto Alegre: Artmed, 2005.

Matemática e temas transversais

- *A Matemática e os temas transversais*. Alexandrina Monteiro; Geraldo Pompeu Junior. São Paulo: Moderna, 2001.
- *Matemática escolar e Matemática da vida cotidiana*. José Roberto B. Giardinetto. Campinas: Autores Associados, 1999.
- *Matemática em projetos:* uma possibilidade. Celi Aparecida Espasandin Lopes (Org.). Campinas: Unicamp, 2003.

Números e operações

- *A compreensão de conceitos aritméticos*: ensino e pesquisa. Analúcia Schliemann; David Carraher (Org.). Campinas: Papirus, 1998.
- *Bolema* (Boletim de Educação Matemática). Rio Claro: Unesp, v. 21, n. 31, 2008.
- *Conteúdo e metodologia da Matemática*: números e operações. Marília Centurión. São Paulo: Scipione, 1994.
- *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Rômulo Campos Lins; Joaquim Gimenez. Campinas: Papirus, 1997.
- *Repensando adição e subtração*. Sandra Magina; Tânia M. M. Campos; Terezinha Nunes; Verônica Gitirana. São Paulo: Proem, 2001.
- *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*. Maria José Ferreira da Silva. 1997. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Tecnologia

- A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. Katia Maria de Medeiros. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo: SBEM, n. 14, 2003.
- *Ensinando com tecnologia*: criando salas de aula centradas nos alunos. Judith H. Sandholtz; Cathy Ringstaff; David C. Dwyer. Porto Alegre: Artmed, 1997.
- *Informática e Educação Matemática*. Marcelo de Carvalho Borba; Miriam G. Penteado. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- *Informática educativa*: dos planos e discursos à sala de aula. Ramon de Oliveira. Campinas: Papirus, 1997.
- *Prática pedagógica*: ambientes informatizados de aprendizagem, produção e avaliação de software educativo. Celina Couto Oliveira; José Wilson Costa; Mércia Moreira. Campinas: Papirus, 2001.
- *Projetos de trabalho em informática*: desenvolvendo competências. Sônia Petitto. Campinas: Papirus, 2003.
- *Uso didático da calculadora no ensino fundamental*: possibilidades e desafios. Juliana de Alcântara S. Rubio. 2003. Dissertação (Mestrado) – Unesp, Marília.

Tratamento da Informação

- *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental*: uma análise curricular. Celi Aparecida Espasandin Lopes. 1998. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.
- *Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas*. Anna Regina Lanner; Celi Aparecida Espasandin Lopes (Org.). Campinas: Unicamp, 2003.

- *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Irene Maurício Cazorla; Eurivalda dos Santos Santana. Ilhéus: Via Litterarum, 2006.
- *Tratamento da Informação*: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. Maria Laura M. Leite Lopes (Org.). Rio de Janeiro: UFRJ, 2005.

Resolução de problemas

- *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. George Polya. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Stephen Krulik; Robert E. Reys (Org.). São Paulo: Atual, 1997.
- *Didática da resolução de problemas de Matemática*. Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 1991.
- *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática

- BOLEMA (Boletim de Educação Matemática)

  Publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociência e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (IGCE-Unesp), *campus* de Rio Claro.

  Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/bolema/>. Acesso em: 5 maio 2015.
- Boletins do *GEPEM*

  Publicado pelo Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

  Disponível em: <http://www.gepem.ufrrj.br/>. Acesso em: 5 maio 2015.
- *Educação Matemática em Revista*

  Publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática

  Disponível em: <http://www.sbem.com.br>. Acesso em: 5 maio 2015.
- *História & Educação Matemática*

  Publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática

  Disponível em: <http://www.sbhmat.com.br/>. Acesso em: 5 maio 2015.
- *Jornal do professor de Matemática*

  Publicado pelo Departamento de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

  Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/lem/jpm.html>. Acesso em: 5 maio 2015.
- *Revemat – Revista eletrônica de Educação Matemática*

  Publicada pelo Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática

  Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 5 maio 2015.
- *Revista Educação* e *Matemática* e *Revista Quadrante*

  Publicada pela Associação de Professores de Matemática de Portugal

  Disponível em: <http://www.apm.pt>. Acesso em: 5 maio 2015.
- *Revista do professor de Matemática*

  Publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática

  Disponível em: <http://www.sbm.org.br>. Acesso em: 5 maio 2015.
- Revista *Zetetiké*

  Publicada pelo Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

  Disponível em: <http://www.cempem.fae.unicamp.br/>. Acesso em: 5 maio 2015.

Bibliografia consultada

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Maria de Lurdes; OLIVEIRA, J. *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 1999.

ARAKI, Tetsuo. *As práticas avaliativas em sala de aula de Matemática*: possibilidades e limites. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco, Itatiba.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional no 9.394*. Brasília, 20 dez. 1996.

______. Ministério da Educação e Cultura. *PNLD 2008* – Guia de Livros Didáticos. Brasília: MEC, 2007.

______. Ministério da Educação e do Desporto; Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Volume 3: Matemática, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília: MEC; SEF, 1998.

BURIASCO, Regina. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. *Educação em Revista (UFMG)*, Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002.

CAPORALE, Silvia M. M. *Formação continuada de professores que ensinam Matemática*: possibilidades de desenvolvimento profissional a partir de um curso de especialização. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Francisco, Itatiba.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2000.

FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes; PINTO, R. Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. *Quadrante*, v. 8, n. 1/2, p. 33-60, 1999.

FIORENTINI, Dario et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, n. 36, p. 137-160, 2002.

HADJI, Charles. *Avaliação desmistificada*. Trad. Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2001.

HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da pré-escola à universidade. 18. ed. Porto Alegre: Mediação, 2000.

LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem*. São Paulo: Cortez, 2001.

MEDEIROS, Katia Maria de. A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. *Educação Matemática em Revista*, n. 14, p. 19-28, 2003.

MONTEIRO, Alexandrina; POMPEU, Geraldo Jr. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, v. 11, n. 19, p. 57-80, 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da. O ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? Conferência plenária apresentada no seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas". Lisboa: CNE, 2002.

ROMANATTO, Manoel Carlos. O Livro Didático: alcances e limites. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. *Anais*.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática*: Métodos alternativos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 1997. v. 1. 224 p.

Parte específica – Orientações gerais para o desenvolvimento dos capítulos

CAPÍTULO 1

Potências e raízes

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros e racionais, ampliando e consolidando o significado da potenciação e aplicando a notação científica.
- Efetuar operações envolvendo radicais.
- Representar geometricamente números irracionais usando régua e compasso.
- Resolver situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números irracionais aproximados por racionais.

Orientações gerais do capítulo

Para introduzir o trabalho com esse capítulo, pode-se levar à sala de aula um tabuleiro de xadrez e solicitar aos alunos que façam uma simulação da lenda de Sessa, para as primeiras casas. Provavelmente, quando chegarem à 7ª ou 8ª casa, irão perceber que a quantidade de grãos aumenta muito de uma casa para a outra. Explorar com eles a regularidade presente nesse aumento antes de apresentar o texto que relaciona essa regularidade com potências de base 2.

No **exercício 1**, se julgar necessário, solicitar aos alunos que façam um esquema similar a uma árvore de possibilidades a fim de visualizarem com maior clareza a relação com potência. Não é necessário que façam todas as "ramificações", apenas algumas delas e, então, generalizem e observem como a potência 6^3 pode representar a quantidade total de apartamentos desse condomínio.

Ao trabalhar o item **b** do **exercício 3**, chamar a atenção dos alunos para o fato de que há restrição para *x*. Essa é uma boa oportunidade para pedir aos alunos que justifiquem a presença dessa e de outras restrições.

Acompanhe as resoluções de cada item do **exercício 9**; depois, pode-se solicitar a alguns alunos que registrem na lousa suas resoluções para que todos os alunos discutam a clareza e a objetividade das redações das regras obtidas e para que comparem com suas próprias resoluções, fazendo a correção, quando houver necessidade. O exercício da redação leva o aluno a ampliar e a diversificar o seu vocabulário, além de desenvolver a sua habilidade de organizar o pensamento e de argumentar.

Como nos **exercícios 11** e **13** os alunos lidarão com situações que envolvem medidas muito grandes e muito pequenas, vale a pena solicitar que, após a resolução do **exercício 13**, façam uma relação entre os dois exercícios, respondendo, por exemplo:

- Quantas vezes 10^{12} é maior que 10^{-4}?

No **exercício 14**, tem-se novamente a possibilidade de trabalhar com unidades de medida, nesse caso, unidade de medida de capacidade de armazenamento, processamento e manipulação de dados nos computadores. Perguntar aos alunos que outras unidades de medida eles conhecem que usam os prefixos estabelecidos pelo SI.

Os prefixos estabelecidos pelo SI são:

Prefixos das unidades SI

Nome	Símbolo	Fator de multiplicação da unidade
yotta	Y	10^{24} = 1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000

exa	E	$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
peta	P	$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
tera	T	$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$
giga	G	$10^{9} = 1\ 000\ 000\ 000$
mega	M	$10^{6} = 1\ 000\ 000$
quilo	k	$10^{3} = 1\ 000$
hecto	h	$10^{2} = 100$
deca	da	10
deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$
micro	µ	$10^{-6} = 0{,}000\ 001$
nano	n	$10^{-9} = 0{,}000\ 000\ 001$
pico	p	$10^{-12} = 0{,}000\ 000\ 000\ 001$
femto	f	$10^{-15} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 001$
atto	a	$10^{-18} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$
zepto	z	$10^{-21} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$
yocto	y	$10^{-24} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$

Disponível em: <www.inmetro.gov.br>. Acesso em: 12 maio 2015.

Antes de os alunos calcularem os valores exatos de cada item do **exercício 19**, pedir que eles estimem os expoentes, já que têm condições de prever, em primeiro lugar, se os expoentes serão positivos ou negativos.

No **exercício 23**, tem-se novamente a oportunidade de trabalhar com transformações entre unidades de medida de massa em situações contextualizadas. Nesse exercício, o aluno deverá utilizar a relação existente entre duas unidades de massa: o quilograma e a tonelada, além de escrever tal medida em notação científica.

Podem-se ampliar as discussões com os alunos fazendo-os refletir sobre o gráfico do **exercício 27** com questões do tipo:

- Por que não são colocados os números “completos” no gráfico?
- O que aconteceria se esquecessem de escrever a informação ”milhões de dólares” no eixo vertical do gráfico?

No “Pense mais um pouco...” da **página 22**, convém enfatizar aos alunos que ano-luz não é unidade de medida de tempo nem de velocidade. Pode-se pedir a eles, após a resolução, que convertam 500 segundos em minuto e segundo, perguntando-lhes:

Se o Sol, de repente, se apagasse, por quantos minutos e segundos ainda veríamos a sua luz? Espera-se que os alunos concluam que veríamos a luz do Sol por 8 minutos e 20 segundos.

No **exercício 35**, pode-se pedir aos alunos que, com o auxílio de uma calculadora, construam uma tabela com a velocidade do som em outras temperaturas, para que respondam mais facilmente ao item **b**. Uma outra opção é, com o auxílio da calculadora, usar a relação entre a temperatura e a velocidade do som, escolhendo valores para a velocidade do som e encontrando a temperatura correspondente. Vale destacar que, para que a relação seja verdadeira, deve-se considerar a velocidade em metro por segundo e a temperatura em grau Celsius.

Avalie a possibilidade de um trabalho interdisciplinar com o professor de Ciências, considerando que o radicando $273 + t$ é, aproximadamente, a unidade de base do Sistema Internacional de Unidades (SI) para a grandeza temperatura, em Kelvin.

O **exercício 39** traz a oportunidade de discutir os critérios de ordem das operações a serem efetuadas em uma expressão numérica, assim como chama a atenção para o uso indevido do cálculo que, no item teórico 4, será formalizado como a 1ª propriedade dos radicais.

O "Pense mais um pouco..." da **página 26** se constitui em mais uma oportunidade para os alunos exercitarem suas estratégias pessoais. Os diferentes procedimentos que ocorrerem na resolução devem ser apresentados à turma. Como estratégia adquirida ao longo do Ensino Fundamental, os alunos podem perceber que, se $\sqrt[3]{a} = 4$, então $4^3 = a$, ou seja, $a = 64$. Assim, $\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{64} = 2$. Da mesma forma, se $\sqrt[6]{a} = 3$, então $3^6 = a$, ou seja, $a = 729$. Assim, $\sqrt{a} = \sqrt{729} = 27$.

No **exercício 42** é interessante que os alunos comparem com outros colegas não apenas a solução encontrada em cada item, mas também as resoluções, pois aqui o uso de propriedades poderá facilitar os cálculos.

O **exercício 44** propõe uma atividade na qual o aluno é orientado a percorrer passos, em discussão com um colega e fazendo uso dos conceitos de número racional já estudados, que os levam a antecipar de maneira informal a 2ª propriedade dos radicais. Essa atividade favorece a construção do conhecimento pelo próprio aluno e lhe dá maior autonomia e segurança na busca de novas experiências.

Na seção "Pense mais um pouco..." da **página 35** a intenção é que os alunos, nessa faixa etária, não utilizem um material concreto, no caso cubos, para encontrar as respostas, pois devem utilizar conceitos numéricos e geométricos. Por outro lado, podem formar duplas para que registrem coletivamente as resoluções e depois troquem e comparem essas resoluções.

Após a resolução dos exercícios do "Para saber mais" da **página 36**, se houver disponibilidade em sua escola, leve os alunos ao laboratório de informática para experimentarem diferentes usos de comandos em planilhas eletrônicas. O mesmo pode ser feito com o uso de calculadoras científicas.

Vejamos uma possível explicação que pode ser apresentada pelos alunos no **exercício 71**: Foi construído um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 1, logo a medida da hipotenusa será igual a $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Então, ao transportar essa medida para a reta, teremos a localização do número irracional $\sqrt{10}$. Antes de pedir aos alunos que deem a explicação, pode-se pedir que justifiquem por meio de estimativa, fazendo uma análise sobre a localização de $\sqrt{10}$, que deve ser entre 3 e 4, pois $\sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{16} = 4$, então $3 < \sqrt{10} < 4$. Uma forma de visualizar isso é por meio da construção geométrica desse triângulo retângulo, na configuração apresentada, usando régua e compasso.

Uma alternativa para a resolução do **exercício 75** é organizar os alunos em duplas e distribuir folhas de papel sulfite para que realizem as construções dos retângulos. Após a realização dos cálculos, pedir que comparem visualmente as áreas dos retângulos construídos. Como recurso para essa comparação, eles podem recortar os retângulos e, por meio da composição e decomposição dos retângulos construídos, chegar à conclusão de que eles têm a mesma área.

Como o **exercício 81** exige que o aluno busque um recurso mais conveniente para fazer os cálculos, é importante destacar que ter um número irracional aproximado por racional no denominador é um fator que pode tornar a divisão mais complicada, mas, se esse número estiver no numerador, os cálculos poderão ser mais simples. Esse é, então, um exercício em que o aluno pode colocar em prática a racionalização de denominadores para facilitar seus cálculos.

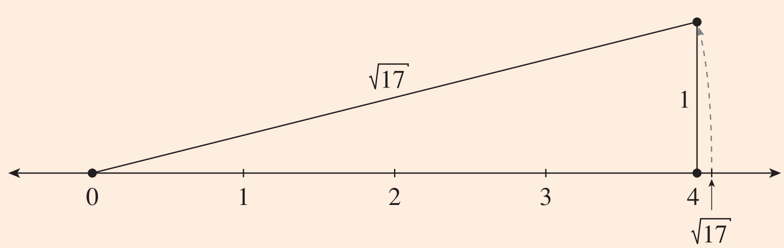
Para complementar o **exercício 83**, pode-se pedir aos alunos que escrevam entre que números naturais encontra-se o valor de *x*.

Para fazer a demonstração requerida no **exercício 84**, basta os alunos realizarem os seguintes cálculos:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Complementando o "Pense mais um pouco..." da **página 41**, perguntar aos alunos: qual será a medida do outro cateto, se a lajota formada pelos quatro triângulos retângulos for quadrada? E qual será a área dessa lajota? Espera-se que os alunos percebam que os triângulos devem ser retângulos isósceles, com cada ângulo da base medindo 45°. Logo, os dois catetos também deverão ter medidas iguais, nesse caso, $2\sqrt{5}$ cm. A nova área, então, será igual a 40 cm².

No **exercício complementar 12**, para representar o número $\sqrt{17}$ em uma reta numérica, usando régua e compasso, deve-se construir um triângulo retângulo cujos catetos meçam 4 e 1, de modo que o cateto de maior medida esteja na reta numérica, como mostra a figura ao lado.



NELSON MATSUDA

Se considerar adequado, a resolução do **exercício complementar 16** pode ser um momento de discussão a respeito da história do número π. Os alunos poderão fazer pesquisas em *sites* e até mesmo descobrir com quantas casas decimais já foi calculado tal número, com o uso das tecnologias disponíveis.

Sugestão de leitura para o professor

O número π

O número π é a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. É também a razão entre a área de um círculo e a área do quadrado sobre seu raio. De modo semelhante, π aparece como uma razão relacionada com certas áreas de superfícies e volumes em geometria espacial. Fórmulas para a elipse e curvas como a astroide, a cardioide, a limaçon e rosáceas, também contêm π. Mas o uso de π não se restringe de modo algum a situações geométricas. Aparece em vários ramos da matemática, inclusive em campos aparentemente sem relação, como a teoria das vibrações, a teoria dos números, a estatística e a teoria atuarial.

[...]

Um dos problemas geométricos mais antigos do homem era achar um quadrado de área igual à de um dado círculo. (A expressão "quadratura do círculo" está associada, portanto, com problemas de construções que envolvem π ou uma aproximação de seu valor.) Muitas das referências mais antigas a este problema não indicam que o conceito como uma razão constante fosse claramente reconhecido naquele tempo. O problema 41 do papiro Rhind (*c.* 1650 a.C.) é representativo da matemática egípcia primitiva: "Exemplo de resolução de um recipiente circular de diâmetro 9 e altura 10. Você deve subtrair um nono de 9, ou seja, 1; diferença 8. Multiplique 8 oito vezes, resultado 64. Você deve multiplicar 64 dez vezes, vindo a ter 640". Generalizando-se este problema, encontrava-se a área da base circular como o quadrado de $\frac{8}{9}$ do diâmetro. Os egípcios, obviamente, não generalizaram isto numa fórmula estabelecida, mas o papiro Rhind inclui cinco desses problemas resolvidos envolvendo áreas de círculos, quatro usando diâmetro 9 e o outro usando diâmetro 10. Convertendo-se o resultado acima na fórmula $A = k \cdot r^2$, a razão k é aproximadamente 3,1605. A frequente afirmação de que o valor dos egípcios para π era 3,16 deve ser interpretada no contexto acima. [...]

Encontramos às vezes a afirmação de que a Bíblia usa 3 como valor de π. Isto se baseia em Reis, I, 7:23, que simplesmente afirma o fato de que uma bacia [construída para o templo do rei Salomão, *c.* 100 a.C.] tinha dez cúbitos de uma borda à outra, e "era cingida por um cordão de 30 cúbitos".

Um dos mais antigos matemáticos gregos a tentar lidar com o problema da "quadratura do círculo" em forma geométrica pura, com a restrição específica de que só se poderia usar régua e compasso, foi Hipócrates de Quio (*c.* 440 a.C.). Hipócrates conseguiu mostrar que a área de certas lunas (figuras em forma de meia-lua formadas pela intersecção de dois arcos) podia ser representada exatamente por áreas triangulares (e portanto retangulares). Por exemplo, sendo *AOB* um quadrante de um círculo e considerando-se o semicírculo de diâmetro *AB* que não contém O, então a luna limitada pelos arcos-contornos do semicírculo e do quadrante tem a mesma área do triângulo *AOB*. Seu sucesso com casos especiais como esse levou-o a supor que pudesse finalmente traçar um polígono e daí um quadrado cuja área fosse exatamente igual à do círculo. [...]

Os *Elementos* de Euclides (*c.* 300 a.C.) não fazem qualquer menção à razão constante entre circunferência e diâmetro, mas a Proposição 2 do Livro II dá uma prova formal de que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros. Como já foi dito, essa relação era conhecida por Hipócrates. Arquimedes, em seu trabalho *A medida do círculo* (240 a.C.), provou que a área de qualquer círculo é igual à área do triângulo retângulo que tem um dos catetos igual ao raio e o outro igual à circunferência do círculo.

Outra conclusão importante fornecida por Arquimedes foi que a razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro é menor que $3\frac{1}{7}$, mas maior que $3\frac{10}{71}$, e por isso $3\frac{1}{7}$ muitas vezes foi chamado de "valor arquimediano de π". Seu método baseava-se num trabalho com polígonos regulares inscritos e circunscritos no círculo, dobrando-se sucessivamente o número de lados até se obterem os perímetros dos polígonos de 96 lados [...].

Várias aproximações de π foram fornecidas por autores de diferentes países. Por exemplo, um estudioso de mecânica chinês, Tsu Ch'ung-chih (*c.* 470 d.C.), forneceu o valor racional $\frac{355}{113}$ (3,1415929...), correto até a sexta casa decimal. Aryabhata, na Índia (510 d.C.), forneceu para π: "Some 4 a 100, multiplique por 8, e some 62.000. Esta é a circunferência aproximada de um círculo, cujo diâmetro é 20.000". Escrito como fração, o resultado é $\frac{62.832}{20.000}$, e como decimal 3,1416, que supera π em menos de 0,0001.

Outro autor hindu, Brahmagupta (*c.* 628 d.C.), deu 3 como o "valor prático" e $\sqrt{10}$ (3,162...) como o "valor exato" de π. Esse último valor pode ser devido à fórmula de aproximação comumente usada $a + \left(\frac{1}{2a + r}\right)$ para $\sqrt{a^2 + r}$, uma vez que $\sqrt{10} = \sqrt{9 + 1} \simeq 3 + \frac{1}{7}$, valor arquimediano de π. O valor $\sqrt{10}$ foi amplamente usado durante a Idade Média.

Aproximações de π por meio do "método clássico" surgido com Arquimedes podem ser levadas a termo até tantas casas quantas permitirem a habilidade computacional e a perseverança de quem estiver fazendo o trabalho. Em 1579, o matemático francês François Viète usou polígonos de $6 \cdot (2^{16}) = 393.216$ lados para achar a expressão correta de π até a nona casa decimal. Em 1610, o alemão Ludolph van Ceulen usou polígonos de 2^{62} lados para calcular π até a 35ª casa. (Na Alemanha, π ainda é comumente chamado número Ludolphiano.)

[...]

Finalmente, π foi encontrado como o limite de uma série infinita. Isso foi conseguido em 1674 pelo matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz, que chegou a

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right).$$

Dificilmente se poderia imaginar uma expressão com frações mais simples e com regularidade maior. Com a série de Leibniz, as expectativas gregas não poderiam ter recebido uma resposta mais perfeita. Outras séries foram concebidas desde então, com o objetivo de se alcançar uma convergência mais forte a fim de facilitar os cálculos, mas nenhuma outra tem a mesma simplicidade clássica.

Algo mais relacionado à exata natureza do número π foi estabelecido em 1761, quando Johann Heinrich Lambert mostrou que este número é irracional (e portanto não pode ser expresso como um decimal periódico). Finalmente, em 1882, Ferdinand Lindemann provou que π não é um número algébrico, figurando portanto entre os números transcendentes. (Entende-se por algébrico um número que é raiz de um polinômio cujos coeficientes são racionais.) Esse resultado estabeleceu definitivamente que a quadratura do círculo apenas com régua e compasso é impossível.

Em 1949 o ENIAC efetua o cálculo de π até 2.037 casas em setenta horas. Em 1958 esse cálculo chega até 10.000 casas em uma hora e quarenta minutos (quarenta segundos para as primeiras 707 casas!); e em 1961, realiza-se o cálculo de 100.265 casas em oito horas e quarenta e três minutos [...].

Uma aproximação de π estendendo-se até 500.000 casas decimais foi obtida na França em 1967 em um computador CDC 6.600 [...].

O aparecimento de π num contexto diferente é ilustrado pelo problema da agulha de Buffon, que envolve probabilidade. Em 1760 G. L. Lecrerc, conde de Buffon, concebeu o problema de deixar cair, ao acaso, uma haste uniforme (agulha) de comprimento ℓ sobre um plano riscado de retas paralelas a uma distância d uma da outra ($\ell < d$). Buffon mostrou que a probabilidade de que a agulha caísse cortando uma das retas é $\frac{2\ell}{\pi d}$. Se o comprimento da agulha fosse $\frac{1}{2}$ da distância entre as linhas, essa probabilidade seria de $\frac{1}{\pi}$, e portanto pode-se inferir uma aproximação de π por experimentação. [...]

[...]

As expectativas dos gregos de que o círculo pudesse ser quadrado só com régua e compasso revelaram-se impossíveis de serem concretizadas. Mas o mais importante, para eles, era sua convicção de que a ordem e a beleza do próprio Universo exigem uma solução matemática insigne para a razão de sua mais perfeita forma. Vista sob essa luz, a história de π já não termina com um desapontamento mas, ao contrário, com sua realização clássica na série de Leibniz.

BARAVALLE, Hermann von. "O número π". In: DAVIS, Harold T. (Org.).
Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: computação.
Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

Sugestão de atividade

Jogo dos resultados alinhados

Número de participantes: 2 jogadores

Material necessário

- 2 canetas de cores diferentes
- papel sulfite

Regras

- Os jogadores devem fazer dois tabuleiros numa folha de papel sulfite.
- Cada tabuleiro é formado por um retângulo dividido em 9 retângulos menores (casas).
- Um dos tabuleiros deve ser preenchido conforme este modelo:

Subtraia	Extraia a raiz de índice	Multiplique por
Multiplique por	**Multiplique por 1**	Eleve ao expoente
Divida por	Divida por	Some

- Os dois jogadores devem escolher, juntos, um único número para colocar em cada operação, assim como foi feito com o número 1 no retângulo do meio (que é valor fixo).
  Esses números devem ser todos diferentes e escolhidos de -50 a 50, do seguinte modo:
  → 1 número inteiro negativo
  → 2 números irracionais em forma de radical
  → 1 número racional negativo
  → 1 número quadrado perfeito
  → 3 números naturais quaisquer diferentes dos demais
- Cada jogador pega uma das canetas coloridas, escolhe outro número de -50 a 50 e escreve no papel sulfite. Tiram par ou ímpar para ver quem começa o jogo.
- Depois, um de cada vez escolhe uma casa do tabuleiro das operações (ainda não selecionada) e efetua a conta, na folha de sulfite, com o seu número. A seguir, escreve o resultado no outro tabuleiro, na casa correspondente à operação realizada.
- O quociente que não é inteiro deve ser expresso na forma de fração.
- A partir da segunda jogada de cada um, as operações são efetuadas com o resultado da operação anterior do próprio jogador.
- O jogador que errar a operação perde a vez e não pode marcar nada na casa.
- Vence o jogo quem primeiro conseguir alinhar três resultados na horizontal, na vertical ou na diagonal.
- Caso nenhum jogador consiga alinhar três resultados numa rodada, outros números devem ser escolhidos e o jogo reinicia com o mesmo tabuleiro das operações.

Questões para que os alunos respondam pensando na estrutura do jogo.

Pensem na estrutura do jogo e analisem a seguinte situação:

Lucas e Luana montaram um tabuleiro para jogar:

Subtraia 5	Extraia a raiz de índice 2	Multiplique por $\sqrt{3}$
Multiplique por $\sqrt{2}$	**Multiplique por 1**	Eleve ao expoente 3
Divida por $-0,5$	Divida por 1,44	Some -10

a) Esse tabuleiro está dentro das especificações do jogo? Justifique.

b) Luana escolhe o número 8 e Lucas o -13. Ele joga na 1ª vez. Depois de algumas jogadas, veja como está o jogo:

	Luana	Lucas
Início	8	-13
1ª jogada	$8 + (-10) = -2$	$-13 \cdot \sqrt{3} = -13\sqrt{3}$
2ª jogada	$-2 : 1{,}44 = -\dfrac{2}{1{,}44} = -\dfrac{25}{18}$	$-13\sqrt{3} : (-0{,}5) = 26\sqrt{3}$
3ª jogada	$-\dfrac{25}{18} \times 1 = -\dfrac{25}{18}$	ainda vai jogar

		$-13\sqrt{3}$ Lucas
	$-\dfrac{25}{18}$ Luana	
$26\sqrt{3}$ Lucas	$-\dfrac{25}{18}$ Luana	-2 Luana

É a vez de Lucas jogar. O que ele deve fazer? Na situação apresentada, Luana já ganhou o jogo? Justifique.

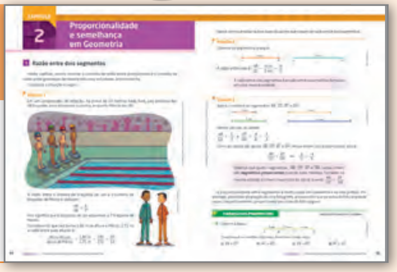
Respostas:

a) Sim, pois ele segue o modelo dado. Além disso, os oito números colocados foram escolhidos conforme as regras: um número inteiro negativo (-10), dois números irracionais diferentes em forma de radical $\left(\sqrt{3} \text{ e } \sqrt{2}\right)$, um número racional negativo ($-0{,}5$), um número quadrado perfeito ($1{,}44$) e outros três números naturais diferentes dos demais (5, 3 e 2).

b) Para impedir Luana de ganhar o jogo, Lucas deve escolher a casa “subtraia 5”, pois a casa ”extraia a raiz de índice 2” Luana não pode escolher (a raiz quadrada de um número negativo não é um número real).

CAPÍTULO 2

Proporcionalidade e semelhança em Geometria



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Resolver problemas envolvendo razão entre dois segmentos.
- Resolver problemas aplicando o teorema de Tales.
- Desenvolver a noção de semelhança de figuras planas com base em ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (medidas dos lados, da superfície e perímetro).
- Resolver problemas envolvendo o conceito de semelhança de triângulos.

Orientações gerais do capítulo

Para enriquecer o trabalho com semelhança, sugerimos os seguintes livros:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Semelhança*. São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

MACHADO, Nilson José. *Semelhança não é mera coincidência.* São Paulo: Scipione, 2006. (Coleção Vivendo a Matemática)

ROSA NETO, Ernesto. *Saída pelo triângulo.* São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

Vale a pena aproveitar o contexto do **exercício 5** e conversar com os alunos a respeito de ampliações e reduções de fotos, pois se trata de uma situação em que é fundamental manter a proporcionalidade entre as medidas da largura e do comprimento, para que a imagem não fique deformada. Podem-se providenciar fotos ou recortes de revistas, ampliados ou reduzidos em fotocopiadoras, para que os alunos observem essa proporcionalidade.

Outro aspecto importante é que alguns alunos podem, à primeira vista, considerar que, como o lado menor da foto original media 10 cm e na ampliação passaria a ter 13 cm, ou seja, teria um aumento de 3 cm, o mesmo ocorreria com o lado maior, passando a ter 18 cm (15 + 3). Se essa ideia for apresentada, é preciso rejeitá-la, explicando que isso não manteria a proporcionalidade.

Acompanhe a resolução do **exercício 8** com os alunos e faça as interferências que julgar necessárias a fim de que os alunos cheguem à resposta esperada.

Considerando as informações desse exercício, temos:

$AB + BC + CD + AD = 63$

$AB = 12$ cm

$BC = 15$ cm

Como as medidas dos lados AB, BC, CD e AD formam, nessa ordem, uma proporção, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{12}{15} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = \frac{4AD}{5}$$

Como $AB + BC + CD + AD = 63$, então teremos:

$$12 + 15 + \frac{4AD}{5} + AD = 63 \Rightarrow \frac{4AD + 5AD}{5} = 36 \Rightarrow 9AD = 180 \Rightarrow AD = 20$$

Como $CD = \frac{4AD}{5} \Rightarrow CD = \frac{4 \cdot 20}{5} \Rightarrow CD = 16$

Para finalizar, é interessante que os alunos substituam os valores encontrados no problema original e verifiquem se estão de acordo com as condições esperadas.

Para ampliar as discussões sobre o **exercício 9**, pode-se pedir aos alunos que retomem o **exercício 8** e façam uma comparação entre os dois discutindo por que no **exercício 9** é possível chegar às respostas com menor número de informações. Espera-se que os alunos observem que a informação estabelece a diferença entre esses exercícios: em um deles, temos um quadrilátero cujos lados possuem diferentes medidas e, no outro, o quadrilátero é um retângulo, isto é, nos garante, implicitamente, mais relações entre as medidas de seus lados.

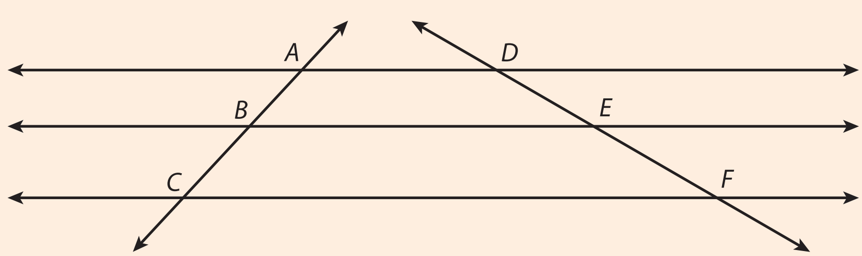
Na seção "Para saber mais" das **páginas 46 a 48**, os alunos poderão elaborar diferentes estratégias para descobrir que as folhas de formato A4 e carta não são retângulos áureos. Por exemplo, poderão dobrar cada folha e extrair o maior quadrado, para depois calcular a razão das medidas dos lados.

Poderão, também, utilizar o retângulo áureo copiado e recortado como molde e verificar se as diagonais dos papéis são proporcionais à diagonal do retângulo áureo.

Para que os alunos constatem que o número de ouro pode aparecer em razões entre medidas do corpo humano, uma atividade interessante é formar duplas e pedir a um aluno que meça a altura do outro e também que ache a distância dos pés ao umbigo do colega. Depois, a dupla deve calcular a razão $\frac{\text{altura da pessoa}}{\text{distância dos pés ao umbigo}}$.

Para ampliar o conhecimento dos alunos sobre o número de ouro, pode-se solicitar uma pesquisa, a ser apresentada em seminários.

Caso observe que os alunos estejam com dificuldade em resolver o **exercício 13**, pedir que eles façam o esboço da situação, para que as relações existentes fiquem mais visíveis.



NELSON MATSUDA

Considerando $AB = 4{,}2$ cm, $BC = 5{,}4$ cm, $DE = 6{,}3$ cm, temos que o maior segmento determinado pelas três paralelas é o segmento $\overline{DF}$. Para calcular a medida desse segmento, os alunos deverão determinar, inicialmente, a medida do segmento $\overline{EF}$, usando a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{4{,}2}{5{,}4} = \frac{6{,}3}{x} \Rightarrow x = \frac{6{,}3 \cdot 5{,}4}{4{,}2} = \frac{34{,}02}{4{,}2} \Rightarrow x = 8{,}1$$

Como $EF = 8{,}1$ cm, temos $DF = 14{,}4$ cm.

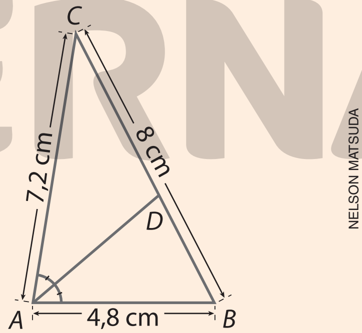
No **exercício 14**, temos uma boa oportunidade para falar com os alunos a respeito da expressão “ruas paralelas”, mesmo em situações em que essas ruas não são, necessariamente, representações de retas paralelas, uma vez que a distância entre elas nem sempre é constante. Esse paralelismo só é real em cidades planejadas, nas quais as ruas foram construídas em conjunto e não surgiram à medida do crescimento urbano. Pode-se comentar com os alunos o que são as cidades planejadas:

> *Cidades Planejadas correspondem àquelas constituídas a partir de um projeto ou plano diretor discutido e analisado antes da sua execução, nesse caso há uma preocupação com a configuração da cidade, como largura das ruas, escolha de espaços específicos para comércio, residências e outras funções. No Brasil são consideradas como cidades planejadas: Teresina, fundada em 1851; Aracaju, 1858; Belo Horizonte, 1898; Goiânia, 1937; Brasília, 1960; e Palmas, 1990. Apesar do planejamento prévio, o crescimento acelerado não acompanha as previsões do projeto.*
>
> Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com.br>.
> Acesso em: 14 maio 2015.

Ao resolver o **exercício 20**, os alunos deverão interpretar uma situação bastante comum e importante nas cidades brasileiras: a adaptação de construções para facilitar o deslocamento de todas as pessoas, especialmente aquelas que apresentam dificuldades de locomoção, como as pessoas que se locomovem em cadeiras de rodas.

Nesse contexto, pode-se solicitar aos alunos que identifiquem locais conhecidos em que essa adaptação já tenha sido realizada e outros em que ela seja fundamental para que todos tenham acesso garantido; um dos locais que podem ser observados é a própria escola, criando oportunidade para a discussão do exercício da cidadania e dos direitos dos cidadãos.

No **exercício 24**, espera-se que os alunos construam uma figura parecida com a figura a seguir:



Logo, teremos:

$BD + DC = 8 \Rightarrow BD = 8 - DC$

$\frac{4{,}8}{BD} = \frac{7{,}2}{DC}$

Substituindo $BD = 8 - DC$ em $\frac{4{,}8}{BD} = \frac{7{,}2}{DC}$, teremos a medida DC em centímetros:

$$\frac{4{,}8}{8 - DC} = \frac{7{,}2}{DC} \Rightarrow 4{,}8DC = 57{,}6 - 7{,}2DC \Rightarrow 12DC = 57{,}6 \Rightarrow DC = 4{,}8$$

Voltando à primeira equação, encontraremos a medida BD em centímetros:

$$BD = 8 - DC \Rightarrow BD = 8 - 4{,}8 = 3{,}2$$

Para resolver o desafio proposto na seção “Pense mais um pouco...” da **página 57**, os alunos precisam utilizar conhecimentos sobre porcentagem e proporcionalidade. Como esse problema admite mais de uma forma de resolução, é fundamental discutir e trocar essas possibilidades para que os alunos ampliem suas estratégias, pois na resolução de outros problemas poderão colocá-las em prática.

No **exercício 28**, vale destacar que, no caso de retângulos, se não alterarmos as medidas dos quatro ângulos internos, a figura continuará a ser um retângulo, mesmo que o aumento ou a redução das medidas dos lados não sejam proporcionais. Nesse caso, não basta que os alunos respondam que os dois retângulos são semelhantes por serem retângulos, pois isso garante apenas que não houve alteração nas medidas dos ângulos; é necessário que possuam argumentos sobre as medidas dos lados.

Acompanhe a resolução dos alunos da atividade proposta na seção “Para saber mais” das **páginas 60 e 61** para avaliar se compreenderam o significado de homotetia, já que é um conceito novo e até mesmo diferente daquilo que já conhecem, apesar de seu significado não estar distante do que o aluno está estudando.

Pode-se pedir a alguns alunos que expliquem oralmente o significado dessa palavra, pesquisando no dicionário ou na internet.

Para resolver o **exercício 38**, os alunos devem estar atentos, em primeiro lugar, a duas medidas apresentadas no enunciado: a medida do lado maior do triângulo original, que é 20,4 cm, e a medida do lado maior do triângulo semelhante, que é 15,3 cm.

Daí, podem realizar os cálculos:

a) A razão de semelhança entre o triângulo semelhante e o triângulo original é:

$$\frac{15,3}{20,4} = \frac{51}{68} = \frac{3}{4}$$

Como o perímetro é uma medida linear, basta usar o perímetro do triângulo original e "aplicar" a razão de semelhança já calculada.

O perímetro do triângulo original é $12 + 18 + 20,4 = 50,4$.

Assim, perímetro do triângulo semelhante será $\frac{3}{4}$ de 50,4 que é igual a: $\frac{3}{4} \cdot 50,4 = 37,8$.

b) Como a área não é uma relação linear, mas um produto de duas dimensões, será preciso multiplicar essa razão de semelhança duas vezes:

Área do triangulo semelhante: $23,04\sqrt{11} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 12,96\sqrt{11}$

Para a atividade proposta na seção "Para saber mais" das **páginas 72 e 73**, é necessário providenciar com antecedência o material para construir um pantógrafo para que os alunos realizem em conjunto a construção e o uso de tal instrumento.

Se não for possível obter material para construir um pantógrafo por aluno, eles podem formar duplas para usar o mesmo instrumento. Caminhe entre os alunos para garantir que todos tenham a oportunidade de manipulá-lo. Outra proposta para ampliar essa atividade é que os alunos pesquisem e descubram quais profissionais utilizam esse instrumento.

É importante verificar se na resolução do **exercício complementar 6** os alunos interpretaram adequadamente a informação "o lado do quadradinho do quadriculado como unidade de medida", pois apenas com base nessa informação eles podem saber que $AD = 4$, $BD = 3$ e $BC = 5$ e, assim, usar as relações existentes para chegar à medida de EC, ou seja, o valor de x.

Sugestão de atividade

Câmara escura

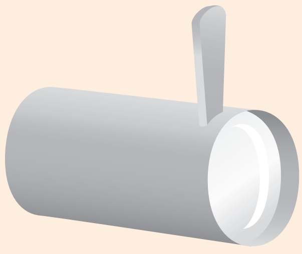
Aprenda a construir essa caixa especial capaz de projetar as imagens ao seu redor.

Diná, Rex e Zíper adoraram a ideia de se tornarem cineastas e decidiram fazer um filme. Rex disse que seria o diretor e foi assistir a uns filmes para se inspirar. Diná logo pensou em ser a roteirista e foi ler uns livros para buscar mais ideias. Zíper queria ser diretor de fotografia, mas não tinha câmera fotográfica para praticar. Então, nosso zangão construiu uma câmara escura para poder projetar as imagens que estava vendo e, assim, pensar na fotografia do filme. Quer também construir uma câmara escura e projetar as imagens ao seu redor?

Você vai precisar de:

- caixa de sapato;
- lupa (ou outro tipo de lente de aumento);
- tesoura;
- cola;
- papel vegetal;
- cartolina preta.

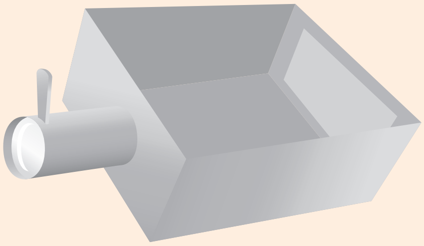
A câmara escura é uma caixa fechada com um buraco em um dos seus lados. No outro lado, aparece a imagem invertida da cena que se passa à frente da abertura. Esse é o princípio de toda câmera fotográfica e é exatamente o que você vai fazer.


NELSON MATSUDA

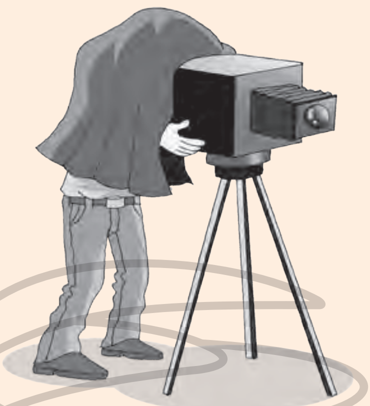
Pegue a cartolina preta e enrole-a, formando um cilindro de diâmetro igual ao da lente de aumento. Encaixe a lente no cilindro e cole a cartolina para que se mantenha esse formato. Se você estiver usando uma lupa, faça um buraco para que o cabo fique de fora. Certifique-se de que a lente esteja bem firme na cartolina, para ela não cair e quebrar.

Recorte, em um dos lados da caixa, um retângulo um pouco menor que o próprio lado e cole o papel vegetal. No lado oposto, faça um recorte circular com o mesmo diâmetro do cilindro. Encaixe o cilindro com a lente na ponta no buraco circular. É importante que o cilindro esteja firme, pois, movendo-o para frente e para trás, você ajustará o foco. A caixa deve ser escura por dentro. Para tanto, você deve cobrir as faces internas da caixa com cartolina preta, sem passar por cima dos buracos que você já fez.

NELSON MATSUDA



JOSÉ LUÍS JUHAS

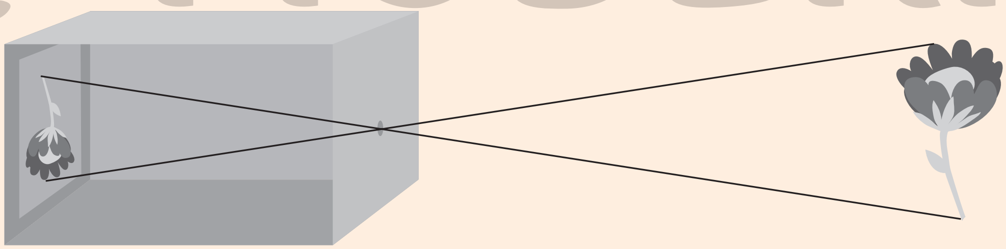


Agora, aponte a lente para o objeto que você quer ver projetado. A distância do objeto até a câmara dependerá do foco de sua lente e do comprimento do cilindro. Lembre-se de que o objeto deve estar bem iluminado e, de preferência, pela luz do Sol. Mas atenção! Nunca aponte a câmara escura direto para o Sol. É perigoso para os seus olhos!

Você conseguirá visualizar melhor a imagem se o papel vegetal estiver na sombra. Se for o caso, você pode pôr uma camiseta, ou um pano qualquer sobre você e a parte da caixa com papel vegetal, a fim de deixá-la mais escura, como faziam os fotógrafos mais antigos.

Muito bem! Aí está a sua câmara escura e... opa! Espere aí! A imagem do objeto à frente da sua câmara apareceu invertida? É isso mesmo. Isso acontece porque a luz se reflete de cada ponto de um objeto e segue em todas as direções, sempre em linha reta. Assim, o raio de luz que vem de baixo da figura, ou da cena, passa pela lente e vai para o topo do papel vegetal, enquanto o raio de luz que vem de cima passa pela lente e vai para a base do papel vegetal, invertendo a figura.

NELSON MATSUDA



Se você não conseguiu uma lupa nem uma lente de aumento, não desista do experimento! Em vez do tubo com a lente, faça um pequeno recorte na ponta da caixa de sapato. Cubra esse buraco com uma folha de papel-alumínio e faça um furinho com um alfinete. Como na câmara escura com lente, faça uma janela na outra extremidade da caixa e cole o papel vegetal. Pronto, você deverá apontá-la para objetos muito bem iluminados ao Sol e deverá fazer sombra na tela de papel vegetal, para poder enxergar os objetos.

Fonte: *Ciência Hoje das Crianças*, n. 180, jun. 2007.
Disponível em: <http://cienciahoje.uol.com.br>.
Acesso em: 4 maio 2015.

CAPÍTULO 3

Estatística e probabilidade

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Identificar variáveis quantitativas e variáveis qualitativas.
- Conhecer e identificar formas de obtenção, organização e apresentação de dados.
- Organizar dados na forma de distribuição de frequências.
- Obter as medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.

Orientações gerais do capítulo

Com base no texto introdutório desse capítulo, temos uma boa oportunidade de conversar com os alunos sobre a importância de sabermos coletar, descrever, organizar, analisar e comunicar dados. É importante destacar que trabalhos desse tipo fazem parte da história das grandes civilizações, como realça o texto.

Uma maneira de ampliar esse assunto é pedir aos alunos que pesquisem um pouco mais os fatos históricos citados no texto, sendo esta uma boa oportunidade para trabalhar concomitantemente com o professor de História.

Para ampliar o conteúdo apresentado nesse capítulo, sugerimos os seguintes livros:

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Estatística.* São Paulo: Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

No **exercício 5**, os alunos terão a oportunidade de colocar em prática os métodos de coleta e organização de dados aprendidos até esse momento. Na apresentação dos resultados, converse com os alunos sobre as possíveis dificuldades que possam ter ocorrido na realização da atividade.

Nas **páginas 82 a 85**, uma atividade interessante é explorar com os alunos as informações apresentadas nos diferentes tipos de gráficos. Também pode ser objeto de um trabalho interdisciplinar, por exemplo, aproveitando a oportunidade de explorar mais os cartogramas junto com o professor de Geografia.

Temos uma boa oportunidade de trabalhar dois eixos de conteúdos, "Grandezas e Medidas" e "Tratamento da Informação", no **exercício 6**. A comparação da área desmatada em hectares com a quantidade de campos de futebol tem o objetivo de passar aos alunos uma ideia da dimensão das áreas devastadas.

Se achar conveniente, solicitar a alguns alunos que socializem com a classe o texto elaborado para o item **c** do **exercício 7**. Administrar uma discussão com a classe sobre crescimento absoluto × crescimento relativo (percentual).

Para ampliar o **exercício 8**, pode-se pedir aos alunos que, em parceria com o professor de Geografia, coletem outros dados da região em que moram e a partir deles elaborem novas tabelas e gráficos, além de escreverem algumas conclusões a respeito desses dados. Os gráficos podem ser feitos coletivamente e expostos na própria classe ou em murais na escola, para que outras turmas conheçam o resultado da pesquisa feita, já que é de interesse geral para a região.

No **exercício 9**, é interessante incentivar os alunos a escreverem afirmações com base na observação e interpretação do gráfico. Pode-se também apresentar afirmações para que os alunos verifiquem sua veracidade com base nos dados apresentados no gráfico. Por exemplo:

- De 2011 a 2013 os lucros subiram de um ano para outro. (verdadeira)
- De 2013 a 2015 os lucros subiram de um ano para outro. (falsa)
- A maior variação de lucro líquido entre anos consecutivos ocorreu de 2012 para 2013. (falsa)

Na seção “Trabalhando a informação” das **páginas 89 e 90**, pode-se aproveitar o tema e propor aos alunos a discussão sobre ações simples com as quais cada pessoa pode se comprometer visando ao combate do mosquito transmissor da dengue, como a constante busca por depósitos de água parada em sua residência ou nos locais que frequenta.

O **exercício 15** oferece uma possibilidade de conversar com os alunos sobre a existência, a função e a importância do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) para estudantes e professores de modo geral.

Após a resolução e a discussão das respostas obtidas no **exercício 20**, bem como de suas possíveis formas de resolução, pode-se ampliar esse exercício apresentando a seguinte situação:

- Caso a tabela dos atletas mais altos fosse a seguinte:

Os atletas mais altos	
Nome	**Altura (em metro)**
Begovic (Bósnia)	1,98
Courtois (Bélgica)	1,98
Fejzic (Bósnia)	1,98
Forster (Inglaterra)	2,01
Lee Bum-Young (Coreia do Sul)	1,99
Mertesacker (Alemanha)	1,98

As respostas obtidas mudariam? Justifique.

- Encontre outras possibilidades de tabela para que as respostas dos itens **a** e **b** não se modifiquem, em relação ao exercício original.

Essa é uma maneira de o aluno, sem realizar cálculos, colocar em prática a ideia de média aritmética simples.

Algumas questões, como as apresentadas a seguir, podem complementar o **exercício 21**:

- Em que prova é mais interessante se sair melhor?
- Na nota final, que fração corresponde à prova escrita?
- Na nota final, que fração corresponde à prova prática?

Pode-se aproveitar a situação proposta no **exercício 22** e conversar com os alunos sobre:

- a importância de os alunos (especialmente nessa faixa etária) conhecerem sob quais aspectos e como são avaliados.
- a avaliação como um processo em que o professor também avalia o seu próprio trabalho e revê suas estratégias.

Vale a pena dar atenção mais especial à explicação que os alunos apresentarem no item **d** do **exercício 23**, pois é uma oportunidade de eles observarem que há, muitas vezes, problemas que podem ser resolvidos por mais de um caminho, mesmo tendo resultado único.

Após a resolução do **exercício 25**, pode-se refletir junto com os alunos que a média, em determinadas situações, pode mascarar o comportamento de uma variável em um conjunto de dados. Quando se diz, como ocorre neste exercício, que o salário médio mensal dos funcionários de uma empresa corresponde a um certo valor, e que 80% dos funcionários recebem salário menor do que esse salário médio, essa medida de tendências central não é a mais apropriada para representar a variável salário nesse conjunto de dados.

Para ampliar o **exercício 31**, pode-se solicitar que, em um dia específico, todos os alunos registrem o tempo que levaram para chegar à escola. Como questões climáticas, de transporte público etc. influenciam nesse tempo de deslocamento, é mais adequado que todos considerem um mesmo dia. Esses dados devem ser organizados em tabelas e gráficos, e pode-se pedir que sejam calculadas as medidas de tendência central, solicitando a reflexão sobre os valores encontrados.

O “Para saber mais” das **páginas 100 e 101** apresenta uma discussão sobre formas de estimativa de quantidade de pessoas aglomeradas em um evento. É muito oportuno conversar com os alunos e pedir a eles que avaliem, nas notícias envolvendo essas estimativas, que é comum haver falseamento de dados, ou seja, tentativas de persuadir os leitores por meio de dados que são manipulados sem o rigor necessário. Isso pode ocorrer pois os organizadores, por interesse em divulgar a suposta grandiosidade do evento na mídia, divulgam números superestimados. O **exercício 3** do "Agora é com você!" constitui uma boa oportunidade para essa discussão. Para realizá-lo, é bom que os alunos escolham algum evento que tenha relevância para seu cotidiano, mesmo que não tenha ocorrido em sua cidade.

No "Pense mais um pouco..." da **página 103**, coloca-se uma questão que faz jus ao nome da seção. Uma leitura rápida e descuidada pode levar o aluno a conclusões precipitadas e enganosas. Sem ser capciosa ou inatingível ao aluno desse ano, a questão exige atenção e discernimento na determinação do que é dado e do que é pedido, além da aplicação correta do conceito de probabilidade. Escrevendo as possibilidades de vitória de Lucas, verifica-se que ele possui 11 possibilidades de vitória, enquanto seu oponente possui apenas 9. Logo, a probabilidade de ele vencer é maior.

Os alunos também podem fazer novas representações dos mesmos dados apresentados no pictograma do **exercício complementar 1**, por exemplo, em gráficos de colunas ou de setor. A atenção deve estar voltada não apenas à construção do gráfico, mas ao preenchimento de todos os elementos de um gráfico: título, legenda, escala e fonte são essenciais para que se compreendam as informações, mesmo sem ter havido contato com a fonte "original".

Um levantamento similar ao proposto no **exercício complementar 7** pode ser realizado pelos alunos na escola ou em casa. Na escola, podem pesquisar a idade dos alunos ou dos funcionários. Em casa, podem fazer pesquisas de idades da vizinhança ou da família. A partir do critério escolhido, podem fazer um levantamento dessas idades, construir um gráfico de colunas com os dados e depois calcular também: idade média, idade moda e idade mediana.

Sugestão de leitura para o professor

Educação Estatística no ensino básico: uma exigência do mundo do trabalho

[...]

Estatística e histórico

A Estatística é um segmento da Matemática Aplicada surgida nas questões de estado e governo. Daí o nome Estatística ser originário do termo latino *status*. Situações ocasionais como número de habitantes, quantidade de óbitos e nascimentos, quantidades produzidas e quantitativos das riquezas formaram os primórdios dos problemas que deram início ao pensamento estatístico.

> *Inicialmente, no século XVI, pensada pelos ingleses como uma ciência política, destinava-se a descrever características de um país, tais como população, área, riquezas e recursos naturais. Deste papel histórico, origina-se a sua função de caracterização numérica de uma série de informações populacionais. Com esta abordagem, o termo é utilizado no plural, como as "estatísticas de saúde", as "estatísticas de mortalidade", as "estatísticas do registro civil", entre outras.* (2)

A Estatística vista enquanto ciência só ocorreu a partir do século XVIII, nos registros do alemão Godofredo Achenwall**, ainda como catalogação não regular de dado. (3)

Os modelos estatísticos, enquanto modelos matemáticos aplicados, reúnem características de precisão na linguagem, adequados ao ambiente de informações rápidas.

> *A necessidade de expressar o grau de incerteza na ocorrência dos experimentos e de explicar o fato de duas experiências iguais poderem ter resultados diferentes leva ao reconhecimento da racionalidade probabilística em eventos da natureza. A pesquisa em probabilidade no século XVIII culmina com o notável trabalho de Pierre-Simon de Laplace, "Theorie Analitique de Probabilités".*
>
> *À luz da concepção do cientificismo, rapidamente amplia-se o domínio de abrangência do cálculo probabilístico. Este se torna indispensável para lidar com dados relativos a temas de interesse social e econômico, como administração das finanças públicas, saúde coletiva, conduta de eleições e seguro de vida. Surgem as primeiras ideias do positivismo e Condorcet propõe uma "ciência natural da sociedade", isto é, uma "matemática social" baseada no cálculo das probabilidades.* (2)

Ao abrirmos uma revista ou um jornal é quase impossível não encontrarmos alguma representação Estatística/Matemática complementar aos textos, ilustrando ou sintetizando a comunicação, tornando a leitura mais atrativa e objetiva. Em muitos casos, os modelos estatísticos/matemáticos assumem a importância maior, ficando o texto como complemento ou restrito a observações.

Estatística e linguagem

Vale destacar que a simbologia matemática foi, e ainda é, um fator de evolução das ideias matemáticas que se desenvolveram lentamente ao longo de séculos. Essa evolução tomou por base dois objetivos permanentes:

1. tornar possível a comunicação matemática entre as pessoas, independentemente das nacionalidades e culturas;
2. simplificar a expressão das ideias e pensamentos matemáticos. Assim, a Matemática, como nenhuma outra ciência, conseguiu construir um conjunto universal de signos, moldando uma linguagem com códigos que atravessam idiomas e culturas. Dessa forma é possível, por exemplo, um matemático chinês escrever equações ou proposições que um matemático brasileiro entenderá com facilidade. Essa propriedade é utilizada pela Estatística e passa a ser apropriada largamente pela informática, permeando as comunicações no mundo cibernético.

A evolução da Matemática fez surgir aplicações específicas, com linguagens e símbolos próprios, como foi o caso da matemática financeira, com sua constante evolução, e também da Estatística.

Com o avanço tecnológico, as exigências de sofisticadas competências para o mundo do trabalho e a facilidade oferecida pela informática, as pesquisas deixaram de acontecer apenas em ocasiões para se tornarem parte integrante e inseparável de nossas vidas em todos os instantes.

> *A partir dos anos 40, a pesquisa Estatística se volta para solucionar problemas envolvendo variados aspectos da inferência, cada um tendo a sua aplicação a situações específicas. Os testes de hipóteses para médias, variâncias e proporções, a teoria dos testes uniformemente mais poderosos, o processo de inclusão (exclusão) de variáveis nos modelos de regressão são algumas das formas de inferência de uso consagrado.* (2)

O mundo corporativo*** passou a adotar a linguagem Estatística em suas rotinas operacionais exigindo dos profissionais conhecimentos e competências numéricas para o correto entendimento e produção de relatórios, tabelas, gráficos, diagramas e fluxogramas.

Na comunicação de massa, os programas de televisão com maior índice de audiência, além de serem totalmente direcionados a institutos de pesquisa, passaram a ter obrigatoriamente pesquisas interativas em suas pautas, na busca de uma permanente aproximação com o público. Contudo, diante desse ambiente saturado de informações, poucas pessoas questionam a forma como esses dados foram coletados, tratados e trabalhados até chegarem no formato "acabado" em que são apresentados. Isto é, o público tem sido consumidor de resultados de pesquisas da forma como se apresentam, sem a devida interpretação crítica e um entendimento do que se está "consumindo".

Os meios de comunicação refletem também a facilidade que os modelos estatísticos oferecem para sintetização de informações. Por exemplo: uma medida de tendência central pode representar bem o perfil de uma população, ou um histograma pode melhor apresentar um universo de dados. Existe um ditado em Matemática que diz: "Um gráfico bem construído equivale a mil palavras". Essa nova linguagem passa a demandar das pessoas o entendimento e o domínio de novos códigos diferentes do "ler e escrever" tradicionais****. É nessa perspectiva que o mundo moderno caminha, com tecnologias voláteis, otimizando espaços, tempo, recursos, e fazendo uso intenso dos argumentos estatísticos.

Nesse contexto, a escola não pode ignorar essas novas linguagens tão presentes no mundo dos educandos.

> *Os Parâmetros Curriculares Nacionais recomendam o trabalho com* ***Estatística*** [*grifo do autor*] *com a finalidade de que o estudante construa procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações, e que seja capaz de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos.* (4)

É fundamental que as práticas e os conteúdos ministrados em aula estejam em sintonia com as novas exigências do mundo em que vivemos, para que a educação não seja algo distante da vida dos alunos, mas, ao contrário, seja parte integrante de suas experiências para uma existência melhor.

** Godofredo Achenwall é considerado o pai da Estatística Moderna.

*** Mundo das organizações onde atuam os profissionais.

**** Referência à leitura escrita somente sem levar em conta o atendimento dos signos matemáticos e estatísticos.

(2) SZWARCWALD, Celia L.; CASTILHO, Euclides A. de. The paths of statistics and its incursions through epidemiology. *Cadernos Saúde Pública*, Rio de Janeiro, v. 8, n. 1, p. 5-21, jan./mar. 1992. ISSN 0102-311X.

(3) CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística fácil*. São Paulo: Saraiva, 2002.

(4) LOPES, Celi Aparecida Espasandin; MORAN, Regina Célia Carvalho Pinto. A estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o ensino fundamental. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL, EXPERIÊNCIAS E PERSPECTIVAS DO ENSINO DA ESTATÍSTICA: DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI, 1, 1999, Florianópolis. *Anais*... Florianópolis: UFSC/PRESTA/IASE, 1999. p. 167-174.

Fonte: ROSETTI JÚNIOR, Hélio. "Educação Estatística no ensino básico: uma exigência do mundo do trabalho". *Revista Capixaba de Ciência e Tecnologia*, Vitória, n. 2, p. 35-37, 1. sem. 2007. Disponível em: <http://recitec.cefetes.br>. Acesso em: 6 maio 2015.

Sugestão de atividade

Jogo da corrida estatística

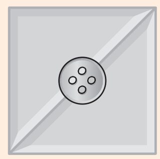
Número de participantes: 2 ou 3 jogadores

Material necessário

- Marcadores (um para cada jogador) — podem ser, por exemplo, tampinhas de creme dental ou botões.
- 1 envelope ou saquinho não transparente, para guardar as fichas.
- 15 fichas, de mesmo tamanho, numeradas de 1 a 5 (três de cada).

Regras

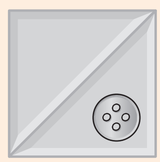
- Na trilha da página seguinte, cada quadrado representa uma casa e cada triângulo corresponde a meia casa.
- Para indicar que o jogador está na casa inteira, o marcador dele deve ficar na linha que divide o quadrado, como na figura 1.



NELSON MATSUDA

figura 1

- Para indicar que o jogador está na meia casa, o marcador dele deve ficar dentro do triângulo, como na figura 2.



NELSON MATSUDA

figura 2

- Na trilha, o jogador pode andar de casa em casa ou de meia em meia casa.
- Combina-se um critério para escolher quem será o jogador a iniciar a partida.
- Cada jogador, na sua vez, deve sortear, sem olhar, uma das 15 fichas que estão no envelope.
- A primeira ficha sorteada determina a quantidade de fichas que esse jogador deve retirar nessa rodada, incluindo a ficha já sorteada. Por exemplo: se a primeira ficha sorteada for o número 4, o jogador deverá sortear mais três fichas, para formar um grupo de 4 fichas.
- O jogador devolve as fichas ao envelope e, com os números sorteados, deve encontrar a média aritmética, a moda e a mediana.
- Após realizar os cálculos, o jogador deve escolher apenas uma dessas medidas estatísticas. O valor da medida escolhida indica o número de casas que o jogador deve andar.
- Atenção! Se o valor obtido em uma das medidas apresentar parte decimal diferente de meio, essa medida não pode ser escolhida. É obrigatório escolher uma das outras medidas.
- O jogo continua com os participantes alternando-se no sorteio de fichas até que um dos jogadores alcance ou ultrapasse a casa FIM e vença o jogo.

  Pensando na estrutura do jogo, respondam:

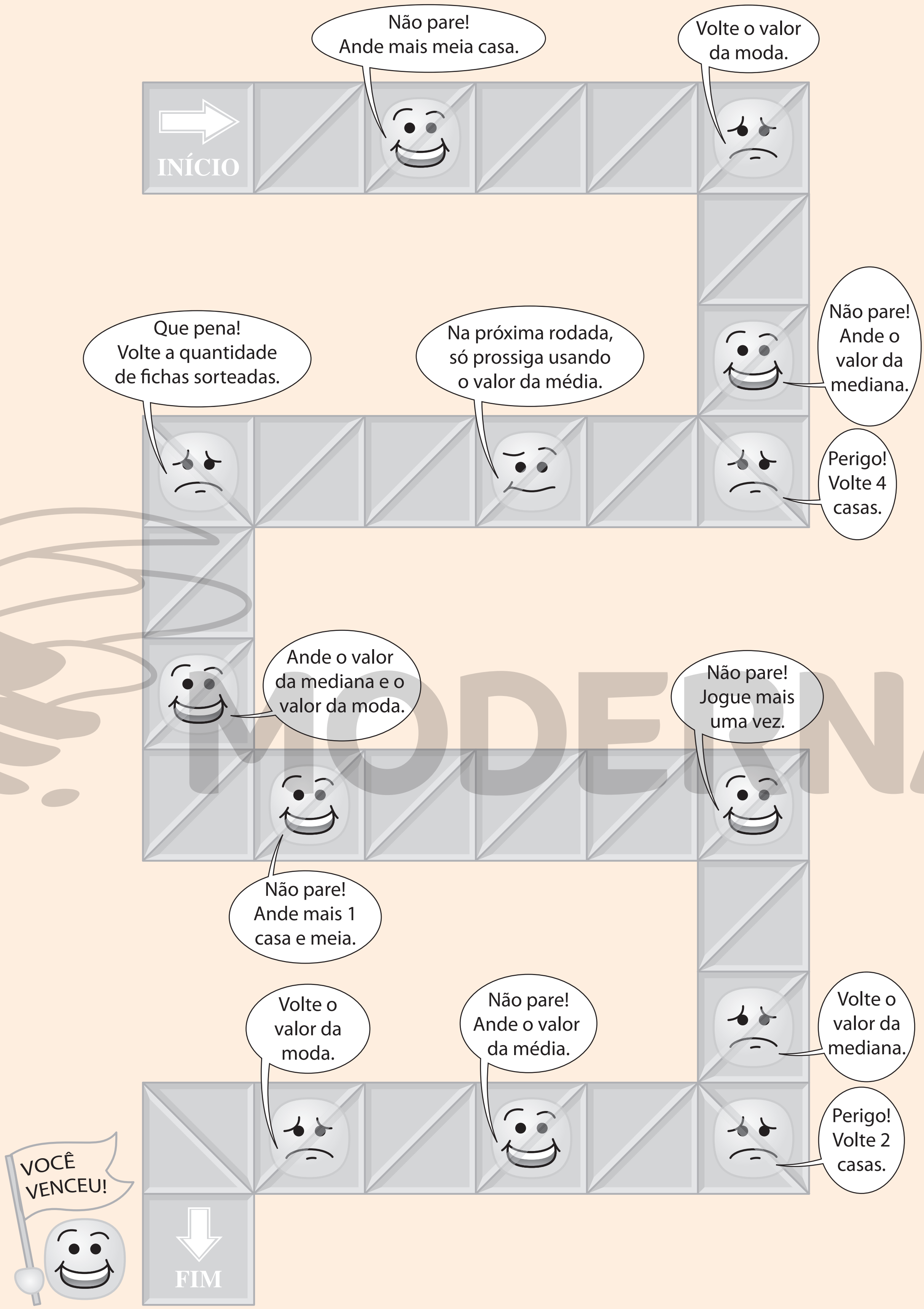
  a) A melhor escolha sempre será o maior valor obtido no cálculo das medidas estatísticas?

  b) Todas as medidas estatísticas possibilitam que o jogador ande alguma quantidade de casas na trilha? Justifique.

Respostas:

a) Não, depende da posição em que o jogador se encontra na trilha.

b) Não, pois a medida pode ser um número fracionário com a parte decimal diferente de meio.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

CAPÍTULO 4

Equações do 2º grau

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Utilizar as propriedades da igualdade, na construção de procedimentos para resolver equações do 2º grau por meio de fatorações, pelo método de completar quadrados e pelo uso da fórmula resolutiva.
- Traduzir situações-problema por equações do 2º grau.
- Resolver situações-problema que podem ser solucionadas por uma equação do 2º grau.
- Discutir o significado das raízes de uma equação do 2º grau em confronto com a situação proposta.
- Reconhecer equações que podem ser reduzidas a uma equação do 2º grau.
- Resolver situações-problema que podem ser solucionadas por equações redutíveis a uma equação do 2º grau.

Orientações gerais do capítulo

Para enriquecimento do trabalho, sugerimos os seguintes livros:

GUELLI, Oscar. *Equação*: o idioma da Álgebra. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *História da equação do 2º grau*. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari; IMENES, Luiz Márcio. *Equação do 2º grau*. São Paulo: Atual, 2004. (Coleção Pra que serve Matemática?)

ROSA NETO, Ernesto. *As mil e uma equações*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

O **exercício 6** oferece uma boa oportunidade para retomar alguns conceitos geométricos estudados em anos anteriores. Pode-se organizar os alunos em trios para que possam discutir as respostas. Outra possibilidade é complementar esse exercício solicitando aos alunos que escrevam quais os valores que x pode assumir. Espera-se que eles observem que:

$x > 0$

$x + 2 > 0$

$2x + 1 > 0$

Ou seja, para que todas as condições sejam atendidas, devemos ter $x > 0$.

Pode-se ampliar o **exercício 9** pedindo aos alunos que troquem os problemas elaborados com os de outros colegas para analisarem se a equação $x^2 + x + 5 = 0$, traduz o problema elaborado. Vale lembrar que nesse momento não será necessário que os alunos encontrem as raízes da equação $x^2 + x + 5 = 0$.

Após a resolução dos exercícios da **página 112**, é interessante propor um desafio: cada aluno deverá criar uma equação do 2º grau cujas raízes ele conheça e, então, elaborar um exercício similar a algum dessa página.

Os exercícios criados deverão ser revisados pelo professor e depois transcritos em fichas individuais, com a identificação do aluno. A classe poderá ser dividida em grupos (3 ou 4 alunos), de modo que cada grupo fique com a mesma quantidade de fichas. Solicitar que cada grupo resolva os exercícios de suas fichas e, depois, que troquem suas resoluções com as de outro grupo. Cada grupo, então, deverá analisar as resoluções de seus colegas. Após a análise, os grupos deverão conversar sobre as resoluções e as possíveis dificuldades.

Esse trabalho é importante para que os alunos realizem diferentes movimentos em relação à resolução de uma equação de 2º grau, reconheçam raízes de uma equação de 2º grau e também percebam a possibilidade de conferir respostas quando resolvem uma equação, sendo que esse último é muito esquecido quando os alunos estudam a fórmula resolutiva.

Com a intenção de retomar o estudo da linguagem algébrica, pode-se apresentar aos alunos interpretações incorretas dos **exercícios 21 e 23**, para que observem a importância de uma análise das informações contidas nos enunciados.

Por exemplo, se no **exercício 21** a tradução algébrica for:

$2x^2 + 3x = 0$ ("dobro do quadrado de um número": interpretação correta)

$(2x)^2 + 3x = 0$ ("quadrado do dobro de um número": interpretação errada)

E no **exercício 23**:

$x^2 - 2x = 10x$ ("quadrado da idade subtraído do dobro é igual a dez vezes a idade": interpretação correta)

$(x^2 - 2x)^2 = 10x$ ("idade subtraída do dobro da idade elevada ao quadrado é igual a dez vezes a idade": interpretação errada)

Uma possibilidade de complementar o **exercício 30** é pedir aos alunos que formem duplas ou trios e esbocem um desenho similar com todas as dimensões conhecidas. A partir desses dados, eles deverão formular um problema que possa ser resolvido por meio de equação de 2º grau. Pedir-lhes que troquem o problema formulado com o de outra dupla e depois confiram as resoluções.

É importante caminhar pela classe para observar como os alunos construíram e completaram a tabela solicitada no **exercício 35**, fazendo intervenções para que eles façam os ajustes quando necessário.

Em seguida, podem ser expostas tabelas diferentes para que os alunos observem e comparem as informações que ali estão presentes, pois assim poderão perceber quanto a tabela traduz os dados do problema a ser resolvido.

Na seção "Pense mais um pouco..." da **página 118**, solicite que, após a resolução, alguns alunos exponham o seu modo de resolver. Vejamos uma possibilidade:

Aresta da caixa-d'água menor: x

Aresta da caixa-d'água maior: $x + 1$

Volume da caixa-d'água menor: x^3

Volume da caixa-d'água maior: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Diferença entre os volumes: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

Como 91.000 litros é igual a 91 m^3, então devemos ter:

$3x^2 + 3x + 1 = 91$

$3x^2 + 3x - 90 = 0$

$x^2 + x - 30 = 0$

Logo, $x = 5$ ou $x = -6$

Como x é a medida de uma aresta, só poderá ser 5.

Assim, as arestas da caixa-d'água menor medem 5 m e as da caixa-d'água maior medem 6 m.

Uma estratégia possível para a discussão e resolução do **exercício 41** é escolher dois alunos da turma e pedir a um deles que leia pausadamente o enunciado para que o outro possa fazer, na lousa, a representação geométrica desse enunciado.

À medida que o problema é lido e registrado na lousa, os demais alunos também podem dar dicas e sugestões. Assim que o desenho estiver pronto, os dois alunos retornam aos seus lugares. Nesse momento, convém questionar, para a reflexão da classe, que condição x deve satisfazer para que o problema seja exequível ($x > 15$).

Após o tempo combinado, uma nova dupla de alunos vai à lousa para explicar como chegou à solução do problema. E, mais uma vez, todos que acharem necessário devem expor suas dúvidas e sugestões.

Após os alunos resolverem os **exercícios 42 e 43**, peça que formem duplas e:

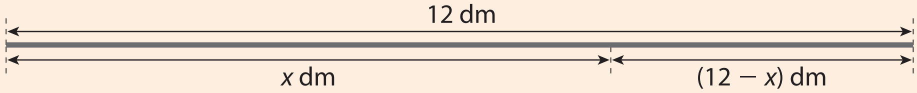
- comparem as respostas encontradas e os caminhos de resolução.
- confiram as respostas, retomando o enunciado, substituindo pelo número encontrado e verificando se encontram uma igualdade.
- façam os ajustes necessários e chamem o professor em caso de divergências.

Complemente o **exercício 46** pedindo aos alunos que reproduzam a figura no caderno e escrevam em cada um dos retângulos a sua área e, por fim, calculem a área total, verificando se está de acordo com o esperado (dados do problema).

Esse movimento de resolver e, em seguida, avaliar a resposta encontrada é de extrema importância, pois leva os alunos a perceber que não é apenas o professor que pode afirmar se a resolução está correta, essa avaliação pode e deve ser feita pelos próprios alunos, até mesmo porque em situações reais eles deverão tomar decisões sem o auxílio do professor.

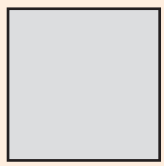
Para que os alunos possam traduzir a situação, apresentada no **exercício 51**, em uma equação é fundamental que façam a representação gráfica da mesma. Vejamos uma possibilidade:

- Recorte feito no pedaço de arame de 12 dm:



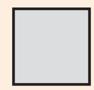
- Quadrados construídos:

I



Perímetro: x dm

II



Perímetro: $(12 - x)$ dm

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Lado do quadrado I (em dm): $\dfrac{x}{4}$ Lado do quadrado II (em dm): $\dfrac{12 - x}{4}$

Logo, temos:

Área do quadrado I: $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$ Área do quadrado II: $\left(\dfrac{12 - x}{4}\right)^2 = \dfrac{144 - 24x + x^2}{16}$

Como a soma das áreas é igual a 5 dm^2, temos que:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{144 - 24x + x^2}{16} = 5 \Rightarrow 2x^2 - 24x + 144 = 80 \Rightarrow 2x^2 - 24x + 64 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

Nessas condições, temos que $x = 8$ ou $x = 4$

Voltando ao problema inicial, temos:

— se $x = 4$, o outro pedaço terá 8 dm $(12 - 4)$.

— se $x = 8$, o outro pedaço terá 4 dm $(12 - 8)$.

Portanto, o corte foi feito a 4 dm ou a 8 dm da extremidade.

Para a resolução do **exercício 59** é importante que os alunos reflitam a respeito das condições para que uma equação de 2º grau tenha ou não raízes reais sem apenas "decorar" as regras.

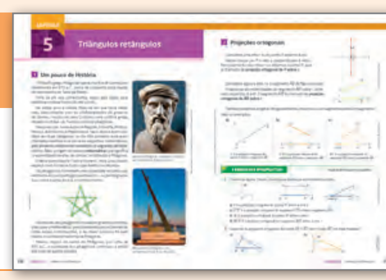
Após a resolução do **exercício 67**, faça com os alunos um levantamento das estratégias utilizadas para chegar à resposta. Verifique quantos alunos utilizaram as relações de Girard e quantos não as utilizaram.

Atividades como *A leitura de um mapa*, *anamorfose geográfica*, da seção "Trabalhando a informação", das **páginas 129 e 130**, promovem nos alunos um olhar e uma ação que transcendem o campo da Matemática. A execução desta atividade instrumentaliza o educando em outras linguagens, além de desenvolver a sua capacidade leitora em Geografia.

O **exercício complementar 6** pode ser ampliado pedindo aos alunos que, em um papel quadriculado, tracem os terrenos e o campo de futebol a fim de comparar visualmente as áreas das figuras.

CAPÍTULO 5

Triângulos retângulos



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Conhecer o teorema de Pitágoras e algumas aplicações.
- Resolver problemas envolvendo o teorema de Pitágoras.
- Conhecer e utilizar em situações-problema as relações métricas em triângulos retângulos.
- Ler e interpretar gráfico do tipo pirâmide etária.

Orientações gerais do capítulo

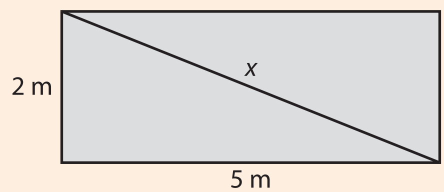
O capítulo inicia com um texto de História da Matemática que apresenta a escola pitagórica, seu lema e sua contribuição na construção da Matemática, palavra cuja origem é atribuída a Pitágoras.

Os principais itens teóricos deste capítulo — *Teorema de Pitágoras* e *relações métricas em um triângulo retângulo* — podem ter uma abordagem paralela à da leitura do texto ou da aula expositiva. Para isso, se julgar conveniente, pedir aos alunos que reproduzam, por cópia manual ou por fotocópia (ampliada ou não), e recortem as ilustrações que acompanham o texto. A seguir, peça que manipulem essas partes recortadas de modo a compô-las de acordo com as figuras do livro e que também pesquisem livremente outras composições.

No **exercício 3**, os alunos têm a possibilidade de escrever relações entre o quadrado da medida do lado maior e a soma das medidas dos quadrados dos outros dois lados de um triângulo qualquer. A intenço aqui é prosseguir a discussão de modo que os alunos percebam que a igualdade acontecerá apenas no caso dos triângulos retângulos.

Para auxiliar na resolução dos **exercícios 14 e 15**, pode-se pedir aos alunos que façam um esquema representando cada situação.

Um possível esquema que representa o **exercício 15** é:



NELSON MATSUDA

Logo, para achar o valor de x, em metros, basta fazer:

$$x^2 = 2^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 4 + 25 \Rightarrow x^2 = 29 \Rightarrow x \simeq 5{,}38$$

Portanto, a medida de cada ripa é de aproximadamente 5,38 m.

A seção “Para saber mais” das **páginas 138 e 139** oferece uma boa oportunidade de trabalhar conceitos aprendidos anteriormente, como semelhança de triângulos e proporcionalidade. Explorar com os alunos as diferentes estratégias de resoluções dos exercícios propostos nessa seção. Para ampliar o item **d**, pedir aos alunos que construam os triângulos cujas medidas obtiveram na tabela que elaboraram. A seguir, pedir que verifiquem com um transferidor se esses triângulos construídos são triângulos retângulos.

Solicitar, mesmo antes de os alunos realizarem qualquer tipo de cálculo, que eles expliquem como irão calcular o perímetro do retângulo formado no **exercício 19**, ou seja, quais medidas serão necessárias para chegar a esse valor.

Espera-se que os alunos respondam algo como:

- Basta conhecer a medida do lado de cada quadrado;
- O contorno desse retângulo é composto por 8 lados do quadrado.

No **exercício 25** é importante que os alunos verifiquem e justifiquem que o triângulo *ABC* é equilátero.

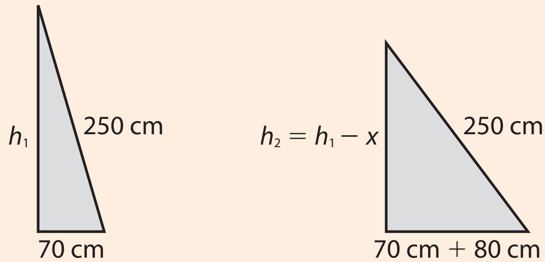
Além disso, para ampliar esse exercício, pode-se pedir aos alunos que façam os mesmos cálculos para encontrar a área do triângulo *ABC*, considerando que:

- o raio da circunferência seja o dobro de 1,5 cm;
- o raio da circunferência seja a metade de 1,5 cm.

Antes dos cálculos, pedir a eles que estimem quanto a área do triângulo aumentará ou diminuirá conforme as modificações nas medidas dos raios. Após a realização dos cálculos, pedir que eles façam comparações com suas estimativas.

No “Pense mais um pouco...” da **página 142**, convém deixar que os alunos façam a resolução, inicialmente, por tentativa e erro. Após certo tempo, pode-se questioná-los sobre como compor, com dois dos triângulos recortados, um ângulo reto, que forma um “canto do quadrado” a ser obtido. Esse questionamento (ou dica) suscitará uma reflexão, motivando um redirecionamento de novas tentativas, e constituirá um estímulo àqueles que ainda não chegaram à resposta.

Para facilitar a resolução do **exercício complementar 3**, peça aos alunos que representem separadamente as duas situações por meio de esquemas. Um modo de fazerem essa representação é:



situação 2 **situação 1**

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Como $x = h_1 - h_2$, usando o teorema de Pitágoras, temos:

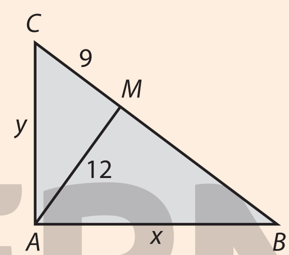
h_1	h_2
$250^2 = 70^2 + h_1^2$	$250^2 = 150^2 + h_2^2$
$h_1^2 = 57.600$	$h_2^2 = 40.000$
$h_1 = 240$	$h_2 = 200$

Logo, $h_1 - h_2 = 240 - 200 = 40$

Dessa maneira, a escada se deslocou 40 cm para baixo.

No **exercício complementar 20**, para facilitar a resolução, pode-se pedir aos alunos que representem essa situação com esquemas e só então apliquem as relações métricas necessárias.

Uma possível resolução é a seguinte:



NELSON MATSUDA

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$x^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$

Pela 2ª relação, temos que:

$\dfrac{12}{MB} = \dfrac{9}{12} \Rightarrow MB = \dfrac{12 \cdot 12}{9} \Rightarrow MB = 16$

Finalmente, usando o teorema de Pitágoras mais uma vez, temos que:

$y^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow y = \sqrt{400} \Rightarrow y = 20$

Desta forma, é possível concluir que: os catetos desse triângulo medem 15 cm e 20 cm.

O **exercício complementar 22** exige que os alunos utilizem adequadamente as relações métricas no triângulo retângulo e que interpretem e relacionem as informações contidas no enunciado. Vejamos uma possível resolução:

Empregando o teorema de Pitágoras, podemos encontrar a medida BC:

$$(BC)^2 = 12{,}8^2 + 9{,}6^2 \Rightarrow BC = \sqrt{163{,}84 + 92{,}16} \Rightarrow BC = \sqrt{256} \Rightarrow BC = 16$$

Aplicando a 3ª relação, podemos encontrar a medida AM:

$$16 \cdot AM = 12{,}8 \cdot 9{,}6 \Rightarrow AM = \frac{12{,}8 \cdot 9{,}6}{16} \Rightarrow AM = 7{,}68$$

Usando a 1ª relação, podemos encontrar a medida BM:

$$\frac{16}{12{,}8} = \frac{12{,}8}{BM} \Rightarrow BM = \frac{12{,}8^2}{16} \Rightarrow BM = 10{,}24$$

Utilizando a informação de que "*P* está a 80 metros de *M*", podemos concluir que:

$MP = 80$ metros $= 0{,}08$ km

Assim,

$$BP = BM + MP = 10{,}24 \text{ km} + 0{,}08 \text{ km} = 10{,}32 \text{ km}$$
$$PC = BC - BP = 16 \text{ km} - 10{,}32 \text{ km} = 5{,}68 \text{ km}$$

Agora, basta somar todas as distâncias percorridas:

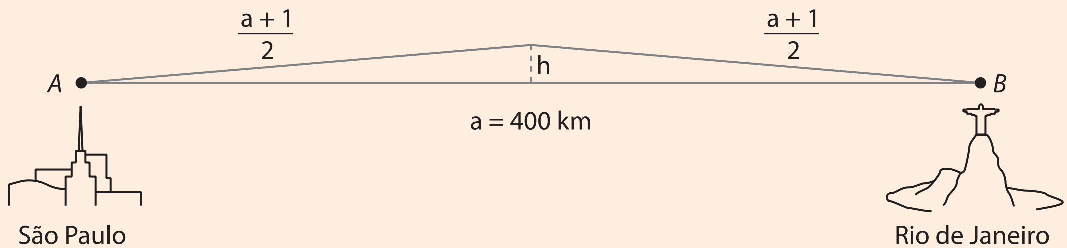
$$AM + MB + BA + AC + CP = 7{,}68 + 10{,}24 + 12{,}8 + 9{,}6 + 5{,}68 = 46$$

Desse modo, temos o percurso total de 46 km.

Sugestão de leitura para o professor

De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda "ideal"

Tome uma corda esticada, unindo um ponto A de São Paulo a um ponto B do Rio de Janeiro. Suponha que a distância entre estes pontos A e B seja de exatamente 400 km. Tome outra corda com um metro a mais que a anterior, ou seja, com 400.001 metros, e fixe também suas extremidades nos pontos A e B. Ela ficará bamba. Levante esta corda pelo seu ponto médio formando um triângulo, conforme a figura 1:



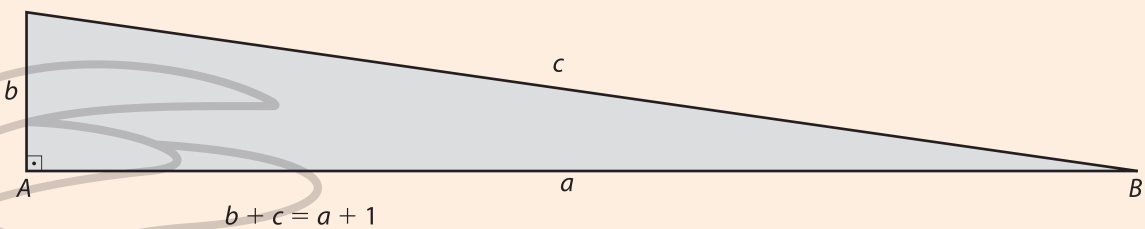
ADILSON SECCO

figura 1

Pergunta-se:

i) A altura h deste triângulo formado será maior ou menor que um metro?

ii) O que ocorreria com a altura, se o triângulo formado fosse como o da figura 2?



ADILSON SECCO

figura 2

Por mais absurdo que possa parecer, caberia dentro do triângulo, no caso i), um prédio de forma retangular com 126 andares de altura e 50 quarteirões de comprimento!

Ao fazermos as contas, vemos que a altura h será aproximadamente 447 metros no caso i) e 0,99999 metros no caso ii), que são valores bem diferentes do imaginado.

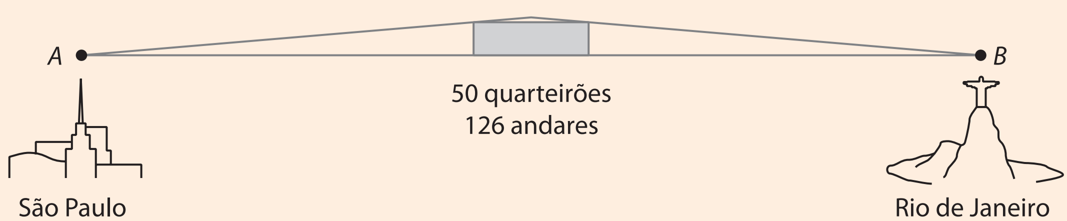
Vejamos as soluções:

i) Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$h^2 = \left[\frac{a+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{a}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}(2a+1)$$

Logo, $h = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1}$

Sendo $a = 400.000$ m, temos $h = \frac{1}{2}\sqrt{800.001} \simeq 447$ m.



ADILSON SECCO

ii) Neste caso temos as relações $\begin{cases} b + c = a + 1 & (1) \\ b^2 + a^2 = c^2 & (2) \end{cases}$

De (1) temos $c = a - b + 1$, que, aplicado com (2), dá:

$$b^2 + a^2 = b^2 + a^2 + 1 + 2a - 2ab - 2b$$

ou seja, $2ab + 2b = 2a + 1$. Logo, $b = \frac{2a+1}{2a+2}$

Sendo $a = 400.000$ m, temos $b = \dfrac{800.0001}{800.0002} \simeq 0{,}999999$ m.

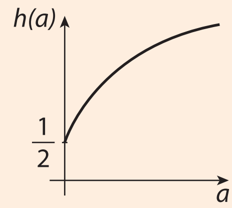
Fazendo os gráficos de h e b como funções de a, temos:

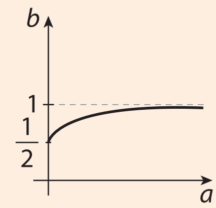
Para nossa surpresa:

$h \to \infty$ quando $a \to \infty$,

$b \to 1$ quando $a \to \infty$.

Perplexos com a solução, ficamos a imaginar por que falha a nossa intuição.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Fonte: DUARTE JÚNIOR, G. G. De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda "ideal". *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 22, n. 1, p. 1-3, 1992.

CAPÍTULO 6

Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Compreender e utilizar as ideias de razões trigonométricas, a partir da semelhança de triângulos.
- Resolver problemas aplicando as razões trigonométricas.
- Utilizar, em problemas, a tabela de razões trigonométricas.
- Ler e interpretar um gráfico de perfil topográfico.

Orientações gerais do capítulo

Uma maneira de explorar o início desse capítulo é pedir aos alunos que façam algumas pesquisas sobre a origem e o significado da palavra trigonometria. Não é necessário que coletem muitas páginas de pesquisa, mas curiosidades que possam ser relatadas oralmente.

Para enriquecer o trabalho com esse tema, sugerimos o livro:

GUELLI, Oscar. *Dando corda na trigonometria*. São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

Como o **exercício 4** exige a construção de um triângulo retângulo que tenha um ângulo de 45°, há possibilidade de infinitas construções. Porém, é essencial que os alunos façam os cálculos solicitados e depois comparem com os de outros alunos para que observem que, em qualquer triângulo retângulo que tenha um dos ângulos internos com medida igual a 45°, a resposta de cada item será a mesma.

Se considerar conveniente, o exercício pode ser ampliado, pedindo aos alunos que refaçam o item **a**, substituindo a palavra "adjacente" pela palavra "oposto", e no item **b**, substituindo cos 45° por sen 45°.

Uma possibilidade de explorar o **exercício 8** é pedir a todos os alunos que justifiquem a afirmação oralmente. Como sabemos que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Daí, uma possível justificativa seria:

Como seno e cosseno são razões entre duas medidas e essas medidas são necessariamente positivas, a razão será positiva também e, como em qualquer triângulo retângulo a medida da hipotenusa é maior que a medida de qualquer cateto, essas razões serão necessariamente menores que 1.

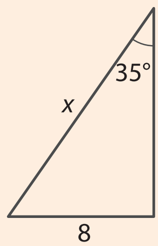
O **exercício 14** é uma atividade a ser feita em grupo e contribui para que os alunos descubram algumas relações importantes das razões trigonométricas:

- O seno de um ângulo agudo e o cosseno do seu complementar são iguais.
- A tangente de um ângulo agudo e a tangente do seu complementar são números inversos.
- A razão entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo é igual à tangente desse ângulo.

Um complemento de resolução da seção “Pense mais um pouco...” da **página 159** é pedir aos alunos que, após resolverem esse exercício sem o uso do transferidor, confiram as respostas obtidas fazendo uso de tal instrumento.

No **exercício 18**, para facilitar sua resolução, pode-se pedir aos alunos que façam um esboço da situação.

Um esboço dessa situação seria:

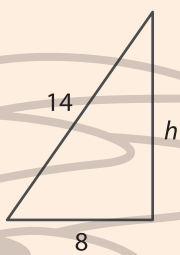


$$\text{sen } 35° = \frac{8}{x} \Rightarrow 0{,}5736 = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{0{,}5736} \simeq 13{,}9 \Rightarrow x \simeq 14$$

ADILSON SECCO

Portanto, cada lado desse triângulo isósceles terá 14 cm.

A partir dessa informação, será possível encontrar a altura relativa à base:



$14^2 = h^2 + 8^2$

$h^2 = 196 - 64 = 132$

$h = \sqrt{132}$

$h \simeq 11{,}5$

ADILSON SECCO

Portanto, a medida da altura relativa à base desse triângulo isósceles é de aproximadamente 11,5 cm.

Antes de começar o **exercício 19**, convém combinar com os alunos qual será o critério de arredondamento das casas decimais, pois as aproximações podem ser diferentes, dependendo da quantidade de casas decimais consideradas. Façamos os cálculos usando tg $28° = 0{,}53$ (com as duas casas decimais).

a) Se chamarmos de x a largura do retângulo, temos que:

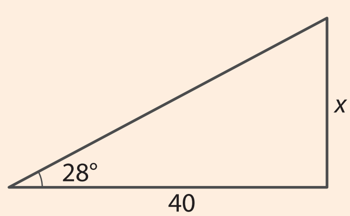
$$\text{tg } 28° = \frac{x}{13{,}5} \Rightarrow 0{,}53 = \frac{x}{13{,}5} \Rightarrow x \simeq 7{,}16$$

b) *Área* $= 13{,}5 \cdot 7{,}16 = 96{,}66$

No **exercício 23**, os alunos devem estar atentos e interpretar adequadamente a medida 1,60 m que aparece na ilustração. Essa medida indica a distância dos olhos do observador ao chão, portanto ela deverá ser considerada para encontrar a altura aproximada da torre.

Agora, vamos fazer os cálculos usando tg $28° = 0{,}5317$ (com quatro casas decimais).

Nesse caso, temos:



ADILSON SECCO

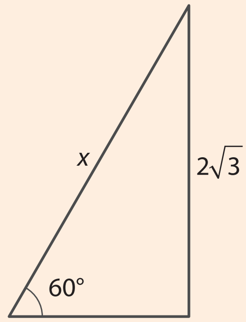
$$\text{tg } 28° = \frac{x}{40} \Rightarrow 0{,}5317 = \frac{x}{40} \Rightarrow x \simeq 21{,}3$$

Assim, a altura da torre será de $21{,}3 + 1{,}60 = 22{,}9$, ou seja, aproximadamente 22,9 metros.

O **exercício 26**, tal como o **exercício 14**, deve ser resolvido em grupo. Também propõe aos alunos uma pesquisa que os induz à descoberta de uma relação trigonométrica importante: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Essa atividade fica para o aluno do 9º ano como uma primeira abordagem da relação fundamental da trigonometria, que será estudada com mais destaque no Ensino Médio.

No **exercício 32**, os alunos podem usar as razões trigonométricas ou o teorema de Pitágoras, considerando as propriedades de um triângulo equilátero.

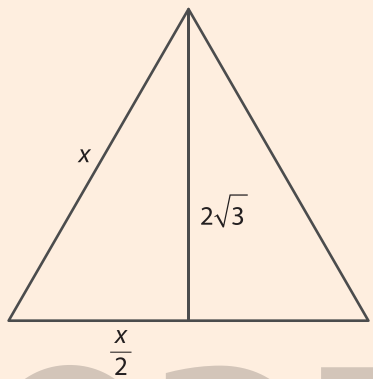
Usando as razões trigonométricas, temos:



ADILSON SECCO

$$\text{sen } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{\text{sen } 60°} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 4$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:



ADILSON SECCO

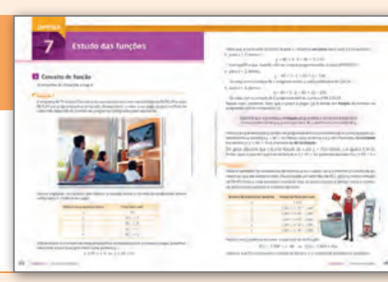
$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 12 \Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow x = 4$$

Uma maneira de ampliar o **exercício complementar 10** é pedir aos alunos que criem outros problemas similares a esse utilizando esquemas de ruas próximas à sua residência ou à escola.

É preciso salientar que o **exercício complementar 21** é uma questão de vestibular que solicita uma explicação do raciocínio utilizado, ou seja, não adianta apenas resolver e chegar à resposta esperada, é imprescindível escrever a explicação. Por isso, é interessante pedir aos alunos que compartilhem, com os demais colegas da classe, o raciocínio utilizado para resolver o problema.

CAPÍTULO 7

Estudo das funções



Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Compreender a ideia de função.
- Escrever a lei de formação de uma função de 1º grau.
- Representar graficamente uma função de 1º grau.
- Resolver situações-problema que envolvam a ideia de função de 1º grau.

- Representar graficamente uma função de 2º grau.
- Resolver situações-problema que envolvam a ideia de função de 2º grau.

Orientações gerais do capítulo

Para enriquecer o trabalho com funções, sugerimos os livros:

ROSA NETO, Ernesto. *Em busca das coordenadas*. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

Algumas questões podem ampliar as discussões do **exercício 1**:

- Por que no enunciado há a informação "não importando a quantidade que se compre"?
- Mesmo antes de estudar o tema funções, se você soubesse o preço unitário de um produto, saberia quanto deveria ser pago a partir do número de unidades adquiridas? E se você soubesse quantos reais foram gastos com determinado produto, saberia calcular o preço unitário desse produto, a partir do número de unidades adquiridas?
- Essa relação valerá para qualquer produto?

Vale lembrar que as respostas para essas questões são pessoais, e que essas questões são apenas sugestões que podem ser feitas de acordo com o andamento da resolução.

No **exercício 3**, sugerir aos alunos a construção de uma tabela para que registrem de maneira organizada alguns valores. A tabela os ajudará a perceber a regularidade presente nos cálculos para, então, chegar à lei da função esperada. Eles poderão fazer uma tabela do tipo:

Tempo de uso do estacionamento (em horas)	Valor a ser pago (em reais)
1	5
2	$5 + 2 = 5 + 1 \cdot 2 = 7$
3	$5 + 2 + 2 = 5 + 2 \cdot 2 = 9$
4	$5 + 2 + 2 + 2 = 5 + 3 \cdot 2 = 11$
8	$5 + (8 - 1) \cdot 2 = 5 + 7 \cdot 2 = 19$
10	$5 + (10 - 1) \cdot 2 = 5 + 9 \cdot 2 = 23$
x	$5 + (x - 1) \cdot 2$

Mais uma vez, no **exercício 6**, a tabela poderá ser um recurso interessante para a organização dos cálculos e registro dos valores encontrados, pois facilitará uma observação de como a função se "comporta" de acordo com os valores de x.

x	$f(x) = 4x + 9$
2	$f(2) = 4 \cdot 2 + 9 = 17$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 11$
-2	$f(-2) = 4 \cdot (-2) + 9 = 1$
$-0{,}3$	$f(-0{,}3) = 4 \cdot (-0{,}3) + 9 = 7{,}8$
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = 4 \cdot \sqrt{2} + 9 = 4\sqrt{2} + 9$

Desta forma, os alunos têm a possibilidade de observar o que acontece quando aumentamos ou diminuímos os valores atribuídos a x.

Para resolver o **exercício 7**, vale a pena recordar com os alunos que, considerando as diagonais d_1 e d_2, temos que a área do losango é dada por: $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Dessa maneira, podemos acompanhar a resolução de cada item, considerando $d_1 = 12$ e $d_2 = x$:

a) $A = \frac{12x}{2} \Rightarrow A = 6x$

b) Se $x = 7$, então podemos usar a relação acima e calcular $A = 6 \cdot 7 = 42$.

c) Se $A = 45$ cm², então $45 = 6x \Rightarrow x = \frac{45}{6} = 7{,}5$.

Em geral, nas situações contextualizadas, convém questionar os alunos sobre as condições e limites que esse contexto impõe às variáveis. Assim, pode-se perguntar entre quais valores a medida da diagonal menor se situa. Espera-se que os alunos concluam que $0 < x < 12$. Em consequência, a área desse losango situa-se entre quais valores? Espera-se $0 < A < 72$ como resposta.

Pode-se pedir aos alunos que resolvam o **exercício 10** em duplas para que tenham a oportunidade de trocar ideias sobre as diferentes possibilidades de representar esse retângulo. Acompanhe as resoluções e faça as intervenções necessárias para que os alunos utilizem adequadamente a ideia de função nesse contexto.

No item **a**, é preciso encontrar a relação que possibilita calcular a área desse retângulo. Com a afirmação "com 10 m de comprimento e a largura com *x* metros a menos", podemos escrever que:

Largura	Comprimento	Área do retângulo
10	$10 - x$	$10(10 - x) = 100 - 10x$

Assim, podemos montar a tabela solicitada:

Valor de *x*	1	2	3	4	5
Área	$A = 100 - 10 \cdot 1 = 90$	$A = 100 - 10 \cdot 2 = 80$	$A = 100 - 10 \cdot 3 = 70$	$A = 100 - 10 \cdot 4 = 60$	$A = 100 - 10 \cdot 5 = 50$

Para chegar à conclusão de que o valor de *x* não pode ser igual ou maior que dez, no item **b**, os alunos tanto podem atribuir valores para *x* na expressão $A = 100 - 10x$ ou podem usar diretamente a afirmação de que a largura tem *x* metros a menos que os 10 m do comprimento".

No item **c**, temos uma generalização da relação observada no item anterior. Vale comentar com os alunos que podemos atribuir quaisquer valores que estiverem nesse intervalo a *x*, sejam eles naturais ou não. Essa ressalva é importante, pois no item **a** os alunos fizeram apenas "testes" com números naturais e podem acreditar que só esses números são válidos na relação.

Após ter realizado diversas atividades em que é necessário encontrar a lei de formação de uma função, os alunos farão o mesmo na seção "Pense mais um pouco..." da **página 183**, mas o foco principal será observar por que essa função não pode ser representada por uma reta e o que significa ser uma grandeza discreta. Pode-se levantar com os alunos exemplos de outras situações que envolvem grandezas discretas.

Para complementar o **exercício 21**, pode-se pedir aos alunos que façam pesquisas a respeito de diferentes altitudes encontradas no Brasil e, em seguida, montem uma tabela comparando as diferentes temperaturas de ebulição da água nessas diferentes altitudes. Essa pesquisa pode ser feita com o auxílio do professor de Geografia, e até mesmo um trabalho conjunto com essa área do conhecimento pode ser realizado.

Se achar conveniente, combinar um tempo e pedir aos alunos que resolvam o **exercício 25** individualmente, e em seguida solicitar que troquem de caderno com outro colega, de modo que cada um corrija a resolução do outro. Nessa troca e observação da resolução do outro colega, os alunos têm oportunidade de expor suas ideias e dúvidas.

No **exercício 27**, pode-se fazer questionamentos que possam ser resolvidos apenas com a observação e interpretação do gráfico, sem o uso de cálculos. Propor questões cujas respostas possam ser aproximadas e conversar sobre a validade dessas aproximações. Como exemplo de perguntas, temos:

- Qual é a massa de 10 cm³ de álcool? E de 30 cm³ de álcool? E de 45 cm³ de álcool?
- Qual é o volume de 10 g de álcool? E de 20 g de álcool? E de 35 cm³ de álcool?

Para complementar as questões da seção "Pense mais um pouco..." da **página 187**, pode-se propor outras, como:

- O que representa graficamente $f(x) = g(x)$?
- Esboce o gráfico de outras duas funções polinomiais do 1º grau que também tenham pontos em comum.
- Esboce o gráfico de outras duas funções polinomiais do 1º grau que não tenham pontos em comum.
- Como são as retas desse último caso?

O **exercício 31** merece uma atenção especial por possibilitar infinitas respostas. Por isso, é preciso dar condições para que todos os alunos tenham certeza de que a "sua função" está de acordo com o enunciado, mas sabendo que aquela não é a única resposta possível.

Vale a pena fazer com que os alunos confiram suas próprias respostas, retomando o enunciado e testando as condições na função escolhida; além disso, a troca com outros colegas possibilitará verificar eventuais erros, assim como a observação de que há outras possibilidades de resposta.

Se achar adequado, na seção “Para saber mais” das **páginas 189 e 190,** deixar que os alunos utilizem calculadora para resolver o problema e para testar o que acontece com outras taxas de juro simples. Ou, ainda, para conferir as respostas obtidas por meio de cálculos feitos sem o uso desse instrumento. Afinal, nas situações reais que envolvem cálculos de juro é extremamente comum o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas.

Uma possível ampliação do **exercício 33** é pedir que, por meio de fatorações, os alunos encontrem outras figuras que tenham a mesma área. Por exemplo, no item **b**, em que a área do triângulo é dada por $5x^2 - 3x$, temos:

$$5x^2 - 3x = x(5x - 3)$$

$$5x^2 - 3x = 5x\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

Nesse caso, um retângulo cujas dimensões são x e $5x - 3$ ou outro que tenha as dimensões $5x$ e $x - \frac{3}{5}$ têm a mesma área do triângulo do item **b**.

É impossível ampliar a questão da seção “Pense mais um pouco...” da **página 203**. Se julgar conveniente, propor aos alunos que calculem quantos segmentos podemos traçar com extremidades em 13 pontos distintos de uma circunferência. Após a resolução, cujo resultado deve apontar para 78 segmentos, comente a respeito da similaridade, do ponto de vista da Matemática, entre essa questão e a que está no livro do aluno, embora ambas se insiram em contextos muito diversos. É um bom momento para situar essa face da Matemática que racionaliza e sintetiza a resolução de problemas aparentemente diferentes.

CAPÍTULO 8

Circunferência, arcos e relações métricas

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Resolver problemas que envolvam o comprimento de uma circunferência e de um arco de circunferência.
- Conhecer e aplicar propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência.
- Reconhecer e utilizar, em situações-problema, as relações métricas em uma circunferência.
- Construir um gráfico constituído por uma semicoroa circular.

Orientações gerais do capítulo

O conceito de proporcionalidade, frequente no desenvolvimento de vários conteúdos abordados ao longo do Ensino Fundamental, se faz presente neste capítulo no item *Arco de circunferência*.

Analogamente, a proporcionalidade também é aplicada no cálculo da área de um setor circular, a ser estudado no capítulo 9. Seria interessante chamar a atenção do aluno para tal fato.

No **exercício 3**, os alunos deverão perceber, por meio da ilustração, que a parte de cima da porta é uma semicircunferência de raio medindo 70 cm. Assim, deverão chegar à conclusão de que o comprimento dessa semicircunferência, em metros, será:

$$C_{semi} = \frac{2\pi r}{2} = 3{,}14 \cdot 0{,}7 = 2{,}198$$

As laterais da porta são dois segmentos de reta, sendo que cada um deles tem comprimento igual a 2,60 m − 0,7 m, ou seja, cada um deles tem 1,90 m. Logo, essas duas laterais têm um total de 3,8 m.

Dessa forma, o acabamento em vermelho tem um total de 2,198 m + 3,8 m = 5,998 m.

Uma maneira de complementar o **exercício 4** é pedir aos alunos que levem para a classe régua ou trena que tenham escalas em polegada e em centímetro. Levar também diversos pedaços de canos plásticos, com diâmetros diferentes, para que os alunos possam medi-los. Também podem ser medidas as telas (na diagonal) de aparelhos celulares, de GPS, de monitores de computador, de televisores.

Se considerar adequado, pedir aos alunos que formem duplas para resolver o **exercício 5** e incentive-os a fazer um esboço da situação. É possível que eles façam os cálculos necessários sem fazer as transformações necessárias das unidades de medida. Nesse caso, faça intervenções para que percebam que o exercício solicita a velocidade em km/h e que nenhum dado original está nessas unidades. Vejamos uma possível resolução:

Se a roda da moto tem diâmetro de 70 cm, então podemos calcular seu comprimento:

$C = \pi \cdot d \Rightarrow C = 3{,}14 \cdot 70 \Rightarrow C = 219{,}8$

Logo, em 10 voltas, ela percorrerá um total de 2.198 cm, que é equivalente a 21,98 metros ou, ainda, 0,02198 km. Com essa informação, podemos utilizar a regra de três e encontrar a velocidade, lembrando que 1 segundo é equivalente a $\frac{1}{3.600}$ hora.

Distância (em km)	Tempo (em hora)
0,02198	$\frac{1}{3.600}$
x	1
$x = \frac{0{,}02198}{\frac{1}{3.600}} = 0{,}02198 \cdot 3600 = 79{,}128$	

Logo, a velocidade aproximada é de 79,128 km/h.

Pode-se complementar a atividade da seção “Pense mais um pouco...” da **página 211**, propondo outras questões em que seja necessário utilizar a informação de que a lata tem 12 cm de altura. Na atividade proposta no livro, os alunos devem estar atentos para o fato de que, para chegar à resposta esperada, não é necessária essa informação, uma vez que a altura da lata não influencia na quantidade de fita adesiva passando pela linha vermelha; o que importa, nesse caso, é o raio da base dessa lata.

Uma alternativa para discutir o **exercício 14** é pedir a alguns alunos que expliquem para os demais colegas o procedimento utilizado para chegar à resposta. É importante que os alunos percebam que o “caminho sinuoso” é sempre mais longo que o “caminho reto”. Desse modo, será possível saber que o comprimento da linha é maior que 6,7 cm, que é a distância em linha reta das duas extremidades da linha.

Após a resolução do **exercício 24**, é interessante questionar os alunos sobre qual posição teriam as mediatrizes de $\overline{AB}$ e de $\overline{BC}$ caso os pontos A, B e C estivessem alinhados. Existiria o ponto M? Existiria uma circunferência passando por A, B e C? Peça que especulem e opinem sobre a frase “Uma reta é uma circunferência com raio de medida infinita”.

No **exercício 30**, os alunos deverão perceber que, se o triângulo retângulo está inscrito na circunferência que tem 10π cm de comprimento, então essa circunferência tem raio igual a: $\frac{10\pi}{2\pi} = 5$. Desse modo, uma possível resolução para esse exercício é a seguinte:

a) Considerando x a medida do cateto procurado, basta utilizar o teorema de Pitágoras para achar seu valor:
$10^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 75 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

b) A área desse triângulo será calculada por: $A = \frac{5\sqrt{3} \cdot 5}{2} \Rightarrow A = 12{,}5\sqrt{3}$

Pedir aos alunos que deixem registrada toda a resolução da atividade proposta na seção “Pense mais um pouco...” da **página 217**, incluindo explicações e os cálculos, para que possam comparar e discutir com outros colegas.

Uma possível explicação é a seguinte:

1. Se a diagonal do quadrado coincide com o diâmetro da circunferência (40 cm) e ℓ é a medida do lado desse quadrado, temos, pelo teorema de Pitágoras, que:
$40^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{800} \Rightarrow \ell = 20\sqrt{2}$

2. Se a base tem lado de medida igual a $\ell = 20\sqrt{2}$, então a área dessa base será calculada por:
$\ell^2 = \left(20\sqrt{2}\right)^2 = 400 \cdot 2 \Rightarrow \text{Área} = 800$

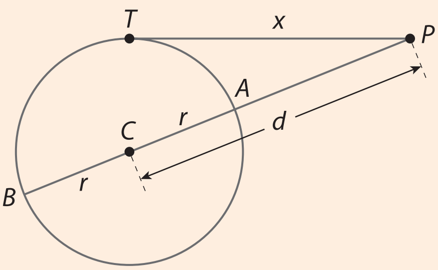
Caso ache adequado, pode pedir aos alunos que calculem também o volume de tal coluna em forma de paralelepípedo. Nesse caso, os alunos poderão dar valores para a altura dessa coluna ou apenas representá-la por uma letra.

Uma alternativa para complementar o **exercício 33** é questionar os alunos a respeito da necessidade da informação de que “os passos das duas garotas têm o mesmo comprimento”. Espera-se que observem que sem essa afirmação não seria possível estabelecer essas relações, pois não teríamos a garantia de tal proporcionalidade, já que cada medida estaria em uma unidade diferente.

Pode-se aproveitar o contexto do **exercício complementar 6** para pedir aos alunos que façam uma pesquisa sobre como Eratóstenes fez para calcular a circunferência terrestre. Para a apresentação da pesquisa pode-se propor aos alunos que dramatizem a situação. Como os raios solares são paralelos, os raios que ligam as extremidades de um arco de 800 km ao centro da Terra formam um ângulo de 7,2°. Essa medida equivale à quinquagésima parte da circunferência, logo a circunferência terrestre é igual a 50 vezes 800 km, ou seja, 40.000 km.

Após a resolução do **exercício complementar 7**, avaliar a conveniência de aprofundar a abordagem da questão proposta relacionando a medida x do segmento tangente com a distância d do ponto exterior P ao centro C e com o raio r.

Veja a figura e o cálculo de x:



ADILSON SECCO

$PT = x$; $PC = d$

$PA = d - r$

$PB = d + r$

$(PT)^2 = (PA) \cdot (PB)$

$x^2 = (d - r) \cdot (d + r)$

$x^2 = d^2 - r^2$

$x = \sqrt{d^2 - r^2}$

Substituindo r e d pelos dados do problema:

$r = 3$ cm e $d = 8$ cm

$x = \sqrt{8^2 - 3^2}$

$x = \sqrt{55}$

Assim, temos que a medida do segmento tangente é de $\sqrt{55}$.

CAPÍTULO 9

Polígonos regulares e áreas

Objetivos do capítulo

Levar o aluno a:

- Reconhecer e utilizar os elementos e as relações métricas nos polígonos regulares.
- Resolver problemas que envolvam a área de um polígono regular.
- Resolver problemas que envolvam a área de um círculo, de uma coroa circular e de um setor circular.

Orientações gerais do capítulo

Ao iniciar esse capítulo, conversar com os alunos sobre os padrões geométricos que são diretamente observáveis na flora, na fauna e em diversos fenômenos naturais. Os favos hexagonais de uma colmeia, as espirais encontradas nas conchas de moluscos e na flor do girassol, as formas irregulares da teia de aranha e da casca do abacaxi, as simetrias que se observam nas borboletas, corujas e algumas plantas, são exemplos de padrões geométricos. Além disso, falar que esses padrões geométricos também são muito utilizados nas artes plásticas.

Pode-se dividir a classe em dois grupos e pedir que um grupo faça uma pesquisa sobre os padrões geométricos encontrados na natureza, e o outro grupo, uma pesquisa sobre os padrões encontrados nas artes plásticas. Peça que exponham imagens desses diferentes padrões em um mural. A exposição também pode ser feita por meio de algum *software* de apresentação, usando um projetor multimídia, se houver à disposição na escola.

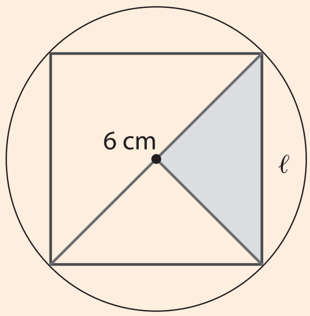
No **exercício 6**, vale destacar aos alunos que observem que, quanto maior o número de lados de um polígono, menor será a medida de seu ângulo central.

Nesse caso, tem-se um polígono regular de 12 lados, logo, para encontrar a medida de seu ângulo central, pode-se fazer: $a_c = \dfrac{360°}{12} \Rightarrow a_c = 30°$.

O **exercício 10** é o tipo de atividade procedimental, como outras desta coleção, em que os alunos, com base nos conceitos adquiridos, resolvem em grupo alguns itens cuidadosamente dirigidos para levá-los a construir um novo conhecimento.

No **exercício 11**, os alunos terão a oportunidade de construir de modos diferentes o mesmo polígono. Essa é uma boa oportunidade de conversar sobre a possibilidade de usar diferentes estratégias para a resolução de problemas.

Para que os alunos visualizem melhor o **exercício 12**, é importante que façam um esboço da construção. Um possível esboço seria:



NELSON MATSUDA

Chamando de ℓ o lado desse quadrado e sabendo que sua diagonal mede 6 cm, podemos considerar um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e a hipotenusa mede ℓ. Assim, temos:

$\ell^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow \ell = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}2$

O apótema será a metade da medida do raio, ou seja, $a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

No **exercício 18**, o aluno deve observar que o diâmetro da circunferência em que o hexágono está inscrito é igual a 60 cm, ou seja, seu raio é de 30 cm. A partir daí, os cálculos podem ser feitos usando as relações já conhecidas:

$\ell = r = 30$ cm

Esse hexágono pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros com lados de medidas iguais a 30 cm, ou seja, cada um desses triângulos tem a altura de medida h, que pode ser calculada da seguinte maneira:

$30^2 = h^2 + 15^2$

$h^2 = 675$

$h = \sqrt{675}$

Logo, a área de cada um desses triângulos é dada por:

$$Área_{triângulo} = \frac{30 \cdot \sqrt{675}}{2} = 15\sqrt{675}$$

Desse modo, a área do hexágono regular será:

$$Área_{hexágono} = 6 \cdot Área_{triângulo} = 6 \cdot 15\sqrt{675} = 1.350\sqrt{3}$$

É interessante que os alunos expliquem como conseguiram encontrar a resposta do **exercício 21** a partir da medida da menor diagonal do hexágono. Espera-se que eles expliquem algo como: “a medida da menor diagonal é o dobro da medida do apótema”. E, então, poderão calcular o perímetro desse hexágono da seguinte maneira:

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad 2a = 12\sqrt{3}$$

Usando essas duas igualdades, tem-se:

$$\frac{12\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 12$$

Como no hexágono regular, a medida do lado é igual à medida do raio da circunferência que o circunscreve, então o lado mede 12 cm e o perímetro é igual a 72 cm.

Amplie o **exercício 27** pedindo aos alunos que calculem a área de outras partes desse mesmo cartaz, usando, quando necessário, letras no lugar de números, mas sempre relacionando com as medidas já conhecidas.

Após a resolução dos **exercícios 44 e 45**, pode-se solicitar aos alunos que, usando régua e compasso, criem os seus próprios desenhos, utilizando circunferências e polígonos regulares. Não é necessário que elaborem problemas nem que façam cálculos, apenas utilizem seus conhecimentos para criar formas.

Aproveite a atividade proposta na seção “Pense mais um pouco...” da **página 243** para pedir aos alunos que expliquem aos demais colegas como escolheram as figuras congruentes e como realizaram os cálculos de áreas a partir dos dados fornecidos.

Antes da resolução da atividade proposta na seção “Pense mais um pouco...” da **página 247**, solicitar aos alunos que estimem qual área é maior, a da parte verde ou a da parte amarela. E que, depois de resolverem, verifiquem a sua estimativa.

Aproveite o contexto do **exercício complementar 10** para solicitar aos alunos que busquem em sua cidade ou outros locais que conheçam, os padrões existentes em calçadas e como é possível realizar cálculos de áreas envolvendo esses desenhos.

No **exercício complementar 11**, assim como em outros que pedem o cálculo da área de parte de um mosaico, seria interessante discutir com os alunos a possibilidade de, mentalmente, reunir as porções que constituem essa parte e, feito isso, compararem a parte composta com o todo. Nesse exercício, tal procedimento leva o aluno a perceber que a área da superfície pintada de vermelho corresponde à metade do círculo.

No **exercício complementar 15**, basta os alunos visualizarem que o raio da circunferência é, na verdade, metade da medida do lado desse quadrado. Vale ampliar as discussões para questões de aumento ou diminuição da área desse quadrado e dessa circunferência à medida que variamos as medidas do lado e do raio, respectivamente.

Pode-se complementar o **exercício complementar 16** pedindo aos alunos que pesquisem sobre profissionais que utilizam esse instrumento (ou até de outros) e quais suas principais utilidades, tendo sempre em vista sua forma e suas características.

ISBN 978-85-16-09988-6